Sonderdrucke aus der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

ULRICH REBSTOCK

Angewandtes Rechnen in der islamischen Welt und dessen Einflüsse auf die abendländische Rechenkunst

Überarbeitete Fassung (Freiburg, 2003) des Originalbeitrages, erschienen in:
Kommunikation zwischen Orient und Okzident. Alltag und Sachkultur. Wien, 1994. (Österreichische Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-Historische Klasse, Sitzungsberichte, 19. Band),
S. 91-115.

Angewandtes Rechnen in der islamischen Welt und dessen Einflüsse auf die abendländische Rechenkunst

von ULRICH REBSTOCK

In der ältesten mathematischen Aufgabensammlung in lateinischer Sprache, den anonymen *Propositiones ad acuendos juvenes*, wird von einem Mann berichtet, der 100 Tiere, Kamele, Esel und Schafe aus dem Orient zu verschiedenen Stückpreisen kaufte. Herausgefunden werden soll die Zusammensetzung der Herde bei einem Gesamtpreis von 100 SOLIDI.[1]

Diese Aufgabe riecht geradezu nach Orient. Sie tut es um so mehr, als man ihr in einer anderen Einkleidung, aber mit denselben Zahlenwerten, in den *Ṭarāʾif al-ḥisāb*, den 'Seltenheiten des Rechnens', von Abū Kāmil Šuǧāʿ b. Aslam Ende des 9. Jahrhunderts in Ägypten begegnet.[2]

Läßt man aber einmal die Nase aus dem Spiel, dann entpuppt sich dieser scheinbar offenkundige und früheste Anhaltspunkt für die Ausstrahlung des arabischen Rechnens auf das Abendland als Paradigma für die Komplexität und Vielschichtigkeit meines Themas.

---

[1] M. Folkerts, Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen »*Propositiones* ad acuendos iuvenes«. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition. (Österr. Akad. d. Wiss., Mathem.-Naturwiss. Klasse, Denkschriften, 116. Band, 6. Abh.) Wien 1978, (Nr. 39) 68.

[2] Zur Person des Abū Kāmil (ca. 850–930), s. G.P. Matvievskaja und B.A. Rozenfeld, Matematiki i Astronomi Musulmanskogo Srednevekovja i ix Trudi (VIII-XVII vek.) [= *MM*], I-III, Moskau 1982, II (Nr. 81) 112 und ʿA.Anbūba, Un Algébraiste arabe: Abū Kāmil Šuǧāʿ b. Aslam, in: *Horizons Techniques du Moyen-Orient*, Beirut Nr.2 (1962), passim; die *Ṭarāʾif* wurden übersetzt und kommentiert von H. Suter, in: H. Suter, *Beiträge* zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam, I-II, Frankfurt 1986, II 100–112; eine Faksimile-Edition ist zu finden bei A.S. Saʿīdān, *Ṭarāʾif al-ḥisāb li-Abī Kāmil Šuǧāʿ b. Aslam al-Miṣrī*, [Einleitung, Faksimile-Edition und Kommentar], in: *Maǧallat Maʿhad al-Maḫṭūṭāt al-ʿArabīya* 9.1 (1963) 294–310; die Aufgabe ist auf S. 295/3ff gestellt.

Die zuletzt von Menso Folkerts[3] gezeigte Bereitschaft, die 'Propositiones' Alkuin, zumindest aber dem karolingischen Hofmilieu um 800 zuzuschreiben, eröffnet ein historisches Problem. Denn akzeptiert man die unausgesprochene Arbeitshypothese von Folkerts – Alkuins Zusammenstellung der *Propositiones* in einem Brief an Karl den Großen und das Zusammentreffen des Kaisers mit Boten Arons, des ʿabbāsidischen Kalifen Hārūn ar-Rašīd in Ravenna[4], oder auch die Kurt Vogels[5] eines regen diplomatischen Austausches zwischen Aachen und Byzanz – dann ist die Überlieferungsbrücke von Osten nach Westen geschlagen. Aus chronologischen Gründen müßte sie aber in umgekehrter Richtung überquert werden worden sein.

Folkerts ließ diesen Widerspruch auf sich beruhen. Vogel versuchte ihn zu lösen, indem er diese Aufgabe Nr. 39 zum Anlaß nahm, seine frühere Ansicht, Alkuin sei Autor der *Propositiones*, revidierte und ihre Entstehung auf die Insel Reichenau um die Jahrtausendwende verlegte.[6] Damit würde die Richtung wieder stimmen, zumal sich der früheste Beleg für Nr. 39 in einer um diese Zeit geschriebenen Handschrift des Vatikan findet.[7] Doch auch diese Lösung läßt sich mit ihren eigenen Mitteln in Zweifel ziehen. Denn der einzige weitere Hinweis auf ihre orientalische Herkunft, eine zweite 'Kamel'-Aufgabe unter dern Nr. 52, gehört – nun wieder nach Folkerts – bereits zur ersten Redaktionsstufe der *Propositiones* und ist schon in einer Handschrift des ausgehenden 9. Jahrhunderts enthalten.[8]

[3] Propositiones 3.
[4] Propositiones 30–31; skeptisch N.A. Daniel, The Arabs and Medieval Europe, London 1975, 50.
[5] K. Vogel, *Byzanz*, ein Mittler – auch in der Mathematik – zwischen Ost und West. Hrsg. von M. Folkerts, in: K. Vogel, *Kleinere Schriften* zur Geschichte der Mathematik, I-II, Wiesbaden 1988, I 574–592, 36–37.
[6] H. Hunger/K. Vogel, Ein byzantinisches *Rechenbuch* des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonesis Phil. Gr. 65. Text, Übersetzung und Kommentar. Wien 1963, 98; Revision von K. Vogel, Die *Practica* des Algorismus Ratisbonensis. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters St. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nach den Handschriften der Münchner Staatsbibliothek und der Stiftsbibliothek St. Florian. Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel. (Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte.50) München 1954, 222.
[7] Vat. Ottobonn. Lat. 1473, f. 28r–35v, s. Folkerts, Propositiones 17.
[8] Vat. Regen. Lat. 309, f. 16rv. 3v–4r, s. Folkerts, Propositiones 17, 74.

Aus dem Blickwinkel der historisch-philologischen Methode könnte man nun erneut zu einer Richtungsänderung kommen, ohne jedoch einen schlüssigen Ausweg aus den chronologischen Unsicherheiten gefunden zu haben.

Mit der Aufgabe Nr. 39 der *Propositiones* ist der Geschichte des Einflußes der arabischen Mathematik auf das Abendland ein Problem in die Wiege gelegt, das sie nicht mehr los wurde. Bis ins 17. Jahrhundert hinein bleibt – abgesehen von der eigentümlichen Charakteristik der Ḫuwārizmī-Tradition – die Herkunft des arabischen mathematischen Wissens in Dunkel gehüllt.

Auch die Quellen des 'Liber abaci' von Leonardo von Pisa, dessen Publikation 1202 und 1228 die Entwicklung der europäischen Mathematik so entscheidend beeinflußt hat, sind größtenteils unbekannt geblieben. Er war, wie er selber sagt, bei Meistern aus dem tunesischen Bougie in die Lehre gegangen.[9] Und das Wenige, das von dem Lehrstoff bekannt ist, stiftet nur Verwirrung. Denn Leonardo schöpfte nicht – was angesichts seines Zusammentreffens mit den gelehrten Kreisen um Friedrich II. 1226 in Pisa durchaus nicht unmöglich gewesen sein muß – aus den fortgeschrittenen Leistungen der islamischen Mathematiker des 12. Jh., wie etwa ʿUmar Ḫayyām und aṭ-Ṭūsī, oder noch vor ihnen al-Karağī und Abū Manṣūr al-Baġdādī, sondern aus den überholten Werken der Gründerväter al-Ḫuwārizmī und Abū Kāmil.[10]
Die Herkunft Fibonaccis 'Practica geometriae' kann man dagegen ein gutes Stück zurückverfolgen. Als Bearbeitung des *Chibbur ha-meschika ve ha-tischboreth* von Abrahām bar Chiyya ha-Nasī, auch Savasorda, d.h. *ṣāḥib aš-šurṭa*, Polizeioberst, aus Barcelona genannt, reicht sie ins Jahr 1116 zurück. Plato von Tivoli hatte sie, gut 30 Jahre vor den Übertragungen des Adelard von Barth und Gerhard von Cremona, aus dem Hebräischen als 'Liber embadorum' ins Lateinische übersetzt, dabei aber die Einleitung und den Epilog weggelassen.[11] Wie hier eine Mahnung an fran-

---

[9] Liber abaci (Ed. B. Boncompagni), Rom 1857, 1.

[10] R. Rashed, Fibonacci et les mathématiques Arabes (unver. Vortragsmanuskript 1990), 4ff.

[11] M. Curtze, *Urkunden* zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. Herausgegeben von Maximilian Curtze. Erster und Zweiter Theil. (Abhandlung zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. XIII), Leipzig 1902, I 4–6. Høyrup (J. Høyrup, *Sub-scientific* mathematics: Undercurrents

zösische Juden, ihre Rechnungen richtig auszuführen, dem religiösen Feingefühl des Übersetzers zum Opfer fiel, mögen an anderen Stellen kulturelle Unverträglichkeiten in Stil und Inhalt zu Kürzungen geführt haben. So sind die Erbteilungsaufgaben in der 'Algebra' des Ḫuwārizmī, mehr als die Hälfte des ganzen Werks, erstmals 1831 von Frederic Rosen vollständig aus dem Arabischen wiedergegeben worden.

Im 15. und 16. Jh. war die Unkenntnis – auch als Folge der deprimierenden Kreuzzugserfahrungen und der drohenden Türkenkriege – noch größer geworden. In den süddeutschen Rechenbüchern wird längst verfremdetes Wissen reaktiviert. Man weiß noch, daß es von den Arabern stammt, »dicit Arabs« heißt es dann,[12] ein anonymer Autor 'Initius Algebras' referiert die Algebra aus dem Koran von Muḥammad[13] und '*al-ǧabr*' kann gar zu seinem Geburtsort 'Ǧabrīn' entstell werden. entstellt werden.[14]

Kurz gesagt – die mathematischen Quellen des Mittelalters sind hinsichtlich ihrer orientalischen Herkunft das Ergebnis einer überwiegend anonymen Rezeption. In die Kommunikationssprache übersetzt bedeutet dieser Sachverhalt eine Störung der Nachrichtenübermittlung. Ihre Entschlüsselung durch den Empfänger, wie auch die historische Rekonstruktion derselben muß bruchstückhaft und entstellt bleiben, solange Sender und Code unbekannt sind. Die immense Editionstätigkeit der arabischen Mathmatikhistoriker Aḥmad Saʿīdān, Aḥmad Ǧabbār und Rušdī Rāšid während der letzten drei Jahrzehnte hat diese Störung einerseits in ihrem ganzen Ausmaß aufgedeckt. Andererseits hat sie dazu beigetragen, die Eigenständigkeit der Entwicklung der arabischen Mathematik und ihre verzögerte, kurzfristige und selektive Rezeption durch die abendländische Mathematik herauszuarbeiten.

---

and missing links in the mathematical technology of the Hellenistic and Roman World. (Filosofi og Videnskabs-Teori på Roskilde Universitetscenter 1990, Nr. 3), 37) vermutet, daß das arabische Original des *Liber embadorum* von Abū Bakr, 1145 von Gerhard übersetzt, schon um 800 abgefaßt wurde.

12 S. dazu W. Kaunzner, Über einige algebraische Abschnitte aus der Wiener Handschrift Nr. 5277, Wien 1972, 171 = Cod. Vind. Pal. 5277, fol. 381r.

13 M. Curtze, Urkunden, II 449.

14 K. Vogel, Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481. Nach einer Handschrift C 80 Dresdensis. Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel. München 1981, 13 = MS Dresden C 80, fol. 368r.

In ganz besonderem Maße trifft diese Kommunikationsstörung aber auf den Bereich zu, mit dem diese Historiker und ihre europäischen Vorgänger sich gar nicht, oder nur am Rande beschäftigt haben: mit einer Gattung arabischer und persischer mathematischer Literatur, die Ende des 9. Jahrhunderts im islamischen Orient erstmals greifbar wird und sich ab dem 11. Jahrhundert raumgreifend zu einem festen Bestandteil des islamischen Bildungscurriculums entwickelt. Der bibliographische Befund dieser Literatur, die ich, in Anlehnung an ihr häufigstes Titelelement pars pro toto *ḥisāb*-Literatur nennen möchte, weist sie als vollwertiges Mitglied im islamischen Schrifttum aus. Als *ʿilm al-ḥisāb* wird sie – anders als die propädeutischen Disziplinen – im Zug der fundamentalistischen Tendenzen im 11. Jahrhundert als 'arabische' Wissenschaft internalisiert und an der Niẓāmīya in Baġdād und anderen Medressen der islamischen Welt studiert und gelehrt.[15] Die Integration der Arithmetik, die sich dahinter verbirgt, und ihre Umformung in die islamische 'Wissenschaft des Rechnens' waren Teil eines kulturellen Prozesses, der weit über die Arithmetik hinaus – von der Astronomie bis zur 'weißen Magie' – die mathematischen Disziplinen zum Nutzen der islamischen Gemeinschaft domestizierte.

Die Originalität dieses Integrationsprozesses läßt sich an der Vielfältigkeit der Schriften zum *ḥisāb* ablesen. Auch nach der frühen Standardisierung durch das 'Handbuch der Sekretäre' von Abū l-Wafāʾ al-Būzǧānī im letzten Viertel des 10. Jahrhunderts blieb die Entwicklung lebendig. Die juristische Disziplin *ʿilm al-farāʾiḍ*, die Wissenschaft der islamischen Erbteilung, wurde arithmetisiert und dem *ḥisāb* im Wissenschaftsbetrieb zur Seite gestellt. Desgleichen wurde der Geometrie mit *ʿilm al-misāḥa*, der Wissenschaft der Ausmessung, ein praktischer Zweig zugeteilt. In den Handbüchern zur Marktaufsicht, zur Zoll- und Steuerverwaltung, selbst in juristischen Codici tauchen ab dem 11. Jahrhundert einleitende Kapitel zu den Grundregeln der Arithmetik, Geometrie und Algebra auf.

---

[15] M. Fakhry, The Liberal Arts in the Medieval Arabic Tradition from the Seventh to the Twelfth Centuries, in: *Arts libéraux et philosophie au Moyen Age.* Actes du Quatrième Congrès International de Philosophie Médiévale, 27 Août–2 Septembre, Montréal-Paris (1969) 91–97, 91f.; J. Høyrup, The *Formation* of »Islamic Mathematics«. Sources and Conditions, in: *Science in Context* 1:2 (1987) 281–329, 304).

Dabei lassen sich den Schriften zum *ḥisāb* – bei aller Verschiedenheit und disziplinärer Verzweigung – typische Merkmale abgewinnen. Ab dem 12. Jahrhundert festigt sich die Tendenz, die Gebiete der Mathematik, die für den Alltag von Nutzen sein können, umfassend in vier oder fünf Kapiteln darzustellen. Die Zahlenlehre gehört als Grundstein dazu, dann die Erklärung der arithmetischen Grundoperationen für Ganze, Brüche, mitunter auch sexagesimale Brüche, weiter planimetrische und stereometrische Berechnungsmethoden, eine Einführung in elementare Algebra mit Gleichungsbeispielen zweiten Grades und zuletzt ergötzliche Seltenheiten, Unterhaltungsmathematik also unterschiedlichster Art.

Ein zweites Merkmal ist in der spezifischen Bearbeitung des Stoffes enthalten. Sie entbehrt jeglicher Beweisführung, demonstriert nur das procedere, um nachahmende Beherrschung zu erzeugen. Variierte Repetitionen an Alltagsproblemen machen ihren Nutzeffekt sinnfällig. Kurzum – Rechenoperationen werden in plausibler Einkleidung eingeübt. Fast alle Traktate enthalten auch einen Hinweis auf die Addressaten: wißbegierige Studenten (*ṭullāb*), Sekretäre (*kuttāb*) und Verwaltungsbeamte (*ʿummāl*). Ibn al-Haiṯam hat in seinem kleinen Traktat *Ḥisāb al-muʿāmalāt* – mit derselben Bezeichnung klassifizieren die arabischen Literaturgeschichten die *ḥisāb*-Literatur genauer – Zweck und Zielrichtung des vermittelten Wissens treffend beschrieben:[16]

> »Die Arithmetik (*ʿilm al-ḥisāb*) ist in viele Arten unterteilt, von denen jede einen speziellen Bereich umfasst. Der Art, die *muʿāmalāt* genannt wird, kann man sich leicht nähern. Sie zu beherrschen, ist einfach. Der Bedarf nach ihr ist allgemein und man benötigt sie überall (...). Denn das Volk ist bei seinen Berechnungen zwingend auf sie angewiesen (*muḍṭarr*). Die *muʿāmalāt* gründen auf den 'do ut des'-Beziehungen (*muʿāwaḍāt*), die durch diese Fertigkeit (*ṣināʿa*) quantifiziert werden (...). Das Bedürfnis nach ihr ist natürlich, und derjenige, der sie nicht kennt, ist wie einer, der einen seiner Sinne verloren hat, durch die er sein Leben aufrechterhält.«

> »Die Grundlagen der Fertigkeit, die *ḥisāb al-muʿmalāt* genannt wird, ist dreigeteilt: die Proportion, die Multiplikation und die Division. Jeder einzelne Teil soll separat erläutert werden. Anhand einer reichlichen

[16] Ibn al-Haiṯam, *al-Qaul al-maʿrūf fī ḥisāb al-muʿāmalāt*, Berlin, MS Staatsbibliothek-Ost, MO 2970 fol. 178b–186b, fol. 178b/2–15.

Anzahl von *muʿāmalāt*-Aufgaben soll dabei erklärt werden, wie er angewendet wird.«

Von diesen Worten Ibn al-Haiṯam's fehlt nur ein kleiner Schritt zu der Schlüsselfrage nach der Funktion dieser *ḥisāb*– oder *muʿāmalāt*-Literatur. War sie wissenschaftlich innovativ? Griff sie – aufbauend auf die Überzeugungskraft der Vernunft – in soziale Prozesse ein, um zwischenmenschliche Beziehungen überprüfbar, mithin objektiver zu machen? War sie geeignet – über welche Wege und Kanäle auch immer – in Wort oder Geist befruchtend auf die Entwicklung der Rechenkunst im Abendland zu wirken?

Die Beantwortung dieser Fragen führt zuerst wieder zurück zu Aufgabe Nr. 39 der 'Propositiones'. Die Aufgabe eröffnet ein strukturelles Problem. Sie ist dort – wie die meisten anderen linearen Probleme mit mehreren Unbekannten – ohne Erläuterung gelöst. Abū Kāmil dagegen nahm sich ihrer und ihrer Varianten auf systematische Weise an. Er begnügte sich nicht mit der Art der Gelehrten und Ungelehrten, die »mit einer ungenauen, nur vermutungsweisen Antwort antworten und darin weder ein Prinzip noch eine Regel erkennen«,[17] sondern liefert genau diese auf wissenschaftliche Art. Auch der Inder Bhaskara ging sie um 1150 auf diese Weise an und Fibonacci übernahm seine Lösungsmethode wahrscheinlich direkt von Abū Kāmil.[18] Die *ḥisāb*-Autoren aṣ-Ṣardafī, al-Baġdādī und al-Hāmilī dagegen begnügten sich wieder mit einer mehr oder weniger erschöpfenden Angabe der Lösungsreihen. Ganz ähnlich, wenn auch weniger gründlich, verfahren die deutschen Rechenmeister im 15. und 16. Jahrhundert.

Aufgaben dieses Typs werden gemeinhin als Unterhaltungsmathematik bezeichnet. Sie haben Laien und Experten gereizt, Grips und Scharfsinn zu

---

[17] Suter, Beiträge, II 348; Abū Kāmil, *Ṭarāʾif al-ḥisāb*. [Einleitung, Faksimile-Edition und Kommentar von] Aḥmad S. Saʿīdān, in: *Maǧallat Maʿhad al-Maḫṭūṭāt al-ʿArabīya*, 9.2 (1963) 291–320, 294/4f. Vgl. auch Abū Kāmil, Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst (*Ṭarāʾif al-ḥisāb*) von Abū Kāmil al-Miṣrī. [Übersetzt und mit Kommentar versehen von H. Suter], in: H. Suter, *Beiträge*, II 358–368.

[18] Zu den Belegen s. Suter, Beiträge, II 362 und J. Tropfke/K. Vogel et al., Geschichte der Elementarmathematik, (4. Auflage) Band 1: Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmuth Gericke. W. de Gruyler, Berlin und New York 1980, 614–616.

zeigen. Für sie gab es überall Platz, in der *Anthologia graeca*,[19] in den frühen chinesischen Rechenbüchern und natürlich auch in den *ḥisāb*-Schriften. Im frühen 19. Jahrhundert beschäftigte das lieare Problem mit den hundert Mädchen – allerdings in Gestalt von Kamelen – westsaharische Beduinen nicht anders als die Cossisten von Regensburg und St. Emmeran oder den Byzantiner Metrodorus tausend Jahre zuvor.

Über die Geschichte ihrer Herkunft und Verbreitung ist viel geschrieben worden. Es soll uns hier aber nur der Aspekt ihrer Funktion interessieren. Dazu hat Kurt Vogel 1954 in der Edition des 'Algorismus Ratisbonensis' eine sinnvolle Differenzierung vorgenommen. So unterscheidet er praktische Aufgaben des häuslichen und beruflichen Alltagslebens von Phantasieaufgaben, die sich als unverwüstliche Inventarstücke der mathematischen Rätselliteratur durch alle Zeiten hindurch erhalten haben, und beide von solchen Aufgaben, die der reinen Arithmetik, Zahlentheorie und der Kombinatorik zuzuordnen sind.[20]
Der dänische Mathematikhistoriker Jens Høyrup hat nun seit 1986 in einer Reihe von Aufsätzen begonnen, diese typologische Unterscheidung zu vertiefen. Seine methodische Durchforstung der griechischen, orientalischen und fernöstlichen Mathematik geschieht in der Absicht, 'reine' von 'angewandter' Mathematik zu scheiden und die beiden Entwicklungsstränge herauszuschälen. 'Rein' und 'angewandt' sind dabei nicht einfach Synonyme für das Begriffspaar 'theoretisch' und 'praktisch'. Denn neben der Spezifik der Trägergruppe wird die Orientation des Wissens zum wesentlichen Unterscheidungskriterium, nämlich der Zweck der Aneignung des Wissens, seine Bewahrung und der Modus seiner Weitergabe. Um für die weiteren Überlegungen eine Verständnisgrundlage herzustellen, möchte ich aus dem Verlauf von Høyrups Analyse zwei wesentliche Ergebnisse herausgreifen.[21]

Als 'griechisches' Wunder bezeichnet Høyrup die Herausbildung einer 'wissenschaftlichen' Mathmatik, die – getragen von einer isolierten Trägergruppe – problemorientiert und zum Selbstzweck, jenseits von Alltagswissen und -bedarf eine autonome Wissenschaftstradition in Gang setzte.

---

[19] The Greek Anthology, with an English Introduction by W.R. Paton, Vol. V, Cambridge/Mass. 1953, Book XIV 25–107.

[20] Vogel, Practica 155–156.

[21] Die Argumentation Høyrup's ist über zwei Aufsätze verteilt: J. Høyrup, Formation, passim und ders., Sub-Scientific, passim.

Als 'islamisches' Wunder dagegen erscheint ihm die Infusion dieser von den Arabern rezipierten 'wissenschaftlichen Mathematik' in die überall existente 'sub-scientific mathematics' – und dazu gehören auch die drei Vogel'schen Kategorien der Unterhaltungsmathematik –, also die Synthese beider Typen zu einer Mathematik, der Wesenszüge eigen waren, die sie von allen vorausgegangenen unterscheidet und zugleich der vormodernen Wissenschaft ähnlich macht. Der prototypische islamische Mathematiker gab sich nicht damit zufrieden, praktische Bedarfsmathematik zu treiben. Er ging über diese hinaus und suchte nach Höherem, nach Prinzipien, Beweisen und Theorien. Ebensowenig konnte er sich aber damit zufrieden geben, daß Theorien, wie abstrakt sie auch sein mögen, ungenutzt blieben, oder daß die Reinheit der Mathematik durch den möglichen Kontakt mit Alltagsproblemen befleckt würde. Die Art und Weise, wie Abū Kāmil die 100 Vögel-Aufgabe löste und Ibn al-Haiṯam sein *muʿāmalāt*-Traktat konzipierte, macht diesen Prototyp des islamischen Mathematiker lebendig und zeigt zugleich beispielhaft, wie die strikte griechische Trennung zwischen theoretischer und praktischer Mathematik im islamischen Milieu überwunden wird.

Es war vor allem der *ḥisāb*, der von der offenen Beziehung zwischen problem- und praxisorientierten Konzepten profitierte. Er bekam dadurch sozusagen seinen professionellen Schliff und die Mathematik zugleich einen 'Sitz im Leben'.

Als der Damaszener al-Uqlīdisī um 900 seine 'Arithmetik mit der Technik der Inder' schrieb, tat er das zwar,

> »um den versierten Gelehrten etwas zu produzieren, welches sie – sollten sie es lesen [diese Befürchtung ist also keineswegs neu!] – besser als ihre Arbeitsweise finden würden, klarer, detaillierter und nützlicher.«

Doch präzisiert er gleich im Anschluß, wer davon Nutzen haben soll.

> »Die meisten Sekretäre werden es benützen müssen, denn es ist einfach, schnell und benötigt wenig Umsicht und Zeit, um zum Ergebnis zu gelangen. Er muß sich nicht auf das konzentrieren, was er mit seine Händen tut, so daß er, wenn er redet, seiner Arbeit nicht schadet, und wenn er sie verläßt und sich mit etwas anderem beschäftigt und dann zurückkehrt, wird er sie wieder so vorfinden und mit ihr fortfahren können.«[22]

[22] Abū al-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī, The Arithmetic of Al-Uqlīdisī.

Noch deutlicher faßt Abū l-Wafāʾ al-Būzǧānī die Ausrichtung seines 'Rechenbuches für Sekretäre' in einer programmatischen Erklärung zusammen:

»Wir beschreiten in diesem Buch denselben Weg, wie in den beiden vorausgegangenen: kurz und bündig zu bleiben, das Einfache dem Schwierigen voranzuschicken und das Entferntliegende dem Näherliegenden hintanzustellen.«

»Den Anfang bildet die Erklärung der Begriffe, der Namen und der [verschidenen] Ellen, die die Sekretäre, Beamten und Geodäten und die Wechsler zu unserer Zeit bei ihren Geschäftsbeziehungen (*muʿāmalātihim*) mit dem Staat verwenden (...).«

»Danach werde ich die Grundlagen erwähnen, auf die man sich bei der Vermessung von Dreiecken stützt, welcher Art und Form sie auch sein mögen, und das, was die Ellenmesser (*ḏurrāʿ*) und 'Teiler' (*qussām*) bei der Ausmessung von Ländereien und der Verteilung von Grundstücken anwenden müssen. [Dies geschieht], um dadurch das Übel, das sich die Geometer unserer Zeit in den Regierungsbüchern zuschulden kommen lassen, und ihre Methode der Teilung von Liegenschaften zu verdeutlichen bei den Verkäufen und Käufen, die über die Rechnungsbücher der Richter getätigt werden.«

»Denn ich meine, daß sie dabei allesamt vom richtigen und wahren Weg weit entfernt sind. Häufig wenden sie bei ihren Berechnungen und Messungen Dinge zum Nachteil des Staates oder unter Schädigung seiner Partner an. Sie sind nachlässig bei ihrer Arbeit und durchdringen sie nicht wegen ihrer Unkenntnis der Grundlagen des Verfahrens.«[23]

Auf diese Weise wird in die *ḥisāb*-Literatur das Rechnen mit Ziffern und Stellen und die elaborierte Bruchrechnungstechnik von al-Būzǧānī eingespeist. Ich habe in meinem Buch 'Rechnen im islamischen Orient' eine ganze Reihe von Bereichen zusammengestellt, in denen die vom *ḥisāb* entwickelte Elementarmathematik zum Einsatz kommt. Es handelt sich

---

The Story of Hindu-Arabic Arithmetic as told in *Kitāb al-Fuṣūl fī al-Ḥisāb al-Hindī*. Translated and annotated by A.S. Saidan, Dordrecht-Boston 1978, 35 (meine Übersetzung).

23 Abū l-Wafāʾ al-Būzǧānī, *Kitāb fī mā yaḥtāǧ ilaihi al-kuttāb wa l-ʿummāl wa-ġairuhum min ʿilm al-ḥisāb* [Ed. Aḥmad S. Saʿīdān]. ʿAmmān 1971, 202 (meine Übersetzung).

dabei um den rechnerischen Umgang mit Maßeinheiten, um Preis- und Lohnberechnungen, um Münz- und Währungsrechnen, um die Berechnung von Kapitalien und Steuern, um die Ausmessung von Flächen und Körpern, ums Erbrechnen und – natürlich – um Unterhaltungsmathematik der Kategorien zwei und drei von Kurt Vogel.[24]

Høyrup, dessen These ich mir als Ausgangspunkt zunutze gemacht habe, arbeitete nur mit übersetzten Quellen. Die *muʿāmalāt*-Texte waren ihm nicht zugänglich. Bis heute ist noch keines dieser Rechenbücher, die ab dem 12. Jahrhundert zu einem literarischen Genre arrivieren, in einer europäischen Sprache vollständig zugänglich gemacht. Ihre beiden wesentlichen Eigenschaften waren ihre persönliche und inhaltliche Verbindung zur sogenannten theoretischen Mathematik und ihre Standardisierung eines methodischen und inhaltlichen Instrumentariums, welches den Bedürfnissen der islamisch-mittelalterlichen Gesellschaft angepaßt war, welches gelehrt, gelesen und wahrscheinlich – aber da verlassen uns die Quellen weitgehend – auch benützt wurde.

Zur Anonymität der Sender gesellt sich also mit der unverwechselbaren islamischen Charakteristik des *ḥisāb* ein weiterer Gesichtspunkt, der die Identifikation arabischer Spuren in der abendländischen Rechenpraxis erschwert. Denn es gibt – mit vielleicht einer Ausnahme, auf die ich noch zu sprechen komme – keinen einzigen *ḥisāb*– oder *muʿāmalāt*-Text, der im Mittelalter in eine europäische Sprache übersetzt worden wäre. Wenden wir uns deshalb ganz dem Empfänger zu, um nach Anhaltspunkten dafür zu suchen, wie er mit den Kenntnissen und Techniken seines Nachbarn in Kontakt gekommen sein könnte und unter welchen Bedingungen sie rezipiert und weiterbehandelt wurden.

Der mathematische Kenntnisstand des Abendlandes im 10. Jahrhundert ist durch den Gegensatz der beiden autonomen wissenschaftlichen und subwissenschaftlichen Traditionen geprägt. Antikes Wissen war nur dürftig, etwa über den Euklid-Kommentar von Boethius tradiert worden und in Mönchsstuben zu trockenem Bücherwissen erstarrt. Andererseits war mit den Epigrammen des 'Metrodorus', den *Propositiones*, der *Arithmetik* von Beda und dem *Corpus Agrimensorum* ein Stand erreicht, der die Bindungen und Ähnlichkeiten zu den im Orient zirkulierenden wissenschaftlichen Problemen und Methoden verdeutlicht. Die bis ins 11. Jahrhundert voll-

[24] U. Rebstock, *Rechnen* im islamischen Orient. Die literarischen Spuren der praktischen Rechenkunst. Darmstadt 1992, 250ff.

zogene islamische Synthese beider Typen und all ihrer verfügbaren Quellen mußte das lateinische Mittelalter völlig unerwartet treffen. Bezeichnenderweise war es gerade der Nutzeffekt der neuen Rechenmethoden, der die Rezeptionsbereitschaft der mönchischen Gelehrten einleitete.

Das Astrolab, die Ziffernnotation und die dezimalrechnenden *abacistae* revolutionierten die ecclesiastische Zeitrechnung, wenn auch nur schubweise und behindert durch kirchliche Einwände und traditionsbedingte Vorbehalte. Der '*computus*' war das Einfallstor der arabischen Mathematik ins Abendland. Schon im Jahre 984 hielt der Erzdiakon Senofredus Lupidus von Barcelona, der arabische Astrolabtraktate ins Katalanische übertrug, seinen Brüdern jenseits der Pyrenäen beschwörend vor, was arabische Wissenschaft im Leben tatkräftiger und nachdenklicher Christen ausrichten könnte:

> »Wer heutzutage Osterfest und Stundengebet zur rechten Zeit begehen und die Himmelszeichen für das kommende Weltende deuten wolle,« schrieb er »müsse das Astrolab gebrauchen. Abraham wußte darum und brachte Arithmetik und Astronomie zu den Ägyptern. Ptolemaios wußte es und erfand das Astrolab zum Nutzen aller astronomischer und geometrischer Studien. Wir Christen haben die Weisheit der Alten vergessen; Gott bringt sie uns durch die Araber wieder.«[25]

So drang die islamische Schreib- und Rechenweise in die Bücher der Computisten ein, wohl um zwei Jahrhunderte früher als in die bürgerliche Geldwirtschaft und das Finanzwesen. Dem 1143 in Salzburg verfaßten *Computus* war erstmals eine unbeholfene Einführung in den Algorismus vorangestellt, um eine Verständnisgrundlage zu schaffen für die Umstellung der Zeitrechnung auf indische Ziffern.[26] Man rechnete damit schneller und genauer. Roger Bacon war sich der Konsequenz dieser Neuerung bewußt. Das Dezimalsystem befreite von der Fessel der Ganzen Zahlen und brachte zugleich die natürliche Zeitrechnung in Distanz zum Kirchenkalender. Wer Mathematik als Grundlage für die Gestaltung der Welt er-

---

[25] A. Borst, *Computus*. Zeit und Zahl in der Geschichte Europas. Wagenbach 1990, 49; ders. 49; ders.: Wie kam die arabische Sternkunde ins Kloster Reichenau? Universitätsverlag Konstanz 1988, 22.

[26] Alfred Nagl, Über eine *Algorismus-Schrift* des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst im christlichen Abendland, in: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 34 (1889), Hist.-Lit. Abt. 129–146, 161–170. Vgl. dazu Borst, *Computus* 63, Anm. 131.

kennt, forderte er, wird die Wissenschaft auch auf den Alltag anwenden, zur Rationalisierung bürgerlichen Handelns so gut wie zur Reflektierung christlichen Wandelns, und die Zahlen nicht beliebig auf- und abrunden.[27] Bacons Vorschläge zu einer Kalenderreform mit Hilfe der Araber fruchteten freilich nicht viel. Bis zur 'Gregorianischen Reform' 1582 vergingen ja noch über drei Jahrhunderte. Aber sie zeigen die Vielfältigkeit der Kanäle, über die die arabische Mathematik praxisorientierte Veränderungen in der europäischen Welt bewirkten.

Man könnte ähnliche Entwicklungen auch bei der Astrologie aufdecken, die mit dem 1034 verfaßten Lehrbuch von Ademar von Chabannes von arabischen Vorlagen aus einen neuen Aufschwung nahm.[28] Nicht zuletzt bezog auch Bacon, wie manch anderer seiner Kollegen, aus astrologischen Vorhersagen ein ordentliches Zubrot.

Ob auch für die Architektur vergleichbares geltend gemacht werden kann, ist dagegen fraglich. Schon Franz Woepcke hat 1855 auf Affinitäten des 'Buches über notwendige Kenntnisse der Architektur und geometrischen Kontruktionen' von dem schon erwähnten Abū l-Wafāʾ al-Būzǧānī oder einer seiner Schüler mit den 'Practica Geometriae' von Leonardo von Pisa hingewiesen.[29] Die Verwendung der dort aufgenommenen Proportionsordnungen für die florentinischen Stadtplanungen, wie von David Friedmann herausgearbeitet,[30] könnte zu einem leichtfertigen Schluß verführen.

Doch weder hat sich Woepckes Vermutung bestätigen lassen, noch ist genügend über die Denkweise und Praxis der mittelalterlichen Ingenieure bekannt. Abū l-Wafāʾs Traktat bleibt ein Einzelfall für die islamische praktische Geometrie,[31] und ist zudem von einem Mathematiker verfaßt. Und die erhaltenen europäischen Skizzenbücher, etwa das von Villard de Honnecourt und das zwei Jahrhunderte später, 1487/88, vom Regensburger

[27] Zitiert aus Borst, *Computus* 67.

[28] B. Bischoff, Anecdota Novissima. Texte des vierten bis sechzehnten Jahrhunderts. Herausgegeben von Bernhard Bischoff. Stuttgart 1984, 183–185.

[29] F. Woepcke, Rechnerches sur l'Histoire des sciences mathématiques chez les orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans, in: JA 5 (1855) 221.

[30] D. Friedmann, Florentine New Towns. Urban Design in the late Middle Ages. Cambridge/Mass. und London 1988, 117ff.

[31] Dazu M.S. Bulatov, Geometrische Harmonisierung in der Architektur Zentralasiens im 9./15. Jahrhundert (russisch), Zweite Auflage, Moskau 1988, 98–104.

Dombaumeister Matthäus Roriczer herausgegebene 'Fialenbüchlein' besitzen keinerlei mathematischen, geschweige denn als arabisch zu identifizierenden Hintergrund, sondern stellen aus der Handwerkserfahrung entwickelte konstruktive geometrische Verfahren dar.[32]

Für die Herausbildung der neuzeitlichen Wissenschaften, insbesondere auch der praktischen Mathematik, war diese Ausgangslage kennzeichnend. Edgar Zilsel hat dies detailliert nachgewiesen. Die Schicht der Handwerker war im ausgehenden Mittelalter noch weitgehend von der der Gelehrten getrennt. Hatten diese akademische Grade und Berufe, waren jene in den Werkstätten auf die Weitergabe der Bildung ihrer Meister angewiesen. Erst während des 15. Jahrhunderts begannen sich in Italien die Makler, Bildhauer und Architekten von den Weißwäschern, Steinmetzen und Maurern zu trennen und eine Art höherer Handwerksschicht herauszubilden, die, wie etwa Leonardo da Vinci, Dürer oder Simon Stevin, Zugang zur mathematischen Wissenschaftstradition erhielten.[33] Dieser soziologische Gesichtspunkt, der hier nur angerissen werden kann, ist in sofern von Bedeutung, als er die Beeinflußbarkeit, also die spezifische Disposition des Empfängers in unserem Kommunikationssystem betrifft.

Bis zum Ende der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts waren die Mathematiker des Abendlandes über die vorliegenden Übersetzungen mit den arabischen Rechenmethoden vertraut geworden: Adelard von Barth (1075?–1160?), Johannes Hispalensis (1130–1150 in Toledo), Abraham Savasorda (1070?–1136), Gerhard von Cremona (1114–1187), Plato von Tivoli, Robertus Castrensis (ca. 1141–1150) und auch Abraham ben Ezra (ca. 1089/92–1167), der allerdings mit hebräischen Ziffern rechnete.[34] Nach ihnen jedoch verknöcherte das mathematische Wissen. Der 'Algorismus vulgaris' des Sacrobosco, der 'Tractatus de arte numerandi', wurde ab der Mitte des 13. Jahrhunderts zum Standardlehrbuch der neuen Mathematik an den Artistenfakultäten, und blieb das für drei Jahrhunderte.[35]

[32] Vgl. L.R. Shelby, The Geometrical Knowledge of Medieval Master Masons, in: *Speculum* XLVII (1972) 407,420.

[33] Vgl. E. Zilsel, Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft. Herausgegeben von Wolfgang Krohn, STW 152, Frankfurt am Main 1985, 120f.

[34] Vogel, Practica 43, mit Nachweisen.

[35] An der Wiener Universität erscheint 1395 das Vorlesungsthema 'Algorismus' auf der Lektionsliste. Das Rechnen mit den arabischen Zahlzeichen und Methoden begann damit den Abacus – zumindest vom Katheder – zu verdrängen, s. dazu Vogel, Practica 1.

Mathematik war und blieb dort eine dem quadrivialen Lehrsystem untergeordnete Disziplin, die aus dem Vortrag vorgeschriebener Texte bestand. Spezielle Dozenturen waren dafür nicht vorgesehen. Der schwierige Stoff und die unterdurchschnittliche Bezahlung trugen wenig zur Beliebtheit bei.[36] Erst durch Persönlichkeiten des 15. Jahrhunderts, wie Nikolaus von Dinkelsbühl, Johannes von Gmunden und Georg Peurbach bahnte sich im süddeutschen Raum an, was 1502 in Wien durch kaiserliche Gnaden Wirklichkeit wurde: die Einrichtung einer fast unabhängigen mathematischen Fakultät, des Collegium poetarum et mathematicorum.[37] Offenbar erwartete man damals noch von einem Mathematiker, daß er auch dichten konnte.

Diese spezifische scholastische Tradition der mathematischen Wissensvermittlung isolierte die von den Arabern übernommenen Traditionen im klerikalen und universitären Bereich. Die Befruchtung der Alltagsmathematik mußte anderswoher kommen.

Ausgangspunkt dafür ist wieder Fibonacci. Sein *Liber abaci* hat ja nie Eingang in das scholastische Curriculum gefunden. Es ist nicht nachzuweisen, daß es je gelehrt wurde. Auch war es – wie verschiedentlich vermutet – wohl auch nicht speziell für die Zunft der Händler verfaßt worden. Nur drei Exemplare haben in den Bibliotheken überlebt.[38] Doch sowohl die Arithmetik als auch die Geometrie von Fibonacci haben beträchtlichen Einfluß auf die Weiterentwicklung der abendländischen Mathematik ausgeübt.

Bemerkenswert ist die Verschiedenheit dieses Einflusses in Italien und Byzanz. Um 1200, zwei Jahre vor der ersten Abfassung des *Liber abaci*, war Fibonacci als Dolmetscher der Pisanischen Faktorei dort hingelangt und auch mit byzantinischen Mathematikern zusammengekommen. Man hat die weitere Verbreitung der westarabischen Ziffern bei byzantinischen Rechnern mit diesem Aufenthalt zusammengebracht. Wohl aus einem Erklärungsnotstand heraus: Denn die Übernahme der Ziffern und Rechenmethoden der Araber hatte, wie Kurt Vogel gezeigt hat, früher und auf

---

[36] Vogel, Kleinere Schriften, I 313 (Das älteste deutsche gedruckte Rechenbuch) und II 600 (Der *Donauraum*, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland 10).

[37] Vogel, Kleinere Schriften II, (Donauraum 22) 612.

[38] A. Murray, *Reason* and Society in the Middle Ages. Clarendou Press, Oxford 1978, 193.

undurchsichtigere Weise begonnen.[39] Sicher aber waren während des lateinischen Kaiserreiches bis 1261 westliche Schriften nach Byzanz gelangt. Vielleicht hatte auch Fibonacci seine Hand dabei im Spiel. So benutzte Rabbi Mordechai Comtino zwei Jahrhunderte später das *Sefer ha-ḥesbon ve ha-midoth* von Savasorda, die Vorlage der *Practica Geometriae*, und kannte wohl auch das *Liber abaci*.[40] Byzanz war aber auch direkten östlichen, arabischen und persischen Einflüssen ausgesetzt. Maximos Planudes (zw. 1255–1300) schrieb um 1300 eine 1252 verfaßte anonyme Schrift über das indische Rechnen in seine 'Ziffernarithmetik der Inder' um und ersetzte dort die westarabischen Ziffern des Originals durch die ostarabischen.[41] Eine Generation später unterscheidet Nikolaus Rhabdas aus Konstantinopel in einem mathematischen Lehrbrief zwischen den 'Mathematikos Logariasmos', den mathematischen Fächern des Quadriviums und der höheren Logistik, und den 'Politikos Logariasmos', der politischen oder Alltagsarithmetik.[42] Darunter faßt er die Lehre von den Zahlzeichen, von den vier Grundrechenarten und vom Wurzelziehen. Weder die Herkunft des Begriffs noch die Unterscheidung ist bislang geklärt worden. Ein Blick über die Grenzen könnte da weiterhelfen. Einige Jahrzehnte vor Rhabdas hatte Ibn Ḫaldūn in der *Muqaddima* von der Arithmetik und Algebra die sogenannte 'Geschäftsrechnung' (ar. *al-muʿāmalāt*) mit den Worten geschieden, daß »bei den *muʿāmalāt* die Rechentechnik mit Unbekannten und Bekannten, Brüchen, Ganzen, Wurzeln und anderem verwendet wird.«[43] Dabei wird dieses Rechnen genauer als *muʿāmalāt al-mudun*, als 'politische Geschäftsrechnung' bezeichnet, unter welche die

[39] KleinereSchriften, II (Buchstabenrechnung und indische Ziffern in Byzanz 662f.) 454f.

[40] P. Schub, A Mathematical text by Mordecai *Comtino*, in: *Isis* 17 (1932) 54–70, 65–66. A. Allard, Maxime *Planude*. Le Grand Calcul Selon les Indiens. Histoire du texte, edition critique traduite et annotée. Lourain-La-Neuve 1981. (Travaux de la fac. de philos. et lettres de l'Univ. Cath. de Louvain XXVII), 233.

[41] Vogel, ibid. und Kleinere Schriften, I 493–508 (Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und Weiterbildung der griechischen Mathematik 124); Allard, Planude 4–8.

[42] Schub, Comtino 65–66; K. Vogel, Mathematik und Astronomie (Astrologie), in: *Byzantinisches Handbuch* II: Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, [Ed.] H. Hunger, München, 219–260, 247.

[43] Ibn Ḫaldūn, *al-Muqaddima*, I-III, Ed. A.M. Quatremère Beirut 1970 [Paris 1858], III 99/1f.

Inhalte gefaßt sind, die schon Abū l-Wafā und Ibn al-Haiṯam als praktische Arithmetik herausgestellt hatten. Hier haben wir es nur mit der Ähnlichkeit von Einteilungskonzepten zu tun. Sicherheit herrscht aber darüber, daß die älteste erhaltene griechische-byzantinische Aufgabensammlung zwar noch nicht in den Methoden, dafür aber in der Herkunft der Aufgaben den Arabern verpflichtet ist.[44] Wie diese Aufgaben in die Sammlung gelangten, ist wegen der ubiquitären Verbreitung kaum mehr nachzuweisen. Nachbarschaftlicher Einfluß mag dazu verholfen haben, aber auch die Orientreisen des Abraham ben Ezra und Fibonacci.

Einen deutlichen Hinweis auf direkte Kontakte der byzantinischen Rechner zu ihren arabischen Nachbarn liefert zuletzt das von Hunger und Vogel herausgegebene anonyme griechische Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert. Dort ist neben einer Reihe von arabisch-türkischen Fachtermini und dem Hinweis des anonymen Autors auf die besonderen Bruchrechnungsverfahren der Türken[45] auch eine Unterhaltungsaufgabe mit einem türkischen Bademeister zu finden, der mit einer unbestimmten Gleichung die Eintrittspreise von türkischen, jüdischen und christlichen Badefreudigen ermitteln soll. In dieser Einkleidung begegnet diese Aufgabe sonst nirgendwo, als in dem *K. al-Ḥāwī*, einem syrischen Rechenbuch aus dem späten 12. Jahrhundert, und enthält dort zudem dieselbe konfessionelle Preisstaffelung wie im byzantinischen Fall.[46] Für die Schröpfung der Christen beim Eintrittsgeld dürfte deshalb weniger der unchristliche Bademeister, wie Vogel vermutete[47], sondern die islamische Herkunft der Aufgabe verantwortlich sein.

---

[44] H. Hunger/K. Vogel, Rechenbuch 149,156ff.

[45] H. Hunger/K. Vogel, Rechenbuch 32/33. Vogel (K. Vogel [und] H. Gericke, De Thience von Simon Stevin. Das erste Lehrbuch der Dezimalrechnung nach der holländischen und französischen Ausgabe von 1585. Übersetzt und erläutert von Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Frankfurt 1965 (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften, N.F. 1, 44–45) geht soweit, darin den Einfluß des zentralasiatischen Mathematikers al-Kāšī (st. ca. 1430, zu ihm *MM* II (Nr. 429) 480f.; P. Luckey, Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī [*Miftāḥ al-ḥisāb*] mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens 2) über die diplomatischen Kontakte zwischen Samarkand und Konstantinopel auf abendländische Rechner am Werk zu sehen.

[46] Abū ʿAbdallāh Aḥmad b. al-Ḥusain, *Kitāb al-Ḥāwī li-aʿmāl as-sulṭānīya wa-rusūm al-ḥisāb ad-dīwānīya*, BN Paris, MS ar. 2462, fol.20; vgl. Rebstock, Rechnen 260.

[47] Rechenbuch 53 (Nr. 66).

Zuletzt sei darauf hingewiesen, daß auch nach der osmanischen Einnahme Konstantinopels die Vermittlung mathematischer Kenntnisse in den Westen nicht riß. Mit dem Rechenbuch *Sefer ha-mispar* des Oberrabbiners Eila Mizrachi (st. 1525) gelangte vor 1544 ein Werk über die vollentwickelte Dezimal- und Sexagesimalrechnung zu Erasmus Schreckenfuchs nach Tübingen,[48] in welchem wörtliche Passagen aus dem schon erwähnten *Sefer ha-mispar* des Abraham ben Ezra aus Toledo und eine beträchtliche Anzahl typisch arabischer Alltagsrechenaufgaben tradiert sind.[49]

Verlassen wir Byzanz, wo eher direkte als über Fibonacci vermittelte arabische Einflüsse auf beharrliche griechische Tradition stießen und an der Entwicklung der praxisorientierten spätbyzantinischen Rechenliteratur mitgewirkt hatten.

Ein Jahrzehnt bevor Leonardo von Pisa das 'Liber Abaci' veröffentlichte, hatte sich bereits ein Mönch in Toledo mit arabischen Rechentexten herumgeplagt. Die Früchte seiner Bemühungen sind in ein Konvolut aus einleitenden theoretischen Kapiteln und über 300 ganz verschiedenen praktischen Rechenaufgaben eingeflossen. Unter dem Titel 'Liber Mahameleth' haben drei unvollständige Manuskripte einen Großteil davon bewahrt.[50] Die Edition dieses umfangreichen Werkes ist seit längerem schon von Jacques Sesiano angekündigt. Nach vielen Stunden des Brütens über dem Text weiß ich, warum, und kann auch der kurzen Beschreibung von Sesiano nicht viel hinzufügen. Der Titel erlaubt natürlich Rückschlüsse. Da es sich nicht um eine Übersetzung aus einem Guß handelt, muß unser Mönch nicht nur den Begriff '*muʿāmalāt*' gekannt haben. Er scheint auch seine Übersetzung nicht für notwendig oder sinnvoll gehalten zu haben. Vielleicht bedurfte er wirklich keiner. Maslama b. Maǧrīṭī aus Cordoba (st. 398/1067–8),[51] dessen kommentierte Exzerpte aus den Tafeln von al-Battānī und al-Ḫuwārizmī schon früh im lateinischen Spanien bekannt geworden waren,[52] hatte schon gegen 980 ein *K. al-Muʿāmalāt* verfaßt,

[48] Stevin, De Thiende [Ed. Vogel] 46.

[49] G. Wertheim, Die Arithmetik des Elias Misrachi, Braunschweig 1896, 6–8.

[50] BN Paris, Manuscripts Latins 7377A fol. 99r–203r, 15461 fol. 26ra–50rb und Biblioteca Capitulare (Padua) D.42 fol. 1ra–86vb; vgl. dazu J. Sesiano, Survivance médiévale en Hispanie d'un problème né en Mésopotamie, in: *Centaurus* 30 (1987) 18–81, 19f.

[51] *MM* II (Nr. 176) 193f.; vgl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Amsterdam 1981 [Leipzig 1900–2], (Nr. 176) 17–8.

[52] S. dazu E.S. Kennedy, Studies in the Islamic Exact Sciences Beirut 1983, 124ff.

desgleichen auch sein Schüler ʿAlī az-Zahrāwī und kurz darauf auch Ibn as-Samḥ aus Granada (st. 426/1035).[53] Der weitere bibliographische und enzyklopädische Befund unterstreicht die Geläufigkeit des Begriffs im islamischen Spanien und macht plausibel, weshalb der Begriff im Titel so stehen blieb.

Auch der Inhalt spricht dafür, daß wir es bei dem 'Liber Mahameleth' mit einer lateinisch-andalusischen Version der *kutub al-muʿāmalāt* zu tun haben. Als Quellen sind neben Euklid, Archimedes und Nikomachos nur al-Ḫuwārizmī und Abū Kāmil genannt. Der Aufbau entspricht aber dem der *muʿāmalāt*-Texte: vorab Erklärung der Rechenmethode, dann Einübung an Rechenbeispielen. Unter diesen befindet sich eine große Anzahl von Aufgaben, die dem spanischen Milieu entstammen. Weder die indischen Ziffern, noch das Dezimalrechnen werden eingeführt. Und anders als in den *ḥisāb*- und *muʿāmalāt*-Schriften werden bei algebraischen Lösungen auch geometrische Beweise zuhilfe genommen. Das macht es schwierig, den Text einer bestimmten Tradition zuzuordnen oder die Herkunft einzelner Teile zu erschließen. Einige Passagen erinnern an 'das Rechenbuch für Sekretäre' von Abū l-Wafāʾ und an 'die Vervollständigung des Rechnens' von ʿAbdalqāhir al-Baġdādī. Gewißheit darüber wird erst die Edition des Textes bringen können.

Gehen wir weiter nach Oberitalien, wo die Schriften Fibonaccis in ganz andere Kreise hineingewirkt hatten. Alexander Murray hat den Aufschwung, den die Mathematik, speziell die Arithmetik im 13. Jahrhundert in Italien genommen hat, an die beiden gesellschaftlichen Entwicklungen von Handel und zentralisierten Regierungen geknüpft.[54] Fibonacci hat ja die Mehrzahl seiner Aufgaben dem Händlermilieu entnommen, und dort, bei den *maestri d'abacco*, den Rechnungsbuchführern, müssen die neuen Methoden rasch Anklang gefunden haben. Denn schon 1299 ist in Artikel 101 des 'Statuo dell'Arte di Cambio' in Florenz die Verwendung von indischen Ziffern unter Strafe gestellt.[55] Die praktische Begründung für dieses Verbot lag in der Mißverständlichkeit und Verfälschbarkeit der arabischen Ziffern. Die neue und bequeme Methode ließ sich dadurch nicht beeindrucken. Man kombinierte nun etwa beide Notationen oder zerlegte gar die 'kaiserlichen' römisch geschriebenen Beträge in dekadische Zah-

---

[53] *MM* II (Nr. 194) 22; vgl. dazu Rebstock, Rechnen 190–192.

[54] Reason 203.

[55] A. Nagl, Algorismus-Schrift 162.

lenkolonnen und rechnete so arabisch mit ihnen.[56] Überhaupt wird dieses Verbot nur durch die intellektuellen Vorbehalte ganz verständlich. Pater Giordano von Pisa klagte 1303 über die Händler von Florenz, daß sie »Tag und Nacht nichts anderes täten, als denken und rechnen.«[57] Und ein Satiriker des 13. Jahrhunderts nannte die Arithmetik 'Aerismetica', die Kunst des Geldes.[58] Die kirchlichen Autoritäten hielten sich nicht nur gegenüber der theoretischen Mathematik bedeckt, die sie in der lateinischen Ausbildung marginalisiert hatten, sondern auch gegenüber den praktischen Rechenkünsten, die für sie die Verselbständigung der Kalkulierbarkeit von der göttlichen Vorsehung symbolisierte. Es ist dies natürlich nur ein oberflächlicher Pausibilitätsversuch, um zu erklären, warum das, was mit dem *Liber abaci* und den *Practica Geometriae* so beeindruckend begonnen hatte, nun fast spurlos versickerte. Zwischen der zweiten Hälfte des 13. und dem 15. Jahrhundert verschwinden die Spuren arabisch geprägter Mathematik und Rechenkunst aus der abendländischen Literatur. Wenn praktisches Rechnen irgendwo noch geübt wird, dann im Milieu oberitalienischer Händler und dort dann in den Spuren des 'Liber abaci'. Es wird nur noch kopiert, nicht mehr verarbeitet. Vielerorts fallen die Kenntnisse hinter den Stand des 12. Jahrhunderts zurück. Der Neuanfang findet in einem Raum statt, zu dem zwar viele ökonomische und politische Verbindungen bestehen, dessen Rolle bei der Beerbung der zwei Jahrhunderte zuvor erworbenen Rechenkenntnisse in nuce aber noch völlig unbekannt ist: in Süddeutschland.

Dort war der Bedarf an praktischen Rechenkenntnissen enorm gestiegen. Die Betroffenen, die Händler, Kaufleute und Gutsverwalter, behalfen sich selbst. Sie schickten entweder ihre Söhne nach Italien, um dort die neuen Rechenmethoden zu erlernen, oder nahmen schlecht bezahlte private Rechenmeister in Dienste. Aus den herumziehenden Scholaren, die an Lateinschulen einen kärglichen Rechenunterricht versahen, waren Mitte des 15. Jahrhunderts zum Teil organisierte, von den städtischen Behörden geförderte Privatschulen entstanden, in denen unter dem Gesichtspunkt des Nutzens, der utilitas, Rechenkenntnisse vermittelt wurden. 1457 sind in Nürnberg schon drei solcher Rechenschulen belegt.[59] Woher die Kennt-

[56] ibid. 165.

[57] Murray, Reason 194.

[58] ibid. 191.

[59] Vogel, Kleinere Schriften, I 314f. (Ältestes deutsches gedrucktes Rechenbuch 239f.); II 597–599 (Donauraum 7–9).

nisse stammten, ist nicht deutlich auszumachen. Vieles spricht dafür, daß Informationen aus erster Hand aus Italien dazu beigetragen hatten, wo etwa Francesco Balducci Pegolotti schon zu Beginn des 14. Jahrhunderts eine 'Practica della Mercatura' vorgelegt hatte.[60] Kurze Zeit nach ihm verfaßte ein unbekannter Autor – er stammte vielleicht aus Cortona nördlich des Trasimenischen Sees[61] – ein Rechenbuch zu Unterrichtung interessierter Laien und Kaufleute in der seit Leonardo bekannt gewordenen arabischen Rechenmethode. Die Regeldetri ist dabei – wie das *nisba*-Rechnen bei Ibn al-Haiṯam – das wichtigste Hilfsmittel zur Bewältigung der gestellten Alltagsaufgaben. Keine der konkreten Maß- und Wertangaben ist direkten orientalischen Ursprungs. Der Autor pflegte in aller Breite weiter, was er bei Leonardo und anderswo gelesen und gehört hatte.

Ob diese Texte jemals mehr als regionale Bekanntheit erreichten, mag zweifelhaft sein. Aber es gab ja auch direkte persönliche Beziehungn. So dürften über persönliche Kontakte mit Fachgelehrten wie Georg Peurbach (1423–1461),[62] Fridericus Gerhart (um 1463) und Regiomontan (*alias* Johannes Molitoris *alias* Johannes Müller, geb. Königsberg 1436, st. in Nürnberg 1491),[63] die für einen neuen Aufschwung der mathematischen und astronomischen Studien sorgten, neues Wissen in die Hände der Rechenmeister gelangt sein.[64]

Regiomontan hatte ja während seines vierjährigen Aufenthaltes in Italien zwischen 1461 bis 1465 in einer rastlosen Sammlertätigkeit fast alle zu seiner Zeit bekannten mathematischen Werke, darunter auch die Übersetzungen aus dem Arabischen und das *Liber abaci* von Leonardo zusammengetragen und war nach seiner Rückkehr bis zu seinem Tode 1491 in Nürnberg zu einem der bekanntesten abendländischen Mathematiker avanciert.[65]

---

[60] Ediert von Allan Evans, Cambridge/Mass. 1936.

[61] Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A 13). Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel. München 1977, 7.

[62] Vogel, Kleinere Schriften, II 605 (Donauraum 15).

[63] Eine ausführliche Lebens- und Werkbeschreibung findet sich bei B.Hughes, *Regiomontanus* on triangles, Madison 1967, 11–18.

[64] Dazu Vogel, Kleinere Schriften, II 604 (Donauraum 14f.) und ders., Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481. Nach einer Handschrift aus C 80 Dresdensis. Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel. München 1981, 10.

[65] Hughes, Regiomontanus 18.

Ulrich Wagner aus Nürnberg war einer dieser Rechenmeister. Von ihm stammen die beiden ältesten, 1482 und 1483 in Bamberg gedruckten deutschen Rechenbücher. Beide sollten der gründlichen Ausbildung im praktischen, kaufmännischen Rechnen dienen. Im jüngeren Buch von 1483 wird auf den ersten 35 Seiten systematisch das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen nach der indisch-arabischen Methoden entwickelt. Dann folgen Dreisatz-Aufgaben in Form von Preisberechnungen, Umrechnungen von Geldsorten, Warentausch- und Gesellschaftsrechnungen und Feingehaltsbestimmungen von Gold- und Silberstücken.[66] Das Spektrum dieser Aufgaben läßt sich mühelos mit dem der in den *muʿāmalāt*-Texten der Araber behandelten vergleichen. Sie finden sich auch – um ein stellvertretendes und bald, weil zur Publikation vorbereitetes nachprüfbares Beispiel zu nennen – im Traktat 'Reichtümer der Rechner' des Bagdader Mathematikers Aḥmad b. Ṯabāt aus der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts. Niveau, Milieu und Orientation der beiden Texte sind einander sehr ähnlich. Elementare Rechenoperationen werden unter monotoner Verwendung der Regeldetri an Alltagsaufgaben eingeübt. Noch praxisnäher ist das 'Bamburger Blockbuch', ein xylographisches Rechenbuch aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts, angelegt. Es enthält ein arabisches 1x1 und regelrechte Musteraufgaben für den Kaufmann. Eine davon hat auch Ulrich Wagner aufgenommen. Doch ist es älter als dessen Rechenbuch, da es noch die kurz darauf variierten alten *Ġubār*-Ziffernformen für 4, 5 und 7 verwendet.[67]

Bei den deutschen Cossisten – wie die Mathematiker dieser Zeit genannt werden[68] – die sich mit arabischer Arithemetik und Algebra beschäftigten, verschmilzt die lateinisch-arabische Lehrtradition mit den Kenntnissen, die von den *maestri d'abbaco* aus Italien nach Süddeutschland gelangt waren. Dabei werden nicht nur Form und Inhalt eingedeutscht und den sozialen und ökonomischen Bedürfnissen angepaßt. Es

[66] K. Vogel, Kleinere Schriften, I 306 (Das älteste deutsche gedruckte Rechenbuch 232).

[67] Das Bamberger Blockbuch. Ein xylographisches Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert. Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel, mit einer buchkundlichen Beschreibung von Bernhard Schimmel. München-New York-London-Paris 1980, 1v, 44–45.

[68] Von ar. *šayʾ* = Ding, über lat. *res* war die algebraische Umbekannte zu ital. *cosa* geworden.

werden auch Fortentwicklungen erreicht, wie etwa bei der algebraischen Symbolik und der konsequenten Anwendung des dezimalen Systems im Bereich der Maß-, Gewichts- und Währungseinheiten. Als gutes Beispiel für diesen Prozeß läßt sich Johannes Widmann und sein Werk anführen. Widmann, 1460 in Eger geboren und später Professor in Leipzig, veröffentlichte 1489 dort seine 'Behende und hubsche Rechnung auff allen Kauffmannschafft'.[69]

Schon der Titel zeigt, daß es nicht für die Fachleute gedacht war. Erstmals findet sich dort für die *muʿāmalāt*-Texte typische Dreiteilung: Theorie der einfachen Rechenoperationen; ihre Besprechung anhand von Zahlen- und Kaufmannsbeispielen; ausmessende Geometrie. Nun hat Wolfgang Kaunzner 1978 in der Münchner Staatsbibliothek eine lateinische Handschrift ausfindig gemacht, die als direkte oder parallele Vorlage Widmann als Richtschnur gedient haben könnte.[70] Schon Kaunzner hat vermutet, daß die Beispiele des ersten Teils der Geometrie von den Arabern übermittelt wurde.[71] Mit Berufung auf Euklid werden in der lateinischen wie in der deutschen Fassung der Rhombus 'Helmüaim' bzw. 'Helmuaym',[72] von ar. *al-muʿayyin*, und 'Helmüaripha' bzw. 'Helmuariphé', mit Metathese von ar. *al-murabbaʿ(a)*[73] genannt. Bei den Dreisatzvorschriften werden in der lateinischen Vorlage die Proportionsglieder mit dem latinisierten Namen 'Almüzaar, Alzazar, Althenon und 'Almuthemon' genannt. Der Autor hat diese Begriffe nicht verstanden. So übersetzt er 'Almuthemon' mit *ignotus*, unbekannt.[74] Zuvor hatte er wieder auf Euklid, allerdings auch auf Johannes de Muris verwiesen, der ein gutes Jahrhundert zuvor in seiner 'Algebra' wechselweise al-Ḫuwārizmī und Fibonacci gefolgt war.[75]

---

[69] Dazu W. Kaunzner, Zur Entwicklung der Mathematik 140; zu den Umständen der Abfassung, ders., Über die Handschrift Clm 26639 der Bayrischen Staatsbibliothek München, Hildeshein 1978, 3–5.

[70] ibid. 3.

[71] ibid. 21.

[72] ibid. 22 [= fol. 1r] bzw. 93a/11.

[73] ibid. 22 [= fol. 1r] bzw. 93b/8.

[74] ibid. 51 [= fol.22r].

[75] L.Ch. Karpmisky, The »Quadripartium numerorum« of John of Meurs, in: *Bibliotheca Mathematica*, Folge 3, Band 13, Heft 2, Leipzig 1913, 103–114, 107f., 111f.

In der arabischen mathematischen Literatur kenne ich diese Begriffe zuerst aus dem schon zitierten *K. Ḥisāb al-muʿāmalāt* von Ibn al-Haiṯam und dem *K. al-Kāfī* von *al-Karaǧī*.[76]

Andere *ḥisāb*-Autoren wie Ibn al-Bannāʾ[77] und ʿImādaddīn al-Baġdādī[78] schlossen sich dieser Terminologie an und standardisierten sie. Über welche Etappen diese Begriffe schließlich nach Regenburg gelangten, ist ungewiß. Gewiß aber entstammen sie nicht der Høyrup'schen 'wissenschaftlichen' Mathematik, wie die Herkunftsgeschichte zeigt. Der Bezug auf Johannes von Meurs weist vielmehr auf das Umfeld von Fibonacci. Dort wußte man mit *saʿr* = Preis und *ṯaman* = Wert etwas anzufangen.

Ähnliches gilt auch für die 'Rechnung mit den beiden Fehlern', ar. *al-ḫaṭaʾain*, welche wieder vielleicht über Fibonacci – so vermutete Vogel[79] – nach Süddeutschland gelangte und dort noch im 16. Jahrhundert von Initius Algebras unter dem korrumpierten Namen 'Itata' auf die »alten Araber« zurückgeführt wird.[80]

Mit Fleiß und Gründlichkeit ließe sich die Liste solcher begrifflicher und methodischer Abhängigkeiten um ein Vielfaches erweitern. Doch solange hüben wie drüben die Quellen dazu noch brach liegen, müssen die vorgeführten Anhaltspunkte für den Argumentationsansatz geradestehen.

---

[76] Ibn al-Haiṯam, *Qaul al-maʿrūf* fol. 178b/2–15; Bibliographisches dazu bei Rebstock, Rechnen 177, Anm. 7; [Abū Bakr M. b. al-Ḥusain al-Karaǧī], *Kāfī fīl Hisāb* des Abu Bekr Muhammed Ben AlHusain Alkarkhi, [übersetzt von] Adolf Hochheim, I-III, Magdeburg 1878–90, II, 16.

[77] *K.al-Maqālāt fī l-ḥisāb* Staatsbibliothek Berlin MS 5974 fol. 1b–35b, fol. 62/5f.

[78] *al-Fawāʾid al-bihāʾīya fī l-qawāʿid al-ḥisābīya*, Staatsbibliothek Berlin, MS 5976 fol.1b–37a, fol. 13a/8. Auch die Aufgabe Nr. 35 in W. Kaunzner (Clm 26639, 39 [=fol. 5r]), den Abstand eines Brunnens von zwei gleich weit entfernten, aber verschieden hohen Türmen zu finden, ähnelt in der Einkleidung und gleicht in der Lösungsmethode der Aufgabe al-Baġdādīs (1245–1723), den Ort zu finden, wo zwei zum gleichen Zeitpunkt von verschieden hohen Palmen losgeflogene Vögel zur gleichen Zeit einen Fisch im dazwischen liegenden Fluß erjagen (ibid. fol. 36b).

[79] Dazu H. Hunger/K. Vogel, Rechenbuch 105. Zum »falschen Ansatz« in einem älteren byzantinischen Rechenbuch, vgl. K. Vogel, Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts. Text, Übersetzung und Kommentar. (Wiener byzantinische Studien. Herausgegeben von H. Hunger. Bd. VI). Wien 1968, 149ff.

[80] Curtze, Urkunden 567–568 und passim.

Es sind nicht viele und sie stehen etwas verloren da, um die Distanz zwischen dem Aufkommen des *ḥisāb*, Übernahme und Vermittlung durch Leonardo von Pisa und ihrer Wiederaufnahme durch die deutschen Rechenmeister und Mathematiker in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts zu überbrücken. Aber es gibt sie, und zwar dann und dort – von Byzanz über Oberitalien nach Toledo – , wo das gesllschaftliche Umfeld die Rezeption der *ḥisāb*– und *muʿāmalāt*-Rechenkunst zuließ und begünstigte. Über scholastische Kanäle wurde diese nur solange weiterbefördert, als dafür – wie etwa in der kirchlichen Zeitrechnung – Bedarf bestand. Das war ja auch nicht das Milieu, in dem sie entstanden war. Erst die sich entwickelnden zentralen Staatsverwaltungen und Handelsnetze boten dafür einen geeigneten Nährboden. Man kann regelrecht beobachten, wie im Gleichschritt dazu in Oberitalien und – zeitliche versetzt – in Süddeutschland die Mathematik domestiziert wird mithilfe der von den Arabern vermittelten indischen Arithmetik und der Algebra. Sie beförderten Rechenkenntnisse über die Kriterien von Nutzen und Effektivität aus einer Traditionswissenschaft in eine aufblühende Disziplin, die von Staat und Gesellschaft als förderungswürdig erkannt wurde. Rechenmeister wie Johannes Widmann, Adam Riese und Michael Stifel haben sie weitergetrieben. So hat das Genre des 'Praktischen Rechenbuchs' überlebt, bis heute. Ich habe kürzlich davon ein Exemplar in die Hand bekommen: 'Rechnen für Jedermann' von Arno Reimer, Oberinspektor, erschienen 1976 in Wien.[81] Auch Abū l-Wafāʾ al-Buzǧānī war, bevor er die Leitung der Sternwarte übertragen bekam, höchstwahrscheinlich in einer Verwaltungsabteilung von Bagdad tätig. Und Ibn Ṯabāt lehrte – wie Johannes Widmann – dort Mathematik an der Hochschule. Die Rechenbücher beider sind – bei genauerem Hinsehen – die Vorläufer von 'Rechnen für Jedermann'.

Ulrich Rebstock Tübingen, im September 1992

[81] Breitenstein & Co., Wien 1976.