

Fraktale stochastische Integralgleichungen im White-Noise-Kalkül

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Herrn Jens Lueddeckens
geboren am 25.10.1987 in Halle (Saale)

Gutachter:

Prof. Dr. Dr. h. c. Wilfried Grecksch (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea (Bergische Universität Wuppertal)

Tag der Verteidigung: 28.04.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	8
2.1	Hida-Räume für Gauß-Prozesse	8
2.2	Hida-Räume für Sprungprozesse	13
2.3	Das Wick-Produkt	21
2.4	Wick-Itô-Skorohod-Integrale für die (fraktale) Brownsche Bewegung und das (fraktale) kompensierte Poisson-Maß	22
2.4.1	Das Wick-Itô-Skorohod-Integral für die (fraktale) Brownsche Bewe- gung	22
2.4.2	Integrale für Sprungprozesse	24
2.4.3	Fraktale Erweiterungen zu Lévy-Sprungprozessen	28
3	Eine lineare homogene stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brown- scher Bewegung und kompensiertem Poisson-Zufallsmaß	33
3.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer linearen homogenen stochasti- schen Integralgleichung	33
3.2	Parameterschätzung	59
3.2.1	Schätzverfahren unter Verwendung des logarithmierten Lösungsprozes- ses	61
3.2.1.1	Schätzung des Drifts a	63
3.2.1.2	Schätzung der Sprungintensität $\pi(\Lambda)$	63
3.2.1.3	Schätzung des Diffusionskoeffizienten σ	64
3.2.1.4	Erwartungstreue und Konsistenz	64
3.2.1.5	Probleme mit dem Faktor v des Sprunganteils	67
3.2.2	Parameterschätzungen unter Verwendung einer Approximation	68
3.2.2.1	Schätzung des Driftparameters a	70
3.2.2.2	Schätzung des Diffusionskoeffizienten σ	70
3.2.2.3	Schätzung des Faktors v der Brownschen Bewegung	71
3.2.2.4	Schätzung von λ	71

3.2.2.5	Erwartungstreue und Konsistenz	72
3.2.3	Simulationsergebnisse	74
4	Eine inhomogene stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und fraktalem kompensiertem Poisson-Maß	80
4.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer inhomogenen stochastischen Integralgleichung	80
4.2	Parameterschätzungen für eine inhomogene stochastische Integralgleichung	87
4.2.1	Schätzung des Mean-Reversion-Levels μ bei bekannter Mean-Reversion-Rate \mathcal{K}	88
4.2.2	Schätzung der Mean-Reversion-Rate \mathcal{K}	94
5	Zusammenfassung und Ausblick	100
6	Anhang	103
6.1	Hilfssätze	103
6.1.1	Zitierte Hilfssätze	103
6.1.2	Ergodizitätsaussagen	103
6.2	Beweise der Sätze 2.8 und 2.10	112
6.2.1	Beweis von Satz 2.8	112
6.2.2	Beweis von Satz 2.10	115
6.3	MATLAB-Simulationen unterschiedlich großer Parameter	117
6.3.1	Hurst-Parameter $H = 0,9$	117
6.3.2	Hurst-Parameter $H = 0,7$	119
7	Literaturverzeichnis	122

Kapitel 1

Einleitung

Zahlreiche wissenschaftliche Problemstellungen werden heute anhand von mathematischen Modellen untersucht, in welche wichtige Eigenschaften der Realität eingehen, um aus vorhandenen Daten Prognosen für die Zukunft zu erstellen. In der Realität sind jedoch viele Ereignisse nicht exakt vorhersehbar, sondern hängen auch vom Zufall ab. Die Modellierung solcher zeitabhängigen Prozesse, welche sowohl deterministische als auch stochastische Bestandteile enthalten, ist äußerst schwierig. Zahlreiche stochastische Prozesse, wie zum Beispiel der Wiener-Prozess, sind nirgends differenzierbar. Das macht die Modellierung solcher Prozesse mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen unmöglich. Erst in den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts gelang es Itô Kiyoshi, eine Theorie zur stochastischen Integration und Differentiation zu entwickeln [It]. Seit dieser Zeit haben stochastische Modelle, welche zufällige Phänomene berücksichtigen, einen besonderen Stellenwert.

Herkömmliche stochastische Modelle, welche unter Verwendung der klassischen Brownschen Bewegung entwickelt worden sind, genügen allerdings oft nicht mehr den Anforderungen der heutigen Praxis. Inzwischen wurde erkannt, dass viele Prozesse in der Finanzwirtschaft, in der Physik und in anderen Bereichen ein „Gedächtnis“ besitzen. Da die klassische Brownsche Bewegung kein Gedächtnis berücksichtigt, wurden in den letzten Jahren verstärkt stochastische Modelle untersucht, welche auf der fraktalen Brownschen Bewegung basieren. Die fraktale Brownsche Bewegung, welche von Mandelbrot und Van Ness [MaNe] als Erweiterung der Brownschen Bewegung eingeführt wurde, wird unter anderem von Kijima und Tam [KiTa] beschrieben. Bei der fraktalen Brownschen Bewegung handelt es sich um einen zentrierten Gauß-Prozess, welcher durch die Kovarianzfunktion

$$\text{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

festgelegt ist.

H stellt hierbei eine reelle Zahl im Bereich $(0, 1)$ dar und wird als Hurst-Parameter nach dem britischen Hydrologen Harold Edwin Hurst bezeichnet. Beim Hurst-Parameter unterscheidet man drei Fälle:

- $H = \frac{1}{2}$: Hierbei entwickeln sich die Werte von Zeitreihen zufällig, da der Prozess keine „Erinnerung“ an vergangene Werte hat. Es handelt sich um einen gewöhnlichen Wiener-Prozess.
- $H < \frac{1}{2}$: In diesem Bereich zeigt der Hurst-Parameter eine negative Autokorrelation an. „Die Werte gleichen sich deshalb mit der Zeit aus.“
- $H > \frac{1}{2}$: Hier zeigt der Hurst-Parameter eine positive Autokorrelation von Zeitreihen an. Das heißt, dass die Werte eine Erhaltungsneigung aufweisen. Man spricht in diesem Fall von einem Prozess mit langem Gedächtnis.

Kijima und Tam [KiTa] geben auch eine exakte Definition für ein langes Gedächtnis an: Ein stationärer Prozess $(X(n))_{n \in \mathbb{N}}$ verfügt nach [KiTa], Definition 1.2, über ein langes Gedächtnis, wenn dessen Autokovarianzfunktion die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(X(n), X(n+k))}{cn^{-\alpha}} = 1$$

für Konstanten c und $\alpha \in (0, 1)$ erfüllt.

Zahlreiche Untersuchungen auf den unterschiedlichsten Wissenschaftsgebieten belegen, dass die fraktale Brownsche Bewegung gut geeignet ist, reale Prozesse mit einem Gedächtnis zu modellieren.

Auf dem Gebiet der Finanzwirtschaft sei hier zum Beispiel auf die Arbeiten von Bender et al. [BeSoVa], Mishura [Mi], Biagini et al. [BiHuØkZh] und Nualart ([Nu1], [Nu2]) verwiesen. Diese verallgemeinern das klassische Black-Scholes-Modell, indem sie die Brownsche Bewegung durch die fraktale Brownsche Bewegung ersetzen oder die Brownsche Bewegung zur gemischten Brownschen Bewegung erweitern. Die Notwendigkeit solcher Erweiterungen konnte zum Beispiel von Chen und Zhou [ChZh] nachgewiesen werden, da diese für den Shanghai Composite Index, den Shenzhen Component Index, den Dow Jones Index und den NASDAQ Index ein langes Gedächtnis ermittelt und mit Hurst-Parametern von 0,5992 bis 0,7715 quantifiziert haben.

Auch für viele reale Prozesse in der Natur, wie zum Beispiel das Wetter [Ka] oder die Sonnenscheindauer [Si1], wurde der fraktale Charakter bereits nachgewiesen und man konnte einen entsprechenden Hurst-Parameter für diese Prozesse bestimmen. So ermittelten unter anderem Hurst für die jährlichen Nilüberschwemmungen den Parameter 0,73 [CoKoLiMaMoCo], Kantelhardt [Ka] für Temperaturen den Hurst-Parameter 0,65 und Sitte [Si1] für die Sonnenscheindauer einen Hurst-Parameter im Bereich von 0,651 bis 0,7.

Eine weitere mögliche Anwendung stochastischer Differentialgleichungen mit Gedächtnis ist die Modellierung der Strompreisdynamik, wobei durch die Liberalisierung der europäischen Strommärkte an den Strombörsen zahlreiche neue Handelsprodukte entstanden sind, deren Modellierung eine besondere Herausforderung darstellt. Außerdem erschwert der gesetzlich vorgeschriebene wachsende Anteil erneuerbarer Energien an der Energiegewinnung die Vorhersage von Strompreisen. Das ist auf eine wachsende Volatilität der Strommenge und Strompreise ([Co], [KoAg]), das Auftreten negativer Strompreise ([Co], [GöHeHeKuLe]) sowie das in jüngerer Zeit erkannte lange Gedächtnis der Strompreise ([Ma2], [HaNi]) zurückzuführen. So ermittelte Marossy [Ma2] für den EEX-Preis einen Hurst-Parameter von 0,88 und für den Nord-Pool-Preis einen Hurst-Parameter von 0,87. Haltrup und Nielsen [HaNi] errechneten für die dänischen, schwedischen und finnischen Strommärkte Hurst-Werte zwischen 0,8 und 0,9. Bei Verwendung von Log-Return-Preisen konnte das Langzeitgedächtnis für den Intraday-Handel festgestellt werden ([Ma2], [Si2]). In einer Studie der Energy Brainpool GmbH vom November 2014 [GöHeHeKuLe] geht man davon aus, dass sich die Zahl der Stunden mit negativen Strompreisen bis zum Jahr 2040 auf 18% erhöhen wird. Außerdem vermuten die Autoren, dass die Perioden mit negativen Strompreisen immer länger werden. Als Hauptursache für dieses Phänomen sehen die Autoren vor allem den zunehmenden Anteil der Windenergie an der Stromproduktion. Gerade negative Preise führen aber bei einem Black-Scholes-Ansatz zu Problemen, da man mit dem Black-Scholes-Modell Exponentialfunktionen als Lösungen erhält, diese aber nie negativ werden können. Die Entwicklung eines neuen Modells, welches negative Sprünge zulässt und zusätzlich additive Rauschprozesse beinhaltet, kann dieses Problem allerdings lösen.

In [MiZu] wird darauf hingewiesen, dass auch zahlreiche „Sprünge“ von Zinssätzen, Wechselkursen und anderen Finanzindizes von ihrer Vergangenheit abhängen. Dies sollte bei der Erstellung geeigneter Modelle berücksichtigt werden, weshalb in ihrer Publikation ein fraktaler Poisson-Prozess verwendet wird. In [Le] werden zum Beispiel fraktale Poisson-Prozesse zur Modellierung von Forward-Preisen genutzt und in [BiSa] wird ein fraktaler Poisson-Prozess in der Ruintheorie angewendet. Insbesondere hat die Arbeit von Laskin ([La]) aus dem Jahr 2003 über den fraktalen Poisson-Prozess als Erneuerungsprozess mit Mittag-Leffler-Wartezeiten als fraktale Erweiterung der Kolmogorov-Feller-Gleichung bereits zu zahlreichen Publikationen über fraktale Risiko- und Finanzmodelle geführt (z.B. [BiSa], [Le], [MaVe] und [Sc]). Einen weiteren interessanten Ansatz verfolgte im Jahr 2006 Marquardt [Ma3]. Sie entwickelte einen speziellen fraktalen Lévy-Prozess als reinen Sprungprozess mit Erwartungswert Null und einer endlichen Varianz.

Auch bei der Strompreismodellierung ist es wegen der starken Volatilität der Preise

sinnvoll, nicht nur Rauschprozesse wie die Brownsche Bewegung, sondern auch Sprungprozesse, welche auf dem Poisson-Prozess beruhen ([Se], [SeUh-Ho], [Sa]), in die Berechnungen einzubeziehen. Da der Strompreis oft einen fraktalen Charakter besitzt, ist es damit sinnvoll, auch bei der Modellierung der Sprünge ein Gedächtnis zu unterstellen.

In dieser Arbeit wird zunächst eine lineare homogene stochastische Integralgleichung mit deterministischen Koeffizienten untersucht, welche später zu einer inhomogenen stochastischen Integralgleichung mit stochastischen Koeffizienten erweitert wird. Ziel ist es, stochastische Modelle zu finden, welche insbesondere den Bedürfnissen der Finanzwirtschaft genügen und sowohl den fraktalen Charakter vieler dynamischer Prozesse als auch eine hohe Volatilität berücksichtigen.

Die Lösungsansätze zu diesen stochastischen Integralgleichungen basieren auf dem White-Noise-Kalkül. Diese Theorie wurde maßgeblich durch T. Hida 1975 in seiner Monografie „Analysis of Brownian Functionals“ [Hi] entwickelt und seitdem immer weiter ausgebaut. Zunächst wurde dieser Kalkül auf die Brownsche Bewegung angewendet ([HiPo], [Zh], [HoØkUbZh]). Die wesentlichen Elemente des White-Noise-Kalküls können aber auch auf andere stochastische Maße, wie das kompensierte Poisson-Zufallsmaß, übertragen werden ([ØkPr], [NuØkPr], [Pr2]). Darüber hinaus wurde der White-Noise-Kalkül auf fraktale stochastische Prozesse, wie die fraktale Brownsche Bewegung ([ElHo], [BiØkSuWa], [Mi]) oder fraktale Lévy-Prozesse [He], erweitert.

Dieser Kalkül wirkt auf speziellen Distributionsräumen, den sogenannten Hida-Räumen, welche eine Verallgemeinerung des Raums $L^2(\Omega, \mu)$ darstellen, wobei μ das White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Zum Beispiel beschrieben Biagini et al. [BiØkSuWa] ein White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß für die Brownsche Bewegung und Di Nunno, Øksendal und Proske [NuØkPr] ein White-Noise-Wahrscheinlichkeitsmaß für Lévy-Sprungprozesse. Dabei bezeichnet man mit „White Noise“ die verallgemeinerte Ableitung stochastischer Prozesse wie zum Beispiel die verallgemeinerte Ableitung des kompensierten Poisson-Prozesses oder die verallgemeinerte Ableitung der Brownschen Bewegung nach der Zeit, die zwar nicht im Raum $L^2(\Omega, \mu)$, dafür aber in erweiterten Distributionsräumen existieren.

Im Kapitel 2 werden diese Hida-Räume mit den darauf definierten (fraktalen) Brownschen Bewegungen und (fraktalen) kompensierten Poisson-Zufallsmaßen beziehungsweise reinen Lévy-Sprungprozessen eingeführt. Danach werden die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen des Wick-Produkts, welches unter anderem für die Definition der in dieser Arbeit verwendeten Wick-Itô-Skorohod-Integrale und Sprungintegrale benötigt wird, vorgestellt. Die Definition dieser stochastischen Integrale erfolgt am Ende des Kapitels. Da fraktale Prozesse auf Grund ihres Gedächtnisses keine Semimartingale sind, können keine klassi-

schen Itô-Integrale verwendet werden. Die Wick-Itô-Skorohod-Integrale stellen allerdings eine sinnvolle Alternative dar, da mit ihnen viele nützliche Eigenschaften der klassischen Itô-Integrale erhalten bleiben, zum Beispiel dass der Erwartungswert dieses stochastischen Integrals Null ist. Eine Analogie zur klassischen Itô-Isometrie wurde von Elliott und van der Hoek in „A general fractional white noise theory and applications to finance“ [ElHo] für das Wick-Itô-Skorohod-Integral bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung bewiesen. Die Ausweitung des Anwendungsbereichs des Kerns von Elliott und van der Hoek auf fraktale Erweiterungen von reinen Lévy-Sprungprozessen ermöglicht die Übertragung vieler nützlicher Eigenschaften des Wick-Itô-Skorohod-Integrals der fraktalen Brownschen Bewegung auf das Analogon für fraktale Lévy-Sprungprozesse. Deshalb wird in dieser Arbeit sowohl für die fraktale Brownsche Bewegung als auch für die Definition der fraktalen Erweiterungen der reinen Lévy-Sprungprozesse der gleiche Kern von Elliott und van der Hoek verwendet.

Im Kapitel 3 wird eine homogene stochastische Integralgleichung, welche sowohl ein Integral bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung als auch ein Integral bezüglich des kompensierten Poisson-Maßes enthält, untersucht. Zunächst wird ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz für diese stochastische Integralgleichung bewiesen. Im Anschluss werden für einen Spezialfall dieser homogenen Integralgleichung mit konstanten deterministischen Koeffizienten und einem langen Gedächtnis Methoden zur Schätzung für den Drift, die Sprungintensität, den Diffusionskoeffizienten und die Sprunghöhe entwickelt. Schließlich werden die Konsistenz und Erwartungstreue der gefundenen Schätzer bewiesen. Praktisch werden diese Ergebnisse anhand von MATLAB-Simulationen verdeutlicht.

Im Kapitel 4 wird eine Verallgemeinerung der stochastischen Integralgleichung des dritten Kapitels, eine inhomogene stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und fraktalem kompensiertem Poisson-Zufallsmaß, untersucht. Dabei erfolgt auch hier zuerst der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für diese Integralgleichung. Anschließend werden für einen Spezialfall der inhomogenen stochastischen Integralgleichung mit wiederum konstanten deterministischen Koeffizienten und langem Gedächtnis die Mean-Reversion-Rate und der Mean-Reversion-Level geschätzt und die gefundenen Schätzer auf Erwartungstreue und Konsistenz hin untersucht. MATLAB-Simulationen bestätigen auch in diesem Kapitel die Konsistenz der Schätzer.

Im Kapitel 5 folgt schließlich eine Zusammenfassung und Auswertung der gefundenen Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln 3 und 4 sowie ein Ausblick über die Möglichkeiten, die sich ausgehend von dieser Arbeit für die weitere Forschung bieten.

Der Arbeit ist eine CD mit allen Simulations- und Schätzprogrammen beigelegt.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des „White-Noise-Kalküls“ zusammengestellt, die in der Folge (Kapitel 3 und 4) zur Entwicklung der Theorie zum Lösen der homogenen und inhomogenen stochastischen Integralgleichungen benötigt werden.

Im ersten Abschnitt werden die Hida-Räume für die Brownsche Bewegung inklusive des „White Noise“, also der verallgemeinerten Ableitung der Brownschen Bewegung in diesen Räumen nach der Zeit, eingeführt.

Im zweiten Abschnitt erfolgt die Einführung der Hida-Räume für reine Lévy-Sprungprozesse und deren zugehörige verallgemeinerte Ableitungen nach der Zeit.

Für die Integration in diesen Hida-Räumen und die stochastischen Integralgleichungen der Kapitel 3 und 4 spielen Wick-Produkte eine entscheidende Rolle, die im dritten Abschnitt eingeführt werden.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden auf der Basis des White-Noise-Kalküls Integrale definiert und einige Eigenschaften dieser stochastischen Integrale diskutiert. Darüber hinaus wird ein fraktaler Kern eingeführt, mit dem fraktale Prozesse wie die fraktale Brownsche Bewegung (Abschnitt 2.4.1) und der fraktale kompensierte reine Lévy-Sprungprozess (Abschnitt 2.4.3), definiert werden.

2.1 Hida-Räume für Gauß-Prozesse

Definition 2.1 (vgl. [Ku], Definition 4.1)

Ein adaptierter Prozess $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Cádłág-Pfaden, also mit rechtsseitig stetigen Pfaden, deren linksseitige Grenzwerte existieren (vgl. [CoTa], Definition 2.10), Werten in \mathbb{R}^d und $X_0 = 0$ ist ein Lévy-Prozess, wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

- *Unabhängige Zuwächse: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ sind die Zufallsvariablen*

$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig.

- Stationäre Zuwächse: Für alle $0 \leq s \leq t$ haben die Zufallsvariablen $X_t - X_s$ und X_{t-s} die gleiche Verteilung.

Lévy-Prozesse können im Allgemeinen in einen deterministischen Driftterm, einen stetigen stochastischen Prozess und einen Sprungprozess zerlegt werden ([LeMa-CaVi], Seite 4). Zunächst wird der Wahrscheinlichkeitsraum für den stetigen Anteil untersucht. Dabei sollen insbesondere die Hida-Räume vorgestellt werden, da diese für die stochastische Integration mittels Wick-Itô-Skorohod-Integral entscheidend sind.

Die Einführung der Hida-Räume der verallgemeinerten stochastischen Testfunktionen und der stochastischen Distributionen bezüglich der Brownschen Bewegung wurde aus „An Introduction to White-Noise Theory and Malliavin Calculus for Fractional Brownian Motion“ ([BiØkSuWa], Seite 348-352) übernommen (vgl. auch [HoØkUbZh], Kapitel 2.1 bis Kapitel 2.3).

Sei $S_W(\mathbb{R})$ der Schwartz-Raum der streng monoton fallenden beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} . Seien weiter $\Omega_W := S'_W(\mathbb{R})$ der Dualraum zu $S_W(\mathbb{R})$ und μ_W das Maß auf der σ -Algebra von Borel-Mengen $\mathcal{B}(S'_W(\mathbb{R}))$, sodass für das zugehörige charakteristische Funktional

$$\int_{S'_W(\mathbb{R})} \exp\{i(\omega^W, f)\} d\mu_W(\omega^W) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)}^2\right\}$$

für alle $f \in S_W(\mathbb{R})$ gilt. Dabei ist i die imaginäre Einheit, λ das Lebesgue-Maß und $(\omega^W, f) := \omega^W(f)$ mit $\omega^W \in \Omega_W = S'_W(\mathbb{R})$.

Das Bochner-Minlos-Theorem garantiert die Existenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_W .

Es gelten die folgenden Eigenschaften, wobei E den Erwartungswert bezüglich μ_W bezeichnet:

- $E[(\omega^W, f)] = 0$ für alle $f \in S_W(\mathbb{R})$.
- $E[(\omega^W, f)]^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)}^2$ für alle $f \in S_W(\mathbb{R})$.
- Sei F eine auf $S'_W(\mathbb{R})$ definierte zufällige Variable mit $\int_{\Omega_W} |F(\omega^W)| d\mu(\omega^W) < \infty$. Dann ist $E[F(\omega^W)] = E_{\mu_W}[F(\omega^W)] = \int_{\Omega_W} F(\omega^W) d\mu_W(\omega^W)$ der Erwartungswert von F bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_W .

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_W(\mathbb{R})$ mit $f_n \rightarrow f$ im Raum $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$.

Man setzt $(\omega^W, f) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega^W, f_n)$. Die Konvergenz von (ω^W, f_n) ist als Konvergenz bezüglich $L^2(\Omega_W, \mu_W)$ zu verstehen.

Damit ist $\tilde{B}(t) := \tilde{B}(t, \omega^W) := (\omega^W, 1_{[0,t]})$ mit

$$1_{[0,t]} = \begin{cases} I_{[0,t]} & \text{für } t \geq 0 \\ -I_{[t,0]} & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

wohldefiniert. $I_{[0,t]}$ ist dabei die Indikatorfunktion. Mit dem Kolmogorovschen Stetigkeitstheorem lässt sich zeigen, dass $\tilde{B}(t)$ eine stetige Version $B(t)$ besitzt. $B(t)$ ist ein Gauß-Prozess mit der Eigenschaft

$$E[B(t_1)B(t_2)] = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,t_1] \wedge [0,t_2]}(s) ds = \begin{cases} \min(|t_1|, |t_2|) & \text{für } t_1 t_2 > 0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $B(t)$ eine Brownsche Bewegung bezüglich μ_W und man schreibt $(\omega^W, f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) B(dt)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$.

Sei $\hat{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$ die Menge aller symmetrischen Funktionen $F \in L^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$, dann ist für $f \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$ das iterierte Itô-Integral von f durch

$$I_n(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t) B^{\otimes n}(dt) = n! \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) B(dt_1) \cdots B(dt_{n-1}) B(dt_n)$$

definiert.

Satz 2.1 ([BiØkSuWa], Theorem 2.2)

Sei $F \in L^2(\Omega_W, \mu_W)$, dann existiert eine eindeutige Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ mit $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$, sodass

$$F(\omega^W) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad (\text{Konvergenz in } L^2(\Omega_W, \mu_W))$$

ist. Es gilt für $F \in L^2(\Omega_W, \mu_W)$ die Itô-Isometrie

$$E[F(\omega^W)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)}^2.$$

Dabei ist $I_0(f_0)$ konstant.

Im Folgenden werden die Hermite-Polynome

$$h_n(x) := (-1)^n \exp \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} \cdot \frac{\partial^n}{\partial^n x} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

und die Hermite-Funktionen

$$\xi_n(x) := \pi^{-\frac{1}{4}}((n-1)!)^{-\frac{1}{2}} h_{n-1}(\sqrt{2}x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \text{ mit } n = 1, 2, \dots$$

benötigt. Es gilt $\xi_n \in S_W(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, und mit [BiØkSuWa], Ungleichung (2.13), existieren Konstanten C_1 und C_2 für alle n mit

$$|\xi_n(x)| \leq \begin{cases} C_1 n^{-\frac{1}{12}} & \text{für } |x| \leq 2\sqrt{n} \text{ und} \\ C_1 \exp\{-C_2 x^2\} & \text{für } |x| > 2\sqrt{n}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Man kann zeigen, dass die Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ bildet.

Sei \mathcal{I} die Indexmenge aller Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ endlicher Länge $l(\alpha) := \max\{i | \alpha_i \neq 0\}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei weiter

$$H_\alpha(\omega^W) := h_{\alpha_1}((\omega^W, \xi_1)) h_{\alpha_2}((\omega^W, \xi_2)) \cdots h_{\alpha_n}((\omega^W, \xi_n)).$$

Es gilt

$$H_{e_k}(\omega^W) = h_1((\omega^W, \xi_k)) = \int_{\mathbb{R}} \xi_k(t) B(dt),$$

wobei $e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der k -te Einheitsvektor ist.

Allgemein gilt

$$H_\alpha(\omega^W) = \int_{\mathbb{R}^{|\alpha|}} \xi^{\hat{\otimes} \alpha}(t) B^{\otimes |\alpha|}(dt) \quad (2.3)$$

mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und der symmetrischen Erweiterung $\hat{\otimes}$ des Tensorprodukts \otimes . Das heißt, $\xi^{\hat{\otimes} \alpha}(t)$ ist die symmetrische Erweiterung zu

$$\begin{aligned} \xi^{\otimes \alpha}(t) &= \xi_1^{\otimes \alpha_1}(t_1, \dots, t_{\alpha_1}) \cdots \xi_{l(\alpha)}^{\otimes \alpha_{l(\alpha)}}(t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l(\alpha)-1} + 1}, \dots, t_{|\alpha|}) \\ &= \xi_1(t_1) \cdots \xi_1(t_{\alpha_1}) \cdots \xi_{l(\alpha)}(t_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l(\alpha)-1} + 1}) \cdots \xi_{l(\alpha)}(t_{|\alpha|}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Satz 2.2 ([BiØkSuWa], Theorem 2.3)

Seien $F \in L^2(\Omega_W, \mu_W)$ und $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ mit $0! := 1$. Dann existiert eine eindeutige Familie $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}}$ von Konstanten aus \mathbb{R} mit

$$F(\omega^W) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha H_\alpha(\omega^W) \quad (\text{Konvergenz in } L^2(\Omega_W, \mu_W)).$$

F genügt der Itô-Isometrie

$$E[F(\omega^W)]^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha^2 \alpha!.$$

Definition 2.2 ([BiØkSuWa], Definition 2.4)

Seien (S_W) der Raum von Funktionen $\psi \in L^2(\Omega_W, \mu_W)$ der Form

$$\psi(\omega^W) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha H_\alpha(\omega^W)$$

mit

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{k\alpha} < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und (S_W^*) die Menge der Distributionen G der Form

$$G(\omega^W) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} b_\alpha H_\alpha(\omega^W)$$

mit

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \alpha! b_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty$$

für mindestens ein $q < \infty$. Dabei ist $(2\mathbb{N})^\gamma := (2 \cdot 1)^{\gamma_1} \cdots (2 \cdot n)^{\gamma_n}$ mit

$\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{I}$. Für $\gamma = 0$ gilt $(2\mathbb{N})^\gamma := 1$. (S_W) wird als „Hida-Raum der verallgemeinerten stochastischen Testfunktionen“ und (S_W^*) als „Hida-Raum der stochastischen Distributionen“ bezeichnet. (S_W) sei mit der projektiven Topologie und (S_W^*) mit der induktiven Topologie ausgestattet. Dann ist (S_W^*) der Dualraum zu (S_W) , wobei die Dualität zwischen (S_W^*) und (S_W) durch

$$(G, \psi)_{(S_W^*), (S_W)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} b_\alpha a_\alpha \alpha!$$

definiert ist.

Falls $G \in L^2(\Omega_W, \mu_W) \subset (S_W^*)$ ist, erhält man insbesondere

$$(G, \psi)_{(S_W^*), (S_W)} = (G, \psi)_{L^2(\Omega_W, \mu_W)} = E[G\psi],$$

da $(S_W) \subset L^2(\Omega_W, \mu_W)$ ist.

Allgemein können Integrale auf (S_W^*) wie folgt definiert werden:

Definition 2.3 ([BiØkSuWa], Definition 2.5)

Sei $Z : \mathbb{R} \rightarrow (S_W^*)$ eine gegebene Funktion mit der Eigenschaft $(Z(t), \psi)_{(S_W^*), (S_W)} \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$. Dann ist $\int_{\mathbb{R}} Z(t) dt$ das eindeutig bestimmte Element aus (S_W^*) , welches die Gleichung

$$\left(\int_{\mathbb{R}} Z(t) dt, \psi \right)_{(S_W^*), (S_W)} = \int_{\mathbb{R}} (Z(t), \psi)_{(S_W^*), (S_W)} dt \in (S_W^*)$$

für alle $\psi \in (S_W)$ erfüllt.

Für die Zufallsgröße $B(t) = (\cdot, 1_{[0,t]})_{(S_W^*), (S_W)} \in L^2(\Omega_W, \mu_W)$ erhält man folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} B(t) &= \left(\omega^W, \sum_{k=1}^{\infty} (1_{[0,t]}, \xi_k)_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)} \xi_k \right)_{(S_W^*), (S_W)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \xi_k(s) ds (\omega^W, \xi_k)_{(S_W^*), (S_W)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \xi_k(s) ds H_{e_k}(\omega^W). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das in (2.5) eingeführte $B(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow (S_W^*)$ ist im distributionstheoretischen Sinne differenzierbar bezüglich t und es gilt mit [BiØkSuWa], Beispiel 2.6,

$$W(t) := \frac{d}{dt} B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) H_{e_k}(\omega^W) \in (S_W^*). \quad (2.6)$$

Diese verallgemeinerte Ableitung der Brownschen Bewegung wird auch als das „Weiße Rauschen“ der Brownschen Bewegung bezeichnet.

2.2 Hida-Räume für Sprungprozesse

Hier soll der Wahrscheinlichkeitsraum für den Sprunganteil eines Lévy-Prozesses eingeführt werden. Dabei spielen Hida-Räume reiner Sprungprozesse eine entscheidende Rolle. Über diesen Räumen werden nachfolgend spezielle stochastische Integrale definiert.

Dieser Abschnitt orientiert sich an dem Artikel „White Noise of Poisson Random Measures“ von Øksendal und Proske ([ØkPr], Seiten 2 bis 10) und gibt einen Überblick über die entsprechenden Hida-Räume für Lévy-Prozesse. Allerdings wird hier der Definitionsbereich der Zeit auf ganz \mathbb{R} gegenüber dem \mathbb{R}_+ aus [ØkPr] erweitert. Die Vergrößerung des Definitionsbereichs bezüglich der Zeit ist notwendig, da in Abschnitt 2.4.3 eine fraktale Erweiterung des in diesem Abschnitt eingeführten „White-Noise“-Kalküls erfolgen soll und diese Erweiterung den ganzen Raum \mathbb{R} als Definitionsbereich bezüglich der Zeit benötigt.

Sei $S_N(\mathbb{R})$ der Schwartz-Raum der streng monoton fallenden beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} . Seien weiter $\Omega_N := S'_N(\mathbb{R})$ der Dualraum zu $S_N(\mathbb{R})$ und μ_N das Maß der σ -Algebra von Borel-Mengen $\mathcal{B}(S'_N(\mathbb{R}))$, welche die Eigenschaft

$$\int_{S'_N(\mathbb{R})} \exp\{i(\omega^N, f)\} d\mu_N(\omega^N) = \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} \psi(f(x)) dx\right\}$$

für alle $f \in S_N(\mathbb{R})$ besitzen. Dabei sind $\omega^N \in \Omega_N = S'_N(\mathbb{R})$, $(\omega^N, f) := \omega^N(f)$ und ψ die charakteristische Funktion eines reinen drifffreien Sprungprozesses mit zugehörigem Lévy-Maß π , das heißt,

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}} (\exp\{iuy\} - 1 - iuy \cdot 1_{|y|<1}) \pi(dy),$$

wobei $\pi(0) = 0$ gilt. Des Weiteren sei das zweite Moment des Lévy-Maßes π endlich, also

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 \pi(dy) =: \mathcal{M} < \infty. \quad (2.7)$$

Es gelten:

- (a) $E_{\mu_N}[(\omega^N, f)] = 0$ für alle $f \in S_N(\mathbb{R})$ und
- (b) $E_{\mu_N}[(\omega^N, f)]^2 = \mathcal{M} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx$ für alle $f \in S_N(\mathbb{R})$.

Für das Funktional ω^N gilt also auch eine Itô-Isometrie. Damit lässt sich nach [ØkPr], Seite 3, für jeden drifffreien reinen Sprungprozess $\tilde{\theta}(t, \omega^N) := (\omega^N, 1_{[0,t]})$ eine Cád-lág-Version $\theta(t, \omega^N)$ im $L^2(\Omega_N, \mu_N)$ konstruieren, die im Folgenden immer zu Grunde gelegt wird. Die Funktion $1_{[0,t]}$ ist dabei wieder wie in (2.1) durch

$$1_{[0,t]} = \begin{cases} I_{[0,t]} & \text{für } t \geq 0 \\ -I_{[t,0]} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

definiert.

Alle nachfolgenden Betrachtungen beruhen auf diesem Lévy-Prozess.

Außerdem definiert $(\Omega_N, \mathcal{F}, \mu_N)$ für die folgenden Betrachtungen einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wobei \mathcal{F}_t durch $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}$ gegeben ist. \mathcal{G}_t ist dabei die σ -Algebra, welche durch θ bezüglich t erzeugt wird. \mathcal{N} stellt die Gesamtheit aller μ_N -Nullmengen dar.

\mathcal{F} steht für \mathcal{F}_∞ oder \mathcal{F}_T , falls nur ein endlicher Zeitbereich $[0, T]$ betrachtet wird.

Der Lévy-Prozess θ lässt sich durch

$$\theta(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,t]}(s) y \tilde{N}(dy, ds) \quad (2.8)$$

darstellen. Dabei ist $\tilde{N}(dy, dt) := N(dy, dt) - \pi(dy)dt$ das kompensierte Poisson-Zufallsmaß. Für $t \geq 0$ entspricht dieser reine Sprungprozess dem Prozess der Gleichung (2.6) aus [ØkPr].

Das Poisson-Zufallsmaß $N(dy, dt)$ genügt der Darstellung

$$N(\Lambda, \Delta_t) = \sum_{s \in \Delta_t} 1_\Lambda(\Delta\theta_s). \quad (2.9)$$

Das heißt, $N(\Lambda, \Delta_t)$ zählt die Anzahl der Sprünge von θ im Intervall $\Delta_t = [0, t]$, welche mit den Intensitäten $y \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ auftreten. $1_\Lambda(\Delta\theta_s)$ ist also genau dann 1, wenn genau ein Sprung zum Zeitpunkt s mit einem Intensitätswert $y \in \Lambda$ erfolgt. Ob zu einem Zeitpunkt $s \in [0, t]$ ein Sprung vorliegt, wird durch die Differenz $\Delta\theta_s := \theta_s - \theta_{s-}$ wahrgenommen, da diese Differenz nur in den Zeitpunkten ungleich Null ist, in denen ein Sprung stattfindet.

Sei $L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ der Raum der quadratisch integrierbaren deterministischen Funktionen $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich des Maßes $(\lambda \times \pi)^n$. λ bezeichnet dabei wieder das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} . Wenn f eine reelle Funktion auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$ ist, dann sei \hat{f} die Symmetrisierung von f bezüglich der Variablen $(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$, das heißt

$$\hat{f}(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, y_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}).$$

\sum_{σ} bedeutet, dass über alle Permutationen σ der Menge $\{1, \dots, n\}$ summiert wird. f heißt symmetrisch, falls $f = \hat{f}$ ist. $\hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ sei der Raum aller symmetrischen Funktionen $f \in L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$. Für $f \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ gilt

$$\|f\|_{L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)}^2 = n! \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} f^2(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n) \pi(dy_1) dt_1 \cdots \pi(dy_n) dt_n.$$

Sei $f \in L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$, dann ist das iterierte kompensierte Poisson-Integral durch

$$J_n(f) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} f(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n)$$

definiert. Falls f zusätzlich symmetrisch ist, gilt für

$$I_n(f) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n)$$

die Identität

$$I_n(f) := n!J_n(f).$$

Für $f \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ und $g \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^m, (\lambda \times \pi)^m)$ erhält man

$$E[I_n(f)I_m(g)] = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \text{ und} \\ n!(f, g)_{L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)} & \text{für } n = m. \end{cases}$$

Satz 2.3 (vgl. [ØkPr], Theorem 2.1)

Sei $F \in L^2(\Omega_N, \mu_N)$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ mit

$$F = E_{\mu_N}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n).$$

Des Weiteren genügt F der Itô-Isometrie

$$E_{\mu_N}[F]^2 = (E_{\mu_N}[F])^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)}^2.$$

Zum Beispiel gilt für $F \in L^2(\Omega_N, \mu_N)$ mit $F := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(t, y) \tilde{N}(dy, dt)$ und $h \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$

$$F = I_1(h).$$

Sei $h(s, y) = 1_{\Delta_t}(s)1_{\Lambda}(y)$, dann folgt

$$F = I_1(h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{\Delta_t}(s)1_{\Lambda}(y) \tilde{N}(dy, ds) = \tilde{N}(\Lambda, \Delta_t) \quad (2.10)$$

für eine Borel-Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei die 0 nicht im Abschluss von Λ enthalten ist.

Für alle folgenden Betrachtungen sei stets vorausgesetzt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $b > 0$ existiert, sodass

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon; \varepsilon)} \exp\{b|y|\} \pi(dy) < \infty \quad (2.11)$$

ist. Diese Bedingung stellt die Existenz aller n -ten Momente, $n \geq 2$, des hier eingeführten Lévy-Maßes sicher.

Im Folgenden werden Hida-Räume für Sprungprozesse eingeführt.

Sei \mathcal{I} wieder die Indexmenge aller Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ endlicher Länge und $l(\alpha) := \max\{i | \alpha_i \neq 0\}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$ und $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_{l(\alpha)}!$.

Um eine Lévy-Version der Hida-Räume für reine Sprungprozesse definieren zu können, werden, wie im Fall der Gauß-Prozesse, spezielle Polynome und Funktionen benötigt.

Seien $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die in Abschnitt 2.1 eingeführten Hermite-Funktionen und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Hermite-Polynome aus Abschnitt 2.1. Dann bilden die Funktionen $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$.

Sei $(\bar{q}_n)_{n \geq 0}$ die Orthogonalisierung von $\{1, y, y^2, \dots\}$ bezüglich des inneren Produkts von $L^2(\mathbb{R}, \tau)$ mit $\tau(dy) := y^2 \pi(dy)$. Dann ist durch die Polynome

$$p_n(y) := \frac{1}{\|\bar{q}_{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R}, \tau)}} y \bar{q}_{n-1}(y)$$

ein vollständiges Orthonormalsystem auf $L^2(\mathbb{R}, \pi)$ definiert.

Sei $z : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $z(i, j) := j + \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$ definiert. Dann ist z eine bijektive Abbildung ([ØkPr], Seite 6). Für $k = z(i, j)$ führt man

$$\delta_k(t, y) := \xi_i(t) p_j(y) \tag{2.12}$$

ein. Seien $l(\alpha) = j$ und $|\alpha| = n$ für $\alpha \in \mathcal{I}$. Dann sei die Funktion $\delta^{\otimes \alpha}(t, y)$ durch

$$\begin{aligned} \delta^{\otimes \alpha}(t, y) &= \delta_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes \delta_j^{\otimes \alpha_j}((t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)) \\ &= \delta_1(t_1, y_1) \cdots \delta_1(t_{\alpha_1}, y_{\alpha_1}) \cdots \delta_j(t_{|\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\}|+1}, y_{|\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\}|+1}) \cdots \delta_j(t_n, y_n) \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\delta_i^{\otimes \alpha_i} = 1$ für $\alpha_i = 0$ gilt.

Schließlich sei noch mit $\delta^{\hat{\otimes} \alpha}$ das symmetrische Tensorprodukt der δ_k 's durch

$$\delta^{\hat{\otimes} \alpha}((t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)) := \delta_1^{\hat{\otimes} \alpha_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \delta_j^{\hat{\otimes} \alpha_j}((t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n))$$

für $\alpha \in \mathcal{I}$ definiert und K_α durch

$$K_\alpha := I_{|\alpha|} \left(\delta^{\hat{\otimes} \alpha} \right)$$

gegeben, wobei $I_0(\delta^{\otimes 0}) = 1$ ist.
 Insbesondere gilt für $k \geq 1$ und

$$e_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \text{ und} \\ 1 & \text{für } k = n \end{cases}$$

die Beziehung

$$K_{e_k} := I_1(\delta^{\otimes e_k}) = I_1(\delta_k) = I_1(\xi_i p_j)$$

mit $z(i, j) = k$.

Satz 2.4 (vgl. [ØkPr], Theorem 3.1)

Die Familie $(K_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}}$ bildet eine Orthogonalbasis des $L^2(\Omega_N, \mu_N)$ mit $\|K_\alpha\|_{L^2(\Omega_N, \mu_N)}^2 = \alpha!$. Damit besitzt jedes $F \in L^2(\Omega_N, \mu_N)$ die eindeutige Darstellung

$$F = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha K_\alpha$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{R}$ und $c_0 = E[F]$. Darüber hinaus genügt F der Itô-Isometrie

$$E_{\mu_N}[F]^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha^2 \alpha!$$

Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Funktionen, wie sie in Satz 2.3 definiert wurde. Sei weiter $I_0(f_0) = f_0$ eine reelle Konstante. Dann liegt f_n im Abschluss des Raums, welcher durch die orthogonale Familie $(\delta^{\otimes \alpha})_{|\alpha|=n}$ bezüglich $L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ erzeugt wird. Zudem lässt sich zeigen, dass

$$f_n = \sum_{\alpha: |\alpha|=n} c_\alpha \delta^{\otimes \alpha} \tag{2.13}$$

gilt, womit der Zusammenhang zwischen den Sätzen 2.3 und 2.4 hergestellt ist. Insbesondere gilt, dass $(\delta^{\otimes \alpha})_{|\alpha|=1}$ dicht im $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)$ liegt.

Sei $f_1(s, y) = 1_{[0, t]}(s) 1_\Lambda(y)$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^0$ aus (2.10), $t > 0$, dann folgt für $F := \tilde{N}(\Lambda, t)$

$$F := \tilde{N}(\Lambda, t) = \sum_{i=1}^n \left(\tilde{N}(\Lambda, t_i) - \tilde{N}(\Lambda, t_{i-1}) \right)$$

mit $0 = t_0 < t_2 < \dots < t_n = t$.

Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\tilde{N}(\Lambda, t_i) - \tilde{N}(\Lambda, t_{i-1}) \right) &= \int_0^t \tilde{N}(\Lambda, ds) = \int_0^t \int_{\Lambda} \tilde{N}(dy, ds) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,t]}(s) 1_{\Lambda}(y) \tilde{N}(dy, ds) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(s, y) \tilde{N}(dy, ds). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile kann als Spezialfall der Darstellung von F im Sinne von Satz 2.3 aufgefasst werden. Da die $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (vgl. Gleichung (2.12)) eine Orthonormalbasis für den Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)$ definieren, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(s, y) \tilde{N}(dy, ds) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (f_1, \delta_k)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \delta_k(s, y) \tilde{N}(dy, ds) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f_1, \delta_k)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta_k(s, y) \tilde{N}(dy, ds) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f_1, \delta_k)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{e_k}(\omega^N). \end{aligned}$$

Mit der Definition der δ_k , (2.12), folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_1, \delta_k)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{e_k} = \sum_{i,j \geq 1} \int_0^t \int_{\Lambda} \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds K_{e_z(i,j)}.$$

Dies entspricht der Darstellung von F nach Satz 2.4 mit

$$c_{e_z(i,j)} = \int_0^t \int_{\Lambda} \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds. \text{ Also ist}$$

$$F := \tilde{N}(\Lambda, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(s, y) \tilde{N}(dy, ds) = \sum_{i,j \geq 1} \int_0^t \int_{\Lambda} \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds K_{e_z(i,j)}. \quad (2.14)$$

Damit wurde der Zusammenhang zwischen den Sätzen 2.3 und 2.4 für einen Spezialfall nachgewiesen. Setzt man $F := \theta(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y \tilde{N}(dy, ds)$, dann gilt ganz analog

$$\theta(t) = \sum_{k \geq 1} m \int_0^t \xi_k(s) ds \cdot K_{e_z(k,1)}$$

mit $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R}, \pi)}$, $t > 0$.

Definition 2.4 (vgl. [ØkPr], Seite 9)

Für $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_{\alpha} K_{\alpha}$ definiert man die Norm

$$\|f\|_{0,k}^2 := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_{\alpha}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{k\alpha}$$

für ganzzahlige k . Dabei ist $(2\mathbb{N})^\gamma$ wie in Definition 2.2 gegeben. Sei $(S_N)_{0,k}$ die Menge an Funktionen f mit $\|f\|_{0,k} < \infty$. Seien außerdem $(S_N) := \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (S_N)_{0,k}$ mit der projektiven Topologie und $(S_N^*) := \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (S_N)_{0,-k}$ mit der induktiven Topologie ausgestattet. Dann heißt (S_N) der Hida-Raum der stochastischen Testfunktionen für Lévy-Prozesse aus reinen Sprungprozessen und (S_N^*) der Hida-Raum der Distributionen. (S_N^*) ist der Dualraum zu (S_N) unter der Dualitätsbeziehung

$$(G, f)_{(S_N^*), (S_N)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} b_\alpha a_\alpha \alpha! \quad (2.15)$$

mit $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha K_\alpha \in (S_N)$ und $G = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} b_\alpha K_\alpha \in (S_N^*)$.

Man sieht leicht, dass für die Hida-Räume (S_N) und (S_N^*) die Teilmengenbeziehung $(S_N) \subset L^2(\Omega_N, \mu_N) \subset (S_N^*)$ gilt.

Zum Abschluss des Kapitels werden zwei Ableitungsbegriffe eingeführt, welche für die Definition der Poisson-Integrale in (S_N^*) benötigt werden.

Sei $d\tilde{N}(y, t)$ das kompensierte Poisson-Maß, dann ist das „Weiße Rauschen“ $\dot{\tilde{N}}(y, t)$ von $d\tilde{N}(y, t)$ durch

$$\dot{\tilde{N}}(y, t) := \frac{d\tilde{N}(y, t)}{dt \times \pi(dy)} := \sum_{i,j \geq 1} \xi_i(t) p_j(y) K_{e_z(i,j)} \quad (2.16)$$

definiert (vgl. [ØkPr], Definition 3.5, Bemerkung 3.6(i)). Da $\delta^{\otimes e_z(i,j)} = \xi_i(t) p_j(y)$ ist, gilt mit [ØkPr], Bemerkung 3.6 (ii),

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\dot{\tilde{N}}(t, y)\|_{0,-q}^2 \pi(dy) dt = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n}\right)^q < \infty$$

für alle $q \geq 2$. Somit ist $\dot{\tilde{N}}(y, t) \in (S_N^*)$ fast überall auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Für $\theta(t)$ ist das „Weiße Rauschen“ $\dot{\theta}(t)$ durch

$$\dot{\theta}(t) := \frac{d}{dt} \theta(t) := m \sum_{k \geq 1} \xi_k(t) K_{e_z(k,1)}$$

definiert (vgl. [ØkPr], Bemerkung 3.6(iii)). Dabei ist $\dot{\theta}(t) \in (S_N^*)$ und es gilt die Beziehung

$$\dot{\theta}(t) = \int_{\mathbb{R}} y \dot{\tilde{N}}(y, t) \pi(dy).$$

Dieses Integral ist ein Bochner-Integral bezüglich π .

2.3 Das Wick-Produkt

Da im weiteren Verlauf der Arbeit das Wick-Itô-Skorohod-Integral der (fraktalen) Brownschen Bewegung und dessen Analogon für Sprungintegrale verwendet werden, welche beide das Wick-Produkt enthalten, werden die Wick-Produkte für (S_W^*) und (S_N^*) hier kurz eingeführt.

Für Gauß-Zufallsgrößen aus (S_W^*) ist das Wick-Produkt wie folgt definiert:

Definition 2.5 (vgl. [HoØkUbZh], Definition 2.4.1)

Seien $F_i := \sum_{\alpha_i \in \mathcal{I}} c_{\alpha_i, i} H_{\alpha_i} \in (S_W^*)$, $i = 1, 2$, dann ist das Wick-Produkt von F_1 und F_2 durch

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, 1} c_{\alpha_2, 2} H_{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (2.17)$$

definiert.

Satz 2.5 (vgl. [HoØkUbZh], Lemma 2.4.5 und Beispiel 2.4.6)

Aus der Definition des Wick-Produkts ergeben sich die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{Kommutativität} \quad & \langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_2, X_1 \rangle, \\ \text{Assoziativität} \quad & \langle X_1, \langle X_2, X_3 \rangle \rangle = \langle \langle X_1, X_2 \rangle, X_3 \rangle \text{ und} \\ \text{Distributivität} \quad & \langle X_1, X_2 \rangle + \langle X_1, X_3 \rangle = \langle X_1, (X_2 + X_3) \rangle. \end{aligned}$$

Ist mindestens ein Faktor, also X_1 oder X_2 , deterministisch, gilt außerdem $\langle X_1, X_2 \rangle = X_1 X_2$.

Für Elemente aus (S_N^*) gilt folgende analoge Definition des Wick-Produkts:

Definition 2.6 (vgl. [ØkPr] Definition 3.7)

Seien $F_i := \sum_{\alpha_i \in \mathcal{I}} c_{\alpha_i, i} K_{\alpha_i} \in (S_N^*)$, $i = 1, 2$, dann ist das Wick-Produkt von F_1 und F_2 durch

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, 1} c_{\alpha_2, 2} K_{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (2.18)$$

gegeben.

Bemerkung 2.1

Analog zum Wick-Produkt (S_W^*) ist auch das Wick-Produkt in (S_N^*) kommutativ, assoziativ, distributiv und stimmt mit dem normalen Produkt überein, wenn mindestens einer der Faktoren deterministisch ist.

Ist $X_i = X$ für $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ und X ein Element aus (S_W^*) oder (S_N^*) , dann gelten folgende Notationen:

- $\langle X^n \rangle := \langle X, \dots, X \rangle = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ (vgl. [HoØkUbZh], Gleichung (2.4.7), für (S_W^*) und $[\text{Øk}]$, Theorem 4.7, für Lévy-Sprungprozesse) und
- $\langle \exp\{X\} \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle X^i \rangle}{i!}$. $\langle \exp\{X\} \rangle$ wird als Wick-Exponential bezeichnet (vgl. [HoØkUbZh], Beispiel 2.6.15, für (S_W^*) und $[\text{Øk}]$, Theorem 4.7, für Lévy-Sprungprozesse).

2.4 Wick-Itô-Skorohod-Integrale für die (fraktale) Brownsche Bewegung und das (fraktale) kompen-sierte Poisson-Maß

In diesem Abschnitt werden die später verwendeten stochastischen Integrale definiert. Außerdem wird ein Kern eingeführt, der sowohl für die stetigen als auch unstetigen Prozesse einen Zusammenhang zwischen den fraktalen und den nichtfraktalen Prozessen herstellt, sodass man das fraktale Integral auf das gewöhnliche Integral zurückführen kann. Mit diesem Kern können insbesondere die fraktale Brownsche Bewegung über die Brownsche Bewegung und ein fraktales kompensiertes Poisson-Maß über ein kompensiertes Poisson-Maß definiert werden.

2.4.1 Das Wick-Itô-Skorohod-Integral für die (fraktale) Brownsche Bewegung

Zum Lösen stochastischer Integralgleichungen mit fraktalen Rausch- beziehungsweise Sprungprozessen werden spezielle stochastische Integrale benötigt. Das Wick-Itô-Skorohod-Integral (WIS-Integral) ist für die Betrachtungen der späteren Kapitel als Integral bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung geeignet.

Im Folgenden seien $(B(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozess, wie in Gleichung (2.5) definiert, und $(W(t))_{t \geq 0}$ das „Weiße Rauschen“ aus Gleichung (2.6).

Definition 2.7

Sei $Y : \mathbb{R} \rightarrow (S_W^*)$ und der stochastische Prozess $\langle Y(t), W(t) \rangle$ erfülle die Bedingungen von Definition 2.3, dann ist das WIS-Integral von $Y(t)$ bezüglich der Brownschen Bewegung $B(t)$ durch

$$\int_{\mathbb{R}} Y(t) dB(t) := \int_{\mathbb{R}} \langle Y(t), W(t) \rangle dt$$

definiert.

Satz 2.6 (vgl. [HoØkUbZh], Lemma 2.5.7)

Sei $Y(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t) H_\alpha \in (S_W^*)$ für alle t und gelte

$C := \sup_\alpha \{\alpha! \|c_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}, \lambda)}^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha}\} < \infty$ für ein $q < \infty$, dann ist das WIS-Integral über $Y(t)$ wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Y(t) dB(t) &:= \int_{\mathbb{R}} \langle Y(t), W(t) \rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \left\langle \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t) H_\alpha, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) H_{e_k} \right\rangle dt \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^{\infty} (c_\alpha, \xi_k)_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)} H_{\alpha+e_k}. \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft dieses Integrals wird im folgenden Satz beschrieben:

Satz 2.7 ([HoØkUbZh], Lemma 2.6.16)

Sei $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$, dann gilt:

$$\left\langle \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(s) dB(s) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(s) dB(s) - \frac{1}{2} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \lambda^n)}^2 \right\}.$$

Im Abschnitt 2.1 wurde nur der Fall des Wiener-Prozesses, das heißt $H = \frac{1}{2}$, beschrieben. In der Folge werden Integralgleichungen bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung betrachtet.

Ein Gauß-Prozess $B^H(t)$ mit Hurst-Index $0 < H < 1$ heißt fraktale Brownsche Bewegung, falls $B^H(0) = E[B^H(t)] = 0$ und $E[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$ gelten.

Definition 2.8 (vgl. [BiØkSuWa], Gleichungen (3.8) bis (3.10))

Sei $S(\mathbb{R})$ der Schwartzsche Raum. Sei weiter M ein Operator auf Funktionen $f \in S(\mathbb{R})$ mit

$$Mf(u) := \begin{cases} C_H \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u-v)-f(u)}{|v|^{\frac{3}{2}-H}} dv & \text{für } H < \frac{1}{2}, \\ f(u) & \text{für } H = \frac{1}{2} \text{ und} \\ C_H \int_{\mathbb{R}} \frac{f(v)}{|v-u|^{\frac{3}{2}-H}} dv & \text{für } H > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei C_H durch $\frac{\sqrt{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}}{2\Gamma(H-\frac{1}{2})\cos(\frac{1}{2}\pi(H-\frac{1}{2}))}$ definiert ist. Dann ist $(M^{-1}\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums $L_H^2(\mathbb{R}, \lambda)$, welcher als Vervollständigung von $S(\mathbb{R})$ bezüglich des Skalarprodukts:

$$(f, g)_{L_H^2(\mathbb{R}, \lambda)} := (Mf, Mg)_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)} = \int_{\mathbb{R}} Mf(u)Mg(u) du \quad (2.19)$$

definiert ist.

Zu guter Letzt sei die Funktion $M_{[s,t]}f$ durch

$$M_{[s,t]}f(\cdot) = \begin{cases} M(I_{[s,t]}(\cdot)f(\cdot)) & \text{für } t \geq s \\ M(-I_{[t,s]}(\cdot)f(\cdot)) & \text{für } t < s \end{cases} \quad (2.20)$$

mit Indikatorfunktion I definiert.

Aus der Definition des Hilbert-Raums $L^2_H(\mathbb{R}, \lambda)$ folgt

$$L^2_H(\mathbb{R}, \lambda) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; Mf \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L^2_H(\mathbb{R}, \lambda)} < \infty\}. \quad (2.21)$$

Alternativ kann man den Kern M auch durch eine Charakterisierung mittels Fourier-Transformation definieren (vgl. [BiØkSuWa], Definition 3.1).

Mit Definition 2.8 lässt sich die fraktale Brownsche Bewegung $B^H(t)$ über die Chaosenwicklung

$$B^H(t) = (\omega^W, M1_{[0,t]}(S_W^*), (S_W)) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t M\xi_k(s) ds H_{e_k}(\omega^W)$$

darstellen (vgl. [BiØkSuWa], Beispiel 3.3). Für die Prozesse $B^H : \mathbb{R} \rightarrow (S_W^*)$ und $Y : \mathbb{R} \rightarrow (S_W^*)$ mit $Y(t) := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t) H_\alpha$ erhält man mit Definition 2.5

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Y(t) dB^H(t) &:= \int_{\mathbb{R}} \langle Y(t), W^H(t) \rangle dt = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(s) M\xi_k(s) ds H_{\alpha+e_k} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} M c_\alpha(s) \xi_k(s) ds H_{\alpha+e_k} = \int_{\mathbb{R}} \langle MY(t), W(t) \rangle dt =: \int_{\mathbb{R}} MY(t) dB(t). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit in (S_W^*) bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung über Definition 2.7 definiert, wobei hier $MY(t)$ den Integranden darstellt (vgl. [BiØkSuWa], Definition 3.4, Proposition 5.2 und Bemerkung 3.7).

Eine ausführlichere Beschreibung des fraktalen Falls einschließlich einer Itô-Formel und der Herleitung der Itô-Isometrie des fraktalen WIS-Integrals findet man unter anderem in [BiØkSuWa].

2.4.2 Integrale für Sprungprozesse

In diesem Abschnitt werden die stochastischen Integrale für Sprungprozesse in Anlehnung an Øksendal und Proske ([ØkPr], Seite 10 ff.) eingeführt.

Aus Satz 2.3, Abschnitt 2.2, ist bekannt, dass für $F \in L^2(\Omega_N, \mu_N)$ eine eindeutig be-

stimmte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$ mit

$$F = E_{\mu_N}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$$

existiert.

Definition 2.9 (vgl. [ØkPr], Definition 3.9)

Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Zufallsfeld mit $E_{\mu_N}[F(t, y)]^2 < \infty$ für alle t und y , welches durch die Chaostwicklung

$$F(t, y) := \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t, y))$$

für $f_n(\cdot, t, y) \in \hat{L}^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n, (\lambda \times \pi)^n)$, $n \geq 1$, $t, y \in \mathbb{R}$ und $I_0(f_0(t, y)) = E_{\mu_N}[F(t, y)]$ definiert ist. Sei weiter $\hat{f}_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1})$ die symmetrische Erweiterung von $f_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1})$ bezüglich der Variablen $(t_1, y_1), \dots, (t_{n+1}, y_{n+1})$ mit

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)! \|\hat{f}_n\|_{L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{n+1}, (\lambda \times \pi)^{n+1})}^2 < \infty.$$

Dann ist das Skorohod-Integral für Sprungprozesse als ein Element des $L^2(\Omega_N, \mu_N)$ durch

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \delta \tilde{N}(y, t) := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\hat{f}_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}))$$

definiert mit

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \delta \tilde{N}(y, t) \right\|_{L^2(\Omega_N, \mu_N)}^2 = \sum_{n \geq 0} (n+1)! \|\hat{f}_n\|_{L^2((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{n+1}, (\lambda \times \pi)^{n+1})}^2.$$

Stochastische Integrale auf (S_N^*) können folgendermaßen definiert werden:

Definition 2.10 (vgl. [ØkPr], Definition 3.11)

Ein verallgemeinertes Zufallsfeld $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (S_N^*)$ ist (S_N^*) -integrierbar, falls $(Z(\cdot), \psi)_{(S_N^*), (S_N)} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)$ für alle $\psi \in (S_N)$ gilt, wobei die duale Abbildung $(\cdot, \cdot)_{(S_N^*), (S_N)}$ mit Gleichung (2.15) definiert ist. Dann ist das (S_N^*) -Integral von Z , welches mit $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Z(t, y) \pi(dy) dt$ bezeichnet wird, ein eindeutiges Element in (S_N^*) , sodass

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Z(t, y) \pi(dy) dt, \psi \right)_{(S_N^*), (S_N)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (Z(t, y), \psi)_{(S_N^*), (S_N)} \pi(dy) dt$$

für alle $\psi \in (S_N)$ gilt.

Satz 2.8 (vgl. [ØkPr], Lemma 3.13)

Sei $F(t, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t, y) K_\alpha \in (S_N^*)$ für alle (t, y) mit

$$L := \sup_{\alpha} \{ \|c_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \} < \infty$$

für mindestens ein $q < \infty$. Dann ist $\langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \rangle$ (S_N^*) -integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \rangle \pi(dy) dt = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (c_\alpha, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{\alpha + e_z(i, j)}.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 6.2.1.

Bemerkung 2.2

Für das stochastische Integral $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \rangle \pi(dy) dt$ wird im Folgenden auch die verkürzte Notation $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) d\tilde{N}(y, t)$ verwendet.

Bemerkung 2.3 (vgl. [ØkPr], Bemerkung 3.14)

Die Bedingungen von Satz 2.8 sind erfüllt, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E_{\mu_N} [F(t, y)]^2 \pi(dy) dt < \infty \tag{2.22}$$

gilt.

Bemerkung 2.4

Mit der Bedingung

$$L := \sup_{\alpha} \{ \|c_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \} < \infty$$

folgt insbesondere für alle $\alpha \in \mathcal{I}$ und $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y)| \pi(dy) dt \right)^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |c_\alpha(t, y)| |\xi_i(t) p_j(y)| \pi(dy) dt \right)^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c_\alpha^2(t, y) \pi(dy) dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \xi_i^2(t) p_j^2(y) \pi(dy) dt \right) \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\ &= \|c_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \leq L. \end{aligned}$$

Also ist $|c_\alpha \xi_i p_j|$ bezüglich des Produktmaßes $\lambda \times \pi$ für alle $\alpha \in \mathcal{I}$ und $i, j \in \mathbb{N}$ integrierbar und somit der Satz von Fubini anwendbar. Das heißt, es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \pi(dy) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) dt \pi(dy).$$

Definition 2.11 ([Ma5], Definition 1.7)

Die vorhersagbare σ -Algebra ist die σ -Algebra \mathcal{F} , welche auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch alle reellwertigen adaptierten linksseitig stetigen Prozesse erzeugt wird. Eine Abbildung $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, welche \mathcal{F} -messbar ist, wird als vorhersagbarer Prozess bezeichnet.

Bemerkung 2.5

Der Definitionsbereich für die Zeit kann in der Definition der Vorhersagbarkeit von \mathbb{R}_+ auf \mathbb{R} erweitert werden.

Aus der Definition der Vorhersagbarkeit und der Erweiterung des Definitionsbereichs der Zeit auf ganz \mathbb{R} folgt, dass jeder adaptierte Prozess mit stetigen Trajektorien vorhersagbar ist, da eine stetige Funktion insbesondere linksseitig stetig ist.

Satz 2.9 (vgl. [ØkPr], Proposition 3.10)

Sei $F \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega_N, \lambda \times \pi \times \mu_N)$ ein vorhersagbarer Prozess. Dann ist F Skorohod- und Itô-integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \delta \tilde{N}(y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \tilde{N}(dy, dt), \quad (2.23)$$

wobei das stochastische Integral der rechten Seite als Itô-Integral für das kompenzierte reine Lévy-Sprungmaß zu verstehen ist.

Satz 2.10 (vgl. [ØkPr], Lemma 3.15)

Wenn $F(t, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t, y) K_\alpha \in (S_N^*)$ Skorohod-integrierbar ist und die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E_{\mu_N}[F(t, y)]^2 \pi(dy) dt < \infty$ erfüllt, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \delta \tilde{N}(y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(t, y), \dot{\tilde{N}}(y, t) \right\rangle \pi(dy) dt.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 6.2.2

Abschließend wird in diesem Abschnitt eine verallgemeinerte Ableitung des Integrals $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(s, y), \dot{\tilde{N}}(y, s) \right\rangle \pi(dy) ds$ als Funktion $\mathbb{R}_+ \rightarrow (S_N^*)$ bezüglich der Zeit t in Anlehnung an Øksendal und Proske ([ØkPr], Seite 20) eingeführt.

Definition 2.12

Sei $F(t, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t, y) K_\alpha \in (S_N^*)$ für alle (t, y) und erfülle die Bedingungen aus Satz 2.8. Seien weiter $c_\alpha(\cdot, y) \in C(\mathbb{R}_+, \lambda)$ für alle $y \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{I}$. Dann ist die Ableitung von $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(s, y), \dot{\tilde{N}}(y, s) \right\rangle \pi(dy) ds$ bezüglich der Zeit t als Abbildung $\mathbb{R}_+ \rightarrow (S_N^*)$ mit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(s, y), \dot{\tilde{N}}(y, s) \right\rangle \pi(dy) ds \\ & := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(s, y) \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds K_{\alpha+e_z(i,j)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

definiert, falls die rechte Seite existiert. Die Notation $\frac{\partial}{\partial t}$ verdeutlicht hierbei, dass die Ableitung im Sinne des C^1 angewendet wird, während $\frac{d}{dt}$ die distributionstheoretische Ableitung bezeichnet.

Bemerkung 2.6

Da die c_α bezüglich der Zeit als stetig vorausgesetzt werden und die Hermite-Funktionen ξ_i ebenfalls stetig sind, gilt mit Definition 2.12

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle F(s, y), \dot{N}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(s, y) \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds K_{\alpha+e_z(i,j)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \pi(dy) K_{\alpha+e_z(i,j)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \rangle \pi(dy), \end{aligned}$$

falls die rechte Seite existiert. Da $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle F(s, y), \dot{N}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \in (S_N^*)$ ist, ist $\int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \rangle \pi(dy) \in (S_N^*)$ für fast alle t .

2.4.3 Fraktale Erweiterungen zu Lévy-Sprungprozessen

Es gibt verschiedene Varianten einen Lévy-Sprungprozess zu erweitern, um einen fraktalen Prozess mit Gedächtnis zu erhalten. Nick Laskin [La] hat eine solche Erweiterung zum Beispiel für den Poisson-Prozess eingeführt, indem er die Verteilungsfunktion des Poisson-Prozesses mit

$$P_d(n, t) := \frac{(\zeta t^d)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{(-\zeta t^d)^k}{\Gamma(d(n+k)+1)},$$

$0 < d \leq 1$, verallgemeinert hat. Bei $d = 1$ erhält man hier den gewöhnlichen homogenen Poisson-Prozess.

Andere Möglichkeiten für eine fraktale Erweiterung der Lévy-Sprungprozesse beruhen auf Transformationen mit fraktalen Kernen. Bender, Lindner und Schicks [BeLiSc] oder Marquardt [Ma3] führen fraktale Erweiterungen zu Lévy-Prozessen der Gestalt

$$\theta^H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} \left((t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) \theta(ds)$$

oder

$$\theta^H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} \left(|t-s|^{H-\frac{1}{2}} - |s|^{H-\frac{1}{2}} \right) \theta(ds)$$

ein, wobei nur der Fall $H > \frac{1}{2}$ betrachtet wird. In dieser Arbeit wird ein Hurst-Index $H \in (0, 1)$ berücksichtigt.

Da in dieser Arbeit der White-Noise-Kalkül angewandt wird und die fraktale Brownsche Bewegung in diesem Kalkül mit dem Kern M erzeugt wird, bietet es sich an, auch für die fraktale Erweiterung der Lévy-Sprungprozesse den Kern M aus Definition 2.8 zu verwenden.

Definition 2.13

Sei M der Operator aus Definition 2.8. Dann sind die fraktalen Erweiterungen $\tilde{N}^H(\Lambda, t)$ und $\theta^H(t)$ der reinen Lévy-Sprungprozesse $\tilde{N}(\Lambda, t)$, Gleichung (2.10), und $\theta(t)$, Gleichung (2.8), durch

$$\tilde{N}^H(\Lambda, t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Lambda} M_{[0,t]}(s) \tilde{N}(dy, ds) \tag{2.25}$$

und

$$\theta^H(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s)y \tilde{N}(dy, ds) \tag{2.26}$$

definiert, wobei $\Lambda \subset \mathbb{R}^0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Borel-Menge darstellt, in dessen Abschluss die 0 nicht enthalten ist. $M_{[0,t]}(s)$ steht hier für eine verkürzte Notation von $M(1_{[0,t]})(s)$. $1_{[0,t]}$ entspricht der Funktion, welche in Gleichung (2.1) eingeführt wurde.

Bemerkung 2.7

Da sich der Kern M nur auf die zeitabhängige Komponente bezieht, gilt für $\tilde{N}^H(\Lambda, t)$

$$\begin{aligned} \tilde{N}^H(\Lambda, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Lambda} M_{[0,t]}(s) \tilde{N}(dy, ds) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Lambda} M_{[0,t]}(s) d\tilde{N}(y, s) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s) 1_{\Lambda}(y) \xi_i(s) p_j(y) \pi(dy) ds K_{e_z(i,j)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{\Lambda}(y) p_j(y) \pi(dy) \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s) \xi_i(s) ds K_{e_z(i,j)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\Lambda} p_j(y) \pi(dy) \int_0^t M \xi_i(s) ds K_{e_z(i,j)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Lambda} M(\xi_i(s)) p_j(y) \pi(dy) ds K_{e_z(i,j)}, \end{aligned}$$

wobei $\int_{\mathbb{R}} \int_{\Lambda} M_{[0,t]}(s) d\tilde{N}(y, s)$, wie in Bemerkung 2.2 beschrieben, eine verkürzte Notation

für $\int_{\mathbb{R}} \int_{\Lambda} \langle M_{[0,t]}(s), \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) ds$ darstellt. Analog hierzu kann man zeigen, dass

$$\theta^H(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]}(s)) y \tilde{N}(dy, ds) = \sum_{i=1}^{\infty} m \int_0^t M(\xi_i(s)) ds K_{e_z(i,1)}$$

mit $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R}, \pi)}$ ist.

Bemerkung 2.8

He hat in seiner Publikation „Stochastic Calculus for Fractional Lévy Processes“, [He], den Lévy-Prozess

$$X(t) = \sigma B(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^0} y \tilde{N}(dy, ds)$$

mit $\mathbb{R}^0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet, wobei er die 0 auf Grund seiner Bedingung $\pi(\{0\}) = 0$ in seine Integraldefinition mit aufnehmen konnte.

Dieser Prozess wurde in [He] ebenfalls mit dem Kern M für $0 < H < 1$ zu einem fraktalen Prozess transformiert und man erhält die Gleichung (2.3) aus [He]

$$X^H(t) := \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s) X(ds) = \frac{C_H}{H - \frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left((t-s)|t-s|^{H-\frac{3}{2}} + s|s|^{H-\frac{3}{2}} \right) X(ds).$$

Setzt man $\sigma = 0$ und bedenkt, dass M nur die zeitabhängige Komponente beeinflusst, erhält man auch für $\theta^H(t)$

$$\begin{aligned} \theta^H(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s) y \tilde{N}(dy, ds) = \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s) \theta(ds) \\ &= \frac{C_H}{H - \frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left((t-s)|t-s|^{H-\frac{3}{2}} + s|s|^{H-\frac{3}{2}} \right) \theta(ds). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Darüber hinaus lassen sich sämtliche Erkenntnisse, welche He für $X^H(t)$ erhalten hat, wie die Differenzierbarkeit von $X^H(t)$ im verallgemeinerten Distributionsraum sowie eine erweiterte fraktale Variante des Satzes 2.10, auf $\theta^H(t)$ übertragen.

Als Nächstes wird das „Weiße Rauschen“ des fraktalen kompensierten Poisson-Zufallsmaßes $d\tilde{N}^H(y, t)$ eingeführt und einige Eigenschaften des „Weißen Rauschens“ hergeleitet.

Definition 2.14

Das „Weiße Rauschen“ des fraktalen kompensierten Poisson-Zufallsmaßes $d\tilde{N}^H(y, t)$ sei durch

$$\dot{\tilde{N}}^H(y, t) := \sum_{i,j \geq 1} M \xi_i(t) p_j(y) K_{e_z(i,j)}$$

definiert.

Satz 2.11

Das Weiße Rauschen des fraktalen kompensierten Poisson-Zufallsmaßes $d\tilde{N}^H(y, t)$ ist für fast alle $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus (S_N^*) .

Beweis:

Für den Beweis des Satzes wird gezeigt, dass ein $q \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}} \|\dot{\tilde{N}}^H(y, t)\|_{0, -q}^2 \pi(dy) = \sum_{i, j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (M\xi_i(t))^2 p_j^2(y) \pi(dy) (2z(i, j))^{-q} < \infty$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Elliot und van der Hoek [ElHo] erhalten im Beweis von Lemma 4.1 $Ci^{-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{H}{2}}$ als obere Schranke für $|M\xi_i(t)|$ für alle t . Mit $z(i, j) := j + \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$ erhält man schließlich $|M\xi_i(t)| \leq Ci^{-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{H}{2}} \leq Cz(i, j)^{-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{H}{2}}$. Mit $\int_{\mathbb{R}} p_j^2(y) \pi(dy) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung für $q \geq 2 \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{H}{2}\right) + 2$.

□

Wie im Falle der fraktalen Brownschen Bewegung werden auch für das Maß $d\tilde{N}^H(y, t)$ Bedingungen zur Integrierbarkeit im Sinne von (S_N^*) eingeführt.

Satz 2.12

Sei $F(t, y) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_{\alpha}(t, y) K_{\alpha} \in (S_N^*)$ für alle (t, y) mit

$$L := \sup_{\alpha} \{ \|c_{\alpha}\|_{L^2_H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \} < \infty$$

für mindestens ein $q < \infty$. Dann ist $\langle F(t, y), \dot{\tilde{N}}^H(y, t) \rangle$ (S_N^*) -integrierbar mit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{\tilde{N}}^H(y, t) \rangle dt \pi(dy) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c_{\alpha}(t, y) M(\xi_i(t) p_j(y)) dt \pi(dy) K_{\alpha + e_z(i, j)}. \end{aligned}$$

Beweis:

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle F(t, y), \dot{\tilde{N}}^H(y, t) \rangle dt \pi(dy) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c_{\alpha}(t, y) M(\xi_i(t) p_j(y)) dt \pi(dy) K_{\alpha + e_z(i, j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} M(c_{\alpha}(t, y)) \xi_i(t) p_j(y) dt \pi(dy) K_{\alpha+e_z(i,j)} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (M c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{\alpha+e_z(i,j)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle MF(t, y), \dot{N}(t, y) \right\rangle \pi(dy) dt. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Da $\|c_{\alpha}\|_{L^2_H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 = \|M c_{\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2$ ist, folgt die Behauptung mit Satz 2.8 und die Anwendbarkeit des Satzes von Fubini mit Bemerkung 2.4.

□

Bemerkung 2.9

Das (S_N^*) -Integral hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & E_{\mu_N} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(t, y), \dot{N}^H(y, t) \right\rangle dt \pi(dy) \right] = 0 \text{ für} \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(t, y), \dot{N}^H(y, t) \right\rangle dt \pi(dy) \in L^2(\Omega_N, \mu_N) \text{ und}
\end{aligned}$$

(ii) für ein deterministisches $F \in L^2_H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)$ gilt mit Satz 2.12:

$$\begin{aligned}
& E_{\mu_N} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(t, y), \dot{N}^H(y, t) \right\rangle dt \pi(dy) \right]^2 \\
&= E_{\mu_N} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle MF(t, y), \dot{N}(y, t) \right\rangle dt \pi(dy) \right]^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (MF(t, y))^2 dt \pi(dy).
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Eine lineare homogene stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und kompensiertem Poisson-Zufallsmaß

3.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer linearen homogenen stochastischen Integralgleichung

In diesem Abschnitt wird eine stochastische Integralgleichung, welche sowohl ein fraktales WIS-Integral als auch ein Integral bezüglich des Poisson-Zufallsmaßes beinhaltet, auf Existenz und Eindeutigkeit hin untersucht. Hierfür sind allerdings noch einige Vorbetrachtungen erforderlich.

Sei

$$\begin{aligned}(\Omega, \mathcal{F}, P) &:= (S'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(S'(\mathbb{R})), \mu) \\ &:= (S'_W(\mathbb{R}) \otimes S'_N(\mathbb{R}), \mathcal{B}(S'_W(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{B}(S'_N(\mathbb{R})), \mu_W \otimes \mu_N),\end{aligned}$$

wobei $(S'_W(\mathbb{R}), \mathcal{B}(S'_W(\mathbb{R})), \mu_W)$ und $(S'_N(\mathbb{R}), \mathcal{B}(S'_N(\mathbb{R})), \mu_N)$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsräume aus Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.2 sind. Für alle folgenden Betrachtungen wird die Unabhängigkeit der Elemente dieser beiden Wahrscheinlichkeitsräume entscheidend sein, das heißt, $H_\alpha(\omega^W)$ und $K_\beta(\omega^N)$ werden im Folgenden immer für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ als stochastisch unabhängig voneinander vorausgesetzt.

Ein stochastischer kanonischer Lévy-Prozess $X(t)$ ist durch das Tripel (γ, σ, π) mit

$$X(t, \omega) := X(t, \omega^W, \omega^N) := \gamma t + \sigma B(t) + \theta(t)$$

definiert.

Definition 3.1

Sei $(S)_{0,k_1,k_2} := (S_W)_{0,k_1} \otimes (S_N)_{0,k_2}$ die Menge aller Zufallsgrößen F mit der Darstellung

$$F(\omega) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} H_\alpha(\omega^W) K_\beta(\omega^N)$$

und der Eigenschaft

$$\|F\|_{0,k_1,k_2}^2 := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}^2 \alpha! \beta! (2\mathbb{N})^{k_1 \alpha} (2\mathbb{N})^{k_2 \beta} < \infty.$$

Dabei sind $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Der Raum $(S) := \bigcap_{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (S)_{0, k_1, k_2}$ sei mit der projektiven Topologie ausgestattet. Sei weiter $(S^*) := \bigcup_{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (S)_{0, -k_1, -k_2}$ mit der induktiven Topologie ausgestattet. Dann ist (S) die Lévy-Version des Hida-Raums für Testfunktionen und (S^*) die Lévy-Version des Hida-Raums für verallgemeinerte Distributionen und der Dualraum zu (S) . Die Dualität zwischen $F = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} a_{\alpha, \beta} H_\alpha K_\beta \in (S^*)$ und $f = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} b_{\alpha, \beta} H_\alpha K_\beta \in (S)$ wird durch die Darstellung

$$(F, f)_{(S), (S^*)} = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} a_{\alpha, \beta} b_{\alpha, \beta} \alpha! \beta!$$

charakterisiert.

Da der White-Noise-Kalkül im Allgemeinen nicht nur im Raum (S^*) sondern im größeren Raum $(S)_{-1}$ wirkt, wird im Folgenden der Raum $(S)_{-1}$ eingeführt. Anschließend werden das Wick-Produkt auf $(S)_{-1}$ und die Hermite-Transformation für Elemente des $(S)_{-1}$ definiert und wichtige Eigenschaften der Hermite-Transformation bewiesen.

Definition 3.2 (vgl. [HoØkUbZh], Definition 2.3.2)

Sei

$$(S)_{1,r,q} := \left\{ f = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} H_\alpha K_\beta \mid \|f\|_{(S)_{1,r,q}}^2 < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_{(S)_{1,r,q}}^2 := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}^2 (\alpha!)^2 (\beta!)^2 (2\mathbb{N})^{r\alpha} (2\mathbb{N})^{q\beta}.$$

Dann ist $(S)_{1,r,q}$ ein Hilbert-Raum mit dem inneren Produkt

$$(f, g)_{(S)_{1,r,q}} := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (c_{\alpha, \beta})(a_{\alpha, \beta})(\alpha!)^2(\beta!)^2(2\mathbb{N})^{r\alpha}(2\mathbb{N})^{q\beta} \quad (3.1)$$

für $g = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} a_{\alpha, \beta} H_{\alpha} K_{\beta} \in (S)_{1,r,q}$.

Sei weiter

$$(S)_{-1,-r,-q} := \left\{ F = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} b_{\alpha, \beta} H_{\alpha} K_{\beta} \mid \|F\|_{(S)_{-1,-r,-q}}^2 < \infty \right\}$$

mit

$$\|F\|_{(S)_{-1,-r,-q}}^2 := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} b_{\alpha, \beta}^2 (2\mathbb{N})^{-r\alpha} (2\mathbb{N})^{-q\beta},$$

dann ist $(S)_{-1,-r,-q}$ der Dualraum zu $(S)_{1,r,q}$, wobei die Dualität zwischen $(S)_{1,r,q}$ und $(S)_{-1,-r,-q}$ durch

$$(F, f)_{(S)_{-1,-r,-q}, (S)_{1,r,q}} = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} b_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} \alpha! \beta!$$

definiert ist. Außerdem gilt

$$\bigcap_{r, q \in \mathbb{N}} (S)_{1,r,q} := (S)_1 \subset (S) \subset L^2(\Omega, \mu) \subset (S^*) \subset (S)_{-1} =: \bigcup_{r, q \in \mathbb{N}} (S)_{-1,-r,-q}.$$

Bemerkung 3.1

Die Hilbert-Raum-Eigenschaft von $(S)_{1,r,q}$ beziehungsweise $(S)_{-1,-r,-q}$ erhält man auf Grund der strukturellen Ähnlichkeit zum gewichteten vektorwertigen L^2 mit den Gewichten $(\alpha!)^2(\beta!)^2(2\mathbb{N})^{r\alpha}(2\mathbb{N})^{q\beta}$ beziehungsweise $(2\mathbb{N})^{-r\alpha}(2\mathbb{N})^{-q\beta}$.

Es folgt die Definition des Wick-Produkts und anschließend die Definition der zugehörigen Wick-Inversen für den Produktraum $(S)_{-1}$:

Definition 3.3 (Wick-Produkt in $(S)_{-1}$)

Seien F_1 und F_2 zwei stochastische Prozesse mit $F_i := \sum_{\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{I}} c_{\alpha_i, \beta_i, i} H_{\alpha_i} K_{\beta_i} \in (S)_{-1}$, $i = 1, 2$. Dann ist das Wick-Produkt $\langle F_1, F_2 \rangle$ durch

$$\langle F_1, F_2 \rangle := \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, \beta_1, 1} c_{\alpha_2, \beta_2, 2} H_{\alpha_1 + \alpha_2} K_{\beta_1 + \beta_2} \quad (3.2)$$

definiert.

Definition 3.4 (vgl. [HoØkUbZh], Beispiel 2.6.15 (iii))

Sei $E[X] \neq 0$, dann wird die Wick-Inverse $\langle X \rangle^{-1} \in (S)_{-1}$ von $X \in (S)_{-1}$ durch die

Gleichung

$$\langle X, \langle X \rangle^{-1} \rangle = 1$$

charakterisiert.

Bemerkung 3.2

Man sieht leicht, dass sich durch geschickte Wahl der Koeffizienten die Definitionen 2.5 und 2.6 als Spezialfälle von Definition 3.3 ergeben. Wählt man $c_{\alpha_1, \beta_1, 1} = c_{\alpha_2, \beta_2, 2} = 0$ für $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \langle F_1, F_2 \rangle &= \left\langle \sum_{\alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, \beta_1, 1} H_{\alpha_1} K_{\beta_1}, \sum_{\alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_2, \beta_2, 2} H_{\alpha_2} K_{\beta_2} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\beta_1 \in \mathcal{I}} c_{0, \beta_1, 1} K_{\beta_1}, \sum_{\beta_2 \in \mathcal{I}} c_{0, \beta_2, 2} K_{\beta_2} \right\rangle = \sum_{\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{0, \beta_1, 1} c_{0, \beta_2, 2} K_{\beta_1 + \beta_2} \\ &= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, \beta_1, 1} c_{\alpha_2, \beta_2, 2} H_{\alpha_1 + \alpha_2} K_{\beta_1 + \beta_2}. \end{aligned}$$

Analoges ergibt sich für die Wahl $c_{\alpha_1, \beta_1, 1} = c_{\alpha_2, \beta_2, 2} = 0$ für $\beta_1, \beta_2 \neq 0$.

Die Hermite-Transformationen von $(S)_{-1}$ -wertigen Zufallsgrößen werden in der nächsten Definition eingeführt. Diese Definition ist eine Kombination der Hermite-Transformation aus [HoØkUbZh], Definition 2.6.1, für den Fall $(S_W)_{-1}$ -wertiger Zufallsgrößen und der Hermite-Transformation aus [Pr2], Gleichung (2.34), für den Fall eines Poisson-Zufallsmaßes. Für die folgenden Anwendungen ist es oft nötig, den Definitionsbereich der Hermite-Transformationen einzugrenzen. Diese Eingrenzung ergibt sich wiederum als eine Kombination aus Definition 2.6.4 aus [HoØkUbZh] für den Fall $(S_W)_{-1}$ -wertiger Zufallsgrößen und Gleichung (2.35) aus [Pr2] für den Fall eines Poisson-Zufallsmaßes.

Definition 3.5 (Hermite-Transformation)

Sei $F := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} H_{\alpha} K_{\beta} \in (S)_{-1}$. Dann ist die Hermite-Transformation von F durch

$$\mathcal{H}(F)(z) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} z_W^{\alpha} z_N^{\beta} \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

definiert, falls die rechte Seite konvergiert. $z_W := (z_{W,1}, \dots, z_{W,n}, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $z_N := (z_{N,1}, \dots, z_{N,n}, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ seien dabei zwei Folgen komplexer Zahlen mit $z_W^{\alpha} := z_{W,1}^{\alpha_1} z_{W,2}^{\alpha_2} z_{W,3}^{\alpha_3} \dots$ und $z_N^{\beta} := z_{N,1}^{\beta_1} z_{N,2}^{\beta_2} z_{N,3}^{\beta_3} \dots$. Für $\alpha_j = 0$ gelte $z_{W,j}^{\alpha_j} = 1$. Analog sei für $\beta_i = 0$ $z_{N,i}^{\beta_i} = 1$.

Seien $0 < R, q < \infty$, dann sei die Kugel $\mathcal{B}_q(R)$ durch

$$\mathcal{B}_q(R) := \left\{ \bar{z} := (z_1, \dots, z_n, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{\alpha \in \mathcal{I}, \alpha \neq 0} |\bar{z}^\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{q\alpha} < R^2 \right\} \quad (3.4)$$

definiert. Daraus folgt insbesondere $\mathcal{B}_Q(r) \subset \mathcal{B}_q(R)$ für $q \leq Q$ und $r \leq R$.

Im Folgenden werden Proposition 2.6.6, die Lemmata 2.6.9, 2.6.10, Proposition 2.6.8, Lemma 2.8.2 sowie Theorem 2.8.1 aus [HoØkUbZh] auf den Raum $(S)_{-1}$ verallgemeinert. Im nächsten Satz wird $\mathcal{H}(\langle F, G \rangle)(z) = \mathcal{H}(F)(z)\mathcal{H}(G)(z)$ nachgewiesen. Die folgenden Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Hermite-Transformation einer Folge von Zufallsgrößen und der Konvergenz in $(S)_{-1}$ her. Beide sind entscheidend für den in diesem Abschnitt angestrebten Existenz- und Eindeutigkeitsatz, da sich mit diesen Eigenschaften eine Produktregel für das Wick-Produkt und ein Satz zum Vertauschen von Wick-Produkt und Integral beweisen lassen.

Satz 3.1 (vgl. [HoØkUbZh], Proposition 2.6.6)

Seien $F, G \in (S)_{-1}$, dann gilt

$$\mathcal{H}(\langle F, G \rangle)(z) = \mathcal{H}(F)(z)\mathcal{H}(G)(z) \quad (3.5)$$

für alle z , für die die rechte Seite existiert.

Beweis:

Sei $F := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, 1} H_\alpha K_\beta$ und $G := \sum_{\gamma, \delta \in \mathcal{I}} c_{\gamma, \delta, 2} H_\gamma K_\delta$. Mit der Definition des Wick-Produkts und Gleichung (3.3) gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\langle F, G \rangle)(z) &= \mathcal{H} \left(\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, 1} c_{\gamma, \delta, 2} H_{\alpha+\gamma} K_{\beta+\delta} \right) (z) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, 1} c_{\gamma, \delta, 2} z_W^{\alpha+\gamma} z_N^{\beta+\delta} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, 1} c_{\gamma, \delta, 2} z_W^\alpha z_W^\gamma z_N^\beta z_N^\delta \\ &= \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, 1} z_W^\alpha z_N^\beta \right) \left(\sum_{\gamma, \delta \in \mathcal{I}} c_{\gamma, \delta, 2} z_W^\gamma z_N^\delta \right) = \mathcal{H}(F)(z)\mathcal{H}(G)(z). \end{aligned}$$

□

Satz 3.2 ([HoØkUbZh], Lemma 2.6.9)

Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ein komplexwertiges analytisches Funktional mit $\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \mathcal{M}$. Dann ist $|c_k z^k| \leq \mathcal{M}$ für alle z mit $|z| \leq r$ und alle k .

Beweis:

Mit der Cauchy-Formel gilt

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|y|=r} \frac{f(y)}{(y-z)^{k+1}} dy$$

für $|z| < r$ und somit

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{r^k} \mathcal{M}.$$

Folglich ist

$$|c_k z^k| = \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| \leq \left| \frac{z^k}{r^k} \right| \mathcal{M} \leq \mathcal{M}$$

für alle z mit $|z| \leq r$.

□

Satz 3.3 (vgl. [HoØkUbZh], Lemma 2.6.10)

Sei $f(z_W, z_N) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} z_W^\alpha z_N^\beta$ eine komplexwertige analytische Funktion mit $n_W + n_N$ Variablen. Seien weiter $b_{W,1}, \dots, b_{W,n_W}, b_{N,1}, \dots, b_{N,n_N} > 0$ und $\delta_W, \delta_N > 0$ mit $|f(z_W, z_N)| \leq \mathcal{M}$ für alle $z_i \in \mathcal{B}_i := \{z_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,n_i}) \in \mathbb{C}^{n_i} ; b_{i,1}|z_{i,1}|^2 + \dots + b_{i,n_i}|z_{i,n_i}|^2 \leq \delta_i^2\}$, $i = W, N$. Dann gilt $|c_{\alpha, \beta} z_W^\alpha z_N^\beta| \leq \mathcal{M}$ für alle $z_i \in \mathcal{B}_i$ und alle α, β .

Beweis:

Der Beweis kann durch Induktion unter Verwendung von Satz 3.2 geführt werden. In Satz 3.2 wurden die Fälle $n_W = 1, n_N = 0$ und $n_W = 0, n_N = 1$ betrachtet. Untersucht man jetzt den Fall $n_W = n_N = 1$, dann ist $f(z_W, z_N) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j} z_W^i z_N^j =: \sum_{i=1}^{\infty} A_i(z_N) z_W^i$. Für ein festes z_N mit $b_{N,1}|z_N|^2 \leq \delta_N^2$ sei $g(z_W)$ durch

$$g(z_W) := \sum_{i=0}^{\infty} A_i(z_N) z_W^i \tag{3.6}$$

definiert für $(z_W, z_N) \in \mathcal{B}_W \times \mathcal{B}_N$. Mit Satz 3.2 ist $|A_i(z_N) z_W^i| \leq \mathcal{M}$.

Des Weiteren folgt mit $A_i(z_N) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z_N^j$, Gleichung (3.6) und Satz 3.2 $|c_{i,j} z_N^j| \leq \frac{\mathcal{M}}{|z_W^i|}$ und somit $|c_{i,j} z_W^i z_N^j| \leq \mathcal{M}$. Die weiteren Rekursionsschritte der Induktion erfolgen analog, wobei man nur darauf achten muss, zu welcher Kugel die im Induktionsschritt hinzukommende Variable gehört.

□

Satz 3.4 (vgl. [HoØkUbZh], Proposition 2.6.8)

Seien $g(z) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} z_W^\alpha z_N^\beta$, $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$ und z_W und z_N zwei formale Potenzreihen komplexer Zahlen in unendlich vielen Variablen. Außerdem soll gelten: $q_W, q_N < \infty$ und $\delta_W, \delta_N > 0$, sodass $g(z)$ konvergiert für $z_i \in \mathcal{B}_{q_i}(\delta_i)$, $i = W, N$. Schließlich sei $|g(z)| \leq \mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} < \infty$ für alle $z_i \in \mathcal{B}_{q_i}(\delta_i)$, $i = W, N$. Dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} |c_{\alpha, \beta}| |z_W^\alpha| |z_N^\beta| \leq \mathcal{M} A(q_W) A(q_N)$$

für alle $z_i \in \mathcal{B}_{3q_i}(\delta_i)$. $A(q_W)$ und $A(q_N)$ sind dabei durch

$$A(q_W) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha}$$

und

$$A(q_N) = \sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta}$$

für $q_W, q_N > 1$ definiert.

Beweis:

Seien q_W und q_N groß genug, sodass $\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha}$ und $\sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta}$ konvergieren. Mit dem Beweis von Satz 3.3 ist $|c_{\alpha, \beta} y_W^\alpha y_N^\beta| \leq \mathcal{M}$ für alle $(y_W, y_N) \in \mathcal{B}_{q_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_N}(\delta_N)$. Setzt man

$$y_{W,j} = z_{W,j} (2j)^{q_W} \tag{3.7}$$

und

$$y_{N,j} = z_{N,j} (2j)^{q_N} \tag{3.8}$$

mit $z \in \mathcal{B}_{3q_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{3q_N}(\delta_N)$, dann sind

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |y_W^\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{q_W \alpha} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |z_W^\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{3q_W \alpha} < \delta_W$$

und

$$\sum_{\beta \in \mathcal{I}} |y_N^\beta|^2 (2\mathbb{N})^{q_N \beta} = \sum_{\beta \in \mathcal{I}} |z_N^\beta|^2 (2\mathbb{N})^{3q_N \beta} < \delta_N.$$

$(y_W, y_N) \in \mathcal{B}_{q_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_N}(\delta_N)$ bleibt also mit dieser Wahl von z_W und z_N erfüllt. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, den Gleichungen (3.7) und (3.8) sowie Satz 3.3 folgt

somit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} |c_{\alpha, \beta}| |z_W^\alpha| |z_N^\beta| \\
& \leq \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}^2 |z_W^\alpha|^2 |z_N^\beta|^2 (2\mathbb{N})^{q_W \alpha} (2\mathbb{N})^{q_N \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}^2 |y_W^\alpha|^2 |y_N^\beta|^2 (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \mathcal{M} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_W \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_N \beta} = \mathcal{M} A(q_W) A(q_N).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.5 (vgl. [HoØkUbZh], Lemma 2.8.2)

$(S)_1$ ist ein nuklearer Raum. Das heißt, es gilt $(S)_{1, r_2, q_2} \subset (S)_{1, r_1, q_1}$ für $r_1 + 1 < r_2$ und $q_1 + 1 < q_2$, wobei die Einbettung als Hilbert-Schmidt-Operator beschrieben werden kann.

Beweis:

Nach Definition 3.2 ist $(S)_{1, r, q}$ ein Hilbert-Raum mit dem inneren Produkt (3.1).

Damit stellt die Familie von Funktionen

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta, r, q} := \frac{1}{\alpha! \beta!} (2\mathbb{N})^{-\frac{r\alpha}{2}} (2\mathbb{N})^{-\frac{q\beta}{2}} H_\alpha K_\beta$$

eine Orthonormalbasis auf $(S)_{1, r, q}$ dar. Per Definition von $(S)_1$ gilt

$$(S)_1 = \bigcap_{r, q=1}^{\infty} (S)_{1, r, q}.$$

Wenn $r_2 > r_1 + 1$ und $q_2 > q_1 + 1$ sind, folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} \|\mathcal{E}_{\alpha, \beta, r_2, q_2}\|_{(S)_{1, r_1, q_1}}^2 &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} \frac{1}{(\alpha! \beta!)^2} (2\mathbb{N})^{-r_2 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_2 \beta} (\alpha!)^2 (\beta!)^2 (2\mathbb{N})^{r_1 \alpha} (2\mathbb{N})^{q_1 \beta} \\
&= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-(r_2 - r_1) \alpha} (2\mathbb{N})^{-(q_2 - q_1) \beta} \\
&= \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-(r_2 - r_1) \alpha} \right) \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-(q_2 - q_1) \beta} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der letzten Zeile folgt mit [HoØkUbZh], Proposition 2.3.3.

□

Damit sind alle Hilfssätze, welche für den Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Hermite-Transformation einer Folge von Zufallsgrößen und der Konvergenz in $(S)_{-1}$ benötigt

werden, eingeführt und bewiesen. Der gesuchte Zusammenhang kann jetzt also hergeleitet werden.

Satz 3.6 (vgl. [HoØkUbZh], Theorem 2.8.1)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(B1): F_n konvergiert gegen F in $(S)_{-1}$,

(B2): Es existieren $\delta_W, \delta_N > 0$ und $q, r < \infty$, sodass $\mathcal{H}(F_n)(z)$ gleichmäßig gegen $\mathcal{H}(F)(z)$ konvergiert für alle $z = (z_W, z_N) \in \mathcal{B}_r(\delta_W) \times \mathcal{B}_q(\delta_N)$.

(B3): Es existieren $\delta_W, \delta_N > 0$ und $q, r < \infty$, sodass $\mathcal{H}(F_n)(z)$ punktweise beschränkt gegen $\mathcal{H}(F)(z)$ in $\mathcal{B}_r(\delta_W) \times \mathcal{B}_q(\delta_N)$ konvergiert.

Beweis:

(B1) \Rightarrow (B2):

$$\text{Mit (B1) gilt } \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n} H_\alpha K_\beta = F_n \rightarrow F = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta} H_\alpha K_\beta$$

in $(S)_{-1}$. $(S)_1$ ist nach Satz 3.5 ein nuklearer Raum. Da $(S)_{-1, -r, -q}$ der Dualraum von $(S)_{1, r, q}$ mit der Dualitätsbeziehung

$$(f, g)_{(S)_{-1}, (S)_1} := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (c_{\alpha, \beta}^f)(c_{\alpha, \beta}^g) \alpha! \beta!$$

ist, existieren zwei Zahlen r_0 und q_0 , sodass F_n gegen F in $(S)_{-1, -r_0, -q_0}$ konvergiert. Also existiert eine Konstante $\mathcal{M} > 0$ mit

$$\mathcal{M}^2 := \sup_n \{ \|F_n\|_{(S)_{-1, -r_0, -q_0}}^2 \} = \sup_n \left\{ \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n}^2 (2\mathbb{N})^{-r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_0 \beta} \right\} < \infty. \quad (3.9)$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(F_n)(z)| &= \left| \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n} z_W^\alpha z_N^\beta \right| \\ &= \left| \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n} (2\mathbb{N})^{-\frac{r_0 \alpha}{2}} (2\mathbb{N})^{-\frac{q_0 \beta}{2}} (2\mathbb{N})^{\frac{r_0 \alpha}{2}} (2\mathbb{N})^{\frac{q_0 \beta}{2}} z_W^\alpha z_N^\beta \right| \\ &\leq \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n}^2 (2\mathbb{N})^{-r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{q_0 \beta} (z_W^\alpha)^2 (z_N^\beta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n}^2 (2\mathbb{N})^{-r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{r_0 \alpha} (z_W^\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{q_0 \beta} (z_N^\beta)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der erste Faktor der rechten Seite lässt sich durch (3.9) nach oben mit \mathcal{M} abschätzen. Die verbleibenden Faktoren der rechten Seite konvergieren, solange $z \in \mathcal{B}_{r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_0}(\delta_N)$ ist.

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(F_n)(z) - \mathcal{H}(F)(z)| &= \left| \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (c_{\alpha, \beta, n} - c_{\alpha, \beta}) z_W^\alpha z_N^\beta \right| \\ &= \left| \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (c_{\alpha, \beta, n} - c_{\alpha, \beta}) (2\mathbb{N})^{-\frac{r_0 \alpha}{2}} (2\mathbb{N})^{-\frac{q_0 \beta}{2}} (2\mathbb{N})^{\frac{r_0 \alpha}{2}} (2\mathbb{N})^{\frac{q_0 \beta}{2}} z_W^\alpha z_N^\beta \right| \\ &\leq \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (c_{\alpha, \beta, n} - c_{\alpha, \beta})^2 (2\mathbb{N})^{-r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{r_0 \alpha} (2\mathbb{N})^{q_0 \beta} (z_W^\alpha)^2 (z_N^\beta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|F_n - F\|_{(S)_{-1, -r_0, -q_0}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{r_0 \alpha} (z_W^\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{q_0 \beta} (z_N^\beta)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Der erste Faktor der rechten Seite konvergiert mit (B1) für hinreichend große q_0 und r_0 gegen 0. Die verbleibenden beiden Faktoren konvergieren für alle $z \in \mathcal{B}_{r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_0}(\delta_N)$ gleichmäßig.

Damit folgt (B2).

(B2) \Rightarrow (B1):

Mit (B2) existieren zwei Konstanten $r_0, q_0 < \infty$ sowie zwei Konstanten $\delta_W, \delta_N > 0$, sodass $\mathcal{H}(F_n)(z)$ gegen $\mathcal{H}(F)(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathcal{B}_{r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_0}(\delta_N)$. Da diese Konvergenz gleichmäßig erfolgt, existiert darüber hinaus eine Konstante $\mathcal{M} := \sup_n |\mathcal{H}(F_n)(z)| < \infty$ für alle $z \in \mathcal{B}_{r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_0}(\delta_N)$. Mit Satz 3.4 gilt

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} |c_{\alpha, \beta}| |z_W^\alpha| |z_N^\beta| \leq \mathcal{M} A(r_0) A(q_0)$$

für alle $z = (z_W, z_N) \in \mathcal{B}_{3r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{3q_0}(\delta_N)$. Wählt man für $r_2, q_2 < \infty$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ zwei Vektoren $y_W := (2^{-r_2}, \dots, (2k_1)^{-r_2})$ und $y_N := (2^{-q_2}, \dots, (2k_2)^{-q_2})$, dann sind

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{r_2 \alpha} |y_W^\alpha|^2 \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-r_2 \alpha} \leq \delta_W^2$$

und

$$\sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{q_2 \beta} |y_N^\beta|^2 \leq \sum_{\beta \in \mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-q_2 \beta} \leq \delta_N^2$$

für r_2, q_2 hinreichend groß. Die kleinsten Konstanten r_2 und q_2 , welche die Ungleichungen erfüllen, werden mit r_1 und q_1 bezeichnet. Somit ist $y \in \mathcal{B}_{r_2}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_2}(\delta_N)$ für $r_2 \geq r_1$ und $q_2 \geq q_1$.

Seien nun $r_2 = \max\{3r_0, r_1\}$ und $q_2 = \max\{3q_0, q_1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}, \text{ Index } \alpha \leq k_1, \text{ Index } \beta \leq k_2} |c_{\alpha, \beta, n}| (2\mathbb{N})^{-r_2 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_2 \beta} \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}, \text{ Index } \alpha \leq k_1, \text{ Index } \beta \leq k_2} |c_{\alpha, \beta, n}| |y_W^\alpha| |y_N^\beta| \\ &\leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} |c_{\alpha, \beta, n}| |y_W^\alpha| |y_N^\beta| \leq \mathcal{M} A(r_0) A(q_0). \end{aligned}$$

Für $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ folgt $\mathcal{K} := \sup_{\alpha, \beta} \{|c_{\alpha, \beta, n}| (2\mathbb{N})^{-r_2 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_2 \beta}\} < \infty$. Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta, n}^2 (2\mathbb{N})^{-2r_2 \alpha} (2\mathbb{N})^{-2q_2 \beta} &\leq \mathcal{K} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} |c_{\alpha, \beta, n}| (2\mathbb{N})^{-r_2 \alpha} (2\mathbb{N})^{-q_2 \beta} \\ &\leq \mathcal{K} \mathcal{M} A(r_0) A(q_0). \end{aligned}$$

Also gilt $\|F_n\|_{(S)_{-1-2r_2, -2q_2}}^2 \leq \mathcal{K} \mathcal{M} A(r_0) A(q_0)$. Analog lässt sich $\|F_n - F\|_{(S)_{-1, -2r_2, -2q_2}}^2$ mit $\sup_{z \in \mathcal{B}_{r_0}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{q_0}(\delta_N)} \{|\mathcal{H}(F_n)(z) - \mathcal{H}(F)(z)| \mathcal{K} A(r_0) A(q_0)\}$ abschätzen.

Damit gilt (B2) \Rightarrow (B1).

Mit ähnlichen Überlegungen wie im endlichdimensionalen Fall folgt (B2) \Leftrightarrow (B3). □

Definition 3.6 (Differentiation in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit)

Ein stochastischer Prozess $X : \mathbb{R} \rightarrow (S)_{-1}$ heißt differenzierbar in $(S)_{-1}$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

in $(S)_{-1}$ existiert.

Bemerkung 3.3

Im Folgenden wird immer $\frac{d}{dt}$ für die Ableitung in $(S)_{-1}$ verwendet. Falls die Ableitung im Sinne des C^1 gemeint ist, wird die Schreibweise $\frac{\partial}{\partial t}$ verwendet.

Im folgenden Satz wird die Vertauschbarkeit der Hermite-Transformation und der Differentiation bezüglich der Zeit untersucht, welche wesentlich für die Produktregel bezüglich des Wick-Produkts ist.

Satz 3.7 (vgl. [HoØkUbZh], Lemma 2.8.4)

Seien $F(t), X(t) \in (S)_{-1}$ für alle $t \in (a, b)$, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$(D1) \quad \frac{\partial \mathcal{H}(X(t, \omega))(z)}{\partial t} = \mathcal{H}(F(t, \omega))(z) \text{ für alle } t \in (a, b) \text{ und}$$

$z = (z_W, z_N) \in \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$ sowie

(D2) $\mathcal{H}(F(t, \omega))(z)$ ist beschränkt auf $(t, z) \in (a, b) \times \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$ und stetig in $t \in (a, b)$ für alle $z \in \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$.

Dann ist $X(t, \omega)$ für alle $t \in (a, b)$ differenzierbar in $(S)_{-1}$ und es gilt

$$\frac{dX(t, \omega)}{dt} = F(t, \omega).$$

Beweis:

Mit (D1) gilt

$$\mathcal{H}(F(t, \omega))(z) = \frac{\partial \mathcal{H}(X(t, \omega))(z)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(X(t + \Delta t, \omega))(z) - \mathcal{H}(X(t, \omega))(z)}{\Delta t}$$

punktweise für alle $z \in \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$. Zur Anwendung von Satz 3.6 (B3) \Leftrightarrow (B1) muss noch gezeigt werden, dass die Diffusionskoeffizienten für alle obigen z durch eine Konstante beschränkt sind. Mit (D1) und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\frac{\mathcal{H}(X(t + \Delta t, \omega))(z) - \mathcal{H}(X(t, \omega))(z)}{\Delta t} = \mathcal{H}(F(t + \Xi \Delta t, \omega))(z)$$

für ein $\Xi \in (0, 1)$. Da $\mathcal{H}(F(t, \omega))(z)$ beschränkt auf $(t, z) \in (a, b) \times \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$ und stetig in $t \in (a, b)$ für alle $z \in \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$ ist (vgl. (D2)), gilt

$$\mathcal{H}(F(t + \Xi \Delta t, \omega))(z) \leq \sup_{(t, z) \in (a, b) \times \mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)} |\mathcal{H}(F(t, \omega))(z)| < \infty$$

für alle $t, \Xi, \Delta t$ und z aus dem Definitionsbereich. Somit konvergiert

$\frac{\mathcal{H}(X(t + \Delta t, \omega))(z) - \mathcal{H}(X(t, \omega))(z)}{\Delta t}$ punktweise beschränkt gegen $\mathcal{H}(F(t, \omega))(z)$. Also kann Satz 3.6 angewendet werden, woraus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t, \omega) - X(t, \omega)}{\Delta t} = F(t, \omega)$ folgt.

□

Definition 3.7 (Stetigkeit in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit)

Ein stochastischer Prozess $F(t) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}(t) H_{\alpha} K_{\beta} \in (S)_{-1}$ ist stetig in $(S)_{-1}$ bezüglich

der Zeit $t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, falls für alle Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ mit $t_n \rightarrow t$ zwei natürliche Zahlen r und q existieren mit

$$\lim_{t_n \rightarrow t} \|F(t) - F(t_n)\|_{-1, -r, -q} = 0.$$

F heißt stetig in \mathcal{D} , falls F in jedem Punkt $t \in \mathcal{D}$ stetig ist.

Bemerkung 3.4

Definition 3.7 ist äquivalent zu:

Ein stochastischer Prozess $F(t) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{I}} c_{\alpha, \beta}(t) H_\alpha K_\beta \in (S)_{-1}$ ist stetig in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit $t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, falls ein $r \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|F(t) - F(s)\|_{-1, -r, -q} < \epsilon$$

für alle $s \in \mathcal{D}$. F heißt stetig in \mathcal{D} , falls F in jedem Punkt $t \in \mathcal{D}$ stetig ist.

Definition 3.8 (Stetigkeit in $(S)_{-1}$ bezüglich $y \in \Lambda$)

Sei $F : \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stochastischer Prozess in $(S)_{-1}$. F heißt stetig in $(S)_{-1}$ bezüglich $y \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$, falls für alle Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ mit $y_n \rightarrow y$ zwei natürliche Zahlen r und q existieren mit

$$\lim_{y_n \rightarrow y} \|F(y) - F(y_n)\|_{-1, -r, -q} = 0.$$

F heißt stetig in Λ , falls F in jedem Punkt $y \in \Lambda$ stetig ist.

Bemerkung 3.5

Insbesondere sind die fraktale Brownsche Bewegung und der in Gleichung (2.25) eingeführte fraktale kompensierte Lévy-Sprungprozess stetig in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit, denn für r und q hinreichend groß gelten

$$\|B^H(t) - B^H(s)\|_{-1, -r, -q}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_s^t M \xi_i(u) du \right)^2 (2\mathbb{N})^{-re_i} (2\mathbb{N})^{-q_0} \rightarrow 0$$

und auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Beschränktheit des Maßes π über $\Lambda \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-\epsilon, \epsilon\}$ mit $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{N}^H(\Lambda, t) - \tilde{N}^H(\Lambda, s) \right\|_{-1, -r, -q}^2 \\ &= \sum_{i, j=1}^{\infty} \left(\int_s^t \int_{\Lambda} M \xi_i(u) p_j(y) \pi(dy) du \right)^2 (2\mathbb{N})^{-r_0} (2\mathbb{N})^{-q e_z(i, j)} \\ &= \sum_{i, j=1}^{\infty} \left(\int_s^t M \xi_i(u) du \right)^2 \left(\int_{\Lambda} p_j(y) \pi(dy) \right)^2 (2\mathbb{N})^{-q e_z(i, j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \pi(\Lambda) \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\int_s^t M\xi_i(u) du \right)^2 \int_{\mathbb{R}} (p_j(y))^2 \pi(dy) (2\mathbb{N})^{-qe_{z(i,j)}} \\
&= \pi(\Lambda) \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\int_s^t M\xi_i(u) du \right)^2 (2\mathbb{N})^{-qe_{z(i,j)}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

für $s \rightarrow t$. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung $|M\xi_i(t)| \leq Ci^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{H}{2}}$, welche im Beweis von Lemma 4.1 aus [EIH0] hergeleitet wird, und $z(i, j) := j + \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$, woraus $i \leq z(i, j)$ folgt.

Es folgen eine Produktregel für das Wick-Produkt und im Anschluss ein Satz zur Stetigkeit des Wick-Produkts in $(S)_{-1}$.

Satz 3.8 (Produktregel)

Seien $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stochastische Prozesse in $(S)_{-1}$, welche bezüglich der Zeit in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbar sind. Dann gilt die Produktregel

$$\frac{d \langle F_1(t), F_2(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{dF_1(t)}{dt}, F_2(t) \right\rangle + \left\langle F_1(t), \frac{dF_2(t)}{dt} \right\rangle.$$

Beweis:

Dieser Beweis wird wieder über die Hermite-Transformation geführt. Mit den Sätzen 3.1 und 3.7 gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} \left(\left\langle \frac{dF_1(t)}{dt}, F_2(t) \right\rangle + \left\langle F_1(t), \frac{dF_2(t)}{dt} \right\rangle \right) (z) \\
&= \mathcal{H} \left(\left\langle \frac{dF_1(t)}{dt}, F_2(t) \right\rangle \right) (z) + \mathcal{H} \left(\left\langle F_1(t), \frac{dF_2(t)}{dt} \right\rangle \right) (z) \\
&= \mathcal{H} \left(\frac{dF_1(t)}{dt} \right) (z) \mathcal{H} (F_2(t)) (z) + \mathcal{H} (F_1(t)) (z) \mathcal{H} \left(\frac{dF_2(t)}{dt} \right) (z) \\
&= \frac{\partial \mathcal{H} (F_1(t)) (z)}{\partial t} \mathcal{H} (F_2(t)) (z) + \mathcal{H} (F_1(t)) (z) \frac{\partial \mathcal{H} (F_2(t)) (z)}{\partial t} \\
&= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H} (F_1(t + \Delta t)) (z) - \mathcal{H} (F_1(t)) (z)}{\Delta t} \right) \mathcal{H} (F_2(t)) (z) \\
&\quad + \mathcal{H} (F_1(t)) (z) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H} (F_2(t + \Delta t)) (z) - \mathcal{H} (F_2(t)) (z)}{\Delta t} \right) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H} (F_1(t + \Delta t)) (z) - \mathcal{H} (F_1(t)) (z)}{\Delta t} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{H} (F_2(t + \Delta t)) (z) \right) \\
&\quad + \mathcal{H} (F_1(t)) (z) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H} (F_2(t + \Delta t)) (z) - \mathcal{H} (F_2(t)) (z)}{\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(F_1(t + \Delta t))(z)\mathcal{H}(F_2(t + \Delta t))(z) - \mathcal{H}(F_1(t))(z)\mathcal{H}(F_2(t + \Delta t))(z)}{\Delta t} \\
&+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(F_1(t))(z)\mathcal{H}(F_2(t + \Delta t))(z) - \mathcal{H}(F_1(t))(z)\mathcal{H}(F_2(t))(z)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(F_1(t + \Delta t))(z)\mathcal{H}(F_2(t + \Delta t))(z) - \mathcal{H}(F_1(t))(z)\mathcal{H}(F_2(t))(z)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Mit den Sätzen 3.1 und 3.6 sowie Definition 3.6 folgt die Behauptung. □

Satz 3.9

Das Wick-Produkt ist ein in $(S)_{-1}$ stetiger Operator.

Beweis:

Seien $Y \in (S)_{-1}$ eine Zufallsgröße und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen in $(S)_{-1}$ mit Grenzwert $X \in (S)_{-1}$ für $n \rightarrow \infty$. Mit den Sätzen 3.6 und 3.1 gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Y, X_n \rangle\right)(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\langle Y, X_n \rangle)(z) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{H}(Y)(z)\mathcal{H}(X_n)(z)) \\
&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(X_n)(z)\right) \mathcal{H}(Y)(z) \\
&= \mathcal{H}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right)(z)\mathcal{H}(Y)(z) \\
&= \mathcal{H}\left(\left\langle Y, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right)\right\rangle\right)(z) \\
&= \mathcal{H}(\langle Y, X \rangle)(z).
\end{aligned}$$

Durch Rücktransformation folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Y, X_n \rangle = \left\langle Y, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right)\right\rangle = \langle Y, X \rangle.$$

□

Im folgenden Satz soll die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer stochastischen Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und kompensiertem Poisson-Zufallsmaß gezeigt werden.

Satz 3.10 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Seien $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine kompakte Menge, $T \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante und $H \in (0, 1)$. Seien weiter $X(0) \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $a, \sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \Lambda \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ drei stetige deterministische Funktionen. Darüber hinaus sei $M_{[0,t]} \sigma \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ für alle $t \in [0, T]$.

Dann besitzt die Integralgleichung

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t a(s)X(s) ds + \int_0^t \sigma(s)X(s) dB^H(s) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s)X(s-) d\tilde{N}(y, s) \end{aligned} \quad (3.10)$$

fast sicher einen eindeutig bestimmten in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbaren Lösungsprozess $X(t)$ der Gestalt

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]}\sigma(s))^2 ds \right\} \\ &\quad \cdot \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s)\Delta N(y, s)] \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei beschreibt $\Delta N(y, s) := N(y, s) - N(y, s-)$ eine Zufallsgröße, welche den Wert 1 annimmt, falls es zum Zeitpunkt s einen Sprung mit Sprungweite y gibt, und 0 sonst. Die Notation $M_{[a,b]}\sigma$ mit $0 \leq a < b \leq T$ beschreibt die Funktion $M(1_{[a,b]}(\cdot)\sigma(\cdot))$, wobei der Operator M den in Definition 2.8 eingeführten Kern darstellt.

Beweis:

Zunächst wird angenommen, dass die Integralgleichung (3.10) einen in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbaren Lösungsprozess $X(t)$ besitzt. Es wird gezeigt, dass der Lösungsprozess $X(t)$ eindeutig bestimmt ist und die in Gleichung (3.11) angegebene Struktur aufweist.

Man setzt

$$\begin{aligned} J_{\sigma}(t) &:= \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) \right\} \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t \langle \sigma(s), W^H(s) \rangle ds \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \exp \left\{ - \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds \right\} \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}\sigma(s) W(s) ds \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei die vorletzte Umformung von (3.12) mit Satz 2.5 folgt, da $\sigma(t)$ nach Voraussetzung deterministisch ist. Darüber hinaus sei

$$Z(t) := \langle J_{\sigma}(t), X(t) \rangle. \quad (3.13)$$

In der Folge wird sich zeigen, dass $Z(t)$ ein adaptierter stochastischer Prozess aus $L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$ mit Cádłág-Pfaden ist. Mit partieller Integration erhält man

$$Z(t) = \langle J_{\sigma}(0), X(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} J_{\sigma}(s), X(s) \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} X(s) \right\rangle ds.$$

Die partielle Integration kann über die Produktregel für das Wick-Produkt mit Satz 3.8 hergeleitet werden. Da $X(t)$ als stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$ vorausgesetzt wurde und mit der Stetigkeitsforderung an $\sigma(t)$ auch das Wick-Exponential $J_\sigma(t)$ stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$ ist, ist die partielle Integration hier wohldefiniert.

Mit Gleichung (3.10), der Assoziativität des Wick-Produkts und einigen elementaren Umformungen folgt $P - f.s.$

$$\begin{aligned}
& \langle J_\sigma(0), X(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} J_\sigma(s), X(s) \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} X(s) \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle \langle J_\sigma(s), -\sigma(s)W^H(s) \rangle, X(s) \rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \left(X(0) + \int_0^s a(u)X(u) du + \int_0^s \sigma(u)X(u) dB^H(u) \right. \right. \\
&\left. \left. + \int_0^s \int_\Lambda v(y, u)X(u-) d\tilde{N}(y, u) \right) \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle \langle J_\sigma(s), -\sigma(s)W^H(s) \rangle, X(s) \rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} X(0) \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s a(u)X(u) du \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \sigma(u)X(u) dB^H(u) \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \int_\Lambda v(y, u)X(u-) d\tilde{N}(y, u) \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle \langle J_\sigma(s), -\sigma(s)W^H(s) \rangle, X(s) \rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} X(0) \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s a(u)X(u) du \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \langle \sigma(u)X(u), W^H(u) \rangle du \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \int_\Lambda \langle v(y, u)X(u-), \dot{\tilde{N}}(y, u) \rangle \pi(dy)du \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle \langle J_\sigma(s), -\sigma(s)W^H(s) \rangle, X(s) \rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} X(0) \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s a(u)X(u) du \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \langle X(u), \sigma(u)W^H(u) \rangle du \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \int_\Lambda \langle X(u-), v(y, u)\dot{\tilde{N}}(y, u) \rangle \pi(dy)du \right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von $v(y, t)$ folgt die Stetigkeit der deterministischen Funktion $v^2(y, t)$. Darüber hinaus ist $v^2(y, t)$ nach unten durch 0 und aufgrund der Kompaktheit von $\Lambda \times [0, T]$ nach oben durch eine positive Konstante $\|v^2\|_\infty$ beschränkt. Damit folgt insbesondere, dass $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda, \pi)}^2$ bezüglich t stetig ist. Mit der Cauchy-Schwarzschen Unglei-

chung gilt

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\Lambda} v(y, t) \dot{\tilde{N}}(y, t) \pi(dy) \right\|_{-1, -r, -q}^2 \\
&= \sum_{i, j=1}^{\infty} \left(\int_{\Lambda} v(y, t) p_j(y) \xi_i(t) \pi(dy) \right)^2 (2\mathbb{N})^{-r0} (2\mathbb{N})^{-qe_z(i, j)} \\
&= \sum_{i, j=1}^{\infty} \left(\int_{\Lambda} v(y, t) p_j(y) \xi_i(t) \pi(dy) \right)^2 (2z(i, j))^{-q} \\
&= \sum_{i, j=1}^{\infty} \xi_i^2(t) \left(\int_{\Lambda} v(y, t) p_j(y) \pi(dy) \right)^2 (2z(i, j))^{-q} \\
&\leq \sum_{i, j=1}^{\infty} \xi_i^2(t) \left(\int_{\Lambda} v^2(y, t) \pi(dy) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} p_j^2(y) \pi(dy) \right) (2z(i, j))^{-q} \\
&= \sum_{i, j=1}^{\infty} \xi_i^2(t) \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda, \pi)}^2 (2z(i, j))^{-q}.
\end{aligned}$$

Mit der Beschränktheit von $v^2(y, t)$ durch eine Konstante $\|v^2\|_{\infty}$ folgt $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda, \pi)}^2 \leq \|v^2\|_{\infty} \pi(\Lambda)$. Zusammen mit der Beschränktheit von $\xi_i(t)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erhält man die Wohldefiniertheit von $\int_{\Lambda} v(y, t) \dot{\tilde{N}}(y, t) \pi(dy)$ in $(S)_{-1}$ für alle $t \in [0, T]$. Da $\xi_i(t)$ stetig über $[0, T]$ und $v^2(y, t)$ stetig über $\Lambda \times [0, T]$ sind, ist $\int_{\Lambda} v(y, t) \dot{\tilde{N}}(y, t) \pi(dy)$ in $(S)_{-1}$ stetig bezüglich $t \in [0, T]$.

Mit Satz 3.9 erhält man

$$\begin{aligned}
Z(t) &= X(0) + \int_0^t \left\langle \left\langle J_{\sigma}(s), -\sigma(s)W^H(s) \right\rangle, X(s) \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} X(0) \right\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} \int_0^s a(u)X(u) du \right\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \langle X(u), \sigma(u)W^H(u) \rangle du \right\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} \int_0^s \left\langle X(u-), \int_{\Lambda} v(y, u) \dot{\tilde{N}}(y, u) \pi(dy) du \right\rangle \right\rangle ds. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Mit den Stetigkeitsbedingungen an die Koeffizienten folgt insbesondere, dass $X(t)$ in $(S)_{-1}$ stetig ist. Zusammen mit der Stetigkeit des fraktalen White-Noise-Prozesses $W^H(t)$ können die in Gleichung (3.14) enthaltenen Ableitungen ausgerechnet werden.

Damit ist

$$\begin{aligned}
Z(t) &= X(0) - \int_0^t \langle \langle J_\sigma(s), \sigma(s)W^H(s) \rangle, X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle J_\sigma(s), a(s)X(s) \rangle ds \\
&+ \int_0^t \langle J_\sigma(s), \langle X(s), \sigma(s)W^H(s) \rangle \rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \left\langle X(s-), \int_\Lambda v(y, s) \dot{N}(y, s) \pi(dy) \right\rangle \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle J_\sigma(s), a(s)X(s) \rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \left\langle X(s-), \int_\Lambda v(y, s) \dot{N}(y, s) \pi(dy) \right\rangle \right\rangle ds. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (3.13) und der Definition der Wick-Inversen, Definition 3.4, folgt

$X(t) = \langle J_\sigma^{(-1)}(t), Z(t) \rangle$. $J_\sigma^{(-1)}(t)$ besitzt die Darstellung

$$J_\sigma^{(-1)}(t) = \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) \right\} \right\rangle \tag{3.16}$$

und hat mit Wahrscheinlichkeit 1 stetige Trajektorien. Deshalb gilt insbesondere $J_\sigma^{(-1)}(t) = J_\sigma^{(-1)}(t-) P-f.s.$. Damit kann Gleichung (3.15) weiter umgeformt werden und man erhält

$$\begin{aligned}
Z(t) &= X(0) + \int_0^t \langle J_\sigma(s), a(s) \langle J_\sigma^{(-1)}(s), Z(s) \rangle \rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \left\langle \langle J_\sigma^{(-1)}(s-), Z(s-) \rangle, \int_\Lambda v(y, s) \dot{N}(y, s) \pi(dy) \right\rangle \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle a(s), Z(s) \rangle ds + \int_0^t \left\langle Z(s-), \int_\Lambda v(y, s) \dot{N}(y, s) \pi(dy) \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t \langle Z(s-), a(s) \rangle ds + \int_0^t \left\langle Z(s-), \int_\Lambda v(y, s) \dot{N}(y, s) \pi(dy) \right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von $\int_\Lambda v(y, t) \dot{N}(y, t) \pi(dy)$ in $(S)_{-1}$ bezüglich $t \in [0, T]$ und der Stetigkeit des Koeffizienten $a(t)$ folgt

$$\begin{aligned}
Z(t) &= X(0) + \int_0^t \left\langle Z(s-), \frac{d \left(\int_0^s a(u) du \right)}{ds} \right\rangle ds \\
&+ \int_0^t \left\langle Z(s-), \frac{d \left(\int_0^s \int_\Lambda v(y, u) \dot{N}(y, u) \pi(dy) du \right)}{ds} \right\rangle ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X(0) + \int_0^t \left\langle Z(s-), \frac{d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \dot{N}(y, u) \pi(dy) du \right)}{ds} \right\rangle ds \\
&= X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \dot{N}(y, u) \pi(dy) du \right) \\
&= X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) d\tilde{N}(y, u) \right).
\end{aligned}$$

Da $v(y, t)$ eine bezüglich $(y, t) \in \Lambda \times [0, T]$ stetige deterministische Funktion darstellt, gilt mit den Sätzen 2.10 und 2.9

$$Z(t) = X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \tilde{N}(dy, du) \right).$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $Z \in L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$ ein adaptierter Prozess mit Cádłág-Pfaden ist. Daraus folgt dann, dass $Z(t-)$ ein vorhersagbarer Prozess ist. Der Integrator stellt einen adaptierten Cádłág-Prozess von beschränkter Variation dar und ist somit ein Semimartingal. Außerdem nimmt der Integrator zum Zeitpunkt 0 den Wert 0 an. Somit kann das stochastische Integral $\int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \tilde{N}(dy, du) \right)$ als Itô-Integral interpretiert und Protter's Theorem 37 [Pr1], Satz 6.1 im Anhang, angewendet werden. Das heißt, es existiert ein eindeutig bestimmtes Semimartingal $Z(t)$, das die Gleichung

$$Z(t) = X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \tilde{N}(dy, du) \right)$$

löst und der Darstellung

$$Z(t) = X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \quad (3.17)$$

genügt. Mit (3.17), $X(t) = \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), Z(t) \rangle$ und Satz 2.7 gilt schließlich $P - f.s.$

$$\begin{aligned}
X(t) &= \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), Z(t) \rangle \\
&= \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds \right\} \right\rangle \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \right. \\
&\quad \cdot \left. \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]} \sigma(s))^2 ds \right\} \\
&\cdot \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right).
\end{aligned}$$

$X(t)$ hat die gewünschte Struktur aus (3.11). Falls die Integralgleichung (3.10) eine Lösung mit den geforderten Eigenschaften besitzt, ist diese also auch eindeutig.

Im Folgenden wird überprüft, ob die Prozesse $X(t)$ aus Gleichung (3.11) und $Z(t)$ aus Gleichung (3.17) die geforderten Annahmen erfüllen. Das heißt, es wird überprüft, ob $X(t)$ stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$ ist und es wird gezeigt, dass $Z(t) := \langle J_{\sigma}(t), X(t) \rangle$ ein adaptierter Prozess in $L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$ mit C adl ag-Pfaden ist.

Sei $X(t)$ der stochastische Prozess, welcher in Gleichung (3.11) beschrieben wird. Um die stetige Differenzierbarkeit von $X(t)$ in $(S)_{-1}$ zu untersuchen, wird $X(t)$ zunächst etwas umgeformt und anschließend nach t abgeleitet.

Die Faktoren, welche die Koeffizientenfunktion $v(y, t)$ enthalten, können als Wick-Exponential bezuglich des kompensierten Poisson-Zufallsma es umgeschrieben werden (vgl. Bender und Marquardt [BeMa], Seite 507) und die Faktoren, welche die Koeffizientenfunktion $\sigma(t)$ enthalten, entsprechen einem Wick-Exponential bezuglich der fraktalen Brownschen Bewegung (vgl. Satz 2.7 für $\phi(s) := M_{[0,t]} \sigma(s)$)

$$\begin{aligned}
X(t) &= \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]} \sigma(s))^2 ds \right\} \\
&\cdot \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right) \\
&= X(0) \cdot \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) \right\} \right\rangle \cdot \exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\} \\
&\cdot \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) d\tilde{N}(y, s) \right\} \right\rangle.
\end{aligned}$$

$X(0)$ und $\exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\}$ sind deterministisch, das Wick-Exponential bezuglich der fraktalen Brownschen Bewegung hängt nur von ω^W ab und das Wick-Exponential bezuglich des kompensierten Poisson-Zufallsma es hängt nur von ω^N ab. Also können statt des normalen Produkts auch Wick-Produkte verwendet werden und es gilt

$$\begin{aligned}
X(t) &= \left\langle X(0), \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\} \right\rangle, \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) \right\} \right\rangle, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) d\tilde{N}(y, s) \right\} \right\rangle \right\rangle \right\rangle.
\end{aligned}$$

Diese Darstellung des Lösungsprozesses $X(t)$ wird über Produkt- und Kettenregel in $(S)_{-1}$ abgeleitet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= \left\langle X(t), \left(\frac{d}{dt} \int_0^t a(s) ds + \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma(s) dB^H(s) + \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) d\tilde{N}(y, s) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle X(t), \left(a(t) + \langle \sigma(t), W^H(t) \rangle + \int_{\Lambda} \langle v(y, t), \dot{\tilde{N}}(y, t) \rangle \pi(dy) \right) \right\rangle \in (S)_{-1}. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen $a(t)$ und $\sigma(t)$, der Stetigkeit von $\int_{\Lambda} \langle v(y, t), \dot{\tilde{N}}(y, t) \rangle \pi(dy)$ in $(S)_{-1}$ und der Stetigkeit des fraktalen White-Noise-Prozesses $W^H(t)$ folgt die Stetigkeit von $X(t)$ bzw. $\frac{d}{dt}X(t)$ in $(S)_{-1}$.

Im Folgenden wird gezeigt, dass $Z \in L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$ und $Z(t-)$ vorhersagbar ist.

Mit der Gleichung (3.17) und den Stetigkeitsforderungen an die Koeffizienten folgt, dass $Z(t)$ C adl ag-Pfade hat. $\Delta N(y, s)$ ist der einzige stochastische Prozess auf der rechten Seite von Gleichung (3.17). Also ist $Z(t)$ adaptiert und somit $Z(t-)$ vorhersagbar.

Für das zweite Moment von $Z(t)$ gilt

$$\begin{aligned} E[Z(t)]^2 &= X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E \left[\prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right]^2 \\ &\leq X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E \left[\prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + \|v\|_{\infty} \Delta N(y, s)] \right]^2 \\ &\leq X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E \left[\prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [\exp\{\|v\|_{\infty} \Delta N(y, s)\}] \right]^2 \\ &= X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E \left[\exp \left\{ \int_0^t \int_{\Lambda} \|v\|_{\infty} N(dy, ds) \right\} \right]^2 \\ &= X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E \left[\exp \left\{ \int_0^t \int_{\Lambda} 2\|v\|_{\infty} N(dy, ds) \right\} \right] \\ &= X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E [\exp \{2\|v\|_{\infty} N(\Lambda, t)\}]. \end{aligned}$$

$N(\Lambda, t)$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $t\pi(\Lambda)$ (vgl. [Nu okPr], Gleichung (2.7)).

Mit der momenterzeugenden Funktion der Poisson-Verteilung erhält man

$$\begin{aligned} & X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} E [\exp \{2\|v\|_{\infty} N(\Lambda, t)\}] \\ &= X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_{\Lambda} 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \exp \{ \pi(\Lambda)t(\exp\{2\|v\|_{\infty}\} - 1) \}. \end{aligned}$$

$E[Z(t)]^2$ kann also über eine stetige Funktion majorisiert werden. Diese ist wohldefiniert, da $a(t)$ und $v(y, t)$ stetige Funktionen sind und mit der Beschränktheitsbedingung (2.11) an das Intensitätsmaß π insbesondere $\pi(\Lambda) < \infty$ gilt. Damit folgt $Z \in L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$.

Jetzt wird gezeigt, dass $X(t)$ die Gleichung (3.10) löst. Sei also

$$\begin{aligned} X(t) = & \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]} \sigma(s))^2 ds \right\} \\ & \cdot \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right), \end{aligned}$$

wobei $X(0) \in \mathbb{R}$ ist und die Koeffizientenfunktionen die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Das Wick-Exponential $J_{\sigma}(t)$, welches in Gleichung (3.12) eingeführt wurde, ist ebenfalls stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$. Mit partieller Integration und der Definition der Wick-Inversen folgt

$$\begin{aligned} X(t) &= \langle \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), J_{\sigma}(t) \rangle, X(t) \rangle = \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \langle X(t), J_{\sigma}(t) \rangle \rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(\langle J_{\sigma}(0), X(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} J_{\sigma}(s), X(s) \right\rangle ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s), \frac{d}{ds} X(s) \right\rangle ds \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Zudem erhält man mit Gleichung (3.16) und der Definition des Wick-Produkts

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\langle \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) W^H(s) ds \right\} \right\rangle \\ &\cdot \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right) \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)] \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung (3.13) gilt

$$Z(t) = X(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s) \Delta N(y, s)].$$

Der hier beschriebene Prozess $Z(t)$ ist also ein adaptierter Cádłág-Prozess. Darüber hinaus sieht man leicht, dass $Z(t)$ ein Prozess von beschränkter Variation ist und somit ein Semimartingal. Aus [Pr1], Theorem 37, bzw. Satz 6.1 ist bekannt, dass $Z(t)$ die eindeutige Lösung von

$$Z(t) = X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \tilde{N}(dy, du) \right)$$

darstellt. Mit $Z \in L^2([0, T] \times \Omega, \lambda \times \mu)$, der Vorhersagbarkeit von $Z(t-)$ und den Sätzen 2.10 und 2.9 folgt

$$\begin{aligned} X(t) &= \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), Z(t) \rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t Z(s-) d \left(\int_0^s a(u) du + \int_0^s \int_{\Lambda} v(y, u) \tilde{N}(dy, du) \right) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t a(s) Z(s) ds + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) Z(s-) \tilde{N}(dy, ds) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t a(s) Z(s) ds + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) Z(s-) \delta \tilde{N}(y, s) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t a(s) Z(s) ds + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s) Z(s-) d\tilde{N}(y, s) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t a(s) Z(s) ds + \int_0^t \int_{\Lambda} \langle v(y, s) Z(s-), \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Formt man $Z(t)$ mit Gleichung (3.13) um und nutzt die Stetigkeitsbedingungen an die Koeffizienten, erhält man

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t a(s) \langle J_{\sigma}(s), X(s) \rangle ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \int_{\Lambda} \langle v(y, s) \langle J_{\sigma}(s-), X(s-) \rangle, \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), \left(X(0) + \int_0^t \langle J_{\sigma}(s), a(s) X(s) \rangle ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \left\langle J_{\sigma}(s-), \int_{\Lambda} \langle v(y, s) X(s-), \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Durch weitere elementare Umformungen folgt

$$\begin{aligned}
X(t) &= \left\langle J_\sigma^{(-1)}(t), \left(\langle J_\sigma(0), X(0) \rangle - \int_0^t \langle J_\sigma(s), \langle X(s), \sigma(s)W^H(s) \rangle \rangle ds \right. \right. \\
&\quad + \int_0^t \langle J_\sigma(s), a(s)X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle J_\sigma(s), \langle X(s), \sigma(s)W^H(s) \rangle \rangle ds \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \int_\Lambda \langle v(y, s)X(s-), \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \right) \right\rangle \\
&= \left\langle J_\sigma^{(-1)}(t), \left(\langle J_\sigma(0), X(0) \rangle + \int_0^t \langle J_\sigma(s), \langle X(s), -\sigma(s)W^H(s) \rangle \rangle ds \right. \right. \\
&\quad + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \left(a(s)X(s) + \langle X(s), \sigma(s)W^H(s) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_\Lambda \langle v(y, s)X(s-), \dot{\tilde{N}}(y, s) \rangle \pi(dy) \right) \right\rangle ds \right\rangle \\
&= \left\langle J_\sigma^{(-1)}(t), \left(\langle J_\sigma(0), X(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} J_\sigma(s), X(s) \right\rangle ds \right. \right. \\
&\quad + \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \left(\int_0^s a(u)X(u) du + \int_0^s \langle \sigma(u)X(u), W^H(u) \rangle du \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^s \int_\Lambda v(y, u)X(u-) d\tilde{N}(y, u) \right) \right\rangle ds \right\rangle. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Bildet man die Differenz zwischen (3.18) und (3.19), dann sieht man, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} X(s) \right\rangle ds &= \int_0^t \left\langle J_\sigma(s), \frac{d}{ds} \left(\int_0^s a(u)X(u) du \right. \right. \\
&\quad + \int_0^s \langle \sigma(u)X(u), W^H(u) \rangle du \\
&\quad \left. \left. + \int_0^s \int_\Lambda v(y, u)X(u-) d\tilde{N}(y, u) \right) \right\rangle ds
\end{aligned}$$

$P - f.s.$ gelten muss. Diese Gleichung ist insbesondere erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} X(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t a(s)X(s) ds + \int_0^t \langle \sigma(s)X(s), W^H(s) \rangle ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_\Lambda v(y, s)X(s-) d\tilde{N}(y, s) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t a(s)X(s) ds + \int_0^t \sigma(s)X(s) dB^H(s) + \int_0^t \int_\Lambda v(y, s)X(s-) d\tilde{N}(y, s) \right)
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0, T]$ gilt, woraus

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)X(s) ds + \int_0^t \sigma(s)X(s) dB^H(s) + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s)X(s-) d\tilde{N}(y, s)$$

folgt.

Also ist der Prozess $X(t)$ aus (3.11) eine Lösung der stochastischen Integralgleichung (3.10).

Zusammen mit dem ersten Teil des Beweises folgt die Existenz und Eindeutigkeit des Lösungsprozesses aus Gleichung (3.11) der stochastischen Integralgleichung (3.10) $P - f.s.$

□

Bemerkung 3.6

Der Lösungsprozess $X(t)$ aus Gleichung (3.11) ist für alle $t \in [0, T]$ ein Element aus $L^2(\Omega, \mu)$.

Beweis:

Mit der Definition der Wick-Inversen, Definition 3.4, und Gleichung (3.13) folgt

$$X(t) = \langle J_{\sigma}^{(-1)}(t), Z(t) \rangle,$$

wobei $Z(t)$ durch Gleichung (3.17) und $J_{\sigma}^{(-1)}(t)$ durch Gleichung (3.16) gegeben ist. $Z(t)$ und $J_{\sigma}^{(-1)}(t)$ sind stochastische Prozesse in $(S)_{-1}$. Also existieren reellwertige Funktionen $c_{\alpha_1, \beta_1, 1}(t)$ und $c_{\alpha_2, \beta_2, 2}(t)$ mit

$$J_{\sigma}^{(-1)}(t) = \sum_{\alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, \beta_1, 1}(t) H_{\alpha_1} K_{\beta_1}$$

und

$$Z(t) = \sum_{\alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_2, \beta_2, 2}(t) H_{\alpha_2} K_{\beta_2}.$$

Aus Gleichung (3.16) folgt, dass der stochastische Prozess $J_{\sigma}^{(-1)}(t)$ nur von ω^W abhängt. Somit ist $c_{\alpha_1, \beta_1, 1}(t) = 0$ für $\beta_1 \neq 0$ und alle $\alpha_1 \in \mathcal{I}$, $t \in [0, T]$. Analog erhält man mit Gleichung (3.17), dass $Z(t)$ nur von ω^N abhängt. Also ist $c_{\alpha_2, \beta_2, 2}(t) = 0$ für $\alpha_2 \neq 0$ und alle $\beta_2 \in \mathcal{I}$, $t \in [0, T]$.

Zusammen mit Gleichung (3.2) folgt

$$\begin{aligned}
\langle J_\sigma^{(-1)}(t), Z(t) \rangle &= \left\langle \sum_{\alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, \beta_1, 1}(t) H_{\alpha_1} K_{\beta_1}, \sum_{\alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_2, \beta_2, 2}(t) H_{\alpha_2} K_{\beta_2} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{\alpha_1 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, 0, 1}(t) H_{\alpha_1}, \sum_{\beta_2 \in \mathcal{I}} c_{0, \beta_2, 2}(t) K_{\beta_2} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha_1, \beta_2 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, 0, 1}(t) c_{0, \beta_2, 2}(t) H_{\alpha_1} K_{\beta_2} \\
&= \left(\sum_{\alpha_1 \in \mathcal{I}} c_{\alpha_1, 0, 1}(t) H_{\alpha_1} \right) \left(\sum_{\beta_2 \in \mathcal{I}} c_{0, \beta_2, 2}(t) K_{\beta_2} \right) = J_\sigma^{(-1)}(t) Z(t).
\end{aligned}$$

Darüber hinaus wurde zu Beginn des Abschnitts bereits vorausgesetzt, dass H_{α_1} und K_{β_2} für alle $\alpha_1, \beta_2 \in \mathcal{I}$ stochastisch unabhängig voneinander sind, womit folgt, dass auch $J_\sigma^{(-1)}(t)$ und $Z(t)$ stochastisch unabhängig voneinander sind. Also ist

$$E[X(t)]^2 = E[\langle J_\sigma^{(-1)}(t), Z(t) \rangle]^2 = E[J_\sigma^{(-1)}(t) Z(t)]^2 = E_{\mu_W} [J_\sigma^{(-1)}(t)]^2 E_{\mu_N} [Z(t)]^2.$$

Aus [HoOkUbZh], Beweis von Satz 3.6.1, ist bekannt, dass

$$E_{\mu_W} [J_\sigma^{(-1)}(t)]^2 \leq \exp \left\{ 2 \|M_{[0,t]} \sigma\|_{L^2(\mathbb{R}, \lambda)}^2 \right\}$$

ist. Im Beweis von Satz 3.10 wurde bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
E_{\mu_N} [Z(t)]^2 &\leq X^2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(2a(s) - \int_\Lambda 2v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right\} \\
&\quad \cdot \exp \{ \pi(\Lambda) t (\exp\{2\|v\|_\infty\} - 1) \}
\end{aligned}$$

gilt. Zusammen folgt $X(t) \in L^2(\Omega, \mu)$ für alle $t \in [0, T]$.

□

Bemerkung 3.7

Mit ähnlichen Überlegungen kann man zeigen, dass der Lösungsprozess $X(t)$ aus Gleichung (3.11) sogar ein Element aus $L^p(\Omega, \mu)$ für alle $t \in [0, T]$ und $p > 0$ ist.

3.2 Parameterschätzung

Die in Abschnitt 3.1 betrachtete stochastische Integralgleichung (3.10) enthält Parameterfunktionen, die oft nicht bekannt sind. Daher ist deren Schätzung auf der Grundlage gemessener Daten erforderlich. In diesem Abschnitt wird der Fall zeitunabhängiger deterministischer konstanter Faktoren betrachtet.

Das heißt, sei

$$X(t) = X(0) + a \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dB^H(s) + v \int_0^t \int_{\Lambda} X(s-) d\tilde{N}(y, s) \quad (3.20)$$

die zu lösende stochastische Integralgleichung mit den zu schätzenden Parametern $a, \sigma \in \mathbb{R}$ und $v > -1$. $B^H(t)$ sei die fraktale Brownsche Bewegung mit $H > \frac{1}{2}$ und $\tilde{N}(y, t)$ sei das kompensierte Lévy-Sprungmaß mit $y \in \Lambda \subset \mathbb{R}^0$, wobei Λ kompakt sei, und $0 < \pi(\Lambda) < \infty$. $\pi(\Lambda)$ wird im Folgenden ebenfalls als ein zu schätzender Parameter betrachtet. Darüber hinaus sei der Startwert $X(0) > 0$.

Mit Satz 3.10 besitzt die Integralgleichung (3.20) $P - f.s.$ die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) \exp\left\{at + \sigma B^H(t) - vt \int_{\mathbb{R}} 1_{[\Lambda]}(y) \pi(dy) - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H}\right\} (1+v)^{N(\Lambda, t)} \\ &= X(0) \exp\left\{at + \sigma B^H(t) - vt \pi(\Lambda) - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H}\right\} (1+v)^{N(\Lambda, t)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei $N(\Lambda, t)$ hier verkürzt für $N(\Lambda, [0, t])$ steht. $N(\Lambda, t)$ stellt das Sprungmaß dar, welches zum kompensierten Sprungmaß aus (2.10) mit $\Delta t = [0, t]$ gehört.

Viele Verfahren zur Parameterschätzung basieren auf den Grundgedanken der Maximum-Likelihood-Methode oder der Methode der kleinsten Quadrate, welche zum Beispiel von van den Bos in „Parameter Estimation for Scientists and Engineers“, [Bo], ausführlich beschrieben wurden. Für die klassischen Varianten dieser beiden Schätzverfahren benötigt man jedoch die Voraussetzungen einer Stichprobe. Da die stochastische Integralgleichung, deren Parameter in dieser Arbeit geschätzt werden sollen, die fraktale Brownsche Bewegung enthält und diese ein langes Gedächtnis besitzt, kann mit den klassischen Verfahren wegen der fehlenden Unabhängigkeit der Zuwächse nicht gearbeitet werden. Die Vorgehensweisen müssen entsprechend modifiziert werden. Für Integralgleichungen mit fraktaler Brownscher Bewegung findet man in [BeToTu], [Mi] beziehungsweise [KoMeMi] entsprechende Modifikationen des Maximum-Likelihood-Schätzverfahrens, welche es ermöglichen, den Driftparameter konsistent zu schätzen. Allerdings ist diese Methode für die Schätzung der Volatilitätsparameter $\pi(\Lambda)$ (Sprungintensität), σ (Diffusionskoeffizient) und v (Faktor des Sprunganteils) ungeeignet, da sie auf der numerisch sehr aufwendigen Berechnung von Determinanten hochdimensionaler Kovarianzmatrizen basiert. Deshalb werden in den folgenden Abschnitten Verfahren entwickelt, welche man als Verallgemeinerungen der Methode der kleinsten Quadrate ansehen kann und die es erlauben, die Parameter $a, \pi(\Lambda)$ und σ aus (3.20) erwartungstreu und konsistent zu schätzen.

3.2.1 Schätzverfahren unter Verwendung des logarithmierten Lösungsprozesses

Mit dem Lösungsprozess der Integralgleichung (3.20), welcher in (3.21) eingeführt wurde, erhält man für $t \geq 0$

$$\log(X(t)) = \log(X(0)) + at + \sigma B^H(t) - v\pi(\Lambda)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \log(1+v)N(\Lambda, t) \quad (3.22)$$

und

$$E[\log(X(t))] = \log(X(0)) + at - v\pi(\Lambda)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \log(1+v)\pi(\Lambda)t. \quad (3.23)$$

Analog zu [BeToTu] werden die Intervalle $[0, T(n)]$ mit $T(n) = \frac{n^\alpha}{n}$, $\alpha > 1$, in $n^\alpha \in \mathbb{N}$ äquidistante Zeitpunkte $t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \dots < t_{n^\alpha} = \frac{n^\alpha}{n}$ zerlegt, zu welchen Beobachtungen von $X(t)$ vorliegen. Es wird sich zeigen, dass für die Parameterschätzung von a und $\pi(\Lambda)$ die Konstante $\alpha > 1$ sein muss und für die Schätzung von σ sogar $\alpha > 4H - 1$ erforderlich ist, um die Konsistenz zu gewährleisten (Satz 3.11).

Es werden Parameter gesucht, für welche die Summe der Kovarianzen zwischen $\log(X(t_i))$ und $\log(X(t_j))$ minimal wird.

Die Summe der Kovarianzen hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\ & := E \left[\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (E[\log(X(t_i))] - \log(X(t_i)))(E[\log(X(t_j))] - \log(X(t_j))) \right]. \end{aligned}$$

Mit (3.23) lässt sich $L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ weiter zu

$$\begin{aligned} & L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\ & = E \left[\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \pi(\Lambda)vt_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \log(X(t_i)) \right) \left(\log(X(0)) + at_j - \frac{1}{2}\sigma^2 t_j^{2H} - \pi(\Lambda)vt_j \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_j - \log(X(t_j)) \right) \right] \end{aligned}$$

umformen. Im Folgenden werden die Parameter a, σ^2 und $\pi(\Lambda)$ unter der Annahme geschätzt, dass die jeweils anderen zwei Parameter und v bekannt sind. Dafür werden

die Schätzfunktionen auf Grundlage der Bedingungen

$$\min_a \{L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha} : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\min_{\pi(\Lambda)} \{L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha} : \pi(\Lambda) > 0\}$$

und

$$\min_{\sigma^2} \{L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha} : \sigma^2 > 0\}$$

bestimmt. Dieses Schätzprinzip wird im Folgenden als verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet. Da sich der Erwartungswert als Integral schreiben lässt, kann $L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ als Integral aufgefasst werden. Die Integranden von $L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ sind zufällige Funktionen und bezüglich a bzw. $\pi(\Lambda)$ bzw. σ^2 für alle ω sowohl stetig als auch konvex. Die Konvexität erhält man, weil der Integrand bezüglich der einzelnen Parameter nach oben geöffnete Parabeln darstellt. Für a hat der Integrand zum Beispiel die Struktur

$$2 \left(\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) - \frac{1}{2} \sigma^2 t_i^{2H} - \pi(\Lambda) v t_i + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_i - \log(X(t_i)) \right) t_j \right) a \\ + \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) - \frac{1}{2} \sigma^2 t_i^{2H} - \pi(\Lambda) v t_i + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_i - \log(X(t_i)) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i \right)^2 a^2.$$

Vor den quadratischen Termen hat man also immer auf Grund der symmetrischen Strukturen bezüglich i und j einen quadratischen und somit positiven Faktor.

Damit sind die Voraussetzungen des sogenannten normalen konvexen Integranden nach [Ro] erfüllt und es gilt, dass die Subdifferentialen von $L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ bezüglich a bzw. $\pi(\Lambda)$ bzw. σ^2 mit Wahrscheinlichkeit 1 mit den Subdifferentialen von

$$l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha} \\ := \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + a t_i - \frac{1}{2} \sigma^2 t_i^{2H} - \pi(\Lambda) v t_i + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_i - \log(X(t_i))) \\ \cdot (\log(X(0)) + a t_j - \frac{1}{2} \sigma^2 t_j^{2H} - \pi(\Lambda) v t_j + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_j - \log(X(t_j))) \quad (3.24)$$

bezüglich a bzw. $\pi(\Lambda)$ bzw. σ^2 zusammenfallen ([Ro], 3E Corollary). Da $l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ bezüglich $a, \pi(\Lambda)$ und σ^2 differenzierbar ist, fallen die Subdifferentialen von $L(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ mit den Ableitungen des Integranden $l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}$ nach a bzw. $\pi(\Lambda)$ bzw. σ^2 zusammen.

Es werden also diejenigen Parameter gesucht, für die die Summe der Kovarianzen zwischen den Differenzen des logarithmierten Modellansatzes und den logarithmierten Beobachtungen minimal wird. Das heißt, es werden Parameter gesucht, welche die Summe der Kovarianzen zwischen den Schätzfehlern minimieren.

In den kommenden Abschnitten 3.2.1.1 bis 3.2.1.3 werden zunächst die Schätzer für den Drift, die Sprungintensität und den Diffusionskoeffizienten ermittelt. In Abschnitt 3.2.1.4 wird die schwache Konsistenz und Erwartungstreue dieser Schätzer bewiesen.

3.2.1.1 Schätzung des Drifts a

Für die Schätzung von a wird zunächst $l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ nach a abgeleitet und 0 gesetzt. Man erhält die Gleichung

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i)) \right) t_j. \quad (3.25)$$

Jetzt stellt man (3.25) nach a um, was zum Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{a}(n^\alpha) &= - \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i))) \cdot t_j}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j} \\ &= - \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i)))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i} \end{aligned} \quad (3.26)$$

führt.

3.2.1.2 Schätzung der Sprungintensität $\pi(\Lambda)$

Als Nächstes wird der Parameter $\pi(\Lambda)$ geschätzt. Dafür wird die Schätzfunktion

$l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ nach $\pi(\Lambda)$ abgeleitet und 0 gesetzt

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i)) \right) (\log(1+v)t_j - vt_j). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Stellt man (3.27) nach $\pi(\Lambda)$ um, erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{\pi(\Lambda)}(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i))) t_j \cdot (-1)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(1+v) - v)t_i t_j} \\ &= - \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i)))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} (\log(1+v) - v)t_i} \end{aligned} \quad (3.28)$$

als Schätzer für $\pi(\Lambda)$.

3.2.1.3 Schätzung des Diffusionskoeffizienten σ

Da σ in den Erwartungswert von $\log(X(t))$ als Quadrat eingeht, siehe (3.23), kann σ nicht direkt geschätzt werden. Aber σ^2 kann mit der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate geschätzt und die Konsistenz gezeigt werden. Ausgangspunkt dafür ist wieder die Schätzfunktion

$l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)) | (\log(X(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha}$, welche diesmal bezüglich σ^2 minimiert wird

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(X(t_i)) \right) \left(-\frac{1}{2}t_j^{2H} \right). \quad (3.29)$$

Stellt man (3.29) nach σ^2 um, erhält man als Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \log(X(t_i))) t_j^{2H}}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2}t_i^{2H}t_j^{2H}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) + at_i - v\pi(\Lambda)t_i + \log(1+v)\pi(\Lambda)t_i - \log(X(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2}t_i^{2H}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.2.1.4 Erwartungstreue und Konsistenz

In diesem Abschnitt wird die Erwartungstreue und schwache Konsistenz der Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$, $\widehat{\pi(\Lambda)}(n^\alpha)$ und $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ nachgewiesen.

Falls im Folgenden ein Schätzer als konsistent bezeichnet wird, ist stets die schwache Konsistenz gemeint.

Satz 3.11

Die Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$ und $\widehat{\pi(\Lambda)}(n^\alpha)$ mit $\alpha > 1$ sowie $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ mit $\alpha > 4H - 1$ sind schwach konsistente und erwartungstreue Schätzer für a , $\pi(\Lambda)$ und σ^2 .

Beweis:

Nachweis für Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\hat{a}(n^\alpha)$:

Setzt man (3.22) in (3.26) ein, erhält man

$$\hat{a}(n^\alpha) = a + \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \sigma B^H(t_i) + \log(1+v)\tilde{N}(\Lambda, t_i)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i}, \quad (3.31)$$

woraus auch sofort die Erwartungstreue von $\hat{a}(n^\alpha)$ folgt. Für den Nachweis der Konsistenz wird der Abstand im quadratischen Mittel von a und dem Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$ untersucht. Mit

(3.31) ist

$$\begin{aligned}
& E[\hat{a}(n^\alpha) - a]^2 \\
&= E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \left(\sigma B^H(t_i) + \log(1+v) \tilde{N}(\Lambda, t_i) \right)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i} \right]^2 \\
&= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) + (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \min\{t_i, t_j\} \right)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Es gelten:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) \leq \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H}) \\
& \leq \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{n^\alpha}{n} \right)^{2H} = \sigma^2 \frac{n^{\alpha(2+2H)}}{n^{2H}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \min\{t_i, t_j\} \leq (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{n^\alpha}{n} \right) \\
& = (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \frac{n^{3\alpha}}{n}
\end{aligned}$$

und mit Hilfe der Gaußschen Summenformel folgt

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i \right)^2 = \frac{n^{2\alpha} (n^\alpha + 1)^2}{4n^2} \geq \frac{n^{4\alpha}}{4n^2},$$

womit

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{a}(n^\alpha) - a]^2 \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\sigma^2 \cdot n^{(2-2H)+\alpha(2+2H-4)} + (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \cdot n^{(2-1)+\alpha(3-4)} \right) \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\sigma^2 \cdot n^{(2-2H)-\alpha(2-2H)} + (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \cdot n^{1-\alpha} \right) = 0 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

für $\alpha > 1$ ist. Daraus folgt die Konsistenz des Schätzers $\hat{a}(n^\alpha)$.

Nachweis für Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$:

Um die Konsistenz und Erwartungstreue dieses Schätzers zu zeigen, wird (3.22) in (3.30)

eingesetzt

$$\hat{\sigma}^2(n^\alpha) = \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \left(\sigma B^H(t_i) + \log(1+v) \tilde{N}(\Lambda, t_i) \right)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2} t_i^{2H}}. \quad (3.34)$$

Die Erwartungstreue ist mit (3.34) trivialerweise gegeben. Als Nächstes betrachtet man die quadratische Abweichung des Schätzers $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ zum Originalwert σ^2 und zeigt, dass diese für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert

$$\begin{aligned} & E[\hat{\sigma}^2(n^\alpha) - \sigma^2]^2 \\ &= E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \left(\sigma B^H(t_i) + \log(1+v) \tilde{N}(\Lambda, t_i) \right)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2} t_i^{2H}} \right]^2 \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) + (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \min\{t_i, t_j\} \right)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{4} t_i^{2H} t_j^{2H}}. \end{aligned}$$

Es gelten offensichtlich die drei Abschätzungen:

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) \leq \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{i}{n} \right)^{2H} = \frac{\sigma^2}{n^{2H}} n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H} \right),$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \min\{t_i, t_j\} &\leq (\log(1+v))^2 \pi(\Lambda) \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{i}{n} \right) \\ &\leq \frac{(\log(1+v))^2 \pi(\Lambda)}{n} n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H} \right) \end{aligned}$$

und

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{4} t_i^{2H} t_j^{2H} = \frac{1}{4n^{4H}} \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H} \right)^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}^2(n^\alpha) - \sigma^2]^2 &\leq 4 \left(\sigma^2 n^{4H-2H} + \pi(\Lambda) (\log(1+v))^2 n^{4H-1} \right) n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H} \right)^{1-2} \\ &\leq 4 \left(\sigma^2 n^{2H} + \pi(\Lambda) (\log(1+v))^2 n^{4H-1} \right) n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 (\sigma^2 n^{2H} + \pi(\Lambda)(\log(1+v))^2 n^{4H-1}) n^\alpha (n^\alpha (n^\alpha + 1))^{-1} \\
&\leq 8 (\sigma^2 n^{2H} + \pi(\Lambda)(\log(1+v))^2 n^{4H-1}) n^\alpha n^{-2\alpha} \\
&= 8 (\sigma^2 n^{2H} + \pi(\Lambda)(\log(1+v))^2 n^{4H-1}) n^{-\alpha} \\
&= 8 (\sigma^2 n^{2H-\alpha} + \pi(\Lambda)(\log(1+v))^2 n^{4H-1-\alpha}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

für alle $\alpha > 4H - 1$. Also ist der Schätzer $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ konsistent für $\alpha > 4H - 1$.

Die Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\widehat{\pi(\Lambda)}(n^\alpha)$ mit $\alpha > 1$ kann ganz analog zum Nachweis von Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\hat{a}(n^\alpha)$ geführt werden.

Damit wurde für alle drei Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$, $\widehat{\pi(\Lambda)}(n^\alpha)$ und $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ der Nachweis der Erwartungstreue und der Konsistenz erbracht.

□

3.2.1.5 Probleme mit dem Faktor v des Sprunganteils

Betrachtet man die Schätzfunktion

$$\begin{aligned}
&l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda) | (\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\
&:= \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2} \sigma^2 t_i^{2H} - \pi(\Lambda) v t_i + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_i - \log(X(t_i)) \right) \\
&\cdot \left(\log(X(0)) + at_j - \frac{1}{2} \sigma^2 t_j^{2H} - \pi(\Lambda) v t_j + \log(1+v) \pi(\Lambda) t_j - \log(X(t_j)) \right),
\end{aligned}$$

so stellt man fest, dass v sowohl in der Reihe über i als auch in der Reihe über j linear und innerhalb eines Logarithmus auftaucht. Deshalb kann die bisherige Herangehensweise nicht unmittelbar angewendet werden. Eine naheliegende Idee wäre, stattdessen $\log(1+v) - v$ zu schätzen und v anschließend durch Nullstellenberechnung zu ermitteln. Dabei treten zwei Probleme auf. Einerseits muss diese Nullstelle bei einem ungünstigen Datensatz nicht existieren. Andererseits erhält man auch hier, wie bereits bei σ , zwei mögliche Schätzungen. Bei der Schätzung für σ führt das nicht zu Problemen, da die beiden möglichen Werte für σ sich nur im Vorzeichen unterscheiden und die fraktale Brownsche Bewegung mit der Gaußverteilung eine symmetrische Verteilung besitzt sowie den Erwartungswert Null hat. Deshalb ist es für das Modell in Hinblick auf praktische Anwendungen unwichtig, ob σ positiv oder negativ gewählt wird. Bei v macht es hingegen einen Unterschied, welchen der beiden möglichen Werten man wählt.

Deshalb wird im folgenden Kapitel eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich im Spezialfall

$$X(t) = X(0) + a \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dB^H(s) + v \int_0^t X(s-) d\tilde{N}_\lambda(s)$$

mit $\tilde{N}_\lambda(t)$ als kompensiertem Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ die Probleme umgehen lassen.

3.2.2 Parameterschätzungen unter Verwendung einer Approximation

Sei

$$Y(t) = X(0) + a \int_0^t Y(s) ds + \sigma \int_0^t Y(s) dB^H(s) + v\sqrt{\lambda} \int_0^t Y(s) dB_{\tilde{N}}(s) \quad (3.35)$$

eine Integralgleichung mit fraktaler Brownscher und dazu unabhängiger Brownscher Bewegung, für welche die Parameter a, σ, v und λ geschätzt werden sollen, wobei die jeweils anderen Parameter als bekannt vorausgesetzt werden.

Diese Integralgleichung kann unter anderem auch als Approximation der Integralgleichung

$$X(t) = X(0) + a \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dB^H(s) + v \int_0^t X(s-) d\tilde{N}_\lambda(s) \quad (3.36)$$

genutzt werden, wobei $\tilde{N}_\lambda(t)$ einen kompensierten Poisson-Prozess beschreibt. Sei o.B.d.A. $\{1\} \subseteq \Lambda$. Aus „Lévy Processes and Continuous-State Branching Processes: Part 1“ von Kyprianou [Ky], Kapitel 2.1, geht hervor, dass der Poisson-Prozess $N_\lambda(t)$ einen Spezialfall von $N(\Lambda, t)$ darstellt, welchen man über die Spezialisierung des Intensitätsmaßes π durch $\lambda\delta_1$ erzeugen kann. δ_1 ist dabei das Dirac-Maß an der Stelle 1.

Die Approximation beruht auf folgendem Gedanken:

Für einen festen Zeitpunkt t gelten für die Brownsche Bewegung $B_{\tilde{N}}(t) \sim N(0, t)$ und für den Poisson-Prozess $N_\lambda(t) \sim Poiss(\lambda t)$. Für ein hinreichend großes λt folgt:

$Poiss(\lambda t) \approx N(\lambda t, \lambda t)$, vgl. [EcKoTu]. Damit kann für festes t der Poisson-Prozess $N_\lambda(t)$ über die Normalverteilung mit den Parametern λt und λt approximiert werden. Dies führt zu der Approximation $N_\lambda(t) \approx \lambda t + \sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t)$, denn

$$B_{\tilde{N}}(t) \sim N(0, t) \Rightarrow \sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t) \sim N(0, \lambda t) \Rightarrow \lambda t + \sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t) \sim N(\lambda t, \lambda t).$$

In [EcKoTu], Tabelle 9.2, sieht man, dass $Y(t)$ nur für große Werte von λ gute Approximationen liefert. Des Weiteren ist hinsichtlich des Approximationsfehlers ein betragsmäßig kleines v von Vorteil, da dann der approximierter Term der Integralgleichung nur einen kleinen Einfluss auf das Gesamtergebnis hat. Geht man von einer hohen Sprungintensität aus, ist eine Schätzung von v der Integralgleichung (3.36) unter Nutzung der approximierenden Integralgleichung (3.35) durchaus sinnvoll. Auch für (3.35) erfolgen die

Parameterschätzungen über eine verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate. Diese funktioniert wie folgt:

Analog zu Satz 3.10 erhält man für die Integralgleichung (3.35) den Lösungsprozess

$$Y(t) = X(0) \exp\{at + \sigma B^H(t) + v\sqrt{\lambda}B_{\tilde{N}}(t) - \frac{1}{2}v^2\lambda t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}\}. \quad (3.37)$$

Logarithmiert man (3.37), so erhält man den logarithmierten Lösungsprozess

$$\log(Y(t)) = \log(X(0)) + at + \sigma B^H(t) + v\sqrt{\lambda}B_{\tilde{N}}(t) - \frac{1}{2}v^2\lambda t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}, \quad (3.38)$$

der den Erwartungswert

$$E[\log(Y(t))] = \log(X(0)) + at - \frac{1}{2}v^2\lambda t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} \quad (3.39)$$

besitzt.

Analog zur Herangehensweise von [BeToTu] werden wieder die Intervalle $[0, T(n)]$ mit $T(n) = \frac{n^\alpha}{n}$, $\alpha > 1$, in $n^\alpha \in \mathbb{N}$ äquidistante Zeitpunkte $t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \dots < t_{n^\alpha} = \frac{n^\alpha}{n}$ zerlegt, zu welchen Beobachtungen von $Y(t)$ vorliegen. Wird $Y(t)$ als Approximation des Prozesses $X(t)$ genutzt, werden die Beobachtungen von $X(t)$ als Beobachtungen von $Y(t)$ behandelt. Es wird sich zeigen, dass analog zu Abschnitt 3.2.1 für die Parameterschätzungen von a , v^2 und λ die Konstante $\alpha > 1$ sein muss und für die Schätzung von σ^2 sogar ein $\alpha > 4H - 1$ erforderlich ist (Satz 3.12).

Analog zu Abschnitt 3.2.1 werden Parameter gesucht, für welche die Summe der Kovarianzen zwischen $\log(Y(t_i))$ und $\log(Y(t_j))$ minimal wird. Die Summe der Kovarianzen hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} &L(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\ &:= E \left[\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (E[\log(Y(t_i))] - \log(Y(t_i)))(E[\log(Y(t_j))] - \log(Y(t_j))) \right]. \end{aligned}$$

Mit (3.39) lässt sich $L(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ weiter zu

$$\begin{aligned} &L(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\ &= E \left[\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \frac{1}{2}\lambda v^2 t_i - \log(Y(t_i)) \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\log(X(0)) + at_j - \frac{1}{2}\sigma^2 t_j^{2H} - \frac{1}{2}\lambda v^2 t_j - \log(Y(t_j)) \right) \right] \end{aligned}$$

umformen. Im Folgenden werden die Parameter a , σ^2 , v^2 und λ geschätzt, wobei die jeweils nicht zu bestimmenden Parameter als bekannt vorausgesetzt werden. Dafür kann analog zu Abschnitt 3.2.1 wieder mit Verweis auf [Ro], 3E Corollary, die Schätzfunktion

$$\begin{aligned}
& l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha}) \\
& := \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \frac{1}{2}\lambda v^2 t_i - \log(Y(t_i)) \right) \\
& \cdot \left(\log(X(0)) + at_j - \frac{1}{2}\sigma^2 t_j^{2H} - \frac{1}{2}\lambda v^2 t_j - \log(Y(t_j)) \right) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

verwendet werden. Da $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ bezüglich a , σ^2 , v^2 und λ differenzierbar ist, werden die Subdifferentialen von $L(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ durch Ableiten des Integranden $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ nach a , σ^2 , v^2 bzw. λ gebildet.

In den folgenden Abschnitten 3.2.2.1 bis 3.2.2.4 werden die Schätzer für a , σ^2 , v^2 beziehungsweise λ eingeführt. Anschließend werden im Abschnitt 3.2.2.5 die einzelnen Schätzer auf Erwartungstreue und Konsistenz hin überprüft.

3.2.2.1 Schätzung des Driftparameters a

Hierfür wird zunächst $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ aus Gleichung (3.40) bezüglich des Parameters a minimiert, indem $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ nach a abgeleitet und die Ableitung 0 gesetzt wird. Man erhält die Gleichung

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2 \lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i)) \right) t_j. \tag{3.41}$$

Stellt man (3.41) nach a um, gelangt man zum Schätzer

$$\begin{aligned}
\hat{a}(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) - \frac{1}{2}v^2 \lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))) \cdot t_j \cdot (-1)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j} \\
&= - \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) - \frac{1}{2}v^2 \lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

3.2.2.2 Schätzung des Diffusionskoeffizienten σ

Da σ in den Erwartungswert von $\log(Y(t))$ als Quadrat eingeht, siehe (3.39), kann σ nicht direkt geschätzt werden. Aber σ^2 kann mit der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate geschätzt und die Konsistenz nachgewiesen werden. Ausgangspunkt dafür ist wieder die Schätzfunktion $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$, welche diesmal nach σ^2

abgeleitet und 0 gesetzt wird

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2\lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i)) \right) \left(-\frac{1}{2}t_j^{2H} \right). \quad (3.43)$$

Das Umstellen von (3.43) nach σ^2 führt dann zum Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2\lambda t_i - \log(Y(t_i))) \cdot (-t_j^{2H}) \cdot (-1)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2}t_i^{2H}t_j^{2H}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2\lambda t_i - \log(Y(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2}t_i^{2H}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.2.2.3 Schätzung des Faktors v der Brownschen Bewegung

In diesem Abschnitt soll der Parameter v geschätzt werden. Dies gelingt wiederum nicht direkt, da v ebenfalls nur quadratisch im Erwartungswert von $\log(Y(t))$ vorkommt. Man kann aber v^2 schätzen. Hierfür wird die Schätzfunktion $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ nach v^2 minimiert

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2\lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i)) \right) \left(-\frac{1}{2}\lambda t_j \right). \quad (3.45)$$

Stellt man (3.45) nach v^2 um, erhält man den Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{v}^2(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))) \cdot (-t_j) \cdot (-1)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\lambda}{2}t_i t_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{\lambda}{2}t_i} \end{aligned} \quad (3.46)$$

für v^2 .

3.2.2.4 Schätzung von λ

Der letzte Parameter, den es zu schätzen gilt, ist λ . Dafür wird die Schätzfunktion $l(a, \sigma^2, v^2, \lambda | (\log(Y(t_i)))_{i=0, \dots, n^\alpha})$ nach λ abgeleitet und 0 gesetzt

$$0 = 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}v^2\lambda t_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i)) \right) \left(-\frac{1}{2}v^2 t_j \right). \quad (3.47)$$

Stellt man (3.47) nach λ um, gelangt man zum Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(n^\alpha) &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} (\log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))) \cdot (-t_j) \cdot (-1)}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{v^2}{2} t_i t_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \log(X(0)) + at_i - \frac{1}{2}\sigma^2 t_i^{2H} - \log(Y(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{v^2}{2} t_i}\end{aligned}\quad (3.48)$$

für λ .

3.2.2.5 Erwartungstreue und Konsistenz

In diesem Abschnitt wird die Erwartungstreue und schwache Konsistenz der Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$, $\hat{\lambda}(n^\alpha)$, $\hat{v}^2(n^\alpha)$ und $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ der approximierenden Integralgleichung (3.35) gezeigt.

Satz 3.12

Die Schätzer $\hat{a}(n^\alpha)$, $\hat{\lambda}(n^\alpha)$ und $\hat{v}^2(n^\alpha)$ mit $\alpha > 1$ sowie $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ mit $\alpha > 4H - 1$ sind bezüglich der approximierenden Integralgleichung (3.35) schwach konsistente und erwartungstreue Schätzer für a , λ , v^2 und σ^2 .

Beweis:

Nachweis der Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\hat{a}(n^\alpha)$:

Setzt man (3.38) in (3.42) ein, erhält man

$$\hat{a}(n^\alpha) = a + \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} (\sigma B^H(t_i) + v\sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t_i))}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i}.\quad (3.49)$$

In dieser Darstellung von $\hat{a}(n^\alpha)$ ist die Erwartungstreue offensichtlich. Für den Konsistenznachweis subtrahiert man auf beiden Seiten von (3.49) a . So erhält man eine Darstellung für den Abstand des Schätzers $\hat{a}(n^\alpha)$ zu a . Kann man zeigen, dass der Abstand im quadratischen Mittel gegen 0 geht, dann ist der Schätzer konsistent. Es ist

$$\begin{aligned}E[\hat{a}(n^\alpha) - a]^2 &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \sigma B^H(t_i) + v\sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t_i)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} t_i}\right]^2 \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) + v^2 \lambda \min\{t_i, t_j\}}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j}.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) &\leq \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H}) \\ &\leq \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{n^\alpha}{n}\right)^{2H} = \sigma^2 \frac{n^{\alpha(2+2H)}}{n^{2H}}, \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} v^2 \lambda \min\{t_i, t_j\} \leq v^2 \lambda \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{n^\alpha}{n} = v^2 \lambda \frac{n^{3\alpha}}{n}$$

und

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} t_i t_j = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i \right)^2 = \frac{n^{2\alpha}(n^\alpha + 1)^2}{4n^2} \geq \frac{n^{4\alpha}}{4n^2}$$

folgt

$$\begin{aligned} E[\hat{a}(n^\alpha) - a]^2 &\leq 4 \left(\sigma^2 \cdot n^{(2-2H)+\alpha(2+2H-4)} + v^2 \lambda \cdot n^{(2-1)+\alpha(3-4)} \right) \\ &\leq 4 \left(\sigma^2 \cdot n^{(2-2H)-\alpha(2-2H)} + v^2 \lambda \cdot n^{1-\alpha} \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

für $\alpha > 1$. Damit ist die Konsistenz von $\hat{a}(n^\alpha)$ bezüglich der approximierenden Integralgleichung (3.35) nachgewiesen.

Nachweis der Erwartungstreue und Konsistenz des Schätzers $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$:

Um die Konsistenz dieses Schätzers zu zeigen, wird (3.38) in (3.44) eingesetzt

$$\hat{\sigma}^2(n^\alpha) = \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \sigma B^H(t_i) + v\sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t_i)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2} t_i^{2H}}. \quad (3.52)$$

Mit (3.52) folgt insbesondere die Erwartungstreue des Schätzers $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$. Als Nächstes betrachtet man die quadratische Abweichung des Schätzers $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ zum Originalwert σ^2 und zeigt, dass diese gegen 0 konvergiert

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}^2(n^\alpha) - \sigma^2]^2 &= E \left[-\frac{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \sigma B^H(t_i) + v\sqrt{\lambda} B_{\tilde{N}}(t_i)}{\sum_{i=1}^{n^\alpha} \frac{1}{2} t_i^{2H}} \right]^2 \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) + v^2 \lambda \min\{t_i, t_j\}}{\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{4} t_i^{2H} t_j^{2H}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mit elementaren Überlegungen erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) &\leq \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{\sigma^2}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H}) \\ &\leq \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \left(\frac{i}{n}\right)^{2H} = \frac{\sigma^2}{n^{2H}} n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H}\right), \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} v^2 \lambda \min\{t_i, t_j\} \leq v^2 \lambda \sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{i}{n} \leq \frac{v^2 \lambda}{n} n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H}\right)$$

und

$$\sum_{i,j=1}^{n^\alpha} \frac{1}{4} t_i^{2H} t_j^{2H} = \frac{1}{4n^{4H}} \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H}\right)^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}^2(n^\alpha) - \sigma^2]^2 &\leq 4 (\sigma^2 n^{4H-2H} + \lambda v^2 n^{4H-1}) n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i^{2H}\right)^{1-2} \\ &\leq 4 (\sigma^2 n^{2H} + \lambda v^2 n^{4H-1}) n^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n^\alpha} i\right)^{-1} \\ &= 8 (\sigma^2 n^{2H} + \lambda v^2 n^{4H-1}) n^\alpha (n^\alpha (n^\alpha + 1))^{-1} \\ &\leq 8 (\sigma^2 n^{2H} + \lambda v^2 n^{4H-1}) n^\alpha n^{-2\alpha} \\ &= 8 (\sigma^2 n^{2H} + \lambda v^2 n^{4H-1}) n^{-\alpha} \\ &= 8 (\sigma^2 n^{2H-\alpha} + \lambda v^2 n^{4H-1-\alpha}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für alle $\alpha > 4H - 1$. Also ist $\hat{\sigma}^2(n^\alpha)$ ein konsistenter Schätzer für die approximierende Integralgleichung (3.35).

Die Konsistenznachweise der Schätzer $\hat{\lambda}(n^\alpha)$ und $\hat{v}^2(n^\alpha)$ erfolgen ganz analog, womit für alle Schätzer die Konsistenz und Erwartungstreue bewiesen ist.

□

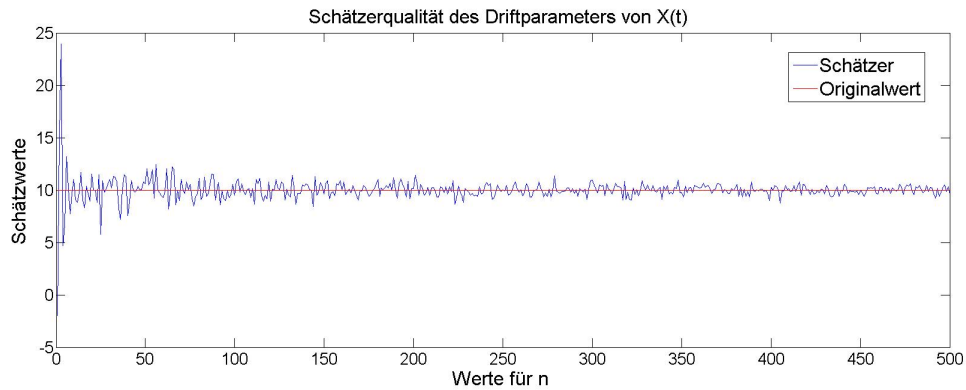
3.2.3 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Konsistenzaussagen des Satzes 3.11 für die Integralgleichung (3.36) mit fraktaler Brownscher Bewegung und kompensiertem Poisson-Prozess sowie des Satzes 3.12 für die Integralgleichung (3.35) mit Brownscher und fraktaler Brownscher Bewegung anhand von Simulationen in MATLAB für $n = 1, 2, \dots, 500$ überprüft. Für

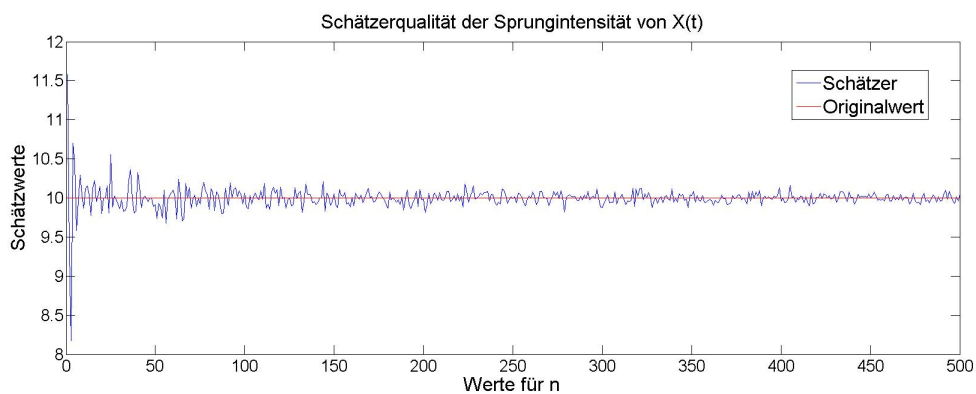
die Simulationen wurden zunächst $\alpha = 2$, $H = 0,7$, $a = \sigma = \lambda = v = 10$ und $X(0) = 1$ gesetzt.

Zuerst werden in den folgenden Grafiken 1 bis 3 die Simulationsergebnisse für (3.36) veranschaulicht:

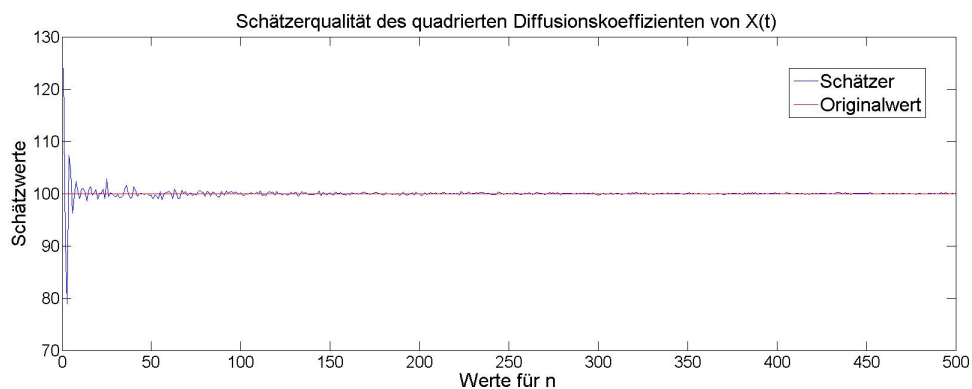
Grafik 1 ($\alpha = 2$, $H = 0,7$, $a = \sigma = \lambda = v = 10$, $X(0) = 1$):



Grafik 2 ($\alpha = 2$, $H = 0,7$, $a = \sigma = \lambda = v = 10$, $X(0) = 1$):



Grafik 3 ($\alpha = 2$, $H = 0,7$, $a = \sigma = \lambda = v = 10$, $X(0) = 1$):

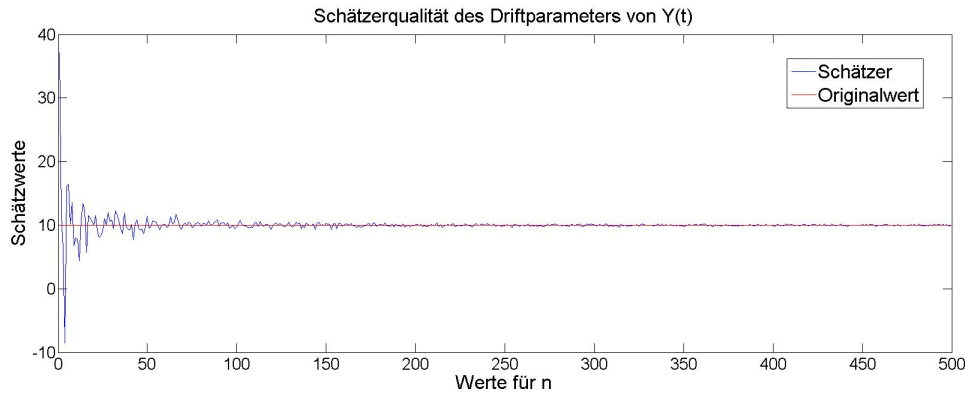


Bei allen drei Grafiken 1 bis 3 nähern sich die Schätzwerte den Originalwerten mit

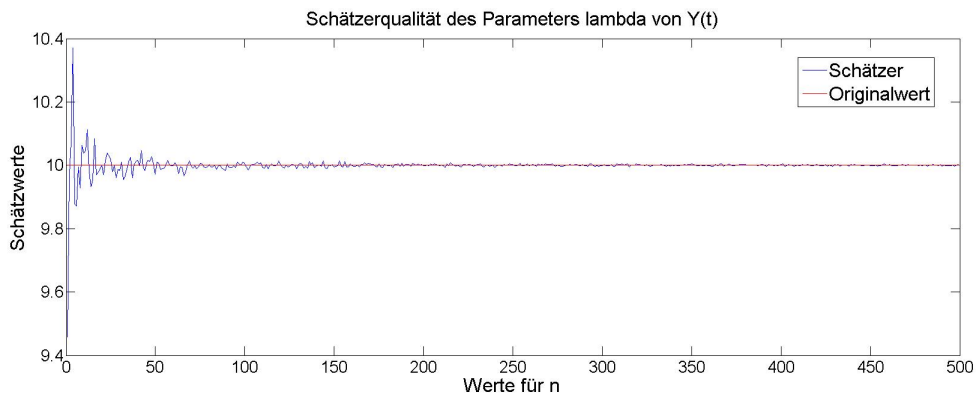
zunehmendem n an und belegen die Konsistenz der in Abschnitt 3.2.1 eingeführten Schätzer für den Driftparameter a , die Sprungintensität λ und den quadrierten Diffusionskoeffizienten σ^2 der Gleichung (3.36).

Als Nächstes werden die Konsistenzaussagen von Satz 3.12 bezüglich (3.35) durch Simulationen überprüft und die Ergebnisse grafisch dargestellt:

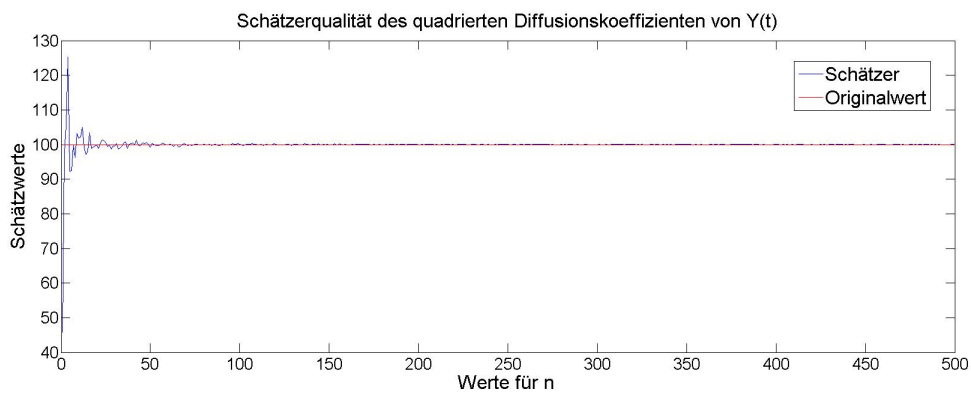
Grafik 4 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = \lambda = v = 10, X(0) = 1$):



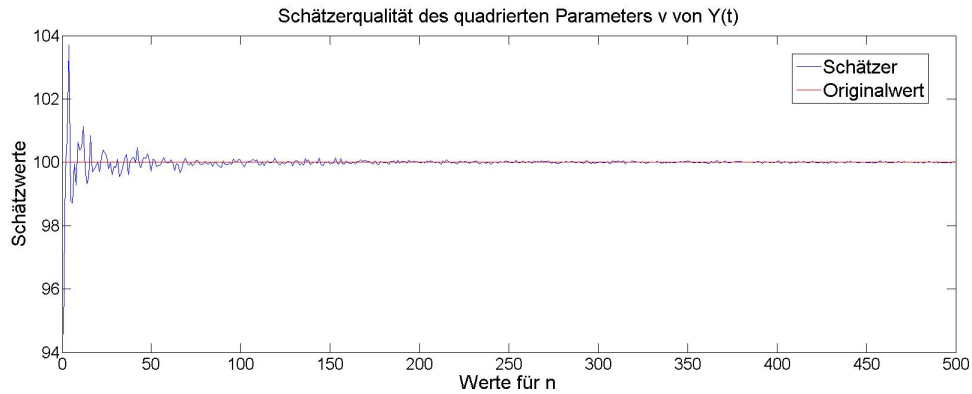
Grafik 5 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = \lambda = v = 10, X(0) = 1$):



Grafik 6 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = \lambda = v = 10, X(0) = 1$):



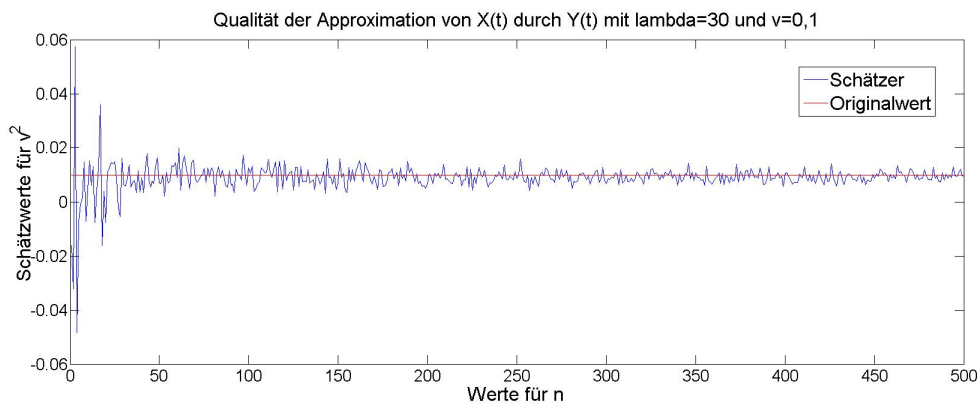
Grafik 7 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = \lambda = v = 10, X(0) = 1$):



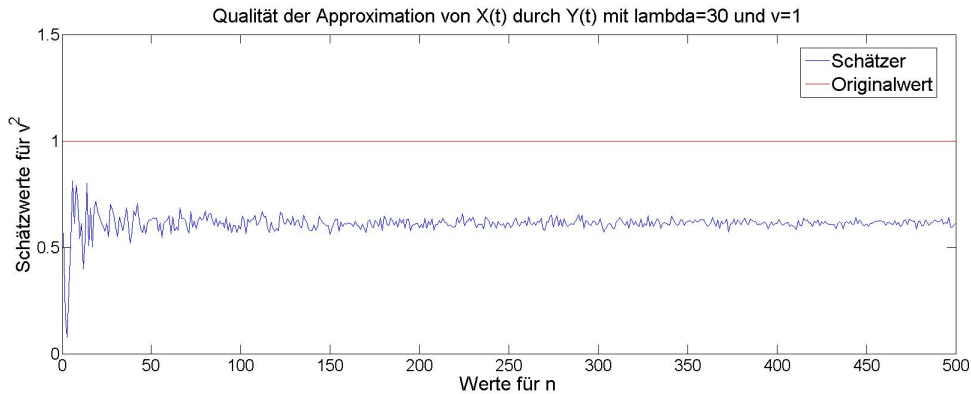
Die vier Grafiken 4 bis 7 bestätigen die in Satz 3.12 erhaltenen Konsistenzeigenschaften der Schätzer für den Drift a , den quadrierten Diffusionskoeffizienten σ^2 sowie λ und v^2 bezüglich der Integralgleichung (3.35).

In Abschnitt 3.2.2 wird diskutiert, dass sich die Gleichung (3.35) als Approximation der Gleichung (3.36) anbietet, solange man von einem großen Wert für λ und einem kleinen Wert für v ausgeht. Unter dieser Annahme kann man dann (3.36) durch (3.35) den Verteilungen nach approximieren und unter Verwendung von (3.35) den Parameter v schätzen. Die folgenden 2 Grafiken 8 und 9 veranschaulichen, wie sich unterschiedliche Werte für v auf die Schätzergebnisse auswirken:

Grafik 8 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = 10, \lambda = 30, v = 0,1, X(0) = 1$):



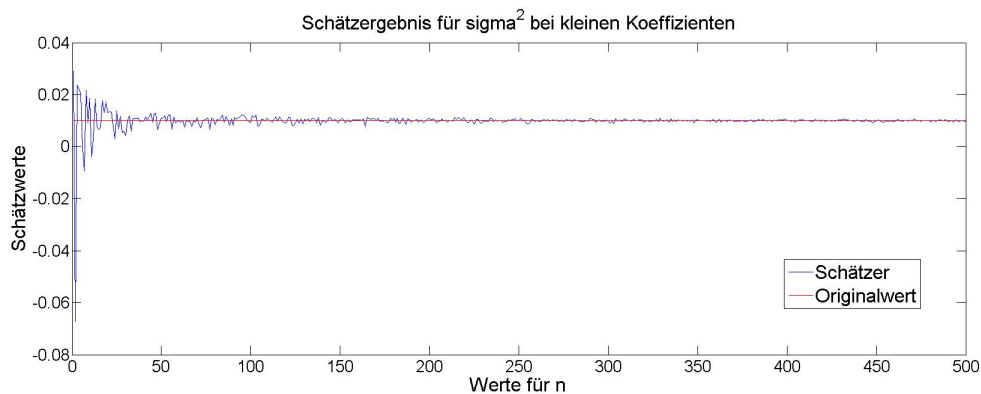
Grafik 9 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = 10, \lambda = 30, v = 1, X(0) = 1$):



Wie die Grafik 8 zeigt, stimmen bei $v = 0,1$ und $\lambda = 30$ Schätz- und Originalwerte sehr gut überein. Eine Erhöhung des Faktors v auf $v = 1$, wie in Grafik 9 dargestellt, führt allerdings bereits zu deutlich schlechteren Schätzwerten. Dies ist eine Auswirkung des Approximationsfehlers, welcher aus der Approximation des Poisson-Prozesses durch die Brownsche Bewegung resultiert. Je größer v betragsmäßig ist, um so stärker wirkt sich der Approximationsfehler auf das Schätzergebnis aus, da der approximierter Term der Integralgleichung stärker gewichtet wird.

Da $\pi(\Lambda)$ sowie λ Parameter darstellen, welche die Sprungintensität modellieren, sind hier nur positive Werte sinnvoll. Deshalb wurde auch $\pi(\Lambda) > 0$ beziehungsweise $\lambda > 0$ vorausgesetzt. Die Werte von σ^2 und v^2 können ebenfalls nicht negativ werden, ihre Schätzer hingegen schon, was die folgende Grafik 10 verdeutlicht:

Grafik 10 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = \sigma = \lambda = v = 0,1, X(0) = 1$):



Falls man also bei den Schätzungen für σ^2, v^2 oder $\pi(\Lambda)$ beziehungsweise λ zu negativen Schätzergebnissen kommt, sollte man zunächst versuchen, die Anzahl der zur Verfügung stehenden Messwerte zu erhöhen. Auf Grund der Erwartungstreue und Konsistenz der Schätzer kann man dadurch eine Verbesserung der Schätzqualität erwarten.

Wenn eine Vergrößerung des Datensatzes nicht möglich ist, stellt sich die Frage nach einer sinnvollen Annahme für den gesuchten Parameter. Da es mit Blick auf die Grafik bei

Originalwerten nahe Null wahrscheinlicher ist, negative Werte für einen eigentlich positiven Originalwert zu erhalten, sollte in diesen Fällen eine positive aber sehr kleine Zahl als Schätzer für den gesuchten Originalwert gewählt werden. Die Grafiken zeigen, dass bei den durchgeführten Simulationen der Parameter $a = \sigma = \lambda = v = 10$ nie negative Schätzungen aufgetreten sind (abgesehen von einem einzelnen Wert bei sehr kleinem n für den Driftparameter), während bei $a = \sigma = \lambda = v = 0,1$ die ersten Schätzer für σ^2 durchaus negative Werte annehmen können.

Mit den Sätzen 3.11 und 3.12 wurde die Konsistenz des Schätzers des Diffusionsparameters σ^2 für $\alpha > 4H - 1$ gezeigt. Um die Aussagen dieser Sätze für $H \geq 0,75$ zu überprüfen, ist es also erforderlich α zu vergrößern. Mit $\alpha = 3$ kann dann auch für größere Hurst-Parameter die Konsistenz der Parameter mit Hilfe von Simulationen veranschaulicht werden. Allerdings benötigt man für $n = 100$ bereits $n^3 = 1000000$ Messwerte, was dazu führt, dass man trotz wesentlich höherer Laufzeit deutlich weniger Punkte für die MATLAB-Grafik erzeugen kann. Trotzdem zeigt auch eine Simulation mit $H = 0,9$ (Anhang, Grafiken 16 bis 22) die hohe Konvergenzgeschwindigkeit für die Schätzer der Parameter a, σ^2, v^2 beziehungsweise λ . Auch die Wahl von unterschiedlich großen Werten für die Parameter ($\alpha = 2, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11$ und $H = 0,7$) hatte keinen wesentlichen Einfluss auf die Konsistenz der einzelnen Schätzer (Anhang 6.3, Grafik 23 bis Grafik 29).

Kapitel 4

Eine inhomogene stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und fraktalem kompensiertem Poisson-Maß

4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer inhomogenen stochastischen Integralgleichung

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine stochastische Integralgleichung mit fraktaler Brownscher Bewegung und fraktalem Poisson-Maß zu lösen, welche sowohl homogene als auch inhomogene Terme enthält. Damit bietet die im Folgenden betrachtete stochastische Integralgleichung mehr Freiheiten für praktische Modelle als die Integralgleichung (3.10), wobei man allerdings schwächere Eigenschaften des Lösungsprozesses tolerieren muss.

Der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 3.10 des Abschnitts 3.1 wird unter Verwendung von Satz 2.7 geführt. Dafür ist die Voraussetzung des deterministischen Diffusionskoeffizienten $\sigma(t)$ wesentlich. Der folgende Beweis erfolgt ohne Satz 2.7, sodass auch zufällige Diffusionskoeffizienten $\sigma(t, \omega)$ betrachtet werden können.

Um Protter's Theorem 37 anwenden zu können, werden in Satz 3.10 auch die Koeffizienten $a(t)$ und $v(y, t)$ als deterministisch und stetig vorausgesetzt. Da Protter's Theorem 37 für den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz allerdings ebenfalls keine Rolle spielt, können auch die Koeffizienten $a(t)$ und $v(y, t)$ stochastisch gewählt werden.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz dieses Abschnitts wird für stochastische Prozesse des Raums $(S)_{-1}$ betrachtet. Damit können sämtliche Definitionen und Hilfssätze des dritten Kapitels auch hier wieder verwendet werden. Der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfolgt analog zu [HoØkUbZh], Theorem 3.1.1.

Satz 4.1 (Existenz- und Eindeigkeitssatz)

Seien $a(t), \sigma(t), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, t), \dot{N}^{H_2}(y, t) \rangle \pi(dy)$ und $b(t)$ vier in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, stetige stochastische Prozesse. Sei weiter $X(0) \in (S)_{-1}$ eine Zufallsvariable, dann besitzt die Integralgleichung

$$\begin{aligned} X(t) = & X(0) + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle ds \\ & + \int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \end{aligned} \quad (4.1)$$

die eindeutige in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbare $(S)_{-1}$ -wertige Lösung

$$\begin{aligned} X(t) = & \left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right\rangle \\ & + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\} \right\rangle, b(s, \omega) \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird die Existenz einer in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbaren Lösung angenommen und gezeigt, dass diese Lösung der Gleichung (4.2) entspricht. Anschließend wird von Gleichung (4.2) ausgegangen und gezeigt, dass diese sich durch die Integralgleichung (4.1) charakterisieren lässt.

Angenommen, es existiert eine in $(S)_{-1}$ stetig differenzierbare Lösung.

Über die Hermite-Transformation kann (4.1) in eine deterministische Integralgleichung überführt werden. Mit den Stetigkeitsbedingungen an die Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X(t))(z) = & \mathcal{H} \left(X(0) + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds \right. \\ & \left. + \int_0^t \langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \\ & \left. + \int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \right) (z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{H}(X(0))(z) + \int_0^t \mathcal{H}(b(s, \omega))(z) ds + \int_0^t \mathcal{H}(\langle a(s, \omega), X(s) \rangle)(z) ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{H}(\langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle)(z) ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{H}\left(\left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \left\langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \right\rangle \pi(dy) \right\rangle\right)(z) ds.
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.1 erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X(t))(z) &= \mathcal{H}(X(0))(z) + \int_0^t \mathcal{H}(b(s, \omega))(z) ds + \int_0^t \mathcal{H}(a(s, \omega))(z) \mathcal{H}(X(s))(z) ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{H}(\sigma(s, \omega))(z) \mathcal{H}(X(s))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(s))(z) ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{H}(X(s))(z) \mathcal{H}\left(\int_{\mathbb{R}} \left\langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \right\rangle \pi(dy)\right)(z) ds.
\end{aligned}$$

Dies ist mit der Annahme, dass $X(t)$ stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$ ist, und Satz 3.7 äquivalent zur Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}(X(t))(z)}{\partial t} &= \mathcal{H}(b(t, \omega))(z) + \mathcal{H}(a(t, \omega))(z) \mathcal{H}(X(t))(z) \\
&+ \mathcal{H}(\sigma(t, \omega))(z) \mathcal{H}(X(t))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(t))(z) \\
&+ \mathcal{H}(X(t))(z) \mathcal{H}\left(\int_{\mathbb{R}} \left\langle v(y, t, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, t) \right\rangle \pi(dy)\right)(z)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

bezüglich $\mathcal{H}(X(t))(z)$ mit Startwert $\mathcal{H}(X(0))(z)$. Diese deterministische Differentialgleichung besitzt die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(X(t))(z) \\
&= \mathcal{H}(X(0))(z) \exp \left\{ \int_0^t \mathcal{H}(a(s, \omega))(z) ds + \int_0^t \mathcal{H}(\sigma(s, \omega))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(s))(z) ds \right. \\
&+ \left. \int_0^t \mathcal{H}\left(\int_{\mathbb{R}} \left\langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \right\rangle \pi(dy)\right)(z) ds \right\} \\
&+ \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t \mathcal{H}(a(u, \omega))(z) du + \int_s^t \mathcal{H}(\sigma(u, \omega))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(u))(z) du \right. \\
&+ \left. \int_s^t \mathcal{H}\left(\int_{\mathbb{R}} \left\langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \right\rangle \pi(dy)\right)(z) du \right\} \mathcal{H}(b(s, \omega))(z) ds
\end{aligned} \tag{4.4}$$

für alle $z = (z_W, z_N)$ aus einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$.

Mit Satz 3.1 gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X(t))(z) = & \mathcal{H} \left(\left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right) \\
& + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\} \right\rangle, b(s, \omega) \right\rangle ds \Big) (z),
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
X(t) = & \left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right) \\
& + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\} \right\rangle, b(s, \omega) \right\rangle ds
\end{aligned}$$

folgt. Die in Gleichung (4.4) beschriebene komplexwertige Funktion ist stetig. Mit der Stetigkeit der Koeffizienten und der Stetigkeit von $\mathcal{H}(X(t))(z)$ folgt aus Gleichung (4.3) die Stetigkeit von $\frac{\partial \mathcal{H}(X(t))(z)}{\partial t}$ und mit der Kompaktheit des Intervalls $[0, T]$ die Beschränktheit für alle z aus einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$. Also ist Satz 3.7 anwendbar und somit $X(t)$ stetig differenzierbar in $(S)_{-1}$. Damit wurde der erste Teil des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes gezeigt.

Sei jetzt

$$\begin{aligned}
X(t) = & \left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right) \\
& + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\} \right\rangle, b(s, \omega) \right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Hermite-Transformation, des Satzes 3.1 und der Stetigkeitsbedingungen an die Koeffizienten folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X(t))(z) &= \mathcal{H} \left(\left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right) \\
&\quad \left. \left. \left. + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\}, b(s, \omega) \right\rangle ds \right) (z) \\
&= \mathcal{H}(X(0))(z) \exp \left\{ \int_0^t \mathcal{H}(a(s, \omega))(z) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \mathcal{H}(\sigma(s, \omega))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(s))(z) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \mathcal{H} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right) (z) ds \right\} \\
&\quad \left. + \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t \mathcal{H}(a(u, \omega))(z) du + \int_s^t \mathcal{H}(\sigma(u, \omega))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(u))(z) du \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_s^t \mathcal{H} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) \right) (z) du \right\} \mathcal{H}(b(s, \omega))(z) ds \quad (4.5)
\end{aligned}$$

für alle z aus einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathcal{B}_{r_W}(\delta_W) \times \mathcal{B}_{r_N}(\delta_N)$, sodass die Hermite-Transformation wohldefiniert ist. Für jedes dieser z ist (4.5) die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}(X(t))(z)}{\partial t} &= \mathcal{H}(b(t, \omega))(z) + \mathcal{H}(a(t, \omega))(z) \mathcal{H}(X(t))(z) \\
&\quad + \mathcal{H}(\sigma(t, \omega))(z) \mathcal{H}(X(t))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(t))(z) \\
&\quad + \mathcal{H}(X(t))(z) \mathcal{H} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle v(y, t, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, t) \rangle \pi(dy) \right) (z)
\end{aligned}$$

mit Startwert $\mathcal{H}(X(0))(z)$ beziehungsweise

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X(t))(z) &= \mathcal{H}(X(0))(z) + \int_0^t \mathcal{H}(b(s, \omega))(z) ds + \int_0^t \mathcal{H}(a(s, \omega))(z) \mathcal{H}(X(s))(z) ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{H}(\sigma(s, \omega))(z) \mathcal{H}(X(s))(z) \mathcal{H}(W^{H_1}(s))(z) ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{H}(X(s))(z) \mathcal{H} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right) (z) ds.
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.1 folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X(t))(z) &= \mathcal{H}\left(X(0) + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds \right. \\ &\quad + \int_0^t \langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle ds \\ &\quad \left. + \int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds\right)(z). \end{aligned}$$

Durch Rücktransformation erhält man die Integralgleichung (4.1). Also kann (4.2) durch (4.1) charakterisiert werden. Zusammen folgt die Behauptung. \square

Folgerung 4.1

Seien $a(t), \sigma(t), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, t), \dot{N}^{H_2}(y, t) \rangle \pi(dy), b_1(t), b_2(t)$ und $\int_{\mathbb{R}} \langle b_3(y, t), \dot{N}^{H_4}(y, t) \rangle \pi(dy)$ sechs stochastische in $(S)_{-1}$ bezüglich der Zeit stetige Prozesse. Sei weiter $X(0) \in (S)_{-1}$ eine Zufallsvariable. Dann besitzt die inhomogene stochastische Integralgleichung

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \\ &\quad + \int_0^t b_1(s, \omega) ds + \int_0^t \langle b_2(s, \omega), W^{H_3}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle b_3(y, s, \omega), \dot{N}^{H_4}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \end{aligned} \tag{4.6}$$

die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\langle X(0), \left\langle \exp \left\{ \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), W^{H_1}(s) \rangle ds \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) ds \right\} \right\rangle \right\rangle \\ &\quad + \int_0^t \left\langle \left\langle \exp \left\{ \int_s^t a(u, \omega) du + \int_s^t \langle \sigma(u, \omega), W^{H_1}(u) \rangle du \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, u, \omega), \dot{N}^{H_2}(y, u) \rangle \pi(dy) du \right\} \right\rangle, \\ &\quad \left. b_1(s, \omega) + \langle b_2(s, \omega), W^{H_3}(s) \rangle + \int_{\mathbb{R}} \langle b_3(y, s, \omega), \dot{N}^{H_4}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Beweis:

Setze $b(t) := b_1(t) + \langle b_2(t), W^{H_3}(t) \rangle + \int_{\mathbb{R}} \langle b_3(y, t), \dot{\tilde{N}}^{H_4}(y, t) \rangle \pi(dy)$. Dann folgt die Behauptung mit Satz 4.1. □

In der folgenden Bemerkung wird ein Zusammenhang zwischen den Existenz- und Eindeutigkeitsätzen 3.10 aus Abschnitt 3.1 und 4.1 dieses Abschnitts aufgezeigt.

Bemerkung 4.1

(i) Sei

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle, W^{H_1}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{\tilde{N}}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten dieser Integralgleichung den Bedingungen von Satz 4.1 genügen. Mit Satz 4.1 folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten stetig differenzierbaren Lösungsprozesses $X(t)$ in $(S)_{-1}$. Nach Voraussetzung ist $\int_{\mathbb{R}} \langle v(y, t, \omega), \dot{\tilde{N}}^{H_2}(y, t) \rangle \pi(dy)$ ein in $(S)_{-1}$ stetiger Prozess. Mit Satz 3.9 und der Assoziativität des Wick-Produkts folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\langle X(s), \int_{\mathbb{R}} \langle v(y, s, \omega), \dot{\tilde{N}}^{H_2}(y, s) \rangle \pi(dy) \right\rangle ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle X(s), \langle v(y, s, \omega), \dot{\tilde{N}}^{H_2}(y, s) \rangle \right\rangle \pi(dy) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\langle \langle X(s), v(y, s, \omega) \rangle, \dot{\tilde{N}}^{H_2}(y, s) \right\rangle \pi(dy) ds \\ &=: \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle X(s), v(y, s, \omega) \rangle d\tilde{N}^{H_2}(y, s) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$. Somit kann die Integralgleichung (4.1) zu

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \langle a(s, \omega), X(s) \rangle ds + \int_0^t \langle \sigma(s, \omega), X(s) \rangle dB^{H_1}(s) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \langle X(s), v(y, s, \omega) \rangle d\tilde{N}^{H_2}(y, s) \end{aligned} \tag{4.7}$$

umgeformt werden.

(ii) Seien $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine kompakte Menge, $T \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante und $H \in (0, 1)$. Seien weiter $X(0) \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $a, \sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \Lambda \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

drei stetige deterministische Funktionen. Darüber hinaus sei $M_{[0,t]}\sigma \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ für alle $t \in [0, T]$.

Im Beweis von Satz 3.10 wurde bereits gezeigt, dass aus der Kompaktheit von $\Lambda \times [0, T]$ und der Stetigkeit von $v(y, t)$ bezüglich (y, t) die Stetigkeit des stochastischen Prozesses $\int_{\Lambda} v(y, t) \tilde{N}(y, t) \pi(dy)$ bezüglich der Zeit t in $(S)_{-1}$ folgt.

Deshalb erhält man sowohl mit Satz 3.10 als auch mit Satz 4.1 unter Verwendung von (i) für die Integralgleichung

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)X(s) ds + \int_0^t \sigma(s)X(s) dB^H(s) + \int_0^t \int_{\Lambda} v(y, s)X(s-) d\tilde{N}(y, s)$$

den eindeutig bestimmten Lösungsprozess

$$X(t) = X(0) \exp \left(\int_0^t \sigma(s)W^H(s) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (M_{[0,t]}\sigma(s))^2 ds \right) \cdot \left(\exp \left(\int_0^t \left(a(s) - \int_{\Lambda} v(y, s) \pi(dy) \right) ds \right) \prod_{y \in \Lambda, 0 \leq s \leq t} [1 + v(y, s)\Delta N(y, s)] \right).$$

Dass hier $X(s-)$ anstelle von $X(s)$ im Sprungintegral der Integralgleichung verwendet wird, spielt für Satz 4.1 keine Rolle, da der Beweis von Satz 4.1 nur die stetige Differenzierbarkeit von $X(t)$ in $(S)_{-1}$ benötigt. Für den Beweisgedanken von Satz 3.10 ist es allerdings entscheidend, dass $X(s-)$ im Sprungintegral steht, da man hier das Integral als Itô-Integral umschreibt und dies nur mit einem vorhersagbaren Integranden möglich ist.

Bemerkung 4.2

Der Lösungsprozess aus Satz 4.1 ist im Allgemeinen $(S)_{-1}$ -wertig. Kann man die Existenz des ersten und zweiten Moments von $X(t)$ für positive t nachweisen, dann liegt der Lösungsprozess aufgrund der Einbettung $(S)_1 \subset L^2(\Omega, \mu) \subset (S)_{-1}$ auch in $L^2(\Omega, \mu)$.

4.2 Parameterschätzungen für eine inhomogene stochastische Integralgleichung

Sei

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mathcal{K}(\mu - X(s)) ds + \sigma B^H(t) + v\theta^H(t) \quad (4.8)$$

mit Startwert $X(0)$ gegeben. Dabei seien $\mathcal{K} > 0$, μ, σ und v reellwertige Parameter, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, $B^H(t)$ eine fraktale Brownsche Bewegung und $\theta^H(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} M_{[0,t]}(s)y d\tilde{N}(y, s)$

eine fraktale Erweiterung des reinen Lévy-Sprungprozesses $\theta(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y d\tilde{N}(y, s)$. $B^H(t)$ und $\theta^H(t)$ seien stochastisch unabhängig voneinander.

Die Parameter \mathcal{K} und μ sind sogenannte „Mean-Reversion“-Parameter. Unter Mean-Reversion versteht man die Tendenz von Variablen, nach einer Abweichung wieder zum langfristigen Mittelwert, dem Mean-Reversion-Level μ , zurückzukehren. Die Mean-Reversion-Rate \mathcal{K} gibt an, wie schnell die Abweichung vom langfristigen Durchschnittswert wieder ausgeglichen wird.

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Parameter μ und \mathcal{K} anhand von Beobachtungen für $X(t)$ zu schätzen. Dabei wird zunächst der Parameter μ unter der Annahme, dass \mathcal{K} bekannt ist, geschätzt. Für die Schätzung von \mathcal{K} werden sämtliche anderen Parameter σ , v , μ , $H > \frac{1}{2}$ und $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R}, \pi)}$ als bekannt vorausgesetzt.

4.2.1 Schätzung des Mean-Reversion-Levels μ bei bekannter Mean-Reversion-Rate \mathcal{K}

Zur Schätzung des Parameters μ wird der Lösungsprozess von (4.8) benötigt. Den Lösungsprozess erhält man durch Anwendung von Folgerung 4.1 des Abschnitts 4.1

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) \exp\{-\mathcal{K}t\} + \int_0^t \mathcal{K}\mu \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) + \int_0^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aus (4.9) folgt

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= X(0) \exp\{-\mathcal{K}t\} + \int_0^t \mathcal{K}\mu \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} ds \\ &= X(0) \exp\{-\mathcal{K}t\} + \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t\}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Man setzt $T(n) = \alpha n$ mit $\alpha > 0$ und $t_i = \alpha i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Der Parameter μ soll wie bei den Parameterschätzungen im homogenen Fall von Abschnitt 3.2 über die Minimierung der Summe der Kovarianzen geschätzt werden. Diese Summe hat die Gestalt

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n E[(X(t_i) - E[X(t_i)])(X(t_j) - E[X(t_j)])] \\ &= E \left[\sum_{i,j=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\} - \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})) \right. \\ &\quad \left. \cdot (X(t_j) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_j\} - \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\})) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da die Summe die Bedingungen für einen normalen konvexen Integranden erfüllt, stimmen wie im homogenen Fall gemäß Rockafellar [Ro] das Subdifferential des äußeren Erwartungswertes und das Subdifferential der Summe mit Wahrscheinlichkeit Eins überein. Es genügt also

$$\sum_{i,j=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\} - \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})) \cdot (X(t_j) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_j\} - \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\}))$$

zu minimieren. Da die Summe bezüglich μ differenzierbar ist, wird das Subdifferential bezüglich μ durch deren Ableitung festgelegt. Daher wird die Summe zunächst nach μ abgeleitet und Null gesetzt:

$$0 = -2 \sum_{i,j=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\} - \mu(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})) (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\}). \quad (4.12)$$

Stellt man die Gleichung (4.12) nach μ um, erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(n) &= \frac{\sum_{i,j=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\}) (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\})}{\sum_{i,j=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\})}{\sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})} \end{aligned} \quad (4.13)$$

als Schätzer für den Parameter μ .

Satz 4.2

Der Schätzer $\hat{\mu}(n)$ ist ein erwartungstreu und schwach konsistenter Schätzer für den Mean-Reversion-Level μ .

Beweis:

Setzt man (4.9) in (4.13) ein, folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(n) &= \mu + \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_i} \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t_i - s)\} dB^H(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{t_i} v \exp\{-\mathcal{K}(t_i - s)\} d\theta^H(s) \right) \right] \left[\sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da sowohl die fraktale Brownsche Bewegung als auch die fraktale Erweiterung $\theta^H(t)$ des reinen Lévy-Sprungprozesses $\theta(t)$ den Erwartungswert Null haben, gilt $E[\hat{\mu}(n)] = \mu$. Der Schätzer $\hat{\mu}(n)$ ist also erwartungstreu.

Als Nächstes soll die Konsistenz des Schätzers $\hat{\mu}(n)$ nachgewiesen werden. Hierfür wird gezeigt, dass der Abstand zwischen dem Schätzer $\hat{\mu}(n)$ und dem Originalwert μ für $n \rightarrow \infty$ im quadratischen Mittel gegen Null konvergiert. Mit Gleichung (4.14) gilt

$$\begin{aligned}
& E [\hat{\mu}(n) - \mu]^2 \\
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_i} \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t_i - s)\} dB^H(s) + \int_0^{t_i} v \exp\{-\mathcal{K}(t_i - s)\} d\theta^H(s) \right) \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\}) \right)^{-1} \right]^2 \\
&= C_H^2 (v^2 m^2 + \sigma^2) \frac{\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \frac{\exp\{-\mathcal{K}(t_i+t_j-x_1-x_2)\}}{(|x_2-x_3||x_1-x_3|)^{\frac{3}{2}-H}} dx_1 dx_2 dx_3}{\sum_{i,j=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\})}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

wobei C_H die Konstante des fraktalen Kerns M , Definition 2.8, darstellt und $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R},\pi)}$ ist.

Zunächst soll der Zähler abgeschätzt werden:

Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \frac{\exp\{-\mathcal{K}(t_i+t_j-x_1-x_2)\}}{(|x_2-x_3||x_1-x_3|)^{\frac{3}{2}-H}} dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\{-\mathcal{K}(t_i+t_j-x_1-x_2)\}}{(|x_2-x_3||x_1-x_3|)^{\frac{3}{2}-H}} dx_3 dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{-\mathcal{K}(t_i+t_j-x_1-x_2)\} \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} (|x_2-x_3||x_1-x_3|)^{H-\frac{3}{2}} dx_3 dx_1 dx_2. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Man substituiere $s = x_3 - x_1$ und anschließend $r = \frac{s}{(x_2-x_1)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (|x_2-x_3||x_1-x_3|)^{H-\frac{3}{2}} dx_3 &= \int_{\mathbb{R}} (|(x_2-x_1)-s||s|)^{H-\frac{3}{2}} ds \\
&= |x_2-x_1|^{2H-2} \int_{\mathbb{R}} (|1-r||r|)^{H-\frac{3}{2}} dr \\
&= |x_2-x_1|^{2H-2} C_{H,2}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

wobei $C_{H,2} := \int_{\mathbb{R}} (|1-r||r|)^{H-\frac{3}{2}} dr$ ist.

Setzt man (4.17) in (4.16) ein und erweitert geschickt, folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j - x_1 - x_2)\} \int_{\mathbb{R}} (|x_2 - x_3||x_1 - x_3|)^{H-\frac{3}{2}} dx_3 dx_1 dx_2 \\
&= C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j - x_1 - x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&= C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j)\} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&= C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j)\} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&\cdot \frac{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)}{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

wobei der letzte Faktor sich für die folgenden Abschätzungen als nützlich erweisen wird.

Für $s \in [t_j, t_{j+1}]$ gelten

$$\begin{aligned}
0 &< \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j)\} = \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j + r - r + s - s)\} \\
&= \exp\{\mathcal{K}(r - t_i)\} \exp\{\mathcal{K}(s - t_j)\} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
&\leq \exp\{\mathcal{K}(t_{i+1} - t_i)\} \exp\{\mathcal{K}(t_{j+1} - t_j)\} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&\leq \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Damit folgt für (4.18)

$$\begin{aligned}
& C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j)\} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&\cdot \frac{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)}{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)} \\
&\leq C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\exp\{\mathcal{K}(t_{i+1} - t_i)\} \exp\{\mathcal{K}(t_{j+1} - t_j)\}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
&\cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $t_i = \alpha i$ und $t_j = \alpha j$ für alle i und j gelten, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\exp\{\mathcal{K}(t_{i+1} - t_i)\} \exp\{\mathcal{K}(t_{j+1} - t_j)\}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
& \cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr \\
& = C_{H,2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_{\alpha i}^{\alpha(i+1)} \int_{\alpha j}^{\alpha(j+1)} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
& \cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr \\
& \leq C_{H,2} \sum_{i,j=0}^n \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_{\alpha i}^{\alpha(i+1)} \int_{\alpha j}^{\alpha(j+1)} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
& \cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr \\
& = C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha(n+1)} \int_0^{\alpha(n+1)} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
& \cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
& C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha(n+1)} \int_0^{\alpha(n+1)} \exp\{-\mathcal{K}(r + s)\} \\
& \cdot \int_0^r \int_0^s \exp\{\mathcal{K}(x_1 + x_2)\} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 ds dr \\
& = C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha(n+1)} \int_0^{\alpha(n+1)} \exp\{\mathcal{K}x_1\} \left(\int_{x_1}^{\alpha(n+1)} \exp\{-\mathcal{K}r\} dr \right) \\
& \cdot \exp\{\mathcal{K}x_2\} \left(\int_{x_2}^{\alpha(n+1)} \exp\{-\mathcal{K}s\} ds \right) |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
& = C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha(n+1)} \int_0^{\alpha(n+1)} (1 - \exp\{-\mathcal{K}(\alpha(n+1) - x_1)\}) \\
& \cdot (1 - \exp\{-\mathcal{K}(\alpha(n+1) - x_2)\}) |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
& \leq C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha(n+1)} \int_0^{\alpha(n+1)} |x_2 - x_1|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
& \leq \rho_{H,\alpha} C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} (\alpha(n+1))^{2H}
\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten $\rho_{H,\alpha}$.

Somit erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \frac{\exp\{-\mathcal{K}(t_i + t_j - x_1 - x_2)\}}{(|x_2 - x_3||x_1 - x_3|)^{\frac{3}{2}-H}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & \leq \rho_{H,\alpha} C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} (\alpha(n+1))^{2H} \end{aligned} \quad (4.19)$$

als Abschätzung des Zählers.

Als Nächstes wird der Nenner von (4.15) abgeschätzt.

Mit $\mathcal{K} > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\}) \\ & \geq (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_1\})^2 \sum_{i,j=1}^n 1 = (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_1\})^2 n^2. \end{aligned}$$

Mit $t_1 = \alpha$ ist also

$$\sum_{i,j=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})(1 - \exp\{-\mathcal{K}t_j\}) \geq (1 - \exp\{-\mathcal{K}\alpha\})^2 n^2. \quad (4.20)$$

Setzt man die Abschätzungen (4.19) und (4.20) in (4.15) ein, folgt schließlich die Ungleichung

$$E[\hat{\mu}(n) - \mu]^2 \leq C_H^2 (v^2 m^2 + \sigma^2) \frac{\rho_{H,\alpha} C_{H,2} \frac{\exp\{2\mathcal{K}\alpha\}}{\alpha^2} \alpha^{2H} (n+1)^{2H}}{(1 - \exp\{-\mathcal{K}\alpha\})^2 n^2},$$

welche für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Also ist $\hat{\mu}(n)$ ein erwartungstreuer und schwach konsistenter Schätzer für μ . □

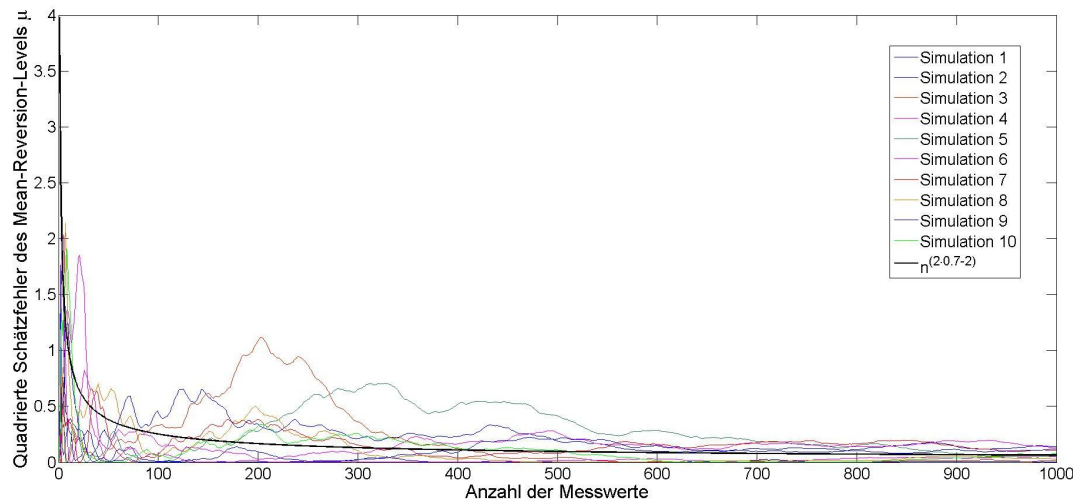
Jetzt wird die gefundene Konvergenzrate der Ordnung $O(n^{2H-2})$ mittels Simulationen überprüft. Zur Vereinfachung wird, wie bereits in Abschnitt 3.2.2, $\pi = \bar{\lambda}\delta_1$ gesetzt, wobei δ_1 dem Dirac-Maß an der Stelle 1 entspricht. Daraus folgt $m^2 = \bar{\lambda}$. Das MATLAB-Programm zur Simulation des fraktalen kompensierten Lévy-Sprungprozesses orientiert sich an dem in der Masterarbeit von Stefan Wogatzki [Wo] verwendeten Programm zum gefilterten Poisson-Prozess.

Die Gleichung (4.8) wird mit den Werten $H = 0,7$, $X(0) = 1$, $\mu = 6$, $\mathcal{K} = 2$, $v = 2$ und $\sigma = 2$ simuliert. Für die Simulation des fraktalen kompensierten Lévy-Sprungprozesses wird $\bar{\lambda} = 1$ gesetzt und als Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messwerten

$\alpha = 0,1$ gewählt.

Die folgende Grafik enthält die quadrierten Schätzfehler von zehn Simulationen der Gleichung (4.8) und die Folge $n^{2 \cdot 0,7 - 2} = n^{-0,6}$ zur Veranschaulichung des erwarteten quadrierten Schätzfehlers, also der ermittelten Konvergenzrate:

Grafik 11 ($X(0) = 1, H = 0,7, \mu = 6, \mathcal{K} = 2, \sigma = 2, v = 2, m^2 = \bar{\lambda} = 1, \alpha = 0,1$):



Diese Grafik verdeutlicht, dass die Simulationen sehr gut zu der erwarteten Rate passen. Die Fehlerabschätzung ist also sehr scharf.

4.2.2 Schätzung der Mean-Reversion-Rate \mathcal{K}

Zur Schätzung von \mathcal{K} wird ein Verfahren verwendet, welches auf dem sogenannten „alternativen“ Schätzverfahren von Hu und Nualart, ([HuNu], Gleichung (4.1)), basiert. Hu und Nualart führen darin eine Methode zur Schätzung der Mean-Reversion-Rate \mathcal{K} ein, welche auf der Anwendung eines Ergodensatzes vom Birkhoff-Typ beruht. Dieses Verfahren wird im Folgenden für die Schätzung von \mathcal{K} aus (4.8) angepasst.

Satz 4.3

Sei

$$\widehat{\mathcal{K}}(t) := \left(\frac{2H - 1}{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2) \Gamma(2H)} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s))^2 ds \right)^{-\frac{1}{2H}},$$

dann ist $\widehat{\mathcal{K}}(t)$ ein stark konsistenter Schätzer für \mathcal{K} in Gleichung (4.8).

Beweis:

Für den Konvergenznachweis des Schätzers $\widehat{\mathcal{K}}(t)$ wird auf einige Ergodizitätsaussagen zurückgegriffen. Dafür wird zunächst ein neuer stochastischer Prozess $\tilde{X}(t)$ definiert:

$$\tilde{X}(t) := \mu + \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) + \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s). \quad (4.21)$$

Offensichtlich gilt mit (4.9)

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - \tilde{X}(t)| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \left(\mu + (X(0) - \mu) \exp\{-\mathcal{K}t\} + \int_0^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) \right. \right. \\ &+ \left. \int_0^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \right) - \left(\mu + \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) \right. \\ &+ \left. \left. \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \right) \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| (\mu - \mu) + (X(0) - \mu) \exp\{-\mathcal{K}t\} \right. \\ &+ \left(\int_0^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) \right) \\ &+ \left(\int_0^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) - \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \right) \left| \right. \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| (X(0) - \mu) \exp\{-\mathcal{K}t\} - \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \sigma \exp\{\mathcal{K}s\} dB^H(s) \right. \\ &- \left. \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 v \exp\{\mathcal{K}s\} d\theta^H(s) \right| = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit Wahrscheinlichkeit Eins. Die Gleichung (4.22) ist auch erfüllt, wenn man den Grenzübergang als Grenzübergang im L^2 auffasst, da nach [HuNu], Lemma 5.1, beziehungsweise Satz 6.2 die zweiten Momente der stochastischen Integrale beschränkt und $B^H(t)$ und $\theta^H(t)$ stochastisch unabhängig voneinander sind.

Der Prozess $(\mu - \tilde{X}(t))$ ist nach den Sätzen 6.3 und 6.5 des Anhangs stationär und ergodisch. Damit kann ein Ergodensatz vom Birkhoff-Typ, Satz 6.6 im Anhang, angewendet

werden und man erhält

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s))^2 ds &= E(\mu - \tilde{X}(0))^2 \\
&= (C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-\mathcal{K}(s_1 + s_2)\} |s_1 - s_2|^{2H-2} ds_1 ds_2 \\
&= \frac{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2)}{\mathcal{K}^{2H}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-(s_1 + s_2)\} |s_1 - s_2|^{2H-2} ds_1 ds_2 \\
&= \frac{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2)}{\mathcal{K}^{2H}} \frac{\Gamma(2H)}{2H-1}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Die letzte Zeile folgt wieder mit [HuNu], Lemma 5.1, beziehungsweise Satz 6.2 des Anhangs. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s))^2 ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s))^2 ds \tag{4.24}$$

ist.

Mit dem Ergodensatz vom Birkhoff-Typ, Satz 6.6, erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s)) ds = E[\mu - \tilde{X}(0)] = 0 \tag{4.25}$$

und mit (4.22) gilt auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s)) - (\mu - \tilde{X}(s)) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\tilde{X}(s) - X(s)) ds = 0. \tag{4.26}$$

Damit ist insbesondere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s)) ds = 0. \tag{4.27}$$

Mit den Gleichungen (4.22), (4.25) und (4.27) kann die Gleichung (4.24) weiter umgeformt werden.

Nach Anwendung der dritten binomischen Formel wird der Differenzterm $((\mu - \tilde{X}(s)) - (\mu - X(s))) = X(s) - \tilde{X}(s)$ analog zu Gleichung (4.22) geschrieben

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s))^2 - (\mu - X(s))^2 ds \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t ((\mu - \tilde{X}(s)) + (\mu - X(s)))((\mu - \tilde{X}(s)) - (\mu - X(s))) ds \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(\omega)}{t} \int_0^t (2\mu - \tilde{X}(s) - X(s)) \exp\{-\mathcal{K}s\} ds
\end{aligned}$$

für

$$C(\omega) = (\mu - X(0)) - \int_{-\infty}^0 \sigma \exp\{\mathcal{K}s\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^0 v \exp\{\mathcal{K}s\} d\theta^H(s).$$

Mit den Gleichungen (4.25) und (4.27) gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(\omega)}{t} \int_0^t (2\mu - \tilde{X}(s) - X(s)) \exp\{-\mathcal{K}s\} ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(\omega)}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s)) \exp\{-\mathcal{K}s\} ds + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(\omega)}{t} \int_0^t (\mu - X(s)) \exp\{-\mathcal{K}s\} ds = 0, \end{aligned}$$

womit (4.24) folgt.

Mit den Gleichungen (4.23) und (4.24) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s))^2 ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - \tilde{X}(s))^2 ds = \frac{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2) \Gamma(2H)}{\mathcal{K}^{2H}} \frac{\Gamma(2H)}{2H-1} \\ & \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2H-1}{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2) \Gamma(2H)} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s))^2 ds = \mathcal{K}^{-2H} \\ & \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2H-1}{(C_H)^2 C_{H,2} (\sigma^2 + v^2 m^2) \Gamma(2H)} \frac{1}{t} \int_0^t (\mu - X(s))^2 ds \right)^{-\frac{1}{2H}} = \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

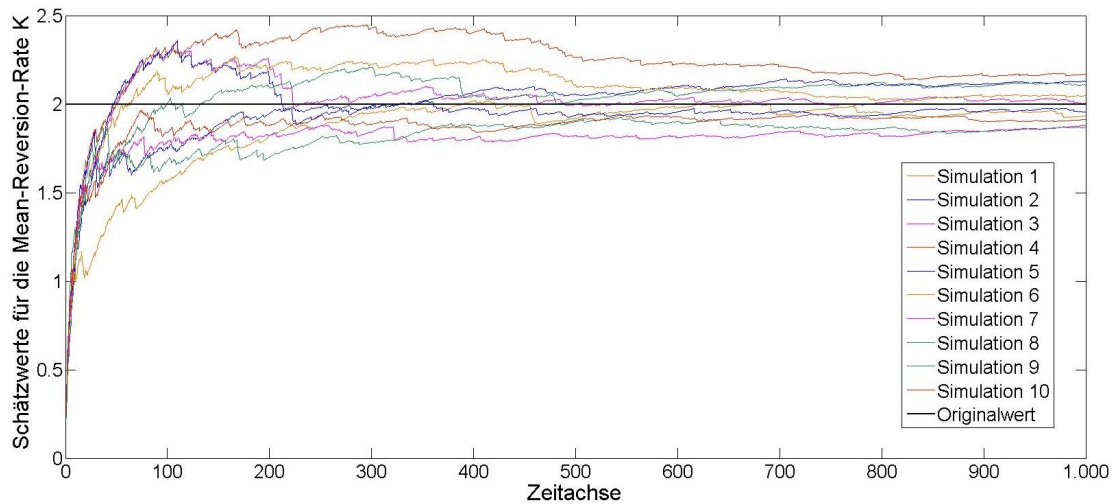
□

Damit wurde der theoretische Nachweis der starken Konsistenz erbracht. Im Folgenden wird überprüft, wie gut sich die Konsistenzeigenschaft des Schätzers für die Mean-Reversion-Rate \mathcal{K} über MATLAB-Simulationen reproduzieren lässt.

Für die Simulationen des fraktalen kompensierten Lévy-Sprungprozesses $\theta^H(t)$ wird analog zur Simulation der Konvergenzrate von $\hat{\mu}(n)$ in Abschnitt 4.2.1 das Intensitätsmaß $\pi = \bar{\lambda} \delta_1$ gesetzt.

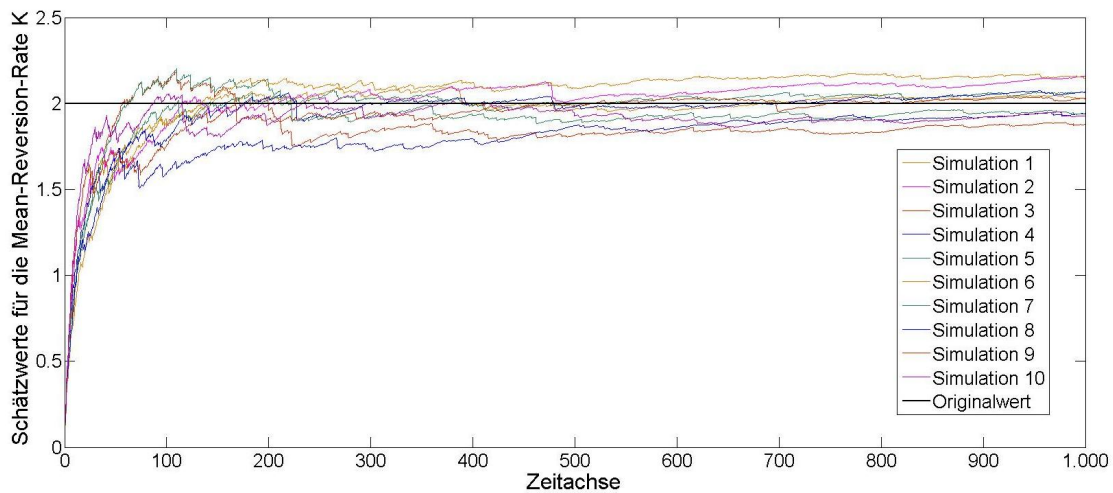
Zunächst wird die Konsistenz des Schätzers $\hat{\mathcal{K}}(t)$ unter den Bedingungen $T = 1000$, $X(0) = 1$, $\mathcal{K} = 2$, $\mu = 6$, $\sigma^2 = 4$, $v^2 = 1$ und $m^2 = \bar{\lambda} = 1$ überprüft. Die Grafik 12 bestätigt überzeugend die Konsistenz des gefundenen Schätzers.

Grafik 12 ($X(0) = 1, \mathcal{K} = 2, \mu = 6, \sigma^2 = 4, v^2 = 1, m^2 = 1, H = 0,7$):



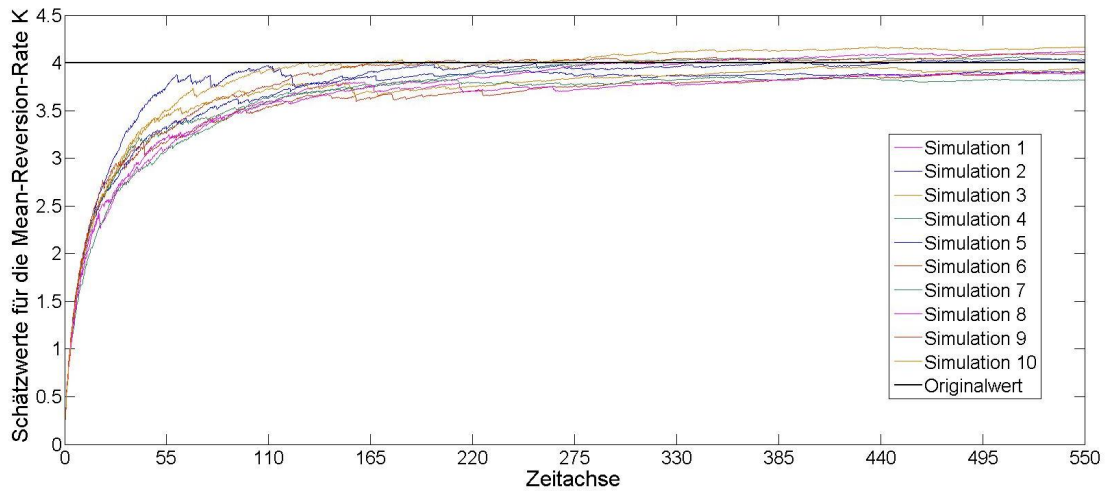
In der folgenden Grafik 13 ist zu sehen, wie sich eine Senkung des Hurst-Parameters H von 0,7 auf 0,55 auf das Schätzverfahren auswirkt:

Grafik 13 ($X(0) = 1, \mathcal{K} = 2, \mu = 6, \sigma^2 = 4, v^2 = 1, m^2 = 1, H = 0,55$):



Die Grafiken 12 und 13 zeigen deutlich, dass eine Senkung des Hurst-Parameters zu einer Verringerung der Streuung des Schätzers $\hat{\mathcal{K}}(t)$ führt. Wogatzki [Wo] kommt für den einfachen Fall $\mu = v = X(0) = 0$ zur gleichen Erkenntnis. Die nächste Simulation, welche in Grafik 14 dargestellt ist, zeigt, welchen Einfluss eine Erhöhung der Mean-Reversion-Rate von 2 auf 4 hat.

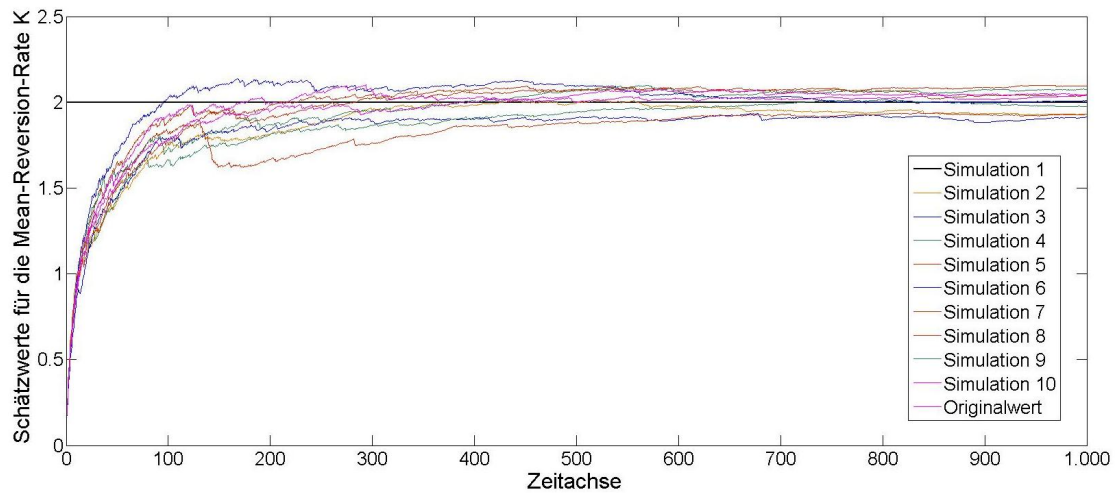
Grafik 14 ($X(0) = 1, \mathcal{K} = 4, \mu = 6, \sigma^2 = 4, v^2 = 1, m^2 = 1, H = 0,7$):



Das Schätzverfahren konvergiert für $\mathcal{K} = 4$ schneller als für $\mathcal{K} = 2$. Für $T = 550$ weist das Schätzverfahren bereits eine sehr kleine Schwankungsbreite auf. Die Konsistenzeigenschaft kann man hier also schon frühzeitig sehr deutlich erkennen.

Zu guter Letzt wird in Grafik 15 überprüft, wie sich eine Senkung der Sprungintensität von $m^2 = 1$ auf $m^2 = 0,5$ auf das Schätzergebnis auswirkt.

Grafik 15 ($X(0) = 1, \mathcal{K} = 2, \mu = 6, \sigma^2 = 4, v^2 = 1, m^2 = 0,5, H = 0,7$):



Vergleicht man Grafik 12 mit Grafik 15, so sieht man eine Abnahme der Volatilität des Schätzers, welche aus der Abnahme der Volatilität des Mean-Reversion-Prozesses $X(t)$ folgt.

Alle Grafiken bestätigen die starke Konsistenz des Schätzers. Dabei gilt: Je größer die Volatilität des Lösungsprozesses ist, desto stärker ist auch die Volatilität des Schätzers und umso größere Zeitintervalle sind nötig, um gute Schätzwerte zu erhalten.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer stochastischer Integralgleichungen nachzuweisen und Parameterschätzungen für Spezialfälle dieser Gleichungen durchzuführen. Dabei wurde zunächst in Satz 3.10 eine lineare homogene stochastische Integralgleichung, welche sowohl ein Integral bezüglich der fraktalen Brownschen Bewegung als auch ein Integral bezüglich eines reinen kompensierten Lévy-Sprungmaßes enthält, untersucht. Der Beweis von Satz 3.10 beruht im Wesentlichen auf der Anwendung von partieller Integration und Protter's Theorem 37 [Pr1]. Der Lösungsprozess, welcher hier ermittelt wurde, enthält keine Wick-Produkte und kann somit problemlos simuliert werden. Dadurch eignet sich die erhaltene Lösung sehr gut für praktische Anwendungen.

Die Umschreibung der Wick-Exponentiale über gewöhnliche Exponentialfunktionen, die Anwendung von Protter's Theorem 37 und die Sicherstellung der stetigen Differenzierbarkeit des Lösungsprozesses in $(S)_{-1}$ machten es erforderlich, deterministische stetige Koeffizienten zu verwenden.

Mit Satz 4.1 wurden Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für eine wesentlich allgemeinere Klasse von Integralgleichungen nachgewiesen. Hier werden inhomogene stochastische Integralgleichungen betrachtet, wobei die Inhomogenität durch Hinzunahme eines additiven stochastischen Prozesses hervorgerufen wird. Die inhomogene stochastische Integralgleichung wird sowohl von einer fraktalen Brownschen Bewegung als auch von einer fraktalen Modifikation eines kompensierten Lévy-Sprungmaßes getrieben und erlaubt die Arbeit mit stochastischen Koeffizienten. Der Beweis von Satz 4.1 beruht im Wesentlichen auf der Ausnutzung von Eigenschaften der Hermite-Transformation, für welche die Stetigkeit der Koeffizienten in $(S)_{-1}$ eine notwendige Bedingung ist.

Für die betrachteten Integralgleichungen (3.10) und (4.6) wurden im Spezialfall konstanter Koeffizienten Methoden zur Parameterschätzung basierend auf den Ideen der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt.

Im Abschnitt 3.2 wurde der Spezialfall (3.20) der homogenen Integralgleichung (3.10) betrachtet und dessen Parameter geschätzt. Die Ergebnisse von Abschnitt 3.2 lassen sich

wie folgt zusammenfassen:

Solange jeweils nur ein Parameter geschätzt wird, erhält man mit der Schätzmethode aus Abschnitt 3.2.1, also der Minimierung der Kovarianzen, für die Integralgleichung (3.20) mit Satz 3.11 erwartungstreue und schwach konsistente Schätzer für a , σ^2 und $\pi(\Lambda)$. Mit diesem Ansatz konnte jedoch keine Schätzung für den Vorfaktor v des Sprungterms hergeleitet werden, weil die Ableitung von $l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)|(\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ aus (3.24) im Allgemeinen keine eindeutige Nullstelle hat. $l(a, \sigma^2, v, \pi(\Lambda)|(\log(X(t_i)))_{i=1, \dots, n^\alpha})$ kann bezüglich v keine, genau eine oder zwei Minima besitzen. Deshalb wurde in der Folge (3.20) weiter spezialisiert, indem die Bedingung $\pi(y) = \lambda \delta_1(y)$ an das Intensitätsmaß π gestellt wurde. Mit dieser Einschränkung ist es gelungen, eine Methode zur Schätzung von v herzuleiten. Dabei wurde der kompensierte Poisson-Prozess aus (3.36) durch eine gewichtete Brownsche Bewegung ersetzt (vgl. (3.35)). Für (3.35) konnten dann für a , σ^2 , λ und v^2 in den Abschnitten 3.2.2.1 bis 3.2.2.4 Schätzer vorgeschlagen und mit Satz 3.12 deren Erwartungstreue und Konsistenz bewiesen werden.

Die Qualität der in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 eingeführten Schätzer wurde in Abschnitt 3.2.3 anhand von MATLAB-Simulationen überprüft. Die Erwartungstreue und Konsistenz spiegeln sich in den erhaltenen Graphen sehr gut wider.

Für weitere Untersuchungen ist die Frage nach einer Schätzmethode interessant, die es gestattet, anhand eines Datensatzes alle Parameter zu schätzen.

Im Abschnitt 4.2 wurde der Spezialfall (4.8) mit konstanten Parametern und langem Gedächtnis für die inhomogene Integralgleichung (4.6) mit Mean-Reversion-Anteil untersucht. Bei zeitdiskreten äquidistanten Beobachtungen des Lösungsprozesses (4.9) von (4.8) konnte in Abschnitt 4.2.1 unter der Annahme einer bekannten positiven Mean-Reversion-Rate \mathcal{K} für $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein erwartungstreuer und schwach konsistenter Schätzer für den Mean-Reversion-Level μ hergeleitet werden. Darüber hinaus konnte in Abschnitt 4.2.2 für die positive Mean-Reversion-Rate \mathcal{K} und $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein zeitstetiges stark konsistentes Schätzverfahren entwickelt werden. Auch für die Schätzer $\hat{\mu}(n)$ und $\hat{\mathcal{K}}(t)$ konnten mittels MATLAB-Simulationen die theoretisch nachgewiesenen Konsistenzeigenschaften praktisch bestätigt und grafisch veranschaulicht werden.

Ein weiterer interessanter Ansatz für die Forschung ist die Fragestellung, ob es möglich ist, die in Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2 erarbeiteten Schätzfunktionen so zu kombinieren, dass eine neue Schätzfunktion entsteht, in der Schätzer für μ und \mathcal{K} auf der Basis von Beobachtungen und unter der Annahme, dass $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, σ , v und m bekannt sind, simultan bestimmt werden können. Eine Idee für ein solches Schätzverfahren auf der Grundlage einer äquidistanten Messreihe $X(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ wird im Folgenden vorgestellt:

In Abschnitt 4.1 wurde der Schätzer

$$\hat{\mu}(n) := \frac{\sum_{i=1}^n (X(t_i) - X(0) \exp\{-\mathcal{K}t_i\})}{\sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\mathcal{K}t_i\})} \quad (5.1)$$

für den Mean-Reversion-Level μ eingeführt. Approximiert man μ durch $\hat{\mu}(n)$ und damit $\hat{\mathcal{K}}(t)$ durch $\hat{\mathcal{K}}(t_n, \hat{\mu}(n))$, dann erhält man schließlich

$$0 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X(0) \exp\{-\hat{\mathcal{K}}(t_n, \hat{\mu}(n))t_i\} - X(t_i) \right)}{\sum_{i=1}^n (1 - \exp\{-\hat{\mathcal{K}}(t_n, \hat{\mu}(n))t_i\})} - \hat{\mu}(n). \quad (5.2)$$

Eine numerische Auswertung dieses Ausdrucks bezüglich $\hat{\mu}(n)$ ist erforderlich und stellt eine weitere lohnende Aufgabe dar.

Um eine Schätzung für die Volatilität des durch (4.9) beschriebenen Prozesses zu erhalten, ist folgendes Problem zu lösen: Gibt es Möglichkeiten, anhand von Messwerten herauszufinden, in welchem Umfang eine Beeinflussung durch den Sprungprozess bzw. durch die fraktale Brownsche Bewegung vorliegt? Daraus lassen sich eventuell Schlüsse auf den Diffusionskoeffizienten σ und die Faktoren v und m ziehen.

Kapitel 6

Anhang

6.1 Hilfssätze

6.1.1 Zitierte Hilfssätze

Satz 6.1 ([Pr1], Theorem 37)

Sei X ein Semimartingal mit $X(0) = 0$. Dann existiert ein (eindeutig) bestimmtes Semimartingal Z , welches die Gleichung

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s-) X(ds)$$

erfüllt. Z besitzt die Gestalt

$$Z(t) = \exp \left\{ X(t) - \frac{1}{2} [X, X]_t \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X(s)) \exp \left\{ -\Delta X(s) + \frac{1}{2} (\Delta X(s))^2 \right\}.$$

$[X, X]_t$ ist dabei die quadratische Variation von X und das stochastische Integral ist im Sinne eines Itô-Integrals zu verstehen.

Satz 6.2 ([HuNu], Lemma 5.1)

Für alle $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ gilt

$$(2H - 1) \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-(s+t)\} |s-t|^{2H-2} ds dt = \Gamma(2H),$$

wobei Γ die vollständige Gamma-Funktion ist.

6.1.2 Ergodizitätsaussagen

In diesem Abschnitt wird die Ergodizität des stochastischen Prozesses $(\mu - \tilde{X}(t))$ aus Gleichung (4.21) überprüft. Dafür wird zunächst gezeigt, dass der Prozess $(\mu - \tilde{X}(t))$ stationär und unendlich teilbar ist.

Satz 6.3

Der stochastische Prozess $(\mu - \tilde{X}(t))$ ist stationär und unendlich teilbar. Darüber hinaus gilt $(\mu - \tilde{X}(t)) \in L^2(\Omega, \mu)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Der Beweisgedanke beruht auf einem Stationaritätsnachweis von Marquardt ([Ma3], Theorem 6.1):

Mit Gleichung (4.21), dem Satz von Fubini, Gleichung (4.17) und Satz 6.2 erhält man

$$\begin{aligned}
& E[(\mu - \tilde{X}(0))]^2 \\
&= E \left[- \int_{-\infty}^0 \sigma \exp\{\mathcal{K}u\} dB^H(u) - \int_{-\infty}^0 v \exp\{\mathcal{K}u\} d\theta^H(u) \right]^2 \\
&= (\sigma^2 + m^2 v^2) (C_H)^2 C_{H,2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \exp\{\mathcal{K}(u_1 + u_2)\} |u_1 - u_2|^{2H-2} du_1 du_2 \\
&= \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2) (C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \exp\{x_1 + x_2\} |x_1 - x_2|^{2H-2} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2) (C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-(w_1 + w_2)\} |w_1 - w_2|^{2H-2} dw_1 dw_2 \\
&= \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2) (C_H)^2 C_{H,2} \Gamma(2H)}{(2H - 1) \mathcal{K}^{2H}} \tag{6.1}
\end{aligned}$$

mit $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R}, \pi)}$, der Konstanten C_H aus Definition 2.8 des Kerns M und $C_{H,2} := \int_{\mathbb{R}} (|s| |1 - s|)^{H-\frac{3}{2}} ds$.

Darüber hinaus erhält man mit Gleichung (4.17) für $v = 0$

$$\begin{aligned}
(\mu - \tilde{X}(t)) &= - \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, t]}(-\sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) dB(s) \tag{6.2}
\end{aligned}$$

und für $v \neq 0$

$$\begin{aligned}
(\mu - \tilde{X}(t)) &= - \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, t]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) d\left(\frac{\sigma}{v} B(s) + \theta(s)\right). \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Also lässt sich $(\mu - \tilde{X}(t))$ über ein von einem Lévy-Prozess getriebenes Integral darstellen und kann über die für Lévy-Prozesse übliche charakteristische Funktion beschrieben werden. Seien $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ und $-\infty < t_1 < t_2, \dots, t_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Mit Gleichung (4.21)

folgt

$$\begin{aligned}
& u_1(\mu - \tilde{X}(t_1 + h)) + \dots + u_n(\mu - \tilde{X}(t_n + h)) \\
&= \sum_{i=1}^n u_i \left(- \int_{-\infty}^{t_i+h} \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} dB^H(s) \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{t_i+h} v \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} d\theta^H(s) \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i+h} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} dB^H(s) \right) \\
&\quad - v \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i+h} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} d\theta^H(s) \right),
\end{aligned}$$

wobei $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $\mathcal{K} > 0$ sind. Mit [He], Theorem 2.2, besitzen $B^H(t)$ und $\theta^H(t)$ stationäre Zuwächse. Somit gilt

$$\begin{aligned}
& -\sigma \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i+h} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} dB^H(s) \right) \\
& - v \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i+h} \exp\{-\mathcal{K}(t_i + h - s)\} d\theta^H(s) \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i} \exp\{-\mathcal{K}(t_i - r)\} dB^H(r + h) \right) \\
& - v \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i} \exp\{-\mathcal{K}(t_i - r)\} d\theta^H(r + h) \right) \\
&\stackrel{d}{=} -\sigma \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i} \exp\{-\mathcal{K}(t_i - r)\} dB^H(r) \right) - v \sum_{i=1}^n \left(u_i \int_{-\infty}^{t_i} \exp\{-\mathcal{K}(t_i - r)\} d\theta^H(r) \right) \\
&= u_1(\mu - \tilde{X}(t_1)) + \dots + u_n(\mu - \tilde{X}(t_n)). \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Für die erste Umformung von (6.4) wurde die Substitution $r := s - h$ angewendet. Für die zweite Umformung wurde die Stationarität der Zuwächse von $B^H(t)$ und $\theta^H(t)$ ausgenutzt. „ $\stackrel{d}{=}$ “ bedeutet dabei, dass die Prozesse der linken und die rechten Seite der Umformung die gleiche Verteilung besitzen.

Damit stimmen die charakteristischen Funktionen von $u_1(\mu - \tilde{X}(t_1 + h)) + \dots + u_n(\mu - \tilde{X}(t_n + h))$ und $u_1(\mu - \tilde{X}(t_1)) + \dots + u_n(\mu - \tilde{X}(t_n))$ überein und mit dem Satz von Cramér-Wold folgt die Stationarität. Mit der Darstellung von $(\mu - \tilde{X}(t))$ durch die Gleichungen (6.2) bzw. (6.3) erhält man darüber hinaus die unendliche Teilbarkeit von $(\mu - \tilde{X}(t))$ durch die unendliche Teilbarkeit von Lévy-Prozessen. Insbesondere erhält man mit der Stationarität von $(\mu - \tilde{X}(t))$ und Gleichung (6.1), dass $(\mu - \tilde{X}(t)) \in L^2(\Omega, \mu)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.

□

Sei $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ein stationärer stochastischer Prozess mit der kanonischen Darstellung $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, P)$. Entsprechend [Ma1] wird das von $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ erzeugte dynamische System $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, P, S_t)$ betrachtet. Dabei sind:

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Raum aller Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- \mathcal{B} die σ -Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
- P das durch $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ festgelegte Wahrscheinlichkeitsmaß und
- S_t die Shift-Transformation, welche durch $S_t f(s) := f(t + s)$ definiert ist.

Definition 6.1 (vgl. [Ma4], Definition 2.6.2 oder [Ma1], Definition Seite 4)

Ein stationärer Prozess $Y(t)$ heißt ergodisch genau dann, wenn für jede invariante Menge A die Beziehung $P(\{Y(\cdot, \omega) : Y(\cdot, \omega) \in A\}) = 0$ oder $P(\{Y(\cdot, \omega) : Y(\cdot, \omega) \in A\}^C) = 0$ gilt.

Definition 6.2 (vgl. [RoZa], Seite 1 oder [Ma1], Definition Seite 5)

Ein stationärer Prozess $Y(s)$ heißt mixing, wenn für die Shift-Transformation S_t

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} P(\{Y(\cdot, \omega) : Y(\cdot, \omega) \in A\} \cap \{Y(\cdot + t, \omega) : Y(\cdot + t, \omega) \in B\}) \\ & = P(\{Y(\cdot, \omega) : Y(\cdot, \omega) \in A\}) P(\{Y(\cdot, \omega) : Y(\cdot, \omega) \in B\}) \end{aligned}$$

gilt, wobei A und B aus der von $(Y(s))_{s \in \mathbb{R}}$ erzeugten Borelschen σ -Algebra \mathcal{B} stammen.

Satz 6.4 (vgl. [RoZa], Theorem 4)

Sei $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} f_t(s) L(ds) \right)_{t \in \mathbb{R}}$ ein durch den Lévy-Prozess $(L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ getriebener Prozess. Sei $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ des Weiteren streng stationär und unendlich teilbar. Dann ist $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ mixing genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} f_t(s) f_0(s) \sigma^2 ds \right| + \int_{\mathbb{R}} V \left(|f_0 f_t|^{\frac{1}{2}} \right) ds \right) = 0 \quad (6.5)$$

gilt. Dabei ist die Funktion V durch

$$V(u) := \int_{\mathbb{R}} \min \{|uy|^2, 1\} \pi(dy)$$

gegeben und die Konstante σ stellt den Volatilitätsparameter des Gauß-Anteils des Lévy-Prozesses $(L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ dar.

Satz 6.5

Der stochastische Prozess $(\mu - \tilde{X}(t))$ ist für $H > \frac{1}{2}$ mixing und ergodisch.

Beweis:

Nach Satz 6.3 ist $(\mu - \tilde{X}(t))$ stationär und unendlich teilbar.

Sei $v = 0$, dann gelten

$$\begin{aligned} (\mu - \tilde{X}(t)) &= - \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, t]}(-\sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) dB(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, 0]}(-\exp\{-\mathcal{K}(0-s)\}) M_{(-\infty, t]}(-\exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) \sigma^2 ds \right| \\ &= \left| \sigma^2 (C_H)^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{-\mathcal{K}(t-u)\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \right| \\ &= \left| \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \right| \\ &= \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\ &= (\sigma^2 + v^2 m^2) (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds. \end{aligned}$$

Für $v \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} (\mu - \tilde{X}(t)) &= - \int_{-\infty}^t \sigma \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} dB^H(s) - \int_{-\infty}^t v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\} d\theta^H(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, t]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) d\left(\frac{\sigma}{v} B(s) + \theta(s)\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} M_{(-\infty, 0]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(0-s)\}) y M_{(-\infty, t]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) \left(\frac{\sigma}{v}\right)^2 ds \right| \\ &+ \int_{\mathbb{R}} V \left(\left| M_{(-\infty, 0]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(0-s)\}) M_{(-\infty, t]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) \right|^{\frac{1}{2}} \right) ds \\ &= \left| \left(\frac{\sigma}{v}\right)^2 (C_H)^2 v^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{-\mathcal{K}(t-u)\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \right| \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \min \left\{ \left| M_{(-\infty, 0]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(0-s)\}) y \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot M_{(-\infty, t]}(-v \exp\{-\mathcal{K}(t-s)\}) y \right|, 1 \right\} \pi(dy) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \right| \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \min \left\{ \left| (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \right. \right. \\
&\cdot \left. \left. \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t y^2 v^2 \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudr \right|, 1 \right\} \pi(dy) ds \\
&= \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \min \left\{ (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} y^2 v^2 \right. \\
&\cdot \left. \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudr, 1 \right\} \pi(dy) ds \\
&\leq \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y^2 v^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
&\cdot \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudr \pi(dy) ds \\
&= \sigma^2 (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
&+ v^2 \left(\int_{\mathbb{R}} y^2 \pi(dy) \right) (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
&= (\sigma^2 + v^2 m^2) (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds.
\end{aligned}$$

Dabei sind $m := \|y\|_{L^2(\mathbb{R}, \pi)}$ und C_H die Konstante aus der Definition 2.8 des Kerns M . Also besitzt der stochastische Prozess $(\mu - \tilde{X}(t))$ in beiden Fällen, $v = 0$ und $v \neq 0$, die in Satz 6.4 geforderte Integraldarstellung. Darüber hinaus ist Gleichung (6.5) erfüllt, wenn der Term

$$(\sigma^2 + v^2 m^2) (C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds$$

für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Dies wird im Folgenden überprüft.

Für $\mathcal{K} > 0$ und $t \geq \frac{1}{\mathcal{K}}$ gilt

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + v^2 m^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
& = (\sigma^2 + v^2 m^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\frac{1}{\mathcal{K}}} \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
& + (\sigma^2 + v^2 m^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1}{\mathcal{K}}}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds.
\end{aligned}$$

Sei

$$\mathcal{M} := (C_H)^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\frac{1}{\mathcal{K}}} \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds$$

eine positive Konstante. Mit dem Satz von Fubini und Gleichung (4.17) gilt

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + v^2 m^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\frac{1}{\mathcal{K}}} \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
& + (\sigma^2 + v^2 m^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1}{\mathcal{K}}}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} dudrds \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \exp\{-\mathcal{K}t\} \mathcal{M} + (\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& \cdot \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1}{\mathcal{K}}}^t \left(\int_{\mathbb{R}} (|s-r||s-u|)^{H-\frac{3}{2}} ds \right) \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} dudr \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + (\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1}{\mathcal{K}}}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} |u-r|^{2H-2} dudr,
\end{aligned}$$

wobei $C_{H,2} := \int_{\mathbb{R}} (|w||1-w|)^{H-\frac{3}{2}} dw$ ist. Substituiert man $x := \mathcal{K}u$ und $z := \mathcal{K}r$, erhält man

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + (\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1}{\mathcal{K}}}^t \exp\{\mathcal{K}u\} \exp\{\mathcal{K}r\} |u-r|^{2H-2} dudr \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{x\} \exp\{z\} |x-z|^{2H-2} dx dz.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $a := x - z$ folgt

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{x\} \exp\{z\} |x - z|^{2H-2} dx dz \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{x\} \exp\{z\} (x - z)^{2H-2} dx dz \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_{1-z}^{\mathcal{K}t-z} \exp\{2z + a\} a^{2H-2} da dz.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $t \geq \frac{1}{\mathcal{K}}$. Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
& (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \int_{-\infty}^0 \int_{1-z}^{\mathcal{K}t-z} \exp\{2z + a\} a^{2H-2} da dz \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& \cdot \int_1^\infty \exp\{a\} a^{2H-2} \left(\int_{1-a}^{\min(0, \mathcal{K}t-a)} \exp\{2z\} dz \right) da \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \left(\int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{a\} a^{2H-2} \left(\int_{1-a}^0 \exp\{2z\} dz \right) da \right. \\
& \left. + \int_{\mathcal{K}t}^\infty \exp\{a\} a^{2H-2} \left(\int_{1-a}^{\mathcal{K}t-a} \exp\{2z\} dz \right) da \right) \\
& = (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
& + \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \left(\int_1^{\mathcal{K}t} \frac{1}{2} (\exp\{a\} - \exp\{2-a\}) a^{2H-2} da \right. \\
& \left. + \int_{\mathcal{K}t}^\infty \frac{1}{2} (\exp\{2\mathcal{K}t - a\} - \exp\{2-a\}) a^{2H-2} da \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma^2 + m^2 v^2) \mathcal{M} \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
&+ \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{2\mathcal{K}^{2H}} \exp\{-\mathcal{K}t\} \left(\int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{a\} a^{2H-2} da \right. \\
&+ \left. \int_{\mathcal{K}t}^{\infty} \exp\{2\mathcal{K}t - a\} a^{2H-2} da - \int_1^{\infty} \exp\{2 - a\} a^{2H-2} da \right) \\
&= (\sigma^2 + m^2 v^2) \left(\mathcal{M} - \frac{(C_H)^2 C_{H,2}}{2\mathcal{K}^{2H}} \int_1^{\infty} \exp\{2 - a\} a^{2H-2} da \right) \exp\{-\mathcal{K}t\} \\
&+ \frac{(\sigma^2 + m^2 v^2)(C_H)^2 C_{H,2}}{2\mathcal{K}^{2H}} \left(\exp\{-\mathcal{K}t\} \int_1^{\mathcal{K}t} \exp\{a\} a^{2H-2} da \right. \\
&+ \left. \exp\{\mathcal{K}t\} \int_{\mathcal{K}t}^{\infty} \exp\{-a\} a^{2H-2} da \right).
\end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 mit der Konvergenzordnung $O(\exp\{-\mathcal{K}t\})$. In [ChKaMa], Lemma 2.2, werden mittels partieller Integration die asymptotischen Beziehungen

$$\exp\{x\} \int_x^{\infty} \exp\{-y\} y^\beta ds = x^\beta + \sum_{n=1}^N \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\beta - k) \right) x^{\beta-n} + O(x^{\beta-N-1})$$

für $x \rightarrow \infty$ und

$$\exp\{-x\} \int_1^x \exp\{y\} y^\beta ds = x^\beta + \sum_{n=1}^N (-1)^{-n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\beta - k) \right) x^{\beta-n} + O(x^{\beta-N-1})$$

für $x \rightarrow \infty$ nachgewiesen, womit auch der zweite Summand der rechten Seite für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Konvergenzordnung des zweiten Summanden ist $O(t^{2H-2})$. Damit ist Gleichung (6.5) erfüllt und mit Satz 6.4 folgt die Mixing-Eigenschaft für $(\mu - \tilde{X}(t))$.

Aus der Mixing-Eigenschaft folgt die Ergodizität von $(\mu - \tilde{X}(t))$, denn es gilt für alle invarianten Mengen A

$$\begin{aligned}
&P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \right) \\
&= P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \cap \left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \right) \\
&= P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \cap \left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot + s, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot + s, \omega)) \in A \right\} \right) \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \cap \left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot + s, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot + s, \omega)) \in A \right\} \right) \\
&= P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \right) P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \right) \\
&= \left(P \left(\left\{ (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A \right\} \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Die Invarianz von A geht in die zweite und dritte Umformung dieser Gleichung ein und mit der Mixing-Eigenschaft folgt das vierte Gleichheitszeichen. Da die Gleichung nur erfüllt ist, wenn $P\left(\left\{(\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) : (\mu - \tilde{X}(\cdot, \omega)) \in A\right\}\right)$ die Werte 0 oder 1 annimmt, ist $(\mu - \tilde{X}(t))$ ergodisch (vgl. Definition 6.1).

□

Darüber hinaus gilt für streng stationäre ergodische Prozesse ein Ergodensatz vom Birkhoff-Typ:

Satz 6.6 ([Ma4], Proposition 2.6.8)

Sei $Y(t)$ ein stationärer Prozess und $g(\cdot)$ eine messbare Funktion mit $E[|g(Y(t))|] < \infty$, dann gelten folgende Aussagen:

- Der Limes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(Y(t)) dt$$

existiert fast sicher und ist eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[g(Y(0))]$.

- Falls der Prozess darüber hinaus ergodisch ist, dann ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(Y(t)) dt = E[g(Y(0))]$$

fast sicher.

6.2 Beweise der Sätze 2.8 und 2.10

6.2.1 Beweis von Satz 2.8

Mit der Definition des Wick-Produkts in (S_N^*) (Definition 2.6) und des Weißen Rauschens $\dot{N}(y, t)$ (Gleichung (2.16)) gilt

$$\left\langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \right\rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i, j \geq 1} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) K_{\alpha + e_z(i, j)} \in (S_N^*). \quad (6.6)$$

Sei $f := \sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta K_\beta \in (S_N)$, dann gilt mit (6.6)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\left\langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \right\rangle, f \right)_{(S_N^*), (S_N)} \right| \pi(dy) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) K_{\alpha + e_z(i, j)}, \sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta K_\beta \right)_{(S_N^*), (S_N)} \right| \pi(dy) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) K_\beta, \sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta K_\beta \right)_{(S_N^*), (S_N)} \right| \pi(dy) dt.$$

Mit der Definition des Funktionals $(\cdot, \cdot)_{(S_N^*), (S_N)}$ folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) K_\beta, \sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta K_\beta \right)_{(S_N^*), (S_N)} \right| \pi(dy) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{\beta \in \mathcal{I}} \beta! \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) b_\beta \right| \pi(dy) dt. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und einer elementaren Erweiterung erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{\beta \in \mathcal{I}} \beta! \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) b_\beta \right| \pi(dy) dt \\ & \leq \sum_{\beta \in \mathcal{I}} |b_\beta| \left\| \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \beta! \\ & = \sum_{\beta \in \mathcal{I}} |b_\beta| \left\| \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \sqrt{\beta!} \sqrt{\beta!} (2\mathbb{N})^{\frac{p}{2}\beta} (2\mathbb{N})^{-\frac{p}{2}\beta}. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und einer elementaren Umformung gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathcal{I}} |b_\beta| \left\| \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \sqrt{\beta!} \sqrt{\beta!} (2\mathbb{N})^{\frac{p}{2}\beta} (2\mathbb{N})^{-\frac{p}{2}\beta} \\ & \leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left\| \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} c_\alpha(t, y) \xi_i(t) p_j(y) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_z(i, j) = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \|\xi_i(t) p_j(y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \right)^2 \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \cdot 1 \right)^2 \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right) \right) \\
&\cdot \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} 1^2 \right) \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Setzt man $l(\beta) := \sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} 1$, dann folgt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right) \right) \\
&\cdot \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} 1^2 \right) \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right) l(\beta) \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit der Definition von β erhält man

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha, i, j: \alpha + e_{z(i, j)} = \beta} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right) l(\beta) \beta! (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_\beta^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|c_\alpha(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right. \\
&\left. \cdot l(\alpha + e_{z(i, j)}) (\alpha + e_{z(i, j)})! (2\mathbb{N})^{-p(\alpha + e_{z(i, j)})} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $L := \sup_{\alpha} \{ \|c_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \} < \infty$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_{\beta}^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|c_{\alpha}(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)}^2 \right. \\
& \cdot \left. l(\alpha + e_{z(i,j)}) (\alpha + e_{z(i,j)})! (2\mathbb{N})^{-p(\alpha + e_{z(i,j)})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_{\beta}^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(L \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} l(\alpha + e_{z(i,j)}) \frac{(\alpha + e_{z(i,j)})!}{\alpha!} (2\mathbb{N})^{-p(\alpha + e_{z(i,j)}) + q\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{I}} b_{\beta}^2 \beta! (2\mathbb{N})^{p\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(L \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} l(\alpha + e_{z(i,j)}) (|\alpha| + 1) (2\mathbb{N})^{-p(\alpha + e_{z(i,j)}) + q\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

für p hinreichend groß, da $l(\beta) \leq (2\mathbb{N})^{\beta}$ ist.

□

6.2.2 Beweis von Satz 2.10

Mit Satz 2.8 und Bemerkung 2.3 erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(t, y), \dot{N}(y, t) \right\rangle \pi(dy) dt \\
& = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{\alpha + e_{z(i,j)}} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} K_{\alpha + e_{z(i,j)}} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} (n+1)! \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} \xi_i(t) p_j(y) \\
& \cdot \delta^{\otimes \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \dots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt).
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Definition von K_{α} .

Vertauscht man die Summation über α , i und j und die Integration, dann folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} (n+1)! \\
& \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} \xi_i(t) p_j(y) \\
& \cdot \delta^{\otimes \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \\
& \cdot \xi_i(t) p_j(y) \delta^{\otimes \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \right. \\
& \left. \cdot \xi_i(t) p_j(y) \delta^{\hat{\otimes} \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \right) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt)
\end{aligned}$$

Da die Elemente $(\xi_i p_j)_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis für den Raum $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)$ darstellen, gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (c_{\alpha}, \xi_i p_j)_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda \times \pi)} \right. \\
& \left. \cdot \xi_i(t) p_j(y) \delta^{\hat{\otimes} \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \right) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} c_{\alpha}(t, y) \right. \\
& \left. \cdot \delta^{\hat{\otimes} \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \right) \tilde{N}(dy_1, dt_1) \cdots \tilde{N}(dy_n, dt_n) \tilde{N}(dy, dt) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n+1}(\hat{f}_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t, y)) \\
& = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(t, y) \delta \tilde{N}(y, t)
\end{aligned}$$

mit $\hat{f}_n(t_1, y_1, \dots, t_n, y_n, t, y) := \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha|=n} c_{\alpha}(t, y) \delta^{\hat{\otimes} \alpha}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) \right) \hat{}$.

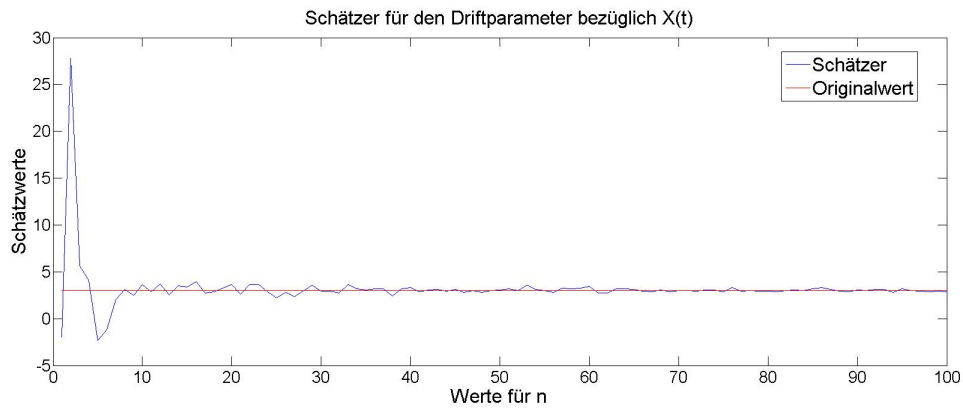
□

6.3 MATLAB-Simulationen unterschiedlich großer Parameter

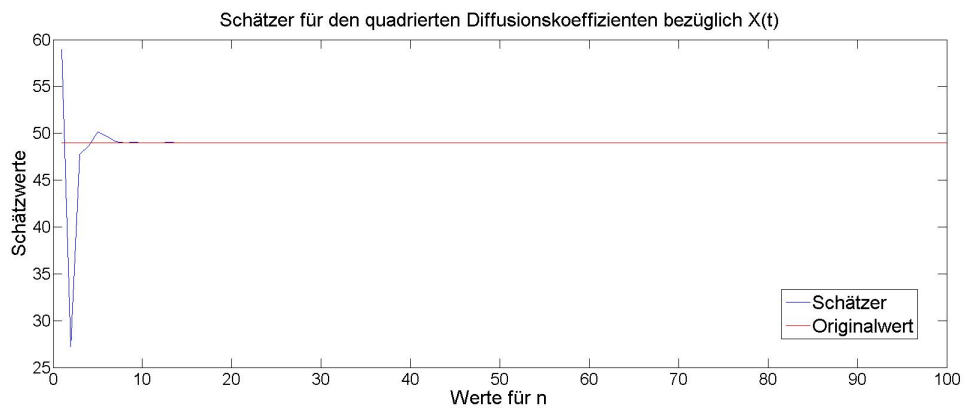
Für unterschiedliche H und α wurden bei ansonsten gleichen Parametern in der Folge alle Schätzer geplottet.

6.3.1 Hurst-Parameter $H = 0,9$

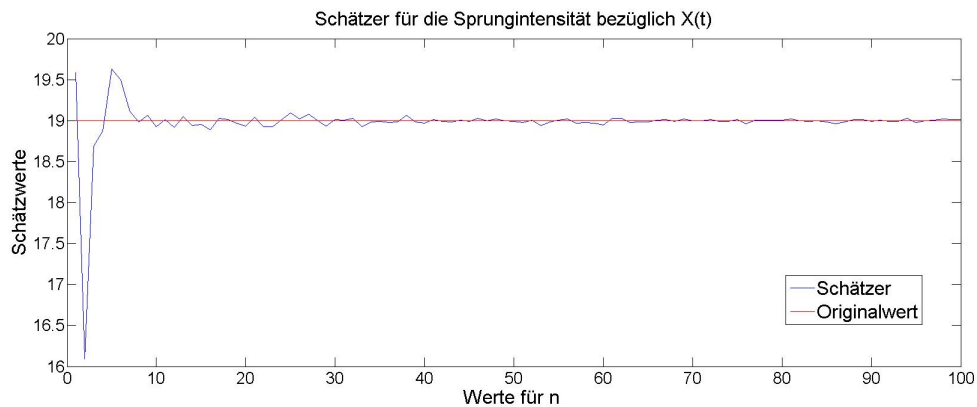
Grafik 16 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



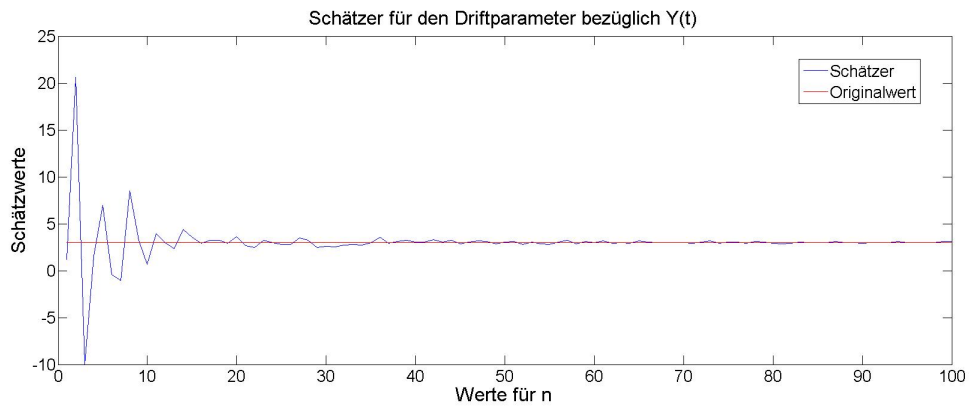
Grafik 17 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



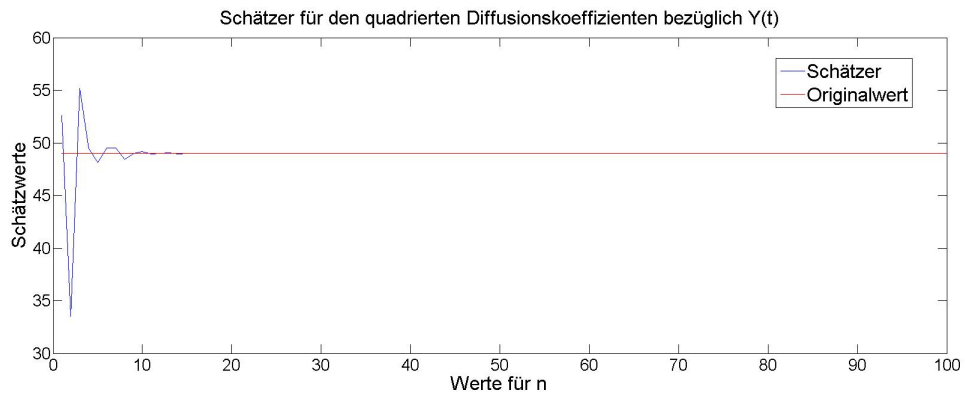
Grafik 18 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



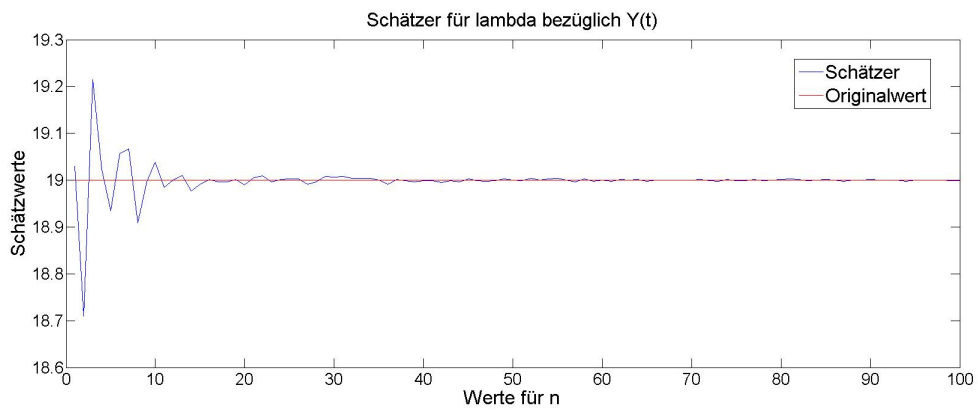
Grafik 19 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



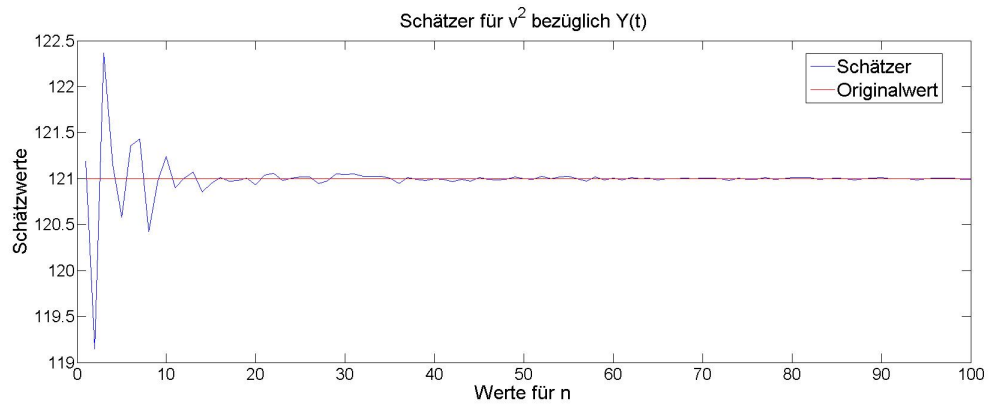
Grafik 20 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



Grafik 21 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):

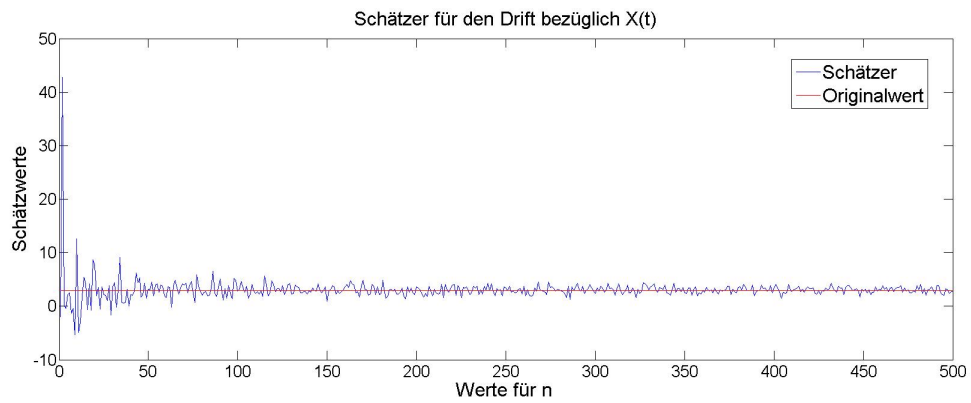


Grafik 22 ($\alpha = 3, H = 0,9, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):

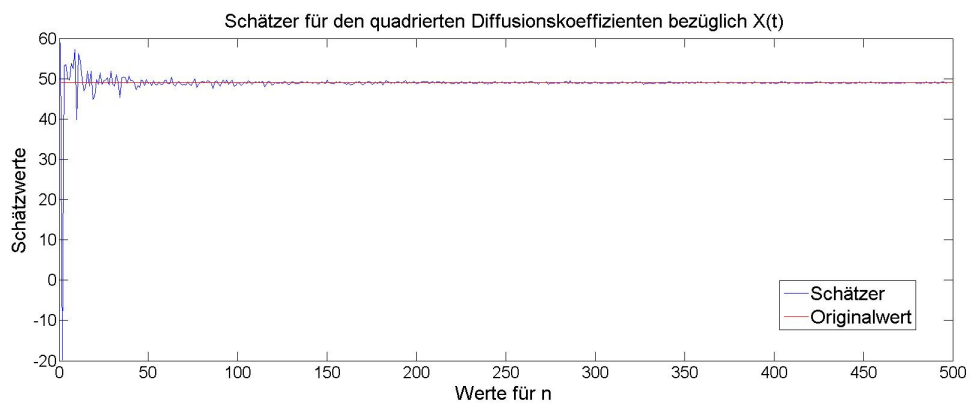


6.3.2 Hurst-Parameter $H = 0,7$

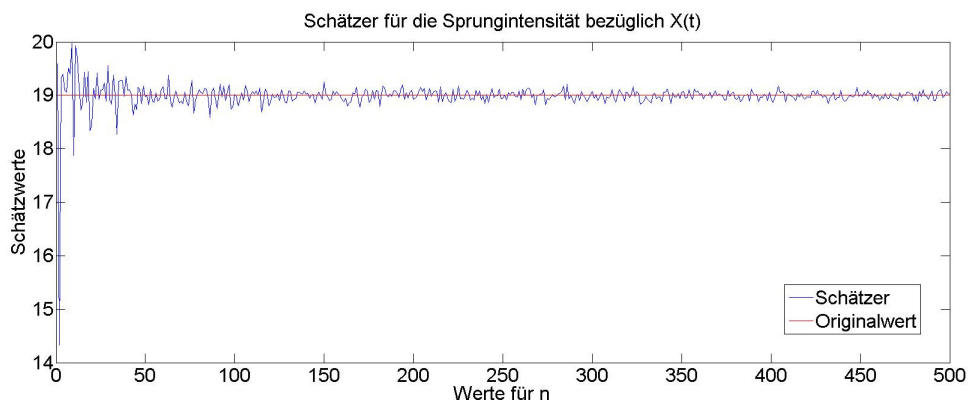
Grafik 23 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



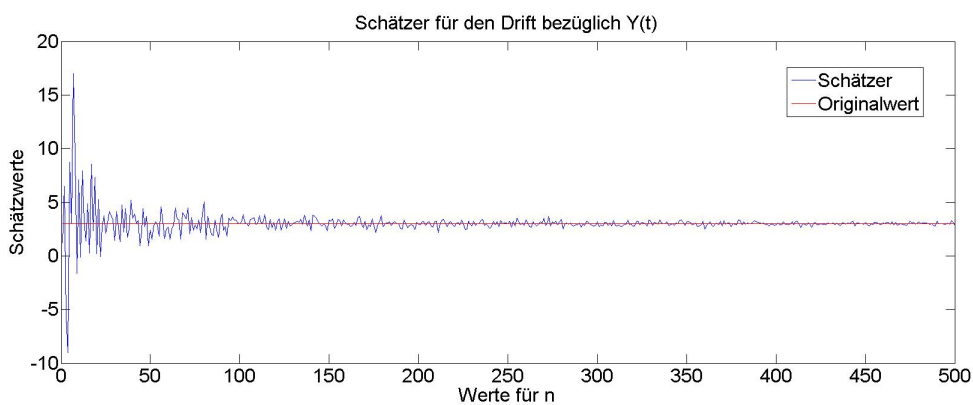
Grafik 24 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



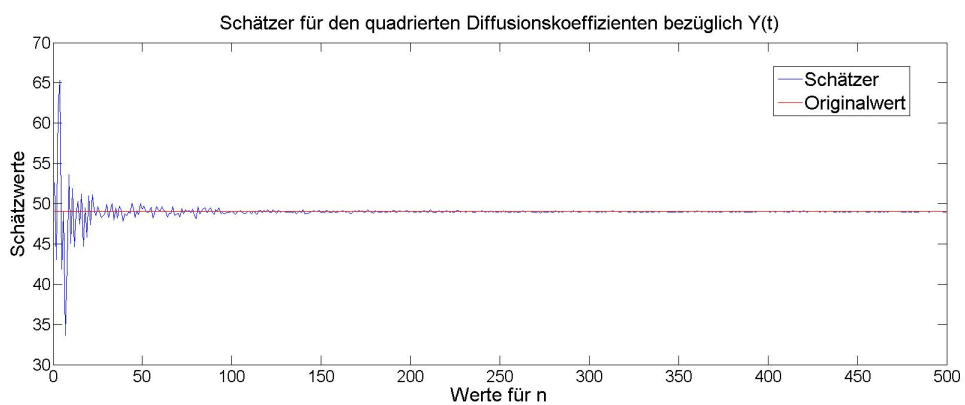
Grafik 25 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



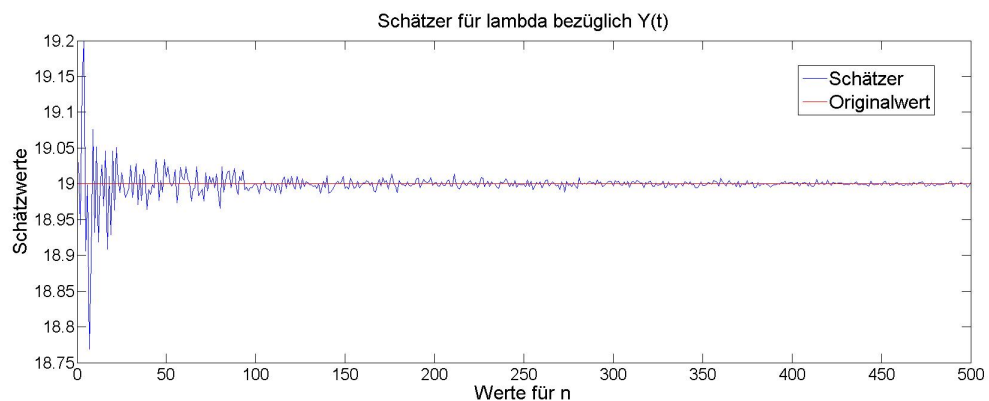
Grafik 26 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



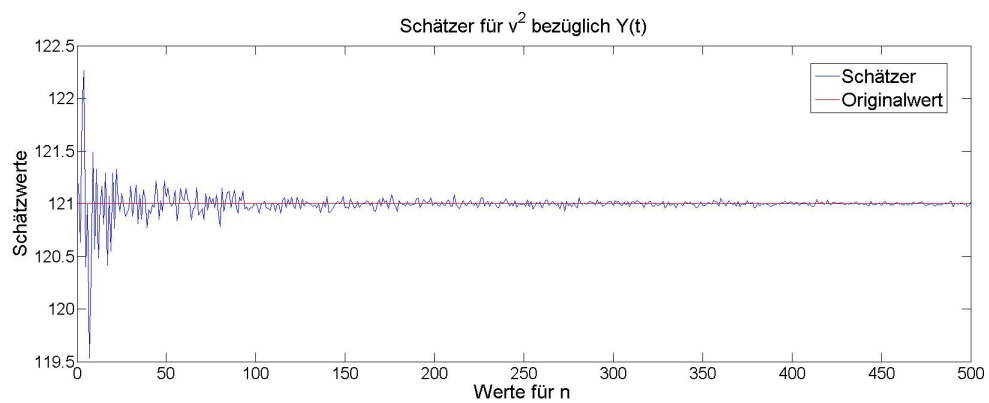
Grafik 27 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



Grafik 28 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



Grafik 29 ($\alpha = 2, H = 0,7, a = 3, \sigma = 7, \lambda = 19, v = 11, X(0) = 1$):



Kapitel 7

Literaturverzeichnis

[BeLiSc]: Bender, C.; Lindner, A.; Schicks, M.: **Finite variation of fractional Lévy processes**, Journal of Theoretical Probability, Vol. 25, Issue 2, (2012), S. 594-612.

[BeMa]: Bender, C.; Marquardt, T.: **Stochastic calculus for convoluted Lévy processes**, Bernoulli, Vol. 14, No. 2, (2008), S. 499-518.

[BeSoVa]: Bender, C.; Sottinen, T.; Valkeila, E.: **Fractional Processes as Models in Stochastic Finance** in „Advanced Mathematical Methods for Finance“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2011), S. 75-103.

[BeToTu]: Bertin, K.; Torres, S.; Tudor, C. A.: **Maximum likelihood estimations and random walks in long memory models**, arXiv:0711.0513 [math.ST], (2009).

[BiHuØkZh]: Biagini, F.; Hu, Y.; Øksendal, B. Zhang, T: **Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications**. Springer-Verlag London (2008).

[BiØkSuWa]: Biagini, F.; Øksendal, B.; Sulem, A., Wallner, N.: **An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion**, Proc. R. Soc. Lond. A 2004, doi: 10.1098/rspa.2003.1246, (2004), S. 347-372.

[BiSa]: Biard, R.; Saussereau, B.: **Fractional Poisson process: Long-range dependence and applications in ruin theory**, Journal of Applied Probability, Vol. 51, No. 3, (2014), 727-740.

[Bo]: van den Bos, A.: **Parameter Estimation for Scientists and Engineers**, Wiley, (2007).

[ChKaMa]: Cheridito, P.; Kawaguchi, H.; Maejima, M.: **Fractional Ornstein-Uhlenbeck**

processes, Electron. J. Probab., Vol. 8, No. 3, (2003), S. 1-14.

[ChZh]: Chen, Y.; Zhou, J.: **Comparative Study on Fractal Feature of Chinese and Foreign Stock Market** in „International Conference on Energy and Power Engineering“, Wiley, (2014).

[Co]: Consentec GmbH: **Endbericht. Förderung der Direktvermarktung und der Bedarfsgerechten Einspeisung von Strom aus Erneuerbaren Energien**, Studie im Auftrag des BMWi, Köln/Aachen, (2010).

[CoKoLiMaMoCo]: O’Connell, P. E.; Koutsoyiannis, D.; Lins, H. F.; Markonis, Y.; Montanari, A.; Cohn, T.: **The scientific legacy of Harold Edwin Hurst (1880 - 1978)**, https://www.itia.ntua.gr/getfile/1593/2/documents/2015HSJ_HaroldEdwinHurst_PP_.pdf, (2015), (Download am 29.02.2016).

[CoTa]: Cont, R.; Tankov P.: **Financial Modelling with Jump Processes**, Financial Mathematics Series, Chapman & Hall / CRC, A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington D.C., (2009).

[EcKoTu]: Eckey, H.-F.; Kosfeld, R.; Türck, M.: **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Induktive Statistik: Grundlagen-Methoden-Beispiele**, Gabler, Wiesbaden, (2005), S. 176.

[ElHo]: Elliott, R. J. ; van der Hoek, J.: **A general fractional white noise theory and applications to finance**, Mathematical Finance, Vol. 13, No. 2, (2003), S. 301-330.

[GöHeHeKuLe]: Götz, P.; Heddrich, M.-L.; Henkel, J.; Kurth, T.; Lenck, T.: **Zukünftige Auswirkungen der Sechs-Stunden-Regelung gemäß § 24 EEG 2014 | Kurzstudie im Auftrag des Bundesverbands WindEnergie e.V.**, Energy Brainpool GmbH, Analysis-Consultancy-Training, (2014), (Downlaod am 29.02.2016).

[HaNi]: Haldrup, N.; Nielsen, M. Ø.: **A regime switching long memory model for electricity prices**, https://www.researchgate.net/profile/Niels_Haldrup/publication/222815707_A_regime_switching_long_memory_model_for_electricity_prices/links/0c96051b6b0d16c9b5000000.pdf, (2005), (Downlaod am 19.02.2016).

[He]: He, K.: **Stochastic calculus for fractional Lévy processes**, Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top., Vol 17, Issue 01, (2014).

- [Hi]: Hida, T.: **Analysis of Brownian Functionals**, Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 13, Carleton University, Ottawa, (1975).
- [HiPo]: Hida, T; Potthoff, J.: **White Noise Analysis - An Overview**, in „White Noise Analysis - Mathematics and Applications“, World Scientific, (1990), S. 140-165.
- [HoØkUbZh]: Holden, H.; Øksendal, B.; Ubøe, J., Zhang, T: **Stochastic Partial Differential Equations / A Modeling, White Noise Functional Approach**, Probability and its Applications, Birkhäuser, (1996).
- [HuNu]: Hu, Y.; Nualart, D.: **Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes**, <http://arxiv.org/pdf/0901.4925v1.pdf>, (2009), (Download am 15.02.2016).
- [It]: Itô, K.: **Differential Equations Determining Markov Processes**, Kiyosi Itô Selected Papers, Springer-Verlag, (1987).
- [Ka]: Kantelhardt, J. W.: **Fluktuationen in Komplexen Systemen**, Habilitationsschrift, Theoretische Physik, Justus-Liebig-Universität Gießen, (2004).
- [KiTa]: Kijima, M.; Tam, C. M.: **Chapter 3| Fractional Brownian Motions in Financial Models and Their Monte Carlo Simulation**, <http://dx.doi.org/10.5772/53568>, (2013), (Download am 29.02.2016).
- [KoAg]: Kohler, S.; Agricola, A.-C.: **Integration erneuerbarer Energien in den deutsch-europäischen Strommarkt**, Energiewirtschaftliche Tagesfragen, Vol. 62, Nr. 12, (2012), S. 41-44.
- [KoMeMi]: Kozachenko, Y.; Melnikov, A.; Mishura, Y.: **On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion**, Statistics, Vol. 49, No. 1, (2015), S. 35-62.
- [Ku]: Kühn, C.: **Vorlesungsskript „Lévy-Prozesse und Stochastische Kontrolltheorie“**, http://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/kuehn/optimal_control.pdf, (2015), (Download am 15.02.2016).
- [Ky]: Kyprianou, A. E.: **Lévy Processes and Continuous-State Branching Processes: Part I**, <http://www.maths.bath.ac.uk/~ak257/LCSB/part1.pdf>, (2008), (Download am 15.02.2016).

[La]: Laskin, N.: **Fractional Poisson process**, Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 8, (2003), S. 201-213.

[Le]: Leonenko, N.: **Fractional Skellam Processes with Applications to Finance**, http://iemath.ugr.es/cms/wp-content/uploads/FrSkellam_Granada_15.pdf, (2013), (Download am 15.02.2016).

[LeMa-CaVi]: León, J. A.; Márquez-Carreras, D.; Vives, J.: **Anticipating linear stochastic differential equations driven by a Lévy process**, Electron. J. Probab., Vol. 17, No. 89, (2012), S. 1-26.

[Ma1]: Magdziarz, M.: **Ergodicity and Mixing of Anomalous Diffusion Processes**, <http://bcc.impan.pl/13Levy/uploads/talks/07235b89aae168aaf8f5f68d28f148ed.pdf>, (2013), (Download am 19.02.2016).

[Ma2]: Marossy, Z.: **Analysis of Spot Electricity Prices Using Statistical and Econophysical Methods**, Thesis outline, Submitted for the degree of a Ph.D., Corvinus University of Budapest, [www.http://phd.lib.uni-corvinus.hu/520/2/marossy_zita_ten.pdf](http://phd.lib.uni-corvinus.hu/520/2/marossy_zita_ten.pdf), (2010), (Download am 19.02.2016).

[Ma3]: Marquardt, T.: **Fractional Lévy processes with an application to long memory moving average processes**, Bernoulli, Vol. 12, No. 6, (2006), S. 1099-1126.

[Ma4]: Mazumdar, R. R.: **Chapter 2 / Random Sequences and Stochastic Processes**, <https://ece.uwaterloo.ca/~mazum/ECE603/Lectures/chap2-Processes.pdf>, (2014), S. 26.

[Ma5]: Marquardt, T.: **An Introduction to Financial Mathematics in Continuous Time**, <http://users.aims.ac.za/~tina/Skript.pdf>, (2007), S. 4.

[MaNe]: Mandelbrot, B. B.; Van Ness, J. W.: **Fractional Brownian motions, fractional noises and applications**, SIAM Review, Vol. 10, Nr. 4, (1968), S. 422-437.

[MaVe]: Maheshwari, A.; Vellaisamy, P.: **On long-range dependence of fractional Poisson and negative binomial processes**, Applied Probability Trust, arXiv:1601.05177v1 [math.PR], (2016).

[Mi]: Mishura, Y.: **Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Re-**

lated Processes, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1929, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).

[MiZu]: Mishura, Y.; Zubchenko, V.: **Properties of integrals with respect to fractional Poisson process with the compact kernel**, Teor. Imovir. ta Matem. Statyst., No. 89, (2013), S. 130-139.

[Nu1]: Nualart, D.: **Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications**,

https://www.researchgate.net/profile/David_Nualart2/publication/242388658_Stochastic_integration_with_respect_to_fractional_Brownian_motion_and_applications/links/542588c40cf238c6ea7414f0.pdf, (2003), (Download am 09.08.2012).

[Nu2]: Nualart, D.: **Fractional Brownian motion: Stochastic calculus and applications**, www.icm2006.org/proceedings/Vol_III/contents/ICM_Vol_3_74.pdf, (2006), (Download am 25.08.2012).

[NuØkPr]: Di Nunno, G.; Øksendal, B.; Proske, F.: **White noise analysis for Lévy processes**, Journal of Functional Analysis, Vol. 206, Issue 1, (2004), S. 109-148.

[Øk]: Øksendal, B.: **Stochastic partial differential equations driven by multi-parameter white noise of Lévy processes**,

<https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/10513/pm07-07.pdf?sequence=1>, (2007), (Download am 02.03.2016).

[ØkPr]: Øksendal, B.; Proske, F.: **White noise of Poisson random measures**,

<https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/10680/pm12-02.pdf?sequence=1>, (2002), (Download am 02.03.2016).

[Pr1]: Protter, P.: **Stochastic Integration and Differential Equations**, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2004).

[Pr2]: Proske, F.: **The stochastic transport equation driven by Lévy white noise**, Comm. Math. Sci., Vol. 2, No. 4, (2004), S. 627-641.

[Ro]: Rockafellar, R. T.: **Integral Functionals, Normal Integrands and Measurable Selections** in „Nonlinear Operators and the Calculus of Variations“, Springer-Verlag series Lecture Notes in Math., (1976).

[RoZa]: Rosiński, J.; Żack, T.: **Simple conditions for mixing of infinitely divisible processes**, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 61, Issue 2, (1996), S. 277-288.

[Sa]: Sarin, A.: **Early-Exercise Kontrakte in der Stromwirtschaft - Alternative Vermarktung von Erzeugungspotentialen**, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, (2008).

[Sc]: Scalas, E.: **The Fractional Poisson Process and Applications**, http://www.bcmath.org/documentos_public/archivos/actividades_cientificas/Scalas20141110.pdf, (2014), (Download am 15.07.2016).

[Se]: Seifert, J.: **Preismodellierung und Derivatebewertung im Strommarkt - Theorie und Empirie**, Dissertation, Universität Karlsruhe, (2009).

[SeUh-Ho]: Seifert, J.; Uhrig-Homburg, M.: **Modelling jumps in electricity prices: Theory and empirical evidence**, http://www.econbiz.de/archiv1/2010/129676_modelling_electricity_prices.pdf, (2007), (Download am 02.03.2016).

[Si1]: Sitte, M.: **Analyse von Zeitreihen mit Langem Gedächtnis Mittels Fraktionaler ARIMA Modellierung**, Bachelorarbeit, Bachelor of Science in Wirtschaftsmathematik. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, (2012).

[Si2]: Simonsen, I.: **Measuring anti-correlations in the Nordic electricity spot market by wavelets**, <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0108033.pdf>, (2003), (Download am 02.03.2016).

[Wo]: Wogatzki, S.: **Schätzung des Driftparameters bei Stochastischen Differentialgleichungen mit Fraktaler Brownscher Bewegung**, Masterarbeit, Master of Science in Wirtschaftsmathematik. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, (2016).

[Zh]: Zhang, T.: **Characterizations of white noise test functions and Hida distributions**, Stochastics and Stochastic Reports, Vol. 41, Issue 1-2 (1992), S. 71-87.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde in solcher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und noch nicht veröffentlicht.

Halle (Saale), den 10.01.2017

Jens Lueddeckens

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg für die immer gewährte Unterstützung und das kreative Arbeitsklima bedanken, welches sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Insbesondere gilt mein Dank meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Wilfried Grecksch, für die langjährige intensive Unterstützung vom Bachelorstudium bis zur Fertigstellung der Dissertation. Besonders danke ich für die Überlassung des interessanten Themas, sein ständiges Interesse am Fortgang der Arbeit und die produktiven Diskussionsrunden mit vielen wertvollen Hinweisen und Anregungen. Darüber hinaus bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Wilfried Grecksch für die Ermöglichung der Teilnahme an internationalen Konferenzen, bei denen ich wertvolle Hinweise für die Fertigstellung meiner Arbeit erhalten habe.

Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr. Jan Prüß für die Zusammenarbeit bei der Lösung von Problemen im Umgang mit fraktalen Integralen und Herrn Dr. Christian Roth für die kontinuierliche Begleitung der Arbeit in zahlreichen interessanten und produktiven Konsultationen und seine Ratschläge im Umgang mit LaTeX.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinen Eltern für ihre ständige Unterstützung, durch welche ich mich voll auf meine Arbeit konzentrieren konnte. Sie haben mich motiviert, wenn ein Ansatz nicht gleich erfolgreich war und sich mit mir gefreut, wenn das Problem gelöst wurde.

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name	Lueddeckens
Vorname	Jens
Geburtsdatum	25.10.1987
Geburtsort	Halle (Saale)
Nationalität	deutsch
Geschlecht	männlich

Ausbildung

seit 04/2013

Promotionsstudium Mathematik

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Promotionsthema:

*„Fraktale stochastische Integralgleichungen im
White-Noise-Kalkül“*

04/2013 bis 07/2016

Wissenschaftliche Hilfskraft in den Schwerpunkten:

- Wahrscheinlichkeitstheorie / Statistik
- Versicherungsmathematik / Risikothorie
- Finanzmathematik

10/2010 bis 03/2013

Studium der Wirtschaftsmathematik (Master of Science)

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Schwerpunkt Stochastik

Spezialisierung Stochastische Analysis

Titel der Masterarbeit:

„Eine fraktale parabolische stochastische Differentialgleichung“

- 10/2007 bis 09/2010 **Studium der Wirtschaftsmathematik
(Bachelor of Science)**
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Schwerpunkt Stochastik
Titel der Bachelorarbeit:
*„Ein zeitdiskretes Filterproblem mit fraktalem Rauschen
in den Zuständen und Beobachtungen“*
- 08/2000 bis 07/2007 **Abitur**
Burg-Gymnasium Wettin

Kongressteilnahmen

- 07/2016 11th AIMS Conference on Dynamical Systems
Orlando, USA
Vortrag:
*„Parameter Estimation for a Fractional
Stochastic Differential Equation“*
- 10/2015 Drei-Länder-Workshop zur stochastischen Analysis
Sachsen, Sachsen-Anhalt, Thüringen
Halle (Saale), Deutschland
Vortrag:
*„Parameter Estimation for a Fractional Stochastic
Differential Equation“*
- 08/2015 11. Doktorandentreffen Stochastik
Berlin, Deutschland
Vortrag:
*„Eine inhomogene stochastische Differentialgleichung
mit fraktalem Poisson-Maß und fraktaler Brownscher
Bewegung“*
- 03/2015 6th Workshop on Nonlinear Partial Differential
Equations and Financial Mathematics
Zittau, Deutschland
Vortrag:
„Parameter Estimation for an Electricity Price Model“
- 03/2015 Workshop on Stochastic Analysis, Controlled
Dynamical Systems and Applications
Jena, Deutschland
Poster:
*„A Stochastic Differential Equation driven by
Fractional and Jump Processes“*

- 09/2014 Conference on Stochastics of Environmental and Financial Economics
Oslo, Norwegen
Vortrag:
*„A Stochastic Differential Equation driven by Fractional and
Jump Processes“*
- 08/2014 10. Doktorandentreffen Stochastik
Halle (Saale), Deutschland
Vortrag:
*„A Stochastic Differential Equation driven by Fractional and
Jump Processes“*
- 04/2014 Workshop: Angewandte Optimierung
Wittenberg, Deutschland
Vortrag:
„Zur Modellierung von Energiepreisen“
- 01/2014 International Workshop: Infinite Dimensional Stochastic Systems
Wittenberg, Deutschland