Bedeutung und Förderung funktionalen Denkens
im Kontext des Unterrichts
aus mathematikhistorischer, fachdidaktischer
und unterrichtspraktischer Perspektive

Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der Pädagogischen Wissenschaften (Dr. paed.)

der Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von
Herrn Jens Spiegelhauer
geb. am 31. Mai 1967 in Pirna

Gutachter:
Frau Prof. Dr. rer. nat. habil. Karin Richter (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)
Herr Prof. Dr. paed. habil. Hans-Dieter Sill (Universität Rostock)

Tag der Verteidigung: 8. Juni 2017

Inhalt

1 Einleitung und Begründung des Themas

Mathematik besitzt im Fächerkanon aller Schularten einen festen Platz mit einem hohen Stundenanteil. Dennoch stehen diese Stundenanteile zur Disposition, wenn es darum geht, neue Fächer zu implementieren oder die Stundenanteile etablierter Unterrichtsfächer zu verändern (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 7f.). Die Beurteilung der Qualität schulischer Bildung kann aus verschiedenen Perspektiven sowie mit unterschiedlichen Zielstellungen erfolgen. Entsprechende Handlungsoptionen sind die Folge aus wissenschaftlicher, bildungspolitischer und öffentlicher Wahrnehmung. Die Fachdidaktik leistet ihren Beitrag zur Legitimierung, indem sie fachwissenschaftliche und fachdidaktische Grundkonzeptionen verknüpft.

Fachdidaktiker hinterfragten in den letzten beiden Jahrzehnten die Qualität mathematischer Bildung: Die grundlegende Ausrichtung des Unterrichts wurde kritisiert und das Bild, das die Lernenden von Mathematik als Wissenschaft haben, als verzerrt bezeichnet (vgl. Heymann 1996, S. 277; Hischer/Lambert 2002, S. 98; Wittmann 2003, S. 8ff.).

Flankiert wird diese Diskussion von der rasanten Entwicklung digitaler Medien; dynamische Geometriesoftware, Computeralgebra- und Tabellenkalkulationssysteme eröffnen völlig neue Möglichkeiten, um Mathematik zu betreiben und zu vermitteln. Elemente des tradierten Unterrichts (z. B. allgemeine Rechenroutinen und Rechenverfahren) verlieren dagegen zunehmend an Bedeutung (vgl. Hischer/Lambert 2002, S. 98f.).

Schwachstellen des Mathematikunterrichts in Deutschland waren der Fachdidaktik bereits vor Schulleistungsüberprüfungen wie PISA 2000 hinlänglich bekannt (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 48). Die Ergebnisse von PISA eröffneten, neben der wissenschaftlichen, auch eine breite öffentliche Diskussion zur Leistungsfähigkeit deutscher Schulen und insbesondere zur mathematischen Bildung. PISA kann daher eine gewisse Katalysatorwirkung für Reformprozesse nachgesagt werden (vgl. Schneider 2013, S. 76).

Es ist daher notwendig, die Ziele und Inhalte mathematischer Bildung neu zu justieren und Ansätze für die Umsetzung zu entwickeln. Dafür bedarf es sowohl fachdidaktischer Forschungen als auch bildungspolitischer Entscheidungen.

Die Ziele und Inhalte von Mathematikunterricht resultieren aus dem Beitrag, den das Fach zur Allgemeinbildung liefern kann. Darunter fallen Aspekte wie: Entfaltung der Persönlichkeit, Umwelterschließung, Teilhabe an der Gesellschaft, Vermittlung von Normen und Werten (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 10ff.). Mathematik sichert die von der Gesellschaft geforderten Qualifikationen ab (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 18ff.). Es soll von den Lernenden als ein authentisches Fach erfahren werden und Antworten auf die folgenden zentralen Fragen geben (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 24ff.):

- Was ist Mathematik?
- Wie entsteht Mathematik?
- Was kann man mit Mathematik anfangen?

Die erste Frage berührt das Wesen von Mathematik sowie die Entwicklung adäquater Bilder. Die Entwicklung dieser Bilder wird stark durch den Unterricht beeinflusst – die Lehrerinnen und Lehrer treten als „Agentinnen und Agenten“ in Erscheinung (vgl. Büchter/Henn 2015, S. 26). Für Büchter und Henn sollte bei diesen Bildern jedoch das *„typische mathematische Denken, die Schönheit und Funktionalität der Mathematik nicht von schematisch trainierbaren und gut überprüfbaren Verfahren überprägt sein“* (Büchter/Henn 2015, S. 26). Ziel sollte sein, Mathematik als eine kreative, dynamische und sich ständig entwickelnde Wissenschaft darzustellen, in der Menschen als aktiver Gestalter in Erscheinung treten können.

Die zweite Frage zielt auf das Prozesshafte von Mathematik. Die typischen mathematischen Denk- und Arbeitsweisen stehen dabei im Fokus.

Die dritte Frage betrifft die Anwendbarkeit von mathematischem Wissen. Vollrath und Roth (2012, S. 25) verweisen diesbezüglich auf ein außerordentlich breites Spektrum in der wissenschaftlichen Bewertung dieses Anwendungsbezugs.

Antworten auf diese zentralen Fragen finden Schülerinnen und Schüler nicht in einzelnen Unterrichtsstunden oder Unterrichtseinheiten. Sie formieren sich kumulativ in einem Prozess, sie entstehen aus den vielfältigen und langfristigen Erfahrungen der Lernenden. Um Mathematik als authentisches Fach begreifen zu können, muss der Umgang mit curricularen Inhalten von Lernenden reflektiert werden. Zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik basieren auf charakteristischen Denk- und Arbeitsweisen, die im Unterricht systematisch zu entwickeln sind (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 24f.).

Die Förderung spezifischer mathematischer Denkweisen hat in der Fachdidaktik eine lange Tradition. Bereits vor über einhundert Jahren sah man darin die Ansätze, mathematischen Unterricht grundsätzlich zu verändern. Als ein herausragendes Beispiel gilt der Ansatz von Felix Klein. Seine Forderung nach der „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ und nach der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ wurden zur Losung einer tiefgreifenden Reform des mathematischen Unterrichts zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Kleins Ansatz bewertete man in der Geschichte der Mathematikdidaktik unterschiedlich. Er wurde aber über Jahrzehnte hinweg immer wieder aufgegriffen und modifiziert, was wiederum die Bedeutsamkeit und Tragweite seiner Überlegungen unterstreicht.

Ausgehend von Kleins Visionen sollen im Rahmen dieser Arbeit Potentiale funktionalen Denkens eruiert werden, die zur Entwicklung des aktuellen mathematischen Unterrichts beitragen können. Funktionales Denken wird dabei als ein über die Mathematik hinausreichendes, universelles und mächtiges Werkzeug zur Lösung von Problemen verstanden und genutzt. Diese Eigenschaft begründet die herausragende Bedeutung für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Ziel dieser Arbeit ist es, die Bedeutung funktionalen Denkens aus verschiedenen Perspektiven zu analysieren und Ansätze für eine unterrichtliche Umsetzung abzuleiten.
Funktionales Denken wird als ein kontinuierlicher und in verschiedenen Entwicklungsstufen ablaufender Prozess verstanden. Diese Entwicklungsstufen werden mithilfe der drei Aspekte Denken, Sprache und Bewusstheit beschrieben. Die theoretischen Überlegungen zu funktionalem Denken – verbunden mit mathematikhistorischen, bildungspolitischen, fachdidaktischen und psychologischen Aspekten – münden in ein Rahmenmodell. Kern dieses Modells ist die Beschreibung eines gestuften Übergangs von einem intuitiv-deterministischen Denken zu funktionalem Denken.
In Fallstudien soll dieses allgemeine Rahmenmodell exemplarisch-konkret angewendet werden. Die Erprobungen erfolgen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten und Jahrgangsstufen. Dabei soll vordergründig untersucht werden, welche Phänomene und Problemstellungen geeignet sind, funktionales Denken zu fördern.

Die Arbeit teilt sich in folgende Abschnitte:

Rahmenbedingungen für die Unterrichtsentwicklung und Analyse funktionalen Denkens im Mathematikunterricht

Die allgemeinen Überzeugungen von Lehrenden und Lernenden zu Mathematik und Mathematikunterricht werden in Kapitel 2 in ihrer Bedeutung für die Entwicklung von Unterricht herausgearbeitet. In Kapitel 3 erfolgt die Analyse funktionalen Denkens auf der Grundlage ausgewählter fachdidaktischer Modelle. Das Ziel dieser Analyse besteht darin, Konsequenzen und Ansätze für die Gestaltung unterrichtlicher Lernprozesse abzuleiten. Es geht nicht darum, Fähigkeiten im funktionalen Denken als eine messbare Größe bei Lernenden zu erfassen bzw. zu beschreiben.

Historische und fachdidaktische Einordnung von funktionalem Denken

Der Begriff „funktionales Denken“ hat im unterrichtlichen Kontext seinen Ursprung in den Intentionen der Meraner Reform. Es werden grundlegende Entwicklungen des mathematischen Unterrichts an Schulen und Hochschulen im ausgehenden 19. Jahrhundert beschrieben, um die Reformbestrebungen einzuordnen und die Genese des Begriffes nachzuzeichnen.

Ursprünglich als umfassendes didaktisches Prinzip gedacht, erfuhr funktionales Denken in den nachfolgenden Jahrzehnten eine begriffliche Verengung. Die Abwendung von der „Strukturmathematik“ führte zu einer grundlegenden Neubewertung des fachwissenschaftlichen Anspruchs und zu einer Neujustierung des Bildungsauftrages von Mathematikunterricht (vgl. Vohns 2016, S. 38). In dieser Zeit besann man sich wieder didaktischer Traditionen, wie beispielsweise der Idee des funktionalen Denkens. Die Interpretationen dazu gingen jedoch weit auseinander. Es gab Differenzen zu den ursprünglichen Meraner Intentionen und Differenzen zwischen den Wissenschaftlern. In Kapitel 3 erfolgt dazu eine Diskussion ausgewählter Theorien. Die Analyse von Vollrath (1989) wird als fundamental eingeschätzt und daher bei der Entwicklung eines unterrichtlichen Rahmenmodells zur Förderung funktionalen Denkens besonders hervorgehoben.

Durch die Diskussion der Ergebnisse von PISA 2000 erfasste die Frage nach der Leistungsfähigkeit des Mathematikunterrichts große Teile der deutschen Bevölkerung. Während man aus wissenschaftlicher Sicht stärker den Prozess des Lernens betrachtete, fragten nun die durch Medien aufgerüttelten Bürgerinnen und Bürger nach dem „Output“ mathematischer Bildung. Ziemlich genau hundert Jahre nach der Meraner Reform stellte man die grundsätzliche Ausrichtung des Mathematikunterrichts in Deutschland erneut auf den Prüfstand. Es wird dargestellt, welchen Platz das funktionale Denken in diesen Reformbestrebungen einnahm.

In den Kapiteln 4 bis 6 werden beide Reformen – hinsichtlich der Bedeutung von funktionalem Denken im Mathematikunterricht – betrachtet. Dabei werden grundlegende mathematikhistorische, bildungspolitische und kulturelle Rahmenbedingungen sowie die Ursachen und Folgen beider Reformen gegenübergestellt und allgemeine Ansätze zu einer Diskussions- und Änderungskultur abgeleitet.

Unterrichtspraktische Konzepte

Als Ergebnis dieser Überlegungen wird in Kapitel 7 ein Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens vorgestellt. Der Übergang vom intuitiv-deterministisch geprägten Denken hin zu funktionalem Denken wird in ein unterrichtliches Gesamtkonzept eingebunden. Um diese Entwicklung zu beschreiben, werden exemplarisch die Aspekte Denken, Sprache und Bewusstheit ausgewählt und zur Verdeutlichung einer Progression mit entsprechenden Entwicklungsstufen untersetzt.

Die theoretischen Überlegungen werden in drei Fallstudien exemplarisch einer ersten möglichen Umsetzung zugeführt. Aus diesen konkreten unterrichtspraktischen Erprobungen leiten sich Potentiale zur Förderung funktionalen Denkens ab.

2 Überzeugungen und Bilder zu Mathematik und Mathematikunterricht

2.1 Das Wesen von Mathematik

Im Jahre 1968 forderte Vollrath: *„Der Lehrer hat […] die Verpflichtung, dem Schüler ein gültiges Bild von Mathematik zu vermitteln“* (Vollrath 1968, S. 108). Um diese Forderung umsetzen zu können, ist zunächst eine Verständigung darüber unabdingbar, was unter Mathematik und einem gültigen Bild zu verstehen ist.
Felix Klein beschreibt Mathematik als

> *„die am schwersten zugängliche aller Wissenschaften […]. Denn wer in sie eindringen will, muß in sich durch eigene Arbeit die ganze Entwicklung Schritt für Schritt wiederholen; es ist doch unmöglich, auch nur einen mathematischen Begriff zu erfassen, ohne all die davorliegenden Begriffe und ihre Verbindungen in sich aufgenommen zu haben, die zu seiner Erschaffung führten. […] Diese schroffe Abgeschlossenheit der Mathematik macht sie begreiflicherweise sehr wenig geeignet für das nur aufs Allgemeine gerichtete Interesse des Laien [...]“* (Klein 1926, S. 5).

Betrachtet man die Mathematik in ihrer gesellschaftlichen Bedeutung, so ergeben sich dafür drei wesentliche Aspekte (vgl. Loos/Ziegler 2015, S. 9ff.):

- Mathematik ist ein gesellschaftlich bedeutungsvoller Bestandteil unserer Wissenskultur mit einer weit zurückreichenden eigenen Geschichte.
- Mathematik ist als Berufswissenschaft noch recht jung, jedoch mit einer rasant steigenden Zunahme an wissenschaftlichen Veröffentlichungen und einer Vielzahl ungelöster Probleme.
- Mathematik kann in erster Linie als Werkzeug verstanden werden (u. a. als Analyseelement, als theoretische Grundlage der Modellierung naturwissenschaftlicher Prozesse und nicht zuletzt als Werkzeug zur Bewältigung des Alltags).

Mathematik ist weder ein reines Geistesprodukt, noch etwas Physisches, sondern ein soziokulturelles Konstrukt mit entsprechender Geschichte (vgl. Loos/Ziegler 2015, S. 7). Damit betont man den Menschen als aktiven Gestalter. Mathematikbetreibende beeinflussen, motiviert durch gesellschaftliche, naturwissenschaftliche, technische oder ökonomische Erfordernisse, die Entwicklungen in der Mathematik.
Devlin betont in seiner Charakterisierung den Aspekt der Kreativität:

„In den letzten zwanzig Jahren ist eine Definition aufgekommen, der wohl die meisten heutigen Mathematiker zustimmen würden: Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte ‚Muster' – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende" (Devlin/Diener 1998, S. 3f.).

Mathematik ist weit mehr als ein Werkzeug: Sie ist kreativ und dynamisch und wird von menschlichem Handeln geprägt.

Doch wie gelingt es, Mathematik genau in dieser Vielfältigkeit abzubilden? Was sollte mathematische Schulbildung ausmachen? Diese Fragen werden auch auf internationaler Ebene diskutiert. Im Zusammenhang mit PISA einigten sich die OECD-Staaten (Organisation for Economic Cooperation and Development) auf einen allgemeinen normativen Rahmen für mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy). Diese wurde folgendermaßen definiert:

„Mathematical literacy is an individual´s capacity to identity and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual´s life as a constructive, concerned and reflective citizen" (OECD 2004, S. 24).

Dieser Ansatz basiert im Wesentlichen auf den Theorien Freudenthals, welcher die mathematische Begriffswelt und deren Strukturen als universelles Werkzeug zur Ordnung in der Welt der Phänomene sieht (vgl. OECD 2004, S. 25). Mathematical Literacy soll damit für einen verständigen funktionalen Gebrauch von Mathematik stehen, der es ermöglicht, Realsituationen in mathematische Sprache zu übersetzen und umgekehrt. Indem so der Fokus auf ein rein reflektiertes Anwenden von Mathematik gerichtet wird, verringert man das breite Spektrum dieser Wissenschaft. Aspekte, die einer Leistungsüberprüfung nicht standhalten, wie z. B. Kreativität, treten möglicherweise in den Hintergrund.

Im Vergleich zu den Formulierungen bei PISA 2003 zeigten sich bei PISA 2012 bereits Präzisierungen beim Begriff „Mathematical Literacy". Die OECD definierte ihn ab PISA 2012 als

„Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens" (OECD 2013, S. 25).

Die Aufnahme von Aspekten der Interpretation und Verwendung von Formeln kann als Beleg gedeutet werden, dass dem Verstehen spezifischer mathematischer Denk- und Arbeitsweisen eine größere Bedeutung beigemessen wird. Weiterhin werden neben den kognitiven Elementen die Einstellungen (Attitudes) zur Mathematik betrachtet. Mathematische Grundbildung fokussiert in diesem Sinne weniger auf die Anwendung im Alltag; Mathematik soll stattdessen stärker als Kultur- und Bildungsgut verstanden werden (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 51).

2.2 Bilder und Überzeugungen von Mathematik

Mathematischer Schulstoff generiert sich, abgesehen von einigen Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, im Wesentlichen aus Erkenntnissen der Mathematik des 15. bis 19. Jahrhunderts. Das durch Medien und Schulbildung geprägte Bild von Mathematik widerspricht teilweise dem Wesen der modernen Bezugswissenschaft Mathematik. Wittmann (2003, S. 22 f.) bezeichnete die Vermittlung bestimmter Inhalte im tradierten Unterricht als „unnatürlich“ und charakterisierte sie wie folgt:

- Mathematische Inhalte erscheinen als logisch festgefügte Systeme von abgeklärten Begriffen, Regeln und Verfahren, welche auf bestimmte Klassen von Aufgaben zugeschnitten sind.
- Die Vermittlung des Stoffes erfolgt kleinschrittig und wird bis zur möglichst fehlerlosen Reproduktion eingeübt.
- Es erfolgt eine scharfe Trennung zwischen „wahr“ und „falsch“, verbunden mit einer entsprechend großen Angst bei Schülerinnen und Schülern, Fehler zu begehen.
- Eigene, möglicherweise auch fehlerbehaftete Überlegungen werden zugunsten des Reproduzierens vorgegebener Musterlösungen zurückgestellt.
- Äußere Formen von Darstellungen werden mitunter ohne ein hinreichendes mathematisches Verständnis überbewertet.

Rückschlüsse auf die Wirksamkeit von Unterricht können beispielsweise aus entsprechenden Maßnahmen zur Überprüfung mathematischer Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern auf den jeweiligen Ebenen (Klasse, Klassenstufe, Schule, Länderebene, Bundesebene, …) gezogen werden. Auf nationaler und internationaler Ebene wurden die Leistungen von Lernenden z. B. im Rahmen von TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) und PISA (Programme for International Student Assessment) getestet. Einige Ergebnisse der zurückliegenden Jahre, auf welche in Kapitel 5 differenziert eingegangen wird, ließen jedoch berechtigte Zweifel an der Effektivität des mathematischen Unterrichts in Deutschland aufkommen: Im tradierten Unterricht konnte bis zu jenem Zeitpunkt weder ein hinreichend adäquates Bild von der Wissenschaft Mathematik gezeichnet werden, noch konnten zentrale Leistungsüberprüfungen dem Unterricht eine hohe Effektivität und Nachhaltigkeit bescheinigen.

Zu diesen Problemfeldern ergeben sich weitere konzeptionelle Fragen, wie z. B. die nach einer didaktisch angemessenen Einbeziehung digitaler Medien in den Mathematikunterricht. Computeralgebrasysteme oder dynamische Geometriesysteme können schon seit Jahren bestimmte Handlungen des realen Unterrichts ersetzen. Tablets und Smartphones eröffnen schon jetzt völlig neue technische Perspektiven.

Die Frage danach, was Mathematikunterricht leisten soll bzw. künftig leisten muss, ist zu einer echten Sinnfrage geworden: Befindet sich der Mathematikunterricht in einer Krise? Dazu werden im Weiteren exemplarisch Thesen von Wittmann (2003, S. 22) sowie von Hischer und Lambert (2002, S. 98) genauer betrachtet. Die Autoren sprechen von einer Krise des Mathematikunterrichts, wenngleich Hischer und Lambert Krise nicht als Katastrophe, sondern als entscheidende Wendung („crisis“) oder eine Möglichkeit dazu verstehen möchten. Während sich Wittmanns Argumentation am Bild von Mathematik orientiert, diskutieren Hischer und Lambert stärker aus der Perspektive des Werkzeugeinsatzes im Mathematikunterricht (siehe Tabelle 1).

Sowohl Hischer und Lambert als auch Wittmann gründen ihre Lösungsansätze vornehmlich auf dem Wesen der Bezugswissenschaft Mathematik. Wittmann entwickelte sein stufenübergreifendes Leitbild für den Mathematikunterricht aus einer klaren Vorstellung heraus, was aus seiner Sicht Mathematik wirklich ist. Seiner Ansicht nach müssten Kinder, wenn sie Mathematik verstehen wollen, auch in die theoretische Natur der Mathematik eindringen (vgl. Wittmann 2003, S. 26). Eine frühzeitige und angemessene Strukturorientierung soll den Weg zur Entwicklung einer adäquaten Fach- und Symbolsprache sowie zu mathematischen Denk- und Arbeitsweisen vorbereiten. Übertrieben spielerische Unterrichtsangebote in den Grundschulen könnten jedoch „Brüche“ beim Wechsel in weiterführende Schulen bewirken und somit einen echten Zugang von Lernenden zu spezifischen Themen behindern oder sogar negative Einstellungen zum Fach befördern (vgl. Wittmann 2003, S. 21f.). Wendungen im Sinne von „crisis“ wird man nach Ansicht der Autoren weder durch eine ausschließlich methodisch motivierte Öffnung des Unterrichts, noch durch unreflektierten Einsatz digitaler Medien und erst recht nicht durch eine nicht authentische Anwendungsorientierung erreichen. Sie plädieren für eine Ausrichtung des Mathematikunterrichts, welche verstärkt charakteristische Denk- und Arbeitsweisen bei den Schülerinnen und Schülern befördert. Funktionales Denken kann als eine solche fundamentale Denkweise

	Wittmann (2003)	Hischer und Lambert (2002)
These	*„Das dem traditionellen Mathematikunterricht zu Grunde liegende Mathematikbild erschwert oder versperrt vielen Lernenden den Zugang zur Mathematik“* (Wittmann 2003, S. 22).	*„Der Mathematikunterricht befindet sich in einer anhaltenden Sinnkrise“* (Hischer/Lambert 2002, S. 98).
Ursachen für die Krise	verfälschtes Mathematikbild im traditionellen Mathematikunterricht (vgl. Wittmann 2003, S. 24)	Möglichkeit der Verlagerung von Handlungen, welche wesentliche Bestandteile des realen Mathematikunterrichts ausmach(t)en und „anhaltend“, da Lösungsansätze einseitig auf Einsatzmöglichkeiten von Computern im Unterricht fokussieren (vgl. Hischer/Lambert 2002, S. 98ff.)
Lösungs-ansätze	- Öffnung des Unterrichts auch vom Fach aus, anstatt nur von der Unterrichtsorganisation und -methodik - Beschäftigung mit mathematischen Mustern fordert reine und angewandte Aspekte der Mathematik gleichermaßen - „reiner“ Aspekt von Mathematik ist unverzichtbares Element des Mathematiklernens (z. B. durch spielerische Auseinandersetzung mit bedeutungsvollen mathematischen Fragestellungen, auch ohne zwingenden unmittelbaren lebensweltlichen Bezug) - Aspekt der Anschauung findet aufgrund theoretischer Natur mathematischer Begriffe prinzipielle Grenzen (vgl. Wittmann 2003, S. 26f.)	- Mathematikunterricht sollte ein gültiges Bild von Mathematik vermitteln, wobei Aspekte der Anwendbarkeit und der Modellierung berücksichtigt werden - Mathematik hat als unentbehrliches Werkzeug in vielen Wissenschaften und der Gesellschaft eine technische Seite (Mensch und Technik – *homo faber*) - Mathematik sollte aber auch mit ihrer philosophischen Seite als grandioses Spiel des Geistes in der Schule in Erscheinung treten (Mensch und Spiel – *homo ludens*) - bei Planung und Gestaltung von Mathematikunterricht sollten schließlich die Bildungsdimensionen „Spiel“ und „Technologie“ gleichermaßen Beachtung finden (vgl. Hischer/Lambert 2002, S. 98ff.)

Tab. 1 Gegenüberstellung von Positionen zur Krise des Mathematikunterrichts

aufgefasst werden. Mit Bestrebungen zu deren Entwicklung greift man mathematikdidaktische Forderungen auf, welche bis zur Meraner Reform zurückreichen.
Wie kann es nun Lehrkräften künftig besser gelingen, das Bild positiv zu beeinflussen? Welche Potentiale eröffnen sich daraus für die Lernenden?

> Mit der Entwicklung eines adäquaten Bildes von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern kann die Ausbildung von Überzeugungen als ein wesentliches Ziel von Unterrichtsentwicklung aufgefasst werden.

Die Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht beeinflussen das Denken und Handeln der Schülerinnen und Schüler wie das der Lehrkräfte. Die dem Lehrerhandeln zugrundeliegende professionelle Kompetenz beinhaltet neben rein kognitiven zahlreiche nicht-kognitive Komponenten (vgl. Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 478). Demnach generiert sich didaktisches Lehrerhandeln nicht nur aus objektiviertem theoretischen Wissen, sondern auch maßgeblich aus subjektiv geprägten und durchaus auch von der Theorie abweichenden berufsbezogenen Überzeugungen (vgl. Kratz 2011, S. 57ff.).

Diese berufsbezogenen Überzeugungen steuern, wie und in welchem Maße innovative Ideen im Unterricht Einzug finden. Damit stehen sie im engen Wechselverhältnis zu den allgemeinen Entwicklungen der Lehr- und Lernkultur und müssen als Ansatzpunkte für Unterrichtsentwicklungen hinreichend Beachtung finden.

> Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht sind Ansatzpunkte für erfolgreiche Unterrichtsreformen.

2.3 Überzeugungen von Lehrenden und Lernenden zu Mathematik und Mathematikunterricht

2.3.1 Begriffsbestimmungen und Untersuchungen zu Überzeugungen

Die Bedeutsamkeit von Überzeugungen für die Gestaltung nachhaltigen Lernens zeigt sich auch an einer Vielzahl entsprechender fachdidaktischer und bildungswissenschaftlicher Publikationen. In der Literatur werden Begriffe wie Vorstellungen, subjektive Theorien, Grundüberzeugungen, Bild von Mathematik, Einstellungen, Beliefs teilweise parallel verwendet. Für den in der internationalen Literatur häufig verwendeten Begriff „teacher beliefs" scheint sich im deutschen Sprachraum mehr und mehr die Bezeichnung „Überzeugungen" durchzusetzen (vgl. Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 479).
Die berufsbezogenen Überzeugungen sehen Reusser, Pauli und Elmer als Erweiterung des deklarativen und prozeduralen pädagogisch-psychologischen sowie des disziplinär-fachlichen Wissens. Bei den Überzeugungen handelt es sich um Bewertungskomponenten beinhaltende und affektiv aufgeladene Vorstellungen zu Lehr- und Lernprozessen sowie Lerninhalten. Diese werden von Lehrkräften für wahr und wertvoll gehalten und können darüber hinaus dem berufsbezogenen Denken und Handeln u. a. Struktur, Halt, Sicherheit und Orientierung geben (vgl. Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 478). Törner spricht von sogenannten Belief-Objekten und subsumiert darunter *„[I]m Grunde genommen alles, was in direkter oder indirekter Beziehung zur Mathematik steht"* (Törner 2002, S. 108). Die große Heterogenität in der Verwendung dieser Begriffe zeigt sich auch in der Vielschichtigkeit möglicher Kategorisierungen der Arten von Überzeugungen, wie sie sich z. B. bei Reusser, Pauli und Elmer (2011, S. 486ff.) oder auch bei Törner (2002, S. 118ff.) finden.
Überzeugungen sind nicht direkt beobachtbar. Sie müssen über Effekte, wie konsistentes Verhalten in ähnlichen Situationen, oder über Indikatoren identifiziert werden. Daraus er-

geben sich verschiedene Modelle. Angeführt seien hier die Modelle von Grigutsch (1996, S. 12ff.), Törner (2002, S. 118ff.), Op't Eynde, de Corte und Verschaffel (2003, S. 28), Maaß und Ege (2007, S. 59), Voss u. a. (2011, S. 237).

In Abbildung 1 werden diese Modelle gegenübergestellt: Die Kategorisierung von Törner steht im Mittelpunkt der Betrachtung, da sich hier die meisten Schnittstellen zu anderen Ansätzen aufzeigen lassen. Als ein weiteres grundlegendes Modell für diese Arbeit sei das von Grigutsch hervorgehoben. Die Argumentationen in den Kapiteln 2.3.2 und 2.3.3 basieren im Wesentlichen auf seinem Modell. Zwischen den verschiedenen Ansätzen in Abbildung 1 lassen sich – trotz unterschiedlicher Forschungsperspektiven – gewisse Korrelationen erkennen, welche mithilfe von Pfeilen verdeutlicht werden.

Die berufsbezogenen Überzeugungen, als Teil der professionellen Kompetenz von Lehrkräften, leiten sich insbesondere aus folgenden Merkmalen und Funktionen ab:

- Sie besitzen Ordnungs-, Orientierungs- und Regulierungsfunktionen und gewährleisten somit stabile und kontinuierliche Handlungsmuster (vgl. Törner 2002, S. 114ff.).
- Sie können zugleich entlastend und stabilisierend wirken (vgl. Törner 2002, S. 114; Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 479ff.).
- Sie können aber auch durch ihre filternde Wirkung intendierte Umstrukturierungsprozesse bremsen oder ihnen gar entgegenstehen (vgl. Törner 2002, S. 114ff.; Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 479ff.).
- Sie widerspiegeln berufsbiografisch verinnerlichte Strukturen (sowohl subjektiv gefärbte Professionsideale als auch kollektive Praktiken institutionalisierter Bildung) und lassen Rückschlüsse auf die wissenschaftliche Ausbildung der Lehrpersonen zu (vgl. Törner 2002, S. 114ff.; Reusser/Pauli/Elmer 2011, S. 479ff.).

Diese Merkmale unterstreichen noch einmal die Ambivalenz berufsbezogener Überzeugungen und verlangen zugleich eine intensive Berücksichtigung bei Maßnahmen zur Unterrichtsentwicklung. Bei der Umsetzung von Reformideen können sie eine selektierende oder gar bremsende Wirkung entfalten. Andererseits wirken sie als Katalysator, wenn die Reformideen mit den Überzeugungen der Lehrkräfte im Einklang stehen.

Die Bedeutsamkeit von Überzeugungen bei der Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse führt zu folgender These:

> Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht sind für Veränderungen (Reformen) zugleich Ausgangspunkt und Ziel.

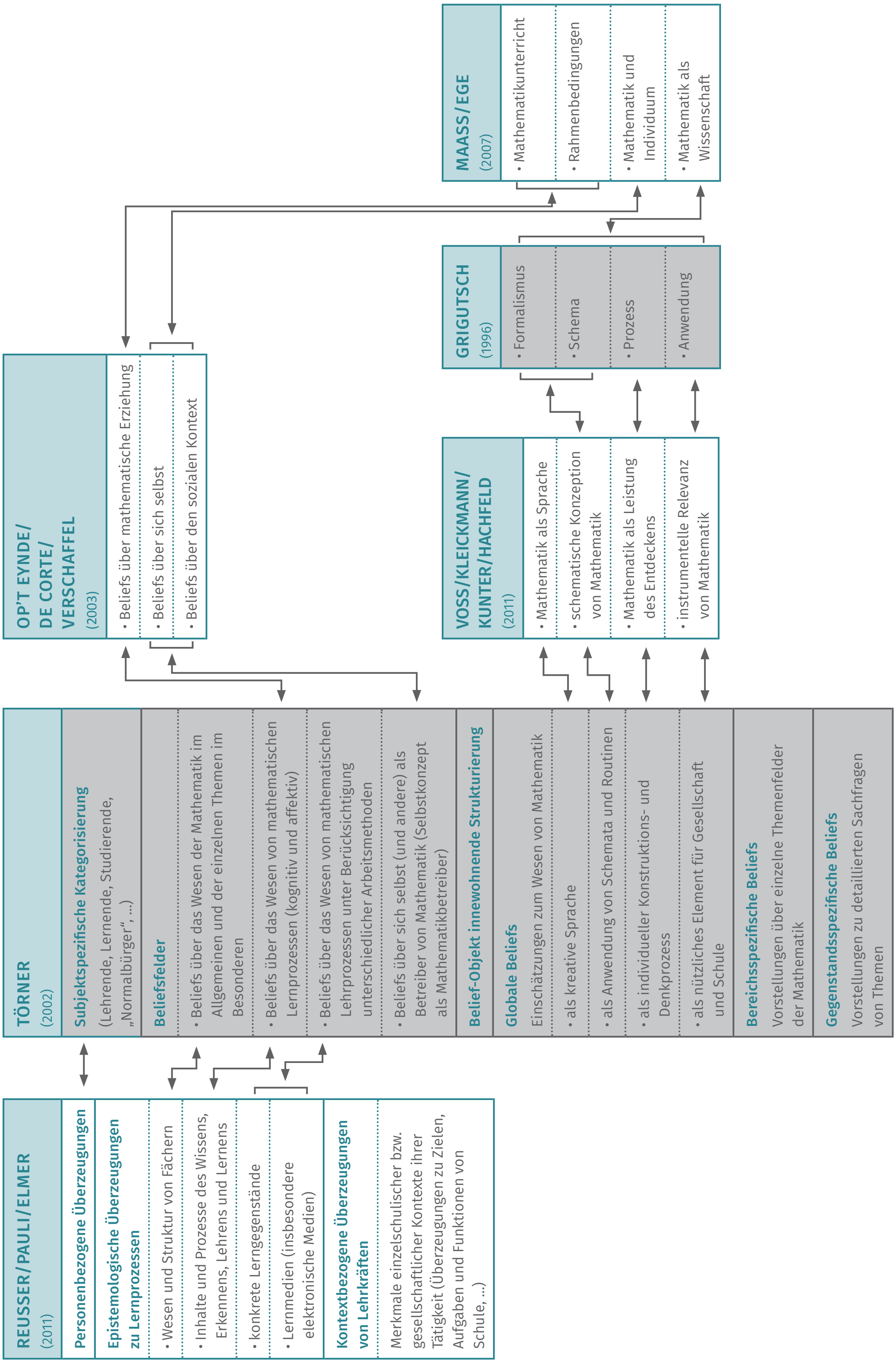


Abb. 1 Modelle zur Beschreibung von Vorstellungen

In den folgenden Kapiteln sollen nun erkenntnisleitende Fragen differenzierter betrachtet werden:

- Welche grundlegenden Überzeugungen besitzen Lehrkräfte zu Mathematik und Mathematikunterricht? Welche Auswirkungen haben diese auf das Lernverhalten und den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern?
- Welche grundlegenden Überzeugungen besitzen Schülerinnen und Schüler zu Mathematik und Mathematikunterricht und wie beeinflussen diese das Lernen von Mathematik?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse?

Untersuchungen zu mathematischen Weltbildern – sowohl von Lehrkräften als auch von Schülerinnen und Schülern – finden sich bei Grigutsch, Raatz und Törner (1998) und Grigutsch (1996). Unter einem „mathematischen Weltbild“ verstehen die Autoren ein System von Einstellungen gegenüber Mathematik. Es enthält neben kognitiven auch affektive Komponenten, welche sich in emotionalen Beziehungen zu einem Objekt äußern (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 6). Die Beziehungen zwischen einzelnen konkreten Einstellungen werden wiederum als Einstellungsstruktur aufgefasst (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 10). Um diese Einstellungen zu erfassen, leiten Grigutsch, Raatz und Törner eine bipolare Struktur ab: Während eine *statische* Sicht Mathematik als abstraktes System bzw. als fertige Theorie ansieht, die sich durch die Hochschulmathematik als ein in sich schlüssiges, widerspruchsfreies und nachprüfbares Konzept definiert, geht die *dynamische* Auffassung von Mathematik als Tätigkeit bzw. als Prozess aus (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 11). Die Dimensionen *Formalismus* und *Schema* repräsentieren damit eher *statische* Aspekte; *Prozess* und *Anwendung* eher *dynamische* Aspekte von Mathematik (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 12f.). Mithilfe dieser vier Kategorien hinterfragten die Autoren gleichermaßen die Mathematikbilder von Lernenden und Lehrenden.

2.3.2 Berufsbezogene Überzeugungen von Lehrenden zu Mathematik und Mathematikunterricht

Grigutsch, Raatz und Törner (1998) untersuchten das Bild von Lehrkräften mittels Fragebögen. Sie konnten belegen, dass Lehrpersonen nicht alle dieser vier Dimensionen als gleich relevant erachteten, weshalb auch von einem akzentuierten Bild von Mathematik bei der Zielgruppe ausgegangen werden kann.

Im Folgenden werden einige wesentliche Befunde zusammengefasst (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 32):

(1) Der Schema-Aspekt wurde im Durchschnitt eher gering und ablehnend eingeschätzt, während der Formalismus-Aspekt eine mittlere, mäßig hohe Bedeutung besaß. Anwendungs- und Prozess-Aspekt wurden gleichermaßen als bedeutsam, jedoch nicht überragend eingeschätzt.
(2) Das mathematische Weltbild eines Individuums wird vor allem von dessen strukturellen Verknüpfungen (siehe auch Punkt 3) und weniger durch die Ausprägung einzelner Eigenschaften beeinflusst.
(3) Bezüglich dieser Beziehungsstruktur ergaben sich folgende Zusammenhänge: Schema und Formalismus korrelierten signifikant positiv und diese wiederum mit Prozess signifikant negativ. Der Prozess-Aspekt korrelierte positiv mit dem Aspekt Anwendung.
(4) Es ergaben sich keine wesentlichen Unterschiede in den Einstellungen bezüglich verschiedener Schulformen. Lediglich tendenziell gab es Unterschiede beim Aspekt Schema: Unterrichtende der Hauptschule schätzten diesen Aspekt als mittelmäßig und Lehrkräfte der Realschulen als eher geringer ein. Bei Lehrpersonen von Gymnasien und Gesamtschulen verzeichnete man diesbezüglich eine ablehnende Haltung.

Die Studie zeigte, dass die Lehrkräfte aller Schularten Mathematik vorrangig als Prozess verstanden. Sie lehnten eine statische Sicht, welche Mathematik auf das Lernen, Üben und Anwenden von Rechenroutinen verengt, eher ab (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 36). Eine offensichtlich bessere Eignung von dynamischer Mathematik für Anwendungen zeigt sich demnach auch in den Einstellungen von Lehrkräften (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 32). Diese Befunde können, wenngleich sie nicht aus einer repräsentativen Umfrage hervorgehen, durchaus als positives Signal für die Entwicklung einer Unterrichtskultur gewertet werden, welche die Herausbildung eines adäquaten Bildes von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern befördert.

Neben ihrem persönlichen Bild von Mathematik wirken für die Lehrkräfte insbesondere ihre Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Im Rahmen des COAKTIV-Forschungsprogramms vom Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin untersuchte man die Genese, die Struktur und die Handlungsrelevanz professioneller Kompetenz von Lehrkräften (vgl. Baumert u. a. 2011, S. 7). Insbesondere wurden epistemologische und pädagogische Überzeugungen von Mathematiklehrkräften hinterfragt und zugleich deren Einfluss auf die konkrete Unterrichtsgestaltung sowie den Lernfortschritt bei Schülerinnen und Schülern untersucht. In der Studie ordnete man die Inhaltsbereiche „Natur des Wissens“ und „Lernen und Lehren von Mathematik“ den lerntheoretischen Fundierungen „transmissiv“ und „konstruktivistisch“ zu.

Bei den transmissiven Überzeugungen wird Mathematik als Toolbox angesehen. Die Unterrichtsprozesse sind dabei gekennzeichnet durch vorwiegend rezeptives Lernen (Beispiele und Vormachen), durch die Eindeutigkeit von Lösungswegen sowie durch das Einschleifen von Rechenroutinen. In der konstruktivistischen Sicht stellt sich Mathematik hingegen als Prozess dar: Der Unterricht ist von selbstständigem und verständnisvoll diskursivem Lernen geprägt. Die Lehrkräfte vertrauen darauf, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind bzw. in die Lage versetzt werden können, in einem hohen Maße selbstständig zu arbeiten (vgl. Voss u. a. 2011, S. 242).

Mit dieser repräsentativen Längsschnittstudie (vgl. Voss u. a. 2011, S. 250) konnte gezeigt werden, wie bedeutsam die Überzeugungen von Lehrkräften sind – für die Gestaltung von Unterricht sowie für den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern. Die Überzeugungen zur Natur des mathematischen Wissens und die Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik ließen sich sogar in übergeordneten charakteristischen Überzeugungssyndromen, d. h. einer konstruktivistischen bzw. transmissiven Orientierung, zusammenfassen.

Ebenfalls konnte gezeigt werden, dass sich transmissive Überzeugungen von Lehrkräften eher nachteilig auf die Unterrichtsqualität und den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler auswirkten, während konstruktivistische Überzeugungen die Unterrichtsgestaltung und den Lernerfolg positiv beeinflussten. Lehrkräfte mit deutlich konstruktivistischen Überzeugungen konnten zudem Schülerinnen und Schülern ein höheres Maß an konstruktiver Unterstützung im Lernprozess zuteil werden lassen, als es transmissiv eingestellten Lehrpersonen möglich war (vgl. Voss u. a. 2011, S. 250). Die Mehrheit der befragten Lehrkräfte positionierte sich im Mittel stärker zu einer konstruktivistischen Ansicht.

2.3.3 Überzeugungen von Lernenden zu Mathematik und Mathematikunterricht

Grigutsch (1996, S. 141) untersuchte die Einstellungen von Gymnasiasten der Jahrgangsstufen 6, 9 und 12. Seine Querschnittsuntersuchungen lieferten folgende Befunde: Während die Lernenden in Klassenstufe 6 Mathematik noch als eine Einheit auffassten, bei der die Dimensionen Formalismus, Schema, Prozess und Anwendung als sich ergänzende Teile eines Ganzen gesehen wurden, wandelte sich dieses Bild mit zunehmendem Schulalter (vgl. Grigutsch 1996, S. 141). Anstelle dieser Einheit trat immer deutlicher ein Dualismus zwischen statischer (Aspekte: Schema und Formalismus) und dynamischer Sicht (Aspekte: Prozess und Anwendung) zutage. Die Schülerinnen und Schüler entschieden sich meist für einen dieser Pole. In der Klassenstufe 12 kam es auch in den Grund- und Leistungskursen zu dieser differenzierten Sichtweise: Die Schülerinnen und Schüler der Grundkurse tendierten stärker zu einer statischen Sicht auf Mathematik und lehnten den dynamischen Pol eher ab, während die Schülerinnen und Schüler der Leistungskurse eher den dynamischen Aspekt von Mathematik betonten. Gründe hierfür vermutete Grigutsch (1996, S. 142) u. a. in schulischen Sozialisierungsprozessen. Dies könnte darauf hindeuten, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler eher zum Schema-Aspekt tendieren. Auch Lehrkräfte, welche überwiegend mit leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern arbeiten, neigten zu einer stärkeren Betonung des Schema-Aspekts (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S. 32f.).

Neben dem Mathematikbild untersuchte Grigutsch (1996, S. 144ff.) sogenannte Selbstkonzepte. Diese regeln – als Unterstruktur des mathematischen Weltbildes – die Beziehung zwischen Fach und eigener Person. Es ging dabei um die Frage, welches Bild Mathematik-Lernende über sich selbst haben. Grigutsch (1996 , S. 177) konnte weder einen direkten Zusammenhang zwischen Lust und Fleiß, noch zwischen Lust und Leistung (Note) nachweisen. Ein deutlicher Zusammenhang zeigte sich hingegen zwischen Note und Selbsteinschätzung der Leistung: Die Note wird als Teil des Fremdbildes der Lehrperson in das Selbstbild der Schülerin bzw. des Schülers integriert. Es erfolgt ein Wechsel von der als objektiv angenommenen Ebene der Leistungsmessung in eine subjektive Beurteilung dieser Leistung in der affektiven Ebene. Die Selbsteinschätzung der Leistung nimmt nach Grigutsch (1996, S. 177) die zentrale Stellung im Selbstbild von Schülerinnen und Schülern ein.

Maaß und Ege (2007, S. 71) untersuchten in einer empirischen Studie die Überzeugungen (die Autoren verwendeten den Begriff „Beliefs") von Hauptschülerinnen und Hauptschülern der Jahrgangsstufen 5 bis 9. Dabei konnten sie zwei große Gruppen von Beliefs rekonstruieren: Beliefs über den Mathematikunterricht an sich und Beliefs über die Nützlichkeit von elementarer Mathematik bezogen auf Alltag und Beruf. In der ersten Kategorie ergab sich ein Bild von Unterricht, welches auf rezeptivem Lernen basiert und Lehrpersonen zu Erklärern mathematischer Inhalte reduziert (vgl. Maaß/Ege 2007, S. 72). Bei den Lernenden in dieser Stichprobe konnten sie für das mathematische Weltbild folgende zwei Grundtypen ausmachen: Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler konnte den „reproduzierenden Regelanwendern" mit starker Betonung des Schema-Aspekts zugeordnet werden und nur der kleinere Teil den „realitätsbezogenen Problemlösern" mit deutlicher Ausprägung der Aspekte Anwendung und Prozess (vgl. Maaß/Ege 2007, S. 75).

Einige ausgewählte Befunde werden im Weiteren genannt (vgl. Maaß/Ege 2007, S. 72):

(1) Die Schülerinnen und Schüler schätzten Aufgaben dann als gut ein, wenn sie von ihnen verstanden bzw. wenn sie von Lehrpersonen hinreichend genau erläutert wurden.
(2) Der empfundene Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erschien den Schülerinnen und Schülern bedeutungsvoller als der eigentliche Sachkontext.
(3) Realitätsnahe Aufgaben stießen grundsätzlich auf das Interesse der Lernenden, sofern sich der Sachkontext aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler generierte.
(4) Aufgaben mit fehlenden Angaben wurden als nicht lösbar eingestuft und entsprechend negativ bewertet.
(5) Offenere Aufgaben lösten bei den Schülerinnen und Schülern Unbehagen und Unsicherheit aus.
(6) Fehler sahen sie als etwas Negatives an, weshalb es galt, sie zu vermeiden.

Besonders die Befunde (1) und (2) korrelieren mit der Einschätzung von Grigutsch (1996, S. 177) zur Wirksamkeit der Selbsteinschätzung der eigenen Leistungen. Subjektive Bewertungen von Schülerinnen und Schülern zum eigenen Leistungsstand und zum Schwierigkeitsgrad mathematischer Aufgaben beeinflussen demnach erheblich die Lernprozesse und Lernerfolge.

Diese Tatsache steht in Übereinstimmung mit den Faktoren für erfolgreiches Lernen, welche Hattie (2013) in seiner Metastudie bündelte. Als einen der effektstärksten Einzelfaktoren (Effektstärke von d = 1,44) führte Hattie (2013, S. 53) die Selbsteinschätzung des eigenen Leistungsniveaus an. Mit deutlich kleinerer Effektstärke wurden das Selbstkonzept (d = 0,43) (vgl. Hattie 2013, S. 55) und die Einstellung zu Mathematik und Naturwissenschaften (d = 0,36) (vgl. Hattie 2013, S. 60) angeführt. Grundsätzliche Erläuterungen zur Studie sowie weitere Ergebnisse finden sich in Kapitel 6.2.

Mathematikbezogene Einstellungen und Selbstkonzepte von Jugendlichen waren auch Untersuchungsgegenstand von PISA 2012. Ausgewählte Ergebnisse aus dieser Untersuchung werden in Kapitel 5.3 dargestellt.

2.3.4 Konsequenzen für die Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse

Mathematik-Lehrende und Mathematik-Lernende haben aus den zuvor genannten Gründen jeweils spezifische Überzeugungen und Vorstellungen zur Wissenschaft Mathematik und zum Mathematikunterricht. Doch inwieweit können diese Überzeugungen und Vorstellungen zur Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse genutzt werden?

Aufgrund der Kausalitäten zwischen Mathematikbild und Selbstbild von Lernenden kann davon ausgegangen werden, dass bestimmte Mathematikbilder einen Lernerfolg eher fördern oder eher beeinträchtigen (vgl. Grigutsch 1996, S. 187). Grigutsch (1996, S. 188) plädierte daher für die Vermittlung eines Mathematikbildes, welches den Schema-Aspekt weniger betont und die Aspekte Anwendung und Prozess deutlich herausstellt.
Daraus ergeben sich zwei grundsätzliche Fragen:

- Wie lassen sich die Bilder von Mathematik bei Lehrkräften beeinflussen?
- Wie kann Schülerinnen und Schülern ein für den Lernerfolg förderliches Mathematikbild vermittelt werden?

Veränderungen im Mathematikbild von Lehrpersonen könnten u. a. durch eine Schwächung bestehender transmissiver Überzeugungen zugunsten konstruktivistischer Ansätze befördert werden (vgl. Voss u. a. 2011, S. 251). Im Rahmen der Lehrerausbildung und der Lehrerfortbildung sollten Ausbilder ein Bewusstsein für die verhafteten Theorien bei den Studierenden bzw. Fortzubildenden entwickeln. Die Ausbilder sollten weiterhin Gelegenheiten bieten, bestehende Theorien infrage zu stellen und gleichzeitig die aktive Auseinandersetzung mit den vorhandenen Überzeugungen zu fördern und zu diskutieren (vgl. Voss u. a. 2011, S. 251).
Grigutsch (1996, S. 219) konnte in seiner Arbeit keinen direkten Zusammenhang zwischen dem Einstellungswert einer Lehrkraft – in einer der Dimensionen des mathematischen Weltbildes – und dem eines Lernenden nachweisen. Das mathematische Weltbild einer Lehrkraft scheint keinen direkten Einfluss auf das mathematische Weltbild von Schülerinnen und Schülern zu haben. Trotzdem zeigten sich in allen Einstellungsdimensionen deutliche Differenzen zwischen den Schulklassen als Gesamtheit. Diese Unterschiede resultieren nach Grigutsch (1996, S. 219) aus dem erlebten Mathematikunterricht. Danach beeinflussen die Lehrkräfte indirekt, durch die konkrete Ausgestaltung des Unterrichts, das mathematische Weltbild der Lernenden.
Die Vermittlung eines adäquaten Bildes von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern ist ein wesentliches Ziel mathematischer Bildung (siehe Kapitel 2.2). Wenn folglich Lehrkräfte über die Unterrichtsgestaltung auf dieses Bild einwirken können und die Unterrichtsgestaltung wiederum von den Überzeugungen der Lehrpersonen beeinflusst wird, sollten Veränderungen in den Überzeugungen von Lehrenden ein Ziel unterrichtlicher Reformen sein. So gesehen sind für mögliche Reformen die Überzeugungen zugleich Ausgangspunkt und Ziel. In Abbildung 2 werden die Veränderungen in den Überzeugungen im Kontext des Unterrichts veranschaulicht. In einem spiralartigen Prozess können

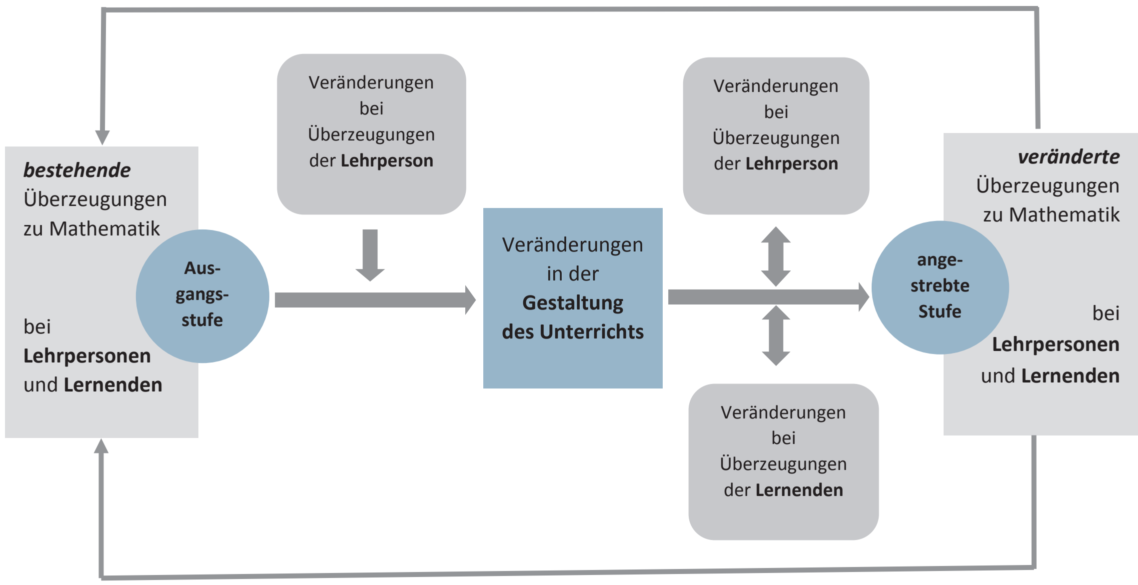


Abb. 2 Veränderungen von Überzeugungen

veränderte Überzeugungen zu bestehenden Überzeugungen und damit wieder zum Ausgangspunkt weiterer Entwicklungen werden.

Folgende Ansatzpunkte ergeben sich daraus für die konkrete Unterrichtsgestaltung:

Förderung von Selbstständigkeit

Mathematik wird dann intensiver als Prozess wahrgenommen, wenn selbstständiges und diskursives Lernen überwiegend rezeptives Lernen ablöst. Die kognitive Aktivierung ist ein bedeutsamer Mediator zwischen den Überzeugungen von Lehrkräften und den Schulleistungen der Schülerinnen und Schüler.

Öffnung des Unterrichts

Aus einem konstruktivistischen Ansatz heraus ergeben sich in verschiedenen Ebenen Möglichkeiten zur Öffnung von Mathematikunterricht. Derartige Öffnungen werden in der aktuellen Unterrichtspraxis mitunter durch die bei Lehrkräften bestehenden berufsbezogenen Überzeugungen verhindert, da diese sehr stabil sind und filternde Wirkung besitzen. Die Auseinandersetzung mit berufsbedingten Überzeugungen wird somit zu einer Voraussetzung für Unterrichtsentwicklung.
Maaß und Ege (2007, S. 79ff.) plädieren für eine grundsätzlich stärkere Beachtung der Vorstellungen und Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler. Im Umgang mit offenen Aufgaben fordern sie eine besondere Sensibilität bei den Lehrpersonen: Die Schülerinnen und Schüler müssten zunächst lernen, mit den neuen ungewohnten Aufgabentypen

umzugehen. Sie sollten langsam an offene Aufgaben herangeführt werden und zunehmend einen konstruktiven Umgang mit Fehlern erfahren.

Lernförderliche Rahmenbedingungen

Grundsätzlich sollte eine angstfreie Atmosphäre geschaffen werden, um Versagensängsten entgegenwirken zu können (vgl. Maaß/Ege 2007, S. 79). Obwohl in der COAKTIV-Studie (vgl. Voss u. a. 2011, S. 249) nachgewiesen werden konnte, dass konstruktivistische Überzeugungen die Unterrichtsgestaltung und den Lernerfolg im Wesentlichen positiv beeinflussen, zeigten sich auch bei einem sehr hohen Maß an konstruktivistischen Überzeugungen negative Auswirkungen auf das emotionale Erleben von Lernenden, sofern die Lehrkraft nicht gut begleitete. Unter bestimmten Bedingungen erscheint es für spezielle Schülergruppen daher vorteilhaft, gewisse transmissive Überzeugungen in eine konstruktivistische Grundhaltung zu integrieren.

Hattie (2013, S. 286f.) vertritt in seiner Metastudie diesbezüglich eine extreme Position: Er lehnt reformpädagogische und konstruktivistische Ansätze grundsätzlich als nicht lernförderlich ab. In seiner Interpretation ist ein aktiver und geführter Unterricht deutlich effektiver als ein ungeführter und erleichternder Unterricht.

Nachdem die Bedeutsamkeit von Überzeugungen und Bildern für den Mathematikunterricht im Allgemeinen herausgearbeitet wurde, werden nun die besonderen Potentiale funktionalen Denkens betrachtet.

3 Gestalten und Gelingen von Mathematikunterricht: Zur zentralen Bedeutung funktionalen Denkens

3.1 Funktionales Denken als basale Denkform

3.1.1 Begriffsbestimmungen

Eine einheitliche Definition zum Begriff Denken lässt sich weder in der Kognitionspsychologie, noch in anderen Wissensgebieten finden (vgl. Fröhlich 2010, S. 130). Als Konsens kann die Ansicht von Fröhlich gewertet werden, nach welchem Denken erst dann einsetzt, *„wenn keine automatischen, d. h. zur Routine gewordenen Wege verfügbar sind“* (Fröhlich 2010, S. 131). Definitionsversuche zum Begriff „Denken“ beinhalten einen Katalog von Tätigkeiten oder Fähigkeiten. Grundsätzlich ist Denken als kognitiver Prozess der Informationsverarbeitung und Informationsnutzung zu verstehen. Dabei werden Informationen aufgenommen und in Begriffe oder Symbole gefasst, analysiert und interpretiert, um im Hinblick auf bisherige Erfahrungen um und neu geordnet zu werden (vgl. Fröhlich 2010, S. 130). Denken kann geplanten Handlungen vorausgehen bzw. aus einer gegenwartsbezogenen oder rückwärts gerichteten Perspektive zum Verständnis, zur Reflexion oder zur Bewertung von vorangegangenen Situationen beitragen (vgl. Dorsch/Wirtz/Strohmer 2013, S. 360).

In der Mathematikdidaktik werden meist nur Ausschnitte des Denkens unter spezifischen Aspekten betrachtet. Begriffliche und inhaltliche Überschneidungen zwischen verschiedenen Denkarten sind dennoch nicht vollständig zu vermeiden. Im Folgenden soll der Begriff des funktionalen Denkens präzisiert und in eine Begriffsstruktur eingebunden werden. Dabei werden insbesondere die Begriffsauslegungen von Vollrath, Schwank und Roth betrachtet.

Eine fundamentale Auseinandersetzung mit dem Begriff des funktionalen Denkens liefert Vollrath in seinem 1989 erschienenen Aufsatz „Funktionales Denken“. Aufgrund der Bedeutsamkeit seines Ansatzes für diese Arbeit soll er in den Kapiteln 3.1.4 und 3.1.5 detaillierter betrachtet.

Während Vollraths Sichtweise und die Meraner Sicht in nur einigen, noch zu klärenden Punkten differieren (siehe Kapitel 4), unterscheiden sich diese deutlich vom Begriffsverständnis von Schwank. Schwank (2003) betrachtet Unterschiede in den Strukturen und Strategien des Denkens aus der Perspektive der kognitiven Mathematik, jenem Forschungszweig, der die Sichtweisen der Kognitionspsychologie und der Mathematik zusammenführt. Die kognitive Mathematik geht davon aus, dass das menschliche Gehirn über zwei Empfangsarten verfügt: eine für „Gleichheiten" (z. B. Ähnlichkeiten, Verwandtschaften) und eine für „Unterschiedlichkeiten" (z. B. Verkettung von mehreren Konstruktionsprozessen). Daraus leiten sich die Begriffe *prädikatives Denken* und *funktionales Denken* ab (vgl. Schwank 2003, S. 70). Die Prüfung eines wiederholten Zutreffens von sogenannten Prädikaten spiegelt dabei eine eher statische Denkweise wieder. Dagegen steht funktionales Denken ihrer Sicht nach für ein wiederholtes Testen bestimmter Konstruktionsschritte und damit für eine eher dynamische Sicht. Funktionales Denken bezieht sich bei Schwank (2003, S. 70) auf ein „Hineinsehen" von Bewegungen sowie eine daraus abgeleitete argumentative Nutzung. Demzufolge beschreibt Schwank mit funktionalem Denken eine Kompetenz des beweglichen Denkens und grenzt sich damit von Vollraths Interpretation des Begriffes ab.

Eine weitere Denkart wird durch den Begriff „bewegliches Denken" beschrieben. Roth (2005, S. 47) versteht es als eine spezifische Herangehensweise an mathematische Problemstellungen und damit als Bestandteil mathematischen Denkens. Kennzeichnend für bewegliches Denken sind folgende grundlegende Fähigkeiten (vgl. Roth 2005, S. 73):

- Bewegungen (in eine zunächst statische Konfiguration) hineinsehen und damit argumentieren,
- Gesamtkonfigurationen erfassen und analysieren,
- Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.

Es zeigen sich wesentliche Übereinstimmungen zwischen den Begriffen des beweglichen und des funktionalen Denkens im Sinne der Meraner Reformideen (vgl. Roth 2005, S. 68). Roth (2005, S. 71) betont ausdrücklich, dass sich bewegliches Denken nicht auf „Änderungsverhalten" reduziert, sondern dass die Fähigkeit beweglichen Denkens, Gesamtkonfigurationen zu erfassen und zu analysieren, gerade mit der „Sicht als Ganzes" (Objektaspekt) beschrieben werden kann.

In Abweichung vom Meraner Verständnis integriert Vollrath (1989) in seiner Begriffsbestimmung den statischen Aspekt der Zuordnung, um damit eine Brücke zu mengentheoretisch orientierten Ansätzen der „Neuen Mathematik" zu schlagen. Diese spezifischen Denkweisen können als Bestandteile eines globalen mathematischen Denkens angesehen werden. Indem man in der didaktischen Literatur jedes Denken in einem mathematischen Kontext mathematischem Denken zuordnet, fasst man diesen Begriff recht weit (vgl. Roth 2005, S. 48). Die Abbildung 3 zeigt, in Anlehnung an eine Darstellung von Roth (2005, S. 74), eine Verknüpfung der vier ausgewählten Denkarten.

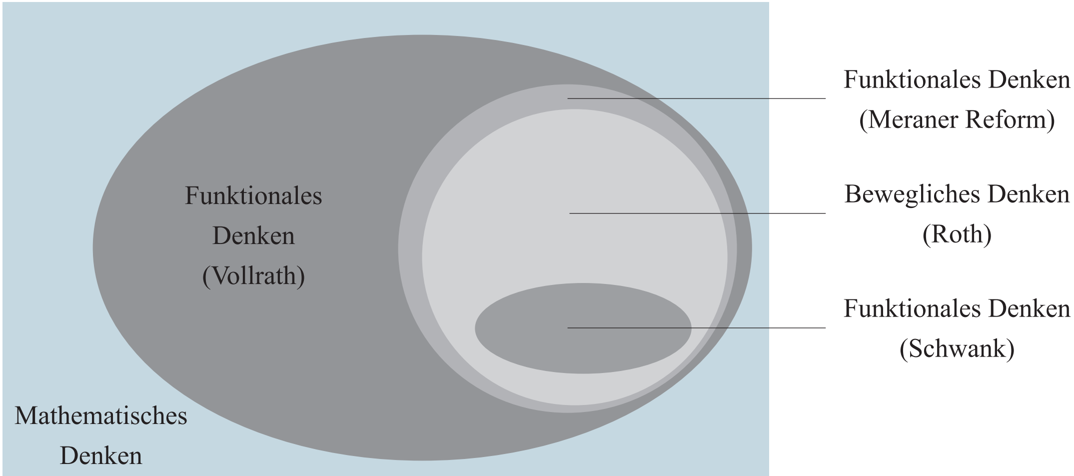


Abb. 3 Zusammenhang von beweglichem und funktionalem Denken

3.1.2 Aspekte der Allgemeinbildung

Wie bereits erwähnt, misst sich die Bedeutung eines Faches auch an seinem Beitrag zur Allgemeinbildung. Heymann betrachtete dazu das Verhältnis von mathematischem und Alltagsdenken und stellte damit eine der „traditionsreichsten" Begründungen auf den Prüfstand:

> *„Daß man durch die Beschäftigung mit Mathematik seine geistigen Fähigkeiten entwickele, insbesondere denken lerne, ist die traditionsreichste Begründung für Mathematik als allgemeinbildendes Schulfach"* (Heymann 1996, S. 205).

Daraus resultieren folgende Fragen (vgl. Heymann 1996, S. 205):

- Kann in Anbetracht der Bereichsspezifität menschlichen Denkens die Annahme, der Mathematikunterricht schule generell die allgemeine Denkfähigkeit der Schülerinnen und Schüler, noch aufrechterhalten werden?
- Trägt Mathematikunterricht zu einer Erweiterung oder lediglich zu einer Spezialisierung von Denktätigkeiten bei Kindern und Jugendlichen bei?

Jugendlichen, aber auch Erwachsenen, denen Mathematik Schwierigkeiten bereitet, erscheint in ihrer Wahrnehmung mathematisches Denken *„auf eine eigentümliche Weise verschlüsselt, ‚verdreht', unnatürlich, so dass man ohne weiteres ‚nicht darauf kommt'"* (Heymann 1996, S. 206f.). Beide Denkmodi, Alltagsdenken und mathematisches Denken, werden als voneinander getrennt wahrgenommen (vgl. Heymann 1996, S. 207). Im Folgenden soll dieser Zusammenhang näher betrachtet werden.

Grundlegend für mathematisches Denken ist ein Verstehen mathematischer Begriffe, Regeln und Zusammenhänge. Andererseits ist dieses Verstehen für das Lösen elementarer mathematischer Probleme nicht zwingend erforderlich, da auch unverstandene, aber korrekt angewandte Mathematik mathematisches Denken zu einem gewissen Teil ersetzen kann (vgl. Heymann 1996, S. 209f.). In der Umgangssprache ist mit „Verstehen“ oft weniger der Denkvorgang als vielmehr die subjektive Bewertung eines individuellen Wahrnehmungs- und Denkprozesses gemeint. Verstehen wird laut dieser Interpretation von einer Person *erlebt* (vgl. Heymann 1996, S. 211). Psychologisch betrachtet ist „Verstehen“ das Herstellen kognitiver Verknüpfungen. Es ist umso intensiver, je mehr Verbindungen ein Individuum zu bereits verstandenen Sachverhalten knüpft (vgl. Heymann 1996, S. 211).

Für Heymann (1996, S. 216f.) hat Verstehen verschiedene Dimensionen: Für ihn ist es ein emotional meist positiv belegtes subjektives Erleben eines kognitiven Prozesses (Erlebnisdimension). Darüber hinaus beschreibt er die Verknüpfung bestimmter Sachverhalte oder „Gegenstände“ mit neuen Erfahrungen und mit vorhandenem Wissen als Gegenstandsdimension. In unterrichtlichen Interaktionsstrukturen zeigt sich eine soziale Dimension.

Um den Prozess des Verstehens beeinflussen zu können, muss man sich den Doppelcharakter der Mathematik vor Augen führen (vgl. Heymann 1996, S. 218): Mathematik ist einerseits ein abstraktes formales System, das reale Gegenstände und deren Beziehungen durch Begriffe und Regeln erfasst und sich selbst genügen kann. Zugleich kann Mathematik als ein abstraktes referentielles System aufgefasst werden, welches sich durch inner- und außermathematische Interpretationen auszeichnet. *„Verstehen mathematischer Sachverhalte heißt deshalb nicht zuletzt, die formale und die referentielle Bedeutung aufeinander beziehen zu können“* (Heymann 1996, S. 223f.). Heymann (1996, S. 221) stellt heraus, dass eine bloße Kopplung von mathematischen Ausdrücken mit entsprechenden Referenzsituationen noch kein echtes Verstehen induziert. Der Wechsel zwischen der mathematischen und der außermathematischen Welt muss als Prozess verstanden werden, welcher schrittweise und wiederholt abläuft.

Eine stärkere Berücksichtigung referentieller Aspekte im Mathematikunterricht erfordert Veränderungen in der Unterrichtskultur, beispielsweise durch die Öffnung von Unterricht für Erkundungsprozesse oder durch eine stärkere Tolerierung von Abstufungen zwischen „richtig“ und „falsch“ (vgl. Heymann 1996, S. 223). Didaktische Ansätze für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht können sich aus einer differenzierten Betrachtung des Zusammenhangs zwischen mathematischem und Alltagsdenken generieren. Heymann (1996, S. 225) vergleicht dazu beide Begriffe hinsichtlich dreier ausgewählter Merkmale (siehe Tabelle 2).

	Alltagsdenken	Mathematisches Denken
verwendete Begriffe	Begriffe der Alltagssprache mit einem breiten Bedeutungsspektrum	mathematische Begriffe aus der Fachsprache, welche in einem gegebenen Fachkontext klar definiert sind
Handlungen	explizite Regeln lassen sich nicht formulieren oder sind nicht mathematischer Natur	gewisse formale Regeln werden nachprüfbar eingehalten
Messung des Erfolges	erfolgreiches Lösen alltagspraktischer Probleme ohne Verwendung spezifischer mathematischer Mittel	erfolgreiches Lösen mathematischer Probleme

Tab. 2 Alltagsdenken und mathematisches Denken

Für das Verhältnis dieser beiden Denkmodi stellt Heymann (1996, S. 224) weiterhin zwei konträre Annahmen gegenüber: die Differenz- und die Kontinuitätsannahme (siehe Tabelle 3).

Differenzannahme	Kontinuitätsannahme
Alltägliches und mathematisches Denken sind grundverschieden. - Alltagssprache und Alltagsdenken sind unpräzise und führen zu keinen klaren Ergebnissen - Verharren in diesem Alltagsdenken wird als eine Fehlerursache gesehen - Ersetzen des Alltagsdenkens durch mathematisches Denken wird zu einem Ziel des Mathematikunterrichts	Mathematisches Denken ist eine systematische Fortschreibung des Alltagsdenkens. - Alltagsdenken wird stufenweise durch gezielte Schärfung der Begrifflichkeiten und durch systematische und bewusste Anwendung bestimmter Schlussweisen und Strategien effektiviert - Mathematik als „Verstärker“ des Alltagsdenken

Tab. 3 Differenz- und Kontinuitätsannahme

Heymann selbst vertritt grundsätzlich die Kontinuitätsannahme:

> *„Wenn man das […] Modell menschlichen Denkens zugrunde legt, gibt es keinen Grund zu der Annahme, daß die Denkakte selbst – im engeren Sinne des kognitiven Operierens – von grundsätzlich unterschiedlicher Qualität sein müßten“* (Heymann 1996, S. 227).

Verstehen misst sich am Grad der Verknüpfung von neu Gelerntem mit bereits verstandenen Sachverhalten. Die Theorie, dass Mathematik eine qualitativ andere Art des Denkens erfordert, konnte empirisch nicht belegt werden (vgl. Heymann 1996, S. 232). Kognitive Operationen für das Alltagsdenken finden auch im mathematischen Denken statt, jedoch mit Unterschieden in den Begrifflichkeiten und in der Vernetzung. Mathematik besitzt eine eigene Sprache. Sie unterscheidet sich von der natürlichen Sprache sowohl durch die Grammatik als auch durch die Abstraktheit der Begriffe.

Folglich kann die Fähigkeit „mathematisch“ zu denken aus einer dichteren Vernetzung von mathematischen Wissenselementen innerhalb der Mathematik und mit Alltagswissen erklärt werden (vgl. Heymann 1996, S. 229). Die Fähigkeit, derartige Verknüpfungen herzustellen, ist bei den Menschen unterschiedlich ausgeprägt. Diese Fähigkeit kann jedoch nachhaltig beeinflusst werden, indem geeignete Anlässe und Anreize zum Denken geschaffen werden. Im Mathematikunterricht geht es demnach nicht darum, mathematisches Wissen vom Alltagswissen zu separieren, sondern darum, vielfältige Möglichkeiten der Verknüpfung zu schaffen. Heymann schreibt dazu:

> *„Mathematisches Denken setzt nicht ein ‚Umschalten‘ vom üblichen Denken voraus oder gar ein ‚Ausschalten‘; sondern es steht für einen systematischeren Gebrauch des üblichen Denkens und für seine Ausweitung auf neue, mit dem Alltagswissen vielfältig vernetzte Wissensbereiche – den Wissenskorpus der Mathematik – sowie für eine effektive Nutzung der in diesen neuen Wissensbereichen bereitgestellten Denkwerkzeuge“* (Heymann 1996, S. 229).

Aus der Forderung Heymanns, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik als „Verstärker“ des Alltagsdenkens erfahren sollten, leiten sich Beiträge des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung ab. Er betont, dass eine Beschäftigung mit Mathematik per se weder die allgemeine Denktätigkeit verbessert noch zu einem kritischen Vernunftgebrauch führt. Welchen Beitrag der Mathematikunterricht zur Förderung des allgemeinen Denkens leistet, hängt in erster Linie von seiner didaktischen und methodischen Gestaltung ab. Heymann (1996, S. 247f.) fasst dazu wesentliche Kriterien für einen denkfördernden Mathematikunterricht zusammen:
In erster Linie sollte Mathematikunterricht verstehensorientiert sein. Die Schülerinnen und Schüler erlernen abstrakte mathematische Begriffe nicht durch induktive Definitionen. Vielmehr ermöglichen unterschiedlichste Erfahrungen mit Phänomenen Vernetzungen mit Vorwissen und fördern somit echtes Verstehen. Wenn möglich, sollten erwünschte wechselseitige Übertragungen von der Mathematik auf die Alltagswelt immer wieder an beziehungsreichen Themen geübt werden. Bedeutungsvoller als die Themenauswahl an sich schätzt Heymann die Art und Weise der mathematischen Interaktionen ein. Die Schülerinnen und Schüler sollen *„den Umgang mit Mathematik [...] in einer gelebten sozialen Praxis vernünftigen Argumentierens, Befragens, Anzweifelns und Begründens erfahren können“* (Heymann 1996, S. 248). Das „Einschleifen“ von mathematischen Handlungen kann einen solchen Verstehensprozess nicht ersetzen. Ein Mathematikunterricht, welcher einseitig auf abstrakte formale Aspekte ausgerichtet ist, wird demnach keinen bemerkenswerten Beitrag zu einer allgemeinen Denkentwicklung leisten. Heymann schlussfolgert:

> *„Erst auf der Basis hinreichend verstandener Mathematik können Schüler erfahren, daß mathematische Begriffe und Techniken in vielen Situationen als ‚Verstärker' ihres Alltagsdenkens taugen"* (Heymann 1996, S. 248).

3.1.3 Funktionales Denken – eine Begriffsgeschichte

Das Prinzip des „funktionalen Denkens" hat, bezogen auf den Mathematikunterricht, eine über einhundertjährige Geschichte. Zum beginnenden 20. Jahrhundert setzte Felix Klein „funktionales Denken" an die Spitze einer Idee zu tiefgreifenden didaktischen und methodischen Veränderungen im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Weder die formal bildenden Aspekte von Mathematik noch der reine Anwendungsbezug sollte den Unterricht fortan bestimmen. Vielmehr sah Klein (1907, S. 29) in der Verschmelzung beider Aspekte ein anzustrebendes Ideal. Die „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens" wurde zu einer zentralen Forderung der Meraner Unterrichtsreform. Dabei ging es um weit mehr als eine verstärkte Einbeziehung des Funktionsbegriffes in den Mathematikunterricht. Es galt,

> *„den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Erkenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewussten zu machen"* (Gutzmer 1908, S. 104).

Selbst nach mehr als 110 Jahren sind diese Forderungen, welche bereits Bezüge zum Spiralprinzip und zu fundamentalen Ideen erkennen lassen, aktuell. Erstmalig werden sie im Meraner Lehrplan von 1905 erwähnt. Aus der Forderung, *„die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen"* entsprangen zwei Sonderaufgaben: *„die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens"* (Gutzmer 1908, S. 104).

Funktionales Denken sollte nicht nur die Funktionslehre, sondern den gesamten Mathematikunterricht durchdringen und so den Lehrstoff vertikal strukturieren. Das „Prinzip der Reinheit der Methoden" ersetzten Klein und Schimmack durch das Prinzip der „Fusion von Arithmetik und Geometrie" und schufen damit ein tragendes methodisch-didaktisches Gestaltungskonzept (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 38). Das Meraner Programm wurde von Lehrkräften der Universitäten wie der von höheren Schulen weitgehend akzeptiert (vgl. Krüger 2000, S. 166). Einwände betrafen jedoch nur wenige inhaltliche Details zu Methodik und Formalien. Befürworter wie Höfler unterstützten die neuen Ideen mit *„Ratschlägen für ihre didaktisch wirksame Durchführung“* (Höfler 1910, S. 19). Ebenso wie Höfler erkannte Rudert durch seine Untersuchungen zu Auswirkungen systematischer Veränderungen einen verständnisorientierten Zugang zu funktionalem Denken (vgl. Krüger 2000, S. 192).

Zur Umsetzung der Reformgedanken bedurfte es, neben Veränderungen in der Lehrerausbildung an den Universitäten, entsprechender Impulse für die bereits tätigen Lehrkräfte. Bedeutsam waren hierfür die seit Ende des 19. Jahrhunderts stattfindenden naturwissenschaftlichen Ferienkurse für Lehrkräfte an einigen deutschen Universitäten (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 170). Große Teile der Lehrerschaft waren durch Veröffentlichungen von Kultusbehörden sowie Veränderungen in Lehrwerken bzw. in didaktischer Literatur zu erreichen. Die Implementierung der ursprünglichen Reformideen an den höheren Schulen gestaltete sich jedoch schwierig. Einige Lehrkräfte deuteten die Idee des funktionalen Denkens als frühzeitige Einführung des Funktionsbegriffes. Nach wenigen Jahrzehnten mündete diese Reduktion in den Umgang mit einem definierten und vorgegebenen Funktionsbegriff. Der Grundstein zu dieser Verengung des Begriffes wurde bereits kurz nach der Meraner Reform gelegt. Im Folgenden soll nun die Begriffsentwicklung für die Zeitspanne zwischen der Meraner Reform und der Entwicklung der Bildungsstandards skizziert werden. In Abbildung 4 werden dazu wesentliche Etappen zusammengefasst und exemplarisch Autoren genannt. Erste Ansätze einer engeren Bindung an den Funktionsbegriff lassen sich bereits wenige Jahre nach der Meraner Reform in der didaktischen Literatur finden. So bezeichnete Lietzmann (1919, S. 236) funktionales Denken als „Bindemittel“ zur Verknüpfung verschiedener mathematischer Kapitel. Im preußischen Lehrplan von 1925 (den sogenannten „Richert'schen Richtlinien“) sprach man nur noch von *„Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größen“* (Richert 1980, S. 81). Die Folgejahre waren geprägt von einer starken begrifflichen Generalisierung und einer zunehmenden Reduzierung auf inhaltliche Betrachtungen von systematischen Änderungen in verschiedenen Bereichen der Mathematik (vgl. Vollrath 1989, S. 4).

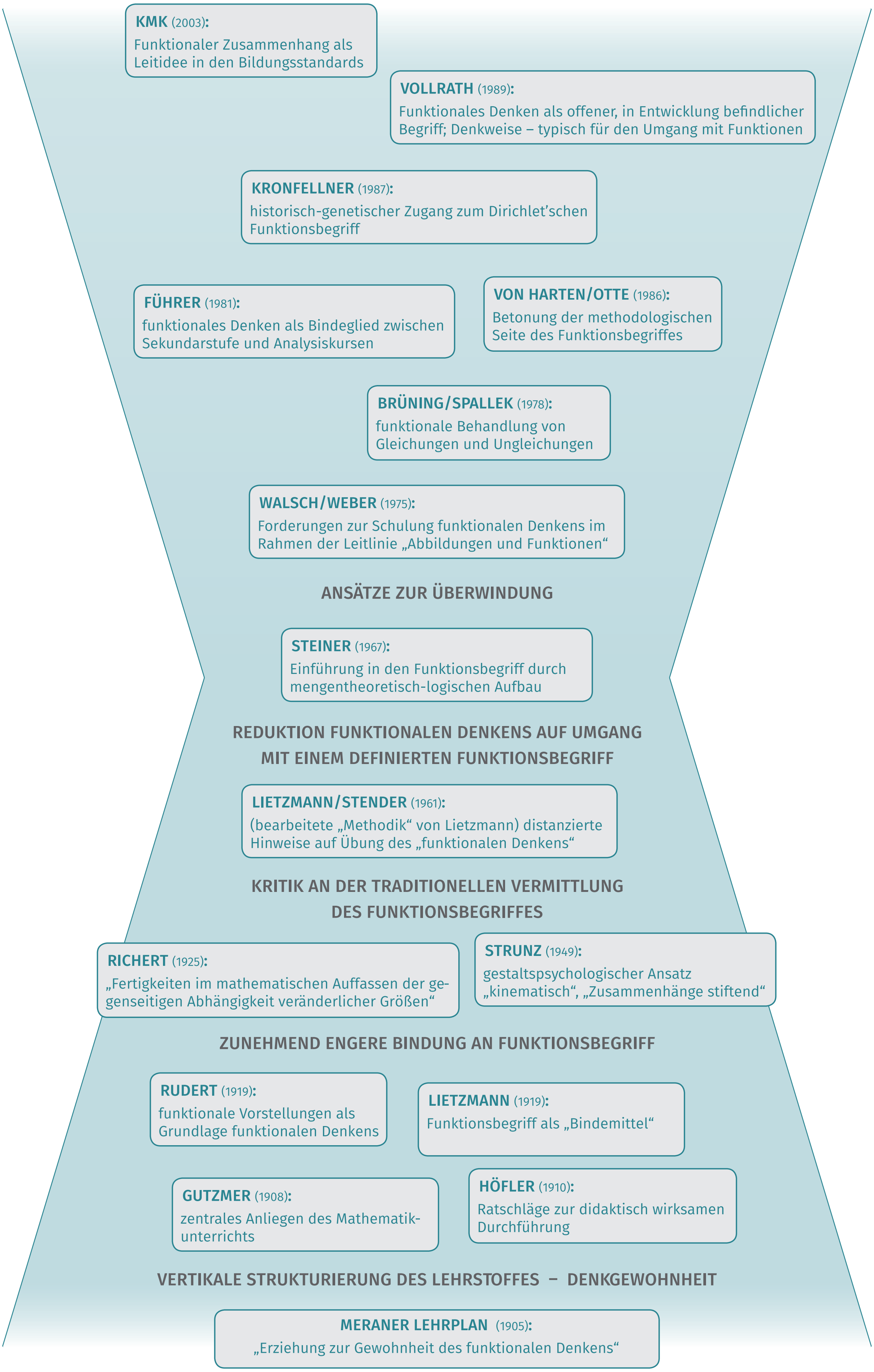


Abb. 4 Wesentliche Etappen bei der Entwicklung funktionalen Denkens

Ab den 1950er Jahren mehrten sich kritische Stimmen bezüglich der sogenannten „traditionellen Funktionslehre“. So beklagte Pickert (1955/56, S. 394) die unklaren Vorstellungen von Funktionen bei Studienanfängern. Lauter (1964, S. 116) vermutete, dass durch die Propagierung funktionalen Denkens möglicherweise mehr Unklarheiten als Klarheiten in den Mathematikunterricht der höheren Schulen getragen wurden. Während in der von Stender 1961 überarbeiteten „Methodik“ (Autor war ursprünglich Lietzmann) noch zurückhaltend von einer „*Übung des vielgepriesenen funktionalen Denkens*“ (Lietzmann/Stender 1961, S. 116) gesprochen wurde, äußerte man bereits in der vierten von Jahner überarbeiteten Auflage die Vermutung, dass der wissenschaftlich exakt definierte Funktionsbegriff für Lernende verständlicher sei (vgl. Lietzmann/Jahner 1968, S. 139).
Schließlich brach Steiner (1967) in seiner „Einführung in den Funktionsbegriff“ gänzlich mit dieser traditionellen Funktionslehre. Er plädierte für einen mengentheoretischen Aufbau, welcher die Idee der eindeutigen Zuordnung und die Dirichlet’sche Funktionsdefinition in den Mittelpunkt rückte (vgl. Steiner 1967, S. 166). Statt einer behutsamen Annäherung, basierend auf Erfahrungen mit konkreten Phänomenen, wurde Schülerinnen und Schülern der abstrakte und allgemeingültige Funktionsbegriff mittels einer Definition zu Beginn des entsprechenden Lernbereiches vorgegeben. Steiner korrigierte damit in Kritik geratene, weniger präzise Aspekte wie den der stetigen Veränderung bzw. den der gesetzmäßigen Abhängigkeit. Er schuf gleichzeitig logisch korrekte Schreibweisen sowie eine exakte und überschaubare Terminologie (vgl. Steiner 1967, S. 166). Funktionales Denken reduzierte sich damit auf den Gebrauch eines mathematisch formal definierten Funktionsbegriffs. Das Ansinnen der Meraner Reform, funktionales Denken den mathematischen Unterricht durchdringen zu lassen, verkehrte sich damit ins Gegenteil. Wie diese unterrichtlichen Reformbestrebungen nachwirkten, beschreibt Krüger am Beispiel der Einführung des Funktionsbegriffes in Lehrbüchern der 1990er Jahre:

> „*Die heutige Funktionenlehre scheint eine Folge der Durchmischung zweier nicht zueinander passender Traditionen zu sein, eine verwirrende Verquickung von Elementen der Meraner Reform und der ‚Neuen Mathematik‘ aus den 60er und 70er Jahren*“ (Krüger 2000, S. 239).

In verschiedenen Lehrwerken zeigte sich dies noch bei der Einführung des Funktionsbegriffes: Nach einer propädeutischen Behandlung von Zuordnungen folgte unmittelbar die informelle Dirichlet’sche Definition (vgl. Krüger 2000, S. 239). Auf ausgewählte Aspekte der Behandlung des Funktionsbegriffes wird im Kapitel 3.2 noch einmal differenzierter eingegangen.

Durch überzogene Anforderungen an fachliche Strenge und durch eine Überbetonung von Fach- und Symbolsprache geriet diese „Neue Mathematik“ zunehmend in die Kritik. Spätestens ab den 1970er Jahren suchte man nach Ansätzen, um die eher formalen Zugänge zu den Begrifflichkeiten wieder stärker durch inhaltliche zu ersetzen. Damit sollte der Begriff des funktionalen Denkens wieder mit seinen ursprünglichen Inhalten gefüllt werden.

Bei Walsch und Weber (1975, S. 55) findet man in den methodischen Hinweisen zur Umsetzung der Leitlinie „Abbildungen und Funktionen“ wieder die Forderung zur Schulung des funktionalen Denkens. Brüning und Spallek (1978, S. 248ff.) plädierten dafür, die Gleichungslehre aus der Perspektive funktionaler Zusammenhänge zu behandeln, wo beispielsweise das Lösen von Gleichungen auf Nullstellenberechnungen zurückgeführt werden kann.

In den Folgejahren zeichneten sich zwei weitere Tendenzen ab: Zum einen favorisierte man wieder stärker historisch-genetische Zugänge. Zum anderen hinterfragten verschiedene Autoren die Sinnhaftigkeit einer Behandlung der Dirichlet-Definition (vgl. Kronfellner 1987, S. 81ff.). Während Malle (2000, S. 8f.) und Sierpinska (1992, S. 57) eine mengentheoretische Definition zumindest in der Sekundarstufe weder didaktisch noch epistemologisch als gerechtfertigt ansahen, kritisierte Führer (1995, S. 128f.) die intuitive Leere der Definition sowie eine gewisse „Willkür“ der Zuordnung. Krüger (2000, S. 243) sprach von der Anlage eines „epistemologischen Widerspruchs“, falls die von Schülerinnen und Schülern zu lernende Definition nur unzureichend mit authentischen und bedeutsamen Aufgabenbeispielen vorbereitet und begleitet würde.

Wurzeln des funktionalen Denkens lassen sich im operativen Prinzip wiederfinden, welches Wittmann als Weiterentwicklung der Arbeiten von Piaget, Aebli und Fricke im Jahre 1985 formulierte:

> *„Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- und Erkenntnisprozess in systematischer Weise:*
> - *untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,*
> - *herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,*
> - *beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (was geschieht mit ..., wenn ...?)“* (Wittmann 1985, S. 9).

Wittmann selbst bezeichnete funktionales Denken als Spezialfall des operativen Prinzips. Während funktionales Denken stärker betont, wie Veränderungen wirken, zielt das operative Prinzip darauf ab, Strukturen und axiomatische Bezüge hinsichtlich Systembildung bzw. Gruppierung zu finden. Zur Symbiose beider Prinzipien formulierte Krüger folgende These:

> *„In das psychologisch begründete operative Prinzip flossen in dessen Entwicklung und Ausformulierung innerhalb der Mathematikdidaktik zunehmend methodologische Aspekte des didaktischen Prinzips ‚Erziehung zum funktionalen Denken' ein, die im Laufe seiner stoff-didaktischen Eingrenzung auf den Umgang mit dem Dirichlet'schen Funktions- und Abbildungsbegriff in Vergessenheit geraten waren"* (Krüger 2000, S. 274f.).

Während der Begriff „funktionales Denken" verengt wurde, erfuhr das operative Prinzip eine stetige Erweiterung.

3.1.4 Didaktische Modelle zur Beschreibung funktionalen Denkens

Ab Mitte der 1970er Jahren wurden in verschiedenen nationalen wie internationalen Veröffentlichungen didaktische Modelle und Konzepte zu funktionalem Denken vorgestellt. Es galt, die formale Strenge der „Neuen Mathematik" zu überwinden und zu alten tragfähigen Ideen zurückzufinden.

Exemplarisch werden hierfür die Modelle von Sfard, Malle und Vollrath vorgestellt. Die Analyse von Vollrath ist als besonders tragfähig einzuschätzen und wurde deshalb im Weiteren detaillierter betrachtet. Während Vollrath funktionales Denken in drei grundlegende Sichtweisen einteilte, legten Sfard und Malle jeweils zweistufige Modelle vor (siehe Tabelle 4).

Sfard (1987, S. 162)	structural conception	rein statische Zugangsweise, bei der Funktionen als „Objekte" gesehen werden
	operational conception	Zugangsweise über dynamische Handlungen
Vollrath (1989, S. 8ff.)	Zuordnungsaspekt	eindeutige Zuordnung
	Änderungsaspekt	systematische Änderungen
	Funktionen als Ganzes	Funktion als veränderbares Objekt
Malle (2000, S. 8)	Zuordnungsaspekt	Funktionen als eindeutige Zuordnungen mit engem Bezug zur Definition jedoch ohne objektartige Sicht
	Kovariation	dynamisches Änderungsverhalten

Tab. 4 Ausgewählte didaktische Modelle zu funktionalem Denken

Ein Vergleich der Modelle offenbart, dass sie in grundsätzlichen Ansätzen übereinstimmen: die Zuordnungsaspekte bei Vollrath und Malle und „structural conception" von Sfard. Malle klammert in seinem Modell die objektartige Sicht weitestgehend aus; Vollrath

bietet eine dritte Kategorie mit einer weniger stark mengentheoretisch orientierten Objektsicht an. Die Sichtweisen „operational conception“ (Sfard), Änderungsaspekt (Vollrath) und Kovariation (Malle) bilden ab, wie sich die Veränderungen einer Größe auf eine von ihr abhängigen Größe auswirken.
Für diese Arbeit wurde die Aufarbeitung von Vollrath (1989) als zentrales theoretisches Fundament ausgewählt. Inspiriert durch Freudenthal, welcher die dynamischen Aspekte von Funktionen wieder stärker ins Zentrum der Betrachtung rückte, warnte Vollrath (1982, S. 14f.) bereits zu Beginn der 1980er Jahre vor übertriebenen Formalisierungen. Er plädierte gleichzeitig für eine stärkere Orientierung an inhaltlichen Betrachtungen, wie sie sich bei Funktionen in vielen Fällen auf natürlich Weise ergeben. In seinem Aufsatz „Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra“ untermauerte Vollrath (1982, S. 13ff.) dies mit Ansätzen zu einer funktionalen Betrachtung von Gleichungen und Ungleichungen. Der Funktionsbegriff könnte seiner Ansicht nach auf weitere klassische Themen ausgeweitet werden. Somit würde er zu einem strukturierenden Leitbegriff zumindest für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Vollrath (1982, S. 25) betonte, dass Begriffe nicht von Haus aus Leitbegriffe sind. Erst durch curriculare Vorgaben und durch konkretes didaktisches und methodisches Handeln von Lehrpersonen werden sie zu diesen gemacht.
In seiner phänomenologischen Analyse des funktionalen Denkens aus dem Jahre 1989 sah er funktionales Denken in erster Linie als einen offenen Begriff, welcher sich permanent entwickelt. Um dieses Denken schärfer als bisher einzugrenzen und um bestehende mengentheoretische Auffassungen einbeziehen zu können, koppelte er den Begriff des funktionalen Denkens dichter an den Funktionsbegriff. Seine Definition lässt dennoch Spielraum für Interpretationen eines dynamischen und methodologischen Aspekts: *„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“* (Vollrath 1989, S. 6).
Da für Vollrath funktionales Denken auf der Arbeit mit Funktionen beruht, fasste er charakteristische Tätigkeiten in drei Kategorien zusammen: Zuordnungsaspekt, Änderungsaspekt und die Betrachtung der Funktion als Ganzes. Eine Erläuterung der einzelnen Aspekte zeigt die Tabelle 5.

Ziel des mathematischen Unterrichts sollte es demnach sein, Schülerinnen und Schülern ausreichend Gelegenheit einzuräumen, sich – entsprechend ihres individuellen Entwicklungsstandes – mit diesen verschiedenen Aspekten auseinanderzusetzen.

	Zuordnungsaspekt	Änderungsaspekt	Funktionen als Ganzes
Beschreibung	*„Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen"* (Vollrath 1989, S. 8).	*„Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken"* (Vollrath 1989, S. 12).	*„Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes"* (Vollrath 1989, S. 15).
Erläuterung	fundamentaler Aspekt der Zuordnung mit all seinen Darstellungsformen; „waagerechter" Zusammenhang in senkrecht notierten Tabellen	dynamischer Aspekt des Änderungsverhaltens; „senkrechter" Zusammenhang in senkrecht notierten Tabellen	Operieren mit Funktionen als Objekten; Beobachten bzw. Erzeugen eines Zusammenhanges
Erfassung des Grades der Ausprägung funktionalen Denkens	Beherrschung als Ausdrucksmittel zum Erfassen und Lösen von Problemen	Fähigkeit, Änderungen zu planen, durchzuführen, zu analysieren und zur Lösung von Problemen einzusetzen	Fähigkeit, Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen zu erfassen sowie vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne „umzuschalten"

Tab. 5 Kategorien funktionalen Denkens nach Vollrath

Zuordnungsaspekt

Kinder erfahren ihre ersten Berührungen mit funktionalem Denken über den Zuordnungsaspekt. Dieser betont die Abhängigkeit von Größen und damit eine fundamentale Eigenschaft von funktionalen Zusammenhängen. Für die Beschreibung und Anwendung dieser Zuordnungen haben sich über die Jahre hinweg verschiedene Darstellungsformen entwickelt. Während es im 19. Jahrhundert üblich war, im Unterricht mit Gleichungen und Tabellen zu arbeiten, gewannen mit der Meraner Reform zunehmend grafische Darstellungen an Bedeutung. Mit der mengentheoretischen Sicht der „Neuen Mathematik" kamen die Pfeilschreibweise und die Pfeildiagramme hinzu. Diese Darstellungsformen waren weniger Anschauungsmittel als Ausdrucksmittel (vgl. Vollrath 1989, S. 8ff.).

Änderungsaspekt

Die mit der Meraner Reform geborene Idee der systematischen Änderung als Methode spiegelt sich am deutlichsten im Änderungsaspekt wider: Funktionen erfassen, wie sich die Änderungen einer Größe auf eine abhängige Größe auswirken. Wesentlich ist, dass die Untersuchungen des Änderungsverhaltens auch außerhalb der Funktionslehre angewendet werden, wie zum Beispiel in der Algebra, der Geometrie oder der Stochastik (vgl. Vollrath 1989, S. 12ff.).

Objektaspekt
Die Betrachtung von Funktionen als eigenständige Objekte erfordert ein besonderes Maß an Abstraktion, eröffnet aber effektive Lösungsstrategien. *„So wie der Blick auf das Ganze Eigenschaften enthüllt, so lassen auch umgekehrt Eigenschaften das Ganze erkennen“* (Vollrath 1989, S. 16). Aufgabenstellungen sollten jedoch weniger auf das Erkennen derartiger Eigenschaften abzielen. Vielmehr sollten Lernende dazu angehalten werden, diese Eigenschaften als Hilfsmittel zum Lösen von Problemen zu nutzen. Vollrath deutete diesen Blick aufs Ganze *„als Beobachten oder als Erzeugen eines Zusammenhanges“* (Vollrath 1989, S. 16).

3.1.5 Analyse des funktionalen Denkens aus verschiedenen Perspektiven

Funktionales Denken soll im Weiteren aus verschiedenen Perspektiven analysiert werden. Vollrath differenzierte zwischen einer phänomenologischen, einer erkenntnistheoretischen und einer psychologischen Sicht (siehe Abbildung 5).

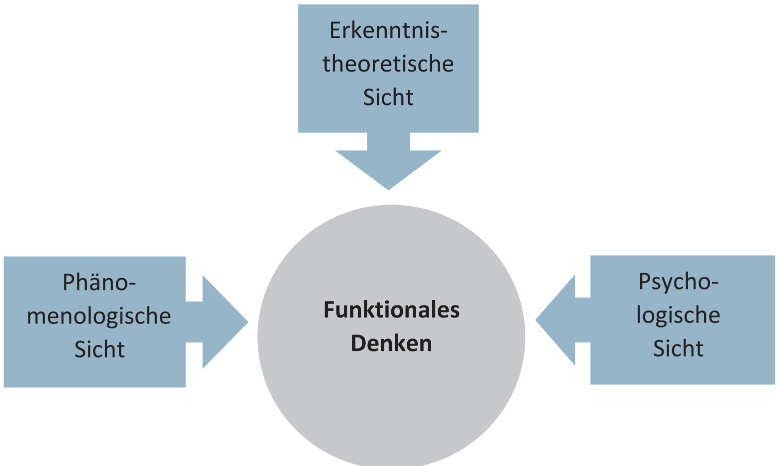


Abb. 5 Perspektiven der Betrachtung funktionalen Denkens nach Vollrath

(a) Phänomenologische Sicht
Zur Charakterisierung funktionalen Denkens wählte Vollrath (1989, S. 17ff.) das „Erfassen und Beherrschen“ von Situationen als verbindendes Element. Er unterteilte es in vier Grundphänomene (siehe Abbildung 6).
Ein Überblick über diese Grundphänomene erfolgt in Tabelle 6 (vgl. Vollrath 1989, S. 17ff.).
Vollrath maß die Ausprägung funktionalen Denkens vor allem daran, inwieweit Phänomene den Funktionsbegriff als Erfahrungsgrundlage tragen. Da ein Großteil der mathematischen Entwicklungen aus konkreten Phänomenen entstammte, ist auch der mathematische Unterricht derartig anzulegen und nicht die Mathematik *„vom Höhepunkt der*

Entwicklung her zu sehen" (Vollrath 1989, S. 23). Dies kann als Abkehr von mengentheoretisch orientierten Ansätzen gewertet werden.

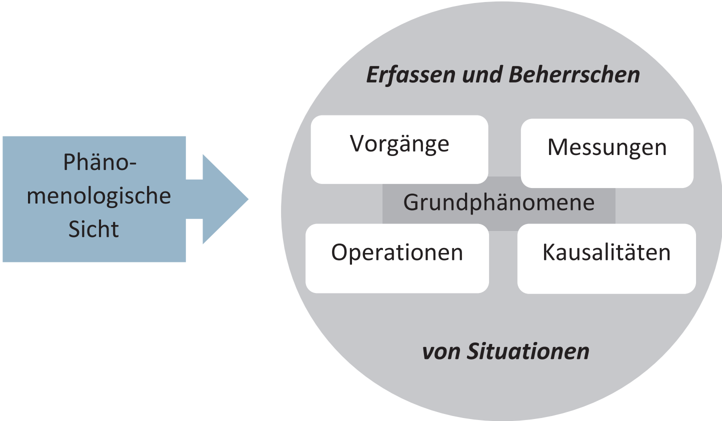


Abb. 6 Phänomenologische Sicht

Vorgänge	Aussagen über zeitliche Entwicklungen, wie Bewegungs- und Wachstumsvorgänge
Messungen	Zuordnungen, bei denen Größen durch Zahlen ausgedrückt werden
Operationen	Erfassen der Änderung von Größen durch funktionale Betrachtungen von Operationen
Kausalitäten	Beziehungen zwischen verschiedenartigen Größen mit kausalen Zusammenhängen – auch fachübergreifend

Tab. 6 Übersicht über Grundphänomene funktionalen Denkens

(b) Erkenntnistheoretische Sicht

Für die funktionale Bearbeitung dieser Grundphänomene arbeitete Vollrath (1989, S. 23ff.) vier prinzipielle Vorgehensweisen heraus (siehe Abbildung 7).

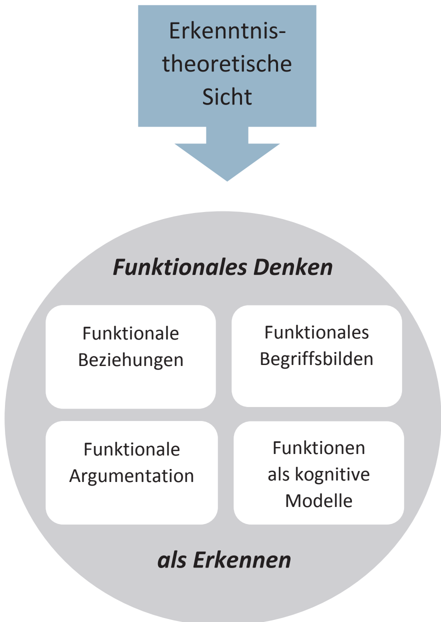


Abb. 7 Erkenntnistheoretische Sicht

In Tabelle 7 werden diese Vorgehensweisen mit Beispielen untersetzt (vgl. Vollrath 1989, S. 23ff.).

Funktionale Beziehungen	- Aufstellen von Vermutungen mit anschließender Überprüfung und ggf. Nutzung für Entdeckung neuer Zusammenhänge - Lernende sollten Vorgehen gezielt reflektieren und die Heuristik erfassen
Funktionale Begriffs-bildungen	- Nutzen von Funktionen als Werkzeuge zur Begriffsbildung
Funktionale Argumen-tationen	- funktionales Betrachten von Gleichungen und Ungleichungen - funktionales Beweisen, durch Anwendung von Rechenoperationen auf Funktionen - Plausibilitätsbetrachtungen durch Dynamisierungen in der Geometrie
Funktionen als kognitive Modelle	Konstruktionsprozess: Wahrnehmung des Phänomens – Verbindung mathematischer Objekte mit Gegenständen und Abläufen des Phänomens – Betrachtung bestimmter Stadien und deren mathematischer Charakteristika

Tab. 7 Prinzipielle Vorgehensweisen bei der erkenntnistheoretischen Sicht

(c) Psychologische Sicht

Zweifelsfrei beeinflusst die kognitive Entwicklung eines Kindes das funktionale Denken, ungeachtet möglicher Einteilungen in „Stadien“. Die Untersuchungen zur Entwicklung des funktionalen Denkens, lieferten vor allem in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts nach Einschätzung von Vollrath (1989, S. 28) nur wenige konkrete Erkenntnisse. Als eine mögliche Ursache führte er dazu das recht eingeschränkte Verständnis für funktionales Denken an.

Für die psychologische Sicht wählte Vollrath (1989, S. 27ff.) daher einen anderen Ansatz. Nach seiner Sicht prägen vor allem die zugrundeliegenden Phänomene und die dazu initiierten Handlungen die Entwicklung des funktionalen Denkens. In der Auseinandersetzung mit konkreten Phänomenen wird dieses Denken als Werkzeug benutzt. Dabei erlangen Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von kognitiven Entwicklungen sowie bestimmten Fähigkeiten, Denkweisen und Vorstellungen neue Erfahrungen und vervollkommnen schrittweise funktionales Denken (siehe Abbildung 8). Erst die konkreten Erfahrungen mit Phänomenen ermöglichen schließlich die Bildung von Hypothesen.

Für die Entwicklung „funktionalen Denkens“ sind für Vollrath folgende Fähigkeiten bei Schülerinnen und Schülern maßgeblich:

- *„Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen;*
- *Hypothesen über die Art eines Zusammenhanges und über den Einfluß von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und gegebenenfalls zu revidieren"* (Vollrath 1989, S. 28).

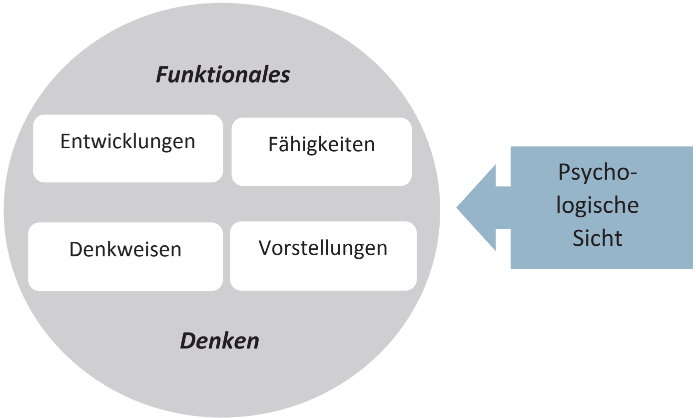


Abb. 8 Psychologische Sicht

Folgt man dieser Sichtweise, so erwachsen aus anfänglich entwicklungspsychologisch geprägten Fragestellungen mehr und mehr didaktische Herausforderungen. Die konkrete Gestaltung unterrichtlicher Lernsituationen wird zu einem Motor in der Entwicklung funktionalen Denkens.

Auch wenn Vollrath (1989, S. 30) funktionales Denken nicht als eine „messbare" Fähigkeit ansah, erachtete er eine handhabbare Beschreibung der unterschiedlichen Ausprägungen, z. B. zur Formulierung und Kontrolle von Lernzielen, als sinnvoll. Ein Modell zur Analyse funktionalen Denkens wird dazu im nächsten Kapitel vorgestellt.

Nach eingehender Betrachtung funktionalen Denkens aus phänomenologischer, erkenntnistheoretischer und psychologischer Perspektive stellt sich abschließend die Frage nach den didaktischen Konsequenzen. Im Vergleich zu den Intentionen der Meraner Reform plädierte Vollrath für eine stärkere Anbindung von funktionalem Denken an den Funktionsbegriff. Damit wollte er vermeiden, dass sich der Begriff sowohl der didaktischen Forschung als auch der Unterrichtsrealität entzieht.

Zur Verankerung funktionalen Denkens im Mathematikunterricht führte Vollrath (1989, S. 32) folgende zentrale Aufgaben an:

- Sammeln von grundlegenden Erfahrungen an geeigneten Phänomenen,
- Entwickeln von Denkweisen, welche typisch für funktionales Denken sind,
- Erzeugen von tragfähigen intuitiven Vorstellungen zum Funktionsbegriff,
- Vermitteln eines angemessenen schulartbezogenen Repertoires an Methoden,

- Einbeziehen der Vorstellungen von Lehrenden zur Mathematik.

Betrachtet man seine didaktischen Ansätze aus dem Jahre 1989 vom heutigen Standpunkt aus, sind sie durchaus als aktuell einzuschätzen, wenngleich viele der Forderungen bereits umgesetzt werden konnten.

3.1.6 Modelle zur Analyse funktionalen Denkens

Ein Analysemodell zur Bestimmung funktionalen Denkens für die Sekundarstufe wurde beispielsweise von Höfer (2008) entwickelt. Die Grundlagen für sein Modell lieferten die theoretischen Arbeiten von Swan (1982) und Vollrath (1989).
Das Modell von Swan (siehe Tabelle 8) bezieht sich auf die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion, genauer gesagt auf die möglichen „Übersetzungen" von einer Darstellungsform in eine andere. Swan (1982, S. 155) bildete diese Übersetzungen in Form einer Matrix ab. Die Darstellung in Tabelle 8 basiert auf einer Übersetzung von Beckmann (2000, S. 21).
Höfer (2008, S. 42) griff auf die in Kapitel 3.1.4 vorgestellte Kategorisierung von Vollrath (1989, S. 8ff.) zurück, in welcher die Fertigkeiten im Umgang mit Funktionen in drei Ebenen unterteilt wurden: Die „Aktionsschicht" repräsentiert dabei den Zuordnungsaspekt, die „Prozessschicht" den Kovariationsaspekt und die „Objektschicht" die Funktion als

<table>
<tr><th>nach
von</th><th colspan="2">Bilder oder verbale Beschreibungen</th><th>Tabellen</th><th>Graphen</th><th>algebraische Ausdrücke</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Bilder oder verbale Beschreibungen</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">modellbildende Fertigkeiten</td></tr>
<tr><td>messen</td><td>skizzieren</td><td>beschreibende Modellbildung</td></tr>
<tr><td>Tabellen</td><td rowspan="3">interpretierende Fertigkeiten</td><td>lesen</td><td></td><td>plotten, aufzeichnen</td><td>fitten, anpassen</td></tr>
<tr><td>Graphen</td><td>interpretieren</td><td>ab-/herauslesen</td><td></td><td>Kurvenanpassung</td></tr>
<tr><td>algebraische Ausdrücke</td><td>Formel erkennen & interpretieren</td><td>tabellieren, berechnen</td><td>(Kurven) skizzieren</td><td></td></tr>
</table>

Tab. 8 Modell von Swan, Übersicht nach Beckmann (2000, S. 21)

veränderbares Objekt. Höfer erweiterte die zweidimensionale Matrix von Swan zu einem dreidimensionalen Gebilde, indem er die Ebenen von Vollrath ergänzte. Er ermöglichte damit die Beschreibung von Übersetzungsleistungen in verschiedenen Anforderungsniveaus (siehe Abbildung 9). Die entstehenden Teilquader fasste Höfer (2008, S. 53) als

Bausteine funktionalen Denkens auf, wobei die Reihenfolge des Durchlaufens nicht von Bedeutung ist. Das Modell von Swan ergänzend, bezog er auch drei der vier Felder aus der Diagonalen mit ein.

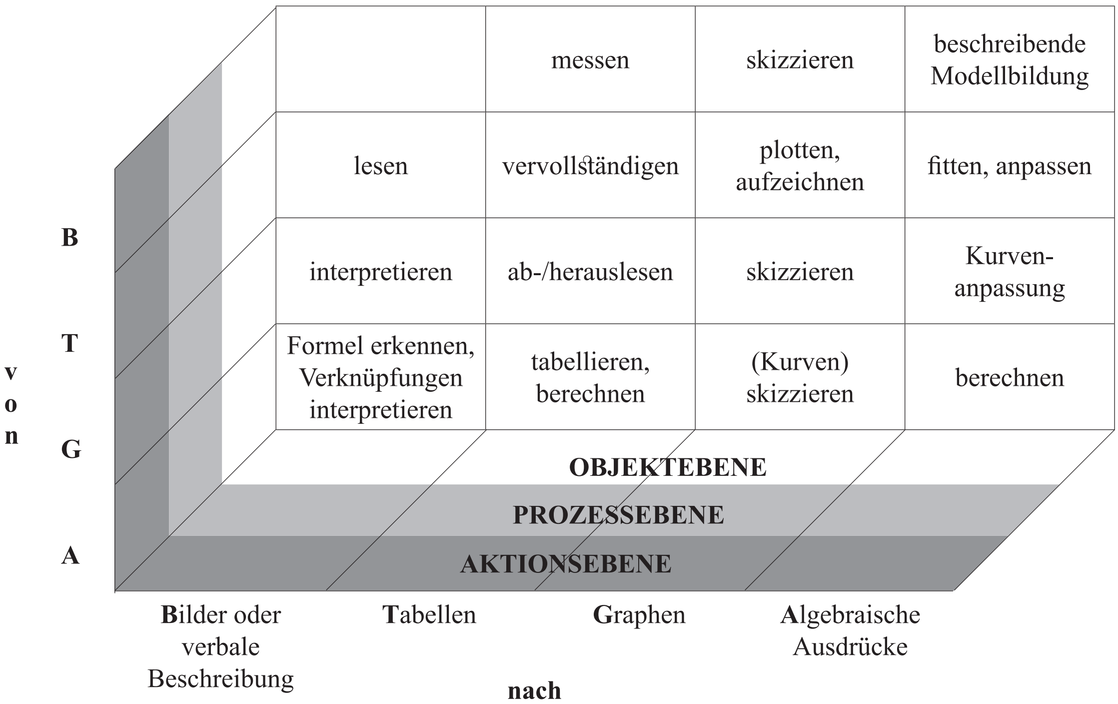


Abb. 9 Modell von Höfer (2008, S. 53)

Höfer (2008, S. 55ff.) entwickelte sein Modell als ein Analyseraster für die Planung und Auswertung von Unterricht sowie zur Analyse von Schülerfähigkeiten. Es kann dazu beitragen, einzelne Unterrichtssequenzen und Übungsaufgaben innerhalb eines Gesamtkonzeptes einzuordnen und Redundanzen auszuschließen.
Die verschiedenen Bausteine symbolisieren das Erlangen spezifischer Einzelfähigkeiten. Das Lösen komplexerer Aufgaben erfordert jedoch ein Zusammenwirken verschiedener Denk-Komponenten. Derartige Wechselwirkungen kann das Modell nicht abbilden, genauso wenig wie ein Begriffsverständnis an sich (vgl. Höfer 2008, S. 56f.). Weiterhin zeigt sich eine starke Orientierung funktionalen Denkens am Begriff der Funktion. Mit dem Modell lassen sich Teilaspekte funktionalen Denkens, im Sinne der Meraner Reformvorschläge, konkret beschreiben. Jedoch bleiben es Ausschnitte aus einer umfassenderen Idee. Damit offenbaren sich die Grenzen des Modells.
Die Übersetzungsleistungen könnten u. U. zu einer Überbetonung der Aktionsebene und damit des Zuordnungsaspektes führen. Wesentlich schwieriger zu beschreibende Handlungen lassen sich nicht vollständig erfassen, wie z. B. geometrische Betrachtungen

(Dynamisierungen geometrischer Objekte) oder das Änderungsverhalten von Größen vor der Behandlung von entsprechenden Darstellungsmöglichkeiten. Höfer selbst verstand sein Modell nicht als Lern-, sondern als Analysemodell für einen konkreten Teilbereich funktionalen Denkens.

3.2 Funktionen im Mathematikunterricht – zwischen Terminus technicus und Denkweise

In Kapitel 3.1 wurde funktionales Denken als eine basale Denkform charakterisiert. Diese ermöglicht, kausale Zusammenhänge in unterschiedlichen Ausprägungsgraden zu erfassen, zu beschreiben und zur Problemlösung einzusetzen. Das Denken in Zuordnungen kann sich auch ohne eine mathematische Begriffsbestimmung vollziehen. Vom Hofe, Lotz und Salle beschrieben es folgendermaßen: *„Das Denken in Zuordnungen und Veränderungen durchzieht die gesamte Mathematik vom Kindergarten bis zur Universität“* (vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 149).

Dennoch erfährt dieses Denken gerade mit dem Funktionsbegriff seine bedeutsamste Konkretisierung und in der Analysis sein wichtigstes Aufgabenfeld (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 149). Durch Kenntnisse zu Funktionen wird es Schülerinnen und Schülern möglich, im funktionalen Denken eine qualitativ höhere Stufe zu erreichen. Daher werden noch einmal wesentliche didaktische Aspekte der Behandlung des Funktionsbegriffes zusammengefasst und diskutiert.

3.2.1 Funktionen haben viele Gesichter

„Funktion“ ist zweifelsfrei ein Grundbegriff der Mathematik. Er findet sich in fast allen Teilgebieten wieder. Funktionen können dabei unter verschiedenen Namen und Bezeichnungen auftreten, z. B.: Maße, Permutationen, Formen, Projektionen, Zusammenhänge, Entwicklungen, Verknüpfungen und Operationen (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 155). Funktionen sind nicht immer auf den ersten Blick als diese erkennbar, da ihre Darstellungsformen stark variieren können. Hischer kam diesbezüglich zu folgendem Schluss:

> *„Immerhin müssen wir festhalten, dass es in der Mathematik, diesem Prototyp der exakten Wissenschaften, offensichtlich keine einheitliche formale Definition dessen gibt, was eine Funktion ist!“* (Hischer 2012, S. 129).

Zu einer ähnlichen Einschätzung kam Vollrath hinsichtlich des Begriffes „funktionales Denken". Er stellte fest,

> *„daß es bisher nur wenige Versuche gibt, diesen Begriff zu definieren. Offensichtlich ist die Bezeichnung so suggestiv, daß nur selten das Bedürfnis danach entsteht"* (Vollrath 1989, S. 6).

Hischer belegte, dass der Funktionsbegriff, trotz exakter mengentheoretischer Grundlagen, gegenwärtig weder formal noch inhaltlich einheitlich gesehen wird. Stattdessen existieren zahlreiche bereichsspezifische Auffassungen nebeneinander: Wenn es beispielweise in der Funktionentheorie ausreicht, Funktion als eindeutige Zuordnungen zwischen Teilmengen von $\mathbb{C}$ anzusehen, sieht der Numeriker Funktion als Term f(x) oder als Tabelle. Der Physiker wiederum beschreibt einen Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen mit einer mehr oder weniger selbsterklärenden Schreibweise wie $s = s(t)$ als Weg in Abhängigkeit von der Zeit. Dies geschieht möglicherweise in dem Wissen, dass diese Darstellung formalmathematischen Anforderungen nicht standhält, da beispielsweise der Buchstabe „s" gleichzeitig den Namen der Funktion und einen Funktionswert darstellt (vgl. Hischer 2012, S. 156).

Hischer (2012, S. 156) kam zu der Einschätzung, dass sich der mit „Funktion" bezeichnete Begriff durch „Vagheit" und „Reichhaltigkeit" im Sinne der deskriptiven Kriterien „fundamentaler Ideen" auszeichnet (siehe Kapitel 5.2.3). Die Wesensmerkmale des Begriffes bleiben, trotz unterschiedlicher situationsadäquater Verwendung, erhalten – *„Funktionen haben viele Gesichter"* (Herget/Malitte/Richter 2000, S. 115). Anstatt den Funktionsbegriff zu vereinheitlichen, erscheint es zielführender, die Vielfältigkeit in der Begriffsauslegung produktiv zu nutzen und diese kritisch, hinsichtlich einer angemessenen mathematischen Strenge, zu hinterfragen.

> *„Im Unterricht muss es deshalb auch darum gehen, sich die Vernetztheit dieser verschiedenen Formen bewusst zu machen und Erfahrungen zu sammeln – Erfahrungen in der gezielten Nutzung eines oder mehrerer ‚Funktionsgesichter', jeweils dem betrachteten Problem angepasst und angemessen: Funktionen stellen ein vielseitiges, leistungsfähiges Hilfsmittel dar, dessen verschiedene Darstellungsformen einen differenzierten und flexiblen Gebrauch ermöglichen"* (Herget/Malitte/Richter 2000, S. 116).

3.2.2 Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern bei der Begriffsaneignung

Wie Funktionen als vielseitiges und leistungsfähiges Hilfsmittel genutzt werden, ist davon abhängig, inwieweit Schülerinnen und Schüler ein tragfähiges Begriffsverständnis aufbauen können. Für den Mathematikunterricht sind zwei grundlegende Konzepte zur Definition einer Funktion denkbar. Zum einen können sie als Zuordnungen einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen angesehen werden. Während dieser Zugang eine dynamische Sicht von Mathematik betont, repräsentiert der zweite Weg eine statische Sicht (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 155) – er gibt eine abstraktere Definition der Funktion als spezielle Relation.

Ab den 1980er Jahren wandte man sich von rein deduktiven, stark formalisierten Lehrgängen ab und orientierte stärker auf exemplarisches und vorstellungsorientiertes Arbeiten in Anwendungskontexten (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 157). Mit der Überwindung von überzogenen Anforderungen der „Neuen Mathematik" kam es zur Suche nach neuen didaktischen Ansätzen. In diesem Zusammenhang befasste man sich auch verstärkt mit den Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern bei der Begriffsbildung. Bezüglich des Begriffs „Funktion" benannte Vollrath (1989, S. 31) folgende Beobachtungen und Schwierigkeiten:

- Funktionen werden meist als Zuordnung charakterisiert, jedoch bleiben Potentiale zur Problemlösung ungenutzt.
- Durch Kenntnis des Funktionsbegriffes wird der konkrete Umgang mit Funktionen nur unwesentlich beeinflusst.
- Interpretationen zu Wertetabellen dominieren „horizontale" Zusammenhänge.
- Der Umgang mit negativen Koordinatenbereichen wird eher gemieden.
- Es zeigen sich erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit diskreten bzw. endlichen Definitionsbereichen sowie Schwierigkeiten bei der Verwendung von unüblichen Bezeichnungen der Variablen.
- Das Bilden von Umkehrfunktionen erfolgt oft ohne tiefgreifendes inhaltliches Verständnis.

Auch Krüger (2000, S. 236) erfasste, unter Berücksichtigung der Arbeiten von Müller-Philipp (1994, S. 2), typische Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Umgang mit dem Funktionsbegriff. Ihre Befunde bestätigten im Wesentlichen die Resultate von Vollrath: Lernenden (auch Studierenden) fällt es demnach schwer, eine „akzeptable" Begriffsdefinition für Funktionen anzugeben bzw. können sie die angegebene korrekte Definition nicht angemessen anwenden. Weiterhin werden Begriffe wie Definitions- und Wertemenge oder der Aspekt der Eindeutigkeit kaum thematisiert. In vielen Fällen zeigte sich eine ausgeprägte Diskrepanz zwischen dem im Unterricht behandelten Funktionsbegriff und den Prototypen von Funktionen, welche Lernende mit dem Begriff verbinden. Krüger sieht als eine Ursache die von Lehrbüchern vorgeschlagenen Zugänge:

„Nach einer kurzen Einführungsphase, in der die Beispiele zu einer informellen Funktionsdefinition nach Dirichlet passen, aber oft ohne tiefere Bedeutung sind, folgen dann in den nächsten Jahrgangsstufen eine Vielzahl von Aufgaben, in denen nicht beliebige Definitionsmengen, sondern meist die reellen Zahlen und nicht willkürliche, sondern durch Terme gegebene Funktionsvorschriften verwendet werden" (Krüger 2000, S. 240).

Trotz veränderter Lehrpläne und neu konzipierter Lehrwerke ist diese Tendenz nach wie vor in einigen Lehrbüchern vorhanden: Bei der Einführung von Funktionen dominiert der definitionsprägende Zuordnungsaspekt. Durch relativ wenige Beispiele motiviert, wird der Funktionsbegriff in Form einer Dirichlet-Definition mehr oder weniger „vorgegeben". Mit thematisch isoliert wirkenden Zuordnungen sollen die zur Begriffsaneignung notwendigen Realisierungs- und Identifizierungshandlungen initiiert werden.

Ein Blick in ein Lehrwerk des Freistaats Sachsen von Duden-Paetec (vgl. Level Mathematik 2005, S. 86ff.) offenbart: Koordinatensysteme sowie direkt und indirekt proportionale Zuordnungen werden kurz wiederholt. Darauf folgt ein Vergleich ausgewählter Zuordnungen: Konkreten Personen werden jeweils Blutgruppen, Freizeitsportarten und Alter in tabellarischer Form zugeordnet. Nach diesen diskreten Betrachtungen wird der Begriff „Funktion" unmittelbar definiert.

In einem anderen Lehrbuch (vgl. Pohlmann/Stoye 2006, S. 112) werden die Zuordnungen durch Pfeilschreibweise dargestellt: Kindern werden Anzahlen von Geschwistern zugeordnet und umgedreht. In einer weiteren Aufgabe werden die Zuordnungen ebenfalls mithilfe von Pfeilen erklärt. Es soll entschieden werden, ob es sich bei diesen Zuordnungen um Funktionen handelt oder nicht. Beispiele hierfür sind: Buch → Regal, Regal → Buch, Leser → Buch, Buch → Leser, Leser → Leserkarte und Leserkarte → Leser. Neben der für die Lernenden noch ungewohnten Darstellungsform drängt sich die Frage auf, welche Bedeutungen derartige Entscheidungen haben sollen. Eine Passung der Aufgabenformate zur Dirichlet'schen Funktionsdefinition scheint in jedem Fall gegeben zu sein.

In den Lehrbüchern von Klett (vgl. Lambacher Schweizer 2013) und Schroedel (vgl. Griesel u. a. 2015) verzichtet man bei der Einführung auf diese Pfeildarstellungen. Durch die grafische Darstellung stetiger Prozesse wird ein deutlich stärkerer Realitätsbezug hergestellt. Neben einem Beispiel für eine eindeutige Zuordnung wird jeweils ein einleuchtendes Gegenbeispiel vorgegeben. In der Lehrbuchreihe „Elemente der Mathematik" (vgl. Griesel u. a. 2015, S. 125f.) werden bestimmten Automarken Verbrauchswerte für Kraftstoffe in Abhängigkeit von der gefahrenen Geschwindigkeit zugeordnet. Als Gegenbeispiel gibt es einen Fahrplan; bestimmten Fahrstrecken werden entsprechende Uhrzeiten zugeordnet (vgl. Griesel u. a. 2015, S. 127).

In der Lehrbuchreihe von Klett (vgl. Lambacher Schweizer 2013, S. 104f.) verarbeitet man Daten aus der Natur: Der sich verändernde Wasserstand eines Gewässers wird grafisch darstellt. Als Gegenbeispiel werden bestimmte Temperaturen einer Höhe in der Erdatmosphäre zugeordnet.

Während in den meisten der betrachteten Lehrwerke die Frage nach der Forderung der Eindeutigkeit dieser Zuordnungen unbeantwortet bleibt, gibt es im Lambacher-Schweizer-Lehrbuch zumindest folgende kurze Formulierung: *„Eindeutige Zuordnungen sind für die Mathematik von besonderem Interesse und erhalten einen besonderen Namen“* (Lambacher Schweizer 2013, S. 104). Sowohl in der Lehrbuchreihe von Lambacher Schweizer als auch bei „Elemente der Mathematik“ befinden sich, unmittelbar nach der Definition einer Funktion, vereinzelt die bereits beschriebenen Aufgabenformate in Pfeildarstellung (z. B. Parkdauer → Parkgebühr; Zeit → Körpergröße eines Menschen) (vgl. Lambacher Schweizer 2013, S. 106; Griesel u. a. 2015, S. 131).

Eine Definition stellt nicht die wichtigste gedankliche Basis für den Umgang mit Funktionen dar (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 161). Setzt die Lehrperson den Schwerpunkt auf die Erarbeitung und Festigung einer Dirichlet-Definition, wird die einseitige Betonung des Zuordnungsaspektes nachvollziehbar. Der Aspekt der systematischen Veränderung könnte bei den Schülerinnen und Schülern möglicherweise nicht genügend Beachtung finden. Geht es aber darum, Funktionen als vielseitiges und leistungsfähiges Hilfsmittel zu erkennen, ist eine stärkere Betonung des Änderungsaspektes zwingend erforderlich.

Betrachtet man die Einführungskapitel einiger Lehrwerke, zeigt sich ein relativ breites Spektrum an Darstellungsformen für Funktionen: Wortvorschrift, Pfeildiagramm, Angabe geordneter Paare, grafische Darstellung, Wertetabelle und Gleichung (vgl. Pohlmann/Stoye 2006, S. 117; Level Mathematik 2005, S. 89). Andere Lehrwerke beschränken sich schon in dieser Phase auf algebraische, tabellarische und grafische Darstellungen (vgl. Griesel u. a. 2015, S. 128). Damit verzichtet man konsequent auf Darstellungen, welche weder in folgenden Kapiteln bzw. Schuljahren und erst recht nicht im Alltag verwendet werden, wie z. B. Pfeildiagramme und Mengen geordneter Paare. Indem die sprachlichen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge ausgeblendet werden, geht jedoch eine wesentliche, den Alltag durchziehende Ausdrucksform verloren.

In den weiteren Schuljahren der Sekundarstufe I bestimmen vorrangig Funktionen mit „ordentlichen“ Graphen die Lernbereiche. Erst mit dem Übergang in die Sekundarstufe II werden in stärkerem Maße „anders geartete“ Funktionsverläufe betrachtet. Das geschieht genau dann, wenn es wieder notwendig erscheint, Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit zu motivieren. Ein derartiges Vorgehen wird einer ganzheitlichen Sicht auf funktionale Zusammenhänge nur bedingt gerecht.

Vorstellungen und intuitive Annahmen von Schülerinnen und Schülern beeinflussen ihr mathematisches Handeln. Ziel sollte es demnach sein, ihre Vorstellungen zu Kurven, Termen, Gleichungen, Zuordnungen aufzunehmen und systematisch weiter zu entwickeln (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 161). Entsprechende Ansätze werden in Kapitel 7.1.1 erörtert.

Fazit

Wie kann mit dieser begrifflichen Heterogenität zu Funktionen im Mathematikunterricht umgegangen werden? Für Hischer (2012, S. 157) spiegelte sich in der Breite des Verständnisses zu Funktionen die kulturhistorische Vielfalt des Begriffes wider. Indem er für eine Teilung in „Funktionen im engeren Sinne“ und „Funktionen im weiteren Sinne“ plädierte, könne der Spagat zwischen mathematischer Strenge und Anwendungsorientierung gelingen: Für Grundlagenfragen, wie die Beschreibung und Untersuchung mathematischer Strukturen, kann eine präzise, auf Mengentheorie und Logik basierende Fassung des Funktionsbegriffes herangezogen werden. Bei konkreten inner- bzw. außermathematischen Problemstellungen hingegen erscheint es ausreichend, auf passende und situationsadäquate Aspekte des Funktionsbegriffs zurückzugreifen. Eine mengentheoretische Begründung ist dafür entbehrlich. Es könnte sogar auf einen undefinierten Grundbegriff, z. B. in Form einer eindeutigen Zuordnung, zurückgegriffen werden (vgl. Hischer 2012, S. 157). Hischer schrieb hierzu:

> *„Und möglicherweise sollten wir das nicht bedauern, sondern eher den großen Reichtum wertschätzen, mit dem sich uns der mit ‚Funktion‘ bezeichnete Begriff durch seine vielen Gesichter als ‚fundamentale Idee‘ zeigt!“* (Hischer 2012, S. 163).

Hischer stellte sich also hinter die Autoren, welche die mengentheoretischen Betrachtungen zum Funktionsbegriff in Sekundarstufe I und den Lernzuwachs von Schülerinnen und Schülern beim Lernen der Dirichlet’schen Definition kritisch hinterfragten (vgl. Kronfellner 1987; Sierpinska 1992; Führer 1995; Malle 1996).

4 Funktionales Denken als Leitgedanke: Historische Einordnung der Reform des Mathematikunterrichts zu Beginn des 20. Jahrhunderts

Eine Auseinandersetzung mit der Idee des funktionalen Denkens führt zu Felix Klein und dessen Reformbestrebungen zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Betrachtet man die etwa einhundert Jahre später in Deutschland geführten bildungspolitischen Diskussionen zum Mathematikunterricht, ergeben sich durchaus Parallelen zwischen den Ereignissen. Um beide Reformen entsprechend einordnen zu können, ist es erforderlich, wesentliche gesellschaftliche, bildungspolitische und wissenschaftliche Rahmenbedingungen zu skizzieren.

4.1 Entwicklung des Unterrichts in Mathematik an Schulen und Universitäten bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts

4.1.1 Mathematikunterricht an den höheren Schulen

Das 16. Jahrhundert stand im Zeichen der Reformation. Im stark vom Humanismus geprägten Unterrichtswesen gab es noch keine verbindlichen Regelungen für den Zugang zu einer Universität. Infolgedessen gab es kein einheitliches Eintrittsalter und keine genormten Vorkenntnisse der angehenden Studierenden. Redundanzen in den Lehrinhalten zwischen den Schulen und Universitäten waren unvermeidlich (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 71). Mit der Wende zum 17. Jahrhundert erschöpfte sich die humanistische Begeisterung und es regte sich erster Missmut hinsichtlich des Unterrichts. Nach Vorbild der Ritterakademien, in denen junge Angehörige des Adelsstandes eine zeitgemäße höfische Bildung erhielten, drangen die Fächer Politik, Mathematik, Physik, moderne Sprachen in das Lehrangebot der Universitäten und Lateinschulen vor (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 73). Zu Beginn des 18. Jahrhunderts wuchs an den Schulen die Bedeutung von Mathematik, wenngleich mit einer starken Betonung des Anwendungsaspektes.

> *„Als Vorbild diente vielfach die Einrichtung an den Franckeschen Anstalten in Halle, die von kleinen Anfängen (1695) rasch zu großer Bedeutung gelangt waren; dort wurde Rechnen, Geometrie und Astronomie nebst ihren Anwendungen ausführlich betrieben"* (Klein/Schimmack 1907, S. 76).

Eine tragende Rolle kam dem zu dieser Zeit in Halle lehrenden Philosophen und Mathematiker Christian Wolff zu. Er sprach sich, neben der praktischen Verwertbarkeit mathematischer Kenntnisse, dafür aus, Mathematikunterricht zur allgemeinen Schärfung des

Verstandes anzuwenden. Das führte dazu, dass die exakte Beweisführung in den Schulunterricht drang. Klein schätzte Wolffs Reformintentionen folgendermaßen ein:

> *„Wolffs mathematische Lehrbücher bezeichnen etwa die oberen Grenzen, denen bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts der Unterricht an Schule und Hochschule zustrebt“* (Klein/Schimmack 1907, S. 76).

Die Bücher behandelten Rechnen, Geometrie, Trigonometrie einschließlich Logarithmen und verschiedene Anwendungsgebiete bis hin zur analytischen Geometrie der Kurven sowie zur Infinitesimalrechnung – *„dem allerneuesten der damaligen Wissenschaft!“* (Klein/Schimmack 1907, S. 77).

Neuhumanistische Strömungen, u. a. geprägt von den Altphilologen Johann Matthias Gessner, Johann August Ernesti, Christian Gottlob Heyne und Friedrich August Wolf, beeinflussten ab Mitte des 18. Jahrhunderts zunehmend den Unterricht. Es entwickelte sich ein „Prinzip der formalen Bildung“. Die alten Sprachen dominierten und der Wert der Mathematik wurde vornehmlich auf eine reine Verstandesschulung reduziert (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 77).

Mit Beginn des 19. Jahrhunderts kam es zu einigen strukturellen Vereinheitlichungen in der Schullandschaft, nicht aber zu tiefgreifenden inhaltlichen Änderungen. Einer der bedeutendsten Vertreter dieser Zeit war Wilhelm von Humboldt. Durch sein persönliches Wirken und seinen Einfluss als Staatsmann beförderte er die Gründung der Berliner Universität, die Profilierung der humanistischen Gymnasien und 1816 die Einführung amtlicher Lehrpläne für Gymnasien (Süvern'sche Pläne) (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 80). Die humanistischen Ideale fanden jedoch nicht nur Befürworter. Ab dem 18. Jahrhundert drängten vor allem Kaufleute und mittlere Beamte zur Einrichtung sogenannter „Realschulen“. Eine erste *„lebensfähige Schöpfung dieser Art“* (Klein/Schimmack 1907, S. 75) entstand bereits 1747 in Berlin. Es sollten aber noch über einhundert Jahre vergehen, bis ab 1859 Realanstalten an den Entwicklungen des höheren Schulwesens teilhaben konnten (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 88).

Im Gegensatz zu anderen europäischen Staaten gab es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine Aufspaltung des höheren Schulwesens in unterschiedlich profilierte und sozial bewertete Schultypen. Neben sogenannten sechs- bis siebenjährigen Nichtvollanstalten, wie Progymnasien, Realprogymnasien, Realschulen bzw. höhere Bürgerschulen, existierten auch neunjährige, zum Abitur führende Vollanstalten: humanistische Gymnasien, mit einer starken Betonung alter Sprachen, und Realgymnasien sowie Oberrealschulen, mit Fokus auf Mathematik und Naturwissenschaften.

Durchgreifende strukturelle und inhaltliche Reformen blieben auch nach der Gründung des Deutschen Reiches 1871 aufgrund länderhoheitlicher Strukturen schwierig. Auf der Schulkonferenz von 1873 gab es bezüglich einer Vereinheitlichung im höheren Schulwesen drei Hauptströmungen:

(1) Die Vertreter einer höheren Einheitsschulidee sahen die Zukunft in einem Gymnasium, das neben den traditionellen humanistischen Idealen eine moderne realistische Ausrichtung hat. Sie plädierten dafür, einige wenige Realanstalten zur Vorbereitung auf die Technischen Hochschulen zu belassen (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 88).

(2) Die Befürworter eines Gymnasialmonopols sprachen sich dafür aus, die privilegierte Stellung des Gymnasiums mit alleiniger Zugangsberechtigung zum Universitätsstudium zu erhalten. Gegen die seit 1870 mögliche Zulassung von Absolventen der Realanstalten zum Universitätsstudium der Mathematik, Naturwissenschaften und neueren Sprachen regte sich in dieser Gruppe heftiger Widerstand (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 88).

(3) Eine Minderheit favorisierte die Idee der Gleichberechtigung. Diese setzte auf eine „reinliche Scheidung" zwischen den realen und gymnasialen Anstalten. Sie fasste aber die Abschlüsse als Zugangsvoraussetzung zum Studium als gleichwertig auf. Die verschiedenen Schultypen sollten unvermischt nebeneinander erhalten bleiben (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 88f.).

Im Jahre 1873 konnten sich zumindest die Kultusbehörden auf gemeinsame Minimalanforderungen bei der Anerkennung von Abiturzeugnissen einigen (vgl. Schubring 2007, S. 4). Ab 1882 wurden in Preußen die Lehrinhalte nicht mehr implizit aus den Anforderungen der Abiturprüfungsverordnungen abgeleitet, sondern explizit als verbindliche Norm festgeschrieben. Zur selben Zeit erhob sich an den Gymnasien die Forderung, physikalische Inhalte in die Mathematikprüfungen einzubeziehen. Diese Anwendungsorientierung war ein Bruch mit den vorherrschenden neuhumanistischen Ansichten zum Mathematikunterricht als reine Verstandesschulung (vgl. Mattheis 2000a, S. 9).

Die Idee einer Zweiteilung des höheren Schulwesens, welche bereits gegen Ende der 1880er Jahre diskutiert wurde, sollte schließlich auf der Schulkonferenz von 1890 geklärt werden. Die Realgymnasien, welche Klein mit *„Alles-sein-wollen"* (Klein/Schimmack 1907, S. 93) charakterisiert hatte, wurden sowohl von den Oberrealschulen als auch von den humanistischen Gymnasien „weggedrängt". Der deutsche Kaiser Wilhelm II. erkannte, wie schnell sich Anforderungen an die Schule aufgrund rasanter wissenschaftlicher, technischer und gesellschaftlicher Veränderungen wandeln. Er ergriff entschieden Partei für das realistische Bildungsprinzip und forderte nachdrücklich eine Veränderung des

gymnasialen Unterrichts und den Bruch mit überholten Vorstellungen (vgl. Mattheis 2000a, S. 10).
Während der Schulkonferenz im Dezember 1890 trat Wilhelm II. – trotz seiner starken Kritik an den humanistischen Gymnasien – für deren Erhalt und damit für eine Zweiteilung unter Ausschluss der Realgymnasien ein. Seiner Ansicht nach sollten sich die Gymnasien dem von ihm favorisierten modernen, realistischen Bildungsideal annähern (vgl. Mattheis 2000a, S. 11). Aufgrund des starken Widerspruchs der Städte, welche Träger fast aller Realgymnasien waren, blieben diese erhalten und damit auch die Dreiteilung des höheren Schulwesens.
An den Oberrealschulen wurde verboten, Differentialrechnung und analytische Geometrie des Raumes zu lehren. Damit hatte man die als Fachkenntnis gebrandmarkte Differentialrechnung amtlich aus allen höheren Schulen verbannt.

> *„Für die Realanstalten war damit ein Lehrziel zustande gekommen, dass über das Gymnasium in kaum etwas Wichtigerem hinausging, – wenigstens in nichts, was dem Abiturienten weiterhin hätte von besonderem Nutzen sein können“* (Klein/ Schimmack 1907, S. 94).

Der Lehrplan von 1892 lieferte weitere Impulse zur gegenseitigen inhaltlichen Annäherung der höheren Schulen. Bei den Fächern Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde und Turnen gab es diesbezüglich keine inhaltlichen Unterscheidungen mehr. In den verschiedenen Schularten variierte aber die Anzahl an Unterrichtsstunden in Mathematik, in den Naturwissenschaften und in Zeichnen. Es wurden allgemeine Lehrziele für die Fächer festgelegt, der Lehrstoff erstmals auf die unterschiedlichen Klassenstufen aufgeschlüsselt und durch methodische Hinweise ergänzt (vgl. Mattheis 2000a, S. 13).
Im Zusammenhang mit Fragen der Prüfungsrelevanz erfolgte 1892 eine Klassifizierung in Haupt- und Nebenfächer. In den drei Schularten zählten demnach Mathematik, Deutsch und zwei Fremdsprachen zu den sogenannten Hauptfächern, welche dann auch mit höheren Stundenzahlen unterrichtet wurden (vgl. Mattheis 2000a, S. 14). Mit der Festschreibung der Dreiteilung des höheren Schulwesens stellte sich in den darauffolgenden Jahren zunehmend die Frage nach den Berechtigungen, welche mit den Abschlüssen verbunden waren (vgl. Mattheis 2000a, S. 14).
Im Fach Mathematik trat die inhaltliche Modernisierung in den Vordergrund und zwar besonders an den Realanstalten, die einen stärkeren Anwendungsbezug verfolgten (vgl. Mattheis 2000a, S. 15). Ein weiterer Schritt waren Zugangsmöglichkeiten zu bestimmten Studienfächern. Ab 1901 konnten sich Abiturienten aller Schularten ohne Einschränkun-

gen für alle Lehramtsstudiengänge einschreiben. Für die Fächer Jura oder Medizin erfolgten Regelungen in den darauffolgenden Jahren. Lediglich für das Studium der Theologie war das Reifezeugnis eines Gymnasiums vonnöten (vgl. Mattheis 2000a, S. 20).

4.1.2 Mathematikunterricht im höheren Mädchenschulwesen und im Volksschulwesen

Bereits im Kaiserreich wurde der Unterricht an den höheren Mädchenschulen zunehmend institutionalisiert. Neben der generellen Anerkennung als höhere Lehranstalt wurde über den Stellenwert des Faches Mathematik gestritten. Die Lehrpläne in Preußen sahen gegen Ende des 19. Jahrhunderts eine einseitige Orientierung auf ethische und ästhetische Bildung vor. Mathematik fasste man dabei im Wesentlichen als Rechenunterricht auf, ohne Raum für tieferes fachliches Verständnis (vgl. Schubring 2007, S. 9). Klein sprach von *„stiefmütterlicher Behandlung der Mathematik*" (Klein/Schimmack 1907, S. 44), welche aus einer verbreiteten, von ihm karikierten Denkweise resultierte: *„das weibliche Geschlecht eigne sich nicht für die Mathematik [...] oder [...] die Mathematik eignet sich nicht für das weibliche Geschlecht"* (Klein/Schimmack 1907, S. 44). Klein (1907, S. 44) beklagte, dass Mädchen zuerst schlecht ausgebildet wurden und sich dann Verwunderung darüber zeigte, dass bestimmte Denkweisen bei ihnen nicht ausgeprägt seien.

Die Angleichung der Lehrpläne in Mathematik und Naturwissenschaften an die der Knabenschulen ging auf die Initiative der „Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte" (GDNÄ) zurück. Erst 1908 wurden an öffentlichen höheren Mädchenschulen die wissenschaftlichen Unterrichtsfächer Mathematik und Naturwissenschaften eingeführt (vgl. Tobies 2000, S. 31). Inhaltlich sollten sie den Meraner Vorschlägen folgen (vgl. Schubring 2007, S. 10). Ab dem gleichen Jahr war es Frauen erlaubt, sich an einer preußischen Universität immatrikulieren zu lassen (vgl. Tobies 2000, S. 31). Mit der Einführung von zehnklassigen Lyzeen und zum Studium berechtigenden Oberlyzeen erhöhten sich die Wochenstundenzahlen für Rechnen und Mathematik. Die bayrischen Lehrpläne der Höheren Mädchenschulen forderten ab 1911, in Grundzügen die Differentialrechnung zu unterrichten. In den weiteren Jahren erließ man zunehmend Bestimmungen zur Koedukation, welche die Benachteiligungen von Mädchen weiter verringern sollten (vgl. Schubring 2007, S. 10) .

Felix Klein setzte sich nicht nur für Veränderungen der mathematischen Bildung an den höheren Schulen ein. Er wollte das Unterrichtswesen als große Einheit wissen und zwar von der Schule bis zur Hochschule (vgl. Tobies 2000, S. 33). Im Wintersemester 1910/11 hielt Klein Vorlesungen über die „Moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts“, welche Vorträge zum Volksschulwesen und zur Volksschullehrerbildung einschlossen. Zwischen 1909 und 1916 erschien sein fünfbändiges Werk „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland“. Tobies kommentierte Kleins Wirken: *„Das besondere Hervorheben des Volksschulunterrichts war für die Tätigkeit eines Universitätsprofessors durchaus ungewöhnlich“* (Tobies 2000, S. 33).

Laut Schubring (2007, S. 12) entwickelte sich das Volksschulwesen der deutschen Staaten seit dem 19. Jahrhundert deutlich einheitlicher als das höhere Schulwesen. Trotz einer allgemeinen Schulpflicht unterschieden sich jedoch die Bildungschancen; möglicherweise schon aus rein strukturellen Gründen: Es gab Stadtschulen mit jahrgangsgetrennten Klassen und einklassige Schulen auf dem Lande.

Im Rahmen der allgemeinen Schulreform von 1872 wurde das Volksschulwesen in Preußen, anknüpfend an die Traditionen von Pestalozzi, Herbart, Diesterweg und Fröbel, neu gestaltet (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 90). Für Klein zeichnete sich der Volksschulunterricht durch folgende Merkmale aus: Der „Stoff“ wird immer konkret und anschaulich behandelt und ist im Einzelnen sorgfältig pädagogisch durchgebildet. Die Auswahl des „Stoffes“ ist durchaus von praktischen Gesichtspunkten geleitet. Seine Darstellung erfolgt durchweg dogmatisch, d. h. ohne eigentliche Beweise. Einen charakteristischen Unterschied zur Lehrart an den höheren Schulen sah Klein darin, das starre euklidische Schema: „Voraussetzung – Behauptung – Beweis“ (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 12) zu meiden.

4.1.3 Situation der Mathematik an den Universitäten und Technischen Hochschulen

Nach dem Mittelalter existierte an den Universitäten neben den drei oberen Fakultäten, Theologie, Jurisprudenz und Medizin, die vierte – die artistische Fakultät (artes liberales). Sie sicherte die allgemein verbindlichen Vorlesungen zur Vorbereitung auf das Studium in einer der oberen Fakultäten ab. Ein Bestandteil dieser Vorbereitungskurse waren die Vorlesungen in Mathematik, einer Wissenschaft, welche Klein als eine *„der ältesten und edelsten Betätigungen des menschlichen Geistes“* (Klein 1926, S. 5) bezeichnete. Indem ein Normalniveau für Gymnasien festgelegt wurde, genügte das Reifezeugnis des Gymnasiums für eine Immatrikulation (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 80). Dadurch konnte ein höheres und ausgeglicheneres Niveau an den Universitäten verzeichnet werden. Die vierte Fakultät verlor damit mehr und mehr ihre Aufgabe als „Vorschule“ für die drei oberen Fakultäten. Fortan bestand die Mission dieser Fakultät vor allem darin, die Lehrkräfte für die höheren Schulen auszubilden, was den *„eigentliche[n] Lehrerstand mit*

gesellschaftlichem Gemeingeist" (Klein/Schimmack 1907, S. 82) schuf.
Im 19. Jahrhundert zeichneten sich gewisse Spaltungstendenzen in der Mathematik ab: Neben einer „Angewandten Mathematik", welche ständig für neue Forschungsgebiete, insbesondere in der Physik, das theoretische Rüstzeug bereitstellte, erstarkte die sogenannte „Reine Mathematik" (vgl. Klein 1926, S. 6). Diese brachte gänzlich neue Gebiete hervor, z. B. die Theorie der komplexen Funktionen. Dies entfachte das Gefühl einer neuen mathematischen Strenge. Kaum ein Mathematiker vermochte es noch, *„innerlich eine Synthese des Ganzen zu vollziehen und nach außen fruchtbar zu machen"* (Klein 1926, S. 7).
Klein suchte, in Erinnerung an das Universalitätsideal des 18. Jahrhunderts, nach Möglichkeiten, diese Zustände zu verändern:

> *„Wie muß eine Darstellung angelegt sein, die eine solche, der Einheit und des Zusammenhangs mangelnde Entwicklung für ein weiteres Publikum klarlegen soll?"* (Klein 1926, S. 8).

Für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts fand Klein Gründe für die Entwicklungen in der Mathematik im herrschenden Geist der Epoche:

> *„Das neuhumanistische Ideal der reinen Wissenschaft als Selbstzweck, das die Verachtung aller Nützlichkeit im gemeinen Sinne in sich barg, führte bald zu einer geflissentlichen Abkehr von allen der Praxis zugewandten Bestrebungen"* (Klein 1926, S. 10).

Damit beschrieb Klein die Entwicklungen der *„reinen Mathematik, die nun in einseitiger aber glänzender Ausbildung an den deutschen Universitäten ihren Siegeszug antritt"* (Klein 1926, S. 11). Klein vertrat dazu folgende Position:

> *„Wir bedürfen (an den Universitäten) einer stark entwickelten Mathematik, weil sie dem ganzen Betriebe festen Halt giebt, etwa wie das Knochengerüst dem Organismus. […] Wir bedürfen aber gleichzeitig einer zu selbständigen Forschungen fortschreitenden Mathematik, weil sonst der verkehrte und verderbliche Eindruck entsteht, als sei die angewandte Mathematik etwas nur Beiläufiges, Niederes"* (Klein/Riecke 1900, S. 22).

Klein kritisierte die Spezialisierung und Zersplitterung und damit eine gewisse Verkümmerung des mathematischen Universitätsunterrichts.

> *„In den Gebieten der Anwendung ist es der verfrühte mathematische Ansatz, der ohne genauere Kenntnis der in Wirklichkeit maßgebenden Bedingungen vorangestellt wird und dann das Interesse von der Erfassung der eigentlichen Fragen ablenkt; beim Unterricht ist es die ausschließliche Betonung der logischen Zusam-*

> *menhänge unter Zurückschiebung der psychologischen Momente. Die logische Überlegung ist für die Mathematik, was das Skelett für den tierischen Organismus (der ohne das Skelett keinen Halt hat), aber es wäre eine merkwürdige Zoologie und ein sehr verfehlter zoologischer Unterricht, der vom Beginn an nur von dem Knochengerüst der Tiere handeln wollte!"* (Klein 1905a, S. 37).

Eine Lösung sah er darin, die universitäre mathematische Bildung neu zu strukturieren: in allgemeine Elementarvorlesungen, welche dem Großteil der Studierenden einen Überblick vermitteln sollte, und in Spezialveranstaltungen mit besonderen und höheren Inhalten für einen kleineren Teil der Studierenden (vgl. Klein 1895, S. 537). Weiterhin forderte er, Seminare und Übungen in die universitäre Mathematikausbildung aufzunehmen (vgl. Mattheis 2000b, S. 42). Die Kluft zwischen reiner Mathematik und Anwendungen sollte verringert werden zugunsten von anschaulichen Zeichnungen und Modellen. Dazu initiierte er Modellsammlungen, welche die mathematische Ausbildung ergänzten, ohne sie zu trivialisieren (vgl. Mattheis 2000b, S. 43).

Für Schubring (2000, S. 66) war Felix Klein Promotor einer Reformbewegung: Klein strebte eine Homogenisierung der Mathematikausbildung zwischen Universität und Technischer Hochschule an; er forderte eine konzeptionelle Erneuerung der mathematischen Lehre an den Technischen Hochschulen. Die zunehmende Bedeutung dieses neuen Hochschultyps zeigte sich beispielsweise daran, dass Klein an der Erlanger Universität nie mehr als sieben Hörer in einer Vorlesung hatte. An der Technischen Hochschule München schrieben sich 1875 hingegen 230 Studenten für seine erste Vorlesung über analytische Geometrie ein (vgl. Tobies/König 1981, S. 43).

Gegen die abstrakte Lehrweise einiger Mathematiker an den expandierenden Technischen Hochschulen regte sich bei den Ingenieuren Widerstand. Dieser mündete in die sogenannte „Antimathematiker-Bewegung" (vgl. Schubring 2007, S. 4). Die Technischen Hochschulen, welche Klein als *„echte Gebilde unserer modernen Entwicklung"* (Klein/Schimmack 1907, S. 176) bezeichnete, entsprachen den wissenschaftlich-technischen Anforderungen der deutschen Industrie. Diese verlangte zur damaligen Zeit nach vielen schaffenden Ingenieuren und kaum nach Theoretikern (vgl. Klein 1905b, S. 482). So sehr Klein diese Entwicklung befürwortete, verwies er stets auf die Notwendigkeit einer fundierten mathematischen Grundbildung oder *„theoretischen Durchbildung"* (Klein 1905b, S. 484), wie er sie nannte. Diese sollte bereits an den höheren Schulen angelegt werden.

Die als Höhere Gewerbeschulen gegründeten Polytechnika wurden 1879 in Preußen in Technische Hochschulen umbenannt. Das zeugte von der Aufwertung der technischen Wissenschaften. Im Jahre 1892 wurden die Professoren der Technischen Hochschulen

den Universitätsprofessoren titular gleichgestellt (vgl. Mattheis 2000a, S. 6). Zu einer zentralen Frage erhob sich die Verleihung des Promotionsrechts, welches dann schließlich 1899 durch König Wilhelm II. den Technischen Hochschulen in Preußen verliehen wurde. Dies war richtungsweisend für den neuen Hochschultyp und lieferte Argumente für die Gleichstellung einer klassisch humanistischen und realistisch technischen Bildung im höheren Schulwesen (vgl. Mattheis 2000a, S. 7).
Kleins unterrichtliche Reformbestrebungen beschränkten sich nicht nur auf eine Passfähigkeit von mathematischer Schulbildung und Mathematikstudium. Sie betrafen auch die Nichtmathematiker. Klein äußerte, *„daß [ihm] in erster Linie die Sorge für die mathematische Bildung der späteren Nichtmathematiker am Herzen liegt“* (Klein/Schimmack 1907, S. 133). Angehende Chemiker, Physiker, Techniker, Mediziner oder Juristen kamen ohne funktionentheoretische Kenntnisse (insbesondere ohne die Anfänge in Differential- und Integralrechnung) an die Universität. Nach Kleins Ansicht blieben ihnen damit *„wichtige Seiten ihres Faches überhaupt unzugänglich“* (Klein 1904, S. 18). Während ihm bei den Juristen die Statistik und das Versicherungswesen Sorge bereiteten, waren es bei den Medizinern die quantitativen Bestimmungen von Vorgängen während der Anfangsvorlesungen in Experimentalphysik und Physiologie. Klein sprach von einer *„Unzweckmäßigkeit der von der Schule gelieferten mathematischen Bildung“* (Klein 1904, S. 19). Lösungsansätze sah er in inhaltlichen Veränderungen.

> *„Indem der mathematische Unterricht auch an den Gymnasien von vornherein Raumanschauung und funktionales Denken pflegt und in konsequentem Lehrgange bis an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung heranführt, wird die einleitende Vorlesung über höhere Mathematik ertragreicher gestaltet werden können als bisher“* (Klein 1905b, S. 483).

4.1.4 Ausbildung der Lehramtskandidaten für das Fach Mathematik

Im 19. Jahrhundert wurde die mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrerbildung zu einer bedeutsamen Aufgabe der Universitäten (vgl. Klein 1926, S. 10). Ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts verwandelten sich diese jedoch *„immer ausschließlicher in Stätten für die Heranbildung wissenschaftlicher Forscher“* (Klein 1905b, S. 486). Klein forderte deshalb *„eigene Vorlesungen, welche die notwendige und allseitige Verbindung der höheren Mathematik mit dem Lehrgebiet der Schule herstellen“* (Klein 1905b, S. 487). Derartig ausgebildete Lehrkräfte sollten nach Kleins Ansicht *„in der Tat geeignet sein, allen Anforderungen der in Meran empfohlenen neuen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts zu entsprechen“* (Klein 1905b, S. 487). Da die Mathematikausbildung in dieser Zeit im Wesentlichen auf das Lehramt bezogen war, bot sie diesbezüglich auch Ansatzpunkte für inhaltliche Reformen (vgl. Tobies 2000, S. 23). Für Klein sollte der universitäre mathematische Unterricht organisch an den schulischen anschließen können: *„[In] der Schulmathematik sollen fortan dieselben Gedanken vorangestellt und eingeübt werden, die höher hinauf primäre Geltung besitzen“* (Klein 1905b, S. 488).

Um derartig tiefgreifende Änderungen umsetzen zu können, konnte nicht auf eine neue Generation an Lehrkräften gewartet werden. Es mussten bereits im Amt befindliche Lehrkräfte gefunden und für die Idee begeistert werden. Dazu wurden zu Beginn der 1890er Jahre an einigen deutschen Universitäten naturwissenschaftliche Ferienkurse eingerichtet. Deren Inhalte waren z. B. neue Erkenntnisse aus der Elektrizitätslehre, der Elektrotechnik oder der organischen Chemie (vgl. Tobies 2000, S. 23). In Göttingen initiierte Felix Klein ab 1892 erste Ferienkurse, die auch mathematische Themen im Programm hatten (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 170). Als Vorbedingung sah Klein, dass sich die Hochschullehrer *„mehr als seither üblich über die tatsächlichen Verhältnisse an unseren höheren Schulen auf dem Laufenden [zu] halten“* (Klein 1905b, S. 492) hatten.

Im Jahre 1898 erfolgte in Preußen die Einführung einer besonderen Lehrbefähigung für „Angewandte Mathematik“. Diese verlieh den Universitäten in dieser Disziplin einen weiteren Aufschwung und trug auch zu einer generellen Stärkung der technischen Wissenschaften bei (vgl. Mattheis 2000b, S. 47). Dadurch war erstmals eine „reine“ Mathematik-Physik-Lehrer-Ausbildung möglich, wobei die übliche Dreierkombination („Angewandte Mathematik“, „Reine Mathematik“ und Physik, mit Einschluss der Lehrerlaubnis bis zur Oberprima in mindestens einem der Fächer) beibehalten wurde (vgl. Mattheis 2000a, S. 16). Die Option für Lehramtsstudierende, gewisse Fächer auch bis zu drei Semester an einer Technischen Hochschule zu studieren, stellte einen weiteren Schritt in Richtung Gleichstellung von Technischer Hochschule und Universität dar (vgl. Klein 1905b, S. 490). Eine gewisse Vorbildwirkung der Technischen Hochschulen zeigte sich auch an der Göttinger Universität. Entsprechende Veränderungen bewirkten hier eine breitere mathematische Orientierung mit engen Bezügen zu den Nachbarwissenschaften. Die Zuweisung von Studienplänen und ausgearbeiteten Vorlesungsskripten verbesserte die organisatorischen Rahmenbedingungen (vgl. Mattheis 2000a, S. 27).

4.2 Felix Klein und seine Forderungen zum funktionalen Denken

4.2.1 Das Anwachsen von Reformbestrebungen

Um 1800 galten die Mathematiklehrkräfte als aktive Vertreter moderner Unterrichtsgestaltung. Schubring (2007, S. 3) bescheinigte ihnen jedoch für die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts, trotz der rasanten wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Entwicklung in Deutschland, eher defensive Konzeptionen. Auch nach der Gründung des ersten fachlichen Lehrerverbandes (Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) im Jahre 1891 waren aus der Lehrerschaft keine Signale zu grundlegenden Reformen zu verzeichnen (vgl. Schubring 2007, S. 4). Umso bedeutsamer war, dass die Initiative für curriculare Reformen im höheren deutschen Schulwesen im Wesentlichen von Lehrkräften der Universitäten und Hochschulen ausgingen, insbesondere von Felix Klein.
Im Zeitalter der Aufklärung war Utilität das oberste Ziel mathematischer Bildung. Das 19. Jahrhundert, geprägt von den Idealen des Neuhumanismus, stand im Zeichen der formalen Bildung: Die allgemeine Schulung geistiger Fähigkeiten, nicht aber die Vermittlung praktischer Kenntnisse, stand im Vordergrund (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 30). Felix Klein vertrat nach 1900 folgende Meinung:

> *„Wir wollen den formal bildenden Wert der Mathematik durchaus gebührend würdigen, wollen zugleich aber den Lehrstoff so auswählen, daß gerade seine Erlernung für das Leben auch nützlich ist“* (Klein/Schimmack 1907, S. 30).

An anderer Stelle schrieb er:

> *„[W]eder die einseitig formale, noch die bloß utilitaristische Bildung wird zum Prinzip des mathematischen Unterrichtes gemacht; sondern gerade in der richtigen Verschmelzung beider besteht das anzustrebende Ideal“* (Klein/Schimmack 1907, S. 29).

Klein suchte nach einer zentralen Idee: Sie sollte die von ihm erwähnte Verschmelzung herbeiführen und sich gleichzeitig durch das gesamte Curriculum ziehen können.

4.2.2 Bedeutung funktionalen Denkens für den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen

Für Klein waren es *„Produkte der allerverschiedensten Zeiten“* (Klein/Schimmack 1907, S. 70), welche von der mathematischen Wissenschaft auf den Schulunterricht einwirkten. In großen Teilen des Unterrichts stellten sich diese als eine *„Nebeneinanderdarstellung* *an sich interessanter aber isolierter Kapitel, die einigermaßen zufällig ausgewählt scheinen"* (Klein 1904, S. 15) dar.

Klein suchte nach einer inneren Verbindung, um eine tragfähige Basis für ein tieferes Verständnis mathematischer Bestandteile in unserer Kultur zu schaffen. Genau diese sah Klein im Funktionsbegriff und im funktionalen Denken. Er war der festen Überzeugung, dass *„der Funktionsbegriff in zweckmäßiger Ausgestaltung in den Mittelpunkt des theoretisch-mathematischen Unterrichts [zu] rücken [sei und dass] der Funktionsbegriff in geometrischer Form [...] überhaupt die Seele des mathematischen Schulunterrichts"* (Klein 1904, S. 15) sein sollte. Er schrieb weiter: *„Um den Funktionsbegriff gruppiert sich zwanglos der gesamte mathematische Lehrstoff und gewinnt, was bisher vielfach zu vermissen ist, einen planvollen Zusammenhang"* (Klein/Schimmack 1907, S. 34). Klein vertrat die Ansicht, dass Kenntnisse von funktionalen Zusammenhägen in ihrer Bedeutung und „Nützlichkeit" weit über den Mathematikunterricht hinausreichen können. In Bezug auf außermathematische Anwendungen schrieb er:

> *„[D]ie graphischen Darstellungen durchsetzen nicht nur die große moderne Literatur der exakten Fächer, sondern man kann sagen: sie durchsetzen das ganze Leben der Gegenwart!"* (Klein/Schimmack 1907, S. 21).

Klein propagierte nicht nur eine *„innere Verbindung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Denkens"* (Klein 1904, S. 42). Er forderte eine Verschmelzung verschiedener mathematischer Denkweisen, die im alltäglichen Leben ohnehin nicht zu trennen waren. Er sprach sich an den höheren Schulen gegen die an Universitäten durchaus übliche Trennung von Arithmetik und Geometrie aus und beabsichtigte, *„die Mathematik als einen Organismus vorzuführen, dessen Teile in reger und lebendiger Beziehung stehen"* (Klein/Schimmack 1907, S. 38). Klein (1904, S. 36) ging sogar noch einen Schritt weiter: Seiner Ansicht nach waren die Grundlinien der wissenschaftlichen Naturerklärung nur zu verstehen, wenn man den niederen Teil der höheren Mathematik kannte; und dies nicht erst an der Universität oder der Technischen Hochschule, sondern bereits in Grundzügen an den höheren Schulen. Zugleich warnte er davor, die Differential- und Integralrechnung an den höheren Schulen rein formal einzuführen.

> *„Wir müssen vielmehr immer wieder durch zahlreiche, vom Schüler selbst zu behandelnde Beispiele, die anschauungsmäßige und die begriffliche Bedeutung der durch diese Symbole gemeinten Denkoperationen in den Vordergrund rücken!"* (Klein 1904, S. 24).

Frühere Misserfolge bei der Einführung der Differential- und Integralrechnung führte er auf einen zu abstrakten Unterricht zurück und forderte

> *„eine praktische Differential- und Integralrechnung, welche sich auf die einfachsten Beziehungen beschränkt und diese an der Hand der dem Schüler bereits geläufigen Naturvorgänge fortgesetzt veranschaulicht"* (Klein 1904, S. 43).

Klein plädierte generell für eine stärkere Anschauung im Unterricht. Er meinte damit in erster Linie die Beziehung der Mathematik zu den exakten Naturwissenschaften. Andererseits warnte er vor Extremen, bei denen *„vor lauter Vorführung interessanter Anwendungen die eigentliche logische Durchbildung verkümmern"* (Klein 1904, S. 35) könnte. Klein wollte vermeiden, dass *„das Pendel, welches in früheren Jahrzehnten vielleicht zu sehr nach der abstrakten Seite wies, nun in das andere Extrem überschlägt"* (Klein 1904, S. 35). Für ihn sollte das Pendel *„in der richtigen Mitte bleiben"* (Klein 1904, S. 35). Ihm ging es um die Balance zwischen der rein formalen mathematischen Bildung neuhumanistischer Prägung und einer ausschließlich auf Utilität gerichteten Mathematik wie zu Zeiten der Aufklärung. Es stellte sich die Frage, ob und gegebenenfalls welche der bisherigen Lerninhalte in ihrer Bedeutung bzw. in ihrem Umfang zurücktreten sollten. Klein benannte dazu konkrete Beispiele, wie: komplizierte Konstruktionsaufgaben (vgl. Klein 1904, S. 17); formales Auflösen kubischer Gleichungen (vgl. Klein 1904, S. 38); künstliche, durch Quadratwurzeln lösbare Gleichungen; umfangreiche trigonometrische Entwicklungen (vgl. Klein 1904, S. 17). Weiterhin konnte er sich eine Verschiebung der Logarithmenrechnung in die Oberstufe vorstellen, zugunsten einer umfassenden Behandlung der Funktionen bis zur Untersekunda (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 41).
In seinen Vorträgen über den modernen Unterricht an den höheren Schulen äußerte er sich zur Ausgestaltung der Lehrpläne für die Oberstufe von 1901:

> *„Nach meiner Auffassung gehört schon heute die Infinitesimalrechnung als Ausgestaltung des Funktionsbegriffs zur allgemeinen mathematischen Bildung, die man von jedem verlangen sollte, und wird es in Zukunft immer mehr gehören"* (Klein/Schimmack 1907, S. 113).

Gleichzeitig warnte er vor fachlichen Überhöhungen:

> *„Vom pädagogischen Standpunkt kann es für die höheren Studien gewiss keinen Nachteil bedeuten, wenn schon der Schüler ein klein bisschen differenzieren und integrieren gelernt hat, mußte auch die feinere logische Grundlegung dabei unterbleiben und mehr durch anschauliches Vorgehen ersetzt werden"* (Klein/Schimmack 1907, S. 114).

Klein forderte keine quantitative Ausweitung des mathematischen Unterrichts. Er verteidigte die vorgesehene höhere Wochenstundenzahl im Hinblick auf die wesentlich geringeren Wochenstundenzahlen in den einzelnen Naturwissenschaften. Dabei vertrat er den Grundsatz, *„daß das einzelne Fach an der Schule nicht isoliert für sich betrieben werden soll, sondern im Hinblick auf die durch Schule zu vermittelnde Gesamtbildung!“* (Klein 1904, S. 28). Der nach seinen Reformvorstellungen gestaltete Mathematikunterricht könnte *„zur wesentlichen Entlastung der Nachbarfächer beitragen“* (Klein 1905a, S. 40).

Wesentlich war für ihn, die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Phänomene in den Fächern Physik, Geographie und Astronomie zu schaffen: *„Wir werden in dieser Hinsicht die besten Freunde der Naturwissenschaften sein“* (Klein 1905a, S. 40). Für Klein hatte z. B. der Physikunterricht den Zweck, naturwissenschaftliches Beobachten und Denken zu üben. Mathematik war dabei ein unerlässliches Werkzeug (vgl. Klein 1905a, S. 41). Andererseits sprach er davon, den physikalischen Unterricht zu entlasten, indem das entsprechend angepasste mathematische Rüstzeug bereitgestellt wurde (vgl. Klein 1904, S. 27).

Nach Ansicht von Klein hatte der naturwissenschaftliche Unterricht im Ausland um 1900 den an den deutschen Schulen bereits überflügelt. Er verwies auf die Entwicklungen in England und Amerika, wo sich eine veränderte Sicht auf die Naturwissenschaften

> *„ausdrücklich damit begründet, daß man hofft, solcherweise die Bevölkerung für den Konkurrenzkampf der Nationen auf dem Gebiete der Industrie und der militärischen Geltung tüchtiger zu machen“* (Klein 1905a, S. 43).

Diese völlig neue Dimension naturwissenschaftlicher Bildung kommentierte Klein wie folgt:

> *„Fürwahr ein wichtiger Grund, vielleicht mehr geeignet, unseren Wünschen bei den maßgebenden Instanzen Gehör zu verschaffen, als alle die idealen Überlegungen, mit denen wir sonst operieren“* (Klein 1905a, S. 43).

4.3 Die Umsetzung der Ziele von Felix Klein

4.3.1 Die Schulkonferenz von 1900

Im Juni 1900 wurde in Berlin eine Schulkonferenz einberufen. Deren Hauptergebnis war die Schaffung von neuen Schulstrukturen. Diese lösten die schulischen Grundsatzprobleme aus der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und schufen die Grundlage für die weitere Entwicklung der höheren Schulen im 20. Jahrhundert (vgl. Schubring 2000, S. 65). Wie kam es zu dieser Konferenz?

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hatte sich die Kritik bezüglich des Mathematikunterrichts an Schulen und Hochschulen verschärft. Vor allem Vertreter der Industrie bemängelten die vorherrschende Situation (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 94). Daraufhin beauftragte der preußische Kultusminister den Universitätsprofessor Felix Klein, zwei Gutachten zu verfassen: eines zur allgemeinen Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und ein weiteres zu den Anforderungen mathematischer Vorbildung für ein Studium an einer Technischen Hochschule. Beide Gutachten sollten Schlüsseldokumente für die mathematische Unterrichtsreform in der Sekundar- und Hochschulbildung werden (vgl. Schubring 2007, S. 5).

Im ersten Gutachten beschrieb Klein zwei Tendenzen des Mathematikunterrichts: Mathematik wurde – durch die einseitige Betonung logischer Elemente – als Mittel zur Schärfung des Verstandes angesehen. Anderseits dominierten ihn utilitaristische Ausprägungen, welche auf die Gewandtheit bei der Durchführung von Operationen abzielten. Klein strebte einen Kompromiss an und formulierte in seinem Gutachten (Anmerkung: Abdruck seiner Gutachten vom 22. Mai 1900 in Schubring 2000, Seiten 69 bis 74) :

> *„Ich persönlich trete durchaus dafür ein, daß sich der Schulunterricht sich [sic] in der Mitte zwischen den beiden Extremen halten soll, indem er die wesentlichen Momente von beiden Seiten zur Geltung bringt“* (Schubring 2000, S. 70).

Für Klein reichte Mathematik über eine reine Verstandesschulung hinaus. Die von ihm eingeforderte breite Anwendbarkeit ist auch in heutiger Zeit eine zentrale mathematikdidaktische Forderung. Klein gab dazu erste Ansätze:

> *„Es scheint mir durchaus richtig, daß der mathematische Unterricht auf der Unterstufe mit dem Sinnfälligen beginnt: der Anschauung, dem Zeichnen, Messen, numerischen Rechnen. Ich wünsche diese Verbindung auch auf der Oberstufe festgehalten, aber daneben das logische Element zu hinreichender Geltung gebracht“* (Schubring 2000, S. 70).

Im zweiten Gutachten griff er den universitären Anfangsunterricht auf (vgl. Schubring 2000, S. 72ff.) und schlug eine für damalige Verhältnisse weitreichende Lösung vor. Seiner Ansicht nach sollten tradierte Elemente der Mathematikausbildung der Hochschulen (z. B. Infinitesimalrechnung und analytische Geometrie) in ihren Grundzügen bereits an den höheren Schulen unterrichtet werden. Die fortgeschrittenen Kapitel sollten nach wie vor an den Hochschulen, dann aber in reformierter und stärker praxisorientierter Weise, gelehrt werden (vgl. Schubring 2007, S. 5). Vorteile sah Klein in der Tatsache, dass zügiger mit dem Studium spezifischer Fächer, wie technischer Mechanik oder Vermessungswesen, begonnen werden könnte (vgl. Mattheis 2000b, S. 55). Gleichzeitig würde eine Verlagerung des „niederen Teils der höheren Mathematik" eine stärkere Verbindlichkeit sichern. Denn im Gegensatz zur akademischen Freiheit an den Hochschulen waren die höheren Schulen an Lehrpläne gebunden. Das zuständige Ministerium lehnte jedoch eine verbindliche Festschreibung dieser neuen Inhalte für höhere Schulen ab. Es empfahl stattdessen, die curricularen Veränderungen „von unten" her zu organisieren. Klein musste also auf die Unterstützung geeigneter Lehrkräfte setzen. Er wurde aufgefordert, an Schulen, zu denen er durch ehemalige Studenten Kontakte hatte, eine entsprechende Erweiterung des Unterrichts anzuregen. Er sollte seinen Bekanntheitsgrad nutzen, um Lehrkräfte an den höheren Schulen zu ermutigen, die Lehrpläne entsprechend weit auszulegen (vgl. Mattheis 2000b, S. 58). Damit rückte er als Person ins Zentrum einer beginnenden Reformbewegung.

Bereits im Gutachten deutete Klein auch zu erwartende Widerstände an:

> *„Die große Frage muß selbst verständlich sein, ob es den höheren Schulen überhaupt möglich ist, in der vorgeschlagenen Weise weiteren mathematischen Lehrstoff aufzunehmen. Dies mögen die Sachverständigen beurtheilen; ich selbst kann nicht mehr thun, als nachdrücklich betonen, wie sehr die befürwortete Maßregel im Interesse der späteren Hochschulstudien erwünscht wäre"* (Schubring 2000, S. 74).

Klein räumte ein, dass er sich eine Umsetzung noch eher an den Realanstalten als an den humanistischen Gymnasien vorstellen konnte (vgl. Schubring 2000, S. 74).

Die Schulkonferenz von 1900 führte zu verschiedenen Typen allgemeinbildender Unterrichtsgänge, welche gleichwertig nebeneinander standen (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 96). *„Jede Art spezifischer Schulen ist an sich allerdings erst recht einseitig, aber das Prinzip der Vielseitigkeit wird durch das Nebeneinanderbestehen verschiedenartiger spezifischer Schulen gerettet"* (Klein 1905b, S. 480). Für Klein verband sich damit eine Idee der spezifischen Allgemeinbildung:

> *„Nur das werde noch hervorgehoben, daß ‚spezifische' Bildung im vorliegenden Zusammenhange selbstverständlich nicht Fachbildung im niederen Sinne, sondern Allgemeinbildung an einem spezifischen Stoffe bedeuten soll"* (Klein 1905b, S. 480).

Eltern sowie Schülerinnen und Schüler sollten sich, unter Beachtung von Neigungen und späteren Berufsinteressen, frei für einen Typus spezifischer Ausbildung entscheiden können. Mit den alten Vorurteilen des humanistischen bzw. des realistischen Unterrichts sollte gebrochen werden (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 97). Klein forderte eine gerechtere territoriale Verteilung höherer Schulen, da man in den ländlicheren Regionen nicht von

einer echten Wahlmöglichkeit sprechen konnte (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 152). Um mehr Abiturienten auf einem realistischen Unterrichtsgang zum Abitur zu führen, stellte sich Klein vor, die humanistischen Anstalten zurückzufahren und sie in zwei oder drei Oberklassen (altsprachlich oder mathematisch) zu differenzieren (vgl. Klein/Schimmack 1907, S. 152).
Die preußischen Lehrpläne von 1901 blieben jedoch weit hinter den Reformvorstellungen der Schulkonferenz von 1900 zurück. Klein äußerte dazu:

> *„In diesem ganzen Verhalten der beteiligten Kreise lag eine mir unverständliche Resignation, als ob die Schulmathematik eine tote Disziplin sei, im Altertum geschaffen, im Mittelalter mehr und mehr abgeschliffen und in der Neuzeit zu einem Abschluß gelangt, und nun werde sie in starrer, unveränderlicher Form in alle Zukunft weiter existieren"* (Klein/Schimmack 1907, S. 4).

Klein beschrieb hier die Einstellungen von Lehrkräften zu Mathematik und wie sich diese Einstellungen auf die Reformprozesse auswirkten. Er selbst schien ein glühender Verfechter des dynamischen Aspektes von Mathematik zu sein, sah sich aber der einflussreichen Gruppe von Lehrkräften gegenüber, welche den statischen Aspekt präferierten.

> *„Die Mathematik ist durchaus eine lebendige Wissenschaft, die fortwährend neue Probleme aufnimmt und verarbeitet, die Veraltetes wegwirft und sich so immer wieder und wieder verjüngt. Und das gilt nicht bloß von der hohen Wissenschaft, wo es ja selbstverständlich ist, sondern es soll auch entsprechend mit der Schulmathematik sein; auch sie muß sich immer erneut umbilden, nach Maßgabe der sich langsam verschiebenden allgemeinen Kulturinteressen und zudem natürlich im Rahmen der unserer Jugend gegebenen Fassungskraft"* (Klein/Schimmack 1907, S. 4).

Für Klein wurde es das zentrale Ziel,

> *„den geometrisch gefaßten Funktionsbegriff in den Mittelpunkt des Unterrichts zu rücken – um einen neueren Ausdruck zu gebrauchen: das ‚funktionale Denken' zu üben – und in Konsequenz davon die Anfänge der Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan aller höheren Schulen aufzunehmen"* (Klein/Schimmack 1907, S. 5).

4.3.2 Breslauer Kommission und Meraner Reform

Auf Initiative Kleins berief die „Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte" (GDNÄ) im Jahre 1904 eine zwölfköpfige Unterrichtskommission ein, die sich „Breslauer Kommission" nannte. Unter Vorsitz von Professor Gutzmer aus Halle schlossen sich die reforminteressierten Kräfte der Unterrichtsabteilung der GDNÄ zur weiteren Planung zusammen (vgl. Tobies 2000, S. 30). Klein beschrieb den Standpunkt der Breslauer Unterrichtskommission folgendermaßen:

> *„Es sollen unbeschadet des Wertes der Mathematik für die formale logische Bildung die Stärkung des Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens die zentralen Aufgaben sein; man betont damit eben die Seiten der mathematischen Geistestätigkeit, die im modernen Leben die wichtigste Rolle spielen"* (Klein/Schimmack 1907, S. 6).

Klein suchte stets den Dialog mit den Lehrkräften der höheren Schulen. Mit dem Schlüsselbegriff des „funktionalen Denkens" gelang es ihm, eine breite Bewegung unter ehemaligen Studierenden und interessierten Reformlehrkräften zu initiieren (vgl. Schubring 2007, S. 6). Klein hatte natürlich auch entschiedene Gegner. Unter ihnen war der Gymnasiallehrer Friedrich Pietzker. Er lehnte die verbindliche Einführung von Differential- und Integralrechnung und analytischer Geometrie an den höheren Schulen kategorisch ab. Pietzkers führende Position im Förderverein vereitelte im Zuge der Meraner Reform, dass diese Unterrichtsinhalte an den höheren Schulen obligatorisch eingeführt wurden (vgl. Tobies 2000, S. 32). Für Klein nahm damit die Kommission hinsichtlich der Infinitesimalrechnung *„eine weniger ausgesprochene Stellung"* (Klein/Schimmack 1907, S. 6) ein.

Das Wirken der Breslauer Kommission führte schließlich zur Meraner Reform von 1905. Die im zugehörigen Reformpapier formulierten Ziele entsprachen im Wesentlichen Kleins Vorstellungen, jedoch mit einer Ausnahme: Die Infinitesimalrechnung wurde kein verbindlicher Bestandteil des gymnasialen Lehrplanes.

Walther Lietzmann formulierte dazu einige Jahre später: *„Der eine Fehler war, daß man die klare Forderung, die seinerzeit den Anstoß zu der ganzen Bewegung gegeben hat, fallen ließ"* (Lietzmann 1919, S. 233). Er bemängelte auch die undeutliche Fassung: *„Die Schule sollte ‚an die Schwelle der Infinitesimalrechnung heranführen', wobei es dann der einzelnen Schule überlassen blieb, das so auszulegen, wie sie wollte: Sie konnte entweder die Schwelle betreten oder vor ihr haltmachen"* (Lietzmann 1919, S. 233). Als weiteren Fehler wertete Lietzmann (1919, S. 233), dass als Vorbild der Lehrplan des Gymnasiums, nicht aber der der Oberrealschule genommen wurde.

Für Walther Lietzmann waren in den Meraner Vorschlägen drei wesentliche Gedanken tragend. Er bezeichnete sie als das psychologische, das utilitaristische und das didaktische Prinzip. Mit psychologischem Prinzip meinte er, *„daß der Lehrgang ‚mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen' ist"* (Lietzmann 1919, S. 235). Beim utilitaristischen Prinzip stand im Vordergrund, *„die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zur möglichsten Entwicklung zu bringen"* (Lietzmann 1919, S. 236). Die größte Innovation sah er in einem didaktischen Prinzip, welches zum Ziel hatte, *„den gesamten Lehrstoff um einen großen Gedanken zu konzentrieren"* (Lietzmann 1919, S. 236). Lietzmann forderte:

> *„Nicht ein Nebeneinander von Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, von Arithmetik, Gleichungslehre usf., sondern eine häufige Bezugnahme der verschiedenen Gebiete miteinander schien geboten, wenn Schulmathematik nicht als Konglomerat verschiedener Dinge auseinanderfallen sollte"* (Lietzmann 1919, S. 236).

Er schrieb weiter:

> *„Die Meraner Vorschläge wählen als das Bindemittel den Funktionsbegriff. Dieser Begriff, der ebenso im geometrischen wie im arithmetischen Gewande die gesamte Mathematik durchsetzt, war selbstverständlich vorher der Schule nicht fremd. Selbst diejenige Form, die sich am stärksten jetzt dem Beschauer aufdrängt, die graphische Darstellung, war durchaus schon der höheren Schule vor den Meraner Vorschlägen bekannt. Was aber fehlte, war die systematische Durchdringung des gesamten Schulstoffes mit diesem Gedanken. Das ist der neue und deshalb auch am meisten angegriffene Gedanke in den Meraner Vorschlägen"* (Lietzmann 1919, S. 236).

In den methodischen Erläuterungen gab der Meraner Bericht zum Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten folgende inhaltsgebundene Ansätze zur Erziehung zum funktionalen Denken:
So wurde beispielweise für den Unterricht in den mittleren Klassen empfohlen:

- Bereich der Arithmetik:

> *„Alle künstlichen Operationen [...] sind zu vermeiden. [...] bei den Proportionen [sind] nur die einfachsten Beziehungen zu berücksichtigen, namentlich aber der Begriff der direkten und der indirekten Proportionalität zu einem lebendigen Besitz zu machen. Auf diese Weise bleibt Zeit, den Hauptteil der Arbeit auf die Erziehung zum funktionalen Denken zu verwenden, das bereits durch die propädeutische Behandlung der Arithmetik am Schluß des Quarta Unterrichtes insofern vorbereitet ist, als dort die Änderung der algebraischen Ausdrücke durch Einsetzen verschiedener für die einzelnen in ihnen auftretenden Größen ganz von selbst sich geltend macht"* (Lietzmann 1919, S. 238).

- Bereich der Geometrie:

> *„Diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderung gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet [...]. Zugunsten dieser Aufgabe sind mancherlei Dinge überhaupt nur ganz flüchtig zu berühren"* (Lietzmann 1919, S. 238).

Für den Unterricht in den oberen Klassen wird dazu empfohlen:

> *„Im mathematischen Unterricht der Obersekunda ist die Erweiterung des Potenzbegriffes unter Einführung der negativen und gebrochenen Exponenten in wesentlich funktionaler Auffassung durchzuführen […]. In der Trigonometrie sind alle künstlichen Umformungen beiseite zu lassen, um einerseits für die praktische Verwertung zu wirklichen Messungen, andererseits für die funktionale Auffassung der Grundelemente Raum zu schaffen"* (Lietzmann 1919, S. 239).

Schließlich fand die veränderte Schwerpunktsetzung ihren Niederschlag in den schriftlichen und mündlichen Reifeprüfungen (vgl. Lietzmann 1919, S. 239). Von den Reformern wurde genau beobachtet, wann der Funktionsbegriff eingeführt wurde; ob ab dem achten Schuljahr und allmählich oder ob später und dann isoliert. Walter Lietzmann kam 1910 in seiner Auswertung zu dem Schluss, dass die Mehrheit eine spätere Einführung praktizierte (vgl. Schubring 2007, S. 8f.).
Die „Breslauer Unterrichtskommission" löste sich 1907 wieder auf. An ihrer Stelle wurde 1908 der „Deutsche Ausschuss für Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Unterricht" (DAMNU) gegründet. Damit vollzog sich ein Wandel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts im damaligen Kaiserreich. Zusätzliche starke Impulse für die Reformbewegung lieferte die 1908 gegründete „Internationale Mathematische Unterrichtskommission" (IMUK), der Felix Klein als Präsident vorstand (vgl. Schubring 2007, S. 8).
Bei der Umsetzung der Reformbestrebungen waren nicht nur territoriale, sondern auch schulartspezifische Unterschiede zu verzeichnen: Während an den Realgymnasien und Oberrealschulen die Reformen zügig umgesetzt wurden, verzeichnete man an den Gymnasien auch Ablehnungen und Widerstände (vgl. Schubring 2007, S. 8). Nach Einschätzung von Lietzmann war das wesentliche Reformziel, die durchgängige Orientierung am funktionalen Denken, bis 1912 in Baden und in Württemberg umgesetzt. In Preußen hingegen konnte erst ab 1925 – nach dem Wechsel der allgemeinen Lehrpläne – von einer wirklichen Umsetzung des Reformkonzeptes gesprochen werden (vgl. Schubring 2007, S. 9).

5 Funktionales Denken: Der Weg zur mathematischen Kompetenz bis zum Ende des 20. Jahrhunderts

Im 19. Jahrhundert entwickelte sich Deutschland zu einer bedeutenden Kulturnation. Georg Picht (1964, S. 16) begründete dies mit Veränderungen an den Schulen und Universitäten. Für ihn ist das Bildungswesen tragendes Fundament eines jeden modernen Staates. Dieses Fundament sah Picht in der Mitte des 20. Jahrhunderts jedoch gefährdet. Aus einer Analyse des Schulwesens der Bundesrepublik Deutschland resultierten seine Befürchtungen vor einem „Bildungsnotstand“ (vgl. Picht 1964, S. 16). Um nicht hinter internationalen Entwicklungen zurück zu bleiben, forderte er, das Thema Bildung wieder in den Mittelpunkt staatlichen und politischen Interesses zu rücken. Dies schloss auch eine Auseinandersetzung mit Zielen und Inhalten mathematischer Schulbildung ein.

5.1 Zentrale Leistungsüberprüfungen und ihre Konsequenzen

5.1.1 TIMSS und PISA

Im Jahre 1962 proklamierte Heinrich Roth in seiner Göttinger Antrittsvorlesung die „realistische Wendung“ in der pädagogischen Forschung. Er forderte darin nicht die Abkehr von der eher geisteswissenschaftlich orientierten Pädagogik, sondern eine stärkere Einbeziehung empirischer Methoden in die Pädagogik (vgl. Jongebloed 2013, S. 93). Dazu zählte er internationale Schulleistungsuntersuchungen, wie sie für die Mathematik und die Naturwissenschaften bereits seit den 1960er Jahren durch die „International Association for the Educational Achievement“ (IEA) durchgeführt wurden.

Während im Jahre 1964 nur zwölf Länder an der „First International Mathematics Study“ (FIMS) der IEA teilnahmen, waren es bei der „Second International Mathematics Study“ (SIMS) zwischen 1980 und 1982 bereits 20 Länder. Die Vergleichsstudien der IEA stießen bis in die 1980er Jahre hinein weder in der Bundesrepublik noch in der damaligen DDR auf großes Interesse. Beide Länder nahmen relativ selten an den Studien teil und erzielten eher unterdurchschnittliche Ergebnisse (vgl. Schneider 2013, S. 75).

Im Jahre 1993 startete die IEA die „Third International Mathematics and Science Study“ (TIMSS). In 46 Ländern untersuchte man in drei Altersgruppen die mathematischen und naturwissenschaftlichen Schülerleistungen:

- bei TIMSS I waren es neunjährige Kinder der Grund- bzw. Primarschule,
- bei TIMSS II Jugendliche der siebten oder achten Jahrgangsstufe,

- bei TIMSS III testete man Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe bzw. berufsbildender Schulen.

Deutschland beteiligte sich nur an TIMSS II und III.

Nach Einschätzung von Meidinger (2013, S. 23) trugen gerade diese Ergebnisse maßgeblich dazu bei, dass sich gewisse Parteien nicht weiter davor verschließen konnten, die Unterrichtsqualität an deutschen Schulen zu prüfen. Der sogenannte „Konstanzer Beschluss“ der KMK vom 24. Oktober 1997 leitete die Gleichwertigkeit schulischer Bildung, die Vergleichbarkeit schulischer Abschlüsse und die Durchlässigkeit des Bildungssystems als Qualitätsmaßnahmen zur Sicherung der schulischen Bildung ein (vgl. KMK 1997). Neben der Durchführung von länderübergreifenden Vergleichsuntersuchungen zum Lern- und Leistungsstand in ausgewählten Jahrgangstufen sollten auch verlässliche Instrumente zur Evaluation entwickelt und erprobt werden.

Bildungsforscher griffen die bis in die 1960er Jahre zurückreichende Idee zu Schulleistungsmessungen wieder auf und entwickelten sie entsprechend weiter (vgl. Klieme 2013, S. 46). Das Ergebnis war das internationale Schulleistungsuntersuchungsprogramm „Programme for International Student Assessment“ (PISA), das seit 2000 zyklisch stattfindet. Das Sekretariat der „Organisation for Economic Cooperation and Development“ (OECD) schreibt die Studie alle drei Jahre unter internationalen Bildungsdienstleistern neu aus.

Im Gegensatz zu TIMSS verwendet PISA keine curricular validen Tests. PISA überprüft allgemeine „life skills“, die Jugendliche benötigen, um im weiteren Lebens- und Berufsweg erfolgreich zu sein (vgl. Klieme 2013, S. 38). Basis für PISA ist ein Kompetenzbegriff. Er geht auf eine Konzeption zurück, welche Heinrich Roth 1971 in seiner pädagogischen Anthropologie entworfen hatte (vgl. Klieme 2013, S. 43). Über Publikationen von Fend und Weinert fand dieser schließlich Eingang in das OECD-Projekt.

Neben Kompetenzen in Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften werden auch Problemlösefähigkeiten und sogenannte „outcomes“, untersucht. Das sind: Lern- und Denkstrategien, Selbstkonzepte, Lernmotivation, Schulfreude, soziale Orientierung (vgl. Klieme 2013, S. 40). Weiterhin werden die Rahmensituationen, wie familiäre Umwelt, sozioökonomischer Status, Geschlecht, Migrationshintergrund, Ausbildung der Lehrkräfte, Schul- und Klassengröße, betrachtet. PISA unterscheidet die Systemebenen: (1) Individuum (Aspekte der Lernzeit, Nachhilfe, Hausaufgaben), (2) Klasse bzw. Schule (verschiedene Aspekte von Unterrichtsqualität) und (3) das System als Ganzes (vgl. Klieme 2013, S. 40). Die vom verantwortlichen Konsortium entwickelten Aufgaben und Fragen werden – zur Absicherung der psychometrischen Qualität – einer groß angelegten Felderprobung unterzogen. Klieme (2013, S. 41) erachtete bereits ein Jahr nach der ersten Erhebung die entstehende hochkomplexe Datenbasis als wertvoll für das Bildungsmonitoring sowie wissenschaftliche Untersuchungen.

Die Zielstellungen von PISA fasste Klieme (2013, S. 49f.) wie folgt zusammen:

- PISA stellt, unter Nutzung verschiedener Perspektiven, Transparenz über Rahmenbedingungen, Prozesse und Ergebnisse des Bildungssystems her und dient somit der öffentlichen Verantwortung für das Bildungssystem.
- PISA untersucht eine Vielfalt kognitiver und affektiver Merkmale, welche Grundlage demokratischen Handelns und nicht explizit an der Arbeitswelt ausgerichtet sind.
- PISA verfolgt ein eindeutig nicht-elitäres und nicht-ständisches Bildungskonzept, welches auf einem Kompetenzmodell basiert.
- PISA ermöglicht eine öffentliche, demokratische Diskussion von bildungspolitischen Aufgaben und Prioritäten.
- PISA kommt, im Gegensatz zu anderen flächendeckenden Untersuchungen, mit anonym ausgewerteten Stichproben aus.

Neben einem allgemeinen Kompetenzbegriff definiert PISA eine mathematische Kompetenz, auf welche bereits in Kapitel 2.1 eingegangen wurde. Das PISA-Rahmenkonzept für Mathematik beschreibt Grundkompetenzen des Reproduzierens, des Herstellens von Verbindungen, des Reflektierens und nimmt Bezug auf mathematische Leitideen.

PISA-Tests können nicht alle Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern erfassen. Da nationale Curricula nicht berücksichtigt werden können, sind umfassende Antworten über Wissensstände von Lernenden in bestimmten Fächern (z. B. Literatur, Geographie, Gemeinschaftskunde, Kunst, Musik, Geschichte) nicht ableitbar.

Eine Gruppe von Bildungswissenschaftlern um Baumert ließ dennoch prüfen, inwieweit Aufgaben der nationalen Ergänzungsstudien PISA-E mit den jeweiligen Lehrplänen übereinstimmen (vgl. Schneider 2013, S. 78f.). Dazu wurde zu den lehrplanadäquaten Aufgaben die übliche PISA-Normierung durchgeführt und das Ergebnis mit der Gesamt-PISA-Untersuchung verglichen. Die Unterschiede waren zu vernachlässigen. Das lässt den Schluss zu, dass die PISA-Kompetenz-Indikatoren relativ robust und verallgemeinerbar sind (vgl. Schneider 2013, S. 79).

Nach Einschätzung von Schneider (2013, S. 79) weichen jedoch die bei PISA erfassten Fähigkeiten relativ stark von der Humboldt'schen Idealvorstellung humanistischer Bildung ab. Einige Aspekte dieses klassischen Bildungsideals werden dennoch abgebildet, wie: allgemeine Problemlösefähigkeit, fächerübergreifende Kompetenzen oder metakognitives Wissen (vgl. Schneider 2013, S. 79f.).

Den Befürwortern von PISA stehen auch Skeptiker gegenüber. Sie hinterfragen das Testverfahren, die Intentionen der PISA-Studien und den zugrundeliegenden Bildungsbegriff. Beispielsweise bezeichnet Jahnke (2013, S. 87) die methodische Transparenz als unzureichend und kritisiert die fehlende bildungstheoretische Fundierung. Jongebloed (2013, S. 103) greift in seiner Kritik den Bildungsbegriff auf. Er sieht Gefahren in einer ausschließlich auf Verwertbarkeit ausgelegten Bildung als Qualifizierung. Meyerhöfer (2013, S. 187) äußert Bedenken hinsichtlich eines Messprozesses für komplexe mathematische Fähigkeiten: Sieht man die Ergebnisse derartiger Tests als Maß für Unterrichtsqualität an, könnte seiner Meinung nach nur noch das relevant sein, was testbar ist (vgl. Meyerhöfer 2013, S. 185).

5.1.2 PISA 2000 und bildungspolitische Konsequenzen

Die Schwachstellen des Mathematikunterrichts in Deutschland waren bereits vor PISA 2000 bekannt. Die Videostudien von TIMSS und die Erkenntnisse der fachdidaktischen Forschungen zeigten bereits folgende Problemfelder (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 48):

- höchst problematische Aufgabenkultur,
- unzureichende Förderung von Grundwissen,
- mangelnde Abstimmung zwischen den Jahrgangsstufen,
- fehlende Qualitätssicherung.

Als Konsequenz startete beispielsweise 1998 das Modellversuchsprogramm zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS). Ziel war die Entwicklung evidenzbasierter Wege, um die Qualität und Professionalisierung von Mathematikunterricht weiterzuentwickeln (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 48).

Die Leistungserhebungen durch PISA 2000 markierten dann jedoch einen Wendepunkt in der deutschen Bildungspolitik und leiteten tiefgreifende Veränderungen im Schulsystem ein.

Im internationalen Vergleich belegte Deutschland in der Lesekompetenz Platz 21 (vgl. Artelt u. a. 2001, S. 106), in Mathematik und Naturwissenschaften jeweils Platz 20 (vgl. Klieme/Neubrand/Lüdtke 2001, S. 173; Prenzel u. a. 2001, S. 229). Die Mathematikleistungen lagen in dieser ersten PISA-Testung signifikant unter dem OECD-Durchschnitt. Die Spitzengruppe, welche selbstständig mathematisch argumentieren und reflektieren kann, war äußerst klein. Aufgaben des curricularen Standards löste weniger als die Hälfte der Jugendlichen. Bei fast einem Viertel der Alterskohorte reichten die mathematischen Kompetenzen kaum über das Niveau der Grundschule hinaus (vgl. Baumert u. a. 2001,

S. 170). Zusätzlich zeigten sich Disparitäten in Bezug auf soziale Herkunft (vgl. Baumert/Schümer 2001, S. 387), Zuwanderungshintergrund (vgl. Baumert/Schümer 2001, S. 379) und Geschlecht (vgl. Stanat/Kunter 2001, S. 253).

In den Medien entstand das Bild eines wenig effizienten und sozial ungerechten Bildungssystems (vgl. Meidinger 2013, S. 24). Ein vergleichbar großer „Aufschrei" war zu keinem anderen Zeitpunkt in Deutschland oder einem anderen Staat zu verzeichnen. Die Deutsche Presseagentur steuerte die öffentliche Wahrnehmung. Im Zusammenhang mit dem sogenannten „PISA-Schock" wurde jedoch nur ein Entsetzen über das Abschneiden der deutschen Schülerinnen und Schüler in Szene gesetzt. Die Ergebnisse selbst, so Jahnke (2007, S. 317), ihre Interpretation und die angewandten Verfahren wurden von den Medien fast nicht hinterfragt. Jegliche Kritik an PISA wurde als Versuch gewertet, die Misere des deutschen Bildungssystems schönzureden.

Bei den weiteren PISA-Testungen gelang es der Presse nicht, eine vergleichbare Dramatik aufzubauen. Der Versuch, aus diesen Ergebnissen Schlüsse hinsichtlich der Wirksamkeit eingeleiteter Maßnahmen abzuleiten, erwies sich als verfahrenstechnisch gewagt. Dafür gerieten nun die Bildungschancen (territoriale und soziale Herkunft) in den medialen Fokus (vgl. Jahnke 2007, S. 317). Bei aller Kritik muss betont werden, dass die Qualität und die Nachhaltigkeit von schulischer Bildung zumindest diskutiert wurde und man sich zu Veränderungen entschlossen zeigte. PISA hatte eine „Katalysatorwirkung": Angedachte und geplante Bildungsreformen konnten erheblich beschleunigt werden (vgl. Schneider 2013, S. 76). Der Veröffentlichung der PISA-Studie am 4. Dezember 2001 folgte bereits im Oktober 2002 die Verabschiedung eines länderspezifischen Maßnahmenkatalogs durch die Kultusministerkonferenz (KMK) (vgl. Meidinger 2013, S. 25). Dabei wurden folgende Handlungsfelder benannt:

- Verbesserung der vorschulischen Spracherziehung,
- bessere Förderung von Kindern mit Migrationshintergrund,
- Entwicklung von Bildungsstandards,
- Ausbau von Ganztagsangeboten,
- frühere Einschulung und flexible Schuleingangsphase,
- Übernahme des Kompetenzbegriffs in die Lehrpläne.

Die PISA-E-Ergebnisse von 2002 wurden angemessen rezipiert (vgl. Meidinger 2013, S. 27): der Einfluss der sozialen Herkunft, das unterschiedliche Abschneiden von unionsregierten (CSU und CDU) und SPD-regierten Bundesländern. Das lieferte eine weitere Vorlage für die öffentlichen Medien und die Bildungspolitik selbst. Im Zuge dieser kontroversen Bildungsdebatte gab der damalige Bundeskanzler Gerhard Schröder im

Juni 2002 eine entsprechende Regierungserklärung ab. Darin erklärte er Bildung zur „Sozialen Frage des 21. Jahrhunderts“. Neben der Leistungsfähigkeit des deutschen Bildungssystems wurde nun intensiv die Bildungsgerechtigkeit diskutiert (vgl. Meidinger 2013, S. 27).

Im Jahre 2006 beschloss die Kultusministerkonferenz mit der Gesamtstrategie zum sogenannten Bildungsmonitoring die Implementierung folgender zentraler Instrumente:

- *„Internationale Schulleistungsuntersuchungen*
- *Zentrale Überprüfungen des Erreichens der Bildungsstandards in einem Ländervergleich*
- *Vergleichsarbeiten in Anbindung oder Ankoppelung an die Bildungsstandards zur landesweiten und länderübergreifenden Überprüfung der Leistungsfähigkeit aller Schulen*
- *Gemeinsame Bildungsberichterstattung von Bund und Ländern“* (KMK 2006, S. 6)

Für die Vergleichsarbeiten werden schulartspezifisch bestimmte Fächer ausgewählt (Deutsch und Mathematik in der Grundschule; Deutsch, Mathematik und erste Fremdsprache in der Hauptschule; Deutsch, Mathematik, erste Fremdsprache, Biologie, Chemie und Physik in der neunten und zehnten Jahrgangsstufe zum Mittleren Schulabschluss). Bei diesen Tests sollte es nicht um die Etablierung von Ranglisten gehen. Es ging darum, Kenntnisse und Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern in Kernbereichen des Bildungssystems zu messen und dies stets im Wissen, nur Ausschnitte von Bildung erfassen zu können. Da derartige Tests nur eine begrenzte Aussagekraft besitzen, sollten sie nur angemessen häufig durchgeführt werden (vgl. Jahnke 2007, S. 307f.; Schneider 2013, S. 82).

5.2 Funktionales Denken im Kontext der Bildungsstandards

5.2.1 Entwicklung von Bildungsstandards

Die Erarbeitung einheitlicher Bildungsstandards für alle Bundesländer war eine zentrale Konsequenz aus den Ergebnissen von PISA. Damit verbunden waren die Implementierung eines Kompetenzbegriffes, der Paradigmenwechsel von Input- hin zu verstärkter Output-Orientierung und die Einführung von Indikatoren zur Qualitätsmessung.

Standards für den Mittleren Schulabschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und erste Fremdsprache wurden bereits 1995 von der Kultusministerkonferenz (vgl. KMK 1995) beschlossen. Als Festlegungen zu abschlussbezogenen Qualifikationen sollten sie eine verbindliche Grundlage bei der Erstellung länderspezifischer Lehrpläne bilden, was jedoch in der Umsetzung nur bedingt funktionierte (vgl. Sill 2007a, S. 393).

Etwas anders gestaltete sich die Situation bei den Ereignissen nach PISA 2000. Hier erschien das Thema „Bildungsstandards“ bei Expertinnen und Experten recht schnell im Kontext von Bildungsreformen. Klieme sah sie sogar als Motor einer pädagogischen Entwicklung. Dazu sollte es jedoch gelingen sie so zu gestalten, dass sich in ihnen eine Vision von Bildungsprozessen abzeichnete, eine moderne „Philosophie“ der Schulfächer, eine Entwicklungsperspektive für die Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 15). Die wesentliche Funktion dieser Standards besteht in der Orientierung der Schulen auf verbindliche Ziele. Die Kompetenzmodelle sollen Lehrkräften ein Referenzsystem für ihr professionelles Handeln bieten und sind gleichzeitig die Grundlage dafür, Lernergebnisse zu erfassen und zu bewerten (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 15). In Tabelle 9 werden verschiedene Ebenen der Bildungsstandards zusammengefasst (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 20ff.).

Bildungsziele	gesellschaftliche und pädagogische Zielentscheidungen	- Bildungsstandards orientieren sich an Bildungszielen, welche wiederum die Bestimmung der erwünschten Niveaustufen und die daraus resultierenden Testverfahren legitimieren. - Bildungsziele sind relativ allgemein gehaltene Aussagen darüber, welche Wissensinhalte, Fähigkeiten und Fertigkeiten, aber auch Einstellungen, Werthaltungen, Interessen und Motive Schule vermitteln soll. - In Bildungszielen drückt sich sowohl der gesellschaftliche Anspruch von Schule als auch die Bedeutung eines Faches bzw. eines Lernbereiches für die persönliche Entwicklung eines Menschen aus.
Kompetenzmodelle	fachdidaktische und psychologische Aussagen zum Aufbau von Kompetenzen	Kompetenzmodelle … - konkretisieren Ziele in Form von Kompetenzanforderungen. - fördern den systematischen Aufbau intelligenten Wissens. - vermitteln zwischen relativ abstrakten, verallgemeinerten Bildungszielen einerseits und konkreten Aufgaben anderseits.
Testverfahren	Konzepte und Verfahren zur Testentwicklung	Testverfahren … - ermöglichen das empirische Prüfen erreichter Standards. - geben ein Feedback über den erreichten Kompetenzstand als unverzichtbarer Bestandteil einer kontinuierlichen und systematischen Qualitätsentwicklung.

Tab. 9 Ebenen der Bildungsstandards

Gleichzeitig benannte eine Expertengruppe folgende Merkmale guter Bildungsstandards (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 24ff.):

(1) *Fachlichkeit*

Bildungsstandards sollen die Kernideen der Fächer besonders klar herausstellen, um Lehren und Lernen zu fokussieren. Dazu zählen grundlegende Begriffsvorstellungen (z. B. Funktionen in Mathematik), Verfahren, Denkoperationen und zuzuordnendes Grundwissen. Bildungsstandards für „Schlüsselqualifikationen“, wie Lernfähigkeit oder kreatives Denken, sind nicht sinnvoll (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 24f.).

(2) *Fokussierung*

Bildungsstandards konzentrieren sich auf Kernbereiche und decken nicht die gesamte Breite eines Lernbereiches bzw. Faches ab. Sie schaffen damit eine gewisse Verbindlichkeit und bieten gleichzeitig Raum zu Ausgestaltungen und Ergänzungen (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 25).

(3) *Kumulativität*

Bildungsstandards legen Kompetenzen fest, welche bis zu einem bestimmten Zeitpunkt insgesamt zu erwerben sind. In grundlegenden Bereichen sollten übergreifende Kompetenzen aufgebaut werden, welche überprüfbar sind und einen längeren Zeitraum zur Verfügung stehen. So soll einem wesentlichen Problem schulischen Lernens, der Partialisierung von Lernerfahrungen, entgegengewirkt werden. Beim kumulativen Lernen müssen Inhalte und Prozesse aufeinander aufbauen, systematisch vernetzt sein und stetig angewandt sowie aktiv gehalten werden. Die Testergebnisse von TIMSS und PISA wurden als Belege für fehlende Kumulativität schulischen Lernens gesehen (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 26f.).

(4) *Verbindlichkeit für all*e

Während in der Expertise nachdrücklich Mindeststandards (Stufe, unter die kein Lernender zurückfallen soll) gefordert wurden, entschied sich die Kultusministerkonferenz für sogenannte Regelstandards (mittlere Niveaustufe, die im Durchschnitt erreicht werden soll). Die Mindeststandards leitete die Kommission aus der Tatsache ab, dass unser Bildungssystem – im Vergleich zu anderen Industriestaaten – vor allem Schwächen im unteren Leistungsbereich hat. Eine Formulierung von Mindeststandards könnte, laut Expertise, einen entscheidenden Beitrag zum Abbau bestehender Disparitäten leisten (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 27f.). Weitere Argumente für eine Formulierung als Mindeststandards finden sich auch bei Sill (2007a, S. 416f.).

(5) *Differenzierung*

Neben Mindeststandards sollten nach Ansicht der Kommission auch höhere Anforderungen für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler bzw. die Ausbildung unterschiedlicher ergänzender Profile (z. B. Schwerpunkt im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich) festgeschrieben werden können, allerdings nicht auf nationaler Ebene in den Bildungsstandards. Diese weiteren Spezifikationen sollten, auch im Hinblick auf das föderale und gegliederte System, den Ländern und den Schulen selbst vorbehalten bleiben (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 28f.).

(6) *Verständlichkeit*

Damit Bildungsstandards sowohl von Lehrenden als auch von Lernenden angenommen werden, sollten sie entsprechend klar und verständlich formuliert sein (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 29).

(7) *Realisierbarkeit*

Bildungsstandards sollen für Lehrende und Lernende unter den gegebenen schulischen Umständen realistische und erreichbare Ziele darstellen. Zu hohe Erwartungen könnten zu Demotivation führen und die Akzeptanz der Standards gefährden. Die Höhe der Kompetenzanforderungen wird sich daher erst nach entsprechenden empirischen Untersuchungen festlegen lassen (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 29f.).

Bildungsstandards beschreiben somit fachbezogene Kompetenzen, welche Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schullaufbahn erworben haben sollten. Es handelt sich also um Leistungsstandards, nicht um Unterrichtsstandards. Des Weiteren legen Bildungsstandards aber auch verbindliche Kerninhalte fest, da mathematische Kompetenzen nur in der Auseinandersetzung mit konkreten Fachinhalten erworben werden können. Bildungsstandards sollen letztendlich Veränderungen in der Gestaltung schulischer Lernprozesse bewirken (vgl. KMK 2012b, S. 6).

5.2.2 Bildungsstandards für das Unterrichtsfach Mathematik

Mathematik legte am 4. Dezember 2003 als erstes Fach die Bildungsstandards vor und wurde somit durch seine Strukturierung zu einer Folie für andere Fächer. Bildungstheoretische Grundlage wurde der von Winter beschriebene Allgemeinbildungsauftrag des Faches. In Tabelle 10 werden die Formulierungen aus den Bildungsstandards den originalen Aussagen von Winter gegenübergestellt.

Vohns deutete diese Modifizierungen in den Standards als Pragmatisierungen, welche auch Möglichkeiten eröffnen, die von Winter intendierten Kernaussagen zu unterlaufen. Beispielsweise fehlen gewisse Formulierungen bzw. wurden sie durch engere Formulierungen ersetzt:

- in der Formulierung zur ersten Erfahrung: Phänomene *„die uns alle angehen oder angehen sollten“, „in einer spezifischen Art“* (Winter 1995, S. 37),
- in der Formulierung zur zweiten Erfahrung: *„als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“* (Winter 1995, S. 37).

Winter	Bildungsstandards
Schülerinnen und Schülern sollte im Mathematikunterricht ermöglicht werden:	
(1) *„Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*	*„technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahr[zu]nehmen, [zu] verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte [zu] beurteilen,*
(2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*	*Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik [zu] kennen und [zu] begreifen,*
(3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“* (Winter 1995, S. 37).	*in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit [zu] erwerben“* (KMK 2003, S. 6).

Tab. 10 Grunderfahrungen nach Winter und abgeleitete Formulierungen in den Bildungsstandards

Nach Ansicht von Vohns (2016, S. 40f.) wird der Gedanke einer allgemeinen Menschenbildung dadurch deutlich abgeschwächt. Mathematisches Modellieren sowie innermathematisches Operieren werden zum Ziel als solches erklärt.

Das Kompetenzmodell für das Fach Mathematik (siehe Tabelle 11) unterscheidet drei Dimensionen (vgl. KMK 2003, S. 7ff.). Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen stehen als sogenannte „Prozessdimensionen“ im Mittelpunkt. Die inhaltsbezogenen Leitideen bilden die „Inhaltsdimension“. Der kognitive Anspruch mathematischer Tätigkeiten wird durch die Anforderungsbereiche beschrieben. Er ist damit Ausdruck der „Anspruchsdimension“.

Prozessdimension	Inhaltsdimension	Anspruchsdimension
- mathematisch argumentieren - Probleme mathematisch lösen - mathematisch modellieren - mathematische Darstellungen verwenden - mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen - mathematisch kommunizieren	- Zahl - Messen - Raum und Form - funktionaler Zusammenhang - Daten und Zufall	- Reproduzieren - Zusammenhänge herstellen - Verallgemeinern und Reflektieren

Tab. 11 Dimensionen des Kompetenzmodells in den Bildungsstandards

Bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen und bei den mathematischen Leitideen wurden zentrale Forschungsaspekte vergangener Jahrzehnte aufgegriffen und verarbeitet.

Spätestens seit Bruner und Wittmann diskutierte man in der Fachdidaktik, an welchen zentralen bzw. fundamentalen Ideen sich Mathematikunterricht ausrichten sollte: Für Bruner (1970, S. 35ff.) ist das entscheidende Unterrichtsprinzip, die Struktur sowie die

Arbeits- und Denkweise der zugrundeliegenden Wissenschaft („fundamental ideas“) zu vermitteln. Wittmann (1974, S. 28) spezifizierte 1974 diese Ideen für den Mathematikunterricht und forderte das „Prinzip der Orientierung an Grundideen“. Vollrath vertrat 1978 folgende Position:

> *„Der Mathematikunterricht läßt sich durch Leitideen strukturieren; Begriffsbildungen, die Suche von Eigenschaften und Zusammenhängen, die Entwicklung von Problemstellungen und Lösungsstrategien haben als Kern mathematische Ideen, die im Unterricht vermittelt werden sollten, weil sich an ihnen Bildung vollziehen kann“* (Vollrath 1978, S. 449).

Heymann (1996, S. 50) hingegen näherte sich den zentralen Ideen über den Begriff der Bildung. Ihm ging es speziell darum, durch Mathematikunterricht kulturelle Kohärenz zu stiften. Darunter verstand er ein Allgemeinbildungskonzept als Orientierungsrahmen. Kulturelle Kohärenz war für ihn die Symbiose von diachronen Aspekten (Erhalt und Weitergabe des kulturellen Erbes) und synchronen Aspekten (Verknüpfung unterschiedlicher Traditionen und Teilkulturen) (vgl. Heymann 1996, S. 68). Bei der Tradierung von Mathematik unterschied er drei Ebenen: (1) die mathematische Alltagskultur, (2) die Schulmathematik und (3) die Wissenschaft Mathematik:

(1) Im Bereich der mathematischen Alltagskultur geht es um die Reproduktion von mathematischem Können. Es wird innerhalb einer Zivilisation als Kernbestand weitergegeben, bedingt durch eine stetige Wechselwirkung zwischen Schule und Gesellschaft (vgl. Heymann 1996, S. 155).

(2) Die Schulmathematik kann der Stiftung kultureller Kohärenz auch entgegenwirken: Einmal curricular etablierte Unterrichtsinhalte können beispielsweise die Implementierung bildungstheoretisch interessanterer Themen erschweren (vgl. Heymann 1996, S. 156).

(3) Zur Kontinuität in der Wissenschaft Mathematik kann der Fachunterricht an den allgemeinbildenden Schulen nur beitragen, indem er eine hinreichend große Anzahl motivierter und befähigter Studienanfängerinnen und Studienanfänger hervorbringt (vgl. Heymann 1996, S. 157).

Heymann stellte folgende These auf:

> *„Der entscheidende Beitrag des allgemeinbildenden Mathematikunterrichtes zur kulturellen Kohärenz besteht darin, die besondere Universalität der Mathematik und ihre Bedeutung für die Gesamtkultur anhand zentraler Ideen exemplarisch erfahrbar zu machen“* (Heymann 1996, S. 158).

5.2.3 Mathematische Leitideen in den Bildungsstandards – eine Entwicklungsgeschichte

Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts unterbreitete Alfred North Whitehead in seinem Aufsatz „Das mathematische Curriculum“ konkrete Vorschläge zur Ausrichtung des Mathematikunterrichts an *„einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung“* (Whitehead 1913, S. 129). Er differenzierte zwischen Mathematik als berufsbezogenem Studium und als Instrument der Bildung (vgl. Whitehead 1913, S. 131). Whitehead war davon überzeugt, dass ein Großteil des mathematischen Fachwissens und der fachmathematischen Methoden für Fachleute bedeutungsvoll sei, sah sie jedoch als verhängnisvoll für die mathematische Bildung an den Schulen an: *„Die Schüler werden verwirrt durch eine Vielzahl von Details ohne offensichtliche Relevanz für große Ideen oder für alltägliche Gedanken“* (Whitehead 1913, S. 129).
Als zentrale Ideen führte Whitehead (1913, S. 131) „Zahl“, „Quantität“ (darin enthalten: Messen und funktionale Abhängigkeiten) und „Raum“ an. Whitehead strebte mit seinen Grundideen nach Klarheit und Elementarität. Dennoch wollte er tiefere mathematische Einsichten nicht aus dem Unterricht verbannen. Heymann (1996, S. 162) vermutete, dass Whitehead die Vorstellungen Kleins vertraut waren – aufgrund der Berührungspunkte zu dessen Reformprogramm. Heymann (1996, S. 170) wertete in seiner Synopse diese Ansätze als zeitgemäß, aber ergänzungsbedürftig; neuere Entwicklungen der Mathematik spiegelten sie nur unzureichend wider.
In den 1960er Jahren wandte sich vor allem Alexander Israel Wittenberg (1990, S. 46f.) gegen eine fachwissenschaftliche Orientierung des Mathematikunterrichts. Schülerinnen und Schüler sollten sich aktiv mit mathematischen Phänomenen auseinandersetzen können. Es sollte ihnen ermöglicht werden, elementare mathematische Methoden zu finden und auszuprobieren.
Einige Verfechter der zentralen Ideen beriefen sich in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts auf die Veröffentlichungen von Jerome Seymour Bruner (1970). Zusammenfassungen wichtiger Thesen von Bruner finden sich sowohl bei Heymann (1996, S. 164) als auch bei Borovcnik (1997, S. 19):

- Schülerinnen und Schüler sollen nicht Einzelfakten, sondern die grundlegende Struktur („fundamental structure“) eines Faches lernen.
- Strukturierungen im Curriculum erfolgen für jedes Fach anhand ausgewählter Grundbegriffe („basic concepts“) oder Grundideen („fundamental ideas“).
- Der Aufbau des Curriculums erfolgt „spiralartig“.

- Die Forscherinnen und Forscherr der Fachdisziplinen sollen die Curricula mitgestalten.

Die Ideen Bruners ließen jedoch recht polarisierende Interpretationen zu. Einerseits könnte man Bruner so verstehen, dass das von Schülerinnen und Schülern zu verstehende Wissen durch die Fachwissenschaft bereits optimal strukturiert ist und nur einer Transformation in die kognitiven Strukturen der Lernenden bedarf. Infolgedessen kam es in Lehrplänen zu einer Auflistung von Begriffen, welche sich an der universitären Systematik anlehnte (vgl. Heymann 1996, S. 165). Eine entgegengesetzte Interpretation rückt Bruner in die Nähe von Verfechtern des „entdeckenden Lernens" bzw. des „genetischen Prinzips". Bruners „basic concepts" und „fundamental ideas" waren dementsprechend bedeutsam für die Ableitung zentraler Ideen (vgl. Heymann 1996, S. 165).

Anfang der 1970er Jahre stellte Erich Christian Wittmann (1974) die Ideen Bruners in einen größeren fachdidaktischen Kontext. Er orientierte sich an der Interpretation in Richtung „entdeckendes Lernen" und ergänzte die Prinzipien „vorwegnehmendes Lernen" und „Fortsetzbarkeit". Wittmann begriff Mathematik als einen Prozess, bei dem neben den fachmathematischen Kriterien fachdidaktische Prinzipien im Vordergrund stehen sollten.

Alfred Schreiber griff 1983 mit der Frage nach dem Sinn mathematischer Tätigkeit allgemeine Probleme des Mathematikunterrichts auf. Er bezeichnete sie als „wunde Punkte" (vgl. Schreiber 1983, S. 66):

- Aus der Rechtfertigung axiomatischer Theorien resultierte ein *philosophisches* Problem.
- Die begründete Auswahl mathematischer Inhalte für den Unterricht sowie das adäquate Vermitteln und Verstehen stellte ein zweifach *pädagogisches* Problem dar.
- Die Mehrzahl der Menschen hat ein extrem bruchstückhaftes Bild von Mathematik als einer esoterischen Wissenschaft (spezialisierte Wirklichkeitsferne). Daraus leitete sich ein *esoterisches* Problem ab.

Eine grundsätzliche Lösung dieser Probleme sah er weder im Rückgriff auf Fundamentalismen (z. B. Bourbakismus) noch in einer rigorosen Elementarisierung mathematischer Inhalte. Erst recht lag sie nicht in einem pauschalen Verweis auf Anwendbarkeit und Unentbehrlichkeit in der Technik (vgl. Schreiber 1983, S. 66). Die Formel „Richte dich auf das Wesentliche!" könnte einen Ansatz bieten, jedoch erwies sich die Suche nach dem Wesentlichen in der Mathematik als schwierig. Dennoch gelang es Alfred Schreiber, sogenannte Universalitätskriterien für das Auffinden zentraler Ideen zu formulieren. Er benannte folgende Anhaltspunkte:

- *„Weite (logische Allgemeinheit),*
- *Fülle (vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz in mathematischen Einzelgebieten),*
- *Sinn (Verankerung im Alltagsdenken und lebensweltliche Bedeutung)"* (Schreiber 1983, S. 69).

Zur Suche nach zentralen Ideen äußerte Schreiber:

> *„Offenbar ist dazu neben logisch-analytischen Verfahren ein breit angelegtes historisch-anthropologisches Vorgehen erforderlich, aus dem sich ergibt, dass die fraglichen Ideen nicht als absolute Invarianten menschlichen Denkens gelten können"* (Schreiber 1983, S. 69).

Im Mathematikunterricht können sich universelle Ideen auf unterschiedliche Art und Weise entfalten: Sie können das Lernen für Schülerinnen und Schüler strukturieren, eignen sich aber weniger als Leitfaden für große Unterrichtssequenzen. Universelle Ideen sind auch Komponenten im Metawissen von Lehrpersonen, da sie zugleich inhaltsbezogen (genetisierend) und inhaltsübersteigend (synthetisierend) sind (vgl. Schreiber 1983, S. 72).

Im Jahre 1992 untersuchte Fritz Schweiger in seiner „Geisteswissenschaftlichen Studie" die Konzepte zu fundamentalen, universellen bzw. zentralen Ideen vorangegangener Jahrzehnte. Wenngleich er Ähnlichkeiten aufzeigen konnte, überwogen die Unterschiede. Für eine vereinende Sicht entwickelte er folgende „Behelfsdefinition":

> *„Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken, die*
> (1) *in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,*
> (2) *tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,*
> (3) *als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,*
> (4) *den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,*
> (5) *in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen"* (Schweiger 1992, S. 207).

Hans Werner Heymann betrachtete 1996 fundamentale Ideen aus der Perspektive kultureller Kohärenz und stellte folgende Leitfrage: *„Anhand welcher Ideen läßt sich dem Schüler die besondere Universalität verdeutlichen, die auf Abstraktion und symbolischen Techniken beruht, die mittels Abstraktion gewonnen werden?"* (Heymann 1996, S. 173). Seiner Ansicht nach sollten diese Ideen grundsätzlich verschiedene mathematische Themen repräsentieren und auf unterschiedlichem kognitiven Niveau verdeutlicht werden können. Sie sollten das mathematische Curriculum wie einen „roten Faden" durchziehen – im Sinne von Bruners Spiralcurriculum: *„Die Schüler sollten auch dann aus der*

Beschäftigung mit der betreffenden Idee Gewinn schöpfen können, wenn sie im Unterricht nicht bis zu einem zuvor definierten Endpunkt gelangen" (Heymann 1996, S. 173). Heymanns (1996, S. 174) Katalog umfasste schließlich sechs Ideen:

- Idee der Zahl,
- Idee des Messens,
- Idee des räumlichen Strukturierens,
- Idee des funktionalen Zusammenhangs,
- Idee des Algorithmus,
- Idee des mathematischen Modellierens.

Auch Horst Hischer griff die Problematik der basalen Ideen auf. Er ging besonders auf die sprachlichen Ebenen der Ideen ein. Er kritisierte die aus seiner Sicht unausgewogenen Formulierungen der sechs zentralen Ideen von Heymann, welche teilweise auch in die Bildungsstandards aufgenommen worden waren. Für Hischer (2012, S. 20) war „Zahl" ein Begriff, aber „Messen" eine Handlung. Die Bedeutung des Handlungsaspektes betonend, formulierte Hischer: *„Eine fundamentale Idee offenbart sich einerseits als grundlegende Handlung und andererseits als grundlegender Begriff, insgesamt also eine ‚Symbiose'"* (Hischer 2012, S. 20). Somit würde zum Beispiel weder „Zahl" noch „Zählen" für sich genommen eine fundamentale Idee beschreiben. Einige von Heymanns zentralen Ideen könnten man demnach wie folgt bezeichnen: Zahl und Zählen; Maß und Messen; Algorithmus und Algorithmieren (vgl. Hischer 2012, S. 20). Die Idee des funktionalen Zusammenhangs (Herstellen, Erkennen und Untersuchen dieser Zusammenhänge) kann im Wesentlichen mit dem funktionalen Denken im Sinne Vollraths gleichgesetzt werden. Eine entsprechend kurze und einprägsame sprachliche Formulierung lässt sich für die anderen Ideen nicht so leicht formulieren (vgl. Hischer 2012, S. 20).

Die Analyse und Revision von Schweigers „Geisteswissenschaftlicher Studie" führte Hischer zu zwei Kriterien fundamentaler Ideen: den deskriptiven und den normativen Kriterien. In Tabelle 12 erfolgt eine Zusammenfassung dieser Kriterien in Anlehnung an die Tabelle von Hischer (2012, S. 21):

Während die deskriptiven Kriterien helfen, fundamentale Ideen auszumachen, beschreiben normative Kriterien Erwartungen. Mit zunehmender Präzision sinkt jedoch die Bedeutsamkeit der Ideen. Das erfordert ein ergänzendes deskriptives Kriterium der „Vagheit", aus dem sich die folgende „Unschärferelation" ableiten lässt: *„Werden Ideen zunehmend fundamentaler, so wird ihre Beschreibung zunehmend vager, d. h., sie werden zunehmend allgemeiner und unschärfer – und umgekehrt!"* (Hischer 2012, S. 21). Nach Hischer (2012, S. 21) erfüllen die Ideen von Heymann diese vier deskriptiven Kriterien.

	„Fundamentale Ideen der Mathematik	
deskriptive Kriterien	*… sind aufzeigbar in der historischen Entwicklung der Mathematik,*	Historizität
	… sind, gewissermaßen als Archetypen des Handelns und Denkens, auch außerhalb der Mathematik und vor der wissenschaftlichen Aufnahme auffindbar,	Archetypizität
	… geben (zumindest partiell) Aufschluss über das Wesen der Mathematik,	Wesentlichkeit
normative Kriterien	*… sind tragfähig, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts vertikal zu gliedern,*	Durchgängigkeit
	… sind geeignet, den Mathematikunterricht beweglicher und durchsichtiger zu gestalten,	Transparenz
weiteres *deskriptives* Kriterium	*… sind eher vage als präzise“* (Hischer 2012, S. 21).	Vagheit

Tab. 12 Deskriptive und normative Kriterien fundamentaler Ideen (in Anlehnung an eine Darstellung bei Hischer [2012, S. 21])

5.2.4 Die Idee des funktionalen Zusammenhangs

Die Idee des funktionalen Zusammenhangs findet sich in verschiedenen Modellen entsprechender Autoren der letzten einhundert Jahre. Als Beispiele seien genannt:

- Quantität und Idee der funktionalen Abhängigkeit bei Whitehead (1913, S. 131),
- Idee der Abbildung oder Funktion u. a. bei Bender/Schreiber (1985, S. 202ff.) und bei Tietze/Klika/Wolpers (1997, S. 38),
- Idee des funktionalen Zusammenhangs bei Heymann (1996, S. 177f.),
- Funktionale Variation bei Führer (1997, S. 84f.).

Krüger (2000, S. 296) bezeichnete funktionale Zusammenhänge als den Prototyp einer fundamentalen Idee. Schließlich fand „funktionaler Zusammenhang“ als mathematische Leitidee auch Einzug in die nationalen Bildungsstandards. Darin wurden unterschiedliche Dimensionen dieser Ideen schulstufen- bzw. abschlussbezogen untersetzt. In Tabelle 13 wird dies für die mathematische Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ bzw. die inhaltsbezogene mathematische Kompetenz „Muster und Strukturen“ gezeigt (vgl. KMK 2003; 2004a; 2004b; 2012a).
Die Tabelle verdeutlicht, wie die Idee der funktionalen Zusammenhänge verschiedene mathematische Themengebiete schulstufenbezogen durchzieht. Auch für die anderen Leitideen lassen sich entsprechende schulstufenbezogenen Differenzierungen aufzeigen.
Die Idee des funktionalen Zusammenhangs nimmt jedoch eine exponierte Stellung ein. Heymann (1996, S. 177f.) hob die Idee des funktionalen Zusammenhangs besonders hervor und stellte sie damit über die der Ideen „Zahl“, „Messen“ und „räumliches Struktu-

	Primarstufe	Hauptschulabschluss	Mittlerer Schulabschluss	Allgemeine Hochschulreife
	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz bzw. mathematische Leitidee			
	Muster und Strukturen	**Funktionaler Zusammenhang**		
Umgang mit funktionalen Zusammen-hängen (Basiszugang)	funktionale Bezie-hungen in Sachsi-tuationen erken-nen, sprachlich beschreiben und entsprechende Aufgaben lösen	Beschreiben und Interpretieren funktio-naler Zusammenhänge und ihrer Darstellun-gen in Alltagssituatio-nen	Nutzen von Funktio-nen als Mittel zur Beschreibung quanti-tativer Zusammen-hänge	Beschreibung und Untersuchung quanti-fizierbarer Zusam-menhänge mit Funkti-onen aus Sek. I sowie einfacher Verknüpfun-gen und Verkettungen
allgemeine Anwendungen (Sekundärer Zugang)		Prozentrechnung bei Wachstumsprozessen Tabellenkalkulation situationsgerechtes Nutzen von Maßstä-ben beim Lesen und Anfertigen von Zeich-nungen	Beschreiben von Veränderungen von Größen mittels Funktionen Tabellenkalkulation zu Funktionen mögliche Sachsituati-onen beschreiben	Änderungsraten funk-tional beschreiben und interpretieren; Zusammenhang zwi-schen Ableitungs- und Funktionsgraph, Ablei-tungsregeln; Integralbegriff und Integrationsregeln, Hauptsatz; Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeits-verteilungen
Darstellungen (Werkzeug)	Tabellen funktionale Bezie-hungen darstellen und untersuchen	unterschiedliche Darstellungsformen Verwenden funktiona-ler Zusammenhänge	sprachliche, tabellari-sche, graphische Darstellungen; Terme; Analysieren, Interpre-tieren und Verglei-chen unterschiedli-cher Darstellungen; Erkennen und Be-schreiben funktiona-ler Zusammenhänge	
Gleichungen (Werkzeug)		einfache lineare Glei-chungen Vergleichen von Lösungsverfahren	Gleichungen und Gleichungssysteme kalkülmäßig, algo-rithmisch, mit Soft-ware lösen; Lösbarkeit und Lö-sungsvielfalt von linearen und quadrati-schen Gleichungen und linearer Glei-chungssysteme	
Proportio-nalitäten (inhaltliche Strukturierung Stufe 1)	Proportionalität ─ einfache Sachauf-gaben	proportionale und antiproportionale Zuordnungen in Sach-zusammenhängen unterscheiden, be-rechnen	lineare, proportionale und antiproportionale Zuordnungen – realitätsnahe Proble-me	
Spezielle Funktionsty-pen (inhaltliche Strukturierung Stufe 2)			lineare, quadratische und Exponentialfunk-tionen, Sinusfunktio-nen	

Tab. 13 Schulartspezifische Differenzierungen zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang

rieren“. Während man beim Zählen mit unterscheidbaren diskreten Objekten operiert, hat man es beim Messen mit kontinuierlichen Phänomenen zu tun, die durch den Vergleich mit einer definierten Einheit zu quantifizieren sind. Beim Messen verknüpft sich die Mathematik auf vielfältige Weise mit der sinnlich erfahrbaren Welt. Den Schülerinnen und Schülern sollten auch im digitalen Zeitalter genügend elementare Erfahrungen und Erlebnisse zum Messen geboten werden. Erst durch das Messen erhalten sie die Möglichkeit, quantitative Naturgesetze für exakte Vorhersagen zu formulieren (vgl. Heymann 1996, S. 175).
In der Vorhersagbarkeit von Entwicklungen steckt die Idee des funktionalen Zusammenhangs. Das Postulieren von Zusammenhängen zwischen getrennt wahrnehmbaren Phänomenen ermöglicht eine intuitive Beschreibung von Regelmäßigkeiten: Ähnliche Handlungen ziehen ähnliche Folgen nach sich. Diese Regelmäßigkeit ist ein Grundgesetz der Natur: auf Blitz folgt Donner; auf Tag folgt Nacht; auf Essen folgt Sättigung; auf Saat die Ernte. Erfahrung und Reflexion haben einen großen Wissensschatz heranbilden lassen (vgl. Heymann 1996, S. 177f.). Heymann würdigte die funktionalen Zusammenhänge:

> *„Die Entdeckung, daß sich gewisse Aspekte unserer Welt isoliert betrachten und quantifizieren lassen und daß sich die Zusammenhänge zwischen diesen quantifizierten Aspekten mit mathematischen Mitteln beschreiben lassen, markierte den Beginn der exakten Wissenschaften im modernen Sinne. […] Naturgesetze im modernen Sinne sind ohne die mathematische Formulierung funktionaler Zusammenhänge schlicht nicht denkbar, und ohne ein Begreifen der Idee des funktionalen Zusammenhangs läßt sich deshalb auch keine tiefere Einsicht in den wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Fortschritt gewinnen“* (Heymann 1996, S. 177).

Das Studium von Funktionen hat die innermathematische Theorieentwicklung entscheidend vorangetrieben:

> *„Die Idee des funktionalen Zusammenhangs führt stärker als die drei zuvor behandelten Ideen [Zahl; Messen; räumliches Strukturieren] über die mathematische Alltagskultur unserer Gesellschaft hinaus: Funktionen ‚sieht‘ man nicht in dem Sinne, in dem jeder Alltagsmensch auf Zahlen, Meßergebnisse und geometrische Formen und Darstellungen stößt. Wenn Heranwachsende mit der Idee des funktionalen Zusammenhangs vertraut sind, steht ihnen ein theoretisches Konzept zur Verfügung, das ihnen beim Aufspüren ‚latenter‘ Mathematik in ihrer Alltagswelt helfen kann und sie durchschaubarer macht.*
> *Vertraut sein mit der Idee des funktionalen Zusammenhangs ist etwas anderes als der mathematisch-‚handwerklich‘ korrekte Umgang mit den in der Schule gängigen Funktionstypen: Die Idee des funktionalen Zusammenhangs verknüpft Alltagswissen mit einer mächtigen mathematischen Methode“* (Heymann 1996, S. 178).

Heymann plädierte für hinreichend viele Gelegenheiten, bei denen Schülerinnen und Schüler diese Verknüpfungen für sich entdecken oder bewusst nachvollziehen können: Aus einer konkreten Beobachtung entwickele sich dann zunächst eine vage Formulierung der Form „Je mehr von diesem, desto mehr von jenem“, welche in den höheren Jahrgangsstufen möglicherweise mithilfe einer linearen Funktion quantitativ beschrieben werden könne.

> *„In derartigen Erfahrungen erschließt sich die kulturelle Bedeutung der im Funktionsbegriff gegebenen Abstraktion. Die mathematische Formulierung funktionaler Zusammenhänge erweist sich als ein universelles Mittel, meßbare Veränderungen in unserer Welt theoretisch zueinander in Beziehung zu setzen und symbolisch zu bearbeiten“* (Heymann 1996, S. 178).

Durch zahlreiche Querverbindungen kann Wissen weiter vernetzt werden: Funktionen operieren auf Zahlen und produzieren neue Zahlen, beschreiben und deuten Messreihen, lassen sich durch geometrische Kurven repräsentieren und als solche sich auch geometrisch untersuchen und umgekehrt. In der Geometrie können Abbildungen (Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen) helfen, funktionale Zusammenhänge – von der Idee des räumlichen Strukturierens her – vorzubereiten (vgl. Heymann 1996, S. 178).

5.3 „PISA-Schock“ – ein Jahrzehnt später

Dem sogenannten „PISA-Schock“ (vgl. Meidinger 2013, S. 24; Klieme 2013, S. 38) folgten umfangreiche bildungspolitische Maßnahmen auf Bundes- und Länderebene. Welche messbaren Fortschritte konnten bei den mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler in Deutschland verzeichnet werden? Zur Beantwortung können die PISA-Ergebnisse der nachfolgenden Jahre herangezogen werden. In diesem Kapitel erfolgt eine exemplarische Betrachtung der Befunde aus PISA 2012 mit dem Testschwerpunkt Mathematik.
In den Jahren nach PISA 2000 wurde der von der OECD (2013, S. 26) verwendete Begriff der mathematischen Kompetenz („Mathematical Literacy“) überarbeitet, angepasst und in verschiedene Strukturelemente (Inhaltsbereiche, mathematische Prozesse und fundamentale mathematische Fähigkeiten) ausdifferenziert. Die Inhaltsbereiche (Veränderung und Beziehung; Raum und Form; Quantität; Unsicherheit und Zufall) sowie die Prozesse (Situationen mathematisch formulieren; mathematische Konzepte, Fakten, Prozeduren und Schlussfolgerungen anwenden; mathematische Ergebnisse interpretieren, anwenden und bewerten) blieben nahezu unverändert.
Die ursprünglich acht mathematischen Teilkompetenzen, die mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards vergleichbar sind, wurden leicht modifiziert und auf sieben „fundamentale mathematische Fähigkeiten“ („capabilities“) verdichtet (vgl. OECD 2013, S. 30).

Die Teilkompetenzen „mathematisches Denken“, „mathematisches Modellieren“ und „Darstellungen verwenden“ gingen in den Kompetenzen „Mathematisieren“ und „Repräsentieren“ auf. „Mathematisieren“ ist die Fähigkeit zur Übersetzung eines Realproblems in eine geeignete mathematische Form, indem z. B. eine Annahme formuliert oder ein Modell entworfen und geprüft wird. „Mathematisieren“ ist somit ein Teilaspekt „mathematischen Modellierens“ (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 54).
Zu „Repräsentieren“ zählt der Umgang mit Abbildungen, Tabellen, Diagrammen sowie die Verwendung von Formeln und Gleichungen. Damit entspricht diese fundamentale mathematische Fähigkeit im Wesentlichen der mathematischen Teilkompetenz „Darstellungen verwenden“ (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 54). Die Teilkompetenz „mathematisches Denken“ gibt es in der Kategorisierung von 2012 nicht mehr (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 54). Diese Kompetenz ist besonders komplex und schwer zu messen. Ihre Streichung zeigt auch die Grenzen dessen auf, was PISA grundsätzlich testen kann. Für funktionales Denken – als einer speziellen Art mathematischen Denkens – bedeutet dies, dass sich Zuwächse in bestimmten Kompetenzen mithilfe der PISA-Kriterien nur unzureichend abbilden lassen.

Konkrete Ergebnisse aus PISA 2012:

Leistungen der Schülerinnen und Schüler

Deutschland zählte mit 514 Punkten (OECD-Durchschnitt: 494 Punkte) im internationalen Vergleich nunmehr zu den OECD-Staaten mit eher überdurchschnittlichen Leistungen in Mathematik. Dieses Ergebnis bestätigte die Ergebnisse von 2009 (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 72; OECD 2012, S. 5). Die Streubreite mathematischer Kompetenz lag für Deutschland statistisch gesehen im Bereich des OECD-Durchschnittes (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 73).
Die mathematische Kompetenz wird bei PISA in sechs Stufen unterteilt, wobei Stufe VI die höchste Ausprägung dieser Kompetenz repräsentiert. Eine genaue Beschreibung dieser Kompetenzstufen geben Sälzer u. a. (2013, S. 61). Der Anteil der Schülerinnen und Schüler in den Kompetenzbereichen V und VI betrug in Deutschland 17,5 % und lag damit über dem OECD-Durchschnitt von 12,6 %. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler unterhalb der Kompetenzstufe II lag in Deutschland mit 17,7 % unter dem Mittelwert der OECD-Staaten (23,0 %) (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 75). Dies bedeutet, dass etwa ein Sechstel der 15-Jährigen in Deutschland nicht die Mindestanforderungen für ein anschlussfähiges mathematisches Verständnis erreichte.
In Deutschland erreichten Jungen statistisch signifikant höhere Werte in der Gesamtskala als Mädchen, besonders in der Schulart Gymnasium (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 94). Die

gerundete Differenz lag bei 14 Punkten und war damit größer als im OECD-Durchschnitt (gerundet: 11 Punkte). Diese Mittelwertdifferenz konnte auf das höhere Niveau der Jungen in der Spitzengruppe zurückgeführt werden (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 77).

Deutschland lag in allen vier Inhaltsbereichen jeweils über dem OECD-Durchschnitt. Zwischen den vier Bereichen zeigte sich zudem eine relativ geringe Diskrepanz. Die Befunde von 2012 deuteten zudem auf relative Stärken in den Bereichen *Veränderung und Beziehung* und *Quantität*, aber auf relative Schwächen in den Bereichen *Unsicherheit und Daten* sowie *Raum und Form* (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 82).

Die Kompetenzzuwächse, bezogen auf die einzelnen Schularten, waren laut den Autoren vor allem auf die bessere Förderung leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler (und damit größtenteils auf Maßnahmen außerhalb der Schulart Gymnasium) zurückzuführen (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 91ff.). Der Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler sollte nach den Ergebnissen eine stärkere Bedeutung beigemessen werden (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 94).

Internationaler Vergleich und regionale Unterschiede

Bezogen auf PISA 2003 ergab sich (ebenfalls mit Testschwerpunkt Mathematik) folgendes Bild: Während in sieben OECD-Staaten signifikante Steigerungen in den Mathematikleistungen gemessen werden konnten, wiesen 13 Staaten signifikante Verschlechterungen und neun Staaten nicht messbare Veränderungen auf. Deutschland zählte, wie Polen oder Italien, zu den Ländern mit Steigerungen. In Frankreich, den Niederlanden, Belgien, Dänemark oder Tschechien wurden im Vergleich zu 2003 Verschlechterungen gemessen. Besonders rückläufig waren die Ergebnisse in Finnland und Schweden. Das waren die Länder, die 2003 noch Spitzenwerte erzielt hatten (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 84).

In Deutschland waren bereits zwischen PISA 2000 und PISA 2003 deutliche Verbesserungen zu verzeichnen gewesen. Die Autoren werteten die Veränderungen ab 2003 daher nicht nur als Stabilisierung, sondern als weitere Verbesserung bestimmter messbarer mathematischer Kompetenzen (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 84). Diese Fortschritte führten sie dabei weniger auf das Schulsystem als vielmehr auf die Anstrengungen zu Qualitätssicherung und Unterrichtsentwicklung zurück (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 86).

Die im Jahre 2013 veröffentlichte PISA-E Studie belegte jedoch erhebliche regionale Unterschiede. Zwischen den deutschen Bundesländern lagen teilweise Differenzen von zwei Schuljahren (gemessen zwischen den höchsten und niedrigsten Kompetenzwerten) (vgl. Sälzer u. a. 2013, S. 94f.).

Unterrichtsqualität

Bei PISA 2012 untersuchte man auch Fragen der Unterrichtsqualität. Im Rahmen des Erhebungskonzepts wurde erfasst, wie fünfzehnjährige Schülerinnen und Schüler in Deutschland ihren Mathematikunterricht charakterisieren. Die durch Schülerfragebögen erhobenen Daten waren jedoch aufgrund einer Vielzahl von Faktoren nur eingeschränkt interpretierbar. Beispielsweise ist die Wahrnehmung der Jugendlichen nicht für alle Merkmale gleichermaßen zuverlässig. Eine genauere Beschreibung dieser Versuchsanordnung geben Reiss u. a. (2013, S. 128). Wesentliche Befunde der Befragungen waren demnach (vgl. Reiss u. a. 2013, S. 149f.):

- Erwartungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts (z. B. Projekt SINUS, Bildungsstandards) in Richtung kognitiv-aktivierenden Unterrichts, anspruchsvoller Aufgabenstellungen oder Verdeutlichung der Relevanz von Mathematik in Anwendungsbezügen konnten nicht vollständig erfüllt werden.
- Die von den Schülerinnen und Schülern wahrgenommene Unterstützung durch die Lehrperson lag deutlich unter dem OECD-Durchschnitt.
- Die individuelle Förderung und die Ausrichtung des Unterrichts an den Bedürfnissen der Schülerinnen und Schüler ist verbesserungswürdig.
- Die motivational-affektiven Ziele des Mathematikunterrichts sind verbesserungswürdig.
- Es gibt einen hohen Anteil an Aufgaben, die eher durch technische Verfahren zu lösen sind und bei denen der Lösungsweg offensichtlich ist.

Einstellungen und Selbstbilder von Schülerinnen und Schülern

Auch mathematikbezogene emotionale und motivationale Orientierungen, Einstellungen und Verhaltensweisen waren Untersuchungsgegenstand bei PISA 2012. Im internationalen Vergleich besaßen deutsche Jugendliche ein überdurchschnittlich ausgeprägtes Selbstbild; sie hatten Vertrauen in ihre mathematischen Fähigkeiten. Diese Selbstwirksamkeitserwartung hatte sich, sowohl für Mädchen als auch für Jungen, seit der Testung im Jahre 2003 deutlich verbessert. Die Autoren verwiesen auf mögliche Zusammenhänge mit der Einführung der Bildungsstandards und eine damit verbundene Stärkung des Anwendungsbezuges (vgl. Schiepe-Tiska/Schmidtner 2013, S. 117).

Deutsche Jugendliche wiesen eine vergleichsweise geringe Ängstlichkeit in Bezug auf Mathematik auf. Obwohl die Beschäftigung mit Mathematik außerhalb des Unterrichts als leicht überdurchschnittlich anzusehen war, berichtete nur ein geringer Anteil von Jugendlichen von einer Teilnahme an entsprechenden Arbeitsgemeinschaften oder Wettbewerben. Mehr

als die Hälfte der deutschen Jugendlichen gab an, keine Freude und kein Interesse an Mathematik zu haben. Die Freude an Mathematik hatte sich, im Vergleich zu 2003, bedeutsam verringert (vgl. Schiepe-Tiska/Schmidtner 2013, S. 118). Gleiches galt für die instrumentelle Motivation von Jungen, wenngleich sie immer noch höher war als bei den Mädchen.
Zwei Drittel der Jugendlichen gaben an, dass sie nicht erkennen können, welche Bedeutung Mathematik für ihre Ausbildung bzw. ihr Berufsleben hat. Weiterhin wurde deutlich, dass Mathematik von den Eltern als wesentlich bedeutsamer eingeschätzt wurde als von Freundinnen und Freunden. Bei den mathematikbezogenen Schülermerkmalen zeigten sich z. T. deutliche Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen. Jungen wiesen, die gewissenhafte Arbeitshaltung ausgenommen, eher günstigere Merkmalsausprägungen auf. Sie waren weniger ängstlich, hatten ein positiveres Selbstbild, erkannten deutlicher die Bedeutung der Mathematik und hatten mehr Freude daran (vgl. Schiepe-Tiska/Schmidtner 2013, S. 118).
Die letztgenannten Befunde stehen der positiven Entwicklung der vergangenen Jahre gegenüber. Sollte zwischen den nach PISA 2000 eingeleiteten Maßnahmen und den signifikant gestiegenen Leistungen ein Zusammenhang bestehen, stellt sich die Frage, ob diese positive Entwicklung von Dauer sein kann. Die Entwicklung spezifischer motivationaler Aspekte beeinflusst früher oder später die Lernbereitschaft. Nimmt diese ab, könnte sich das auf die Leistungen in Mathematik negativ auswirken.

6 Funktionales Denken als Leitgedanke für Reformen im Mathematikunterricht gestern und heute – ein Vergleich

6.1 Die Gegenüberstellung zweier Reformen

Es war jeweils eine Jahrhundertwende, die mit einer Wende im mathematischen Unterricht einhergehen sollte. Sowohl von der Meraner Reform als auch von der Reform infolge von PISA 2000 gingen Signale zu inhaltlichen Veränderungen im Mathematikunterricht aus.
Das gesellschaftliche und kulturelle Leben unterliegt permanenten Wandlungsprozessen. Die Entwicklungen in Naturwissenschaft und Technik sind nur eine Ursache. Diesen Veränderungen kann sich Schule nicht verschließen. Dennoch braucht sie Kontinuität auf inhaltlicher und struktureller Ebene, um leistungsfähig und effizient zu bleiben. Notwendige Veränderungen oder Anpassungen müssen daher zu jedem Zeitpunkt fach- und bildungswissenschaftlich begründet sowie inhaltlich und organisatorisch hinreichend vorbereitet und abgesichert werden. Weiterhin bedürfen unterrichtliche Reformen einer professionellen und kontinuierlichen Begleitung der Lehrkräfte.
Für beide genannten Reformen werden nun die jeweilige Ausgangssituation, der jeweilige Anlass sowie Konsequenzen gegenübergestellt (siehe Abbildung 10).
Das Meraner Programm wurde, einschließlich der gesellschaftlichen, wissenschaftlichen und schulischen Rahmenbedingungen, in Kapitel 4 vorgestellt. Im Kapitel 5 wurden ausgewählte mathematikdidaktische Entwicklungen des ausgehenden 20. Jahrhunderts sowie Ursachen der Bildungsreform zu Beginn des 21. Jahrhunderts diskutiert. Ein zentraler Ansatz beider Reformen bestand darin, dass sich Schule – und besonders der Mathematikunterricht – den gesellschaftlichen, fach- und bildungswissenschaftlichen Veränderungen anpassen sollte.
Während die Diskussion zu Reformen um 1900 eher von Universitätslehrkräften sowie Vertretern der Fachverbände und der Industrie geführt wurde, lenkten diese nach PISA 2000 die Kultusbehörden. Von der Lehrerschaft selbst gingen zu keinem der beiden Zeitpunkte maßgebliche Impulse zu breit angelegten Reformbestrebungen aus.
Um 1900 erarbeiteten einige engagierte Lehrkräfte aus Schule und Universität, allen voran Felix Klein, Lösungsansätze für die damaligen Probleme (Strukturen im höheren Schulwesen; der unbefriedigende Übergang von Schule zu Universität bzw. Technischer Hochschule; die Polaritäten in Lehrauffassungen zum Bildungswert von Mathematik). Daraus resultierte die Meraner Reform von 1905. Sie bildete die Grundlage zur Reformierung des Mathematikunterrichts in Deutschland.

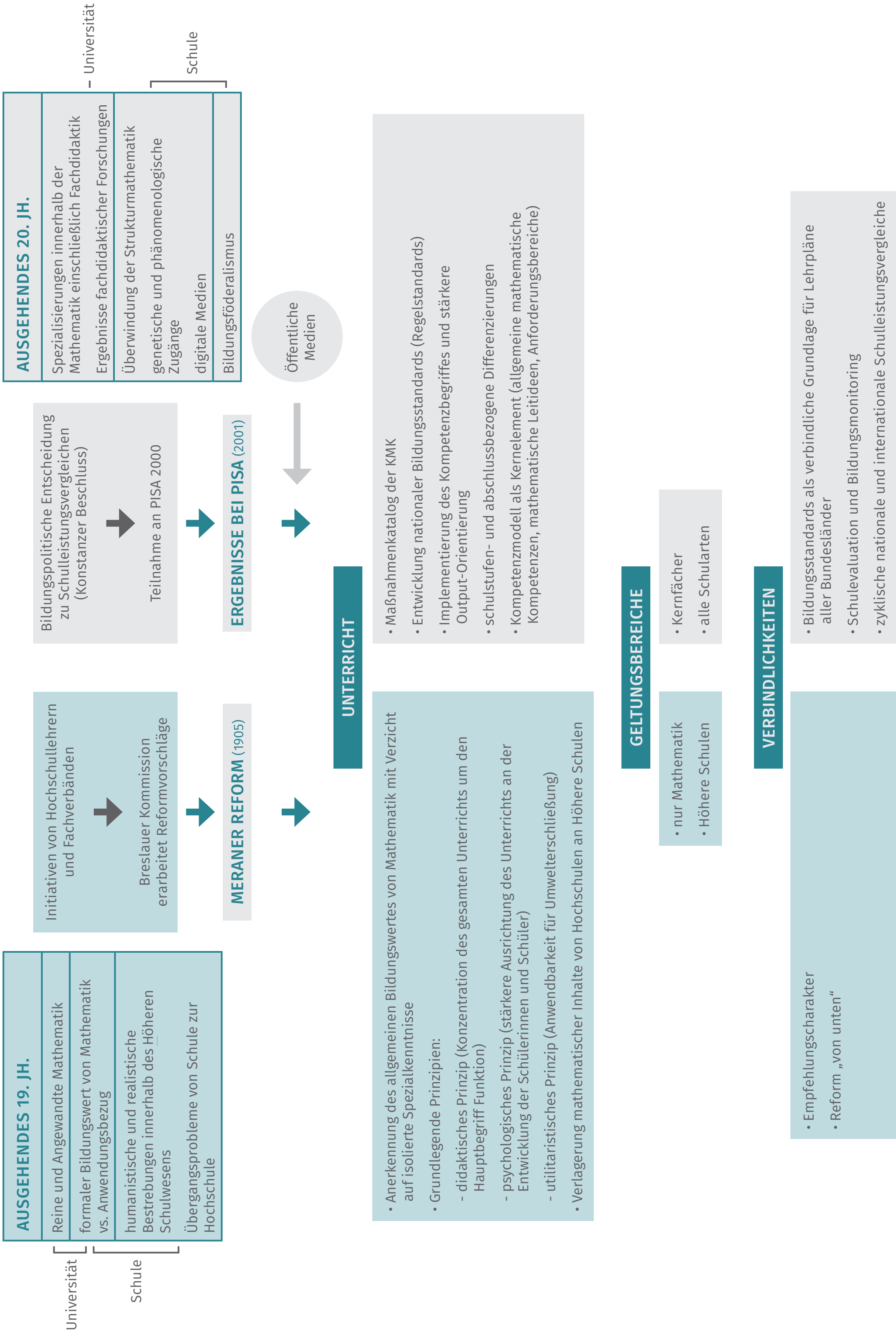


Abb. 10 Vergleich der Reformen

Die Reformansätze nach PISA 2000 generierten sich aus bildungspolitischen Bestrebungen. Öffentliche Medien erzeugten seinerzeit einen enormen Handlungsdruck. Daraufhin wurden seit Jahren bekannte Schwachstellen des deutschen Schulsystems in den Blick genommen und bereits wenige Monate nach der Veröffentlichung der Ergebnisse verabschiedete die KMK einen länderspezifischen Maßnahmenkatalog.

Bei der Umsetzung der Reformen wurden unterschiedliche Wege beschritten. So zeigen sich beispielsweise bei den Formulierungen von Reformintensionen markante Unterschiede in der Konkretion. Klein und seine Kollegen fokussierten ihre Ideen auf wenige fundamentale Forderungen, insbesondere die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit funktionalen Denkens. Funktionales Denken reduzierte sich damals nicht nur auf den Umgang mit Funktionen, es war eine curriculare Leitidee, die den mathematischen Unterricht vertikal strukturieren sollte.

Die Reformziele nach PISA 2000 waren wesentlich stärker ausdifferenziert. Da auf Erkenntnisse mathematikdidaktischer Forschungen aus den vergangenen Jahrzehnten zurückgegriffen werden konnte, lag bereits nach kurzer Zeit ein Katalog allgemeiner mathematischer Kompetenzen und mathematischer Leitideen vor. Funktionale Zusammenhänge bilden darin eine sogenannte mathematische Leitidee. Dies unterstreicht wiederum die Bedeutsamkeit funktionalen Denkens, auch wenn es in den Jahren zu veränderten Begriffsbestimmungen und Begriffshierarchien kam.

Die stärkere Ausdifferenzierung in allgemeine mathematische Kompetenzen, mathematische Leitideen und Anforderungsbereiche sollte Transparenz und Verständlichkeit im schulischen Alltag gewährleisten. Möglicherweise wird aber auch ein gewisses Schubladendenken befördert. Einzelne mathematische Leitideen oder allgemeine mathematische Kompetenzen sind nicht immer eindeutig voneinander abzugrenzen.

Zur umfassenden Beschreibung von Erziehung zur Gewohnheit funktionalen Denkens im Klein'schen Sinne bedarf es bei den aktuellen Formulierungen in den Bildungsstandards durchaus verschiedener allgemeiner mathematischer Kompetenzen bzw. mathematischer Leitideen. Kleins Formulierungen wiesen eine deutlich höhere Komplexität und Abstraktheit auf, eröffneten damit aber auch Möglichkeiten für Fehlinterpretationen.

Eine Realisierung von Reformzielen ist davon abhängig, wie gut es gelingt, entsprechende Teilziele in hinreichender Konkretion in den Curricula zu verankern. Im Gegensatz zu den Veränderungen nach PISA 2000 fanden die Vorschläge der Meraner Reform nur zögerlich Einzug in die Lehrpläne der höheren deutschen Schulen. Während in Süddeutschland bereits 1912 wesentliche Ziele umgesetzt waren, wurden sie in Preußen erst mit der

Neubearbeitung der Lehrpläne von 1925 (Richert'sche Richtlinien) aufgenommen. In den methodischen Bemerkungen zeigten sich erste Ansätze zu einer Verengung des Begriffs:

> *„Der in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellende Funktionsbegriff wird zunächst anschaulich eingeführt, um allmählich schärfer gefaßt und auf der Oberstufe in allgemeiner Form behandelt zu werden“* (Richert 1980, S. 83).

Die Entscheidungen zum Unterrichten von Differential- und Integralrechnung in der Oberstufe delegierten die Kultusbehörden damals an die Lehrkräfte der jeweiligen Schulen. Es sollte damit eine Reform „von unten“ initiiert werden.
Die Reformintentionen nach PISA 2000 lösten dagegen relativ zeitnah verschiedene bildungspolitische Aktionen aus. Kritiker sprechen auch von bildungspolitischem Aktionismus (vgl. Meidinger 2013, S. 24f.). Länderspezifische Curricula wurden im Zusammenhang mit den nationalen Bildungsstandards überarbeitet bzw. neu erstellt.
Die Verankerung von Bildungszielen und Bildungsinhalten in den Lehrplänen reicht noch nicht aus. Für eine erfolgreiche Umsetzung ist genauso wichtig, die Lehrkräfte professionell vorzubereiten und zu begleiten. Im Vergleich zu Zeiten der Meraner Reform hat sich das Repertoire an Informationsquellen deutlich erhöht. Zahlreiche Fachzeitschriften, Datenbanken, Onlineportale etc. bieten vielfältige innovative Ansätze zur Entwicklung von Mathematikunterricht. In erheblichem Maße beeinflussen nach wie vor die in Schulen verfügbaren Lehr- und Lernmittel, insbesondere die Lehrbücher, das Unterrichtsgeschehen. Doch auch mit dem Zugang zu entsprechenden Materialien ist es nicht getan – selbst nicht bei den technischen Möglichkeiten im 21. Jahrhundert.
Bereits zu Zeiten der Meraner Reform erkannte man die Bedeutsamkeit von Aus- und Fortbildung. Klein und viele seiner Kollegen sahen neben der Lehrerausbildung auch in der Lehrerfortbildung einen Schlüssel zu Veränderungen im Mathematikunterricht (siehe Kapitel 4). Auch heute sollten aktuelle Erkenntnisse in der Lehr- und Lernforschung nicht auf die Vermittlung im Rahmen der Ausbildung beschränkt bleiben, sondern auch Gegenstand von Fortbildungen für bereits im Schuldienst tätige Lehrkräfte sein. Im Kapitel 1 wurde gezeigt, dass tradierten Einstellungen und Lehrmethoden ein hohes Verharrungsvermögen zu eigen ist. Ein Ziel von Fortbildungen könnte sein, bei Lehrkräften die Einsicht oder das Bedürfnis nach Auseinandersetzung mit aktuellen fachdidaktischen Fragestellungen entstehen zu lassen. Bestehende subjektive Überzeugungen zur Wissenschaft Mathematik und zu nachhaltigem Mathematikunterricht müssen dabei hinterfragt werden.

Während im Bereich der Fortbildungen keine länderübergreifenden Regelungen existieren, verabschiedete die Kultusministerkonferenz im Jahre 2004 Standards für die Lehrerbildung in Deutschland (vgl. KMK 2004c, 2008).
Nach PISA 2000 wurden auch umfangreiche Maßnahmen zur Schulevaluation sowie zu regelmäßigen Schulleistungsvergleichen beschlossen (vgl. KMK 2006, S. 6ff.). Derartige Instrumente – einschließlich damit einhergehender Verbindlichkeiten – wären zu Beginn des 20. Jahrhunderts weder vorstellbar noch zeitgemäß gewesen.
In einigen Bundesländern kam es zu strukturellen Veränderungen in der gymnasialen Ausbildung: Sie brachen mit der Tradition einer neunjährigen Ausbildung und wechselten, begleitet von kontrovers geführten Diskussionen, zu einer achtjährigen Ausbildung. Gleichzeitig näherten sich die Kultusbehörden einiger Bundesländer der Frage nach zentralen Abiturprüfungen in bestimmten Kernfächern an. Jene Bürgerinnen und Bürger, welche die gegenwärtigen föderalen Strukturen als bildungspolitische Kleinstaaterei werten, sehen darin einen Schritt in die richtige Richtung.
Verschiedene Studien belegen jedoch, dass Schulstrukturen einen eher geringen Einfluss auf den Unterrichtserfolg haben (vgl. Hattie 2013, S. 86ff.; Sälzer u. a. 2013, S. 86). Damit erscheint es sinnvoll, sich stärker auf die inhaltlichen Aspekte von Unterricht zu konzentrieren.

6.2 Ansätze für Veränderungen: Von den Reformideen zu einer Diskussions- und Änderungskultur

Eine Reform ist die grundlegende und konzeptionelle Umgestaltung (oder Neuordnung) eines bestehenden Systems. Im vorangegangenen Kapitel wurden diesbezüglich zwei Reformen gegenübergestellt. Da die Meraner Reform länger zurückliegt, lassen sich deren Auswirkungen besser überschauen als die der jüngeren deutschen Bildungsreform. Inhaltliche, strategische und organisatorische Veränderungen erfordern hinreichend Zeit, um die intendierten Wirkungen an den Schulen zu entfalten. Eine abschließende Beurteilung der Bildungsreformen nach PISA 2000 wäre verfrüht – erste Ergebnisse sind dennoch sichtbar.
Durch PISA rückte schulische Bildung wieder stärker in den Fokus öffentlicher Medien. Während in der breiten Öffentlichkeit vor allem der „Output" von Unterricht kritisch reflektiert wurde, diskutierte man auf schulpolitischer und wissenschaftlicher Ebene über die Faktoren für erfolgreiches Lernen. Dabei wurden auch Ergebnisse empirischer Forschungen einbezogen, um die Wirksamkeit bestimmter Konzepte und Methoden zu beurteilen.

Zu einer dieser Studien gehört die von John Hattie aus dem Jahre 2009. In seiner wissenschaftlich kontrovers diskutierten Synthese von Metaanalysen trug er potentielle Einflussfaktoren für erfolgreiches Lernen zusammen und ordnete sie nach sogenannten Effektstärken (vgl. Hattie 2013, S. 9ff.). Die Effektstärke ist eine Zahl, welche die nachweisbare Auswirkung im Rahmen eines vorgegebenen Versuchsplanes quantifiziert (vgl. Wolf 2010, S. 109). Konkrete pädagogische Situationen zeichnen sich durch ein multifaktorielles Bedingungsgefüge aus, welches jedoch bei Quantifizierungen in standardisierten Tests unzureichend erfasst wird. Dies gilt sowohl für die zugrundeliegenden Basisuntersuchungen wie für deren statistische Zusammenführung (vgl. Brügelmann 2014, S. 41). Bereits im Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe von John Hatties „Visible Learning" (2013) werden diesbezüglich Kritikpunkte aus wissenschaftstheoretischer und methodologischer Sicht eingeräumt. Eine kritische Auseinandersetzung mit dieser Studie aus mathematisch-statistischer Sicht findet sich bei Schulmeister und Loviscach (2014, S. 121ff.).

Bei der Darstellung der Ergebnisse zeigte sich Folgendes: Die reduzierte Komplexität pädagogischer Situationen war eine Stärke, gleichzeitig aber die größte Schwäche dieser Studie. Hatties Ziel war es, die Schlüsselfaktoren für gelingendes Lernverhalten zu ergründen (vgl. Hattie 2013, S. 7). Evidenzbasierung könnte damit folgende Deutung erfahren: Lehrende experimentieren im eigenen Unterricht und prüfen konkrete Strategien aus ihrer Erfahrung kritisch (vgl. Brügelmann 2014, S. 41). Brügelmann sah damit die tradierten Hierarchien in ihr Gegenteil verkehrt:

> *„Die persönliche Erfahrung der Praktiker und Praktikerinnen und kontextbezogene Fallstudien sind nicht Vorstufe der eigentlichen Forschung in Großstudien, sondern die Nagelprobe für deren Bewährung in einer konkreten Situation"* (Brügelmann 2014, S. 46).

Statistische Befunde liefern damit lediglich Hypothesen. Ob sie gelten, muss an den speziellen Lernsituationen und an den Lerngruppen erprobt werden (vgl. Brügelmann 2014, S. 46).

Hattie kategorisierte seine Einflussfaktoren für schulisches Lernen nach sechs thematischen Gruppen: Lernende, Elternhaus, Schule, Lehrperson, Curricula, Unterrichten. Als stärkste Prädikatoren erwiesen sich dabei Lehrperson, gefolgt von Curricula und Unterrichten (vgl. Hattie 2013, S. 37f.). In der Metaanalyse wurde, in Bezug auf die Lehrperson und das Unterrichten, folgenden Faktoren eine besondere Bedeutung beigemessen (vgl. Reiss u. a. 2013, S. 124):

- das Bewerten unterrichtlicher Situationen durch Lehrpersonen im Hinblick auf eine mögliche Korrektur der eigenen Arbeit,
- das Geben von Rückmeldungen zu individuellen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler,
- das Zeigen positiver Erwartungshaltungen der Lehrpersonen,
- das Gestalten eines kognitiv aktivierenden Unterrichts.

Trotz der Einwände zur Methodik an Hatties Studie konnten Fachdidaktiker feststellen, dass eine Vielzahl dieser Ergebnisse mit dem aktuellen Forschungsstand zu Unterrichtseffektivität übereinstimmt (vgl. Reiss u. a. 2013, S. 124; Reiss/Bernhard 2014, S. 98). Davon ausgehend leiteten Reiss u. a. (2013, S. 150f.) folgende Konsequenzen für die weitere Unterrichtsentwicklung ab:

- intensivere und individuellere Unterstützung der Lernenden im Lernprozess,
- verstärkter Einsatz von Aufgaben mit höherem kognitiven Anregungspotential,
- stärkere Herausforderung besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler (z. B. durch anspruchsvollere Aufgaben),
- intensivere Rückmeldungen von Lehrpersonen zu Stärken und Schwächen der Lernenden.

Im Folgenden werden nun ausgewählte fachdidaktische und bildungswissenschaftliche Handlungsfelder für die künftige Entwicklung des mathematischen Unterrichts skizziert und diskutiert. In den nachfolgenden Punkten spiegeln sich auch die von Reiss u. a. abgeleiteten Orientierungen wider.

Als Handlungsfelder werden nun konkret betrachtet:

(1) Entwicklungspotentiale für Bildungsstandards,
(2) Entwicklung von Basiskompetenzen bei Schülerinnen und Schülern,
(3) Realitätsnaher Mathematikunterricht,
(4) Instruktionsstrategien und Unterrichtsmethoden,
(5) Computergestütztes Lernen,
(6) Entwicklungen zu zentralen Prüfungen.

(1) Entwicklungspotentiale für Bildungsstandards

Klieme bezeichnet die Bildungsstandards als Motor der pädagogischen Entwicklung. Als verbindliche Grundlage für länderspezifische Lehrpläne und Curricula sollen sie zur unterrichtlichen Qualitätsentwicklung beitragen. Sie orientieren auf verbindliche Ziele und bieten den Lehrkräften mit dem Kompetenzmodell ein Referenzsystem für ihr professionelles Handeln (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 15).

Als entscheidendes Kriterium für den Wert eines Modells nennt Sill (2007a, S. 413) den Grad seiner Konstruktivität zur Bewältigung schulpraktischer Probleme. Betrachtet man die Bildungsstandards aus dieser Perspektive, so sind sie für praktisch tätige Lehrkräfte nur eingeschränkt hilfreich. Sowohl bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen als auch bei den mathematischen Leitideen sind mehrdeutige Formulierungen und zahlreiche inhaltliche Überschneidungen zu verzeichnen (vgl. Jahnke 2007, S. 314ff.; Sill 2007a, S. 417ff.). Für den Mittleren Schulabschluss genügen nach Einschätzung von Sill (2007a, S. 415ff.) weder die allgemeinen mathematischen Kompetenzen noch die mathematischen Leitideen vollumfänglich den in Kapitel 5.2.1 dargestellten Merkmalen guter Bildungsstandards (vgl. Klieme u. a. 2007, S. 14ff.).
Besonders kritisch schätzt Jahnke (2007, S. 314ff.; 2013, S. 91) die Qualität der beigefügten Aufgaben zum Mittleren Schulabschluss ein. Eine Analyse dieser Aufgaben hinsichtlich einer Zuordnung zu allgemeinen Kompetenzen und Leitideen erscheint nicht immer zwingend und ist zur Bearbeitung von vernachlässigbarer Bedeutung (vgl. Jahnke 2007, S. 315).
Nachhaltige Entwicklung von Unterrichtskultur ist davon abhängig, wie gut es gelingt, theoretische Ansätze im real stattfindenden Mathematikunterricht zu implementieren. Grundsätzlich scheinen Aufgabenbeispiele besonders dafür geeignet, Lehrerinnen und Lehrern Tendenzen in der Unterrichtsentwicklung zu verdeutlichen. Es wäre jedoch wünschenswert, ihnen nicht nur unkommentierte Aufgabensets zur Verfügung zu stellen. Die Aufgaben könnten nach grundlegenden Zielen des Unterrichts geordnet werden. Weiterhin wären auch Hinweise zur Planung konkreter Lernsituationen oder zur Einordnung in längerfristige kumulative Lernprozesse denkbar (vgl. Sill 2007a, S. 424ff.). In der Literatur gibt es diesbezüglich Ansätze, jedoch fehlt meist eine Vernetzung mit konkreten curricularen Festlegungen. Entsprechend kommentierte Aufgaben könnten ein Element bei der Überarbeitung und Weiterentwicklung von Bildungsstandards sein.
Weitere Ressourcen liegen in einer intensiveren Kooperation zwischen Universitäten, Landesinstituten für Schulentwicklung, Ausbildungsstätten der zweiten Phase der Lehrerausbildung und den Schulverwaltungen.

(2) Entwicklung von Basiskompetenzen bei Schülerinnen und Schülern

Basiskompetenzen sollten situationsunabhängig und flexibel verfügbar sein. Dies ist insbesondere auch Voraussetzung für einen produktiven Einsatz digitaler Hilfsmittel. Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen sollten demnach prinzipiell hilfsmittelfrei verfügbar sein (vgl. Bruder u. a. 2015, S. 117). Dazu äußerten die Lehrkräfte in den zurückliegenden Jahren – auch aufgrund bestimmter Anforderungen in zentralen Prüfungen sowie der Schnittstelle zu Studium/Berufsausbildung – ihre Verunsicherung. Der Begriff Hilfsmittelfreiheit soll hier nicht definiert werden. Es bleibt die Frage, inwieweit eine hilfsmittelfreie Verfügbarkeit konkreter Begriffe und Verfahren zu einem verständigen Lernen von Mathematik beitragen kann. Eine, von dieser Fragestellung abgekoppelte, Identifikation einzelner schriftlich durchzuführender Rechenalgorithmen würde eindeutig zu kurz greifen (vgl. Bruder u. a. 2015, S. 115f.). Bezüglich des Spannungsfeldes zwischen hilfsmittelfreiem Wissen und Können und dem Einsatz digitaler Medien formulierten Bruder u. a. folgende Thesen:

- *„Dass der Einsatz von Taschenrechnern und anderen digitalen Werkzeugen im Unterricht zu geringeren Fertigkeiten führt, ist das falsche Argument für die Forderung nach hilfsmittelfreier Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens“* (Bruder u. a. 2015, S. 115).
- *„Hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen wird auch durch einen sinnvollen Einsatz digitaler Hilfsmittel geprägt“* (Bruder u. a. 2015, S. 116).
- *„Hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen unterstützt eine fachlich angemessene Absicherung mathematischer Entdeckungen“* (Bruder u. a. 2015, S. 116).

Um Grundwissen und Grundkönnen ausbilden und wachhalten zu können, muss definiert werden, was darunter zu verstehen ist. Begriffliche Annäherungen können aus unterschiedlichen Perspektiven erfolgen: aus fachwissenschaftlich-systematischen, allgemeinbildend-reflexionsorientierten, nützlichkeits-anwendungsorientierten. Festlegungen sollten das Resultat eines fachlich fundierten Entscheidungsprozesses sein, bei dem bestimmte Forderungen und Erwartungen gegeneinander abgewogen werden müssen (vgl. Bruder u. a. 2015, S. 112f.). Weiterhin ist eine Differenzierung hinsichtlich des Grades der Verfestigung bzw. der Verfügbarkeit vorzunehmen. Im Kompetenzebenenmodell von Sill und Sikora (2007b, S. 123ff.) werden für eine langfristige Verfügbarkeit drei Beherrschungsgrade angegeben:

- sicheres Wissen und Können (permanente Verfügbarkeit ohne vorherige Reaktivierung auch außerhalb schulischer Kontexte),
- reaktivierbares Wissen und Können (durch verschiedene Formen der Reaktivierung kann ein Beherrschungsgrad wiederhergestellt werden),
- exemplarisches Wissen und Können (episodenhafte Verfügbarkeit mit eingeschränkter Relevanz für Leistungsermittlungen).

Bei allen Bestrebungen, den Mathematikunterricht durch offene und phänomenologische Zugänge, durch Erkundungen und Nachentdeckungen, durch Phasen des Modellierens und Problemlösens zu bereichern, sollten der Aufbau und das Wachhalten eines geordneten und flexibel anwendbaren Wissens wieder stärker betont werden (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 166). Bestätigung findet dieser Ansatz durch kognitionspsychologische Forschungen. Es konnte gezeigt werden, dass sich – innerhalb eines mathematischen Themengebietes – konzeptuelles und prozedurales Wissen wechselseitig positiv beeinflussen (vgl. Stern/Felbrich/Schneider 2010, S. 525ff.).

(3) Realitätsnaher Mathematikunterricht

Mathematik verkörpert eine besondere Kultur des Denkens. Sie ist eine Wissenschaft mit eigener Ästhetik und Schönheit, welche sich – wie Literatur oder Musik – nicht jedem gleichermaßen erschließt. Andererseits ist sie außerordentlich funktional: Sie hilft mit universellen Modellen, Phänomene und Probleme der realen Welt zu strukturieren und zu verstehen. Guter Mathematikunterricht schenkt beiden Aspekten hinreichende Bedeutung (vgl. Büchter/Henn 2015, S. 26; Winter 1995; Heymann 1996). Schülerinnen und Schüler müssen lernen, Mathematik auf reale Phänomene zu übertragen. Dabei handelt es sich um einen spiralartigen Entwicklungsprozess, bei dem sie ihre Erfahrungen aus der realen Welt stets mit ihrem individuellen Vorwissen verknüpfen. Die Steuerung dieses Prozesses ist eine zentrale Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer.

Da Fragestellungen aus der Alltagswelt häufig zu komplex oder mit schulischer Mathematik nicht zu beantworten sind, stößt die geforderte Authentizität an Grenzen. Für Jahnke (2005, S. 273f.) sind Aufgaben stets didaktische Konstrukte, welche als solche von Lernenden auch identifiziert werden können. Sinnvoll sind reflektierte Elementarisierungen: Sie vereinfachen gegebene Probleme hinreichend, ohne ein verzerrtes Bild von Mathematik und ihren Anwendungsmöglichkeiten zu geben.

Realitätsnahe Aufgaben weisen einen bestimmten Grad an Offenheit auf und erfordern Kompetenzen im mathematischen Modellieren. Beide Aspekte sollten sowohl Lernende als auch Lehrende als Prozess begreifen. Lernende und Lehrende sollten trainieren, die Welt durch eine „mathematische Brille“ zu sehen. Phänomene können durch die Lehrpersonen vorgegeben oder durch die Lernenden aufgespürt werden. Funktionale Zusammenhänge können dabei auf qualitativer oder quantitativer Stufe durch Zuordnungen erfasst und ihr Änderungsverhalten diskutiert werden. Die digitalen Werkzeuge ermöglichen zunehmend, realistisches Zahlenmaterial zu bearbeiten. Weiterhin sollten Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, die Anwendung konkreter Modelle kritisch zu reflektieren und prinzipielle Grenzen von Modellierungen abzuleiten (vgl. Büchter/Henn 2015, S. 39f.).

(4) Instruktionsstrategien und Unterrichtsmethoden

Die Qualität von Unterricht definiert sich darüber, wie sie die individuelle Entwicklung von Lernenden beeinflusst. Zur Analyse dieser Qualität erscheint es nicht ausreichend, nur sogenannte Oberflächenstrukturen (z. B. Arbeits- und Sozialformen oder Organisationsmerkmale) zu betrachten (vgl. Heinze/Lipowsky/Ufer 2015, S. 419ff.). Als bedeutungsreicher erwiesen sich tieferliegende Strukturen des Unterrichts. Empirische Forschungen identifizierten folgende lernförderliche Tiefenstrukturen: kognitive Aktivierung, metakognitive Förderung, konstruktive Lernunterstützung sowie inhaltliche und strukturelle Klarheit.

Ob Lernprozesse nachhaltig sind, wird folglich weniger durch die organisatorische Gestaltung, als vielmehr durch die fachliche Strukturierung der Lernsituation entschieden (vgl. Heinze/Lipowsky/Ufer 2015, S. 424). Vom Hofe, Lotz und Salle (2015, S. 158) betonen, mit Verweis auf die Forschungen von Sierpinska (1992, S. 25ff.), wie bedeutend eine aktive Auseinandersetzung der Lernenden mit geistigen Hindernissen oder Sichtbeschränkungen ist. Verstehen ist untrennbar mit dem Überwinden spezifischer Denkhürden verbunden. Lernprozesse sollten nicht soweit „geglättet“ werden, dass Denkhindernisse bewusst ausgeklammert bzw. umgangen werden. Schülerinnen und Schüler sollten mit Problemen ringen, sie überwinden oder (vorerst) auch an ihnen scheitern. Gedankliche Sackgassen sollten als produktive Schritte bei der Problembewältigung akzeptiert werden (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 158). Nicht zuletzt können derartige Erfahrungen bei Lernenden das Bild von Mathematik positiv prägen.

Kognitive Aktivierung zählt aktuell zu den besonders intensiv diskutierten Qualitätsdimensionen von Unterricht. Kognitive Aktivitäten von Lernenden sind nicht direkt beobachtbar. Daher schätzt man ein, inwieweit konkrete Unterrichtssituationen zu lernwirksamen Denkaktivitäten anregen. Für Heinze, Lipowsky und Ufer (2015, S. 419f.) ist kognitive Aktivierung ein Konstrukt von Unterrichtsmerkmalen, das zu fachlich vertieften Auseinandersetzungen mit Lerngegenständen anregt. Als entsprechende Indikatoren benennen sie:

- Niveau der im Unterricht eingesetzten Aufgaben,
- Aktivierung von Vorwissen,
- evolutionärer Umgang mit Schülervorstellungen,
- nicht-rezeptiver Charakter des zugrundeliegenden Lehr- und Lernverständnisses.

Es konnte weiterhin gezeigt werden, dass dieses Aktivierungspotential relativ stark vom fachlichen und fachdidaktischen Wissen der Lehrpersonen abhängig ist (vgl. Heinze/Lipowsky/Ufer 2015, S. 421).

Die Arbeits- und Sozialformen sind zentrale Merkmale bei der Inszenierung von Unterricht. Direkte kausale Beziehungen zwischen hohen Mathematikleistungen von Lernenden und dem zeitlichen Anteil bestimmter Sozialformen konnten nicht nachgewiesen werden (vgl. Heinze/Lipowsky/Ufer 2015, S. 413). Insbesondere konnte keine Überlegenheit offener Lernformen hinsichtlich der mathematischen Leistungsentwicklung belegt werden (vgl. Heinze/Lipowsky/Ufer 2015, S. 416f.).

Vergleichbare Ergebnisse liefert auch die Metastudie von Hattie. Studien zu offenen Lernformen fasste Hattie in der Domäne „Offene Klassenzimmer/Lehr- und Lernformen" zusammen. Dabei wurde jedoch die Öffnung von Unterricht stärker aus organisatorischer und methodischer Sicht definiert. Die resultierenden Effektstärken waren äußerst gering (d = 0,01). Eine lernförderliche Wirkung konnte nicht belegt werden (vgl. Hattie 2013, S. 105f.). Potentiale ergeben sich eher aus einer Öffnung vom Fach aus, z. B. durch die Öffnung der Aufgaben hinsichtlich der Anzahl der Lösungswege, der Anzahl der Lösungen, der Vorgabe des Datenmaterials (vgl. Katzenbach 2006, S. 63f.).

In der Tradition des dialektischen Ansatzes von Klingberg (1982, S. 53ff.) versuchten sich in der jüngeren Vergangenheit einige Autoren an einer Justierung des didaktischen Grundzusammenhangs von Lernen und Lehren. Feindt und Junghans (2016, S. 18f.) sehen Lehren als eine „vergessene Kategorie" der Unterrichtsentwicklung. Sie sollte im Zuge von Unterrichtsentwicklung wieder stärker Beachtung finden.

Wellenreuther (2016, S. 82f.) spricht sich ebenfalls für eine steuernde Wirkung durch die Lehrperson aus. Dabei unterscheidet er deutlich zwischen der Methode der „direkten Instruktion" und einem kritisch zu wertenden Frontalunterricht. Die direkte Instruktion kann als adaptives Vorgehen gewertet werden, da sich die Wahl einzelner Unterrichtsschritte am aktuellen Lernstand der Schülerinnen und Schüler orientiert. Die Wissensstrukturierung wird so zur zentralen Aufgabe der Lehrperson.

Hattie (2013, S. 287) spricht sich für einen aktiven und geführten Unterricht aus, in dem die Lehrperson als „activator" erscheint. In der von Beywl und Zierer überarbeiteten Ausgabe von „Visible Learning" wird „activator" mit „Regisseur" übersetzt. Im Gegensatz dazu wählt Terhart (2014, S. 19) für „activator" den treffenderen Begriff „Herausforderer". Ein aktiver und geführter Unterricht ist nach Hatties (2013, S. 289) Interpretation wesentlich effektiver als ungeführter und erleichternder Unterricht.

Hattie stellte auch bestimmte Lehrertypen gegenüber: Der Kategorie „activator" (Faktoren: Feedback, direkte Instruktion, herausfordernde Ziele) konnte eine durchschnittliche Effektstärke von d = 0,59 (vgl. Hattie 2013, S. 287) zugeordnet werden. Die Kategorie „facilitator" (von Terhart [2014, S. 19] mit „Erleichterer" übersetzt) erzielte mit Faktoren wie „Simulationen und Simulationsspiele“ oder „Forschendes Lernen“ durchschnittlich nur eine Effektstärke von d = 0,23 (vgl. Hattie 2013, S. 287). Grundsätzlich favorisiert Hattie einen an Schülerinnen und Schülern orientierten, aber klar durch die Lehrperson gesteuerten Unterricht. Er formulierte zugespitzt: *„Konstruktivismus ist eine Form der Erkenntnis und keine Form des Lehrens. [Man solle] den Aufbau konzeptuellen Wissens nicht mit der Modeerscheinung des Konstruktivismus verwechseln“* (Hattie 2013, S. 286f.). Um konzeptionelles Wissen aufzubauen, sollte Lernen aus Sicht der Schülerinnen und Schüler betrachtet werden. Dabei gelten folgende Prämissen (vgl. Hattie 2013, S. 287):

- alle Lernenden sind aktiv,
- alles, was sie lernen, ist sozial konstruiert,
- Lernende müssen Wissen selbst erzeugen oder wiederherstellen.

Bezüglich der methodischen Gestaltung des Unterrichts plädieren Feindt und Junghans (2016, S. 18f.) für eine Ausgewogenheit der vier Grundformen nach Meyer (2015, S. 38): Gemeinsamer Unterricht, Individualisierender Unterricht, Direkte Instruktion und Kooperativer Unterricht. Eine Ausgewogenheit dieser vier Formen scheint nach Ansicht von Feindt und Junghans nicht zu genügen. Vielmehr ist ausschlaggebend, wie diese Grundformen im Unterricht vernetzt werden (Wechseln sie einander ab oder werden sie miteinander verbunden? Geschieht das innerhalb eines einzelnen Fachs oder in verschiedenen Fächern?). Zur individuellen Entfaltung des Lernens braucht es neben den vernetzten Grundformen ein weiteres verbindendes Element. Für Feindt und Junghans (2016, S. 18f.) ist dies der gemeinsame Unterrichtsgegenstand. Dieser ist grundlegende Voraussetzung, um Ergebnisse im Unterricht überhaupt sichern zu können.

(5) Computergestütztes Lernen

Die digitalen Medien verändern seit Jahrzehnten das Lehren und Lernen von Mathematik. Seit den 1990er Jahren stehen Computeralgebrasysteme, dynamische Geometriesysteme, Tabellenkalkulationsprogramme und programmierbare Taschenrechner zur Verfügung. Handlungen, welche vorher den realen Mathematikunterricht bestimmten, können nun teilweise an Maschinen übertragen werden. Diese Prozesse vollziehen sich in einem hohen Tempo.

Hischer und Lambert (2002, S. 98ff.) leiten daraus die Frage nach einer grundsätzlichen Zielorientierung von Mathematikunterricht ab. Sie begreifen die von ihnen als Krise bezeichnete Phase als Möglichkeit zur Herbeiführung einer entscheidenden Wende im Mathematikunterricht (siehe Kapitel 2.2). Dies erfordert jedoch einen reflektierten Einsatz digitaler Medien: Dynamische Geometriesysteme können geometrische Objekte und Sachverhalte visualisieren. Der Forderung von Felix Klein nach einer Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens stehen im Vergleich zu 1905 ungeahnte technische Möglichkeiten gegenüber.

In den Lernbereichen zu Funktionen eröffnen digitale Medien vielfältige Möglichkeiten zur Auseinandersetzung mit mathematischen Problemstellungen. Beispielhaft seien genannt (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 157):

- Visualisieren der Darstellungsformen von Funktionen, insbesondere von Kurvenverläufen,
- interaktives Erfahrbarmachen von Zusammenhängen und Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Darstellungsformen,
- Nachvollziehen von Auswirkungen bei Veränderungen in den Funktionstermen in der grafischen Darstellung (auch umgekehrt),
- Identifizieren von Grenzfällen bei Funktionsscharen,
- dynamisches Bestimmen von Ortslinien,
- Untersuchen des Einflusses von Parametervariationen.

Die Möglichkeiten digitaler Medien dürfen jedoch nicht dazu führen, wesentliche Schritte im Erkenntnisprozess der Lernenden zu unterbrechen oder zu substituieren.

Für einen rechnergestützten Umgang mit Funktionen beschreiben vom Hofe, Lotz und Salle (2015, S. 163ff.) zwei komplementäre Ansätze: Beim „manipulierenden Umgang“ betrachtet man Funktionen in einer „eingekapselten“ Form und weitgehend abstrahierend von lokalen Eigenschaften. Anders beim „reflektierenden Umgang“: Hier werden Beziehungen zwischen den objektartigen Repräsentationen (Tabelle, Gleichung, Graph) und dem zugrundeliegenden funktionalen Zusammenhang hergestellt. Die „Einkapselung“ wird also rückgängig gemacht (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 163f.).

Computeralgebrasysteme bieten zahlreiche Möglichkeiten für einen manipulierenden Umgang mit Funktionen. So können beispielsweise charakteristische Punkte des Graphen einer Funktion angezeigt, Umkehrfunktionen erzeugt oder Einflüsse von Parametern beobachtet werden, ohne dass die Lernenden tieferliegende inhaltliche oder funktionale Zusammenhänge kennen müssten. Ein Manipulieren auf Objektebene kann nur bedingt zur Ausbildung von Verständnis beitragen. Vielmehr bedarf es Aufgabenstellungen, welche zu einem reflektierenden Umgang herausfordern (z. B. Aufgaben zum Visualisieren und Modellieren). Vom Hofe, Lotz und Salle plädieren für die Verknüpfung von manipulierendem und reflektierendem Umgang. Sie sehen im Standpunktwechsel zwischen Prozess- und Objektauffassung die Basis für einen verständigen Umgang mit Funktionen (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 164).

Es existiert nur wenig empirisch gesichertes Wissen zu den Möglichkeiten und Grenzen beim Einsatz von Computern im Mathematikunterricht, insbesondere beim Modellieren (vgl. Kaiser u. a. 2015, S. 373). Für das computergestützte Lernen gibt es ebenfalls viele offene Forschungsfragen (vgl. Kaiser u. a. 2015, S. 373):

- Wie beeinflussen digitale Werkzeuge die Unterrichtskultur im Mathematikunterricht?
- Welche Folgen ergeben sich aus der Verwendung digitaler Werkzeuge für die Breite von Modellierungsproblemen?
- Wann ermöglichen oder verhindern digitale Werkzeuge Lerngelegenheiten?

(6) Entwicklungen zu zentralen Prüfungen

Seit einigen Jahren verstärken sich in Deutschland die Bestrebungen in Richtung zentraler und grundsätzlich vergleichbarer Prüfungen (Abitur). Aufgabenformate zentraler Prüfungen beeinflussen jedoch in nicht unerheblichem Maße die Unterrichtswirklichkeit, vor allem in den höheren Jahrgangsstufen. Die besondere Betonung prozessorientierter Kompetenzen in den Bildungsstandards und Lehrplänen hat die Tore für einen realitätsnahen Mathematikunterricht geöffnet. Zentrale Prüfungen können nach Einschätzung von Büchter und Henn (2015, S. 45f.) diesbezüglich sogar kontraproduktiv wirken: Es zeichnen sich Tendenzen zu geschlossenen Anwendungsaufgaben und zu ganz bestimmten Aufgabentypen ab. Diese lassen durch eine „Einkleidung" nicht sofort erkennen, dass beispielsweise Elemente einer tradierten Kurvenuntersuchung geprüft werden. Derartige Aufgaben begünstigen Zerrbilder realer Modellierungsprozesse und verhindern einen realitätsnahen Mathematikunterricht. Nach Büchter und Henn (2015, S. 45f.) können sie sogar zu einer „Aushöhlung" von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht führen. „Echte" Modellierungsaufgaben mit entsprechender Offenheit (unterschiedliche Annahmen, verschiedene Ansätze und Lösungswege, unterschiedliche Lösungen, Reflexion der Grenzen von Modellannahmen) passen hervorragend für Lernsituationen. Unter den derzeitigen Rahmenbedingungen eignen sie sich aber nur bedingt für Leistungsermittlungen (vgl. Büchter/Henn 2015, S.45f.). Ein Ziel mathematikdidaktischer Forschung könnte sein, Prüfungsformate so zu konzipieren, dass sie in stärkerem Maße mathematische Unterrichtsentwicklung stützen.

7 Funktionales Denken als Leitgedanke im Mathematikunterricht – didaktische Ansätze und unterrichtspraktische Überlegungen

Heymann (1996, S. 277) kritisierte, dass der Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden Schulen weder wichtigen gesellschaftlichen Anforderungen noch den individuellen Qualifikationsinteressen der meisten Schülerinnen und Schüler gerecht würde. In den 1990er Jahren setzte zudem auch eine rasante Entwicklung im Bereich der digitalen Medien ein, welche tradierte Inhalte des Mathematikunterrichts zunehmend in Frage stellte (vgl. Hischer/Lambert 2002, S. 98). Schließlich zeigten die Ergebnisse bei TIMSS (vgl. Baumert u. a. 1997) und PISA (vgl. Baumert u. a. 2001) Schwachstellen des Mathematikunterrichts in Deutschland auf.

Der Mathematikdidaktik erwuchs daraus die Aufgabe einer Zielbestimmung für die grundlegende Ausrichtung eines zukünftigen mathematischen Unterrichts, der den Erfordernissen einer zeitgemäßen und nachhaltigen Allgemeinbildung gerecht wird.

Die Ausführungen in diesem Kapitel sollen belegen, welches Potential das funktionale Denken für die weitere Entwicklung des Mathematikunterrichts hat.

7.1 Vom intuitiv-deterministischen zum funktionalen Denken

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Bedeutung funktionalen Denkens für die weitere Entwicklung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts erörtert. Diese Überlegungen sollen nun in die unterrichtliche Praxis übertragen werden.

Die Förderung funktionalen Denkens ist Bestandteil eines komplexen Prozesses der Entwicklung von Unterricht. Deshalb soll die Förderung funktionalen Denkens auch nicht isoliert betrachtet werden; sie wird eingebunden in ein unterrichtliches Gesamtkonzept (siehe Abbildung 11).

Unterrichtsprozesse, insbesondere auch die Entwicklung funktionalen Denkens, werden durch Einstellungen und Überzeugungen von Lehrenden, aber auch von Lernenden beeinflusst. In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass Vorstellungen und Bilder von Mathematik und Mathematikunterricht nicht nur als eine wichtige Zielperspektive anzusehen sind, sie besitzen auch eine regulierende und selektierende Funktion. Bilder von Mathematik als Wissenschaft, Überzeugungen zum Unterrichten von Mathematik sowie Selbstkonzepte durchdringen sich nicht nur wechselseitig; sie werden auch durch verschiedene individuelle und gesellschaftliche Faktoren beeinflusst.

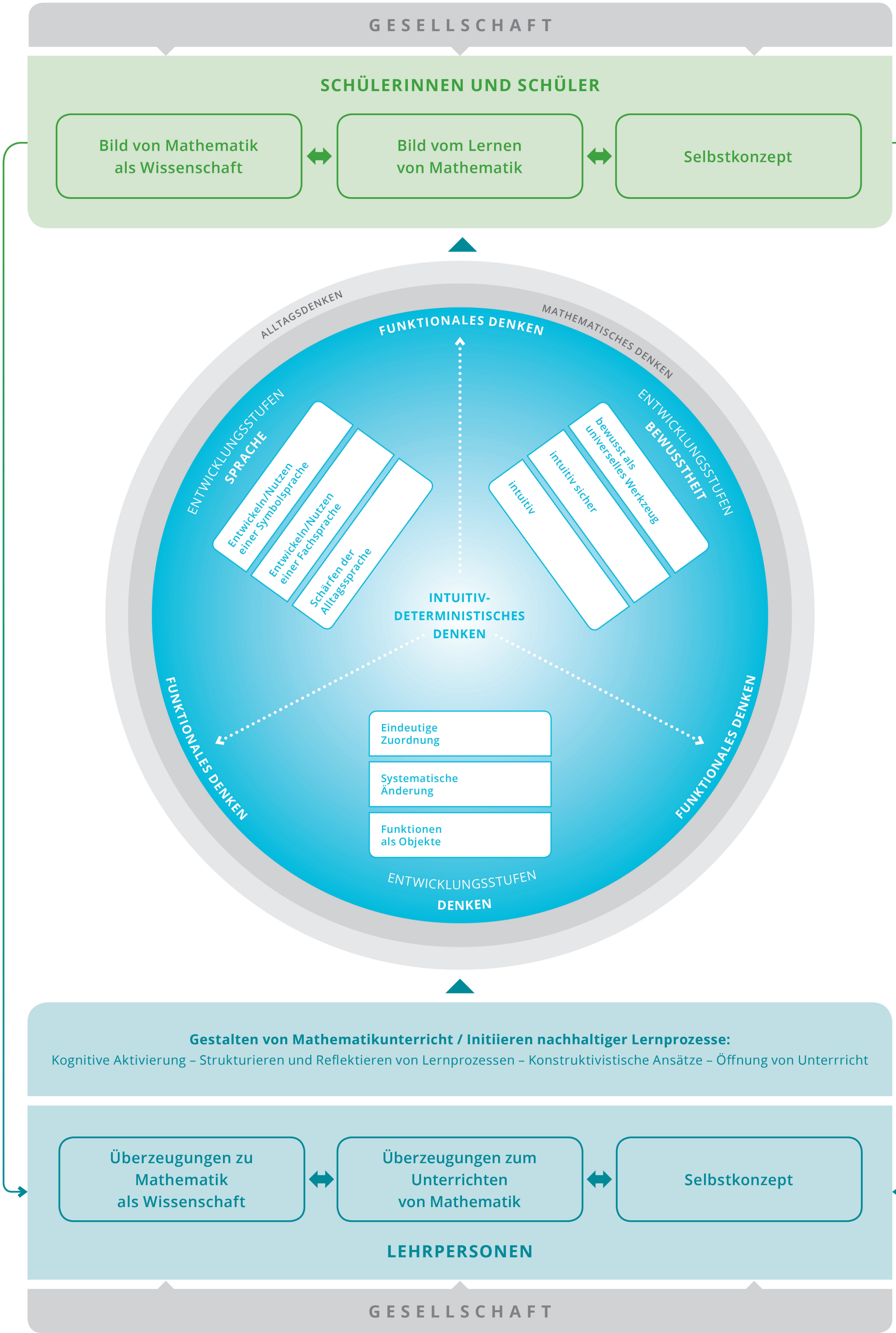


Abb. 11 Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens

Zu den individuellen Faktoren bei Lehrpersonen zählen berufsbiografische Aspekte wie der aktuelle Kenntnisstand zu fachlichen, fachdidaktischen und bildungswissenschaftlichen Fragestellungen sowie die Befähigung zur Reflexion und Evaluation des eigenen Unterrichts. Als gesellschaftliche Rahmenbedingungen seien curriculare Vorgaben und insbesondere auch Anforderungen in zentralen Prüfungen und Lernstandserhebungen, Angebote der Lehrerbildung oder auch Reflexionen zur Bedeutsamkeit mathematischer Bildung in der Öffentlichkeit angeführt. Die durch gesellschaftliche Rahmenbedingungen determinierten Überzeugungen von Lehrpersonen zählen zu wesentlichen Ansatzpunkten für Unterrichtsentwicklung.

Ebenso wie Lehrpersonen besitzen auch Schülerinnen und Schüler ein Bild von Mathematik, von Mathematikunterricht sowie ein entsprechendes Selbstkonzept. Auch diese Bilder, einschließlich der damit verbundenen Einstellungen und Überzeugungen, beeinflussen sich gegenseitig und werden vorrangig durch den erlebten Unterricht, aber auch durch verschiedene gesellschaftliche Faktoren beeinflusst (siehe auch Kapitel 2.3.3 und 2.3.4). Da sowohl das Selbstkonzept als auch die Bilder zu Mathematik und Mathematik-Lernen individuelle Lernprozesse beeinflussen, kann deren Formung und Entwicklung ebenso als allgemeines Ziel des Mathematikunterrichts angesehen werden.

Veränderungen in den Überzeugungen der Lernenden (z. B. Akzeptanz von innovativen Lernsituationen) können ihrerseits auch auf Überzeugungen von Lehrpersonen zurückwirken und somit nachfolgende Lernprozesse positiv beeinflussen. Dies wiederum könnte Lehrkräfte motivieren, Veränderungen in ihrer Unterrichtsgestaltung schrittweise weiter zu entwickeln.

In Kapitel 2 konnte gezeigt werden, dass Überzeugungen von Lehrpersonen ihre Wirkung auf Schülerinnen und Schüler über die Gestaltung unterrichtlicher Lernprozesse entfalten (vergleiche Abbildung 2). Die Konzipierung konkreter Lernsituationen wird somit zum Ansatz für Unterrichtsentwicklung, bei dem die Förderung funktionalen Denkens als ein Baustein gesehen werden kann. Die Förderung funktionalen Denkens bildet somit den Kern des Rahmenmodells (siehe Abbildung 11).

Zur Beschreibung von Veränderungen in der Fähigkeit zum funktionalen Denken werden spezifische Merkmale betrachtet und im Modell durch Merkmalsausprägungen in Form von Entwicklungsstufen untersetzt. Die ausgewählten Merkmale Denken, Sprache und Bewusstheit werden in Kapitel 7.1.2 genauer erläutert.

7.1.1 Allgemeine didaktische Ansätze zur Behandlung funktionalen Denkens

Die Begriffe funktionales Denken und Funktionen sind eng miteinander verbunden. In der didaktischen Literatur finden sich zahlreiche Ansätze zur Einführung des Funktionsbegriffes und zu einer vernetzenden Behandlung funktionaler Zusammenhänge. Im Weiteren werden ausgewählte Aspekte der Unterrichtsgestaltung zum Thema Funktionen überblicksmäßig dargestellt:

Ausbildung von Grundvorstellungen

Die Ausbildung von adäquaten Grundvorstellungen ist eine wesentliche Voraussetzung für verständnisvolles und nachhaltiges Lernen. Grundvorstellungen sind die Nahtstelle zwischen realen Situationen und der Mathematik (primäre Grundvorstellungen) sowie zwischen unterschiedlichen innermathematischen Darstellungsebenen (sekundäre Grundvorstellungen). Vom Hofe, Lotz und Salle (2015, S. 166) betonen, dass funktionale Betrachtungen mit steigender Komplexität zunehmend sekundäre Grundvorstellungen erfordern. Die in Kapitel 3.1.4 dargestellten Kategorisierungen funktionalen Denkens nach Vollrath (1989) lassen sich auf mentaler Ebene auch als funktionale Grundvorstellungen deuten – als Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung und Objektvorstellung. Ohne an konkrete Repräsentanten gebunden zu sein, lassen sich die jeweiligen Grundvorstellungen auf jede Darstellungsform einer Funktion anwenden. Die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern, derart vernetzt zu denken, ist ein Indiz für Verstehen. Unabdingbare Grundlage für das Erzeugen derartiger Vernetzungen bildet ein spezifisches Basiswissen zu Funktionen und ihren Darstellungsformen.

Hußmann und Laakmann (2011, S. 5) greifen bezüglich der Grundvorstellungen zu Funktionen auf das Modell von Vollrath (1989) zurück, welches die Ebenen Zuordnungs-, Änderungs- und Objektaspekt unterscheidet. In ihrem Modell verknüpfen sie die Grundvorstellungen in Form dieser Ebenen mit konkreten Darstellungsformen von Funktionen. Dieses Modell ermöglicht, ein breites Spektrum an Darstellungen mit den verschiedenen Aspekten des Funktionsbegriffes zu kombinieren und somit ein tragfähiges Begriffsverständnis zu fördern. Beispiele zur Vernetzung dieser Grundvorstellungen, vor allem für die Orientierungsstufe, geben Leuders und Prediger (2005, S. 4ff.). Ansätze zur Ausbildung normativer Grundvorstellungen, insbesondere zu Logarithmen und Logarithmusfunktionen, liefert Weber (2013, S. 89).

Frühzeitiger Umgang mit funktionalen Zusammenhängen

Funktionales Denken beginnt nicht erst mit der Einführung des Funktionsbegriffes. Ein naiver und intuitiver Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten findet für Büchter (2008, S. 7) bereits vor der Einschulung statt. Jansen (2008, S. 12ff.) beschreibt für Grundschülerinnen und -schüler erste Einsichten in die Rechengesetze durch ein funktionales Verständnis von Operationen mit Zahlen. Leuders und Prediger (2005, S. 7) nennen Beispiele für die fünften bis siebten Klassen.

Zugänge zum Funktionsbegriff (vom intuitiven Zugang mit funktionalen Zusammenhängen über Vertiefung und Verschärfung zum Funktionsbegriff)

Zur Einführung des Funktionsbegriffes besteht in der Fachdidaktik folgender Konsens: Anstatt die Definition vorzugeben, eine rasche Erarbeitung mit „gekünstelten" Zuordnungsbeispielen eingeschlossen, sollten Schülerinnen und Schülern langfristig Erfahrungen mit entsprechenden Phänomenen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik ermöglicht werden. Neben den direkten und indirekten Proportionalitäten eignen sich dafür funktionale Betrachtungen zu Termen und Gleichungen, zu Dynamisierungen geometrischer Objekte oder zu Anwendungsproblemen (z. B. zeitabhängige Prozesse). Funktionale Zusammenhänge können lange vor der eigentlichen Begriffsdefinition auf unterschiedlichen Niveaustufen erfasst, beschrieben oder zu Problemlöseprozessen eingesetzt werden.

In Kapitel 3.2.2 wurde bereits daraufhin hingewiesen, dass die Behandlung der Dirichlet'schen Definition in Bezug auf das Nutzen funktionaler Zusammenhänge als Werkzeug zur Problemlösung keinen Mehrwert erbringt. Folgende Argumentation rechtfertigt aber diese abstrakte Definition: Eine didaktische Begründung generiert sich aus dem, was das Fach Mathematik zu einer umfassenden Allgemeinbildung beiträgt. Winter (1995) (siehe auch Kapitel 5.2.2) fasste die wesentlichen Ziele eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts in drei Grunderfahrungen zusammen: Mathematik als Anwendung, als eine eigene Struktur und als kreatives Handlungsfeld. Schülerinnen und Schüler sollten Mathematik in dieser Weise erleben, die gewonnenen Erfahrungen vielfältig verknüpfen. Die abstrakte Formulierung leitet sich also aus dem Struktur-Aspekt ab. Demnach hat ein auf Allgemeinbildung ausgerichteter Mathematikunterricht Möglichkeiten zu schaffen, um:

> *„mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen"* (Winter 1995, S. 37).

Lernende gewinnen somit Einblicke in die „innere Welt“ der Mathematik:

> *„Jede Schülerin und jeder Schüler sollten erfahren, daß Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen. Oder anders formuliert: daß strenge Wissenschaft möglich ist“* (Winter 1995, S. 39).

Der Anspruch auf Allgemeinbildung wird erst angemessen realisiert, wenn diese Grunderfahrungen für Schülerinnen und Schüler erlebbar gemacht und hinreichend vernetzt werden. In der unterrichtlichen Praxis werden alle drei Grunderfahrungen in unterschiedlicher Ausprägung ermöglicht. Der in der Begriffsgewinnung und -aneignung dominierende Strukturaspekt wird aber in den nachfolgenden Unterrichtstunden oftmals durch den Anwendungsaspekt abgelöst. Eine Vernetzung, zumindest zwischen diesen beiden Aspekten, könnte erreicht werden, indem Begriffe nicht von vornherein abschließend exakt definiert werden. Stattdessen operiert man mit vorläufigen Arbeitsdefinitionen, welche schrittweise zu präzisieren sind. Dies könnte bei Schülerinnen und Schülern die Erkenntnis fördern, dass Begriffsbildung ein dynamischer Prozess ist, von dem man u. U. gar nicht genau weiß, ob und wann er abgeschlossen ist.

Als ein Beispiel für einen phänomenologischen Zugang soll das von Kronfellner (1998, S. 72ff.) beschriebene zweischrittige, indirekt-genetische Unterrichtskonzept angeführt werden. Dabei sammeln Lernende in einer ersten, impliziten Phase vielfältige Erfahrungen. Sie entwickeln somit ein Gefühl für Abhängigkeiten zwischen Größen. Grafische und tabellarische Darstellungen finden ebenso Anwendung wie bestimmte symbolische Schreibweisen – wie A(r) oder s(t). In einer zweiten Phase werden die Schülerinnen und Schüler nicht mit einer abstrakten Begriffsdefinition konfrontiert; sie nähern sich über vorläufige Definitionen schrittweise einer allgemeingültigen Formulierung (vgl. Kronfellner 1998, S. 72). Während bei dieser indirekt-genetischen Methode Schülerinnen und Schüler nur von der Veränderlichkeit der Begriffe erfahren, thematisiert man bei der direkten genetischen Methode einzelne Formulierungen und vergleicht sie beispielsweise hinsichtlich Exaktheit, Formalisierungsgrad oder Ausdrucksweise. Ansätze zu geeigneten historischen Bezügen finden sich ebenfalls bei Kronfellner (1998, S. 74).

Die genetische Methode zeigt die Genese eines Begriffes. Schülerinnen und Schüler setzen sich bewusst mit Entwicklungsstufen eines Begriffes auseinander und betonen damit, ganz im Sinne der Meraner Reformideen, dynamische Aspekte von Mathematik.

Vertreter der „Neuen Mathematik“ lehnten historische Bezüge als lernhinderlich ab. Steiner schrieb seinerzeit: *„Die historischen Vorstellungen erschweren jedoch dem Lernenden häufig den Einblick in den mathematischen Kern des Funktionsbegriffes. [Er beklagte]* *irreführende Redeweisen und Vorstellungen"* (Steiner 1969, S. 36) in den Einführungskapiteln der Lehrbücher zu Funktionen.

Malle (1996, S. 8) wendet sich gegen einen grundlagensystematischen Aufbau. Er plädiert für einen historisch-genetischen Zugang, der eine schrittweise Verallgemeinerung der Mengen einschließt. Kronfellner und Malle (1996, S. 19ff.) sowie Bürger (1996, S. 51ff.) geben Beispiele, wie die Vorerfahrungen der Lernenden aufgegriffen sowie Definitions- und Wertemengen schrittweise verallgemeinert werden können.

Vollrath (2014, S. 121ff.) sieht Lehren als das Schaffen geeigneter Lernbedingungen. Für den Funktionsbegriff sollten sie so gestaltet werden, dass sie Bestandteile eines längerfristigen Lernprozesses bilden. Zur Realisierung eines solchen Prozesses verweist Vollrath (2014, S. 122) auf zwei grundsätzliche Modelle: das *Lernen durch Erweiterung* und das *Lernen in Stufen*.

Beim Lernen durch Erweiterung (vgl. Vollrath 2014, S. 122f.) werden Kenntnisse und Fähigkeiten zu bestimmten Funktionstypen über Jahrgangsstufen hinweg schrittweise ergänzt. Beispielsweise können die Proportionalitäten aufgegriffen werden, um daraus auf lineare Funktionen überzuleiten. Später können die linearen Funktionen durch Potenzfunktionen (mit quadratischen Funktionen als Spezialfall), Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen ergänzt werden.

Das Lernen in Stufen meint die Beschäftigung mit Funktionen auf unterschiedlichen Niveaustufen (vgl. Vollrath/Weigand 2007, S. 160ff.):

- Aus der Betrachtung konkreter Phänomene entwickeln die Schülerinnen und Schüler ein *intuitives* Begriffsverständnis. Das befähigt sie, Zusammenhänge zu erkennen und mithilfe des Funktionsbegriffes zu beschreiben. Lernende verwenden bereits entsprechende Darstellungsmöglichkeiten und kennen die charakterisierende Eigenschaft der Eindeutigkeit bei Zuordnungen.
- Auf der Stufe des *inhaltlichen* Begriffsverständnisses erkennen sie Funktionen als Träger grundlegender Eigenschaften, die zur Lösung von Problemen genutzt werden können.
- Auf der Stufe des *integrierten* Begriffsverständnisses erfassen sie den Funktionsbegriff als Teil eines Begriffsnetzes, das Zusammenhänge zwischen den Typen von Funktionen herstellt.
- Auf der Stufe des *formalen* Begriffsverständnisses werden Funktionen als Objekte zum Operieren begriffen. Dadurch wird es beispielweise möglich, Funktionen zu verketten oder zu verknüpfen.

- Indem Beziehungen zum Relationsbegriff hergestellt oder Einflüsse von Definitions- und Wertebereichen betrachtet werden, lässt sich noch die Stufe des *kritischen* Begriffsverständnisses erreichen.

Die schrittweise Erweiterung des Begriffsverständnisses setzt voraus, dass stetig reflektiert wird. Das Lernen in Stufen besitzt somit analytischen Charakter. Das Lernen durch Erweiterung ist hingegen von synthetischem Charakter – es ist darauf ausgerichtet, Begrenzungen zu überwinden. In der unterrichtlichen Praxis können beide Formen des Lernens nicht losgelöst voneinander betrachtet werden, sie überlagern sich und beeinflussen einander (vgl. Vollrath 2014, S. 123).

Artikulierter Umgang mit funktionalen Zusammenhängen

Funktionale Zusammenhänge repräsentieren sich in verschiedenen Darstellungsformen: *„Funktionen haben viele Gesichter"* (Herget/Malitte/Richter 2000, S. 123). Zahlreiche Autoren betonen, wie wichtig der Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen für ein fundiertes Begriffsverständnis ist. Für Herget, Malitte und Richter (2000, S. 117f.) nimmt dabei die Sprache eine zentrale Stellung ein. Aus anfangs noch unscharfen Formulierungen kann sich bei Schülerinnen und Schülern ein Bedürfnis nach angemessener Ergänzung und Ausschärfung durch formale Darstellungen ausbilden. Dies setzt möglicherweise auch voraus, dass Lehrpersonen ihre Prioritäten hinsichtlich der Anforderungen an Syntax und Semantik überdenken müssen. Aus einem Zusammenspiel von verbaler, grafischer und symbolhafter Sprache formiert sich schließlich ein leistungsfähiges Werkzeug. Das Sprechen über funktionale Zusammenhänge kann somit als Gradmesser für ein inhaltliches Verständnis betrachtet werden. Unterrichtliche Situationen sollen die Möglichkeit bieten, verschiedene Darstellungen zu reflektieren und zu vernetzen. *„Bewusst gewordene Vernetzung löst ‚Schubladendenken' (auch innermathematisch) ab"* (Herget/Malitte/Richter 2000, S. 122).

Anregungen zu einer Vernetzung von Geometrie und Algebra in Form systematischer Variation geometrischer Gebilde finden sich bei Roth (2008, S. 17ff.). Er greift damit die Ideen von Klein zur Fusion von Arithmetik und Geometrie wieder auf.

Funktionen als Werkzeug

Unterrichtlichen Aufgaben liegen vielfach funktionale Zusammenhänge zugrunde, sodass sich Funktionen als geeignete mathematische Werkzeuge erweisen können. Bereits sehr einfache Modellierungen rufen bei Schülerinnen und Schülern komplexe kognitive

Prozesse hervor, z. B.: das Aktivieren von Grundvorstellungen, das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen, das Anwenden von Kalkülen sowie das Interpretieren der Ergebnisse (vgl. vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 165).
Weiterhin erweisen sich grundlegende Kompetenzen im mathematischen Modellieren als notwendig, da eine Vielzahl funktionaler Zusammenhänge auf Rohdaten bzw. experimentell gewonnenen Daten basiert. Elschenbroich und Henn (2014, S. 5) beschreiben das Modellieren als das Bauen einer „Brücke" zwischen der Mathematik als Hilfe, die uns umgebende Welt besser zu verstehen, und der Mathematik als einer abstrakten Struktur. Somit kann mathematisches Modellieren dazu beitragen, den Anwendungs- und den Strukturaspekt zu vernetzen. Als wesentliche Schüleraktivitäten führen die Autoren an: das Sammeln von Daten, das Schreiben von Berichten über die eigene Arbeit und das Begründen selbst gewonnener Erkenntnisse (vgl. Elschenbroich/Henn 2014, S. 6).
Funktionen erscheinen uns nicht nur mit vielen Gesichtern; es existieren ebenso viele Wege, auf denen man sich ihnen nähern kann und sollte. Strukturmathematische Ansätze der „Neuen Mathematik", Malle (1996, S. 8) nennt sie das „Paradebeispiel eines didaktischen Irrtums", werden (wieder) durch phänomenologische Zugänge abgelöst. Die Ideen von Meran erleben damit eine Renaissance, wenngleich man den Begriff des funktionalen Denkens nun stärker an den der Funktion koppelt, auch um dieses Denken nachhaltiger in der unterrichtlichen Praxis zu verorten.

7.1.2 Rahmenkonzept – Konsequenzen für eine unterrichtliche Verortung

In Kapitel 7.1 wurde das Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens als Ganzes vorgestellt (siehe Abbildung 11). Im Folgenden soll nun der „Kern" dieses Modells – die Entwicklung funktionalen Denkens – genauer betrachtet werden (siehe Abbildung 12). Im Kapitel 3 wurden dazu bereits verschiedene unterrichtliche Ansätze zum funktionalen Denken und zum Funktionsbegriff aus theoretischer Sicht erörtert und durch Beispiele zur Umsetzung aus der Fachliteratur im Kapitel 7.1.1 ergänzt.
Die Entwicklung funktionalen Denkens entspricht einem kontinuierlichen Prozess. Dieser ist durch zielgerichtete unterrichtliche Förderung positiv zu beeinflussen. Für die unterrichtspraktischen Ansätze wurden die Merkmale Denken, Sprache und Bewusstheit aufgrund ihrer Bedeutsamkeit in das Modell aufgenommen. Für jedes Merkmal erfolgte eine Untersetzung durch unterschiedliche Merkmalsausprägungen in Form von Entwicklungsstufen. Die radialsymmetrische Anordnung dieser Entwicklungsstufen soll eine Pro-

gression andeuten. Dabei werden jeweils von innen nach außen qualitativ höhere Stufen aufgezeigt. In Abhängigkeit von der konkreten Lernsituation bzw. der spezifischen Thematik können jeweils unterschiedliche Entwicklungsstufen einbezogen werden. In vielen Fällen lassen sie sich auch nicht trennscharf voneinander abgrenzen.

Im Weiteren sollen nun die Merkmale Denken, Sprache und Bewusstheit genauer betrachtet werden.

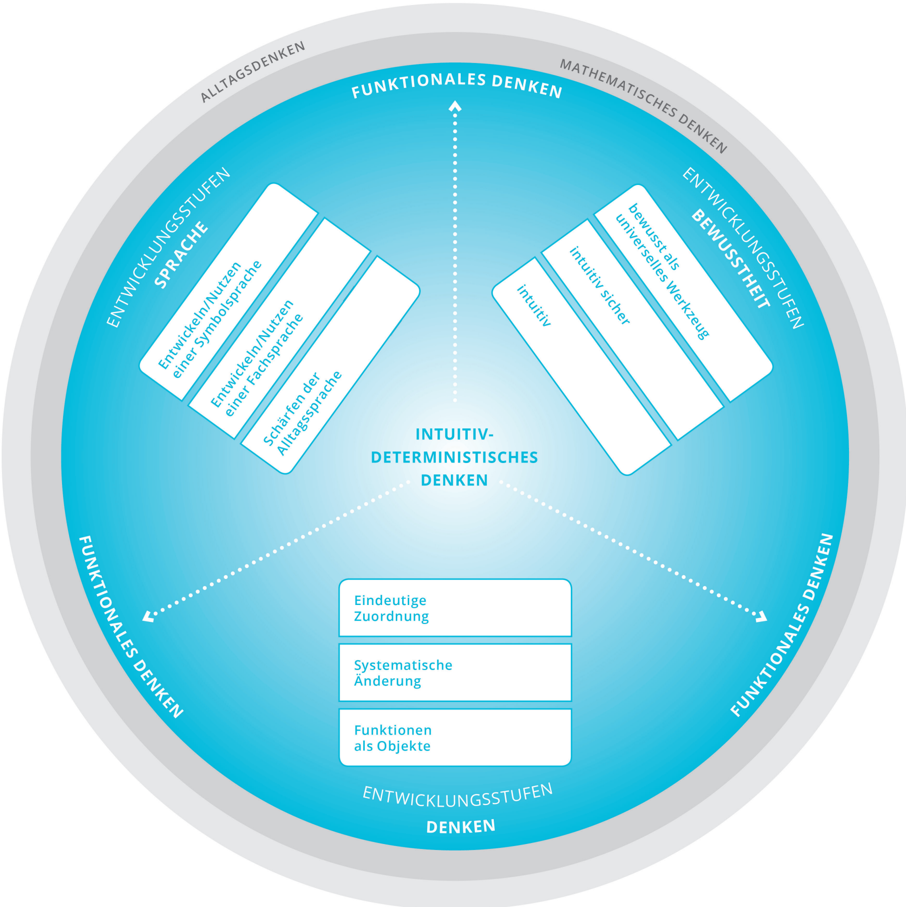


Abb. 12 Entwicklungsstufen funktionalen Denkens

(a) Denken

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass mathematisches Denken als systematische Fortschreibung des Alltagsdenkens aufgefasst werden kann. Es entwickelt sich stufenweise durch die gezielte Ausschärfung von Begriffen und die zunehmend bewusste Anwendung fachspezifischer Schlussweisen (vgl. Heymann 1996, S. 224). Funktionales Denken kann Zusammenhänge zwischen Größen erfassen. Es vermag, Hypothesen über die Art eines Zusammenhangs und über den Einfluss von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und zu revidieren. Diese Zusammenhänge können hinsichtlich ihrer Komplexität in qualitativ unterschiedlichen Stufen erfasst werden. Ursache hierfür sind individuell unterschiedliche Ausprägungsgrade funktionalen Denkens.

Die Entwicklung funktionalen Denkens wird ab einer gewissen Stufe (Vollrath [1989, S. 30f.]) sieht diese jenseits der Proportionalitäten) maßgeblich durch den Unterricht beeinflusst und erfordert eine zielgerichtete und kontinuierliche Förderung. Ansätze für eine unterrichtliche Entwicklung sieht Vollrath in der Initiierung geeigneter Lernhandlungen auf der Grundlage konkreter Phänomene. Funktionales Denken ist ein Werkzeug. Es anzuwenden, soll bei Schülerinnen und Schülern zu neuen Erfahrungen und schrittweise zur Vervollkommnung dieser Denkweise führen (vgl. Vollrath 1989, S. 27ff.). Das erfordert ein gestuftes, den kognitiven Voraussetzungen der Lernenden angepasstes Vorgehen, welches grundsätzlich im Mathematikunterricht aller Jahrgangsstufen implementiert werden kann.

Um Progressionen zu beschreiben, eignet sich wiederum die Kategorisierung von Vollrath (1989, S. 8ff.) in: eindeutige Zuordnung, systematische Änderung und Funktionen als Objekte (siehe Kapitel 3.1.4). Um funktionales Denken kontinuierlich und nachhaltig zu fördern, sollten möglichst viele dieser Stufen aktiviert werden. Dies bedeutet jedoch nicht, dass in jeder Lernsituation jede Stufe erreicht werden sollte, muss oder kann.

Lernende müssen erst einmal funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen aus Sachzusammenhängen begreifen. Bereits in der Primarstufe erfassen Schülerinnen und Schüler Kausalitäten auf qualitativer Stufe und können diese beispielsweise mit Je-desto-Aussagen benennen. Durch die Verwendung weiterer Darstellungsformen, wie Tabellen oder grafischen Darstellungen, eröffnen sich den Lernenden neue Potentiale, um Änderungsverhalten zu betrachten. Beide Stufen – die Zuordnung als statischer und das Änderungsverhalten als dynamischer Bestandteil der Erfassung funktionaler Strukturen – bilden die Grundlage für das Operieren mit Funktionen als Ganzes. Auf dieser Stufe entfaltet sich auch die Eigenschaft als universelles mathematisches Werkzeug. Dies setzt aber voraus, dass grundlegende Kenntnisse zu Funktionen vorhanden sind. Um die Potentiale dieses Werkzeugs in größerem Umfang nutzen zu können, benötigen die Lernenden Kompetenzen bei der Verwendung mathematischer Darstellungen sowie beim symbolischen, formalen und technischen Umgang mit Mathematik. Als Beispiele seien hier die sichere Verwendung von und der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen genannt. Für einfache Phänomene lassen sich, auch in höheren Jahrgangsstufen, Fach- und Symbolsprache auf ein Minimum reduzieren. Nehmen jedoch die Komplexität und der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zu, sollte den Schülerinnen und Schülern die Sinnhaftigkeit der Einführung und Verwendung einer angemessenen Fach- und Symbolsprache bewusst werden. Die Entwicklungsstufen des Denkens sind demzufolge auch abhängig vom Ausprägungsgrad fachsprachlicher Kompetenzen.

(b) Sprache

Sprache nimmt bei allen Erkenntnis- und Lernprozessen eine zentrale Stellung ein. Sprache ist Lerngegenstand und Lernmedium zugleich. Sie muss einerseits explizit erworben werden, ist andererseits aber das Mittel, um über Lernprozesse zu kommunizieren (vgl. Prediger/Meyer 2012, S. 2).

Im Zusammenhang mit der Förderung funktionalen Denkens werden folgende Entwicklungsstufen betrachtet: Schärfen der Alltagssprache, Entwickeln einer Fach- und einer Symbolsprache. Die Abbildung 13 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen diesen Entwicklungsstufen von Sprache und zeigt gleichzeitig eine Progression. Es wird deutlich, dass zu einer Ausgangsstufe im funktionalen Denken durch Erweiterung sprachlicher Kompetenzen eine qualitativ höhere Stufe erreicht werden kann. Diese Kompetenzerweiterung in der Sprache kann sich sowohl auf eine einzelne oder auch mehrere Entwicklungsstufen beziehen.

Für viele Schülerinnen und Schüler bedeutet Mathematik: sprachlich aufbereitetes, fertiges Wissen. Begünstigt wird dieser Eindruck durch kurze und präzise Formulierungen in Lehrwerken, Lösungsbänden oder Tafelbildern. Den Lernenden präsentiert man nicht selten die finale Fassung einer Lösung, klammert den Prozess ihrer Entstehung aber aus. Irrwege, Fehler, nicht weiterführende Ansätze usw. können so von den Lernenden nur schwer als elementare Bestandteile mathematischer Tätigkeiten wahrgenommen werden. Sprache ist im Unterrichtsprozess von zentraler Bedeutung: als Lernvoraussetzung oder als Lernhindernis (vgl. Prediger/Meyer 2012, S. 2). Neben der Alltags- oder Umgangssprache verfügt die Mathematik (wie auch die meisten anderen Wissenschaften) über eine entsprechende Fachsprache und insbesondere über eine ausdifferenzierte Symbolsprache. Einige Autoren verweisen noch auf eine weitere Kategorie, die sogenannte Bildungssprache. Diese ist gekennzeichnet durch eine Ablösung von konkreten Sprechsituationen, die Verwendung komplexerer Satzkonstruktionen und präziserer Begriffe. Damit besitzt sie eher den Duktus einer Schriftsprache (vgl. Prediger/Meyer 2012, S. 3). Bildungssprache kann hinsichtlich Abstraktheit und Informationsdichte zwischen Alltags- bzw. Umgangssprache und Fachsprache verortet werden.

Alltags- und Fachsprache unterscheiden sich hinsichtlich Wortschatz, Grammatik und Abstraktheit. Die Fachsprache leitet sich in vielen Fällen von der Alltagssprache ab. Abgrenzungen ergeben sich durch eine präzisere und eindeutigere Fassung von Begriffen. Die Symbolsprache weist dagegen eine noch höhere Informationsdichte auf und besitzt zudem ein Optimum an Struktur. Algorithmen, Rechenwege u. dgl. lassen sich so kurz und präzise darstellen. Die Grenze zwischen Alltags- und Fachsprache ist situationsab-

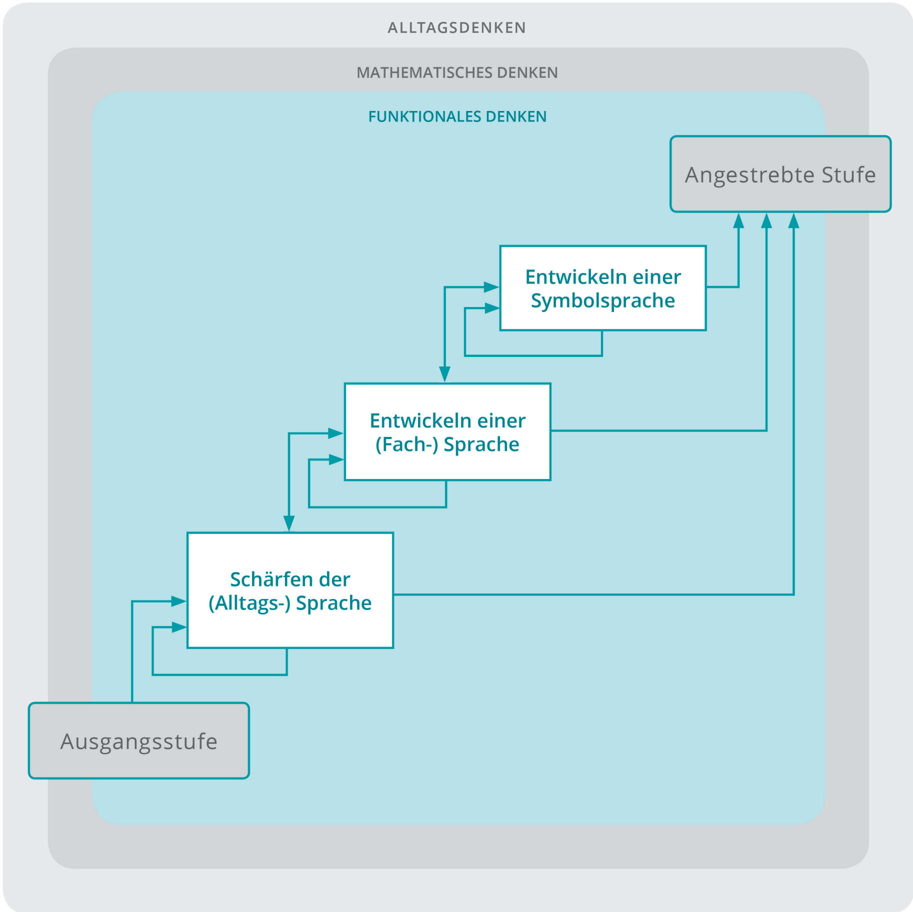


Abb. 13 Entwicklung funktionalen Denkens durch Sprache

hängig. Was Lernende als präzise einschätzen, ordnen Personen mit höherem Wissenstand als umgangssprachlich und unkorrekt ein (vgl. Barzel/Ehret 2009, S. 5).

Im Unterricht benötigt die Entwicklung von Fach- und Symbolsprache entsprechend Zeit. Die Lehrenden sollten dabei stets an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen. Fachsprachliche Formulierungen können in vielen Fällen aus der Alltagssprache abgeleitet und schrittweise geschärft werden. Als Begriffe mit abweichenden Bedeutungen in Alltags- und Fachsprache seien beispielhaft genannt: „ähnlich“, „Kurve“, „Bruch“, „Abbildung“, „oder“, „ein“, „fast alle“. In einer der Fallstudien soll diesbezüglich der Begriff „Umkehrfunktion“ genauer betrachtet werden (siehe Kapitel 7.2.3).

Prediger und Meyer (2012, S. 7) betonen, dass Sprachförderung nicht mit einer Vermittlung isolierter Fachwörter verwechselt werden sollte. Weder aus einer Verwendung von Begriffen wie „multiplizieren“ statt „malnehmen“, noch aus der Reproduktion der Dirichlet’schen Definition einer Funktion kann darauf geschlossen werden, inwieweit Fachsprache Teil des Erkenntnisprozesses ist und beherrscht wird.

Mathematisches Denken kann als Verstärker des Alltagsdenkens aufgefasst werden. Dichtere Vernetzungen zwischen mathematischen Wissenselementen und der Alltagswelt

sowie vielfältige Erfahrungen mit Phänomenen können mathematisches Denken befördern (siehe Kapitel 3.1.2). Für diese Vernetzungen bedarf es der Sprache als Medium.
Die Entwicklung oder Förderung funktionalen Denkens kann unabhängig vom Funktionsbegriff und deshalb lange vor dessen Behandlung erfolgen. Die Beschreibung funktionaler Zusammenhänge erfordert nicht zwangsläufig eine adäquate Fach- oder Symbolsprache. Schon durch Alltagssprache lassen sich zahlreiche Zusammenhänge benennen und beschreiben, meist jedoch nicht in einer entsprechend knappen und präzisen Form. Trotzdem kann auch auf dieser Stufe, durch eine Schärfung der Umgangssprache, funktionales Denken gefördert werden. Derlei Einsichten resultieren vor allem aus geeigneten unterrichtlichen Anlässen. Lernende sollten insbesondere auch die Grenzen von Alltagssprache erfahren. So begreifen sie, dass fachsprachliche Präzisierungen vorgenommen werden müssen. Fachsprache ist, im Sinne von Wagenschein (1970, S. 463ff.), die „Sprache des Verstandenen". Sie steht in der Regel am Ende eines Lernprozesses.
Die Sinnhaftigkeit einer Einführung entsprechender symbolischer Ausdrücke lässt sich durch einfachere und überschaubare Notationen sowie die grundsätzliche Möglichkeit der Verwendung digitaler Werkzeuge motivieren.

(c) Bewusstheit

Funktionales Denken beginnt für Vollrath (1989, S. 27) bei intuitiven Vorstellungen dergestalt, dass die Änderung einer bestimmten Größe die Änderung einer anderen Größe nach sich zieht. Kinder erfassen frühzeitig einfache kausale Zusammenhänge aus ihrer Erfahrungswelt und beschreiben diese mit ihrer Alltagssprache. Funktionales Denken wird als Werkzeug noch rein intuitiv genutzt. Schülerinnen und Schüler stellen einfache Beziehungen auf, ohne sich des mathematischen Hintergrundes bewusst zu sein. Bereits auf dieser Stufe sollten entsprechende Zusammenhänge aufgegriffen und reflektiert werden.
Die Entwicklung funktionalen Denkens schließt grundsätzlich das Befähigen der Schülerinnen und Schüler zur bewussten Nutzung als universelles Werkzeug mit ein. Ziel des Mathematikunterrichts sollte deshalb sein, ein angemessenes Repertoire an Methoden zu vermitteln und gleichzeitig tragfähige Intuitionen zum Funktionsbegriff zu erzeugen (vgl. Vollrath 1989, S. 32ff.). Bruder formuliert dazu: *„Es geht im Unterricht nicht nur darum, Lernanforderungen zu stellen, sondern auch zu deren Bewältigung zu befähigen"* (Bruder 2014, S. 155). Erreicht werden kann dies über eine zielgerichtete Erweiterung des individuellen Methodenwissens und der Methodenbeherrschung auf einer Metaebene. Ansätze sieht Bruder in der Art und Weise der Aufgabenbewältigung sowie in einer fundierten Reflexion. Dabei sollte die zentrale Frage für Lernende lauten: *„Was hat uns geholfen,*

das Problem bzw. die Forschungsaufgabe zu lösen?“ (Bruder 2014, S. 155). Bruder unterscheidet hierbei zwischen mathematischen Werkzeugen (Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren); heuristischen Hilfsmitteln (Planfigur, Tabelle, Gleichung) und Strategien (Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeiten). Im Kontext funktionalen Denkens wäre der kausale Zusammenhang das mathematische Werkzeug zur Lösung des Problems. Das Aufspüren funktionaler Zusammenhänge erfolgt durch ein heuristisches Hilfsmittel.

Nach Bruder erfährt die Art und Weise des Vergleichs von gelösten Aufgaben eine Schlüsselstellung. Es geht nicht nur darum, zu prüfen, ob die Lösungen korrekt sind. Es gilt, die Lösungswege und deren Effizienz zu beurteilen und daraus Konsequenzen abzuleiten. Bruder (2014, S. 156) nennt, neben praktikablen Vergleichsmöglichkeiten, Ansätze, um zielgerichtet Problemlösestrategien zu entwickeln. Dazu schlägt sie für den Unterricht folgende Schrittfolge vor (vgl. Bruder 2014, S. 157):

(1) Gewöhnen von Lernenden an gewisse heuristische Methoden durch Reflexionen in den Vergleichsphasen;
(2) Bewusstmachen einer speziellen Methode an einem markanten Beispiel;
(3) Übungsphasen zur Anwendung dieser Methode mit Beispielen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades;
(4) Kontexterweiterung durch Suchen weiterer Beispiele aus inner- und außermathematischen Anwendungen.

Neben der Gestaltung effizienter Vergleichs- und Reflexionsphasen betont Bruder (2014, S. 147ff.) die besondere Bedeutung der Auswahl geeigneter Phänomene mit entsprechendem Motivations- und Aktivierungspotential. Zudem gibt sie Beispiele, wie lernförderliche Rahmenbedingungen für Schülerinnen und Schüler geschaffen werden können.

Aus einer eher intuitiven Nutzung funktionalen Denkens kann sich im Laufe der Jahrgangsstufen eine intuitiv sichere und später bewusste Nutzung als universelles Werkzeug einstellen. Mit einem Zuwachs an mathematischem Wissen und Können (z. B. Kennen verschiedener Darstellungsformen von Zuordnungen) erweitern sich auch die Möglichkeiten, funktionales Denken als Werkzeug benutzen zu können. Durch die Kenntnisse zu verschiedenen Funktionen und Funktionsklassen kann diese Leistungsfähigkeit auf der Objektebene noch einmal deutlich gesteigert werden. Als ein markantes Beispiel sei die Ermittlung einer Funktionsgleichung mittels Regression genannt.

7.2 Vom Spiralprinzip zur unterrichtlichen Einbindung

Das in Kapitel 7.1 vorgestellte Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens soll nun für bestimmte Kernbereiche des mathematischen Unterrichts nachgezeichnet werden. Dazu wurden bewusst drei sehr unterschiedliche Beispiele ausgewählt:

Es sollten auch Möglichkeiten einer Förderung vor der eigentlichen Behandlung des Funktionsbegriffs aufgezeigt werden. Zwei der Fallstudien wurden deshalb in der Jahrgangsstufe 7 durchgeführt; hier ist zwar der Begriff der Zuordnung, nicht aber der Funktionsbegriff bekannt. Um der Weite des Begriffs funktionales Denken Rechnung zu tragen, wurden die Fallstudien in unterschiedlichen Themengebieten verortet (elementare Algebra; Geometrie; Funktionen).

Folgende Fallstudien wurden aus diesen Überlegungen modelliert:

- eine Möglichkeit des Einstiegs in den Lernbereich Terme in Klasse 7 (Kapitel 7.2.1),
- ein experimenteller Zugang zum Begriff des Peripheriewinkels über funktionale Betrachtungen zum Sehwinkel in Klasse 7 (Kapitel 7.2.2),
- die Erarbeitung der Begriffe Logarithmus, Logarithmusfunktion und Umkehrfunktion am Beispiel einer Skale eines Rechenschiebers in Klasse 10 (Kapitel 7.2.3).

Die Fallstudien variieren im zeitlichen Umfang sowie durch die Art und Anzahl der Erprobungen. Die zu untersuchenden Merkmale funktionalen Denkens sollten in den verschiedenen Fallstudien zudem unterschiedliche Ausprägungsgrade in den Entwicklungsstufen aufweisen. In den Abbildungen 14, 15 und 16 werden die Fallstudien den jeweiligen Entwicklungsstufen der Merkmale zugeordnet.

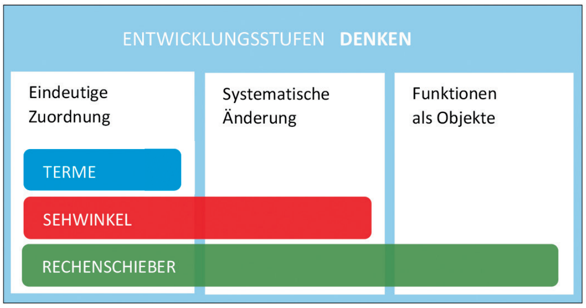


Abb. 14 Einordnung der Fallstudien in die Entwicklungsstufen Denken

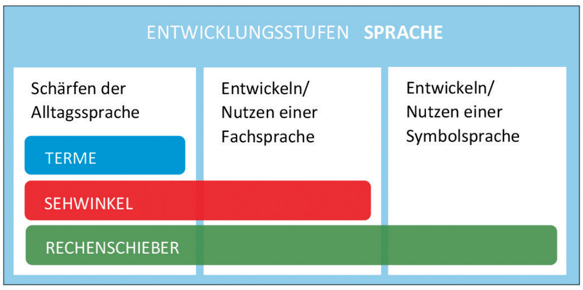


Abb. 15 Einordnung der Fallstudien in die Entwicklungsstufen Sprache

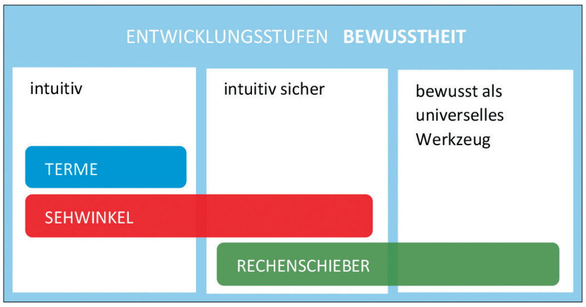


Abb. 16 Einordnung der Fallstudien in die Entwicklungsstufen Bewusstheit

Mit diesen konkreten Unterrichtsbeispielen soll gezeigt werden, dass eine Förderung prinzipiell in allen Jahrgangsstufen, in verschiedenen Themengebieten und mit unterschiedlich hohem Zeitaufwand erfolgen kann. Ziel war, anhand aktueller Lehrplanthemen aufzuzeigen, wie Aufgabenstellungen zu funktionalem Denken anregen können. Die Schülerinnen und Schüler sollten zu der Erkenntnis geführt werden, dass sie sich dabei eines Werkzeugs bemächtigen, das sich auch außerhalb der Mathematik bei Problemlöseprozessen wirkungsvoll einsetzen lässt. Die Unterrichtsbeispiele können als Versuch

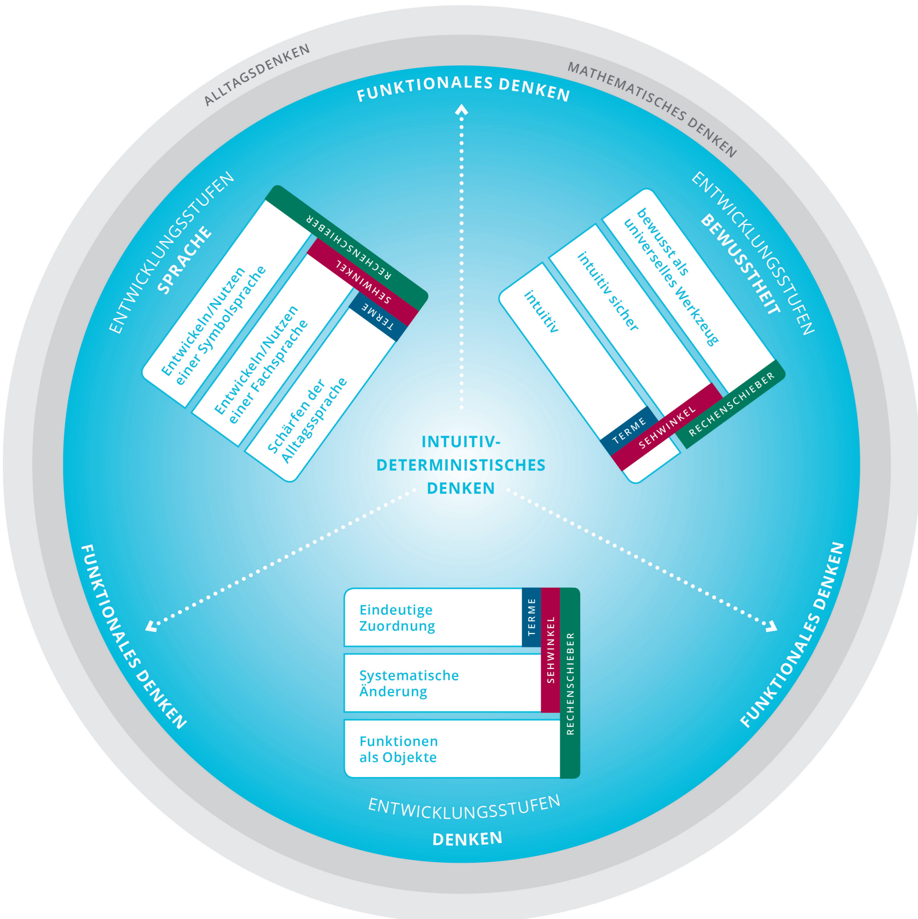


Abb. 17 Einordnung der Fallstudien in das Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens

interpretiert werden, die Idee des funktionalen Denkens – im Sinne der Meraner Reform – im Mathematikunterricht zu verankern.
Die Abbildung 17 verdeutlicht die Einordnung der Fallstudien in das Gesamtkonzept der Untersuchung.

7.2.1 Termberechnungen

Es ist ein Charakteristikum der Mathematik, Beziehungen zwischen Zahlen und Größen symbolisch darzustellen und zu bearbeiten. Die Formelsprache zählt zu den grundlegenden fachspezifischen Darstellungs- und Explorationsmitteln und ermöglicht eine Übertragung von Rechenschritten auf Maschinen (vgl. Hefendehl-Hebeker/Rezat 2015, S. 118). Betrachtet man symbolische Algebra zudem als Zeichensystem, um funktionale Abhängigkeiten zu erfassen und zu codieren, erschließt sich daraus ein Werkzeug zur Generierung neuen Wissens (vgl. Hefendehl-Hebeker/Rezat 2015, S. 124).
Im Mathematikunterricht versteht man unter einem Term eine Zeichenreihe, die sich in sinnvoller Weise aus Funktionssymbolen, Variablen, Konstanten und Gliederungszeichen zusammensetzt (vgl. Hefendehl-Hebeker/Rezat 2015, S. 124).
Nach Vollrath und Weigand (2007, S. 85) lassen sich Terme aus zwei Blickwinkeln betrachten:

(1) Terme beschreiben zum einen allgemeine Rechenvorgänge. Sie sind ein *Rechenschema.* Durch die Überführung eines Sachverhaltes in einen geeigneten Term kann die eigentliche Berechnung von konkreten Inhalten getrennt und der erforderliche Rechenaufwand deutlich reduziert werden. Zudem ist die Überführung in Symbolsprache eine grundlegende Voraussetzung für die Nutzung digitaler Rechenhilfsmittel.
(2) Ein Term beschreibt aber auch Relationen zwischen Zahlen bzw. Größen. Er kann damit als *Bauplan* aufgefasst werden, was wiederum den Prozess-Aspekt von Mathematik stützen würde.

Bei der Beschreibung funktionaler Zusammenhänge kommen zumeist beide Aspekte, Rechenschema und Bauplan, zum Tragen.

(a) Intentionen und curriculare Einordnung

Die didaktischen Ansätze zur Behandlung von Termen im Mathematikunterricht unterlagen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts Veränderungen. Die strukturmathematische Ausrichtung des Mathematikunterrichts ab den 1960er Jahren beeinflusste die Vermittlung algebraischer Themen, da verstärkt Elemente der Aussagenlogik und der Mengenlehre einbezogen wurden. Logische Strenge und klare Begrifflichkeiten führten jedoch auch zu einer deutlich höheren Abstraktheit und Theorielastigkeit des mathematischen Unterrichts. Ab den 1980er Jahren mehrten sich Zweifel an der Nachhaltigkeit derartiger Vorgehensweisen. Zunehmend setzte sich die Erkenntnis durch, dass algebraische Sprache einer präformalen Vorbereitung bedarf. Die Sinnhaftigkeit algebraischer Darstellungsmittel muss Schülerinnen und Schülern durch vielfältige inner- und außermathematische Problemstellungen verdeutlicht werden (vgl. Hefendehl-Hebeker/Rezat 2015, S. 139).

Lernende sollten Terme im Unterricht daher nicht nur als „Rechenschemata“ kennen lernen, sondern auch als „Baupläne“ für die Beschreibung funktionaler Strukturen. Terme und Formeln zeigen an sich noch keine funktionalen Strukturen auf. Sie beschreiben lediglich Beziehungen zwischen veränderlichen Größen, bei denen alle Variablen mehr oder weniger gleichberechtigt sind. Mit einer konkreten Anwendungssituation ist eine Blickrichtung innerhalb einer Formel bzw. eines Terms verbunden: Man verändert eine oder mehrere ausgewählte Größen und betrachtet die damit verbundene Änderung des Termwertes (vgl. Jahnke/Warmbach 2013, S. 63).

In der folgenden Terme-Fallstudie sollte Lernenden die Möglichkeit geboten werden, funktionale Abhängigkeiten aus Sachzusammenhängen heraus zu erkennen und zu beschreiben. Dazu bieten sich Situationen an, welche Fragen ermöglichen wie: *„Ab wann lohnt sich …?“ [oder] „Wie viel benötigt man, um …?“* (Barzel/Holzäpfel 2011, S. 5). Die Alltagsprobleme für Modellierungen sollten hinreichend authentisch sein und sich aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler erschließen lassen. Geeignet sind auch motivierende innermathematische Probleme, wie z. B. mathematische Rätsel.

Die Aufgabenstellungen sind weitgehend offen formuliert, sodass die Lernenden selbstständig entscheiden können, welche Mittel sie zur Darstellung und Beschreibung der Zusammenhänge heranziehen. Sie können zur Lösung des Problems Tabellen anlegen, Diagramme zeichnen, Variable einführen oder bereits schon Terme aufstellen. In den Präsentationspha-

sen werden die verschiedenen Vorgehensweisen beurteilt und reflektiert. Auch werden die Genauigkeit, der zeitliche Aufwand und die Nachvollziehbarkeit des Lösungsweges diskutiert. Ein wesentliches Ziel der Unterrichtseinheit sollte sein, Schülerinnen und Schüler von der Sinnhaftigkeit des Aufstellens geeigneter Terme zu überzeugen.
Die Ausbildung von Fertigkeiten im Operieren mit symbolischen Ausdrücken wird durch curriculare Vorgaben für den Unterricht gesteuert. Im sächsischen Lehrplan des Gymnasiums werden das Beschreiben von inner- und außermathematischen Problemstellungen, die weitere Entwicklung von Fähigkeiten im Mathematisieren, eine zunehmend selbstständige Wahl geeigneter Lösungsverfahren sowie das Übertragen von alltagssprachlichen Formulierungen in eine fachgebundene Sprache explizit als allgemeine mathematische Ziele der Klassenstufe 7 angeführt (vgl. SMK 2013, S. 17). Bezüglich des Kompetenzmodells der Bildungsstandards kann die Unterrichtssequenz der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" und der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Probleme mathematisch lösen" zugeordnet werden.

(b) Struktur der Unterrichtseinheit

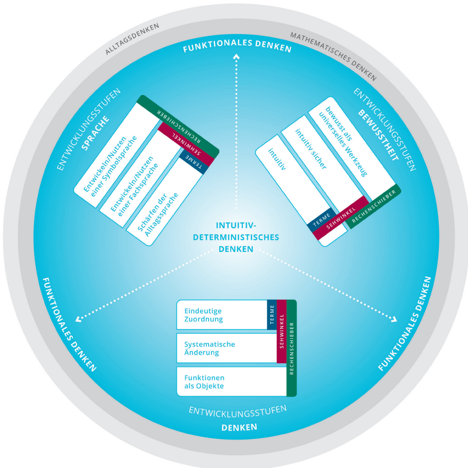
Die entsprechende Unterrichtseinheit wurde in der Klassenstufe 7 eines Gymnasiums in zwei verschiedenen Klassen mit einem zeitlichen Umfang von jeweils 90 Minuten erprobt. Die Stunde war als Einstieg in den Abschnitt „Beherrschen des Lösens linearer Gleichungen" innerhalb des Lernbereichs „Arbeiten mit rationalen Zahlen" des sächsischen Lehrplanes vorgesehen (vgl. SMK 2013, S. 18).

(c) Didaktisch-methodische Einordnung

Als Einstieg in den Lernbereich sollten die Schülerinnen und Schüler zwei Aufgaben lösen. Die erste Aufgabe (siehe Anhang I, dort S. 1) griff mit einem realen Angebot zur Nutzung öffentlicher Verkehrsmittel eine Sachsituation aus dem Alltag auf. Die Lernenden sollten beurteilen, unter welchen Voraussetzungen sich dieses Angebot rechnet. Bei der zweiten Aufgabe (siehe Anhang I, dort S. 2) wurden historische Rätselaufgaben in der originalen Fassung vorgelegt.
Meyer (2015, S. 38) unterscheidet vier Grundformen des Unterrichts: den „Gemeinsamen Unterricht", den „Individualisierenden Unterricht", die „Direkte Instruktion" und den „Kooperativen Unterricht". Legt man diese Taxonomie zugrunde, ist diese Einheit dem

„Kooperativen Unterricht“ zuzuordnen. Die Klasse wurde in leistungsheterogene Gruppen zu je vier Schülerinnen bzw. Schülern eingeteilt, wobei alle Gruppen an denselben Aufgaben arbeiteten (siehe Anhang I). Im zweiten Stundenteil sollte jede der Gruppen den Lösungsweg für eine der Aufgaben präsentieren.

Um die Offenheit von Aufgaben zu beurteilen, lässt sich das Modell von Katzenbach (2006, S. 63) anwenden. Er differenziert Offenheit in folgende Bereiche: Vorgabe der Daten, Fragestellungen, Anzahl von Lösungen und Vorgabe von Lösungswegen. Für den betreffenden Unterricht erfolgte die Öffnung nicht in den Bereichen Fragestellung bzw. Anzahl der Lösungen, sondern bei der Auswahl der Daten und bei der völlig freien Wahl der Lösungswege.



(d) Diskussion ausgewählter fachdidaktischer Aspekte

Im Folgenden werden die in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Aspekte Denken, Sprache und Bewusstheit für die Entwicklung funktionalen Denkens im Kontext der Fallstudie „Terme“ näher betrachtet.

(d1) Denken

Funktionales Denken fand bei dieser Fallstudie vorwiegend auf der Stufe der eindeutigen Zuordnung statt. Aus Texten mussten lösungsrelevante Daten herausgefiltert und anschließend in Beziehung gesetzt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass sie sich der Lösung einer Aufgabe nähern, wenn sie gewisse funktionale Abhängigkeiten zwischen Größen erfassen und analysieren.

Bei der BahnCard-Aufgabe (siehe Anhang I, dort S. 1) sollte argumentiert werden, ab wann sich dieses konkrete Angebot rechnet. Die Lernenden erfassten grundsätzlich den Zusammenhang zwischen Fahrpreis und Ersparnis. Sie hätten mit hoher Sicherheit zu jedem vorgegebenen Gesamtpreis entscheiden können, ob sich das Angebot rechnet. Diese Aufgabe erforderte jedoch, dass die Lernenden selbst Entscheidungskriterien festlegten. Das Treffen sinnhafter Annahmen (z. B. eine fiktiv angenommene Mobilität) bereitete einigen Schülerinnen und Schülern Mühe. Sie hatten beispielsweise Schwierigkeiten, das Problem vollständig von der Anzahl der Fahrten zu entkoppeln. Während bereits eine einzige teure Fahrt das Produkt (den Preis) rechtfertigen würde, lohnt es sich für mehrere preiswerte Fahrten möglicherweise nicht. Einige Gruppen entschieden dennoch nach der

Anzahl von Fahrten: Sie trafen Annahmen zu einer konkreten Fahrt, die innerhalb eines Jahres bis zum Eintreten einer Ersparnis wiederholt wurde. Sie hatten diese Ersparnis somit nicht einem jährlichen Gesamtfahrpreis zugeordnet, sondern einer Anzahl identischer Fahrten. Diese Veränderung im Zuordnungsaspekt könnte durch Alltagserfahrungen geprägt worden sein: Die Dauer bzw. Anzahl von Fahrten berührt die Lebenswirklichkeit von Kindern stärker als das Bezahlen von Fahrscheinen. Missverständlich könnten auch Begriffe wie „Vielfahrer“ sein. Wirbt ein Verkehrsunternehmen beispielsweise damit, dass sich ein Angebot für „Vielfahrer“ lohne, wäre zu prüfen, welche Bedeutungen – im Sinne von „oft“, „lange“ oder „weit“ – zutreffend sind.

Die Argumentationen zur BahnCard-Aufgabe basierten im Wesentlichen auf drei Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge: Beschreibungen in Worten (siehe Abbildung 18), Nutzen von Tabellen (siehe Abbildung 19) und Verwenden von Gleichungen (siehe Abbildung 20). Eine besondere Betrachtung des Änderungsverhaltens erfolgte nur bei wenigen Gruppen.

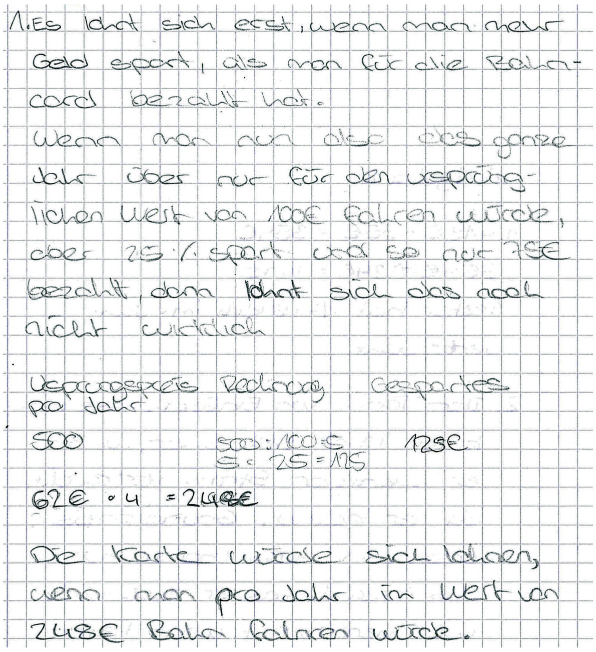
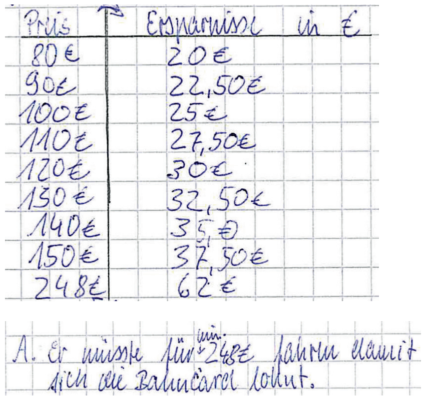


Abb. 18 Beschreiben mit Worten



Preis	Ersparnisse in €
80€	20€
90€	22,50€
100€	25€
110€	27,50€
120€	30€
130€	32,50€
140€	35,€
150€	37,50€
248€	62€

A. Er müsste für min. 248€ fahren damit sich die Bahncard lohnt.

Abb. 19 Verwenden von Tabellen

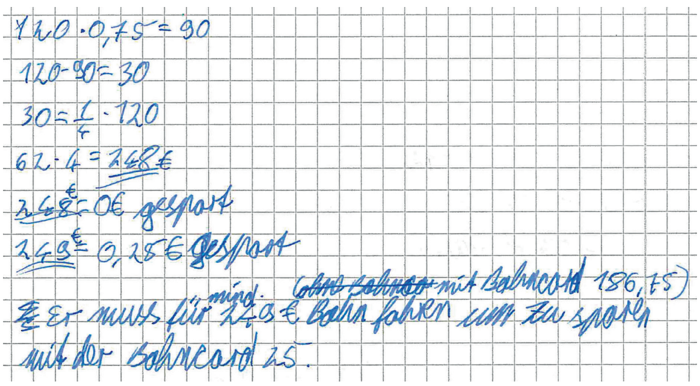


Abb. 20 Verwenden von Gleichungen

Die historischen Aufgaben wurden vorwiegend über systematisches Probieren mithilfe tabellarischer Darstellungen gelöst. Auch hier wurde vorwiegend der Zuordnungsaspekt, weniger der Kovariationsaspekt genutzt.

(d2) Sprache

Bezugnehmend auf die allgemeine Darstellung zur Entwicklung von Sprache in Abbildung 13 aus Kapitel 7.1.2 verdeutlicht die Abbildung 21 die konkreten Potentiale zur Förderung funktionalen Denkens aus sprachlicher Sicht für die Fallstudie Terme.

Das Lösen der mathematischen Probleme gelingt im Wesentlichen durch die Verwendung bzw. Ausschärfung der gebräuchlichen Alltagssprache, wenngleich die Verwendung symbolischer Ausdrücke bereits eine Effizienzsteigerung andeutet. Gerade die durch Ausschärfung der Alltagssprache gewonnenen und durchaus auch mathematisch fundierten Erkenntnisse sollten Schülerinnen und Schüler ermutigen, dies auch bei anderen Problemstellungen anzuwenden. Eine Lösung ist so grundsätzlich möglich, auch wenn u. U. der zeitliche Aufwand höher ist oder die Nachvollziehbarkeit einzelner Lösungsschritte für andere erschwert wird. Schülerinnen und Schüler neigen noch zur Suche nach scheinbaren Standardwegen, statt sich auf *einen* Lösungsweg zu konzentrieren.

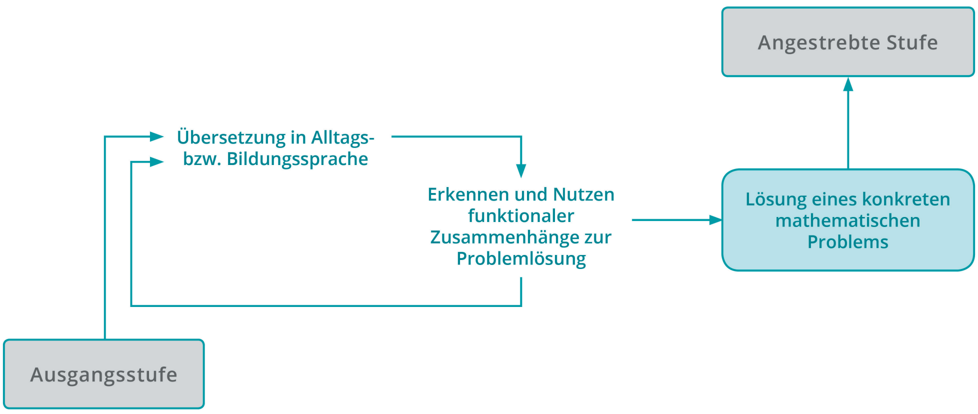


Abb. 21 Entwicklung funktionalen Denkens durch Sprache bei der Fallstudie Terme

Die Aufgabe zur BahnCard basierte auf einem Originaltext, der in gebräuchlicher Alltagssprache verfasst war. Die Lernenden filterten relevante Daten heraus, übertrugen diese in Bildungssprache und setzten die Daten unter Nutzung und Schärfung ihrer Alltagssprache in Beziehung. Bei den Lösungsdarstellungen wurden bereits bekannte Elemente aus der Fach- und Symbolsprache einbezogen. Eine sprachliche Reduktion auf symbolische Ebene gelang nur wenigen Schülerinnen und Schülern.

In dieser speziellen Aufgabe erkannten einige Lernende: Es lohnt sich, wenn die Ersparnis (als ein Viertel des Reisepreises) gleich oder größer 62 € ist und übersetzten diesen Sachverhalt sofort in Formelsprache. Dies wurde durch die Gleichung $\frac{1}{4}x = 62$ ausgedrückt. Kommentare aus der Klasse (*Darauf muss man erst einmal kommen …*; *Man muss aber sagen, was man mit x meint …)* verdeutlichten, dass für einen Großteil der Sprung auf die symbolische Ebene zu groß war.
Den Schülerinnen und Schülern könnte helfen, dem Aufstellen von Termen bzw. Gleichungen andere Darstellungsformen von Funktionen, wie Tabellen, voranzustellen. Für eine Vielzahl praktischer Fragestellungen wären sinnvolle Näherungswerte ausreichend. Die Ermittlung eines exakten Wertes mittels eines algebraischen Verfahrens ist also nicht immer notwendig und sinnvoll. Umso mehr sollten andere Vorzüge bei der Verwendung von Termen und Gleichungen herausgestellt werden. Die Vorteile symbolischer Ausdrucksweisen lassen sich u. a. durch folgende Argumente motivieren: Möglichkeit des Nutzens digitaler Werkzeuge, Zeitersparnis, Entkoppelung von konkreten Sachzusammenhängen, übersichtliche und standardisierte Lösungsdarstellungen.
Bei den historischen Rätselaufgaben waren zusätzliche sprachliche Hürden zu meistern. Historische Texte mussten in die Gegenwartssprache übertragen werden. Weiterhin lagen die Aufgabenstellungen aus der Originalausgabe in altdeutscher Schrift vor. Obwohl diese Schrift nicht mehr gelehrt wird, gelang es den meisten Schülerinnen und Schülern, die Texte zu lesen. Unbekannte Buchstaben wurden aus dem Kontext oder aus der Verbindung mit deutbaren Buchstaben erschlossen. Hinzu kamen Abweichungen in Stilistik, Orthografie und Grammatik. Um die mathematischen Probleme lösen zu können, mussten die Lernenden die Aufgabenstellung zuerst in eine entsprechende Bildungssprache übersetzen. Was Lernenden mit Deutsch als Muttersprache recht gut gelang, stellte Schülerinnen und Schüler mit Deutsch als Zweitsprache vor deutlich höhere Anforderungen. In den Arbeitsgruppen wurden dazu wiederholt sprachliche Präzisierungen vorgenommen, um dem mathematischen Inhalt der Aufgabenstellung und damit einer Lösung näherzukommen.

(d3) Bewusstheit

In der betreffenden Unterrichtseinheit nutzten Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten

im funktionalen Denken in der Regel intuitiv. Die Offenheit einiger Aufgabenstellungen verlangte, dass sie die mathematischen Inhalte tiefgründiger analysierten, um Beziehungen zwischen den Größen zu finden. Im Lösungsprozess wurde der zentralen Frage nachgegangen: Wie muss sich eine Größe verändern, damit die andere Größe einen bestimmten Wert annimmt? Funktionale Zusammenhänge wurden dabei noch auf intuitiver Stufe genutzt. Gleiches galt für die Verwendung heuristischer Hilfsmittel (z. B. Tabellen).

Bei den Lösungsideen zeigte sich zwar eine große Bandbreite, die Lösungen basierten jedoch in den meisten Fällen auf funktionalen Zusammenhängen. Nach Bruder (2014, S. 155ff.) kommt nun der Auswertungsphase eine entscheidende Rolle zu: Neben den Lösungen müssen die verschiedenen Lösungswege hinsichtlich ihrer Effizienz analysiert werden. Eine zielgerichtete Reflexion kann während oder nach den Präsentationen der Lösungswege erfolgen. Diese kann jedoch ohne längerfristige Gewöhnung nicht vollständig den Schülerinnen und Schülern überlassen werden; die Reflexion erfordert klare Vorgaben durch die Lehrperson (vgl. Bruder 2014, S. 155). Laut Bruders (2014, S. 157) Konzept zum zielgerichteten Erlernen von Problemlösestrategien könnte diese Reflexionsphase mit der Stufe des Gewöhnens an eine konkrete heuristische Methode verknüpft werden. Es sollten sich ein Bewusstmachen spezieller Methoden mithilfe markanter Beispiele sowie bewusste Übungsphasen anschließen.

7.2.2 Sehwinkel und Peripheriewinkelsatz

Begreift man funktionale Zusammenhänge als eine Leitidee für den Unterricht, müssen die Betrachtungen über die Mathematik hinausreichen. Die erworbenen Kompetenzen sollten grundsätzlich auch in beruflichen oder alltäglichen Konstellationen anwendbar sein. Funktionen gelten heute als unentbehrliche Werkzeuge in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft. Folglich gehört das Operieren mit funktionalen Zusammenhängen – mit Unterschieden in Intensität, Komplexität und Abstraktheit – zum Tätigkeitsfeld vieler Berufsgruppen. Die Ausbildung hinreichender Grundkenntnisse und Grundkompetenzen im Umgang mit Funktionen ist daher nicht nur für die weitere schulische Bildung notwendig, sondern auch für die berufliche oder akademische Ausbildung und die berufliche Tätigkeit (vgl. Vollrath 2014, S. 120).

Lernende sollten ausreichend Gelegenheiten erhalten, über funktionale Zusammenhänge in ihrem Lebensbereich zu forschen, zu reden und zu schreiben. Experimente sind dafür prädestiniert. In ihnen liegt das Potential für handlungsorientierte Zugänge (vgl. Vollrath 2014, S. 121).

(a) Intentionen und curriculare Einordnung

Die konkrete Fallstudie soll genau an diesem Punkt ansetzen. Die Schülerinnen und

Schüler erforschen durch konkretes Handeln das Phänomen Sehwinkel. Sie untersuchen dazu die funktionalen Abhängigkeiten zwischen: dem Sehwinkel, der Entfernung zum Gegenstand und der (sichtbaren) Breite bzw. Höhe des Gegenstandes. Eine derart alltagsbezogene Anwendung könnte auch der Optik als einem Teilgebiet der Physik zugeordnet werden. Diese Unterrichtseinheit trägt somit der Forderung Vollraths (2014, S. 121) Rechnung, experimentelle Anteile und fachübergreifende Perspektiven bei der unterrichtlichen Behandlung der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" einzubeziehen. In den weiteren Jahrgangsstufen werden Betrachtungen zu Winkeln bei Berechnungen an ähnlichen Dreiecken oder bei trigonometrischen Berechnungen aufgegriffen. Nicht selten werden derartige Aufgaben von Schülerinnen und Schülern mehr oder weniger formal abgearbeitet. Eine korrekte Lösung setzt nicht in jedem Falle ein tiefes inhaltlich-praktisches Verständnis voraus. Mitunter fehlt es an konkreten Erfahrungen mit Phänomenen, wie beispielweise dem Sehwinkel. Was heißt es nun praktisch, einen Gegenstand unter einem bestimmten Winkel zu sehen? Wie schätzt man Sehwinkel ab?
Der sächsische Lehrplan des Gymnasiums fordert zur Geometrie des Kreises: ein Kennen (entspricht dem Verfügen über Kenntnisse zu Sachverhalten aus einem begrenzten Gebiet im gelernten Kontext) ausgewählter Sätze einschließlich ihrer Strukturen (vgl. SMK 2013, S. V). Der Peripheriewinkelsatz zählt, wie der Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck, der Zentri-Peripheriewinkelsatz und der Satz des Thales, zu den verbindlichen Lehrplaninhalten. Bei der Arbeit mit mathematischen Sätzen sollen die Schülerinnen und Schüler ein grundlegendes Instrumentarium für das Argumentieren, Begründen und Beweisen erwerben (vgl. SMK 2013, S. 17). Nach dem Kompetenzmodell der Bildungsstandards werden als allgemeine mathematische Kompetenzen „Mathematische Probleme lösen", im weiteren Sinne aber „Mathematische Darstellungen verwenden" und „Kommunizieren" befördert. Als Leitideen gelten „Funktionale Zusammenhänge", „Raum und Form" und „Messen".

(b) Struktur der Unterrichtseinheit

Die Unterrichtseinheit wurde in einer 7. Klasse eines Gymnasiums in zwei Unterrichtsblöcken zu je 90 Minuten erprobt. Für diese beiden Blöcke wurde jeweils ein größerer Unterrichtsraum genutzt. Zusätzlich wurden einzelne Elemente der Unterrichtssequenz mehrfach mit Lehrkräften im Vorbereitungsdienst getestet.
Die Fallstudie teilte sich in zwei Abschnitte. Im ersten Teil (siehe Tabelle 14) untersuchten die Lernenden vorwiegend experimentell funktionale Zusammenhänge zwischen den Größen Sehwinkel, Entfernung eines Gegenstandes und sichtbare Breite oder Höhe eines

Gegenstandes.

Im zweiten Teil der Fallstudie (siehe Tabelle 15) nutzten die Schülerinnen und Schüler die gewonnenen Erkenntnisse zur Erarbeitung des Peripheriewinkelsatzes praktisch.

I-1	Einführen in die Problematik Winkelmessung (praktische Beispiele aus Gegenwart und Geschichte) zur Motivierung der Unterrichtseinheit
I-2	Qualitatives Erfassen funktionaler Zusammenhänge zwischen den Größen und Formulieren entsprechender „Je-desto-Aussagen“
I-3	Quantitatives Erfassen funktionaler Zusammenhänge zwischen den Größen und Beschreiben der Zusammenhänge mit grafischen Darstellungen sowie verbalen Formulierungen
I-4	Auswerten, Zusammenfassen und Reflektieren des Vorgehens und Bearbeiten von Anwendungsaufgaben

Tab. 14 Gliederung der Unterrichtseinheit Sehwinkel – Teil I

II-1	Aufstellen von Vermutungen durch Schülerinnen und Schüler zum Auffinden von Punkten, von denen man einen Gegenstand unter einem bestimmten Winkel sieht
II-2	Prüfen der Vermutungen (enaktive und ikonische Ebene), Reflektieren des Vorgehens
II-3	Zusammenfassen der Ergebnisse und Formulieren des Peripheriewinkelsatzes
II-4	Beweis des Peripheriewinkelsatzes

Tab. 15 Gliederung der Unterrichtseinheit Sehwinkel – Teil II

Dazu werden sie mit der zentralen Frage konfrontiert, wie sie sich aufstellen müssten, damit alle einen bestimmten Gegenstand unter demselben Winkel sehen.

(c) Didaktisch-methodische Einordnung

Die Erarbeitung der Lerninhalte erfolgte durch aktives Handeln und praktisches Tun, indem Positionen eingenommen bzw. Größen eingestellt und gemessen wurden. Der Wechsel der Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch) sowie die wechselseitige Betrachtung realer Prozesse und mathematischer Interpretationen schufen die Voraussetzungen zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen.

In beiden Abschnitten der Unterrichtseinheit ließen sich Elemente des forschenden Lernens erkennen. Roth und Weigand (2014, S. 5) unterscheiden in ihrem Modell des forschenden Lernens drei miteinander vernetzte Phasen: Ausgehend von einer Zielsetzung kann mit dem Experimentieren bzw. dem systematischen Variieren von Beispielen oder mit dem Festhalten und Überdenken von Beobachtungen und Einsichten begonnen werden.

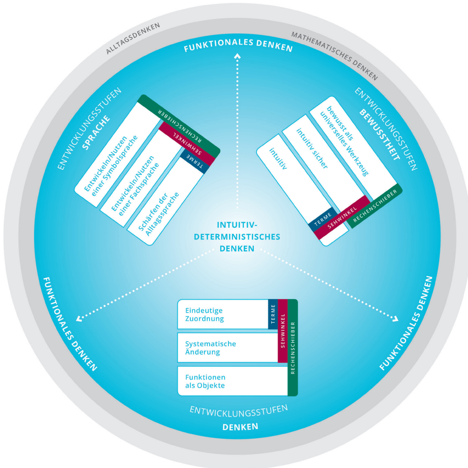
Der erste Teil der Fallstudie startete mit dem Experimentieren. Für die Untersuchung erhielten die Lernenden ein vorbereitetes Arbeitsmaterial (siehe Anhang II). In Klein-gruppen zu zwei bis drei Personen führten sie Messungen an drei Stationen aus. Diese werteten sie im Anschluss entsprechend der Aufgabenstellungen aus. Hinsichtlich der Interaktionsstrukturen entsprach dieser erste Unterrichtsblock in der Taxonomie nach Meyer (2015, S. 38) dem „Kooperativen Unterricht“.

Der zweite Teil der Unterrichtssequenz startete, nach dem Modell von Roth und Weigand, mit dem Festhalten und Überdenken von Beobachtungen und Einsichten zu einem Phänomen. Die gewonnenen Erkenntnisse zu funktionalen Zusammenhängen wurden nun auf eine von der Lehrperson vorgegebene geometrische Problemstellung übertragen und angewendet. *„Das eigentliche Lernen beginnt da, wo neue Erfahrungen gezielt mit vorhandenem Wissen vernetzt [werden]“* (Roth/Weigand 2014, S. 6). Die Schülerinnen und Schüler probierten verschiedene Lösungswege aus, die sie anschließend diskutierten und überprüften. Dabei wurden die in der Unterrichtseinheit gewonnenen Erkenntnisse zur Einführung eines geometrischen Satzes, des Peripheriewinkelsatzes, genutzt. Die Erarbeitung erfolgte im Klassenverband, sodass diese zweite Sequenz dem „Gemeinsamen Unterricht“ zugeordnet werden konnte (vgl. Meyer 2015, S. 38).

In einigen Lehrbüchern (vgl. Lambacher Schweizer 2013, S. 21; Pohlmann/Stoye 2006, S. 26) wird versucht, den Peripheriewinkelsatz mit Fragestellungen aus dem Alltag zu motivieren. Das ist als weniger zielführend einzuschätzen. Sucht man z. B. Plätze im Zuschauerbereich, von denen man eine Bühne unter einem bestimmten Winkel sehen kann, so betrachtet man dabei die Ebene des Vorhangs und vernachlässigt die Tiefe der Bühne. So können sich bei Bühnen mit einer größeren Tiefe trotz gleichgroßer Sehwinkel erhebliche Sichteinschränkungen ergeben, was durchaus realen Erfahrungswerten entspricht. Auch Beispiele in anderen Lehrwerken überzeugen nicht durchgängig (vgl. Griesel u. a. 2015, S. 27).

Bei dieser Fallstudie wurde deshalb bewusst auf ein Beispiel aus dem Alltag verzichtet und eine innermathematische Fragestellung ausgewählt. Im Vordergrund stand, die Kenntnisse zu den funktionalen Beziehungen zwischen den Größen auf ein geometrisches Problem zu übertragen.

(d) Diskussion ausgewählter fachdidaktischer Aspekte



Im Folgenden werden die in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Aspekte Denken, Sprache und Bewusstheit für die Entwicklung funktionalen Denkens im Kontext der Fallstudie „Sehwinkel" näher betrachtet.

(d1) Denken

Die Lösungen der gestellten Probleme erforderten bei Schülerinnen und Schülern funktionales Denken in den Stufen eindeutige Zuordnung und systematische Änderung. Die Lernenden sollten zu der Einsicht geführt werden, dass es bei der Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen zwei der drei Größen vorteilhaft ist, die dritte Größe konstant zu halten. Die Richtungen der Zuordnung zwischen jeweils zwei Größen sind prinzipiell gleichwertig. Sie ergaben sich jedoch meist aus der messtechnischen Umsetzung. So war es bei konstanter Gegenstandsbreite messtechnisch wesentlich einfacher, zu vorgegebenen Sehwinkeln (Einstellen einer entsprechenden Öffnung am Sehtrichter, Fixierung mit Büroklammern und anschließende Messung des Winkels) die Gegenstandsbreite durch ein Variieren der Entfernung zu bestimmen. Bei Umkehr der Zuordnung würde eine entsprechende Anpassung der Trichteröffnung größere Messfehler hervorbringen.

Messwertpaare zu bestimmen, ist eine Form der Zuordnung. Im Gegensatz zum Messen der Längen ist die Ermittlung der Winkel für Lernende deutlich schwieriger. Es bedarf geeigneter Hilfsmittel, um die Sehwinkel hinreichend genau zu messen bzw. einzustellen. Handelsübliche Dreiecke aus Plastik oder Dreiecke aus Pappe sind aufgrund von Messungenauigkeiten und möglicher Verletzungsgefahr nicht zu empfehlen. Deshalb wurden sogenannte „Sehtrichter" aus Papier entwickelt. Sie sind der Mantel eines Kreiskegels mit abgeschnittener Spitze. Dieser kann gefahrlos vor das Auge gehalten werden. Mit einem fest vorgegebenen Winkel am Sehtrichter (verklebter Sehtrichter) kann der Lernende relativ genau eine Entfernung zum Gegenstand (bei vorgegebener Breite) einstellen oder eine sichtbare Breite (bei vorgegebener Entfernung) ablesen. Soll der Winkel am „Sehtrichter" variiert werden, dürfen die Kegelmäntel nicht verklebt sein. Sie wurden daher nur mit Büroklammern fixiert. Zur Ermittlung des Öffnungswinkels schieden rechneri-

Abb. 22 Schüler beim Messen des Öffnungswinkels

sche Verfahren aufgrund der fehlenden Kenntnisse in dieser Klassenstufe aus. Es musste auf eine direkte Messung des Winkels zurückgegriffen werden. Dazu wurde ein spezielles Messgerät entwickelt: Zwei rechteckige Blätter aus Zeichenpapier wurden an einer der schmalen Seiten durch Klebestreifen verbunden. Der Sehtrichter wurde zwischen beide Blätter geschoben, sodass das obere Blatt als „Zeiger“ vor einer senkrecht zur Tischebene angebrachten Winkelskale fungierte. Die Abbildung 22 zeigt einen Schüler beim Ablesen des Winkels. Die Konstruktion eines solchen Messgerätes könnte für Lernende auch eine zusätzliche oder differenzierende Aufgabe sein.

Damit waren alle drei Größen in einem gewissen Intervall stufenlos veränderbar und messbar. Die Lernenden konnten durch konkrete enaktive Handlungen in der Einsicht bestärkt werden, dass es sich jeweils um kontinuierliche Veränderungen handelte. Daraus ließen sich Konsequenzen für die grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge ableiten (z. B. Verbinden von Messpunkten im Koordinatensystem). Die grafischen Darstellungen ermöglichten eine Analyse des Änderungsverhaltens und die Ableitung entsprechender Voraussagen.

(d2) Sprache

Als Konkretisierung der allgemeinen Übersicht zur Entwicklung von Sprache aus Kapitel 7.1.2 (siehe Abbildung 13) ergibt sich für diese Fallstudie die in Abbildung 23 dargestellte Struktur.

Die Beschreibung funktionaler Zusammenhänge erfolgte in der Unterrichtseinheit im Wesentlichen durch Ausschärfung der Alltagssprache unter Einbeziehung von bereits bekannter Fach- und Symbolsprache. Die Ergänzung der mathematischen Fachsprache beschränkte sich auf die Einführung des Begriffes „Peripheriewinkel“.

Eine Ausschärfung der Alltagssprache zeigte sich z. B. in Attributierungen selbsterklärender Größen (z. B. sichtbare Breite oder Höhe eines Gegenstandes). Für eine sprachliche Verkürzung ließe sich alternativ auch ein (jedoch dann zusätzlicher) fachsprachlicher Begriff definieren. Eine Anlehnung an Alltagssprache kann aber dazu führen, dass Begriffe abweichend von der fachwissenschaftlichen Definition gedeutet werden. Der Begriff

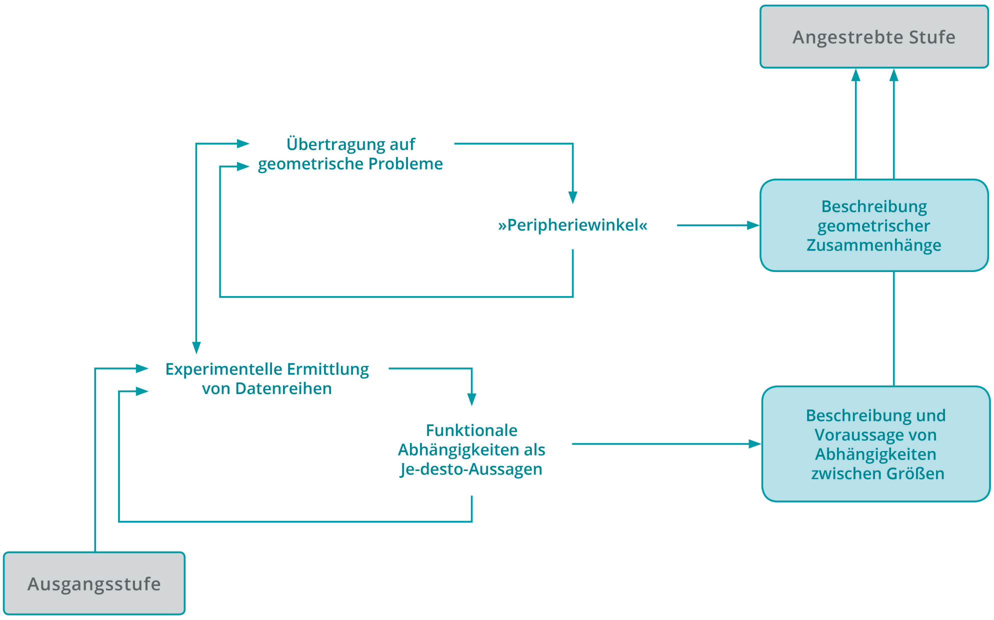


Abb. 23 Entwicklung funktionalen Denkens durch Sprache bei der Fallstudie Sehwinkel

Sehwinkel bezeichnet hier die Größe des Winkels, unter dem ein Betrachter einen Gegenstand mit seinen konkreten Abmessungen aus einer bestimmten Entfernung sieht. Die Physik bezeichnet als Sehwinkel hingegen denjenigen Winkel, unter dem die von zwei Punkten ausgehenden Strahlen ins Auge treten. Da die Größe des Netzhautbildes nur vom Sehwinkel und nicht von den Abmessungen und Entfernungen eines Gegenstandes abhängt, benutzt die Physik auch den Begriff „scheinbare Größe“ (vgl. Grimsehl 1988, S. 177). Derartig detaillierte physikalische Betrachtungen sind jedoch nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts.

Bei der Beschreibung funktionaler Zusammenhänge nutzten die Schülerinnen und Schüler in der Regel „Je-desto-Aussagen“, griffen dabei aber auch schon auf bekannte fachsprachliche Mittel zurück. In einigen Fällen wurden direkte bzw. indirekte Proportionalitäten vermutet und nachgewiesen bzw. widerlegt. Grundsätzlich können sprachliche Darstellungen zu funktionalen Zusammenhängen, insbesondere beim Wechsel von Darstellungsebenen (von enaktiv zu ikonisch), als ein Gradmesser für Verstehen angesehen werden.

Bei der Übertragung auf geometrische Zusammenhänge erschien eine Ausschärfung der Alltagssprache zunächst als ausreichend. Eine Formulierung des Peripheriewinkelsatzes wäre grundsätzlich auch ohne Bezeichnung der betreffenden Winkel als „Peripheriewinkel“ möglich und mit Lernenden zu diskutieren gewesen. Für die Einführung des neuen Begriffes „Peripheriewinkel“ sprachen, neben den Forderungen des sächsischen Lehrplanes (vgl. SMK 2013, S. 17), folgende Punkte:

- Der Begriff ist selbsterklärend, wenn „Peripherie“ von Lernenden gedeutet werden kann.

- Der Begriff kann bei weiteren Sätzen verwendet werden (z. B. Zentri-Peripheriewinkelsatz, Satz des Thales).
- Der Begriff führt zu einer sprachlichen Verkürzung mathematischer Sätze.

(d3) Bewusstheit

Funktionales Denken wurde in dieser Unterrichtseinheit von den Schülerinnen und Schülern nicht mehr nur intuitiv, sondern auch, bedingt durch Aufgabenstellungen, bereits zunehmend intuitiv sicher angewandt. Die Aufgaben zu den qualitativen Betrachtungen für den ersten Teil der Unterrichtseinheit (siehe Anhang II, dort S. 1) waren offen formuliert. Die Arbeitsanweisungen zum Experimentieren und die Vorgaben zur Auswertung (siehe Anhang II, dort S. 2ff.) strukturierten das Vorgehen für die Lernenden und orientierten auf die Nutzung funktionaler Beziehungen. Von den in der Auswertung verwendeten Darstellungsformen (Wertetabelle, Graph, verbale Formulierung) regten meist die grafischen Darstellungen die Lernenden zur Prüfung von Proportionalitäten an. Die Schülerinnen und Schüler hatten also gezielt nach bekannten mathematischen Zusammenhängen gesucht. Während die Ermittlung der qualitativen Aussagen eher der intuitiven Stufe zuzuordnen ist, entspricht die Bestimmung quantitativer Zusammenhänge einem intuitiv sicheren Vorgehen.

Laut Bruder (2014, S. 157) folgt nach dem Gewöhnen an bestimmte heuristische Hilfsmittel und dem Bewusstmachen spezieller Methoden eine Übungsphase zur selbstständigen Bearbeitung. Entsprechende Übungsaufgaben für den ersten Teil der Fallstudie befinden sich im Arbeitsmaterial (siehe Anhang II, dort S. 6).

Teil II der Unterrichtseinheit ist im Modell von Bruder der Kontexterweiterung einer Strategieanwendung zuzuordnen. Die Lernenden übertrugen die in Teil I erworbenen Kenntnisse auf geometrische Problemstellungen.

Dabei sollte ein Punkt im Klassenraum ermittelt werden, von dem aus ein Gegenstand unter einem bestimmten vorgegebenen Winkel zu sehen ist. Die Lernenden verstanden, dass zwischen dem konkreten Gegenstand (bzw. einer konkreten Abmessung) und dem festgelegten Sehwinkel genau eine Entfernung existieren muss. Dieser Punkt konnte mit dem Sehtrichter bestimmt werden. Die Schwierigkeit lag darin, weitere Punkte zu finden, von denen aus man den Gegenstand unter diesem festgelegten Winkel sehen konnte. Die Schülerinnen und Schüler äußerten dazu folgende Vermutungen:

- Weitere Punkte liegen auf einer Parallelen zur Gegenstandslinie.
- Weitere Punkte liegen auf einer gekrümmten Kurve.

- Weitere Punkte liegen auf einem Kreis.
- Es existieren keine weiteren Punkte.

Die meisten Lernenden schlossen sich der Vermutung zum Kreis an. Es wurden Versuche unternommen, den Kreis genauer zu beschreiben (z. B.: Der Radius des Kreises ergibt sich durch die Halbierung der Gegenstandsweite. Die Endpunkte des Gegenstandes liegen nicht auf der Peripherie des Kreises.)

Im weiteren Stundenverlauf wurden diese Vermutungen zielgerichtet untersucht. Mehrere Schülerinnen und Schüler markierten jeweils einen entsprechenden Punkt auf dem Fußboden, von dem aus sie den vorgegebenen Gegenstand unter dem festgelegten Winkel sehen konnten (siehe Abbildung 24). Die Vermutung des Kreises als geometrischen Ort schien sich zu bestätigen. Bei der Prüfung des Kreises wurden sowohl die enaktive als auch die ikonische Darstellungsebene genutzt. Auf dem Fußboden wurden zur Überprüfung einige Winkel mit einem Tafelwinkelmesser nachgemessen und bestätigt (siehe Abbildung 25).

Abb. 24 Lernende finden weitere Punkte

Abb. 25 Lernende prüfen Winkel

Die Prüfung der Vermutung zum Kreis sollte sowohl mit dynamischer Geometriesoftware (ikonische Ebene) als auch durch Messungen auf dem Fußboden (enaktive Ebene) erfolgen. Mithilfe von dynamischer Geometriesoftware (DGS) wurden die Abmessungen des Gegenstandes durch die Strecke $\overline{AB}$ und die Standpunkte der Schülerinnen und Schüler exemplarisch durch die Punkte C, D, E und F wiedergegeben. Durch ein Verschieben der Punkte mit dem sogenannten Zugmodus näherte man sich der Winkelgröße am Sehtrichter an, traf ihn aber nicht genau. Diese Suche nach dem passenden Winkel mit dem Zugmodus entsprach dem tatsächli-

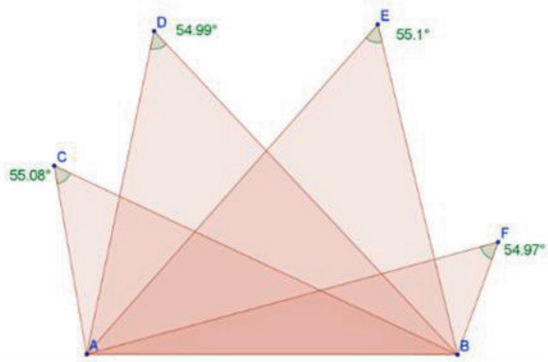


Abb. 26 Einstellen der Winkel mit DGS

chen Vorgehen (Aufstellen im Zimmer) weitaus stärker als eine direkte Einstellung (siehe Abbildung 26).

Ob die Punkte auf der Peripherie eines Kreises lagen, prüften die Schülerinnen und Schüler durch den Umkreis eines Dreiecks – zuerst mit DGS in der Projektion und anschließend mit den markierten Positionen. Dafür wurde auf dem Fußboden ein Dreieck abgeklebt, dessen Umkreismittelpunkt bestimmt und der dazugehörige Kreis nachgezeichnet. Die zu Beginn der Stunde geäußerten Vermutungen wurden im Laufe der Stunde durch die systematische Prüfung funktionaler Zusammenhänge widerlegt oder bestätigt. In der Tabelle 16 wird verdeutlicht, welche Wechsel zwischen den Darstellungsebenen stattfanden.

enaktiv		**ikonisch**		**enaktiv**
Aufstellen der Lernenden	→	Verschieben der Punkte mit DGS (Projektion)		
Markieren der Positionen auf Fußboden	→	Festlegen der Punkte mit DGS		
		↓		
		Auswahl dreier Punkte für ein Dreieck mit DGS	→	Auswahl dreier Punkte für ein Dreieck auf Fußboden
		Bestimmen des Umkreismittelpunkts mit DGS	→	Bestimmung des Umkreismittelpunkts auf Fußboden
		Konstruieren des Kreises mit DGS	→	Zeichnen des Kreises auf Fußboden
		Prüfen der Lage weiterer Punkte zur Kreislinie	→	Prüfen weiterer markierter Punkte auf Fußboden

Tab. 16 Wechsel von Darstellungsebenen

Auch in den Diskussionen zur Genauigkeit von Messungen und den Auswirkungen auf weitere Betrachtungen zeigte sich eine bewusste Nutzung funktionaler Denkweisen.

7.2.3 Vom Rechenschieber zum Logarithmus

Die Rechenoperation Logarithmieren bzw. der Begriff Logarithmus fordert Schülerinnen und Schüler in der Regel deutlich stärker als vergleichbare Operationen, wie das Potenzieren oder Radizieren. Weber (2013, S. 82f.) benennt dafür drei mögliche Ursachen: den Begriff selbst, seine symbolische Darstellung und die inverse Begriffsfassung. Der Begriff Logarithmus ist weder selbsterklärend, noch existiert eine deutsche Übertragung

wie beim Radizieren. So wie man den Begriff „Wurzelziehen“ benutzt, könnte man vom „Exponentensucher“ (vgl. Weber 2013, S. 85) sprechen. Hinzu kommt eine Symbolik, die sich deutlich von der Symbolik bekannter Operationen abhebt. Es gibt kein eigenständiges Symbol, sondern eine Abkürzung, vergleichbar mit der Symbolik des Grenzwertes. Weder der Begriff an sich noch dessen symbolische Darstellung wirken lernförderlich.
Einen Wechsel zu alternativen und „didaktisierten“ symbolischen Darstellungen – $a^{\square}(b)$ statt $\log_a(b)$ – sieht Weber (2013, S. 85) kritisch. Es gibt auch das Problem einer bis auf Euler zurückreichenden inversen Begriffsfassung: der Logarithmus als Potenzexponent. Eine mathematisch korrekte Einführung des Begriffs Logarithmus über dessen Umkehroperation reicht nicht aus, um ein tieferes Verständnis bei Lernenden hervorzurufen. Eine Rechenoperation prinzipiell nur über ihre Umkehrung und ohne entsprechende Grundvorstellungen einzuführen (z. B. die Subtraktion nur als Umkehrung der Addition), ist didaktisch nicht zu begründen.
Weber (2013, S. 84) verweist, neben alternativen Sprech- und Schreibweisen, auf die Sinnhaftigkeit händischer Berechnungen. Ein verfrühter Einsatz digitaler Werkzeuge zur Berechnung logarithmischer Ausdrücke kann die Ausbildung eines tragfähigen Begriffsverständnisses sogar behindern. Wichtiger erscheint es, den Lernenden mehrere inhaltliche Deutungsmöglichkeiten zu bieten. Weber (2013, S. 91) leitet aus den verschiedenen mathematischen Eigenschaften von Logarithmen entwicklungsfähige Grundvorstellungen ab.
Potentiale für eine verständnisfördernde Behandlung von Logarithmen erschließen sich beispielsweise auf der Basis einer funktionalen Begriffsfassung (vgl. Weber 2013, S. 86f.). Dabei betrachtet man (vorerst ohne Kenntnis des Begriffs Logarithmus) Exponentialfunktionen mit ihren grafischen Darstellungen der Form $f(x) = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$. Über deren Umkehrfunktionen nähert man sich dem Begriff Logarithmusfunktion und dem Begriff des Logarithmus. Den Schülerinnen und Schülern erscheinen Logarithmen so nicht nur als Exponenten, sondern auch als Funktionswerte und damit geometrisch als Längen (vgl. Weber 2013, S. 86).

(a) Intentionen und curriculare Einordnung

Ziel dieser Fallstudie war es, einen Unterrichtsgang zu entwerfen, der diese funktionale Begriffsfassung mit einem für Schülerinnen und Schüler hinreichend konkreten und erfahrbaren Lerngegenstand verbindet. Dafür wurde die Auseinandersetzung mit dem Rechenschieber ausgewählt. Mit diesem Phänomen lassen sich mathematikhistorische und rechentechnische Aspekte verbinden. Die Schülerinnen und Schüler erfahren, wie Vernetzungen von mathematischen Erkenntnissen, verbunden mit technisch-konstruktiven Ideen, neue Rechenhilfsmittel hervorbringen.

Bereits 1918 forderte Finke, in Anlehnung an Lietzmann, die Lehrenden auf, *„diese wunderbaren Erzeugnisse des menschlichen Geistes ihren Zöglingen vorzuführen* [, auch weil] *die Kenntnis der Rechenmaschinen den Schülern nicht vorenthalten bleiben dürfe*" (Finke 1918, S. 127). Lernende können erfahren, wie Rechenhilfsmittel die Mathematik und damit den Mathematikunterricht beeinflusst haben und weiter beeinflussen. Sie erkennen, dass die Einführung moderner Rechenhilfsmittel kein Problem der Gegenwart, sondern ein ständig wiederkehrendes Phänomen ist. Diese Erkenntnisse betonen die dynamischen Aspekte von Mathematik und tragen somit zur Entwicklung eines adäquaten Bildes der Wissenschaft bei.

Zur Erarbeitung der Logarithmen am Rechenschieber lag der Fokus auf den Skalen zur Multiplikation. Ausgangspunkte für eine funktionale Betrachtung können sowohl die Konstruktion als auch die Untersuchung einer vorgegebenen Skale sein.

Die Logarithmusfunktionen ohne den Begriff Logarithmus zu behandeln, ist im Mathematikunterricht (noch) keine gängige Praxis. Die besonderen Potentiale liegen aber gerade in diesem Ansatz. Die Schülerinnen und Schüler erfahren dadurch, dass die Einführung von Begriffen notwendig ist – in der Fach- wie in der Symbolsprache. Auch dies kann als Beitrag zur Entwicklung eines adäquaten Bildes von Mathematik gewertet werden.

Der sächsische Lehrplan des Gymnasiums fordert in Klasse 10 die Einführung aller bis zum Abitur relevanten Funktionstypen. Die nachfolgende Unterrichtssequenz kann curricular im Lernbereich „Funktionale Zusammenhänge" verortet werden. Zu dessen verbindlichen Inhalten zählen: die Umkehrung von Exponentialfunktionen, der Begriff des Logarithmus, Eigenschaften von Logarithmusfunktionen sowie das Lösen einfacher Exponentialgleichungen (vgl. SMK 2013, S. 31). Die Schülerinnen und Schüler sollen ihr Wissen zu reellen Funktionen vervollkommnen und inner- und außermathematische Problemstellungen geeignet mathematisieren. Die mathematische Fachsprache soll zunehmend von der Alltagssprache abgrenzt werden (vgl. SMK 2013, S. 29).

Bezüglich des Kompetenzmodells der Bildungsstandards werden die mathematischen Leitideen „Zahl" und „Funktionaler Zusammenhang" sowie die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Probleme mathematisch lösen" und „Mathematische Darstellungen verwenden" berührt.

(b) Struktur der Unterrichtseinheit

Die Unterrichtseinheiten umfassten, je nach Variante, vier bis fünf Unterrichtsblöcke zu je 90 Minuten. Sie wurden an zwei Gymnasien, in insgesamt sechs Klassen und über drei Schuljahre hinweg erprobt. In allen Erprobungsklassen arbeiteten die Schülerinnen und Schüler seit Klasse 8 mit einem CAS-Rechner.

Die Arbeitsmaterialien orientierten sich an der Abfolge der einzelnen Unterrichtsschritte. Die Materialien wurden stetig überarbeitet und angepasst, sodass für die letzte Erprobung ein geschlossenes Themenheft vorlag (siehe Anhang III). Ein Anliegen war, den Lernenden eine gelenkt-strukturierte, aber weitestgehend eigenständige Bearbeitung zu ermöglichen.

Den Verlauf der Unterrichtseinheit zeigt die Tabelle 17.

1	Einführung in die Problematik „Rechenschieber“ zur Motivierung der Unterrichtseinheit
2	Einstiegsvarianten: Variante 1: Konstruieren einer Skale zur Multiplikation, Variante 2: Untersuchen einer vorgegebenen Skale zur Multiplikation
3	Betrachten der Zuordnungen für eine vorgegebene Skale: Zahl → Streckenlänge (Funktionstyp unbekannt: Arbeitsbegriff „Längenfunktionen“) Streckenlänge → Zahl (Funktionstyp bekannt: Exponentialfunktionen); Graphen als intuitiver Zugang zum „Umkehren“ der Funktionen
4	Untersuchung für vier weitere Skalen in Gruppen: - Zusammenhänge zwischen den Zuordnungen einer Skalenteilung - Zusammenhänge zwischen den Zuordnungen verschiedener Skalenteilungen - wechselseitige Deutung von Eigenschaften der Funktionen an der Skale des Rechenschiebers (Wechsel in den Darstellungsebenen) - Vermuten eines Zusammenhanges: „neuer“ Funktionstyp – Aufstellen von Gleichungen scheitert am Fehlen der Rechenoperation Logarithmieren
5	Notwendigkeit der Einführung des Logarithmierens als weitere Umkehrung des Potenzierens
6	Herstellen eines Zusammenhangs zwischen der Rechenoperation Logarithmieren und den „Längenfunktionen“ – Längenfunktionen werden als Logarithmusfunktionen gedeutet
7	Aufgaben zur Übung und Vertiefung (Anwendung funktionaler Zusammenhänge und der Gesetzmäßigkeiten beim Logarithmieren); Informationen zu angrenzenden Themenbereichen
8	Lernerfolgskontrollen im Anschluss an die Unterrichtseinheit und nach ca. zwölf Wochen

Tab. 17 Gliederung der Unterrichtseinheit Rechenschieber

Mögliche Variationen ergeben sich bereits beim Einstieg (Konstruieren einer Skale vs. Untersuchen funktionaler Zusammenhänge bei einer vorgegebenen Skale). Die Fallstudien deuteten darauf hin, dass das Konstruieren einer Skale für Schülerinnen und Schüler ein höheres Aktivierungspotential besitzt. Abhängig von der jeweiligen Klassensituation erfolgten Ergänzungen in folgenden Themenbereichen:

- Einordnung des Rechenschiebers in die Entwicklung historischer Rechenhilfsmittel,

- Ausblick auf weitere Spezialanwendungen von Rechenschiebern,
- Einordnung der Verwendung von Rechenschiebern im Unterricht (u. a. Rechnen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, Fragen der Genauigkeit, Problem des „Durchschiebens“ bei Überschreitung des vorgegebenen Skalenabschnittes),
- Ausblick auf die Konstruktion weiterer Skalen (z. B. Kubikzahlen, trigonometrische Werte),
- logarithmische Teilungen bei Koordinatensystemen.

Es soll nun die „innere“ Struktur der Unterrichtseinheit näher betrachtet werden (siehe Abbildung 27). Mit der Skale eines Rechenschiebers wurde ein konkretes (historisches) Phänomen zum Ausgangspunkt funktionaler Betrachtungen. Die Schülerinnen und Schüler erkannten, dass grundsätzlich zwei Zuordnungen möglich waren und es sich jeweils um Funktionen handelte: Jeder Streckenlänge konnte eindeutig eine Zahl und umgekehrt jeder Zahl eindeutig eine Streckenlänge zugeordnet werden.

Die Betrachtung dieser Funktionen erfolgte in drei Schritten: (1) Die Zuordnung wurde aus dem Phänomen heraus beschrieben und die Umkehrung dieser Zuordnung als Vertauschen von Definitions- und Wertebereich interpretiert. (2) Die Lernenden betrachteten die Funktionen als Graphen und nutzten deren systematisches Änderungsverhalten bewusst als Werkzeug zur Problemlösung; das Umkehren deuteten sie geometrisch als Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Während sie einen der Funktionstypen als Exponentialfunktion identifizierten, war ihnen der andere noch unbekannt. Da der Begriff Logarithmus den Schülerinnen und Schülern noch unbekannt war, wurde als Arbeitsbegriff „Längenfunktionen“ gewählt. (3) Die Lernenden sollten nun die Gleichungen der Umkehrfunktionen ermitteln, was jedoch an fehlenden Kenntnissen bezüglich des Logarithmierens vorerst scheiterte. Der fehlende Begriff des Logarithmus führte somit zu einer geplanten Unterbrechung des bisherigen Unterrichtsganges. Weitere funktionale Betrachtungen verlangten die Einführung neuer fach- und symbolsprachlicher Ausdrücke.

Nachdem die Begriffe Logarithmus und das Verfahren des Logarithmierens eingeführt worden waren, konnten die Funktionsgleichungen angegeben und die „Längenfunktionen“ als Logarithmusfunktionen interpretiert werden.

(c) Didaktisch-methodische Einordnung

Als Grundformen des Unterrichts kamen laut Meyer (2015, S. 38) der „Gemeinsame Unterricht“ sowie der „Kooperative Unterricht“ zum Tragen. Der Unterrichtsgang orientierte sich am indirekt-genetischen Unterrichtskonzept (siehe Kapitel 7.1.1). Die Schü-

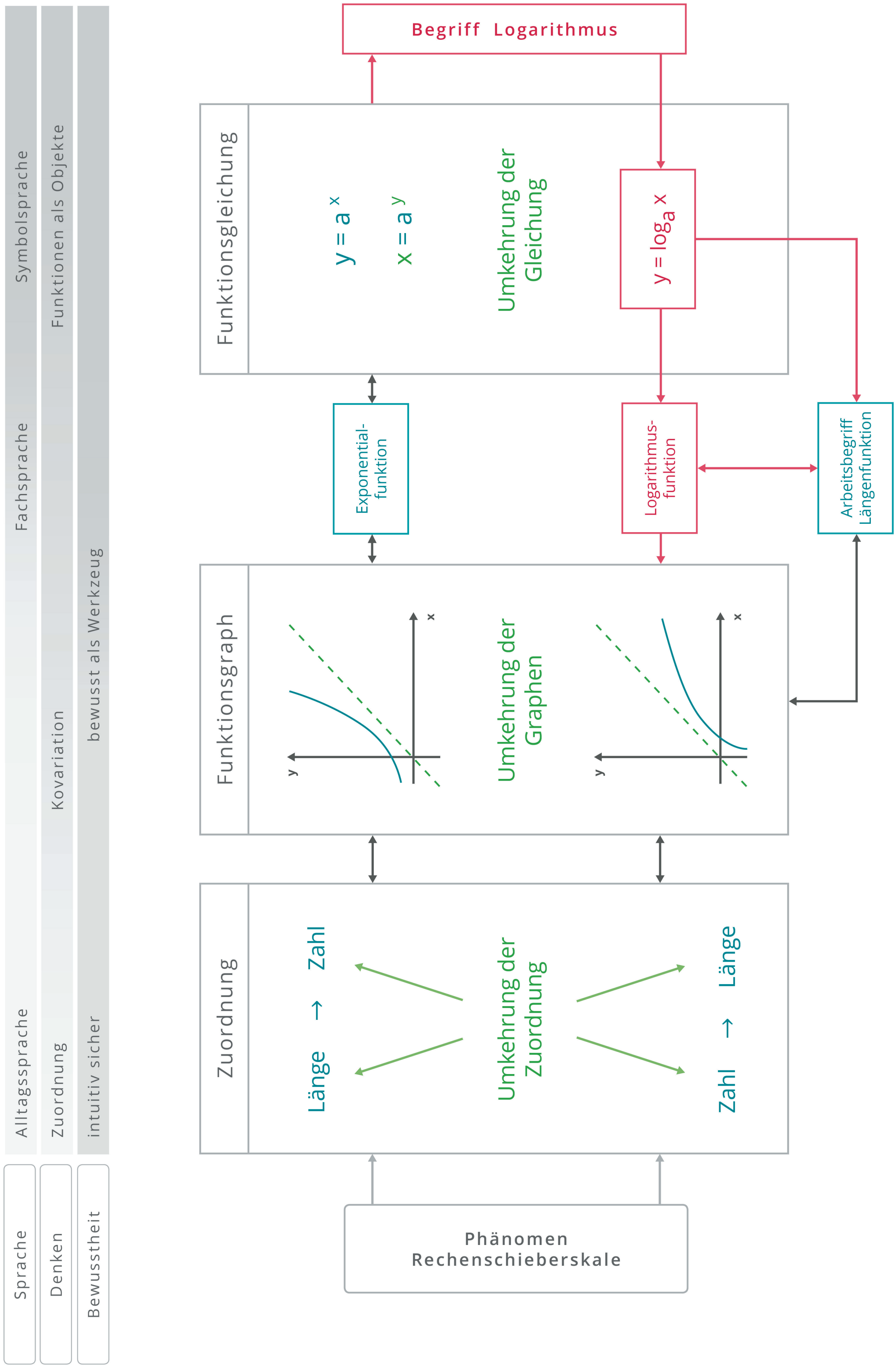


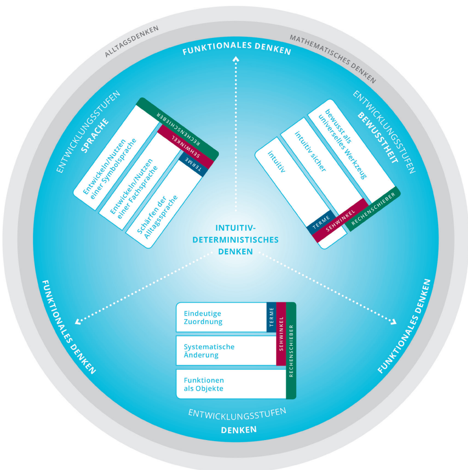
Abb. 27 Innere Struktur der Unterrichtseinheit

lerinnen und Schüler sammelten Erfahrungen mit einem ausgewählten Phänomen und näherten sich mithilfe einer vorläufigen Arbeitsdefinition den Begriffen Umkehr- und Logarithmusfunktion.

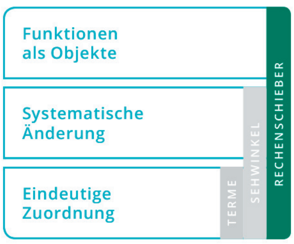
Im konkreten Fall erfuhren sie, dass die Multiplikation zweier Zahlen über eine Addition von Streckenlängen ausgedrückt werden kann. Der notwendige Zwischenschritt (Zurückführung der Addition zweier Zahlen auf die Addition von Streckenlängen) verstärkte bei den Lernenden die Einsicht, dass eine Skale zur Multiplikation grundsätzlich anders aufgebaut sein muss, als die für die Addition. Das Ausführen der Addition von Streckenlängen kann sowohl für Addition als auch Multiplikation (einschließlich ihrer Umkehroperationen) durch konkrete Handlungen auf enaktiver Ebene wirksam unterstützt werden. Hierfür eignen sich Papierskalen (siehe Anhang III, dort S. 23), vorgefertigte Bastelsätze oder originale Geräte. Ein Wechsel zwischen den verschiedenen innermathematischen Darstellungsebenen der funktionalen Zusammenhänge und den Interpretationen an den Skalen des Rechenschiebers war durchgängiges Prinzip. Das Aufgabenmaterial war so konzipiert, dass es die Schülerinnen und Schüler weitgehend selbstständig, einzeln oder in Gruppen, bearbeiten konnten.

(d) Diskussion ausgewählter fachdidaktischer Aspekte

Es werden nun die in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Aspekte zur Entwicklung funktionalen Denkens im Kontext der Fallstudie „Rechenschieber“ näher betrachtet. Aus Abbildung 17 geht hervor, dass bei dieser Fallstudie nahezu alle Entwicklungsstufen der Merkmale Denken, Sprache und Bewusstheit einbezogen werden konnten.



(d1) Denken



In der Fallstudie zum Rechenschieber wurden alle Entwicklungsstufen des funktionalen Denkens von den Schülerinnen und Schülern angewendet. Bereits zu Beginn der Unterrichtseinheit ordneten sie gewissen Streckenlängen Zahlen zu. Sie begannen, bei vorgegebener Einheitsstreckenlänge (an der rechten Begrenzung war die Zahl 2 angetragen) allen Vielfachen dieser Strecke Zahlen zuzuordnen. Dies wurde zusätzlich durch konkretes Handeln mit vorgefertigten Papierskalen unterstützt (siehe Anlage III, dort S. 23). Die grundlegende Vorgehensweise orientierte sich auch an den Ideen von Clausen (1957, S. 4) und Drenckhahn (1956, S. 18).

Die Schülerinnen und Schüler erkannten charakteristische Eigenschaften der Skalierung: Für größer werdende Zahlen verringerte sich der Abstand zwischen benachbarten natürlichen Zahlen. Dass die Skale mit der Zahl 1 und nicht mit der Zahl 0 beginnen muss, war für die Schülerinnen und Schüler zuerst ungewohnt. Die Papierskalen halfen ihnen jedoch, plausible Argumente für die Besonderheiten dieser Skale zu finden. Bis zu diesem Schritt hatten die Lernenden zwei Skalen vor sich. Sie wussten, dass diese aufgrund der Kommutativität der Multiplikation identische Teilungen besitzen müssen. Weiterhin hatte die Skale bei der Zahl 1 ihren Anfang und es ergaben sich die zu Vielfachen der Zahl 2 gehörenden Streckenlängen. Das Antragen beliebiger weiterer Zahlen (z. B. Zahl 3) stellte ein Problem dar. Die Schülerinnen und Schüler erkannten jedoch schnell, dass die Zahl 3 auf der Skale die Streckenlänge zwischen den Zahlen 2 und 4 nicht halbiert.

Ohne digitale Rechenhilfsmittel ließe sich das Problem z. B. durch systematisches Probieren (Einschachteln) hinreichend genau lösen (vgl. Drenckhahn 1956, S. 19). Der Taschenrechner ermöglicht weitere und vor allem genauere Lösungsverfahren: Beim Betrachten des Änderungsverhaltens der Funktion, die jedem Vielfachen der Einheitsstreckenlänge eine Zahl zuordnet, erkannten die Lernenden einen exponentiellen Prozess. Durch eine gezielte Untersuchung dieses funktionalen Zusammenhangs ließ sich das für die Zahl 3 notwendige Vielfache der Einheitsstreckenlänge bestimmen. Grafische Lösungen oder Regressionsverfahren konnten für alle weiteren Zahlen angewendet werden. Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert, eigene Lösungen zu entwickeln. Führten diese Überlegungen nicht zu verwertbaren Ansätzen, konnten sie auf eine Anleitung im Material (siehe Anhang III, dort S. 6ff.) zurückgreifen. Lernende, welche die Position weiterer Zahlen selbstständig bestimmt hatten, wählten fast ausnahmslos den Weg über eine Regression. Sie erkannten, dass mit jeder neu angeordneten Zahl auch deren Vielfache angetragen werden konnten. Ob die Lösung richtig war, überprüften sie enaktiv mithilfe der Papierstreifen.

Betrachteten Schülerinnen und Schüler nun auch noch den Graphen der Funktion, der jeder Zahl eine Streckenlänge zuordnet, so erkannten sie Symmetrieeigenschaften zwischen beiden Graphen. Diese Zusammenhänge, entstanden durch Vertauschen von Definitions- und Wertebereichen, ließen sich im weiteren Verlauf auch für andere Skalenteilungen nachweisen (siehe Anhang III, dort S. 9ff.). Die Schülerinnen und Schüler vermuteten, dass es sich um eine Klasse von Funktionen handelte. Dabei sahen sie Funktionen auf dieser Stufe bereits als Objekte. Die Ermittlung von Gleichungen für die „umgekehrten“

Funktionen scheiterte, da sie kein Verfahren zur Auflösung einer Gleichung nach dem Exponenten kannten. Dieses Problem erforderte eine „Unterbrechung“ der bisherigen funktionalen Betrachtungen. Dieses Unterbrechen des Unterrichtsflusses bot eine Chance: Den Lernenden wurde bewusst, dass ein neues Verfahren, verbunden mit der Einführung neuer Begriffe, notwendig war. Sie hatten damit eine Möglichkeit, Mathematik als *„geistige Schöpfung“* (Winter 1995, S. 37) zu begreifen. Wäre die Logarithmenrechnung vorher behandelt worden, hätte genau an dieser Stelle darauf zurückgegriffen werden können. Andererseits konnten Schülerinnen und Schüler ohne die vorherige Behandlung von Logarithmen eindrucksvoll eine Notwendigkeit der Einführung fach- und symbolsprachlicher Ausdrücke erfahren. Eine derartige Einsicht kann als Beitrag zur Entwicklung eines adäquaten Bildes von Mathematik gewertet werden.

(d2) Sprache

Diese Fallstudie berührte alle genannten Entwicklungsstufen von Sprache (siehe Abbildungen 13 und 28). Die Schülerinnen und Schüler erfassten zunächst funktionale Zusammenhänge zwischen den Zahlen auf der Skale und den zugehörigen Streckenlängen. Diese Zusammenhänge konnten sie mit Alltagssprache beschreiben. Aus dieser Beschreibung leiteten sie weitere Schritte zur Konstruktion einer entsprechenden Skale ab. Sie untersuchten dann diese Zusammenhänge für andere Skalenteilungen und erkannten Gesetzmäßigkeiten zwischen den jeweiligen Funktionen. Die Vertauschung von Definitions- und Wertebereich führte, als Umkehrung der Zuordnungen, zu „umgekehrten“ Funktionen. Schrittweise entwickelten sie sich durch begriffliche Schärfung zu Umkehrfunktionen im mathematischen Sinne. Für die unterschiedlich geteilten Skalen erkannten die Schülerinnen und Schüler – in den Zuordnungen Zahl → Streckenlänge – eine Klasse von Funktionen, die eine geeignete Bezeichnung notwendig machte. In Anlehnung an den konkreten Anwendungsbezug wurde der Arbeitsbegriff „Längenfunktion“ gewählt. Erst in einem weiteren Schritt, bei der Verarbeitung dieser Funktionen mit digitalen Werkzeugen, entwickelte sich die Notwendigkeit, eine Formulierung in Symbolsprache zu finden. Diese funktionalen Abhängigkeiten in Symbolsprache zu fassen, war das Ergebnis einer sprachlichen Entwicklung innerhalb der Unterrichtseinheit. Die Struktur der unterschiedlichen sprachlichen Entwicklungsstufen fasst die Abbildung 28 noch einmal zusammen.

Betrachtet man die Verwendung der Fachsprache aus der Sicht von Lernenden, so erschließen sich gerade zu dieser Thematik tradierte Bezeichnungen nicht immer. Die Schülerinnen und Schüler wussten, dass für die Rechenoperation Potenzieren – im Gegensatz zu den ihnen bisher bekannten Operationen – zwei Umkehrungen existieren. Deren Begriffsnamen orientierten sich an den Operationen: Wurzelfunktion und Logarithmusfunktion. Schwierig wird es bei einer sprachlichen Anlehnung der Funktionsnamen an der Operation Potenzieren.

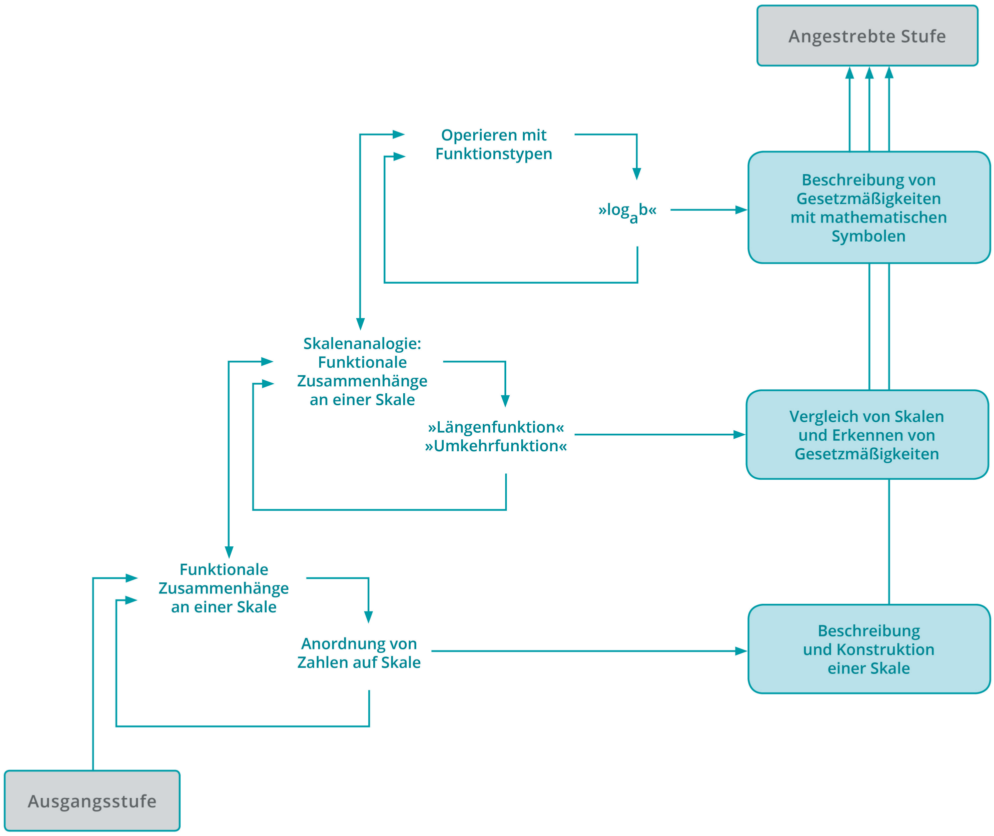


Abb. 28 Entwicklung funktionalen Denkens durch Sprache bei der Fallstudie Rechenschieber

In Abbildung 29 erfolgt eine inhaltlich begründete Unterscheidung zwischen Funktionsnamen. Bei veränderlichem Exponenten heißt die zugehörige Funktion Exponentialfunktion, auch wenn die entsprechende Rechenoperation ebenfalls als Potenzieren bezeichnet wird. Sprachlich gibt es keinen Unterschied zwischen den Rechenoperationen zur Ermittlung von Werten für Terme wie x^2 und 2^x ($x \in \mathbb{R}$). Beides bezeichnet man als Potenzieren. Im mathematischen Sprachgebrauch ordnet man jedoch den Term x^2 einer Potenzfunktion und den Term 2^x einer Exponentialfunktion zu und unterscheidet damit sehr wohl.
Betrachtet man diese sprachlichen Konstrukte aus der Perspektive von Umkehrfunktionen, eignet sich die Bezeichnung Potenzfunktion nur bedingt. Für eine sprachliche Unterscheidung könnte man von der Bezeichnung der Exponentialfunktionen ausgehen. Diese lässt sich daraus erklären, dass bei den Funktionstermen die Exponenten als Argumente und damit als Veränderliche auftreten. Bei dem als Potenzfunktion bezeichneten Funktionstyp sind die Basen veränderlich. Analog dazu könnte man den Begriff „Basisfunktion“ ableiten. Auch wenn eine derartige Bezeichnung für die Schülerinnen und Schüler inhalt-

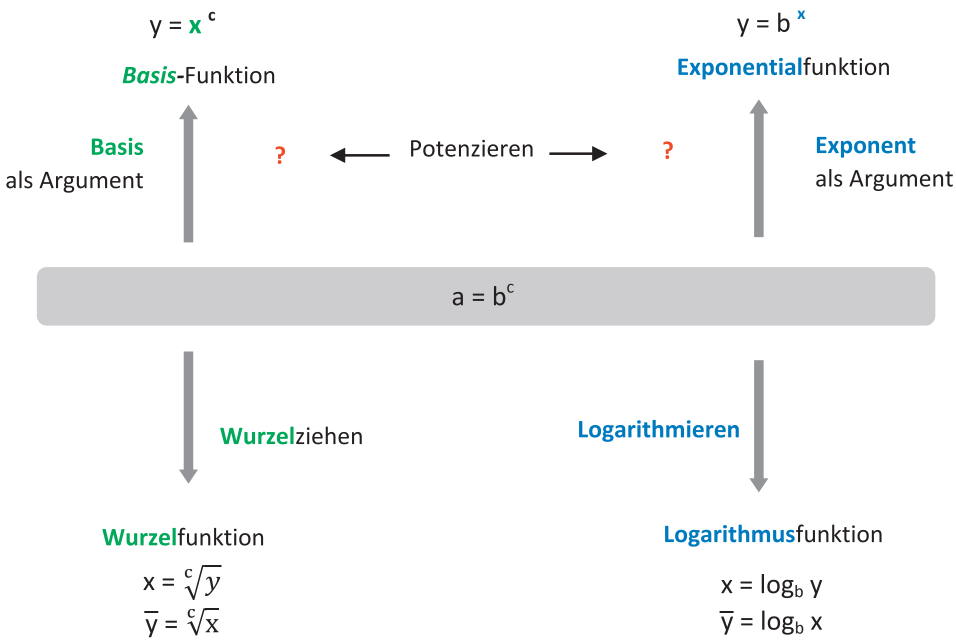


Abb. 29 Betrachtungen zu den Bezeichnungen von Umkehrfunktionen

lich schlüssiger wäre, weicht sie von der in der Mathematik tradierten Fachsprache ab und ist deshalb verwirrend. An dieser Stelle bietet es sich aber durchaus an, mit Lernenden über Kriterien zur Einführung von Bezeichnungen zu diskutieren.
Begriffe, die sich inhaltlich weitgehend selbst erklären (z. B. lineare Funktion) oder durch Metaphern (z. B. Kurven) bei Lernenden Assoziationen auslösen, können das Erlernen von Fachsprache nachweisbar erleichtern (vgl. Malle 2009, S. 11). Andererseits sind auch Fehlinterpretationen möglich. Dieser Gefahr kann wirkungsvoll begegnet werden, indem die Lernenden Fachsprache von Alltagssprache schlüssig abgrenzen (vgl. Malle 2009, S. 10).

(d3) Bewusstheit

Bei dieser Fallstudie wendeten die Schülerinnen und Schüler funktionales Denken bereits intuitiv sicher und bewusst als Werkzeug an.
Die Strukturierung des Aufgabenmaterials für die Lerneinheit beeinflusste auch die Art und Weise des funktionalen Denkens. So können bestimmte Aufgabenstellungen Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern in eine bestimmte Richtung lenken (z. B. gezieltes Betrachten von Änderungsverhalten; Anwenden einer Objektsicht bei Funktionen). Abhängig von den Vorerfahrungen der Lerngruppe und von der für die Unterrichtseinheit zur Verfügung stehenden Zeit könnten die Aufgaben auch deutlich offener gestellt werden.
Das Phänomen Rechenschieber bot, neben mathematikhistorischen Ansatzpunkten, vor allem Möglichkeiten zu einer enaktiven Beschäftigung mit der Logarithmenrechnung.

Durch die Konstruktion einer logarithmischen Skale konnten mathematische und rechentechnische Erfindungen nachentdeckt und Gedankengänge bereits während des Lernprozesses kontrolliert werden. Beispielsweise war es für die Lernenden möglich, mit den vorbereiteten Papierstreifen (siehe Anlage III, dort S. 23) durch Streckenaddition zu prüfen, ob die ermittelten Streckenlängen stimmten. Aus den gewonnenen Erkenntnissen ließen sich auch auf einer weiteren Stufe neue Gesetzmäßigkeiten ableiten. Aus den Zusammenhängen zwischen Addition bzw. Subtraktion von Streckenlängen und der Multiplikation bzw. Division von Zahlen ergaben sich Gesetzmäßigkeiten zum Logarithmieren. Der Wechsel zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Handlungsebene beförderte, in Verbindung mit einer zielgerichteten und wiederholten Reflexion des Vorgehens, die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen.
Bei der Problematik des Umkehrens funktionaler Zuordnungen erwies sich der Wechsel zwischen verschiedenen Ebenen als lernförderlich: Die Lernenden konnten Symmetrieeigenschaften, die sich bei den Graphen durch die Vertauschung von Definitions- und Wertebereich ergaben, durch einen Wechsel in die enaktive oder symbolische Ebene begründen. Die exemplarische Betrachtung der Umkehrungen von Zuordnungen bei den Skalierungen des Rechenschiebers – und damit die Umkehrungen zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen – sind grundsätzlich auch auf andere Funktionstypen übertragbar. Die Fallstudie zeigte, dass es hilfreich sein kann, die Symmetrieeigenschaften vorerst über einzelne Wertepaare, anstatt über den gesamten Definitions- bzw. Wertebereich, abzuleiten. Die Funktionen als Objekte zu betrachten, wäre an dieser Stelle verfrüht und würde den Verstehensprozess behindern.
Funktionen wurden bereits bewusst als Werkzeug eingesetzt. Dafür sprechen differenzierte Betrachtungen der jeweiligen Zuordnungen. Veränderte Notationen beeinflussten den Fokus von Lernenden auf die unterschiedlichen Aspekte einer Zuordnung. Während beispielsweise die Abbildung 30 stärker die Vertauschung von Definitions- und Wertebereich hervorhebt, betont die Abbildung 31 die Umkehrung der Zuordnung.
Auch das Verstehen des Umkehrens von Funktionen kann durch entsprechende Grundvorstellungen nachhaltig unterstützt werden. Als eine Vorstellung bietet sich ein Pers-

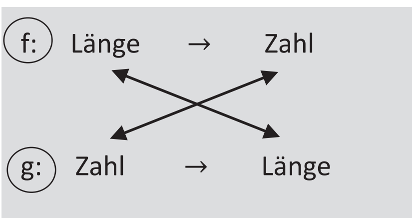


Abb. 30 Betonung von „Vertauschung“

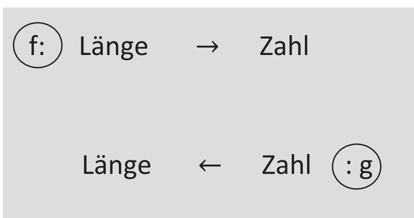


Abb. 31 Betonung von „Umkehrung“

pektivwechsel in Form einer „Änderung der Blickrichtung“ an. Diese Sichtweise würde durch die Notation in Abbildung 31 als „Umkehren der Zuordnung“ zusätzlich untermauert. Entsprechende Grundvorstellungen lassen sich auch mit anderen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge aufbauen. Auf grafischer Ebene lässt sich dies mithilfe einer Schreibfolie an einem Tageslichtprojektor demonstrieren: In einem Diagramm werden gewissen Streckenlängen entsprechende Zahlen zugeordnet (Graph einer Exponentialfunktion). Durch ein Klappen des Koordinatensystems (Spiegelung an Abszissenachse) und ein anschließendes Drehen (Drehung um den Koordinatenursprung um +90°) lässt sich die geänderte Blickrichtung demonstrieren und diskutieren (siehe Abbildung 32).

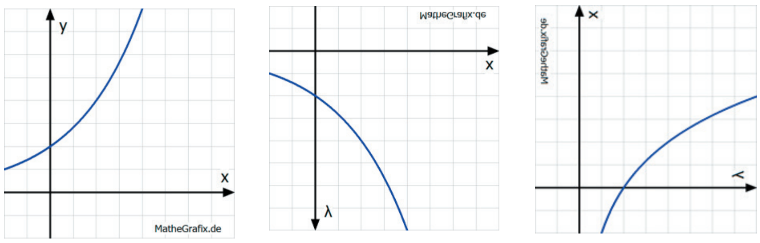


Abb. 32 Veranschaulichung der Änderung der Blickrichtung

Den Schülerinnen und Schülern half dieses Wechseln der Blickrichtung, geometrische Zusammenhänge zwischen Graphen zweier Umkehrfunktionen zu verstehen.
Bei der Untersuchung funktionaler Zusammenhänge mittels digitaler Rechenhilfsmittel nutzten die Schülerinnen und Schüler funktionales Denken bewusst als universelles Werkzeug und die Funktionen selbst als Objekte, indem sie beispielsweise charakteristische Kurvenverläufe betrachteten oder Regressionsmodelle anwendeten.
Ein permanenter Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge und die jeweilige Zuordnung am betrachteten Phänomen beförderten den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen und eines vernetzten Wissens.

7.3 Erkenntnisse aus den Fallstudien

Es werden nun die Potentiale der Fallstudien zur Förderung funktionalen Denkens aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven reflektiert und Schlussfolgerungen abgeleitet.

7.3.1 Potentiale der Fallstudien zur Entwicklung funktionalen Denkens

Vollrath (1989, S. 33) definiert funktionales Denken als ein in unterschiedlichen Ausprägungsstufen stattfindendes Denken in Zusammenhängen. Es entfaltet sich vorwiegend durch persönliche Erfahrungen in der Auseinandersetzung mit konkreten Phänomenen.

Da diese Entwicklung nicht spontan verläuft, bedarf es einer *„Anleitung durch Erfahrene“* (Vollrath 1989, S. 33). In schulischen Kontexten manifestiert sich diese Anleitung als eine durch die Lehrperson gestaltete Lernsituation.

Zur Förderung funktionalen Denkens sollte Schülerinnen und Schülern im Unterricht ausreichend Gelegenheit geboten werden, sich entsprechend ihres kognitiven Entwicklungsstandes mit Problemstellungen auseinanderzusetzen. Bei den theoretischen Betrachtungen zu funktionalem Denken in Kapitel 3.1.4 wurde die multiperspektivische Analyse von Vollrath (1989, S. 8ff.) als zentraler Ansatz für diese Arbeit herausgearbeitet. Seine Kategorisierung in Zuordnungsaspekt, Änderungsaspekt und Funktionen als Objekte diente als grundlegende Orientierung für die Konzipierung der Unterrichtseinheiten. Nun

Denken mit Funktionen (vgl. Vollrath 1989, S. 8ff.)		**Terme**	**Sehwinkel**	**Rechenschieber**
Zuordnung	Verwenden von Darstellungsformen	Wortvorschrift, Tabelle, Term	Wortvorschrift, Tabelle, Graph	Wortvorschrift, Tabelle, Graph, Gleichung, Termdarstellung mit Pfeilschreibweise
	Funktionen beschreiben beobachtete und vermutete Zusammenhänge			Zusammenhänge zwischen Streckenlänge und Zahl (und umgekehrt)
	Funktionen schaffen neue Zusammenhänge			Interpretation der Logarithmusfunktion für x < 1
Systematische Änderung	Bedeutung systematischer Änderungen für das Finden von Funktionsgleichungen			Erkennen exponentieller Prozesse
	Entdecken, dass bestimmte Änderungen der einen Größe bestimmte Änderungen der anderen Größe hervorbringen		experimentelle Ermittlung von Größen in Abhängigkeit von einer anderen Größe	
Funktionen als Objekte	funktionale Eigenschaften als Hilfsmittel zur Problemlösung			Konstruieren einer Multiplikationsskale
	Beobachten und Erzeugen eines Zusammenhangs			Zusammenhänge zwischen Umkehrfunktionen
	Wie der Blick aufs Ganze Eigenschaften enthüllt, lassen Eigenschaften auch das Ganze erkennen.			Erkennen der Funktionsart Logarithmusfunktion
	Notwendigkeit, Funktionsnamen zu finden			Arbeitsbegriff „Längenfunktion“

Tab. 18 Zuordnung von Handlungen aus den Fallstudien zu den Entwicklungsstufen des Denkens

soll diese Kategorisierung auch zur Reflexion der Erprobungen herangezogen werden.
In den Fallstudien vollzog sich funktionales Denken in unterschiedlichen Ausprägungsstufen. Dazu werden in Tabelle 18 konkrete mathematische Tätigkeiten aus den jeweiligen Fallstudien den verschiedenen Entwicklungsstufen funktionalen Denkens nach Vollrath zugeordnet. Die Einbeziehung unterschiedlicher Ausprägungen des Denkens lassen sich im Wesentlichen auf die verschiedenen Wissensstände in den einzelnen Jahrgangsstufen zurückführen.
Die Potentiale zur Förderung funktionalen Denkens können nach Vollrath (1989, S. 17ff.) weiterhin aus einer phänomenologischen, einer erkenntnistheoretischen und einer psychologischen Sicht betrachtet werden (siehe Kapitel 3.1.5). Den Tabellen 19, 20 und 21 wurden diese Perspektiven zugrunde gelegt.
Diese Übersichten belegen, dass alle drei Fallstudien hinreichend Ansatzpunkte für eine unterrichtliche Förderung funktionalen Denkens bieten. Insbesondere wird dies auch bei den Fallstudien „Terme“ und „Sehwinkel“ deutlich. Sie sind zeitlich vor der Behandlung des Funktionsbegriffes und außerhalb von Lernbereichen mit einem Schwerpunkt auf funktionalen Betrachtungen angesiedelt.
Die Umsetzung des Konzepts zur Förderung funktionalen Denkens kann prinzipiell auf verschiedene Art und Weise im Unterricht realisiert werden. Die drei Fallstudien sind konkrete und erprobte Vorschläge für die unterrichtliche Praxis. Darüber hinaus bieten sie Orientierung, wie das Konzept auf andere Lernsituationen übertragen werden kann.

Phänomenologische Sicht (vgl. Vollrath 1989, S. 17ff.)		**Terme**	**Sehwinkel**	**Rechenschieber**
Vorgänge	Aussagen über zeitliche Entwicklungen, wie Bewegungs- und Wachstumsvorgänge	Aussagen zu zeitlichen Veränderungen		
Messungen	Bestimmen zugehöriger Maßzahlen einer unbekannten Größe	Finden von Abhängigkeiten zwischen Größen	experimentelle Bestimmung von Winkelgrößen und Streckenlängen	Bestimmen von Streckenlängen zur Antragung von Zahlen auf einer Skale
Operationen	Erfassen der Änderungen zwischen gleichartigen Größen durch Wirkungen von Operatoren			Erfassen von Beziehungen zwischen Zahlen durch die Operationen Potenzieren (Änderungen der Basis) bzw. Logarithmieren
Kausalitäten	Beziehungen zwischen verschiedenartigen Größen zur Beschreibung kausaler Zusammenhänge		Darstellen und Ableiten funktionaler Abhängigkeiten zwischen zwei Größen, wenn die jeweils dritte konstant bleibt	wechselseitiges Erfassen kausaler Zusammenhänge zwischen Zahlen und Streckenlängen sowie zwischen den Funktionen als Objekten

Tab. 19 Potentiale der Fallstudien aus phänomenologischer Perspektive

Erkenntnistheoretische Sicht (vgl. Vollrath 1989, S. 23ff.)		Terme	Sehwinkel	Rechenschieber
funktionale Beziehungen	Aufstellen von Vermutungen mit anschließender Überprüfung und ggf. Nutzung für Entdeckung neuer Zusammenhänge		Zusammenhänge zwischen den Größen Sehwinkel, Gegenstandsgröße und sichtbare Größe eines Gegenstandes ableiten und vorhersagen	Erkennen von Zusammenhängen zwischen Zahlen und Streckenlängen
funktionale Begriffsbildung	Nutzen von Funktionen als Werkzeuge zur Begriffsbildung			Logarithmus als Funktionswert
funktionale Argumentation	funktionales Betrachten von Gleichungen und Ungleichungen; funktionales Beweisen, durch Anwendung von Rechenoperationen auf Funktionen; Plausibilitätsbetrachtungen durch Dynamisierungen in der Geometrie	Aufstellen von Termen aus funktionalen Betrachtungen	Begründen der Größe von Peripheriewinkeln	Begründen der Abstände zwischen Zahlen auf einer Multiplikationsskale
Funktionen als kognitive Modelle	Konstruktionsprozess zur mathematischen Beschreibung und Erfassung eines Phänomens			Beschreiben und Erfassen der Längen- bzw. Logarithmusfunktionen als Funktionstyp

Tab. 20 Potentiale der Fallstudien aus erkenntnistheoretischer Perspektive

Psychologische Sicht (vgl. Vollrath 1989, S. 27ff.)	Terme	Sehwinkel	Rechenschieber
Handlungen (konkret oder gedanklich) durchführen	Analyse von Situationen – gedankliche Handlungen	Experimente – reale Handlungen; Anwendungsaufgaben – gedankliche Handlungen	Arbeit mit Papierskalen – reale Handlungen
Blickrichtungen ändern		Beurteilung des Wechsels der Zuordnung aus theoretisch möglicher und messtechnischer Sicht	Umkehren der Zuordnung als Vertauschen von Definitions- und Wertebereich (Umkehrfunktion)
Aufstellen von Hypothesen auf Grundlage von Erfahrungen mit konkreten Phänomenen		qualitative Überlegungen (Je-desto-Aussagen); Hypothesen aufstellen; quantitative (experimentelle) Prüfung	Annahme von Streckenlänge (z. B. für Zahl 3) und Prüfen der Richtigkeit durch Ausführen der Multiplikation als Streckenaddition

Tab. 21 Potentiale der Fallstudien aus psychologischer Perspektive

7.3.2 Exemplarische Analyse der Fallstudie zum Rechenschieber

Die Fallstudie zum Rechenschieber soll nun exemplarisch hinsichtlich ihrer Ansätze zur inner- und außermathematischen Vernetzung analysiert werden. Die Grundlage dieser Analyse liefert Vollrath (2013, S. 3), der eine theoretische und eine praktische Seite von Mathematik unterscheidet. In den weiteren Betrachtungen wird nicht von einer strikten Trennung in *Seiten* ausgegangen, sondern von Aspekten, welche stärker die Theorie oder die Praxis betonen.

Die Fallstudie zum Rechenschieber wurde ausgewählt, da bei dieser das Funktionalkonzept bewusst aufgegriffen und gestuft umgesetzt wurde. Die Entscheidung begründet sich weiterhin durch folgende Kriterien:

- Durchführung:
  - Anzahl und Art der Versuchsdurchführungen (Erprobung in sechs Klassen, verteilt auf drei Schuljahre),
  - zeitlicher Umfang (jeweils ca. fünf Unterrichtsblöcke zu je 90 Minuten),
  - Reflexion und Evaluierung (jeweils zwei Leistungsüberprüfungen im Abstand von ungefähr drei Monaten, Rückmeldebögen von Lernenden und Lehrpersonen).
- Bandbreite im funktionalen Denken:
  - alle Entwicklungsstufen des Denkens,
  - alle Stufen der Entwicklung von Sprache,
  - hoher Grad an Bewusstheit.
- Vernetzung:
  - mathematikhistorische und technische Bezüge,
  - innermathematische Vernetzungen (Lernende besitzen grundlegende Kenntnisse zu Funktionen und Fähigkeiten im funktionalen Denken).

Weiterhin vereint diese Thematik in besonderem Maße die beiden von Vollrath erwähnten Perspektiven von Mathematik: eine praktische und eine theoretische. Vollrath beschreibt diese wie folgt:

> *„Zählen, Rechnen, Messen und Konstruieren: Das sind die Wurzeln, aus denen die Mathematik erwachsen ist. Zwar spielt sich das Wesentliche dabei im Denken des Menschen ab, doch im praktischen Vollzug wird in Fachausdrücken gesprochen und geschrieben, mit Instrumenten gemessen und mit Werkzeugen gezeichnet“* (Vollrath 2013, S. 3).

Obwohl der Rechenschieber als Gerät der jüngeren Vergangenheit angesehen werden kann, ist er nur noch wenigen Schülerinnen und Schülern bekannt. Vollrath bezeichnete

Rechenschieber bereits als „technische Fossilien“ (Vollrath 2013, S. 100). Vereinzelt findet man noch Demonstrationsmodelle als Schauobjekte an den Wänden einiger Schulen; in manchen Sammlungsräumen verwahrt man derlei Restbestände neben anderen historischen Geräten, wie Zeichengeräten oder Rechenmaschinen. Vollrath (2013, S. 7) spricht in diesem Zusammenhang von den „verborgenen Ideen vergessener Instrumente“. Es stellt sich die Frage, inwieweit es sich in Zeiten von Computern, Tablets oder Smartphones lohnt, diese verborgenen Ideen aufzuspüren und speziell den Rechenschieber wieder im Unterricht zu thematisieren.
Das Phänomen Rechenschieber besitzt ein hohes fachdidaktisches Potential, da es fachmathematische, mathematikhistorische und rechentechnische Aspekte in sich vereint. Es lässt sich aus theoretischer wie praktischer Perspektive erkunden. Während die mathematischen Grundlagen zur Konstruktion der Skalen dem theoretischen Aspekt zugeordnet werden können, gehört der Rechenschieber mit seiner technischen Entwicklungsgeschichte und seiner Handhabung zum praktischen Aspekt. Anhand des Rechenschiebers können beide Aspekte einschließlich ihrer Wechselwirkungen thematisiert werden.
Inner- und außermathematische Vernetzungen bieten somit Ansätze für die ganzheitliche Betrachtung eines konkreten mathematischen Phänomens, mit dem das Bild von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern positiv geprägt werden kann.

Zum theoretischen Aspekt von Mathematik

Der theoretische Aspekt von Mathematik spiegelt sich in der Konstruktion der verschiedenen Skalen wider. Ein Verständnis zum Aufbau der Skalen zur Multiplikation setzt Kenntnisse zur Logarithmenrechnung voraus. Dies führte im vergangenen Jahrhundert immer wieder zu Diskussionen bezüglich einer fachlichen Begründung des Aufbaus der Skalen im Unterricht (vgl. Spiegelhauer 2016, S. 249ff.). Die Schülerinnen und Schüler sollten damals möglichst frühzeitig (d. h. vor der Behandlung der Logarithmen) mit dem Stab rechnen, um die mechanische Handhabung zu üben und um mit vielfältigen Anwendungsgebieten vertraut zu werden (vgl. Breidenbach 1950, S. 120). Daher lagen zwischen der Einführung des Stabes und einer theoretischen Begründung der Skalenteilung mittels Logarithmen meistens zwei bis drei Schuljahre. Teile der Lehrerschaft sahen in diesem Vorgehen eher eine technische Unterweisung als mathematischen Unterricht (vgl. Stender 1954, S. 8; Denk 1954, S. 3). Sie kritisierten die Entkopplung des praktischen vom theoretischen Aspekt der Mathematik. Um dieser Entkopplung zu begegnen, suchte man nach Konzepten, um den Aufbau der Skalen ohne Verwendung der Logarithmenrechnung zu begründen. Entsprechende Ansätze von Drenckhahn (1956, S. 13ff.) und Clausen (1957,

S. 2ff.) basierten auf funktionalen Betrachtungen zwischen Zahlen und den zugehörigen Streckenlängen. Die Autoren konnten belegen, dass eine inhaltlich begründete Einführung ohne Logarithmen möglich ist und dass diese das Verständnis für Logarithmen sogar nachhaltig vorbereiten kann (vgl. Clausen 1957, S. 2).

Das grundlegende didaktische Vorgehen in der Fallstudie orientierte sich an diesen Ideen. Wie bei den genannten Autoren war die (Nach-)Entdeckung der Skale Mittel zum Zweck, jedoch mit folgenden Unterschieden: Während die Einführung bei Drenckhahn oder Clausen auf die praktische Nutzung des Stabes abzielte, stand bei der Fallstudie die anschauliche Erarbeitung der Begriffe Umkehrfunktion, Logarithmus und Logarithmusfunktion im Fokus. Zudem war die Fallstudie in einer höheren Jahrgangsstufe verortet, sodass bereits auf grundlegende Kenntnisse zu Funktionen und einen höheren Ausprägungsgrad in den Fähigkeiten zum funktionalen Denken zurückgegriffen werden konnte. Dies äußerte sich beispielsweise in der spezifischen Fähigkeit, exponentielle Prozesse zu identifizieren und Verfahren der Regression anzuwenden, um eine Gleichung zur Beschreibung des zugehörigen funktionalen Zusammenhangs zu ermitteln. Funktionales Denken wurde in dieser Unterrichtseinheit auf allen drei Entwicklungsstufen (Zuordnung, Kovariation, Objektsicht) als Werkzeug zur Erarbeitung der Begriffe verwendet und bildete eine Basis zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen.

In der Idee des funktionalen Zusammenhangs sieht Heymann die Verknüpfung von Alltagswissen mit einer mächtigen, über die Mathematik hinausreichenden Methode. Sie ermöglicht, Zusammenhänge in der uns umgebenden Welt aufzuspüren und zu beschreiben (vgl. Heymann 1996, S. 178). Funktionales Denken war im Rahmen dieser Fallstudie sowohl Weg als auch Ziel.

Die von Heymann (1996, S. 178) geforderten Querverbindungen zur Vernetzung des erworbenen Wissens können durch einen permanenten Wechsel zwischen den verschiedenen innermathematischen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge (Zuordnungsvorschrift, Graphen mit zugehörigen Tabellen und Gleichungen) und den entsprechenden Interpretationen an den Multiplikationsskalen realisiert werden.

Fachdidaktische Begründungen zur Benutzung des Rechenschiebers bei der Einführung der Begriffe Logarithmus, Logarithmusfunktion und Umkehrfunktion können wie folgt zusammengefasst werden:

- Das Phänomen Rechenschieber bietet mit den Möglichkeiten zu einer wechselseitigen Zuordnung zwischen den Zahlen auf der Skale und den zugehörigen Streckenlängen einen anwendungsorientierten und phänomenologischen Zugang zum Begriff der Umkehrfunktion.

- Die Lernenden erfahren Logarithmen nicht nur als Exponenten, sondern auch als Funktionswerte.
- Das Entdecken und Untersuchen der Skalen fördert die Entwicklung funktionalen Denkens.
- Der Rechenschieber ermöglicht enaktives Handeln.

Zum praktischen Aspekt von Mathematik

Da eine aktuell bedeutsame praktische Verwendung des Rechenschiebers ausgeschlossen werden kann, bleibt für den Unterricht jedoch eine Betrachtung aus mathematikhistorischer Sicht. Aus fachwissenschaftlicher Perspektive könnte auf derartige historische Betrachtungen grundsätzlich verzichtet werden, sowohl bei der Erarbeitung der entsprechenden Begriffe als auch bei der Förderung funktionalen Denkens. Für eine angemessene historische Einordnung ergeben sich daher folgende Fragen:

- Inwieweit erscheint eine Behandlung von Skalen zur Multiplikation ohne jeglichen Bezug zum Rechenschieber als sinnvoll? Aus welcher Motivation heraus sollten Schülerinnen und Schüler im Zeitalter digitaler Rechentechnik Skalen zur Multiplikation zweier Zahlen konstruieren?
- Bei der Entscheidung für den Rechenschieber sollte der Umfang entsprechender Betrachtungen hinterfragt werden. Reicht eine kurze Erwähnung oder sollte die Thematik mathematisch und historisch angemessen vernetzt werden?
- Welchen grundlegenden Beitrag kann eine mathematikhistorische Einordnung zur mathematischen Begriffsbildung und zur Entwicklung funktionalen Denkens leisten?

Die Einbeziehung historischer Aspekte in den Mathematikunterricht wurde von Kronfellner (1998, S. 5ff.) didaktisch diskutiert. Er sah in geschichtlichen Betrachtungen einen Weg zum besseren Verständnis von Mathematik und analysierte dazu verschiedene Zielvorstellungen, die auch außerhalb von Mathematik liegen können. Kronfellner arbeitete dabei kognitive (externe) und affektive Ziele heraus. Seine Kategorisierung kann herangezogen werden, um die Thematik Rechenschieber umfassend historisch einzubetten und zu legitimieren. In Tabelle 22 wurden kognitiven Zielen von Kronfellner potentielle Ziele der Unterrichtseinheit zugeordnet.

Die Ergebnisse aus den Fallstudien geben Grund zur Annahme, dass es nicht sinnvoll ist, Multiplikationsskalen ohne Rechenschieber zu behandeln. Grund dafür ist eine fehlende

Kognitive Ziele (vgl. Kronfellner 1998, S. 98ff.)		**Fallstudie Rechenschieber**
Wissenschafts-theoretische Ziele	Aufzeigen der Dynamik der Wissenschaft und Beitrag zur Entwicklung eines adäquaten Bildes von Mathematik	Geschichte des Rechenschiebers als Beispiel für die fortschreitenden Entwicklungen in der Rechentechnik und die damit verbundenen Veränderungen in der Mathematik und im Mathematikunterricht
Epistemologische Ziele	Verdeutlichen der Genese mathematischer Forschung durch Rückgriff auf historische Wurzeln eines mathematischen Begriffs	Entwickeln des Begriffes Logarithmus; Vorteile logarithmischen Rechnens
Meta-mathematische Ziele	Einordnen von Teilgebieten bzw. Themen der Mathematik in globale Betrachtungsweisen	Beurteilen der Bedeutsamkeit des Stabrechnens für praktisches und unterrichtliches Rechnen
Wissenschafts-soziologische Ziele	Fördern der Einsicht, dass mathematische Entwicklungen von gesellschaftlichen Rahmenbedingungen beeinflusst werden	Betrachten praktischer Erfordernisse aus Wirtschaft, Technik, Militär; Balance zwischen Rechengeschwindigkeit und Rechengenauigkeit
Historische Ziele	Aufzeigen der gegenseitigen Bedingtheit politischer, sozialer, wirtschaftlicher und kultureller Strukturen als Beitrag zur Ausbildung eines originären Geschichtsbewusstseins	Vorteile des Stabrechnens und Veränderungen im Mathematikunterricht (z. B. Notwendigkeit bestimmter Rechenfertigkeiten in Abhängigkeit von verfügbaren Werkzeugen)
Kulturelle Ziele	Interpretationen als kulturelle Werte	Würdigen der mathematischen und technischen Grundideen

Tab. 22 Anknüpfungspunkte zu kognitiven Zielen bei der Fallstudie Rechenschieber

Authentizität. Entscheidet man sich für eine unterrichtliche Einbeziehung des Rechenschiebers, sollte der historische Kontext auch angemessen eingebunden werden. Für die Lernenden ist besonders wichtig, die mit der Behandlung des Rechenschiebers verbundenen Zielstellungen zu verinnerlichen. Eine zu starke Reduzierung der historischen Betrachtungen wäre hierbei eher kontraproduktiv.

Bei der Arbeit mit dem Rechenschieber lassen sich zu allen Zielkategorien von Kronfellner Anknüpfungspunkte finden. Sie müssen jedoch nicht alle gleichermaßen aufgegriffen werden.

Die Schülerinnen und Schüler erfuhren am Beispiel des Rechenschiebers exemplarisch von der wechselseitigen Beeinflussung von Mathematik und Technik. Dies spiegelte sich insbesondere in den wissenschaftstheoretischen und metamathematischen Zielen wider (siehe Tabelle 22). Sie erhielten einen Einblick, wie Entwicklungen in der Rechentechnik das Betreiben von Mathematik beeinflussen können. Zugleich konnte aber auch die Einsicht befördert werden, dass diese Entwicklung stetig voranschreitet und sich dadurch bestimmte mathematische Probleme schneller oder überhaupt lösen lassen.

Neben den kognitiven Zielen können auch sogenannte affektive Ziele verfolgt werden. Die Geschichte der Mathematik wird dabei nicht als eigentlicher Gegenstand betrachtet.

Ziel ist, die Schülerinnen und Schüler zu motivieren und zu interessieren. Kronfellner (1998, S. 43ff.) erwartet davon eine positive Beeinflussung der Einstellungen von Lernenden zur Mathematik. In Tabelle 23 werden den Zielkategorien von Kronfellner mögliche Anknüpfungspunkte aus der Fallstudie zugeordnet.

<table>
<tr><th colspan="2">Affektive Ziele (Kronfellner 1998, S. 43ff.)</th><th>Fallstudie Rechenschieber</th></tr>
<tr><td>Methodische Auflockerung</td><td>Auflockerung (beispielsweise durch historische Anekdoten)</td><td rowspan="3">- Herstellen eines Anwendungsbezuges durch ein konkretes Phänomen
- Möglichkeiten zum enaktiven Handeln
- Aufzeigen spezieller Entwicklungen und Anwendungen</td></tr>
<tr><td>Motivationale Aspekte</td><td>motivierende Wirkung auf Lernende</td></tr>
<tr><td>Abbau psychischer Barrieren</td><td>Verdeutlichen des menschlichen Wirkens und der wissenschaftlichen Fehlbarkeit</td></tr>
<tr><td>Akzeptanz durch „Patriotismus“</td><td>Identifikationseffekt (wie im Sport)</td><td>keine Bezugspunkte</td></tr>
<tr><td>Kulturelle Integration</td><td>Mathematik als integrierenden Bestandteil der Kultur erfahren</td><td>keine Bezugspunkte</td></tr>
</table>

Tab. 23 Anknüpfungspunkte zu affektiven Zielen bei der Fallstudie Rechenschieber

In Abhängigkeit von der konkreten Klassensituation und der zur Verfügung stehenden Zeit bietet der Rechenschieber Potentiale für weitere Untersuchungen und Differenzierungen. Beispielhaft seien angeführt:

- Entdecken der Logarithmengesetze;
- Entdecken bzw. Untersuchen der Struktur weiterer spezieller Skalen, z. B. Kubikzahlen;
- Diskutieren von Besonderheiten des Stabrechnens, z. B. Rechnen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, Verfahren des „Durchschiebens“ beim Überschreiten des vorgegebenen Skalenabschnittes;
- Ausblick auf spezielle Anwendungen von Rechenschiebern in Wissenschaft und Technik;
- Ausblick auf verwandte Geräte, wie Rechenscheiben oder Rechenwalzen.

Es konnte gezeigt werden, dass sich bei der unterrichtlichen Betrachtung des Phänomens Rechenschieber theoretische und praktische Aspekte von Mathematik wechselseitig ergänzen und durchdringen. In Abbildung 33 wird diese Vernetzung noch einmal zusammenfassend dargestellt.

Das Phänomen Rechenschieber durchzog die gesamte Lerneinheit. Die Behandlung des Rechenschiebers reduzierte sich damit weder auf eine Episode zur methodischen Auflockerung (als rein affektives Ziel) noch auf externe kognitive Ziele. Das Phänomen Rechenschieber leistete einen Beitrag zur Förderung funktionalen Denkens im Aneignungsprozess konkreter curricularer Inhalte. Zentral für eine solche Vernetzung war ein permanenter Wechsel zwischen funktionalem und gesellschaftlich-deterministischem Denken. Aus dieser Vernetzung heraus eröffneten sich zahlreiche Anknüpfungspunkte zur Entwicklung eines adäquaten Bildes von Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern.

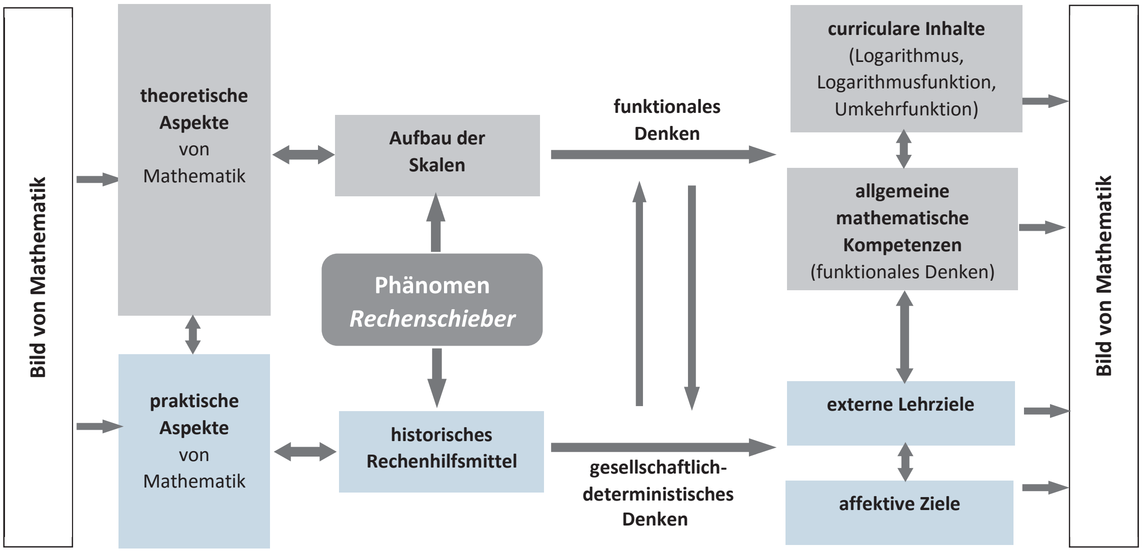


Abb. 33 Vernetzung von theoretischen und praktischen Aspekten von Mathematik bei der Fallstudie zum Rechenschieber

8 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die Bedeutung funktionalen Denkens für schulisches Lernen herauszuarbeiten. Funktionales Denken wurde aus verschiedenen Perspektiven theoretisch analysiert, erste Ansätze für die unterrichtliche Förderung abgeleitet. Auf der Basis von theoretischen Überlegungen zu mathematikhistorischen, bildungspolitischen, fachdidaktischen und psychologischen Aspekten wurde ein Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens entwickelt, das sich in ein unterrichtliches Gesamtkonzept einfügt. Dieses Rahmenmodell konnte in drei unterschiedlichen Fallstudien exemplarisch nachgezeichnet und reflektiert werden.

Betrachtet man die theoretischen Überlegungen, so ergeben sich für Argumentationen zur Förderung funktionalen Denkens vier grundsätzliche Perspektiven:

Perspektive I	Förderung funktionalen Denkens als basale mathematische Denkform
Perspektive II	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Vermittlung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik und Mathematikunterricht
Perspektive III	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse
Perspektive IV	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Entwicklung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts

Tab. 24 Perspektiven für die Argumentationen

Aus diesen vier Perspektiven heraus können nun zentrale Erkenntnisse für diese Arbeit zusammengefasst werden. Diese Erkenntnisse wurden als Thesen formuliert (siehe Tabelle 25). Sie basieren auf einer theoretischen Auseinandersetzung mit funktionalem Denken und ergänzenden schulpraktischen Erprobungen. Somit verstehen sich diese Thesen als erste Antworten. Neben der theoretisch-didaktischen Fundierung können insbesondere die empirischen Untersuchungen in Form von Fallstudien zur exemplarischen Prüfung und Untermauerung als ein Beitrag zur fachdidaktischen Forschung gewertet werden.

In Tabelle 25 wurden die Thesen zusammengefasst und den entsprechenden Perspektiven aus Tabelle 24 zugeordnet.

Perspektiven		Thesen	
I	Förderung funktionalen Denkens als basale mathematische Denkform	1	Die Entwicklung funktionalen Denkens ist in allen Jahrgangsstufen möglich und nötig.
		2	Die Förderung funktionalen Denkens kann in qualitativ unterschiedlichen Merkmalsausprägungen erfolgen.
		3	Funktionales Denken entwickelt sich maßgeblich durch Interaktionen zwischen Lehrenden und Lernenden.
		4	Charakteristika für den kritisch-reflektierenden Umgang mit dem Konzept des funktionalen Denkens lassen sich im historischen Kontext bis in aktuelle Bildungsdiskussionen hinein finden.
II	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Vermittlung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik und Mathematikunterricht	5	Funktionales Denken fördert die Entwicklung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik.
		6	Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht sind zugleich Ausgangspunkt und Ziel für die Entwicklung des mathematischen Unterrichts.
		7	Mathematikhistorische Bezüge können funktionales Denken fördern und das Bild von Mathematik positiv beeinflussen.
III	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse	8	Für die Förderung funktionalen Denkens stellen konkrete Phänomene eine den Erkenntnisprozess begleitende Anregung dar.
		9	Funktionales Denken sollte durch einen Wechsel der Darstellungsebenen unterstützt werden.
IV	Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Entwicklung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts	10	Durch die Förderung funktionalen Denkens erreicht der allgemeinbildende Mathematikunterricht eine neue Qualität.

Tab. 25 Zuordnung der Thesen zu den Perspektiven

8.1 Förderung funktionalen Denkens als basale Denkform (Perspektive I)

Mit der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ waren die Reformer um Felix Klein angetreten, den mathematischen Lehrstoff auf wenige Grundprinzipien zu konzentrieren. In diesem ursprünglichen Sinne wurde dies nach Einschätzung von Krüger (2000, S. 300ff.) nie wirklich umgesetzt. Die Ursachen dafür waren komplex. Sicher lag es auch an den deutungsoffenen Formulierungen, die den Unterrichtspraktikern nur wenige konkrete Ansatzpunkte boten. Krüger (2000, S. 301) spricht in ihrem Fazit von einem „Scheitern der Reform". In dieser Absolutheit sieht Schubring (2007, S. 14) einen Widerspruch zu ihren eigenen Ergebnissen, welche durchaus einen Wandel im mathematischen Unterricht des 20. Jahrhunderts belegen können.

Aufbauend auf Jahrzehnte der Auseinandersetzung mit diesem mathematikdidaktischen Begriff definierte Vollrath 1989: *„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist"* (Vollrath 1989, S. 6). Er orientierte sich damit stärker am Dirichlet'schen Funktionsbegriff und spannte so den Bogen zu mengentheoretisch geprägten Auffassungen der Strukturmathematik. Vollrath leistete mit seiner charakterisierenden Analyse funktionalen Denkens einen bedeutsamen Beitrag zu einem Richtungswechsel in der unterrichtlichen Betrachtung funktionalen Denkens – hin zu einer stärkeren Betonung der Phänomene und einer genetischen Vorgehensweise. Vollrath betonte, dass eine sinnvolle didaktische Beschreibung bestimmter Denkweisen für verschiedene Sichtweisen und Entwicklungen offen sein sollte. Funktionales Denken betrachtete er selbst als einen offenen Begriff, dessen Entwicklung er zu einer permanenten Aufgabe der Didaktik erhob (vgl. Vollrath 1989, S. 6). In seinen Schlussbemerkungen beschrieb er funktionales Denken als *„das Denken in Zusammenhängen, das sich in der Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen entfaltet"* (Vollrath 1989, S. 33). Mit seinen Verweisen auf verschiedene Ausprägungen funktionalen Denkens sowie der Betonung der Notwendigkeit von persönlichen Erfahrungen der Lernenden und einer Anleitung durch Erfahrene benannte Vollrath Felder für didaktische Forschungen.

Seine Ansätze bildeten auch Anknüpfungspunkte für diese Arbeit: Die verschiedenen Ausprägungen des Denkens wurden in das Rahmenmodell integriert. Die Notwendigkeit persönlicher Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler und die professionelle Anleitung durch Lehrende zielen auf mögliche unterrichtliche Umsetzungen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollte der Begriff des funktionalen Denkens – im Sinne seiner ursprünglichen Bedeutung – aus unterschiedlicher Perspektive analysiert werden, um Ansatzpunkte und Handlungsoptionen für eine unterrichtliche Verortung anzudeuten.

Die grundlegenden Einsichten und Ergebnisse zur Förderung funktionalen Denkens als basale Denkform lassen sich in vier zentralen Thesen zusammenfassen. Diese werden durch die Thesen 5 bis 10 entsprechend ergänzt und abgerundet.

These 1:
Die Entwicklung funktionalen Denkens ist in allen Jahrgangsstufen möglich und nötig.

Bereits in Kleins Betrachtungen zum Mathematikunterricht des ausgehenden 19. Jahrhunderts zeigten sich für die verschiedenen Jahrgangsstufen Ansatzpunkte zur Förderung. Felix Klein und seine Kollegen hatten vorrangig den Übergang von Schule zu Hochschule im Blick. Ihre Ideen bezogen sich jedoch auch auf untere Klassenstufen. So sollten bereits in den unteren Klassen der Anschauung, dem Zeichnen und dem Messen eine entsprechende Bedeutung beigemessen werden, ohne dabei durchaus notwendige logische Elemente zu vernachlässigen (vgl. Schubring 2000, S. 70). Zur Bedeutung funktionalen Denkens im historischen Kontext wurden in Kapitel 4.2.1 grundlegende Positionen zur Ausrichtung des mathematischen Unterrichts und in Kapitel 4.2.2. inhaltliche Ansätze zur Förderung herausgearbeitet. In Kapitel 4.3 wurde die Umsetzung aufgegriffen, welche in Verbindung zu den in Kapitel 4.1 geschilderten Situationen an den Schulen und der Ausbildung der Lehrkräfte gesehen werden müssen.
Mathematikdidaktiker des 20. Jahrhunderts suchten nach zentralen, grundlegenden bzw. universellen Ideen, um den Lehrstoff zu konzentrieren und zu strukturieren. Viele der daraus erwachsenen Modelle durchzog, teils in abgewandelter Form, eine Idee des funktionalen Zusammenhangs. Diese Beständigkeit belegt die Bedeutung dieser Denkart für den Mathematikunterricht.
Eine jahrgangsübergreifende Stufung der Förderung funktionalen Denkens lässt sich bereits aus dem Spiralprinzip heraus begründen. In den Bildungsstandards (Hauptschulabschluss, Mittlerer Schulabschluss, Allgemeine Hochschulreife) wurde „Funktionaler Zusammenhang“ als verbindliche mathematische Leitidee aufgenommen. Für die Primarstufe verankerte man funktionale Beziehungen in der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz „Muster und Strukturen“.
Vergleicht man die in den Bildungsstandards formulierten Ideen mit der des funktionalen Denkens im Sinne der Meraner Reform, zeigen sich Unterschiede hinsichtlich der Komplexität. Die Bildungsstandards nehmen deutlich stärker Bezug auf die konkrete Umsetzung im Unterricht. Die Ideen werden somit für die Praxis greifbarer und lassen jahrgangs- und schulartbezogene Differenzierungen erkennen. Andererseits ist nicht auszuschließen, dass bestimmte Konkretisierungen weitere Konkretisierungen implizieren.

Damit entfernt man sich von einem umfassenden didaktischen Prinzip und läuft Gefahr, Standards als einen abzuarbeitenden Katalog zu verstehen.
Nähere Erläuterungen zu den Bildungsstandards sowie eine Übersicht zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ und zur inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz „Muster und Strukturen“ geben die Kapitel 5.2.2 und 5.2.4. Das Kapitel 7.1.1 stellt frühzeitige Annäherungen sowie intuitive und gestufte Zugänge zum Funktionsbegriff vor. Für die in Kapitel 7.2 vorgestellten Fallstudien wurden die Jahrgangsstufen 7 und 10 ausgewählt. Eine Förderung funktionalen Denkens ließe sich mit diesem Ansatz über diese konkreten Beispiele hinaus in allen Jahrgangsstufen und nahezu allen Themenbereichen der weiterführenden Schulen realisieren.

These 2:
Die Förderung funktionalen Denkens kann in qualitativ unterschiedlichen Merkmalsausprägungen erfolgen.

In Kapitel 7.1.2 wurde ein Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens vorgestellt. Im Zusammenhang mit diesem Rahmenmodell und mit Blick auf Planung und Evaluierung von Lernprozessen wurden die Merkmale „Denken“, „Sprache“ und „Bewusstheit“ als besonders bedeutsam eingeschätzt und ausgewählt. Diese Merkmale eignen sich zur Beschreibung des Übergangs von einem intuitiv-deterministischen Denken zu funktionalem Denken. Sie werden jeweils durch Entwicklungsstufen (Merkmalsausprägungen) untersetzt. Die Entwicklungsstufen für das Merkmal „Denken“ wurden der Kategorisierung von Vollrath (1989) entnommen. Die Stufen für das Merkmal „Sprache“ basieren im Wesentlichen auf Arbeiten von Prediger und Meyer (2012); die für „Bewusstheit“ auf denen von Bruder (2014) und Vollrath (1989).
Abhängig von der konkreten Unterrichtssituation können zu einem jeweiligen Merkmal auch verschiedene Entwicklungsstufen betrachtet werden:

- Schülerinnen und Schüler jüngerer Jahrgangsstufen erreichen einige Entwicklungsstufen noch nicht bzw. erreichen sie nur für konkrete Themen. Beim Merkmal „Denken“ ist z. B. das Operieren mit „Funktionen als Objekten“ erst nach einer Behandlung des Funktionsbegriffs realisierbar. Zugleich erfordert diese Objektsicht auch ein gewisses Maß an Abstraktionsvermögen im Denken der Lernenden.
- Das Erreichen der Entwicklungsstufe „Entwickeln/Nutzen einer Symbolsprache“ (beim Merkmal „Sprache“) hängt für jüngere Jahrgangsstufen wesentlich von der konkreten Thematik ab.

- Eine höhere Entwicklungsstufe führt nicht automatisch zu stärker ausgeprägten Fähigkeiten im funktionalen Denken als Werkzeug. Es hängt von der konkreten Aufgabe ab, ob z. B. mit Sprache auf symbolischer Ebene der Lösungsprozess unterstützt werden kann. Beispielsweise erfordert eine Nutzung digitaler Rechenhilfsmittel die Beschreibung mit symbolischen Ausdrücken. Bei einer Vielzahl mathematischer Probleme, insbesondere auch in jüngeren Jahrgangsstufen, sind Aspekte der Symbolsprache entbehrlich.
- Die Entwicklungsstufen bei den Merkmalen können verschieden ausgeprägt sein. Es ist denkbar, dass Schülerinnen und Schüler funktionales Denken bewusst als universelles Werkzeug einsetzen, jedoch die Betrachtung von Funktionen als Objekte oder die Ebene der Symbolsprache weitgehend ausklammern.

In den verschiedenen Fallstudien konnte exemplarisch gezeigt werden, dass eine Förderung funktionalen Denkens in unterschiedlichen Entwicklungsstufen (siehe Abbildung 17) erfolgen kann.

These 3:
Funktionales Denken entwickelt sich maßgeblich durch Interaktionen zwischen Lehrenden und Lernenden.

Nach Vollrath kann bei der Entwicklung funktionalen Denkens ab den Proportionalitäten nicht mehr nur von einem spontanen Prozess ausgegangen werden (vgl. Vollrath 1989, S. 30). Funktionales Denken entwickelt sich in Anlehnung an Klingberg (1982, S. 59) vielmehr *im* und *durch* Unterricht. Während *durch* Unterricht stärker auf die Verantwortung der Lehrkraft für die Gestaltung eines entwicklungsfördernden Unterrichts abzielt, betont *im* Unterricht die aktive Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit der Lernsituation und damit den Unterrichtsprozess. In der unterrichtlichen Praxis verschmelzen beide Sichtweisen: Weder die bloße Auseinandersetzung mit einem Unterrichtsgegenstand noch ein theoretisch fundierter Zugang ohne Aktivierung der Schülerinnen und Schüler ist zielführend. Nachhaltige Lernprozesse erfordern beides.
Klingberg beschrieb dies 1982 als „Widersprüche eines didaktischen Prozesses“: *„Führende Rolle des Lehrers und Selbsttätigkeit der Schüler bedingen sich wechselseitig“* (Klingberg 1982, S. 65). Sein dialektischer Lösungsansatz beruht darauf, dass bewusstes und selbstständiges Handeln der Lernenden ein gewisses Maß an Führung durch die Lehrperson voraussetzt. Umgekehrt kann sich diese „führende Rolle des Lehrers“ nur aufgrund der Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler entwickeln. Lehrkräfte gestal-

ten Lernsituationen aufgrund ihrer Überzeugungen zu Mathematik als Wissenschaft und Unterrichtsfach sowie auf Basis ihres Selbstkonzepts (siehe Kapitel 2.3). Auf berufsbezogene Kompetenzen wird noch einmal bei These 6 Bezug genommen.
Zur Gestaltung von Lernsituationen liefert die Literatur vielfältige Ansätze:
Heymann (1996, S. 205ff.) argumentierte vorrangig aus Sicht der Allgemeinbildung und formulierte Ansätze für einen denkfördernden Mathematikunterricht (siehe Kapitel 3.1.2). Seine Begriffsbelegungen wie: Verstehensorientierung, Erfahrungen mit Phänomenen, Vernetzungen mit Vorwissen, Übertragungen von Mathematik auf die Alltagswelt (und umgekehrt), Art und Weise der mathematischen Interaktion sind heute noch konsensfähig. Das Kapitel 5.2.4 bietet einige Konkretisierungen von Heymann zur spezifischen Art der Auseinandersetzung von Lernenden mit funktionalen Zusammenhängen.
Vollrath (1989, S. 17ff.) untermauerte in seiner Analyse des funktionalen Denkens nicht nur die phänomenologische, sondern auch eine erkenntnistheoretische Sicht. Er legte damit eine „innere" Struktur für die didaktische Herangehensweise von Lehrpersonen vor (siehe Kapitel 3.1.5). Ob Funktionen z. B. als Werkzeuge zur Begriffsbildung eingesetzt oder Gleichungen unter funktionalen Aspekten analysiert werden sollen – immer berührt das die Planung von Unterricht, die wiederum in der Verantwortung der Lehrperson liegt. Hierbei geht es um grundlegende erkenntnistheoretische Ansätze, weniger um die der Organisation oder Methodik. Sieht man Vollraths drei Sichtweisen im Zusammenhang, d. h.:

- die erkenntnistheoretische Sicht (grundsätzliche Ansätze der Konstruktion des Wissens),
- die phänomenologische Sicht (Auswahl und Art der Erfassung eines Phänomens) sowie
- die psychologische Sicht (Einbezug der Vorstellungen und der Vorkenntnisse von Lernenden sowie Vernetzung des Wissens),

lassen sich daraus Grundzüge für unterrichtliche Konzeptionen ableiten. Eine Übersicht mit Zuordnungen der verschiedenen Sichtweisen zu den durchgeführten Fallstudien befindet sich in Kapitel 7.3.1.
Die in Kapitel 6.2 vorgestellten Veröffentlichungen haben gezeigt, dass verschiedene Autoren wieder verstärkt über die Rolle der Lehrperson im Unterrichtsprozess diskutieren. Es besteht Konsens dazu, dass Lernen ein aktiver und kumulativer Prozess der Konstruktion ist. Offen bleiben Fragen zu Art und Umfang von unterrichtlichen Instruktionen. Die Antworten dazu variieren: Bezüglich konstruktivistischer Ansätze lassen sich Relativierungen erkennen (COAKTIV-Studie, vgl. Voss u. a. 2011), aber auch völlige

Ablehnung (vgl. Hattie 2013). Während Hattie von einem aktiven, durch die Lehrkraft geführten Unterricht spricht, treten Feindt und Junghans (2016) sowie Wellenreuther (2016) für eine steuernde Wirkung durch die Lehrenden ein. Der Lehrkraft überträgt man die Gesamtverantwortung: für den Grad der Öffnung, Steuerung und Strukturierung, für die Auswahl geeigneter Phänomene sowie für die grundlegenden erkenntnistheoretischen Ansätze, die zur Ausbildung bestimmter Kompetenzen notwendig sind. Diese Entscheidungen trifft die Lehrperson stets in Abhängigkeit von der konkreten Lernsituation und Lerngruppe. Die Erkenntnis, dass es auf die Lehrerin bzw. den Lehrer ankommt, ist nicht neu. Felix Klein schrieb bereits 1900 in seinem Gutachten:

> *„Im Einzelnen möchte ich der Individualität des Lehrers eine weitgehende Freiheit lassen; ich glaube mehr an die Wirksamkeit der Persönlichkeit als an diejenige der Methoden und ausgeklügelten Lehrpläne“* (Schubring 2000, S. 70).

Die Fallstudien zum Rechenschieber sicherten durch eine vorgegebene didaktische Grundstruktur ab, dass, in einem schul- und unterrichtsorganisatorisch realistischen Zeitfenster, ein hohes Maß an kreativer und selbstständiger Schülertätigkeit mit einer notwendigen Ergebnissicherung einhergeht.

Auch wenn diese Arbeit dafür plädiert, Mathematikunterricht inhaltlich zu öffnen und konstruktivistische Ansätze einzubeziehen, sieht sie Lösungen in Fragen der didaktisch-methodischen Gestaltung von Lernprozessen grundsätzlich nicht in extremen Positionen.

These 4:
Charakteristika für den kritisch-reflektierenden Umgang mit dem Konzept des funktionalen Denkens lassen sich im historischen Kontext bis in aktuelle Bildungsdiskussionen hinein finden.

Die konstruktive Auseinandersetzung mit Konzepten zu funktionalem Denken als fundamentalem Bestandteil sowohl mathematischer als auch allgemeiner Bildung prägte die fachdidaktische Forschung seit der Meraner Reform. In einem Zeitraum von über einhundert Jahren finden sich in bestimmten historischen Kontexten immer wieder Ansatzpunkte für einen kritisch-weiterentwickelnden Umgang mit dieser Idee.

Die Reformbestrebungen um 1900 und damit auch die Forderungen zur Erziehung zu funktionalem Denken erwuchsen aus der zunehmenden Kritik am Mathematikunterricht des ausgehenden 19. Jahrhunderts. Etappen in der Entstehungsgeschichte des Begriffs wurden in Kapitel 4 nachgezeichnet. Zur historischen und wissenschaftlichen Einordnung der Reformbestrebungen erfolgten Betrachtungen zur allgemeinen Situation an den Schulen und Hochschulen.

Die maßgeblich von Fachwissenschaftlern getragenen Forderungen mündeten schließlich in die Meraner Reform: Weder der einseitig formale Bildungswert von Mathematik noch eine bloße utilitaristische Ausrichtung waren erstrebenswert. Felix Klein und seine Kollegen suchten nach einer Idee, welche das gesamte Curriculum durchzieht und um die sich der gesamte Lehrstoff gruppieren konnte. Man kann von einem Vorläufer einer zentralen Idee sprechen.

Warum Klein den geometrischen Funktionsbegriff in den Mittelpunkt stellen wollte, wurde in den Kapiteln 4.2.2 und 4.3.1 erörtert. Klein ging noch einen Schritt weiter. Mit seiner Ergänzung „Erziehung zum …“ fasste er den Begriff globaler und erweiterte ihn zum didaktischen Prinzip.

Lietzmann (1919) extrahierte später aus diesem Programm eine didaktische, eine utilitaristische und eine psychologische Sicht. Diese Prinzipien lassen sich hinsichtlich ihrer Komplexität mit den von Winter (1995) formulierten Grunderfahrungen in Beziehung setzen.

In den folgenden Jahrzehnten entfernte man sich im Unterricht stetig von diesen ursprünglichen Ideen (siehe Kapitel 3.1.3). Krüger (2000, S. 304) sah die Prinzipien als Ausdruck einer Prozessorientierung und befürchtete, dass die Versuche, Prozesshaftes in Begriffe zu fassen, im schulischen Kontext eine Vergegenständlichung begünstigen könnten. Prozesse würden so zu Gegenständen „objektiviert“ und zu „Lernstoffen“ erstarren, was wiederum den Schülerinnen und Schülern die Eigenbeteiligung ersparen könnte. Den Bestrebungen, dieses Prinzip Ende des 20. Jahrhunderts wieder stärker in die Unterrichtswirklichkeit einfließen zu lassen, standen noch die von der Strukturmathematik geprägten Überzeugungen einiger Lehrkräfte gegenüber.

Schwachstellen im Mathematikunterricht zeigten sich bereits in den 1990er Jahren, jedoch erst die mediale Aufbereitung von PISA 2000 erzeugte ein Echo in der Gesellschaft, an dem sich bildungspolitischer Aktionismus entzündete. Die Entwicklung verbindlicher Bildungsstandards war dabei nur eine Forderung eines umfassenden Katalogs an Maßnahmen (siehe Kapitel 5.2.1).

Abermals gab es die Forderung, den mathematischen Lehrstoff zu konzentrieren und mathematische Ideen als Kern zu bestimmen. Im Gegensatz zur Meraner Reform konnte man nun auf entsprechende didaktische Forschungen zurückgreifen (siehe Kapitel 5.2.3). Eine Idee, die fast alle Modelle zu zentralen Ideen durchzog, war die des funktionalen Zusammenhangs. Durch die Aufnahme als mathematische Leitidee in die Bildungsstan-

dards fand das ursprüngliche Prinzip des funktionalen Denkens zumindest in Ansätzen curriculare Beachtung.
Ein Vergleich beider Reformen erfolgte in Kapitel 6.1.

8.2 Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Entwicklung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik und Mathematikunterricht (Perspektive II)

In Kapitel 2 wurde die Bedeutung der Überzeugungen und der Bilder von Mathematik für Lernprozesse erörtert. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Entwicklung adäquater Bilder – sowohl bei Lernenden als auch bei Lehrenden – ein wesentliches Element der Entwicklung des mathematischen Unterrichts darstellt.
Im Folgenden werden zentrale Erkenntnisse zu Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht zusammengefasst:

These 5:
Funktionales Denken fördert die Entwicklung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik.

Schülerinnen und Schüler erleben im Durchschnitt 1.500 bis 2.000 Unterrichtsstunden im Fach Mathematik. Es ist daher ganz natürlich, dass ihr Bild von der Wissenschaft Mathematik vorrangig durch Unterricht geprägt wird.
In Kapitel 2.2 konnte gezeigt werden, dass der tradierte Unterricht ein nur unzureichendes Bild von der Wissenschaft Mathematik vermittelt. Wittmann (2003, S. 22) vertritt die These, dass verfälschte Mathematikbilder Lernenden den Zugang zur Mathematik erschweren oder sogar versperren können. Hischer und Lambert (2002, S. 98) begründen ihre Bedenken mit Einschnitten oder gar dem Wegfall tradierter Unterrichtsinhalte (z. B. bestimmter Rechenroutinen) aufgrund der sich rasant entwickelnden Rechentechnik.
Für den Mathematikunterricht könnte dies zur Sinnfrage werden: Wie viel Mathematikunterricht bedarf es in den nächsten Jahrzehnten noch an unseren Schulen? Wie ist der im Vergleich zu anderen Fächern hohe Stundenanteil künftig zu legitimieren? Diese Fragen übersteigen den Rahmen dieser Arbeit; eine Lösung könnte sehr wahrscheinlich darin bestehen, im Unterricht stärker das zu thematisieren, was Mathematik als Wissenschaft ausmacht.

Auch Wittmann (2003) sowie Hischer und Lambert (2002) begründen ihre Ansätze vornehmlich mit der Bezugswissenschaft Mathematik. Damit Schülerinnen und Schüler diese Wissenschaft angemessen verstehen können, sollte eine Balance zwischen Anwendung und theoretischen Grundlagen angestrebt werden. Wittmann (2003, S. 27) nennt es reine und angewandte Mathematik, Hischer und Lambert (2002, S. 98) sprechen von einer technischen und einer philosophischen Seite. Lernende sollten im Mathematikunterricht verstärkt charakteristische Denk- und Arbeitsweisen kennenlernen und diese systematisch weiterentwickeln.

Funktionales Denken als besondere basale Denkform wurde in Kapitel 3 beschrieben. Erhebt man die stetige Entwicklung und Ausformung funktionalen Denkens zu einer zentralen Aufgabe des Mathematikunterrichts, so werden damit auch typische Denk- und Arbeitsweisen der Bezugswissenschaft vermittelt. Mathematischer Unterricht wird damit zur wissenschaftspropädeutischen Auseinandersetzung mit Mathematik.

These 6:
Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht sind zugleich Ausgangspunkt und Ziel für die Entwicklung des mathematischen Unterrichts.

Diese These bezieht die Überzeugungen und Einsichten der Lehrenden ein. In Kapitel 2.3.1 konnte eine gewisse Ambivalenz berufsbezogener Überzeugungen nachgewiesen werden: Diese können orientierend, regulierend, entlastend, stabilisierend, aber auch filternd oder hemmend wirken. Empirische Ergebnisse der Studien von Grigutsch (1996), von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) sowie der COAKTIV-Studie (vgl. Voss u. a. 2011) wurden in Kapitel 2.3.2 zusammengefasst. Diese Studien zeigten die Bedeutsamkeit berufsbezogener Überzeugungen von Lehrpersonen für die Gestaltung von Lernsituationen. Bestehende Überzeugungen steuern somit die Planung und Durchführung von Unterricht. Veränderungen in den Überzeugungen bei Lehrenden können demzufolge auch zu Veränderungen der Unterrichtsgestaltung führen. Durch eine Konsolidierung können schließlich veränderte Überzeugungen zu bestehenden Überzeugungen werden und so einen spiralartigen Prozess auslösen (siehe Abbildung 2).

In Kapitel 2.3.3 wurde dargestellt, wie sich die Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern auf ihre Lernprozesse auswirken. Grigutsch (1996, S. 187f.) konnte nachweisen, dass bestimmte Mathematikbilder einem Lernerfolg förderlich oder eher abträglich sein können. In Kapitel 2.3.4 folgten Konsequenzen für die Gestaltung von Lernprozessen. Veränderte Überzeugungen von Lernenden können die Ergebnisse einer veränderten Unterrichtsgestaltung sein und möglicherweise die folgenden Lernprozesse fördern. Auch auf Seiten der Schülerinnen und Schüler kann so ein spiralartiger Prozess initiiert werden (siehe Abbildung 2).

Im unterrichtlichen Alltag treffen die Überzeugungen der Lehrenden und der Lernenden aufeinander (siehe Kapitel 2.3.4). Es kommt zu komplexen Wechselwirkungen, bei denen die Überzeugungen zugleich Ausgangspunkt und Ziel sein können (siehe Abbildung 2). Veränderungen in den berufsbezogenen Überzeugungen von Lehrerinnen und Lehrern sind somit ein Ansatz zur weiteren Entwicklung von Unterricht. In der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften sollte dies entsprechend Beachtung finden.

These 7:
Mathematikhistorische Bezüge können funktionales Denken fördern und das Bild von Mathematik positiv beeinflussen.

Zur Förderung funktionalen Denkens eignen sich Phänomene, die in einem historischen Kontext eingebunden sind. Dieser Kontext kann weitgehend ausgeklammert oder nur am Rande erwähnt werden. Er kann aber auch bewusst als Element der inner- und außermathematischen Vernetzung thematisiert werden. Historische Problemstellungen besitzen u. U. eine höhere Authentizität als künstliche Konstruktionen aus der Alltagswelt.

Funktionale Zusammenhänge mit historischem Bezug können verschieden betrachtet werden: Lernende können beispielsweise Gesetzmäßigkeiten, die ihnen bekannt sind, nachentdecken. Dies kann durch das Nachstellen historischer Experimente (z. B. Fallgesetze über die geneigte Ebene) oder durch die Auswertung vorgegebener historischer Messdaten (z. B. Bestimmung der Höhen von Mondbergen) erfolgen.

Eigenständig Messdaten zu erheben, bietet Schülerinnen und Schülern ein größeres Lernpotential. Durch einen erhöhten organisatorischen Aufwand (z. B. Zubehör, Fachraum) oder durch erforderliches Spezialwissen kann der Rahmen des (tradierten) Fachunterrichts möglicherweise überschritten werden. Bei der Vorgabe von Messwerten umgeht man praktisches naturwissenschaftliches Handeln und beschränkt sich auf die mathematische Beschreibung und Analyse funktionaler Abhängigkeiten. Diese Vorgehensweise ist in der Planung und Durchführung weniger aufwendig. Messdaten mit konkreten historischen Bezügen bezeugen, wie bedeutsam mathematische Kenntnisse sein können.

Die Förderung funktionalen Denkens bleibt somit nicht auf das Fach Mathematik – einschließlich fachübergreifender und fächerverbindender Ansätze – beschränkt. Funktionale Abhängigkeiten in naturwissenschaftlichen und technischen Phänomenen zeigen Schüle-

rinnen und Schülern konkrete Anwendungsbereiche für Mathematik. Beim Zurückgehen auf die historischen Wurzeln eines Phänomens kann es vorteilhaft sein, die Zusammenhänge für Lernende inhaltlich überschaubar zu halten. Weiterhin ermöglichen historische Kontexte, wissenschaftliche oder gesellschaftliche Resultate global einzuordnen.
In der Fallstudie zum Rechenschieber wurden beide Varianten nachgestellt. Schülerinnen und Schüler sollten eine Skale zur Multiplikation nachentdecken bzw. eine vorgegebene Skale mathematisch analysieren. Nach Auswertung der Fallstudien war festzustellen, dass das Nachentdecken der Skale einer Analyse vorgegebener Skalen vorzuziehen ist. Die Nachentdeckung führte die Lernenden zu einer höheren kognitiven Aktivierung und einem größeren Erfolgserlebnis. Diese Erfahrungen wirken nicht nur auf das Bild von Mathematik, sie beeinflussen auch das Selbstkonzept.
Mit dem Einbinden historischer Kontexte können kognitive und affektive Ziele verfolgt werden. Affektive Ziele beziehen sich auf die Motivation bzw. das lernförderliche Klima. Die kognitiven Ziele verweisen auf grundlegende Dimensionen in der Entwicklung von Unterricht: Vermittlung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik; Aufzeigen der Dynamik der Wissenschaft; Genese mathematischer Forschung; wechselseitige Beeinflussung von Mathematik, Technik und Gesellschaft. In Kapitel 7.3.2 wurde die auf Kronfellner (1998) zurückgehende Taxonomie der Zielvorstellungen exemplarisch mit Potentialen der Fallstudie Rechenschieber untersetzt.

8.3 Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Gestaltung nachhaltiger Lernprozesse (Perspektive III)

Lernen ist eine Zustandsänderung im Denken eines Individuums. Rückschlüsse auf die Qualität dieses Prozesses lassen sich aus einem Zuwachs an Fähigkeiten ableiten. Lernen beschreibt weiterhin einen individuellen Prozess. Er vollzieht sich in unterschiedlichen Ausprägungsstufen, wobei Verstehen als eine sehr hohe Qualität angesehen werden kann. Im Mathematikunterricht kann Verstehen sowohl als Gegenstand (Verstehen von Mathematik) als auch als Werkzeug (Verstehen durch Mathematik) aufgefasst werden (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 46ff.).

These 8:
Für die Förderung funktionalen Denkens stellen konkrete Phänomene eine den Erkenntnisprozess durchziehende Anregung dar.

Vollrath kritisierte Themen, bei denen Mathematik vom Höhepunkt ihrer Entwicklung gedacht wurde. *„Phänomene standen in der Entwicklung der Mathematik meist am Anfang. Am Ende ergibt sich dann noch ein hoch entwickelter formaler Apparat, der seine Wurzeln in den Phänomenen kaum erkennen läßt“* (Vollrath 1989, S. 23). Dies bedeutet die Abkehr von primär abstrakten mengentheoretischen Ansätzen. Nach Hischer (2012, S. 6) sollte Schülerinnen und Schülern in verschiedenen Phasen des Unterrichts das Suchen, Irren, Probieren und Entdecken ermöglicht werden. Vollrath (1989, S. 22) plädierte dafür, dass sich Lernende die Daten selbst beschaffen. Dabei könnten nicht nur Fehler beobachtet und beurteilt, sondern auch erforderliche Idealisierungen diskutiert werden.

Eine mathematische Theorie kann sich aus einem Entwicklungsprozess ableiten, in dessen Mittelpunkt ein Problem steht. Problemlösen ist somit ein Weg, um neues Wissen zu erwerben (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 46). Um dies zu gewährleisten, sollten Phänomene nicht nur zum Einstieg oder zur Motivierung herangezogen werden. Vielmehr sollten sie den Lernprozess als tragendes Element durchziehen. Dies wiederum berührt grundlegende Fragen der Planung und Gestaltung von Lernprozessen.

In den Fallstudien wurde dies folgendermaßen realisiert:

Bei der Unterrichtseinheit zum Rechenschieber (siehe Kapitel 7.2.3) diente die Multiplikationsskale nicht nur als ein Beispiel für eine Anwendung von Logarithmusfunktionen. Indem die konkreten Zuordnungen vertauscht wurden, gelang eine anschauliche Deutung des Umkehrens von Funktionen als Änderung der Blickrichtung. Weiterhin konnten Gesetze zum Rechnen mit Logarithmen unmittelbar und für Lernende einsichtig aus der Benutzung des Gerätes abgeleitet werden. Der Erkenntnisprozess der Lernenden vollzog sich durch den permanenten Wechsel der Darstellungsebenen: praktische Bedeutung an der Multiplikationsskale – grafische Darstellung – symbolische Darstellung.

Bei der Fallstudie zum Sehwinkel (siehe Kapitel 7.2.2) wurden die funktionalen Betrachtungen zwischen den Größen Sehwinkel, Gegenstandsweite und Gegenstandsbreite der Einführung des Peripheriewinkelsatzes vorangestellt. Die Schülerinnen und Schüler konnten durch Experimentieren funktionale Abhängigkeiten enaktiv erfahren. Qualitative Beobachtungen wurden durch quantitative Messungen konkretisiert, die Auswirkungen von Messfehlern diskutiert. Die so gewonnenen Erkenntnisse konnten unmittelbar angewendet werden, um den Peripheriewinkelsatz herzuleiten. Es wird davon ausgegangen, dass diese Erfahrungen und Erkenntnisse – etwas unter einem bestimmten Winkel zu sehen – auch für weitere mathematische Themengebiete (z. B. trigonometrische Berechnungen an beliebigen Dreiecken) und im Alltag nutzbringend sein können.

These 9:
Funktionales Denken sollte durch einen Wechsel der Darstellungsebenen unterstützt werden.

Verstehen kann als Fähigkeit gedeutet werden, Darstellungsebenen zu wechseln, um Sachverhalte beschreiben zu können. Dieser Wechsel kann sowohl zwischen Mathematik und Realität als auch zwischen innermathematischen Darstellungsebenen (z. B. enaktiv, ikonisch, symbolisch) erfolgen (vgl. Wartha 2011, S. 8f.). Speziell für funktionale Zusammenhänge ist auch ein Wechsel zwischen den verschiedenen Entwicklungsstufen der betrachteten Merkmale zur Förderung funktionalen Denkens möglich. In Kapitel 7.1.1 wurde das Modell von Hußmann und Laakmann (2011) angeführt. Es verknüpft speziell die Ebenen Zuordnungsaspekt, Änderungsaspekt und Objektaspekt mit den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen.

Das Verstehen funktionaler Zusammenhänge kann sich darüber hinaus in einem Wechsel der in Kapitel 7.1.2 beschriebenen sprachlichen Entwicklungsstufen manifestieren. Schülerinnen und Schüler sollten in die Lage versetzt werden, ihnen bekannte symbolische Ausdrücke fachsprachlich und durch geschärfte Alltagssprache korrekt und verständlich wiederzugeben. Andererseits sollten sie durch Alltagssprache beschriebene funktionale Zusammenhänge in bereits bekannte fach- und symbolsprachliche Elemente übertragen können. Haben Schülerinnen und Schüler dabei Schwierigkeiten, so kann dies auf grundsätzliche Verständnisprobleme hindeuten. Durch einen bewussten Wechsel von Darstellungsebenen können Lernprozesse befördert und zudem zielgerichtet reflektiert werden.

Für die Fallstudie zum Rechenschieber wurde der Wechsel von Darstellungsebenen bereits bei These 8 thematisiert.

Die in Kapitel 7.2.2 beschriebene Unterrichtseinheit zum Sehwinkel verfolgte bei der Herleitung des Peripheriewinkelsatzes einen bewussten Wechsel zwischen enaktiven und ikonischen Darstellungsebenen, z. B. durch die wechselseitigen Darstellungen von Winkeln am gebastelten Sehtrichter, die Veranschaulichung der Winkel auf dem Fußboden und die Darstellungen mit dynamischer Geometriesoftware.

8.4 Förderung funktionalen Denkens als Beitrag zur Entwicklung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts (Perspektive IV)

Jedes Unterrichtsfach bemisst sich auch an seinem Beitrag zur Allgemeinbildung. Im Mathematikunterricht eröffnen sich derlei Potentiale aufgrund der Entwicklung von Problemlösestrategien und der Förderung charakteristischer Denkarten, wie dem funktionalen Denken. Funktionales Denken kann als ein über die Mathematik hinausreichendes, universelles und mächtiges Werkzeug zur Lösung von Problemen verstanden und genutzt werden. Daraus lässt sich dessen besondere Bedeutung für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht ableiten.

These 10:
Durch die Förderung funktionalen Denkens erreicht der allgemeinbildende Mathematikunterricht eine neue Qualität.

In Kapitel 3.1.1 wurde funktionales Denken als eine spezifische Ausprägung mathematischen Denkens eingeordnet. Grundlegende Zusammenhänge zwischen mathematischem Denken und Alltagsdenken wurden im Kapitel 3.1.2 dargestellt. Durch die sprachliche Ausschärfung von Begriffen sowie die bewusste Anwendung bestimmter Schlussweisen und Strategien wird Alltagsdenken effektiviert. Mathematisches Denken fungiert als Verstärker des Alltagsdenkens. Entsprechende Entwicklungsstufen wurden in das Rahmenmodell zur Förderung funktionalen Denkens integriert (siehe Kapitel 7.1.2).
Betrachtet man die Entwicklungsstufe „Schärfen der Alltagssprache", zeigt sich, dass funktionales Denken in nahezu allen Unterrichtsfächern angewendet wird. Die Analyse und Auswertung grundlegender Kausalzusammenhänge begründet Entscheidungen und Schlussfolgerungen. Als Beispiele seien genannt:

- deterministische Gesetzmäßigkeiten in Naturwissenschaften,
- Interpretationen grafischer Darstellungen in Wissenschaft und Alltag,
- korrekte Verwendung grammatikalischer Strukturen in der Muttersprache und in den Fremdsprachen,
- Notentexte als Handlungsanweisung,
- Programmierung von Algorithmen.

Funktionales Denken manifestiert sich als spezifisches mathematisches Denken in dichteren Vernetzungen von Wissenselementen – sowohl innerhalb der Mathematik als auch mit Alltagswissen. Die Ausprägung derartiger Verknüpfungen variiert von Individuum

zu Individuum. Sie lässt sich, nach Heymann (1996, S. 229), aber durch geeignete Denkanlässe nachhaltig beeinflussen. Gleichzeitig betont er, dass eine Beschäftigung mit Mathematik per se die allgemeine Denktätigkeit nicht zwingend steigert. Entscheidend ist vielmehr die Gestaltung konkreter unterrichtlicher Lernsituationen.
Die grundsätzliche Ausrichtung eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts diskutiert auch Vollrath (1989). In seiner phänomenologischen Sicht auf funktionales Denken wählt er als gemeinsames Merkmal das „Erfassen und Beherrschen" von Situationen. Damit vereint er Betrachtungen zu inner- und außermathematischen Sachverhalten. Neben der geforderten Anwendungsorientierung ergibt sich die Notwendigkeit, innermathematische Zusammenhänge zu betrachten. Erst daraus resultiert Anwendbarkeit.
Nach Führer (1998, S. 508) sollte sich der weiterführende Mathematikunterricht durch Explikation allgemeiner Bedeutungen legitimieren. Abstrakte Unterrichtsinhalte seien so zu lehren, dass ihre allgemeinbildenden Funktionen auch erkennbar werden (vgl. Führer 1998, S. 505). Mit Termberechnungen oder funktionalen Betrachtungen verbinden sich für ihn Denkweisen, die abstraktere Argumentationen auch über die Mathematik hinaus prägen können (vgl. Führer 1998, S. 510). Schülerinnen und Schüler sollten funktionales Denken als ein universelles, sprachlich-gedankliches Ordnungswerkzeug begreifen und daran erkennen, was ihnen Mathematik bedeuten kann.
Auch Winter skizziert Ansatzpunkte für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht (siehe Kapitel 5.2.2 und 7.1.1). Für Schülerinnen und Schüler sollte Mathematik Anwendung, Struktur und kreatives Handlungsfeld bedeuten. Zusätzlich sollten diese Grunderfahrungen auch angemessen vernetzt werden. Eine Vernetzung zwischen Struktur- und Anwendungsaspekt könnte in Erarbeitungsphasen beispielsweise folgendermaßen erreicht werden: Eine vorläufige Arbeitsdefinition wird schrittweise und für die Lernenden einsichtig präzisiert. Schülerinnen und Schüler erfahren so Begriffsbildung als Prozess.
Übertragen auf die Fallstudie Rechenschieber bedeutet das: Das Gerät liefert mit seiner Multiplikationsskale den konkreten Anwendungsbezug. Die Rechenoperation Logarithmieren, die Logarithmusfunktionen als Funktionsklasse sowie das mathematische Problem der Umkehrung von Funktionen repräsentieren „*eine deduktiv geordnete Welt eigener Art*" (Winter 1995, S. 37) und somit Mathematik als Struktur. Diese spezifische Art der Mathematik, Zusammenhänge zu erfassen und zu beschreiben, zeigt sich insbesondere in dieser Fallstudie. Funktionales Denken wird dabei bereits bewusst als universelles Werkzeug zur Lösung von Problemen eingesetzt. Funktionen werden bereits auf symbolischer Ebene beschrieben und als Objekte erfasst und verarbeitet. Mathematik zeigt sich als kreatives Handlungsfeld, wenn es darum geht, funktionales Denken als

leistungsfähiges mathematisches Werkzeug einzusetzen (vgl. Winter 1995, S. 37ff.). Eine Vernetzung der drei Aspekte aus didaktisch-methodischer Sicht erfolgte durch das zweischrittige indirekt-genetische Vorgehen (siehe Kapitel 7.1.1). Erläuterungen zur Erarbeitung der Begriffe Umkehr- und Logarithmusfunktion erfolgten im Kapitel 7.2.3.

8.5 Ausblick

Die Erörterung der im Vorangehenden dargestellten Thesen umreißt die zentrale Einsicht, die aus den vorgelegten Untersuchungen dieser Arbeit abgeleitet wurde und im Folgenden zusammenfassend formuliert werden soll.
Der Förderung funktionalen Denkens kam und kommt eine zentrale Stellung bei der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu. Den in Kapitel 7 angeführten Befürchtungen, dass *„der übliche Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen [...] weder [...] wichtigen gesellschaftlichen Anforderungen noch den individuellen Bedürfnissen und Qualifikationsinteressen einer Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler gerecht“* (Heymann 1996, S. 277) wird, konnten und können fachdidaktisch wohlbegründete Argumente entgegengesetzt werden.
Hischer und Lambert (2002) betrachten „crisis“ als die Möglichkeit zu einer entscheidenden Wendung. Maßnahmen, die funktionales Denken fördern, sind als ein Beitrag zur nachhaltigen Entwicklung von Mathematikunterricht zu bewerten; besonders auch vor dem Hintergrund notwendiger Veränderungen in der Unterrichtskultur durch Einbeziehung digitaler Medien.
Für die Förderung funktionalen Denkens ergeben sich grundsätzlich verschiedene Vorgehensweisen. Das vorgestellte Rahmenmodell bietet einen theoretisch fundierten Orientierungsansatz, welcher grundsätzlich auf andere Lernsituationen übertragen werden kann. Die Fallstudien sind hierfür als exemplarisch-konkrete Belege zu verstehen.
Durch eine differenzierte Betrachtung von Entwicklungsstufen ausgewählter Aspekte können Lehrkräfte das funktionale Denken breit fördern – auch in den unteren Jahrgangsstufen (Thesen 1 und 2). Dafür sollten sich die Lehrkräfte der Potentiale curricularer Lerninhalte bewusst werden. Überzeugungen von Lehrerinnen und Lehrern zu Mathematik und Mathematikunterricht sowie ein entsprechendes Selbstkonzept beeinflussen deren Denken und Handeln maßgeblich. Das hat natürlich auch Auswirkungen darauf, wie sie konkrete Lernsituationen planen und gestalten (These 6).
Funktionales Denken leistet bei Lernenden bedeutsame Beiträge zur Entwicklung eines tragfähigen und belastbaren Bildes von Mathematik und Mathematikunterricht (Thesen 5

und 7) sowie zur Allgemeinbildung (These 10). Grundlage hierfür ist die Gestaltung nachhaltiger und herausfordernder Lernprozesse durch die Lehrerinnen und Lehrer (Thesen 3, 8 und 9).

Die Untersuchungen zeigen, dass die vier Perspektiven nicht losgelöst voneinander betrachtet werden können – sie durchdringen und ergänzen einander. Nur eine Vernetzung der dargestellten Untersuchungsansätze kann zu einer nachhaltigen Förderung funktionalen Denkens führen. Diese Arbeit will dazu aus theoretischer und exemplarisch-konkreter Sicht einen Beitrag leisten.

Felix Kleins Idee von der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ ist ein umfassendes didaktisches Prinzip. Es lieferte eine wesentliche Grundlage für die theoretischen Betrachtungen zur Entwicklung des Mathematikunterrichts im Rahmen dieser Arbeit. Rückblickend auf die Begriffsgeschichte und die fachdidaktischen Positionierungen zu funktionalem Denken schließt sich folgerichtig die Einschätzung von R. v. Hofe an (These 4):

> *„Auch, wenn das funktionale Denken heute nicht mehr die Schlüsselstellung hat, die ihm nach den Meraner Reformvorschlägen von 1905 zukommen sollte, so bleibt die Leitidee jedoch insbesondere durch die Betonung von Realitätsbezügen nicht auf die Behandlung von Funktionsklassen beschränkt, sondern rückt das Erkennen, Beschreiben und Interpretieren funktionaler Zusammenhänge in den Mittelpunkt des Unterrichts“* (vom Hofe/Lotz/Salle 2015, S. 157).

Vollrath bezeichnete funktionales Denken *„als einen offenen didaktischen Begriff, dessen Entwicklung zu einer permanenten Aufgabe der Didaktik gehört“* (Vollrath 1989, S. 6).

Aufgabe hier ansetzender fachdidaktischer Forschungen wird es sein, sich Untersuchungen zu widmen, wie sich funktionales Denken dieser ursprünglich intendierten Schlüsselstellung im Sinne der Meraner Reform (wieder) annähern kann. Die ursprüngliche Idee Kleins bietet nach gut einem Jahrhundert noch immer einen wesentlichen Ansatzpunkt für die Frage, woran sich der allgemeinbildende Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert grundsätzlich orientieren sollte.

9 Literaturverzeichnis

Artelt, C./Stanat, P./Schneider, W./Schiefele, U. (2001): Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Hg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 69–137.

Barzel, B./Ehret, C. (2009): Mathematische Sprache entwickeln. In: Mathematik lehren, H. 156, S. 4–9.

Barzel, B./Holzäpfel, L. (2011): Gleichungen verstehen. In: Mathematik lehren, H. 169, S. 2–7.

Baumert, J./Lehmann, R./Lehrke, M./Schmitz, B./Clausen, M./Hosenfeld, I./Köller, O./Neubrand, J. (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J./Schümer, G. (2001): Familiäre Lebensverhältnisse, Bildungsbeteiligung und Kompetenzerwerb. In: Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Hg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 323–407.

Baumert, J./Kunter, M./Blum, W./Klusmann, U./Krauss, S./Neubrand, M. (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Unterricht und mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern (COAKTIV) – Ein Forschungsprogramm. In: Kunter, M./Baumert, J./Blum, W. (Hg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann, S. 7–25.

Beckmann, A. (2000): Bereitet der Mathematikunterricht auf die Mathematik im Physikunterricht vor? – Ergebnisse einer schriftlichen Befragung zu den Bereichen Bruchrechnung, Gleichungslehre und Funktionen. In: Mathematica didactica, Bd. 23, H. 1, S. 3–23.

Bender, P./Schreiber, A. (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Borovcnik, M. (1997): Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip in der Mathematik-Didaktik. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, H. 27, S. 17–32.

Breidenbach, W. (1950): Methodik des mathematischen Unterrichts. Stuttgart: Klett.

Bruder, R. (2014): Forschen, Explorieren, Problemlösen. In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hg.): Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sekundarstufe I und II. Seelze: Klett Kallmeyer, S. 141–158.

Bruder, R./Feldt-Caesar, N./Pallack, A./Pinkernell, G./Wynands, A. (2015): Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II. In: Blum, W./Vogel, S./Drüke-Noe, C./Roppelt, A. (Hg.): Bildungsstandards aktuell. Mathematik in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage, S. 108–124.

Brügelmann, H. (2014): Gilt nach Hattie: Je häufiger, desto besser? Zur Bedeutung von „Evidenzbasierung“ für pädagogisches Handeln vor Ort. In: Terhart, E. (Hg.): Die Hattie-Studie in der Diskussion. Probleme sichtbar machen. Seelze: Kallmeyer und Friedrich, S. 38–50.

Bruner, J. S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Berlin, Düsseldorf: Berlin-Verlag und Schwann.

Brüning, A./Spallek, K. (1978): Eine inhaltliche Gestaltung der Gleichungslehre: Terme oder Abbildungen und Funktionen. In: Mathematisch-physikalische Semesterberichte, Bd. XXV, H. 2, S. 236–271.

Büchter, A. (2008): Funktionale Zusammenhänge erkunden. In: Mathematik lehren, H. 146, S. 4–10.

Büchter, A./Henn, H.-W. (2015): Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 19–49.

Bürger, H. (1996): Auf dem Weg zu einem allgemeinen Funktionsbegriff. In: Mathematik lehren, H. 75, S. 51–54.

Clausen, H. J. (1957): Methodische Einführung in den Gebrauch des Rechenstabes an mittleren Schulen. In: ARISTO-Mitteilungen für die Schulpraxis, H. 6, S. 2–10.

Denk, F. (1954): Rechnen mit Rechenschieber ohne Kenntnis der Logarithmen? In: ARISTO-Mitteilungen für die Freunde des Hauses – Schulausgabe, H. 3, S. 3–4.

Devlin, K./Diener, I. (1998): Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. 2. Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Dorsch, F./Wirtz, M. A./Strohmer, J. (2013): Lexikon der Psychologie / Dorsch. 16., vollst. überarb. Aufl., Bern: Huber.

Drenckhahn, F. (1956): Vom Rechenstab in der Volksschule. In: Pädagogische Blätter, Bd. 7, H. 1/2, S. 13–25.

Elschenbroich, H. J./Henn, H.-W. (2014): Funktionen analysieren. In: Mathematik lehren, H. 187, S. 2–7.

Feindt, A./Junghans, C. (2016): Lehren – eine vergessene Kategorie in der Unterrichtsentwicklung?! Ein Plädoyer für das Lehren im individualisierten Unterricht. In: Friedrich Jahresheft: Lehren, S. 18–19.

Finke, W. (1918): Über Rechenmaschinen und Rechenunterricht. Ein Beitrag zu einer Reform der Methodik und Schematik auf kinematischer Grundlage. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, H. 49, S. 127–139.

Fröhlich, W. D. (2010): Wörterbuch Psychologie. Original-Ausg., 27., unveränd. Nachaufl. München: Dt. Taschenbuch-Verlag.

Führer, L. (1995): Rezension zu Müller-Philipp: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Bd. 4, S. 127–129.

Führer, L. (1997): Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Führer, L. (1998): Mathematikunterricht nach dem 7. Schuljahr – warum eigentlich für alle? In: Neue Sammlung – Zeitschrift für Erziehung und Gesellschaft, Bd. 38, H. 4, S. 489–511.

Griesel, H./Postel, H./Suhr, F./Ladenthin, W./Lösche, M. (2015): Elemente der Mathematik, Sachsen, 8. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel.

Grigutsch, S. (1996): Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. Darmstadt: Dissertationsdruck GmbH.

Grigutsch, S./Raatz, U./Törner, G. (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: Journal für Mathematikdidaktik, Bd. 19, H. 1, S. 3–45.

Grimsehl, E. (1988): Lehrbuch der Physik. Bd. 3: Optik. Leipzig: B. G. Teubner.

Gutzmer, A. (1908): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte: Gesamtbericht. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.

Hattie, J. (2013): Lernen sichtbar machen. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von Beywl, W. und Zierer, K. Baltmannsweiler: Schneider.

Hefendehl-Hebeker, L./Rezat, S. (2015): Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 117–148.

Heinze, A./Lipowsky, F./Ufer, S. (2015): Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 411–437.

Herget, W./Malitte, E./Richter, K. (2000): Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht! In: Flade, L./Herget, W. (Hg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen, S. 115–124.

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Hischer, H. (2012): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur, Funktion, Zahl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hischer, H./Lambert, A. (2002): Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fächerübergreifender Sicht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Höfer, T. (2008): Das Haus des funktionalen Denkens. Entwicklung und Erprobung eines Modells für die Planung und Analyse methodischer und didaktischer Konzepte zur Förderung des funktionalen Denkens. Hildesheim: Franzbecker.

Höfler, A. (1910): Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig: B. G. Teubner.

Hußmann, S./Laakmann, H. (2011): Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. In: Praxis der Mathematik in der Schule – Sekundarstufen I und II, Bd. 53, H. 38, S. 2–11.

Jahnke, H. N./Warmbach, R. (2013): Interpretation von Formeln mit Hilfe des Funktionsbegriffs. In: Allmendinger, H./Lengnink, K./Vohns, A./Wickel, G. (Hg.): Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer Fachmedien, S. 63–78.

Jahnke, T. (2005): Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. In: Graumann, G. (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 271–274.

Jahnke, T. (2007): Deutsche PISA-Folgen. In: Hopmann, S. T./Brinek, G./Retzl, M. (Hg.): PISA zufolge PISA. PISA according to PISA: hält PISA, was es verspricht? Wien: LIT Verlag, S. 305–320.

Jahnke, T. (2013): Betrachtungen aus der Sicht eines PISA-Kritikers zur „neuen Norm für den Bildungsbegriff". In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 87–92.

Jansen, P. (2008): Frühe Wege zu Funktionen. Erfahrungen aus der Grundschule nutzen. In: Mathematik lehren, H. 148, S. 12–15.

Jongebloed, H.-C. (2013): Vermessen – oder: Diagnostik als Bildungsprogramm. In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 93–111.

Kaiser, G./Blum, W./Borromeo Ferri, R./Greefrath, G. (2015): Anwendungen und Modellieren. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 357–384.

Katzenbach, M. (2006): Die Aufgaben-Drehscheibe – ein Werkzeug, um den Öffnungsgrad von Aufgaben einzuschätzen. In: Mathematik lehren, H. 138, S. 63–64.

Klein, F. (1895): Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Antrittsrede, gehalten am 25. Oktober 1880 bei Übernahme der damals an der Universität Leipzig neu eingerichteten Professur für Geometrie. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 26, S. 535–540.

Klein, F. (1904): Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner.

Klein, F. (1905a): Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 14, S. 33–47.

Klein, F. (1905b): Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 14, S. 477–492.

Klein, F. (1926): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Ausgewählte Passagen bezüglich Heidelberger Mathematiker – zusammengestellt von Gabriele Dörflinger 2013: Heidelberger Dokumentenserver: http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/14948/. Aufgerufen am 12.11.2016.

Klein, F./Riecke, E. (1900): Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner.

Klein, F./Schimmack, R. (1907): Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. Leipzig: B. G. Teubner.

Klieme, E. u. a. (2007): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Bildungsforschung Bd. 1. Bonn, Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Klieme, E. (2013): Bildung unter undemokratischem Druck? Anmerkungen zur Kritik der PISA-Studie. In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 37–51.

Klieme, E./Neubrand, M./Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Hg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 139–190.

Klingberg, L. (1982): Unterrichtsprozeß und didaktische Fragestellung. 3. Aufl. Berlin: Volk und Wissen.

Kratz, H. (2011): Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Ein Studien- und Praxisbuch für die Sekundarstufe. Seelze: Klett Kallmeyer.

Kronfellner, M. (1987): Ein genetischer Zugang zum Funktionsbegriff. In: Mathematica didactica, Bd. 10, H. 2, S. 81–100.

Kronfellner, M. (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Kronfellner, M./Malle, G. (1996): Von funktionalen Abhängigkeiten zu Funktionen. In: Mathematik lehren, H. 75, S. 19–21.

Krüger, K. (2000): Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos.

Kultusministerkonferenz (KMK) (1995): Standards für den Mittleren Bildungsabschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und erste Fremdsprache. Beschluss der KMK vom 12.05.1995. Bonn.

Kultusministerkonferenz (KMK) (1997): Grundsätzliche Überlegungen zu Leistungsvergleichen innerhalb der Bundesrepublik Deutschland: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1997/1997_10_24-Konstanzer-Beschluss.pdf. Aufgerufen am 21.10.2016.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss v. 4.12.2003, ersch. 2004. München: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2004a): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss v. 15.10.2004, ersch. 2005. München, Neuwied: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2004b): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss v. 15.10.2004, ersch. 2005. München, Neuwied: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2004c): Standards für die Lehrerbildung: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung-Bildungswissenschaften.pdf. Aufgerufen am 22.12.2015.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2006): Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring. München: LinkLuchterhand.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2008): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf. Aufgerufen am 22.12.2015.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2012a): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss v. 18.10.2012, ersch. 2015. Köln: Link.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2012b): Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Bildungsabschluss im Fach Mathematik: http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm. Aufgerufen am 21.10.2016.

Lambacher Schweizer (2013): Mathematik für Gymnasien 8. Ausgabe Sachsen. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Lauter, J. (1964): Aufbau der elementaren Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 10, H. 5, S. 59–119.

Leuders, T./Prediger, S. (2005): Funktioniert's? – Denken in Funktionen. In: Praxis der Mathematik in der Schule – Sekundarstufen I und II, H. 2, S. 1–7.

Level Mathematik (2005): Level Mathematik, Gymnasium Sachsen, Lehrbuch Klasse 8. Berlin, Frankfurt a. M.: Duden-Paetec-Schulbuchverlag.

Lietzmann, W. (1919): Methodik des mathematischen Unterrichts. 1. Teil: Organisation, allgemeine Methode und Technik des Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W./Stender, R. (1961): Methodik des mathematischen Unterrichts. 3. Aufl. Heidelberg: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W./Jahnke, H. N. (1968): Methodik des mathematischen Unterrichts. 4. Aufl. Heidelberg: Quelle & Meyer.

Loos, A./Ziegler, G. M. (2015): Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 3–17.

Maaß, K./Ege, P. (2007): Mathematik und Mathematikunterricht aus der Sicht der Hauptschüler – Ergebnisse einer empirischen Studie. In: Mathematica didactica, Bd. 2, H. 30, S. 53–85.

Malle, G. (1996): Aus der Geschichte lernen. In: Mathematik lehren, H. 75, S. 4–8.

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren, H. 103, S. 8–11.

Malle, G. (2009): Mathematiker reden in Metaphern. In: Mathematik lehren, H. 156, S. 10–15.

Mattheis, M. (2000a): Die Entwicklung des höheren Schulwesens in Preußen. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 46, H. 3, S. 5–21.

Mattheis, M. (2000b): Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesens vor 1900. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 46, H. 3, S. 41–61.

Meidinger, H.-P. (2013): PISA – Mehr Schaden als Nutzen? Versuch eines Resümees im 13. Jahr nach PISA. In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 23–34.

Meyer, H. (2015): Unterrichtsentwicklung. Berlin: Cornelsen.

Meyerhöfer, W. (2013): Unterrichten – standardisiertes Testen – Erziehen. Effekte der Standardisierung. In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 181–205.

Müller-Philipp, S. (1994): Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Münster: Waxmann.

Op't Eynde, P./Corte, E. de/Verschaffel, L. (2003): Framing students' mathematics-related beliefs. In: Leder, G. C./Pehkonen, E./Törner, G. (Hg.): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 13–37.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) (2004): The PISA 2003 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills: http://www.oecd-ilibrary.org/education/the-pisa-2003-assessment-framework_9789264101739-en. Aufgerufen am 6.10.2016.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) (2012): PISA 2012 – Ergebnisse im Fokus. Was 15-Jährige wissen und wie sie dieses Wissen einsetzen können: http://www.oecd.org/berlin/themen/PISA-2012-Zusammenfassung.pdf. Aufgerufen am 22.12.2015.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) (2013): PISA 2012 assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Paris: OECD.

Picht, G. (1964): Die deutsche Bildungskatastrophe. Analysen und Dokumente. Olten, Freiburg i. B.: Walter-Verlag.

Pickert, G. (1955/56): Bemerkungen zum Funktionsbegriff. In: MNU, Bd. 11, H. 8, S. 394–397.

Pohlmann, D./Stoye, W. (2006): Mathematik plus, Gymnasium Klasse 8, Sachsen. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S./Meyer, M. (2012): Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. In: Praxis der Mathematik in der Schule – Sekundarstufen I und II, Bd. 54, H. 45, S. 2–9.

Prenzel, M./Roth, J./Senkbeil, M./Häußler, P./Klopp, A. (2001): Naturwissenschaftliche Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Hg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 191–248.

Reiss, K./Bernhard, M. (2014): Hatties Visible Learning im Kontext der Mathematikdidaktik. In: Terhart, E. (Hg.): Die Hattie-Studie in der Diskussion. Probleme sichtbar machen. Seelze: Kallmeyer und Friedrich, S. 89–100.

Reiss, K./Schiepe-Tiska, A./Obersteiner, A./Heine, J.-H./Seidel, T./Prenzel, M. (2013): Mathematikunterricht in Deutschland: Befunde aus PISA 2012. In: Prenzel, M./Sälzer, C./Klieme, E./Köller, O. (Hg.): PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. Münster: Waxmann, S. 123–154.

Reusser, K./Pauli, C./Elmer, A. (2011): Berufsbezogene Überzeugungen von Lehrerinnen und Lehrern. In: Terhart, E./Bennewitz, H./Rothland, M. (Hg.): Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster: Waxmann, S. 478–495.

Richert, H. (1980): Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens – Berlin 1925 (Nachdruck). In: Der Mathematikunterricht, Bd. 26, H. 6, S. 81–93.

Roth, J. (2005): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. (2008): Systematische Variation. Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. In: Mathematik lehren, H. 146, S. 17–21.

Roth, J./Weigand, H.-G. (2014): Forschendes Lernen. Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. In: Mathematik lehren, H. 184, S. 2–9.

Rudert, G. (1919): Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht. Berlin: Salle.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus (SMK) (2013): Lehrplan Gymnasium Mathematik: http://www.schule.sachsen.de/lpdb/web/downloads/1530_lp_gy_mathematik_2013.pdf?v2. Aufgerufen am 7.2.2016.

Sälzer, C./Reiss, K./Schiepe-Tiska, A./Prenzel, M./Heinze, A. (2013): Zwischen Grundlagenwissen und Anwendungsbezug: Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich. In: Prenzel, M. (Hg.): Pisa 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. Münster: Waxmann, S. 47–98.

Schiepe-Tiska, A./Schmidtner, S. (2013): Mathematikbezogene emotionale und motivationale Orientierungen, Einstellungen und Verhaltensweisen von Jugendlichen in PISA 2012. In: Prenzel, M./Sälzer, C./Klieme, E./Köller, O. (Hg.): PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. Münster: Waxmann, S. 99–122.

Schneider, W. (2013): PISA – die neue Form für den Bildungsbegriff? In: Lin-Klitzing, S./Di Fuccia, D./Müller-Frerich, G. (Hg.): Zur Vermessung von Schule. Empirische Bildungsforschung und Schulpraxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 75–85.

Schreiber, A. (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: Mathematica didactica, Bd. 6, H. 2, S. 65–76.

Schubring, G. (2000): Felix Kleins Gutachten zur Schulkonferenz 1900: Initiativen für den Systemzusammenhang von Schule und Hochschule, von Curriculum und Studium. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 46, H. 3, S. 62–76.

Schubring, G. (2007): Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. In: NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine, Bd. 15, H. 1, S. 1–17.

Schulmeister, R./Loviscach, J. (2014): Kritische Anmerkung zur Studie „Lernen sichtbar machen“ (Visible Learning) von John Hattie. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule, Bd. 20, H. 2, S. 121–130.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: ZDM, Bd. 35, H. 3, S. 70–78.

Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: Journal für Mathematikdidaktik, S. 199–214.

Sfard, A. (1987): Two conceptions of mathematical notions. In: Bergeron, J. C./Herscovics, N./Kieran, C. (Hg.): Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Montreal: PME Program Committee, S. 162–169.

Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In: Harel, G. (Hg.): The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. Washington, DC: Mathematical Association of America, S. 25–58.

Sill, H.-D. (2007a): PISA und die Bildungsstandards. In: Jahnke, T./Meyerhöfer, W. (Hg.): PISA & Co. Kritik eines Programms. Hildesheim: Franzbecker, S. 391–432.

Sill, H.-D./Sikora, C. (2007b): Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Theoretische und empirische Studien. Hildesheim: Franzbecker.

Spiegelhauer, J. (2016): Rechenschieber – gestern und heute. In: Krohn, T./Schöneburg, S. H. (Hg.): Mathematik von einst für jetzt. Hildesheim: Franzbecker, S. 247–265.

Stanat, P./Kunter, M. (2001): Geschlechterunterschiede in Basiskompetenzen. In: Baumert, J./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U./Schneider, W./Stanat, P./Tillmann, K.-J./Weiß, M. (Hg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 249–269.

Steiner, H.-G. (1967): Zur Behandlung des Funktionsbegriffes. In: Behnke, H./Steiner, H.-G. (Hg.): Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 139–173.

Steiner, H.-G. (1969): Aus der Geschichte des Funktionsbegriffes. In: Der Mathematikunterricht, H. 3, S. 13–39.

Stender, R. (1954): Vorschule im Stabrechnen. In: ARISTO-Mitteilungen für die Freunde des Hauses – Schulausgabe, H. 3, S. 8–10.

Stern, E./Felbrich, A./Schneider, M. (2010): Mathematiklernen. In: Rost, D. H. (Hg.): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim: Beltz, S. 521–529.

Strunz, K. (1949): Das funktionale Denken. Seine denktypologische Eigenart, sein Bildungs- und Erkenntniswert. In: Studium generale, II, H. 1, S. 31–37.

Swan, M. (1982): The teaching of functions and graphs. In: Barneveld, G./Krabbendam, H. (Hg.): Conference on functions. Report. Enschede: Foundation for Curriculum Development, S. 151–165.

Terhart, E. (2014): Der Heilige Gral der Schul- und Unterrichtsforschung – gefunden? Eine Auseinandersetzung mit Visible Learning. In: Terhart, E. (Hg.): Die Hattie-Studie in der Diskussion. Probleme sichtbar machen. Seelze: Kallmeyer und Friedrich, S. 10-23.

Tietze, U.-P./Klika, M./Wolpers, H. (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Tobies, R. (2000): Felix Klein und der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 46, H. 3, S. 22–40.

Tobies, R./König, F. (1981): Felix Klein. Leipzig: B. G. Teubner.

Törner, G. (2002): Epistemologische Grundüberzeugungen – verborgene Variablen beim Lehren und Lernen von Mathematik. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 48, 4/5, S. 103–128.

Vohns, A. (2016): Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, H. 100, S. 35–42.

Vollrath, H.-J. (1968): Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem. In: Neue Sammlung, Bd. 8, S. 108–112.

Vollrath, H.-J. (1978): Rettet die Ideen! In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, H. 31, S. 449–455.

Vollrath, H.-J. (1982): Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra. In: Der Mathematikunterricht, Bd. 28, H. 3, S. 5-27.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik, Bd. 10, H. 1, S. 3–37.

Vollrath, H.-J. (2013): Verborgene Ideen: Historische mathematische Instrumente. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Vollrath, H.-J. (2014): Funktionale Zusammenhänge. In: Linneweber-Lammerskitten, H. (Hg.): Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II. Seelze: Klett Kallmeyer, S. 112–125.

Vollrath, H.-J./Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Vollrath, H.-J./Weigand, H.-G. (2007): Algebra in der Sekundarstufe. 3. Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R./Lotz, J./Salle, A. (2015): Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In: Bruder, R. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin: Springer Spektrum, S. 149–184.

Voss, T./Kleickmann, T./Kunter, M./Hachfeld, A. (2011): Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In: Kunter, M./Baumert, J./Blum, W. (Hg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann, S. 235–257.

Wagenschein, M. (1970): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart: Klett.

Walsch, W./Weber, K. (1975): Methodik Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Wartha, S. (2011): Handeln und Verstehen. In: Mathematik lehren, H. 166, S. 8–14.

Weber, C. (2013): Grundvorstellungen zum Logarithmus. Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In: Allmendinger, H./Lengnink, K./Vohns, A./Wickel, G. (Hg.): Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer Fachmedien, S. 79–98.

Wellenreuther, M. (2016): Direkte Instruktion – das hässliche Entlein der Pädagogik? In: Friedrich Jahresheft: Lehren, S. 82–84.

Whitehead, A. N. (1913): Die Ziele von Erziehung und Bildung. Herausgegeben, übersetzt und eingeleitet von Kann, C./Sölch, D. (2012). Deutsche Erstausgabe, Berlin: Suhrkamp.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Bd. 61, S. 37–46.

Wittenberg, A. I. (1990): Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach. 2. Aufl. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6., neu bearb. Aufl., Nachdr. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Wittmann, E. (1985): Objekte – Operationen – Wirkungen. In: Mathematik lehren, H. 11, S. 7–11.

Wittmann, E. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In: Baum, M./Wiepütz, H. (Hg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Klett Kallmeyer, S. 18–46.

Wolf, B. (2010): Effektstärken. In: Rost, D. H. (Hg.): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim: Beltz, S. 109–116.

10 Abbildungsverzeichnis

Sofern im Abbildungsverzeichnis keine anderen Quellen angegeben sind, wurden die Abbildungen vom Verfasser erstellt.

11 Tabellenverzeichnis

Sofern im Tabellenverzeichnis keine anderen Quellen angegeben sind, wurden die Tabellen vom Verfasser erstellt.

12 Anhang

Übersicht

Anhang I	Materialien zur Fallstudie Terme	(I-1 bis I-2)
Anhang II	Materialien zur Fallstudie Sehwinkel	(II-1 bis II-6)
Anhang III	Materialien zur Fallstudie Rechenschieber	(III-1 bis III-23)

Anhang I Materialien zur Fallstudie Terme

Angaben zur Durchführung:

Schulart:	Gymnasium
Klassenstufe:	7
Anzahl der Erprobungen:	2
zeitlicher Umfang je Erprobung:	90 min

Arbeitsmaterialien:

Auf den folgenden Seiten findet sich das verwendete Arbeitsmaterial zur Unterrichtseinheit.

(Seiten 1 bis 2)

Aufgabe *BahnCard*

(Quelle: Daten und Abbildungen: www.bahn.de; 01.02.2015)

Bei den Tarifen der Deutschen Bahn gibt es verschiedene Sparmöglichkeiten. Eine davon ist die „BahnCard“. Diese gibt es als BahnCard 25, als BahnCard 50 oder als BahnCard 100, jeweils für die 1. oder 2. Klasse. Die Zahlen 25, 50 oder 100 geben dabei die prozentuale Ersparnis beim Fahrpreis an. Ein Reisender, der beispielweise eine BahnCard 25 zu dem entsprechenden Preis erworben hat, zahlt dann ein Jahr lang für seine Fahrkarte nur noch 75 % des ursprünglichen Preises.

BahnCard 25 Nur 62 Euro in der 2. Klasse

Die BahnCard 25 erhalten Sie für 62 Euro in der 2. Klasse und für 125 Euro in der 1. Klasse. Für Ehe- und Lebenspartner, Kinder und ausgewählte Gruppen wie z. B. Studenten und Senioren gibt es die BahnCard 25 zum ermäßigten Preis.

1. Herr S. reist oft mit der Bahn. Er überlegt, ob es sich für ihn lohnt, eine BahnCard 25 für die 2. Klasse zu kaufen.
   Beratet Herrn S. bei seiner Entscheidung. Bereitet eine Argumentation vor.

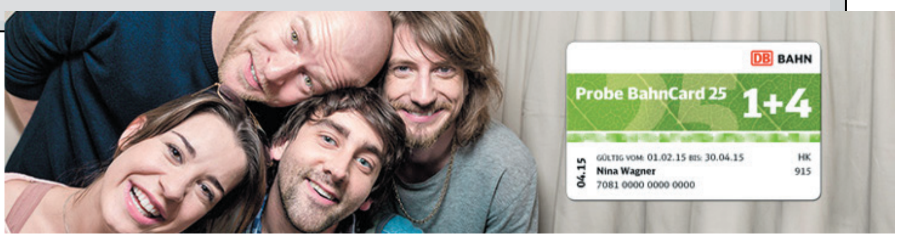
2. Beim Recherchieren ist er auch auf ein anderes Angebot gestoßen: BahnCard 25 1+4
   Ab welchem Reisepreis würde sich dieses Angebot rechnen – für den Fall, dass er jeweils
   a) allein reist,
   b) mit 4 Freunden reist?

Der *Kumpeltyp* unter den BahnCards: Die Probe BahnCard 25 1+4

Bis zu 4 Freunde 25% günstiger mitnehmen. Das ideale Testangebot.

Erfahren Sie die Vorzüge der BahnCard und testen Sie jetzt drei Monate lang die Probe BahnCard 25 1+4 für **nur 25 Euro in der 2. Klasse.**

Sie sparen 25% auf den Normalpreis und reisen darüber hinaus in Kombination mit den Sparangeboten des Fernverkehrs noch günstiger. Das lohnt sich oft schon ab der ersten Fahrt. **Zusätzlich erhalten bis zu 4 Mitfahrer ohne eigene BahnCard ebenfalls 25% BahnCard-Rabatt für Fahrten innerhalb Deutschlands**. Sie müssen lediglich auf dem Fahrschein eingetragen sein.



Aufgabe *Historische Mathematikrätsel*

(Quelle: Schäfer, J. Chr.: Die Wunder der Rechenkunst. Reprint Verlag Volk und Wissen Berlin, 1989.)

Die Wunder der Rechenkunst.

Eine Zusammenstellung
der räthselhaftesten, unglaublichsten
und belustigendsten
arithmetischen Kunstaufgaben.

Zur Beförderung
der geselligen Unterhaltung und
des jugendlichen Nachdenkens.

Von Joh. Christ. Schäfer.

Der Autor, Johann Christoph Schäfer (1802–1854), lebte als Bauer in einer kleinen Gemeinde in der Nähe von Gotha.

Neben seiner Arbeit auf dem Hof betätigte er sich auch als Jäger, tierärztlicher Berater und natürlich als Sammler mathematischer Aufgaben für (wie er schreibt) *„geistesbeschäftigende und gesellige Unterhaltung"*. Bereits die erste Auflage dieses Buches von 1831 fand viele Interessenten.

Ermittelt von den beiden folgenden Aufgaben die Lösungen. Helft euch gegenseitig beim Lesen.

1.

31. Das Weihnachtsgeschenk.

Ein Vater hatte Aepfel und Nüsse, von jedem gleichviel Stück gekauft, um damit am Weihnachtsfeste seine Kinder zu beschenken. Jedem Kinde gab er erst 12 Aepfel und behielt 48 Stück übrig. Dann gab er auch jedem Kinde 15 Nüsse und behielt da 15 Stück übrig. Wie viel Aepfel und Nüsse hatte er gekauft, und wie viel Kinder hatte er?

2.

58. Die 3 Freunde.

Fritz, Bast und Hans, die sahen Geld
Auf einem Tische hingezählt.
Fritz sagte drauf: Mein Beutel enthält
Zweimal soviel, als dieses Geld.
Da hab ich dreimal soviel, sagt Bast,
Als Du angeblich im Beutel hast.
Hans wendet sich an Bast und setzt hinzu:
Und ich hab' viermal soviel, als Du.
160 Thaler hatten sie alle Drei;
Rechne nun aus und sag es ohne Scheu,
Wieviel Geld auf dem Tische wohl lag
Und jede Person gehabt haben mag? –

Anhang II Materialien zur Fallstudie Sehwinkel

Angaben zur Durchführung:

Schulart:	Gymnasium
Klassenstufe:	7
Anzahl der Erprobungen:	1
zeitlicher Umfang je Erprobung:	2 Unterrichtseinheiten zu je 90 min

Arbeitsmaterialien:

Auf den folgenden Seiten findet sich das verwendete Arbeitsmaterial zur Unterrichtseinheit.

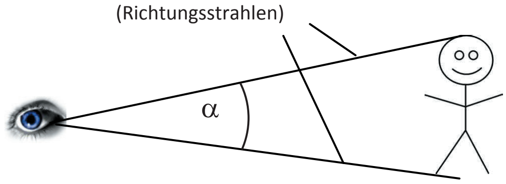
(Seiten 1 bis 6)

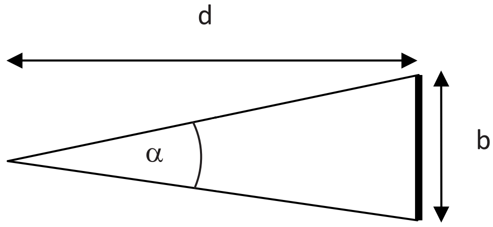
1. Winkel in der Praxis

In der Abbildung siehst du verschieden große Heißluftballons. Welcher von ihnen ist am größten? Welche Ballons sind gleich groß? Begründe deine Entscheidung.

2. Begriff Sehwinkel

Unter dem **Sehwinkel** versteht man den Winkel, welchen die sogenannten Richtungsstrahlen eines Lichtbündels einschließen.



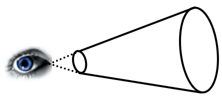


α ... Sehwinkel **d** ... Entfernung vom Gegenstand **b** ... (sichtbare) Breite (bzw. Höhe) des Gegenstandes

3. Vorüberlegungen

Untersuche, welche Zusammenhänge zwischen dem Sehwinkel, der sichtbaren Breite eines Gegenstandes und der Entfernung vom Gegenstand existieren.

Benutze zur Bestimmung des Sehwinkels den „Sehtrichter“. Das Fehlen der Spitze vom Trichter (gestrichelt gezeichnet) kann bei einer kleinen Öffnung vernachlässigt werden.



Stelle einen Winkel ein und befestige an beiden Enden der Überlappung eine Büroklammer. Visiere nun einen geeigneten Gegenstand an und suche nach Zusammenhängen zwischen den Größen α, d und b.

Formuliere entsprechende „Je-desto-Aussagen“:

4. Messungen

Im Weiteren wollen wir die Zusammenhänge zwischen den drei genannten Größen genauer untersuchen. Dazu lassen wir jeweils eine der drei Größen konstant und untersuchen, wie die beiden anderen voneinander abhängen.

4.1 Breite b des Gegenstandes ist konstant

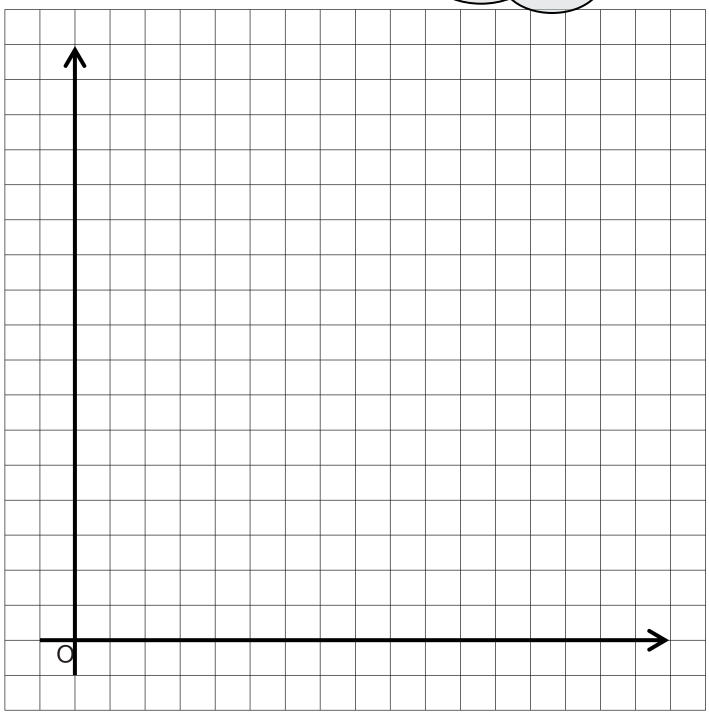
Am Sehtrichter werden verschiedene Winkel eingestellt und der Gegenstand wird jeweils angepeilt. Untersuche, wie die Entfernung zum Gegenstand von einem vorgegebenen Sehwinkel abhängt.
Als Gegenstand nehmen wir eine 2 m breite Linie an.

a) Stelle nun einen Winkel für α am „Sehtrichter“ ein. Die Größe des Sehwinkels kannst du mit dem „Messgerät“ hinreichend genau bestimmen.
Schaue durch den „Sehtrichter“ und verändere deinen Abstand zum Gegenstand solange, bis du genau die Strecke von 2 m im Blick hast. Lies die Entfernung vom Gegenstand auf der Bodenmarkierung ab. (Bestimme vorher einen Ablesepunkt an den Schuhen.)

b) Trage die Wertepaare in die Tabelle und das Koordinatensystem ein.
(Wähle eine geeignete Einteilung und Beschriftung!)

Überlege dir, ob und wie man die Punkte verbinden kann.

Gegenstandsbreite konst. mit **b = 2 m**	
α in °	d in m



c) Könnte man die Zuordnung auch umkehren? Jeder Entfernung würde man dann einen entsprechenden Winkel zuordnen. Beurteile dies auch aus Sicht der praktischen Messung.

d) Überlege dir, wie sich die Werte von d verändern müssten, wenn die Werte für α noch kleiner bzw. noch größer werden. Notiere und begründe deine Überlegungen.

4.2 Sehwinkel α ist konstant

Mit einem fest eingestellten Sehwinkel wird in bestimmten Entfernungen die jeweilige sichtbare Breite eines Gegenstandes ermittelt.
Untersuche, wie sich die Breite des Gegenstandes in Abhängigkeit von der Entfernung zum Gegenstand verändert.
Verwende den verklebten „Sehtrichter“ mit fest eingestelltem Winkel von 45°.

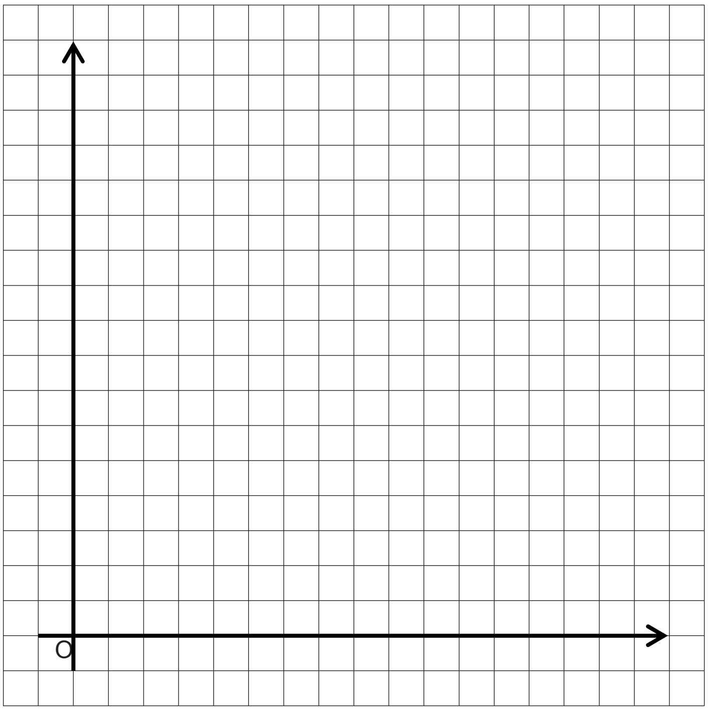
a) Lege eine Entfernung zum Gegenstand durch Ablesen an der Bodenmarkierung fest.
Wähle die Entfernung nicht größer als 3 m. (Bestimme vorher einen Ablesepunkt an den Schuhen.)

b) Ermittle nun von dieser Entfernung aus die Breite des sichtbaren Gegenstandes durch Ablesen an der Skale. Peile zuerst den Anfangspunkt links an der Skale an.

c) Trage die Wertepaare in die Tabelle und das Koordinatensystem ein.
(Wähle eine geeignete Einteilung und Beschriftung!)

Überlege dir, ob und wie man die Punkte verbinden kann.

Sehwinkel konstant mit α = **45°**	
d in m	b in m



d) Könnte man diese Zuordnung auch umkehren? Einer sichtbaren Breite eines Gegenstandes würde man so eine entsprechende Entfernung zuordnen. Beurteile dies auch aus Sicht der praktischen Messung.

e) Überlege dir, wie sich die Werte von b verändern müssten, wenn die Werte für d noch kleiner bzw. noch größer werden. Notiere und begründe deine Überlegungen.

4.3 Entfernung d zum Gegenstand ist konstant

Die Messungen erfolgen aus einer konstanten Entfernung von 2,5 m. (Beachte den Ablesepunkt an den Schuhen.) Untersuche, wie die (sichtbare) Breite des Gegenstandes von einem gewählten Sehwinkel abhängt.

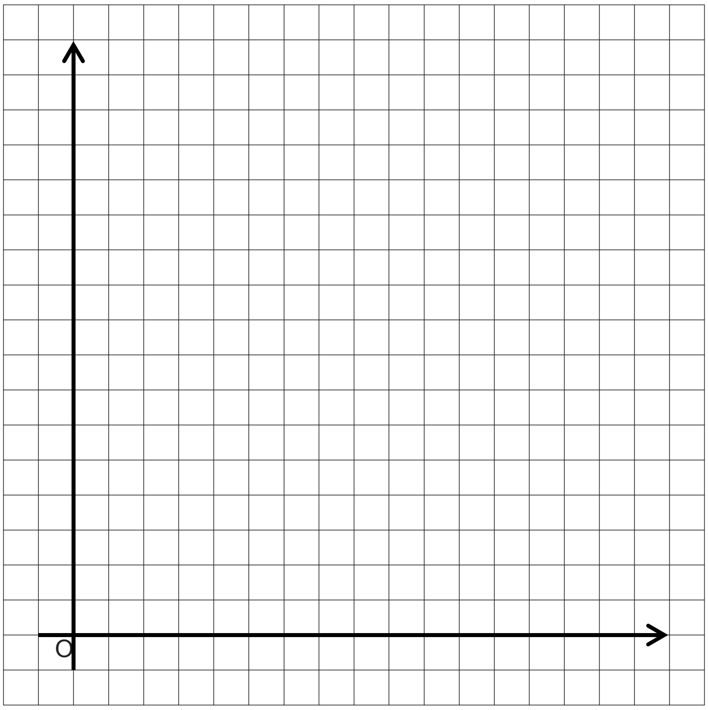
a) Stelle einen Wert für den Winkel am „Sehtrichter“ ein und miss diesen Winkel.

b) Ermittle die Breite des damit sichtbaren Gegenstandes durch Ablesen an der Skale. Peile zuerst den Anfangspunkt links an.

c) Trage die Wertepaare in die Tabelle und das Koordinatensystem ein. (Wähle eine geeignete Einteilung und Beschriftung!)

Überlege dir, ob und wie man die Punkte verbinden kann.

Entfernung konstant mit **d = 2,5 m**	
α in °	b in m

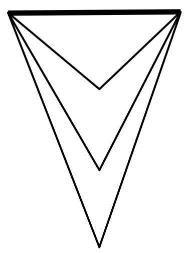
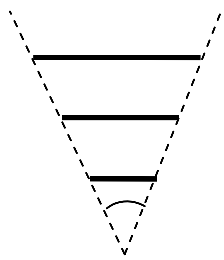
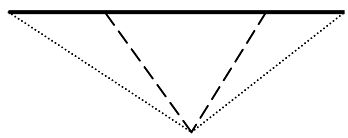


d) Könnte man auch diese Zuordnung umkehren? Einer sichtbaren Breite würde man so einen entsprechenden Winkel zuordnen. Beurteile dies auch aus Sicht der praktischen Messung.

e) Überlege dir, wie sich die Werte von b verändern müssten, wenn die Werte für α noch kleiner bzw. noch größer werden. Notiere und begründe deine Überlegungen.

5. Zusammenfassung

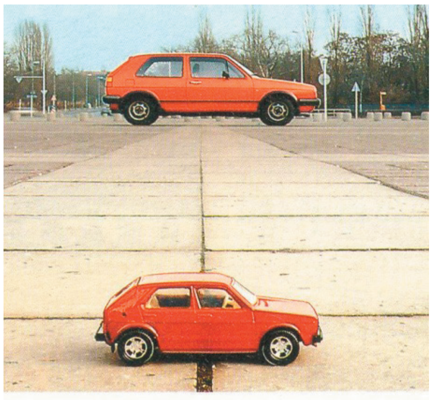
Ergänze Bezeichnungen in den Abbildungen und fasse deine Ergebnisse aus (a) bis (c) noch einmal zusammen.

b = const.	**α = const.**	**d = const.**
		
Je größer die Entfernung von einem Gegenstand, …		

Tipp: Im Internet gibt es für die Berechnung der jeweils dritten Größe sogenannte „Onlinerechner“, z. B.: http://rechneronline.de/sehwinkel/

6. Aufgaben

6.1 Filme und Fotos können einen Betrachter leicht über die tatsächlichen Größenverhältnisse täuschen. Im oberen und im unteren Bild siehst du jeweils dieselben Autos. Woraus kannst du schließen, wie groß die abgebildeten Gegenstände wirklich sind? Wie ist die obere Abbildung optisch zu erklären? Fertige eine Skizze an.

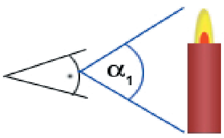


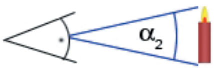
6.2 Vervollständige den Text:

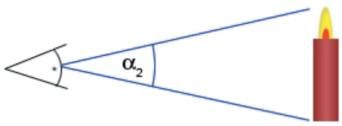
Gleich große Körper sehen in unterschiedlichen Entfernungen .... aus.

In der gleichen Entfernung sehen .... große Körper verschieden groß aus.

Je nachdem, wie groß der Winkel α ist, sehen wir die Kerze groß oder klein.







(Bildquellen: Physik für die Sekundarstufe I, Band 2. Cornelsen Verlag, Berlin, 1991, S. 220 f. Mit freundlicher Genehmigung des Verlages.)

Anhang III Materialien zur Fallstudie Rechenschieber

Angaben zur Durchführung:

Schulart:	Gymnasium	Gymnasium	Gymnasium
Klassenstufe:	10	10	10
Anzahl der Erprobungen:	2	2	2
zeitlicher Umfang je Erprobung:	4 Unterrichts-einheiten zu je 90 min	4 Unterrichts-einheiten zu je 90 min	5 Unterrichts-einheiten zu je 90 min

Arbeitsmaterialien:

Auf den folgenden Seiten findet sich das verwendete Arbeitsmaterial zur Unterrichtseinheit.

(Seiten 1 bis 23)

VOM RECHENSCHIEBER ZUM LOGARITHMUS

Schon seit hunderten von Jahren entwickeln Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure ständig neue und leistungsfähigere Rechenhilfsmittel. Ziel ist es, zeitaufwendige Rechenverfahren von „Maschinen“ bearbeiten zu lassen. Elektronische Taschenrechner sind aus unserem täglichen Leben heute nicht mehr wegzudenken. Wie aber rechnete man noch vor Jahrzehnten an unseren Schulen?

Ein damals weit verbreitetes Rechenhilfsmittel war der Rechenschieber. In den nächsten Stunden wollen wir die Funktionsweise einer solchen „Rechenmaschine“ näher untersuchen. Dabei werden wir neue mathematische Begriffe und Zusammenhänge entdecken.

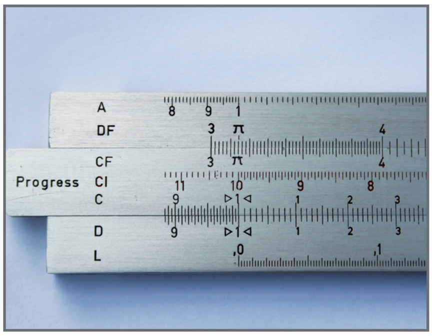


Foto: privat

Teil eines Rechenstabes

1 ADDITIONSRECHENSTAB

1.1 AUFBAU UND FUNKTION

(Zusatzmaterial: Vorlagen für Additionsskalen aus Papier)

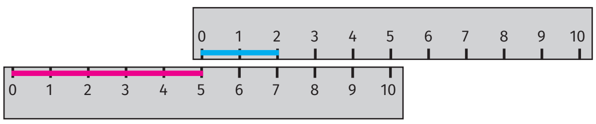
Um zu verstehen, wie man mit einem Rechenschieber multiplizieren kann, ist es sinnvoll, erst einmal Rechenschieber zu betrachten, welche nur addieren.

Die Skalen des Additionsrechenstabes sind gleichförmig (linear) geteilt. Jeder Zahl a wird eindeutig eine Streckenlänge L(a) zugeordnet:
a → L(a) und umgekehrt auch jeder Streckenlänge eine Zahl **L(a) → a**.

Die **Addition** lässt sich durch Aneinanderreihung von Streckenlängen realisieren.

(Addition der Streckenlängen)

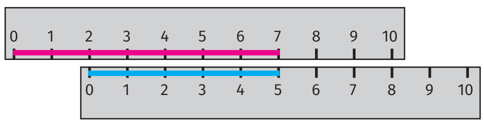
L(a) + L(b) = L (a + b)



Bei der **Subtraktion** werden die Streckenlängen voneinander abgezogen.

(Subtraktion der Streckenlängen)

L(a) - L(b) = L (a – b)



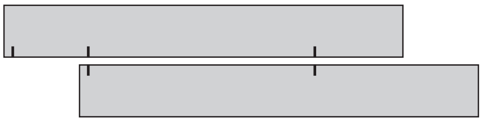
5	+	2	=	7
↕		↕		↕
L(5)	+	L(2)	=	L (5 + 2)

a) Ergänze analog:

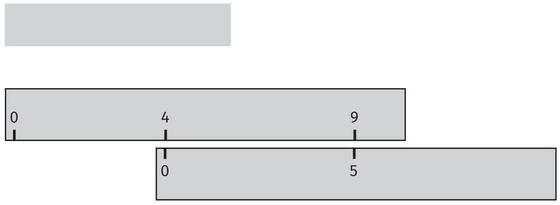
↕ ↕ ↕

b) Ergänze in der Abbildung die Markierungen, sodass die entsprechende Additionsaufgabe eingestellt ist. Kennzeichne ebenfalls die Strecken farbig.

2 + 6 = 8



c) Formuliere zur Abbildung die entsprechende Subtraktionsaufgabe. Kennzeichne auch jeweils die Strecken farbig:



1.2 DURCHSCHIEBEN

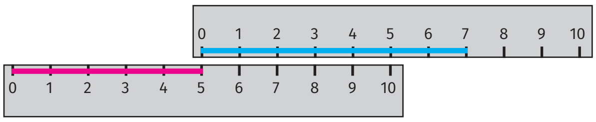
Ein realer Rechenstab ist natürlich nicht unendlich lang.

Was passiert eigentlich, wenn die Summe der Streckenlängen die Länge des Stabes überschreitet?

Nehmen wir folgendes Beispiel: **5 + 7 = 12**

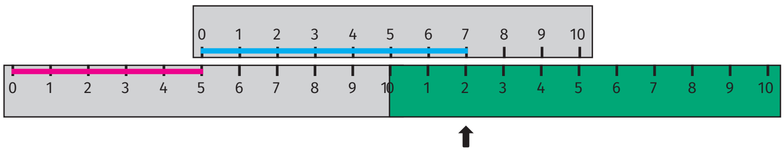
Diese Aufgabe ließe sich mit einem Stab, auf dem z.B. 20 Längeneinheiten abgetragen sind, relativ einfach lösen. Hat der Stab jedoch nur eine Länge von 10 Einheiten, so würde das Ergebnis 12 nicht ohne weiteres angezeigt werden können (Abb. 1).

Abb. 1



Würde man wie in Abb. 2 die untere Skale verlängern, indem man eine weitere Skale gedanklich rechts ansetzt (grün), so könnte man unter der Zahl 7 der oberen Skale die Zahl 2 auf der unteren Skale ablesen. Mit den 10 Einheiten der grauen und den 2 Einheiten der grünen Skale ergeben sich dann 12 Längeneinheiten (5 + 7 = 12).

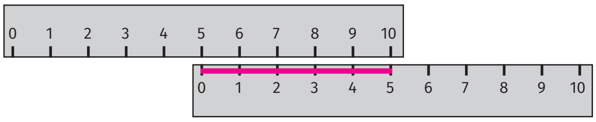
Abb. 2



Da man aber eigentlich nur zwei (graue) Skalen hat, muss man sich eines anderen kleinen „Tricks“ bedienen:

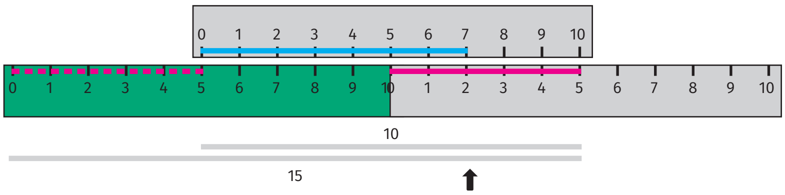
Wenn man wie in Abb. 1 unter dem zweiten Summanden nichts ablesen kann, weil sich darunter kein Teil der unteren Skale befindet, so stellt man über den ersten Summanden (bei uns 5) nicht die Zahl 0, sondern die Zahl 10 ein (Abb. 3).

Abb. 3



Beim Rechenstab nennt man dieses Zurückschieben der oberen Skale „durchschieben“. Jetzt könnte man wieder unter der oberen Zahl (Zahl 7) ablesen und erhält auf der unteren die Zahl 2. Das Ergebnis müsste doch aber 12 lauten. Es sind auch 12 Einheiten, wenn man sich folgendes überlegt: Man könnte beiden Skalen sowohl nach links als auch nach rechts in Gedanken verlängern. Da die obere Skale um 10 Einheiten nach links verschoben wurde, müssen wir uns auch die untere Skale um 10 Einheiten nach links verlängert denken (grün). Wenn du dir Abb. 4 anschaust, wird dir klar, warum unter der Zahl 7 auf der oberen Skale eigentlich auf der unteren Skale statt der Zahl 2, die Zahl 12 abgelesen werden muss.

Abb. 4



Das Grundprinzip des „Durchschiebens“ ist für Addition und Multiplikation durchaus vergleichbar. Es lässt sich aber am Beispiel der Addition verständlicher erklären.

Führe nun mit den Papierskalen entsprechende einfache Rechnungen zur Addition aus.

2 MULTIPLIKATIONSRECHENSTAB

2.1 GRUNDLAGEN DER TEILUNG

(Zusatzmaterial: Vorlagen für Multiplikationsskalen aus Papier)

Im nächsten Schritt wollen wir nun eine Skale konstruieren, mit der man multiplizieren kann. Dazu sind einige Vorüberlegungen notwendig.

Das Multiplizieren von Zahlen kann ebenfalls über eine Addition der zugehörigen Streckenlängen realisiert werden. Das Dividieren zweier Zahlen geschieht dementsprechend durch die Subtraktion der Streckenlängen.

a) Überlege dir, wie die Gesetzmäßigkeit (ähnlich zu Aufgabe 1.1) formuliert werden könnte. Ergänze die Gleichungen.

Multiplikation:	Division:
.... = L(a · b)	.... = L(a ÷ b)

Die Multiplikation kann natürlich nicht mit einer gleichförmigen Teilung wie bei den Skalen des Additionsstabes realisiert werden. Wir suchen also eine Skalenteilung, bei der nach Aneinanderlegen entsprechender Streckenlängen nicht die Summe, sondern das Produkt zweier Zahlen abgelesen werden kann.

Die nächsten Schritte sollen dir helfen, einen Einstieg in den Aufbau der Skale zu finden.

b) Wir benötigen zur Multiplikation ebenfalls wieder zwei Skalen. Begründe mit einer Gesetzmäßigkeit der Multiplikation, dass beide Skalen identische Teilungen haben müssen.

Auf vorbereiteten Papierstreifen wurden Strecken mit jeweils gleicher Länge abgetragen. Diese Länge bezeichnen wir im Weiteren als Einheitsstreckenlänge. Zur Festlegung einer Skalenteilung wird dem Ende der ersten Einheitsstrecke eine Zahl zugeordnet. Im Beispiel wurde die Zahl 2 ausgewählt.

Später wirst du sehen, dass grundsätzlich auch andere Zahlen und auch andere Streckenlängen möglich sind.

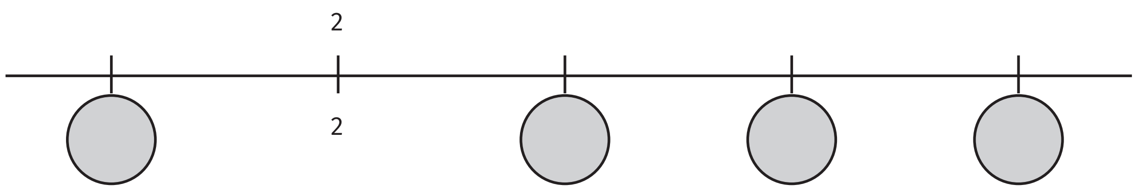
c) Stelle nun die angegebenen Aufgaben (ähnlich wie beim Additionsstab) mit den vorbereiteten Papierstreifen ein. Was stellst du fest? Ergänze schrittweise die fehlenden Markierungen.

2 • 2 = 4

2 • 4 = 8

2 • 8 = 16

4 • 1 = 4

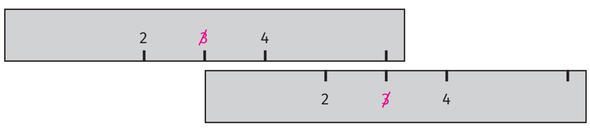


d) Beschreibe, wodurch sich diese Multiplikationsskale von der der Addition unterscheidet und begründe auch den Anfangspunkt des Multiplikationsstabes.

Im nächsten Schritt sollen nun weitere Zahlen, wie z. B. die 3 bzw. 5 angetragen werden.

Versuche zunächst die Stelle für die Zahl 3 zu finden. Dies ist gar nicht so einfach. Überlege und nutze dazu den Papierrechenstab. Markiere zunächst erst mit Bleistift.

e) Begründe anhand der Abbildung, warum man die Zahl 3 nicht durch Halbierung der Strecke von 2 bis 4 erhält. Entscheide weiterhin, ob die Zahl 3 rechts oder links der Streckenmitte angetragen werden soll und begründe.



2.2 ANSATZ ZUM AUFFINDEN WEITERER ZAHLEN AUF DER SKALE

Verschiedene Überlegungen führen durchaus auf einen Näherungswert für eine Markierung der Zahl 3. Doch wie kann man diese Stelle genauer bestimmen? Eine mögliche Vorgehensweise wollen wir genauer betrachten:

Jedem Vielfachen der Einheitsstreckenlänge wird eindeutig eine Zahl zugeordnet. Die Länge einer Einheitsstrecke führt von der Zahl 1 zur Zahl 2. Zwei Einheitsstreckenlängen führen von der Zahl 1 zur Zahl 4 und drei Einheitsstreckenlängen von der Zahl 1 zur Zahl 8. Suchen wir die Länge der Strecke von der Zahl 1 bis zur Zahl 3, so suchen wir also ein nicht ganzzahliges Vielfaches dieser Einheitsstreckenlänge.

Um auch alle anderen Zahlen anordnen zu können, untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Zahl und zugehöriger Streckenlänge.

Der Zusammenhang zwischen einem Vielfachen der Einheitsstreckenlänge und der Markierung mit einer Zahl am rechten Streckenrand soll in der Tabelle zusammengefasst werden.

a) Ergänze diese Tabelle.

Vielfaches der Einheitsstreckenlänge	0	1	2	3	4	x
Markierung der Zahl (am rechten Rand)						

b) Begründe, dass es sich bei dieser Zuordnung um eine Funktion handelt.

c) Bezeichne die Funktion mit f. Charakterisiere den Funktionstyp. Gib einen Term für die Funktion an.

2.3 ANORDNUNG BELIEBIGER ZAHLEN AUF DER SKALE

a) Ermittle nun die Längen der Strecken für weitere Zahlen auf der Multiplikationsskale. In Anlehnung an einen realen Rechenstab wurde auch bei den Papierskalen für die Einheitsstrecke eine Länge von 0,75 dm gewählt. Beachte dies auch bei der Ermittlung der Streckenlängen.

Achte auf die Einheiten!
Nutze den Rechner effektiv und gehe arbeitsteilig vor!

Zahl	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10
Vielfaches der Einheitsstreckenlänge												
Streckenlänge in **dm**												

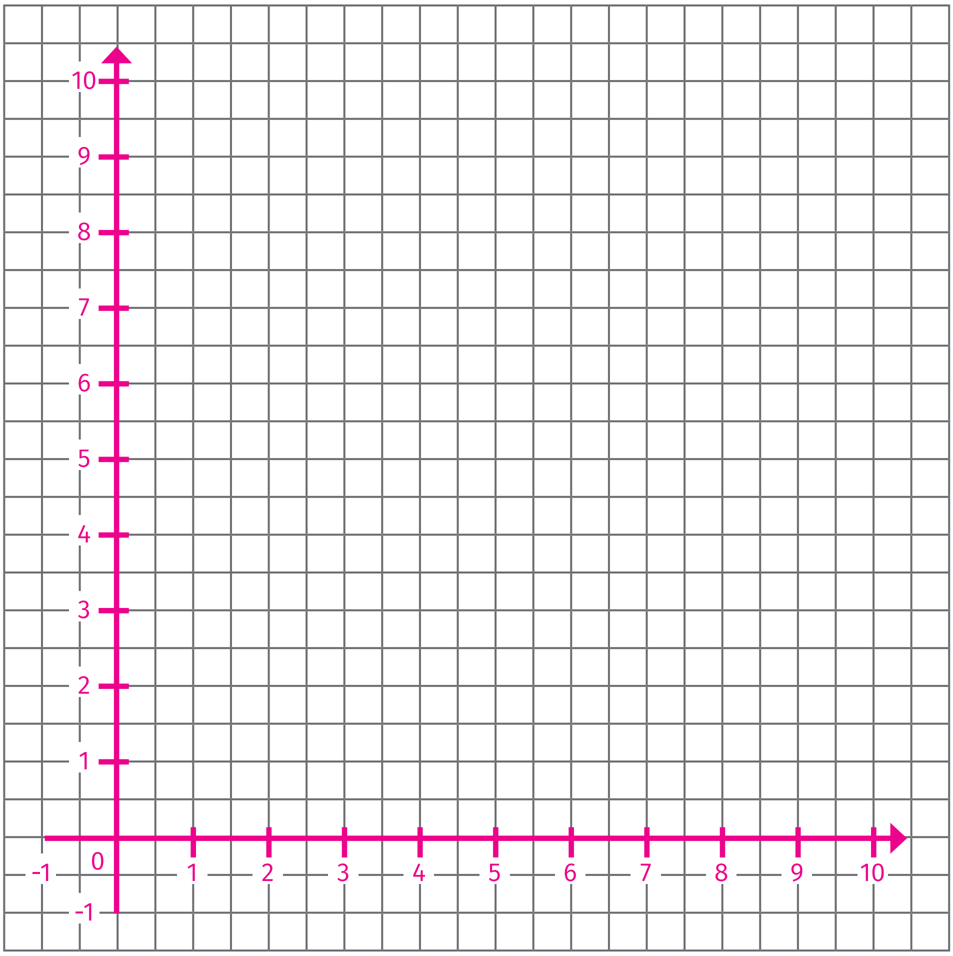
Die Funktion, welche jeder Zahl eine Streckenlänge (in dm) zuordnet, bezeichnen wir mit g. Die Funktion, welche jeder Streckenlänge (in dm) eine Zahl zuordnet, bezeichnen wir mit f.

b) Trage nun einige Werte in deinem Papierrechenstab an und prüfe die Richtigkeit der Markierungen an folgenden Beispielrechnungen mit dem Papierstab.

Beispiele:

2 · 3 = 6 | **3 · 1,5 = 4,5** | **2 · 2,5 = 5**

6 ÷ 3 = 2 | **8 ÷ 2 = 4** | **2 ÷ 0,5 = 4**



Fazit:
Mit dieser Methode können wir nun die Streckenlängen für beliebige Zahlen hinreichend genau bestimmen.

Im nächsten Schritt soll der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen f und g genauer untersucht werden.

c) Zeichne dazu die Graphen der Funktionen f und g in das Koordinatensystem.

d) Die Graphen der Funktionen stehen in Beziehungen zueinander. In der Mathematik heißen solche Funktionen Umkehrfunktionen. Finde heraus, warum man solche Funktionen als „Umkehrfunktionen“ bezeichnet. Was kehrt sich bei diesen Funktionen um? Formuliere deine Erkenntnisse.

e) Wenn du exakt gezeichnet hast, kannst du auch einen geometrischen Zusammenhang erkennen. Untersuche, wie der Graph von g geometrisch aus dem Graphen von f hervorgeht. Formuliere deine Erkenntnisse.

f) Ergänze die folgenden Angaben. Beziehe dich dabei auf die Skalierung aus Aufgabe 2.3.

Achte auf Einheiten!

Die Zahl 20 müsste nach einer Streckenlänge von ca. ____ dm angetragen werden.

Nach einer Streckenlänge von ca. 50 cm müsste die Zahl ____ angetragen werden.

Der Abstand zwischen den Zahlen 20 und 30 beträgt ca. ____ cm.

3 FUNKTIONALE ZUSAMMENHÄNGE BEI MULTIPLIKATIONSSKALEN

Wir können nun jede Zahl auf unserer Rechenstabskale anordnen. Weiterhin haben wir Vermutungen für gewisse Zusammenhänge zwischen der Funktion f und der Funktion g aufgestellt.

Im nächsten Schritt wollen wir untersuchen, ob die in Aufgabe 2.3 gefundenen Zusammenhänge auch für andere Skalen existieren und welche Zusammenhänge zwischen den Funktionen und der jeweiligen Skale bestehen. In Form eines **Gruppenpuzzles** sollen jetzt vier weitere Skalen untersucht werden.

3.1 AUFGABENSTELLUNG FÜR EXPERTENGRUPPEN

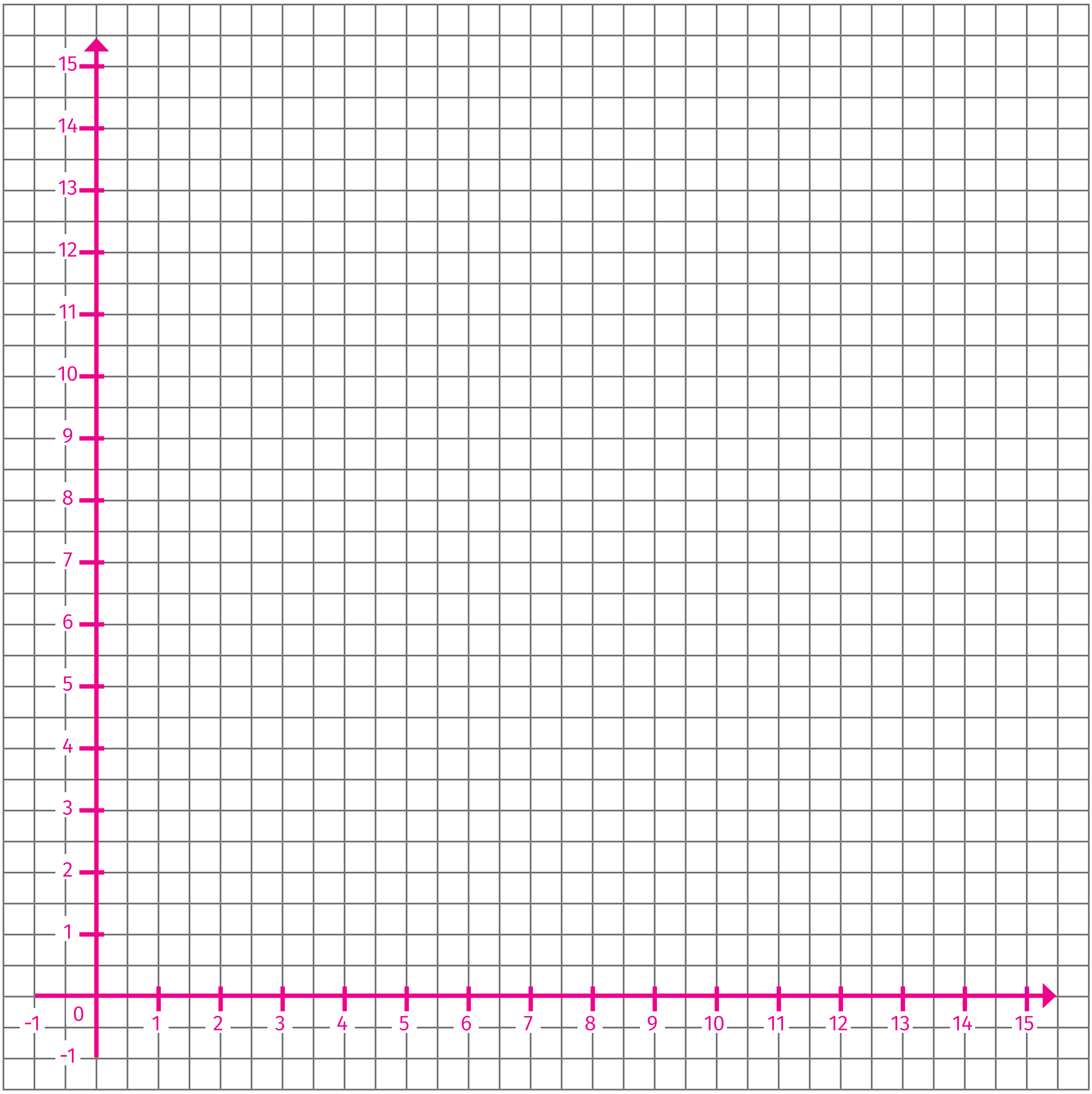
(Jede Expertengruppe erhält genau eine Skale.)

a) Zeichnet jeweils die Graphen der Funktionen f (f: Streckenlänge [in dm] →Zahl) und g (g: Zahl → Streckenlänge [in dm]) für die zugeteilte Skale in das vorgegebene Koordinatensystem auf Seite 10. Nutzt die unten stehende Wertetabelle. Übertragt anschließend die beiden Graphen auf Folie. (Bei 4 Stammgruppen werden 4 Folien pro Expertengruppe erstellt.)

Zur einheitlichen Ausrichtung wird der Folienrand an den Koordinatenachsen angelegt, sodass nur die beiden Graphen und kein Koordinatensystem gezeichnet werden müssen. Farben für Folien: rot für Skale 1, grün für Skale 2; blau für Skale 3 und schwarz für Skale 4.

Zahl																		
Streckenlänge in dm																		

b) Vergleicht den Verlauf der gezeichneten Graphen mit den Verläufen der Graphen in Aufgabe 2.3 und notiert eure Beobachtungen.



c) Ermittelt eine Gleichung für die Funktion f. Zwischen dem Funktionsterm von f und der zugehörigen Skalenteilung existiert ein Zusammenhang. Findet diesen heraus und notiert ihn.

3.2 AUFGABENSTELLUNG FÜR STAMMGRUPPEN

a) Stellt euch gegenseitig die Ergebnisse aus den Expertengruppen vor, vergleicht und diskutiert diese Ergebnisse in der Stammgruppe. Legt dazu die Folien der Expertengruppen übereinander. Achtet auf die richtige Ausrichtung. Passen die Ergebnisse aus den Expertengruppen zusammen – ergeben sie ein „Muster“? Bestätigt sich der gefundene Zusammenhang zwischen den gegebenen Skalen und den Gleichungen der Funktionen f auch für die anderen Gruppen?

b) Falls eine Expertengruppe für die zugewiesene Skale keine Gleichung ermitteln konnte, versucht in der Stammgruppe diese Gleichung zu finden. Nutzt dazu die Erkenntnisse der anderen Expertengruppen.

c) Fasst eure Erkenntnisse zusammen und achtet dabei auf den Gebrauch der Fachsprache:

Da ihr die Gleichungen der Funktionen f_1 bis f_4 ermittelt habt, könnt ihr jetzt die Graphen aller vier Funktionen auch am Rechner anzeigen lassen. Mit dem Taschenrechner ist es möglich, zu jeder der vier Funktionen die sogenannten Umkehrfunktionen zeichnen zu lassen.

Beim Class Pad findet man die Umkehrfunktionen nach dem Zeichnen unter <Analyse> und dann <Skizze>. Wenn zu verschiedenen Funktionen der Graph der Umkehrfunktion gezeichnet werden soll, müssen die jeweiligen Funktionen mit dem Cursor ausgewählt und bestätigt werden.

d) Erzeugt zuerst mit dem Rechner die Graphen der Funktionen f_1 bis f_4. Da die Streckenlängen nicht negativ sein können, schränken wir den Definitionsbereich mit $x \geq 0$ entsprechend ein. Gebt zur Verdeutlichung der Symmetrie zusätzlich die Gleichung $y = x$ ein.

Achtet auf eine gleichmäßige Teilung der Achsen.

Bestätigt diese Darstellung die Erkenntnisse aus den Zeichnungen auf den Folien? Welche weiteren Schlussfolgerungen lassen sich nun aus diesen Darstellungen der Graphen für die vier Multiplikationsskalen ableiten? Formuliert diese Ergebnisse. Bereitet entsprechende Erläuterungen für eine kurze Präsentation vor.

e) Stellt weiterhin Beziehungen zwischen den Funktionen g und den Skalen am Rechenschieber her. Ergänzt dazu die vorgegebene Tabelle:

	Eigenschaft der Funktion g	Deutung am Rechenstab
1	Alle Funktionen g haben bei x = 1 eine Nullstelle	
2	Es existiert außer x = 1 keine weitere Nullstelle für die Funktion g.	
3		Für größer werdende Zahlen nimmt auch die Gesamtstreckenlänge zu.
4	Für größer werdende x nimmt die Steigung des Graphen der Funktion g ab.	

4 CHARAKTERISIERUNG DER FUNKTIONEN

Zu jeder der Skalen gehört genau eine Funktion f: z. B.: zu Skale 1 gehört f_1, zu Skale 2 dann f_2 usw. Alle Funktionen f_i mit i = 1; 2; 3; 4 (f: Streckenlänge [in dm] → Zahl) gehören zu einem Typ von Funktionen, den sogenannten Exponentialfunktionen.

a) Begründe, warum dann auch die Funktionen g_i zu einem Typ von Funktionen gehören müssen.

Im Weiteren wollen wir uns die Funktionen g_i genauer betrachten. Da die Funktionen g_i jeder Zahl auf der entsprechenden Skale die Länge einer Strecke zuordnen, wollen wir die Funktionen vorerst als „Längenfunktionen“ bezeichnen und mit L(x) abkürzen.

Zu jeder der Skalen kann also auch genau eine Funktion g zugeordnet werden: zu Skale 1 gehört nun auch g_1, zu Skale 2 auch g_2 usw.

b) Die Funktionen f_i unterscheiden sich jeweils durch die Basen. Diese wiederum resultieren aus der Teilung der entsprechenden Skale. Finde nun eine Möglichkeit, wie man eine entsprechende Unterscheidung bei den Längenfunktionen g_i vornehmen könnte. Notiere Vorschläge.

Skale 1: $f_1(x) = \square^x \quad \leftrightarrow \quad g_1(x) = L\ (x)$

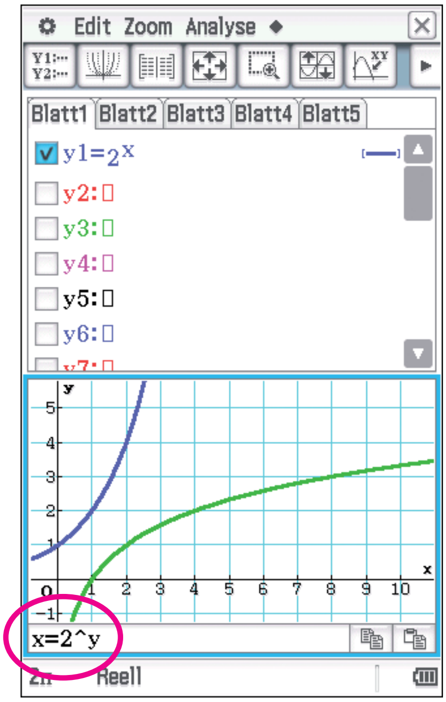
Skale 2: $f_2(x) = \square^x \quad \leftrightarrow \quad g_2(x) = L\ (x)$

Skale 3: $f_3(x) = \square^x \quad \leftrightarrow \quad g_3(x) = L\ (x)$

Skale 4: $f_4(x) = \square^x \quad \leftrightarrow \quad g_4(x) = L\ (x)$

Der Funktionstyp, der diesen „Längenfunktionen“ zugrunde liegt, tritt in vielen Bereichen der Natur und Technik auf. Deshalb erhielt er in der Mathematik auch schon vor langer Zeit eine entsprechende Bezeichnung, welche sich aus der Rechenoperation zur Ermittlung des Funktionsterms ableitet.

Bei der Anzeige des Graphen der Umkehrfunktion wird auch eine Funktionsgleichung im unteren Bildrand mit eingeblendet. Diese Angabe der Funktionsgleichung ist für uns etwas ungewohnt, da die Gleichung nicht wie allgemein üblich nach y, sondern nach x aufgelöst angezeigt wird. Das ist aber nicht weiter schwierig.



c) Suche nach einer Begründung, weshalb die Umkehrfunktion von $y = 2^x$ mit der Gleichung $x = 2^y$ beschrieben wird kann.

d) Um den Zusammenhang zu verdeutlichen, stellen wir die Gleichungen noch einmal gegenüber. Ergänze dazu die Tabelle.

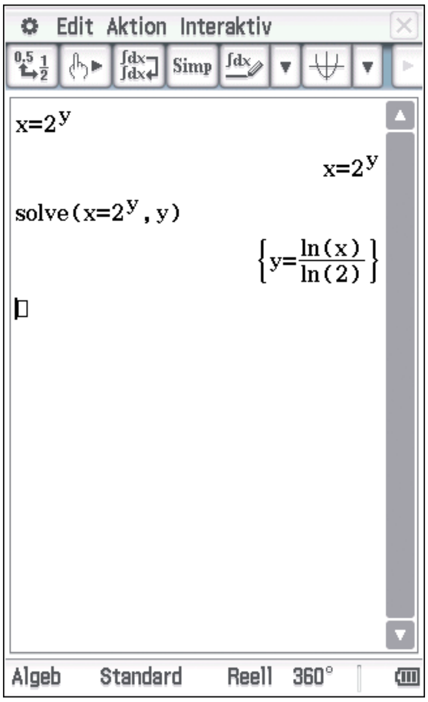
f:	g:
$y = 2^x$	$x = 2^y$
Die Zahl **y** gibt an, was man erhält, wenn man die Zahl 2 genau x mal mit sich selbst multipliziert.	Die Zahl y gibt an, ...
Gesucht ist eine Potenz*.	Gesucht ist ...

** Anmerkung: Trotzdem werden Funktionen vom Typ $y = a^x$ (a = const.) nicht als Potenzfunktionen bezeichnet. Da bei einer Potenz sowohl die Basis als auch der Exponent veränderlich sein kann, muss man zwei Fälle unterscheiden:*
Ist die Basis veränderlich und der Exponent fest, so spricht man von Potenzfunktionen (z. B. $y = x^2$).
Ist der Exponent veränderlich und die Basis fest, so spricht man von Exponentialfunktionen (z. B. $y = 2^x$).

Mit den bisherigen Kenntnissen aus der Mathematik ist es noch nicht möglich, eine Gleichung wie z. B. $x = 2^y$ nach y aufzulösen.

Ein CAS-Rechner löst die besagte Gleichung nach y auf. Dabei werden wir mit einer neuen, vorerst noch unbekannten Symbolik konfrontiert. Diese betrachten wir in den nächsten Stunden noch genauer.

Die Abkürzung „ln“ steht dabei für *logarithmus naturalis*. Dieser logarithmus naturalis ist dabei ein spezieller **Logarithmus**. Demzufolge wird der Funktionstyp, zu welchem auch unsere „Längenfunktionen“ zählen, als **Logarithmusfunktion** bezeichnet.



5 LOGARITHMUS UND LOGARITHMENRECHNUNG

Erarbeite den Begriff des Logarithmus und die Grundlagen der Logarithmenrechnung. Nutze dazu auch das Lehrbuch und ergänze die nachfolgende Übersicht. Löse im Anschluss die Übungsaufgaben.

Bereits im 2. Jahrhundert v. Chr. kannte man schon Logarithmen. Im 17. Jahrhundert befassten sich dann verschiedene Mathematiker intensiv mit dem Logarithmus und schufen sogenannte Logarithmentafeln. Zu den ersten gehörten der Schotte **John Napier** (1550–1617) und der Engländer **Henry Briggs** (1561–1630).

Das Rechnen mit Logarithmen war auch eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung bestimmter mechanischer Rechenhilfsmittel, welche bis weit ins 20. Jahrhundert Verwendung fanden. Der Rechenstab ist eines davon.

Das latinisierte Wort Logarithmus entstammt ursprünglich dem Griechischen (logos... Verhältnis und arithmos... Zahl) und bedeutet so viel wie „Verhältniszahl“.

BEGRIFF DES LOGARITHMUS

allgemein: $b^c = a$ ↔ $c = \log_b a$ Sprechweise: c ist der Logarithmus ..... zur ....

Exponentialgleichung ↔ Logarithmengleichung

Beispiel: $4^3 =$ ↔ $= \log_4$

EINSCHRÄNKUNGEN

c ... a ... b ... Basis

c ∈ a 0; a ∈ b 0; b ≠

LOGARITHMEN MIT SPEZIELLEN BASEN:

Basis **10**: = lg x = log x (im Lehrbuch verwendet) dekadischer Logarithmus

Basis **e**: $\log_e x$ = (logarithmus naturalis) Logarithmus

Taschenrechner ohne CAS können oft nur mit Logarithmen der Basen 10 und e (Euler'sche Zahl) rechnen. Soll mit dem Logarithmus einer anderen Basis gerechnet werden, so muss vorher folgendermaßen umgerechnet werden:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 4 = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

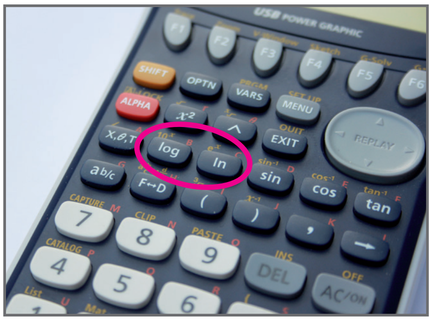


Foto: privat

ZUSAMMENHANG ZUM POTENZIEREN

Die Rechenoperation **Potenzieren** besitzt zwei Umkehroperationen:

gesucht: gesucht: **Exponent**

Potenzieren
$b^c = a$

Radizieren
$b =$

Logarithmieren
$c =$

Beispiel:

$4^3 = 64$

$x^3 = 64$
$x =$ .... = 4

$4^x = 64$
$x =$ .... = 3

ÜBUNGEN ZUM LOGARITHMUS

Löse zuerst einmal alle Aufgaben im Kopf und kontrolliere erst danach mit dem Taschenrechner.

Die Eingabe des Logarithmus erfolgt in der Hauptanwendung unter <2D>.

1 Ergänze eine äquivalente Gleichung.

a) $7^3 = 343 \leftrightarrow 3 =$

b) $\leftrightarrow 4 = \log_3 81$

2 Bestimme x.

a) $2^x = 16$; $x =$

b) $4^x = 1$; $x =$

c) $3^x = \frac{1}{9}$; $x =$

d) $3^x = \sqrt[3]{9}$; $x =$

3 Bestimme.

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_3 243 =$

c) $\log_2 2^{13} =$

4 Bestimme, zwischen welchen ganzen Zahlen der Logarithmus liegt.

a) $< \log_2 3 <$

b) $< \log_3 100 <$

5 Berechne.

a) $\log_2 x = 5$; $x =$

b) $\lg x = 4$; $x =$

c) $\log_x 9 = 2$; $x =$

d) $\log_x 125 = 3$; $x =$

6 ZUSAMMENFASSUNG

Du kennst jetzt den Begriff des Logarithmus und die Rechenoperation des Logarithmierens. Was hat nun der Logarithmus mit unseren Funktionen zu tun?

Die z. B. zur Skale 1 gehörende Funktion f_1 hat die Gleichung $y = 2^x$. Die zugehörige Funktion g_1, welche wir als Längenfunktion bezeichnet haben, wurde am Rechner mit $x = 2^y$ angegeben. Jetzt kannst du diese Gleichung nach y auflösen und erhältst damit die Gleichung für eine unserer „Längenfunktionen“.

In der Mathematik bezeichnet man Funktionen diesen Typs als **Logarithmusfunktionen**. Bei den „Längenfunktionen“: $y = \log_2 x$ handelt es sich im Grunde genommen um Logarithmusfunktionen, welche du jetzt auch als Gleichung angeben kannst.

a) Ergänze die Übersicht.

Skale 1:	$f_1(x) = \_\_^x$	$\leftrightarrow$	$g_1(x) = L_{\_\_}(x)$	$\leftrightarrow$	$g_1(x) = \log_{\_\_}(x)$
Skale 2:	$f_2(x) = \_\_^x$	$\leftrightarrow$	$g_2(x) = L_{\_\_}(x)$	$\leftrightarrow$	$g_2(x) =$
Skale 3:	$f_3(x) = \_\_^x$	$\leftrightarrow$	$g_3(x) = L_{\_\_}(x)$	$\leftrightarrow$	$g_3(x) =$
Skale 4:	$f_4(x) = \_\_^x$	$\leftrightarrow$	$g_4(x) = L_{\_\_}(x)$	$\leftrightarrow$	$g_4(x) =$

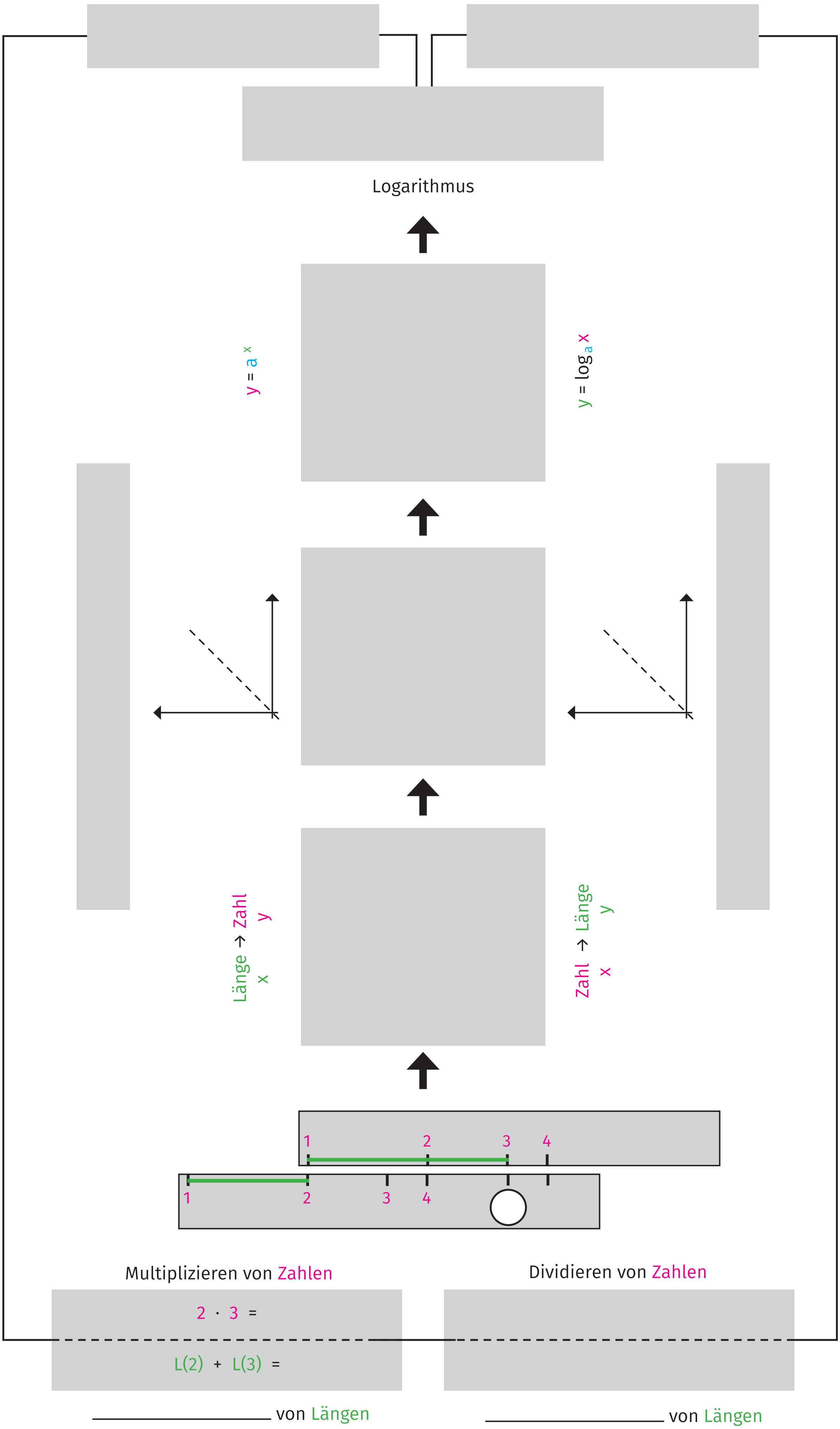
Betrachten wir noch einmal die Multiplikationsskalen des Rechenschiebers, so lassen sich nun folgende Erkenntnisse zusammenfassen:

- Für eine bestimmte Skale ordnet eine zugehörige Funktion g jeder Zahl x genau eine Streckenlänge zu. Diese Streckenlänge ist somit der Logarithmus dieser Zahl x zu einer bestimmten Basis.
- Die Basis der Logarithmusfunktion ergibt sich aus der Teilung der Skale, genauer gesagt aus der Einheitsstreckenlänge. Demzufolge würde sich auch zu jeder Basis eine ganz bestimmte Skalierung ergeben.
- Eine Multiplikationsskale besitzt also eine logarithmische Teilung. Dabei werden die Logarithmen von Zahlen zu einer bestimmten Basis abgetragen. Diese Basis resultiert dabei aus der Einheitsstreckenlänge.
- Regeln für das Rechnen mit Logarithmen bilden die mathematische Grundlage für die Verwendung eines Rechenschiebers.

b) Zwei spezielle Regeln für das Rechen mit Logarithmen kannst du bereits aus der Verwendung des Rechenschiebers ableiten. Notiere diese Regeln:

Multiplikation als Addition von Streckenlängen	Division als Subtraktion von Streckenlängen

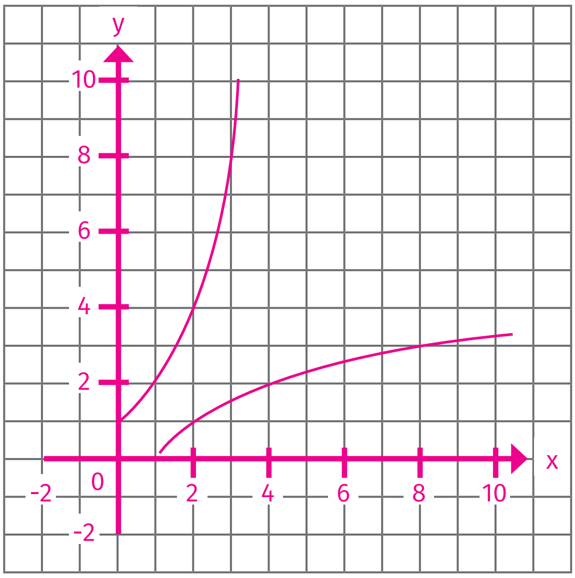
Logarithmengesetze



7 AUFGABEN ZUM ÜBEN

In den folgenden Übungsaufgaben soll das Rechnen mit Logarithmen nun weiter geübt werden. Am Ende der Unterrichtseinheit sollst du in der Lage sein, logarithmisch geteilte Skalen zu erkennen, zu erstellen bzw. zu ergänzen.

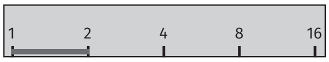
7.1 HERSTELLEN FUNKTIONALER ZUSAMMENHÄNGE



Gegeben sind eine Exponentialgleichung und eine dazu äquivalente Logarithmengleichung. Hinter den Zahlen verbergen sich aber auch Streckenlängen und bestimmte Vielfache von Strecken.

a) Veranschauliche diese Strecken und Vielfache farbig auf der Skale und an den Graphen.

$2^3 = 8 \leftrightarrow 3 = \log_2 8$



b) Formuliere Zusammenhänge:

• zwischen der Skale und den Graphen der Funktionen

• zwischen dem Begriff Logarithmus und den Graphen der Funktionen

• zwischen dem Begriff Logarithmus und der Skale

7.2 BERECHNUNGEN ZUR SKALIERUNG

a) Skizziere eine Skale, bei der die Zahl 4 nach einer Streckenlänge von 1 dm abgetragen wird. Trage an diese Skale die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 an.

b) Ermittle zu einer Multiplikationsskale einen Näherungswert für die Streckenlänge zur Zahl 12, wenn die Zahl 5 nach einer Streckenlänge von 7 cm abgetragen wurde.

c) Auf einer Multiplikationsskale haben die Zahlen 3 und 5 einen Abstand von 0.2675 dm. Ermittle die Einteilung dieser Skale und skizziere eine solche Skale. Überprüfe dein Ergebnis.

d) Eine Multiplikationsskale ist logarithmisch geteilt. Es sind also die Logarithmen der Zahlen zu einer bestimmten Basis abgetragen. Berechne die Basis, welche der Skale des Papierrechenstabes zugrunde liegt. Schreibe ein Wertepaar als Logarithmengleichung (z. B. kannst du den Logarithmus von 6 relativ genau ablesen) und wähle die Basis als Unbekannte. Löse diese Gleichung mit dem Rechner.

7.3 GESETZMÄSSIGKEITEN BEIM RECHNEN MIT LOGARITHMEN

Wie wir bereits festgestellt haben, lässt sich die Multiplikation von Zahlen auf die Addition der zugehörigen Strecken [Bsp.: L(a) ... Streckenlänge, welche zur Zahl a gehört] zurückführen: L(a) + L(b) = L(a · b). Die Division wird auf die Subtraktion von Streckenlängen zurückgeführt: L(a) - L(b) = L $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Diese Gesetzmäßigkeiten lassen sich verallgemeinern und führen jeweils auf das

1. Logarithmengesetz: $\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$ und **2. Logarithmengesetz:** $\log_c a - \log_c b = \log_c \left(\frac{a}{b}\right)$

a) Leite das 1. Logarithmengesetz her.

$a = c^p \leftrightarrow p = \underline{\qquad}$ und $b = c^q \leftrightarrow q = \underline{\qquad}$

$\log_c (a \cdot b) = \log_c (\underline{\quad} \cdot \underline{\quad})$ | Ersetzen von a und b und Anwenden der Potenzgesetze

$= \log_c (\underline{\qquad})$ | Anwenden der Gesetzmäßigkeit: $\log_c a^t = t \cdot \log_c a$

$= (\underline{\qquad}) \cdot \underbrace{\log_c (\underline{\qquad})}_{\underline{\qquad}}$

$= (\underline{\qquad})$

$\log_c (\underline{\qquad}) = \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$ | p und q auf der rechten Seite zurückersetzen

$\log_c (a \cdot b) = \log \underline{\qquad} + \log \underline{\qquad}$

b) Zeige, dass folgender Zusammenhang gilt: $\log_a a^c = c$. Gehe dabei von folgendem Ansatz aus: $a^c = a^c$ und formuliere eine entsprechende Logarithmengleichung.

$\boxed{a}^{\diamond c} = (a^c) \leftrightarrow \diamond = \log_{\square} \bigcirc$

c) Mit dem Rechenstab kann man auch zu jeder Zahl die zughörige Quadrat- bzw. Kubikzahl ermitteln. Die Zahlen x stellt man auf der Skale D ein. Die Quadratzahlen werden auf der Skale A und die Kubikzahlen auf der Skale K abgelesen. Für die Teilung der Skale nutzt man eine Gesetzmäßigkeit, welche in einigen Lehrbüchern als 3. Logarithmengesetz bezeichnet wird.

Leite die Gesetzmäßigkeit her: $\log_c a^t = t \cdot \log_c a$

$c^x = a \quad \leftrightarrow \quad x = \underline{\qquad}$ (*)

$c^x = a$ | hoch t

$\underline{\qquad} = \underline{\qquad}$ | Potenzgesetz anwenden (linke Seite)

$\underline{\qquad} = \underline{\qquad} \quad \leftrightarrow \quad x \cdot t = \underline{\qquad}$ |(auf der linken Seite Faktoren tauschen)

$t \cdot x = \underline{\qquad}$ | ersetzen von x durch (*)

$t \cdot \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Untersuche, wie diese Gesetzmäßigkeit für die Teilung der Skale genutzt wird. Formuliere deine Erkenntnis und prüfe sie an den Skalen D und K.

d) Bei vielen Taschenrechnern stehen zur Logarithmenberechnung nur die Basen **10** bzw. **e** zur Verfügung. Auch unser Taschenrechner verwendet für einige Umformungen oft nur die Basis e. Es ist deshalb auch für uns wichtig, die Gesetzmäßigkeit zum sogenannten **Basiswechsel** zu kennen.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Der Ausdruck lässt sich für eine bestimmte Basis c folgendermaßen schreiben:

$$\log_4 7 = \frac{\log_c 7}{\log_c 4}$$

Als Basis c wählt man nun eine „gängige“ Basis, z. B. die Basis e:

$$\log_4 7 = \frac{\log_e 7}{\log_e 4} = \frac{\ln 7}{\ln 4}$$

Prüfe die Gleichheit der Ausdrücke auch für einige andere Beispiele mit deinem Rechner.

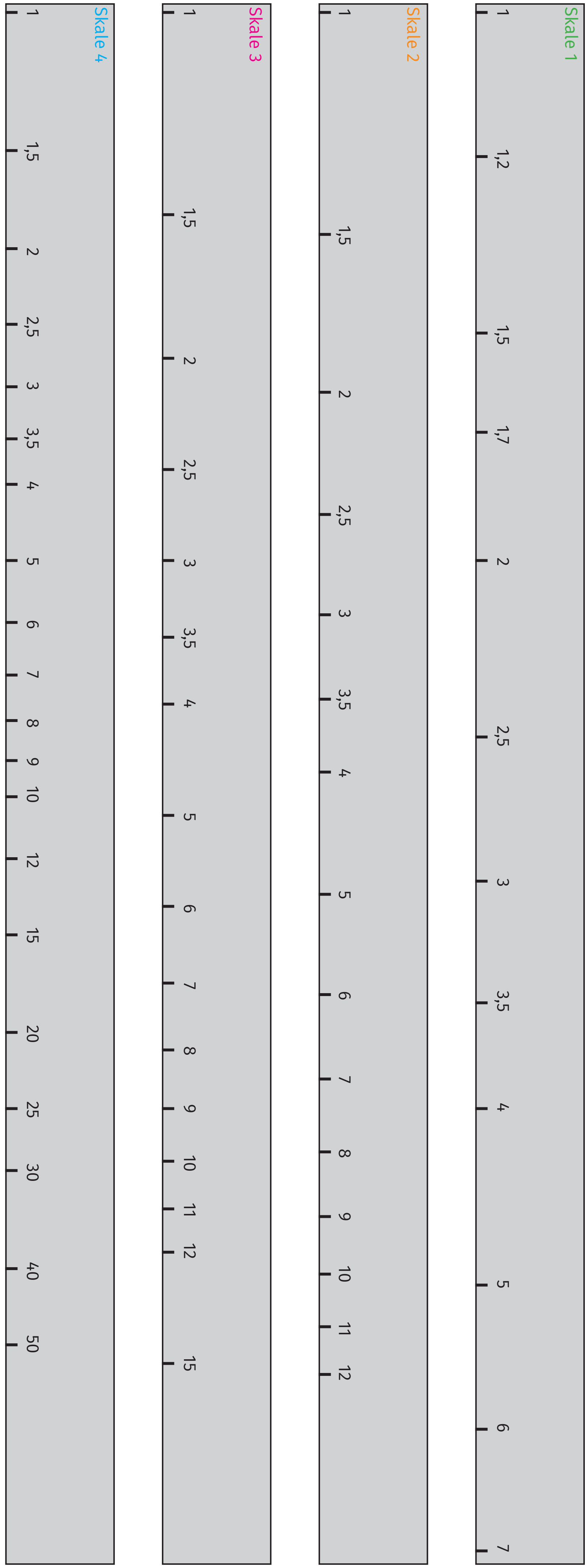
Weise dann allgemein diese Gesetzmäßigkeit nach:

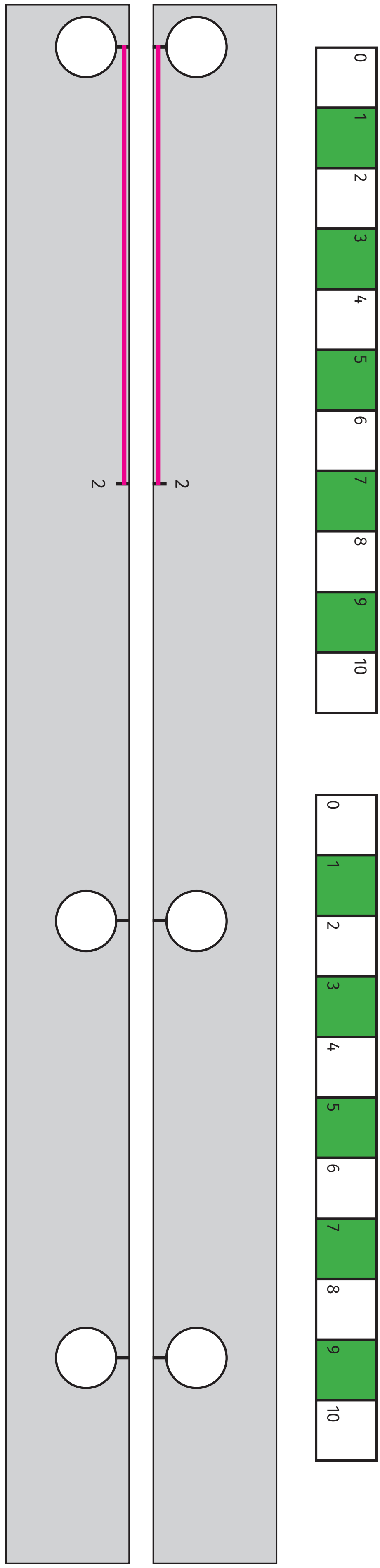
$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Hinweis: Gehe dabei von der Exponentialgleichung $b^x = a$ aus und bilde von beiden Seiten den Logarithmus zur Basis c (... als würde man auf beiden Seiten die Wurzel ziehen). Ersetze zum Schluss x wieder durch den logarithmischen Ausdruck.

b^x	$= a \quad \leftrightarrow \quad x =$	
b^x	$= a$	$\vert \log_c$ (auf beiden Seiten)
$\log_c b^x$	$= \log_c$	$\vert$ Gesetzmäßigkeit IV anwenden
	$= \log_c a$	$\vert \div \log_c b$
x	$= \frac{\quad}{\quad}$	$\vert$ x zurückersetzen
	$= \frac{\quad}{\quad}$	

ZUSATZMATERIAL





Lebenslauf

Person

Name:	Spiegelhauer, Jens

Schulbildung

1985	Abitur

Ausbildung

1987 – 1992	Studium an der Technischen Universität Chemnitz: Mathematik und Physik für das Höhere Lehramt an Gymnasien; Erste Staatsprüfung für das Höhere Lehramt an Gymnasien
1992 – 1994	Staatliches Seminar für das Höhere Lehramt an Gymnasien Chemnitz; Zweite Staatsprüfung für das Höhere Lehramt an Gymnasien

Beruflicher Werdegang

1994 – 2004	Lehrer an einem Gymnasium
2004 – 2010	Fachleiter für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich eines Gymnasiums
2008 – 2014	Lehrbeauftragter für Didaktik der Mathematik und Pädagogik an der Ausbildungsstätte für das Höhere Lehramt an Gymnasien in Dresden (Teilabordnung)
2010 – 2013	Referent im Sächsischen Staatsministerium für Kultus in Dresden, Referat Lehrerbildung
seit 2013	Referent in der Sächsischen Bildungsagentur Regionalstelle Leipzig, Referat Lehrerausbildung; tätig als Hauptausbildungsleiter an der Ausbildungsstätte für das Höhere Lehramt an Gymnasien Chemnitz (Didaktik der Mathematik und Bildungswissenschaften)

Halle (Saale), 01.12.2016

Jens Spiegelhauer

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit

Bedeutung und Förderung funktionalen Denkens im Kontext des Unterrichts – aus mathematikhistorischer, fachdidaktischer und unterrichtspraktischer Perspektive

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle (Saale), 01.12.2016

Jens Spiegelhauer