

# Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen

Dissertation  
zur Erlangung des  
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät III  
Institut für Informatik

der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Herrn Bienert, Andreas  
Geb. am 01.03.1983 in Halle

Gutachter:

Doz. Dr. habil. Peter Schenzel  
Doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Datum der Verteidigung:  
07.04.2016



# Danksagung

Ich danke Doz. Dr. Peter Schenzel für die sehr gute Betreuung meiner Arbeit, selbst über den Eintritt in seinen wohl verdienten Ruhestand hinaus. Sowohl seine wertvollen fachlichen Hinweise als auch seine Beratung in organisatischen Angelegenheiten waren mir stets eine große Hilfe. Trotz der Verlegung seines Wohnsitzes nach Leipzig, ermöglichte Doz. Dr. Peter Schenzel weiterhin regelmäßige Besprechungen und gab mir dabei gute Anregungen. Auch hatte er immer ein offenes Ohr für meine Probleme und stand mir mit freundschaftlichem Rat zur Seite.

Außerdem danke ich auch allen Professoren und Wissenschaftlichen MitarbeiterInnen aus meiner Studienzeit, die durch ihre Wissensvermittlung gewissermaßen die Voraussetzungen für die Anfertigung dieser Arbeit geschaffen haben.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>11</b>
1.1. Motivation bzw. Problemstellung	11
1.2. Zielsetzung	11
1.3. Aufbau der Arbeit	13
<b>2. Enveloppen</b>	<b>15</b>
2.1. Hüllkurven in der Ebene	16
2.2. Lokaler Schnitt der Ursprungsschar	23
2.3. Einhüllende von Kugelscharen	27
2.3.1. Charakteristische Kreise	28
2.3.2. Komplette Verdeckung von Kugeln durch ihre Nachbarn	31
2.3.3. Lokaler Schnitt der Kugelschar	31
2.3.4. Hauptnennerbildung für rationale Funktionen	34
2.3.5. Parametrisierungen	35
2.3.6. Klassifizierung und Fortsetzung	42
<b>3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien</b>	<b>47</b>
3.1. Lokale Selbstüberschneidung der Enveloppe	47
3.1.1. Ermittlung eines lokalen Schnittes	48
3.2. Globaler Selbstschnitt der Einhüllenden	52
3.2.1. Berechnung mittels rationaler Parametrisierung $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$	52
3.3. Topologische Betrachtungen	57
3.3.1. Schnitt mit Kurven	64
<b>4. Kanalflächen</b>	<b>73</b>
4.1. Abgrenzung von bzw. Bezug zu Enveloppen	73
4.2. Polygonales Netz	75
4.2.1. Ermittlung aller Außenpunkte eines charakteristischen Kreises	77
4.2.2. Verbindung der Außenbögen	81
4.3. Raycasting	87
4.3.1. Allgemeines	87
4.3.2. Anpassung des Verfahrens	88
4.4. Vergleich der beiden Verfahren	92
<b>5. Implementierung</b>	<b>95</b>
5.1. Programmierumgebung	95
5.2. Parallelisierung mittels GPU	95
5.3. Nullstellenbestimmung	96
5.3.1. Erstellung eines Polynoms für $f_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}$	96
5.3.2. Erstellung eines Polynoms für $f^{\mathcal{R}}$	98

## Inhaltsverzeichnis

5.3.3. Gradabschätzungen . . . . .	98
5.3.4. Nullstellenbestimmung der reellen Polynome . . . . .	98
5.4. Wichtige Operationen . . . . .	102
5.4.1. Außentest . . . . .	102
5.4.2. Bestimmung des Tiefenlevels . . . . .	103
5.5. Numerische Probleme . . . . .	103
5.5.1. Klasse CuMpf . . . . .	103
5.5.2. Beispiele . . . . .	105
<b>6. Auswertung / Ergebnisse</b>	<b>107</b>
6.1. Beispiele . . . . .	107
6.2. Laufzeiten . . . . .	111
6.3. Programmfeatures / Programmbeschreibung . . . . .	111
6.4. Zusammenfassung bzw. Wertung . . . . .	113
6.4.1. Perspektiven . . . . .	114
<b>A. Analytische Grundlagen</b>	<b>117</b>
A.1. Funktionen/Abbildungen . . . . .	117
A.1.1. Polynome . . . . .	119
A.2. Stereografische Projektion . . . . .	120
A.2.1. Stereografische Projektion vom Nordpol der Einheitskugel aus . . . . .	121
<b>B. Kurven und Flächen</b>	<b>123</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>124</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Kanalfächen im Alltag . . . . .	12
1.2. Entstehung einer Hüllfläche aus einer Kugelschar . . . . .	12
1.3. Entfernung des inneren Teils einer Hüllfläche zum Erhalt der zugehörigen Kanalfäche . . . . .	12
2.1. Geradenschar mit ihrer Enveloppe für $t \in [-1, 1]$ (Beispiel 1) . . . . .	16
2.2. Kubische Kurvenschar aus Beispiel 2 mit $g(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$ und $t \in [0, 2]$ . . . . .	17
2.3. Kreisschar mit ihrer Enveloppe für $t \in [-0.8, 0.8]$ (Beispiel 3) . . . . .	18
2.4. Kreisschar mit ihrer Enveloppe für $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (Beispiel 4) . . . . .	19
2.5. Kreisschar mit ihrer Enveloppe für $t \in [-1.5, 1.5]$ (Beispiel 5) . . . . .	20
2.6. Katakaustik (Beispiel 6) . . . . .	22
2.7. Infinitesimale Nachbarschaft der Kreise der Schar aus Beispiel 5 bei $t_0 = -1.5$ Der fest ausgewählte Kreis bei $t_0$ ist grün dargestellt. Die Folge von Kreisen $\mathcal{F}_{\rightarrow t_0}$ ist blau bis rot eingefärbt. . . . .	23
2.8. Einhüllende $\mathcal{H}^{c,r}$ der Kugelschar $\mathcal{S}^{c,r}$ aus Beispiel 7. . . . .	28
2.9. Charakteristischer Kreis $\mathcal{C}_t^{c,r}$ als Schnitt der Kugel $\mathcal{S}_t^{c,r}$ mit $\mathcal{E}_t^{c,r}$ , dargestellt in der Ebene, welche $c(t)$ enthält und senkrecht auf $\vec{b}_t$ steht . . . . .	29
2.10. Erzeugung der Einhüllenden $\mathcal{H}^{c,r}$ aus der Kreisschar $\mathcal{C}^{c,r}$ ; Illustration zu Lemma 2.9 . . . . .	30
2.11. Schnitt der beiden Kugeln $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$ und $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$ dargestellt in einer Ebene, welche durch die Verbindungsgerade der Kugelmittelpunkte verläuft; Hier gelten $r_1 = r(t_1)$ und $r_2 = r(t_2)$ . . . . .	32
2.12. Vergleich der Parametrisierungen $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$ und $\mathfrak{B}^{\mathcal{H}^{c,r}}$ anhand der eingezeichneten Gitternetzlinien auf einem Torus-Ausschnitt; Der Fläche selbst liegt immer die Parametrisierung $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$ zu Grunde. In allen Fällen befinden sich 64 verschiedene Stützpunkte auf jedem charakteristischen Kreis. . . . .	38
2.13. Gerader Kreiskegel $\mathfrak{K}_t$ ; Diese Abbildung wurde aus [PP97] entnommen und leicht modifiziert. . . . .	39
2.14. Zyklische und nicht zyklische Hüllfläche $\mathcal{H}^{c,r}$ entlang der Kleeblattschlinge aus Beispiel 8. . . . .	43
2.15. Linksseitig verschlossene Hüllflächen $\mathcal{H}^{c,r}$ über $I = [-1, 1[$ . . . . .	44
2.16. Zusammensetzung von Hüllflächen aus zwei Blickwinkeln . . . . .	46
3.1. Lokaler Selbstschnitt der Hüllfläche $\mathcal{H}^{c,r}$ als Parallelprojektion in Richtung des Binormalenvektors $\vec{b}_t$ . . . . .	49
3.2. Hüllflächen entlang der Normalparabel mit verschiedenen, konstanten Radien . . . . .	50
3.3. Hier sind die zwei prinzipiellen Möglichkeiten für die Richtung von $\vec{c}''(t)$ im Kurvenpunkt $c(t)$ dargestellt. . . . .	51
3.4. Einhüllende und ihre Verschlusskappen . . . . .	57

3.5.	Enveloppen von Kugelfamilien, deren Mittenkurven vollständig in der Bildebene liegen; Die Ziffern sind Tiefenlevelangaben und die dünnen Linien die Profile der senkrecht zur Schnittebene verlaufenden charakteristischen Kreise. . . . .	63
3.6.	Verschmelzung von Randschlauchstücken (rot markiert) am Beispiel des Torus (Beispiel 13) . . . . .	63
3.7.	Veranschaulichung von Umkehrpunkten nach Definition 3.35 anhand zweier Beispiele . . . . .	69
3.8.	Funktionsgraphen von $f_P^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$ für $P$ gleich $Q$ sowie Punkte auf der Kurve $\mathcal{W}$ kurz vor und hinter $Q$ ; Die Kurve $\mathcal{W}$ tritt bei $Q$ in die Kugel $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$ ein. Links ist $Q$ ein Umkehrpunkt, rechts nicht. . . . .	70
4.1.	Unterschied von Kanalfläche zur Einhüllenden an zwei Beispielen; In der jeweils ersten Reihe ist die Enveloppe $\mathcal{H}^{c,r}$ aus verschiedenen Perspektiven dargestellt, in der zweiten die Kanalfläche $\mathcal{K}^{c,r}$ . . . . .	74
4.2.	Darstellung einer Fläche durch ein polygonales Netz mit wachsender Feineinteilung	75
4.3.	Projektion der Schnittsituation zweier Kreise $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ und $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$ im Punkt $S_{i,1} = S_{w_1,0}$ in die entsprechenden Kreisebenen . . . . .	76
4.4.	Tiefenlevelbestimmung entlang eines Kreises $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ ; Wird der Kreis in einem Schnittpunkt in Pfeilrichtung durchlaufen, handelt es sich bei diesem um einen Eintrittspunkt. Die roten, offenen Kreisbögen liegen auf jeden Fall im Inneren der Kreisschar $\mathcal{S}^{c,r}$ . . . . .	80
4.5.	Die eingefärbten Kurven, welche nicht auf dem Kreis $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ liegen, stellen Konturen von Schlauchstücken dar. Die Verteilung von Ein- und Austritten ist dieselbe wie in Abb. 4.4a. Die Zahlen im Kreisinneren geben das Tiefenlevel an. . . . .	81
4.6.	Schematische Darstellung der Paarung von Außenbögen nach Winkelabweichung mit Nummerierung; Außenbögen desselben Paares haben die gleiche Farbe. . . .	83
4.7.	Verbindung zweier zueinander gehöriger Außenbögen der aufeinanderfolgenden charakteristischen Kreise $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ und $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$ in verschiedenen Situationen . . . . .	84
4.8.	Einfügung eines Kreises $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$ zwischen $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ und $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$ in verschiedenen Situationen	85
4.9.	Ein Platztausch relevanter Schnittpunkte setzt die Existenz eines Zwischenkreises, auf dem beide Schnittpunkte zusammenfallen, voraus. . . . .	86
4.10.	Hier wird die Notwendigkeit des Einfügens mehrerer Zwischenkreise nicht erkannt, weil sich zwei Fehler ausgleichen. . . . .	86
4.11.	Funktionsprinzip des Raycastings anhand zweier eingezeichneter Augstrahlen . . .	87
4.12.	Aktualisierung des Tiefenlevels entlang eines Augstrahls; Eingangs- und Ausgangspunkte (bezüglich der Strahlrichtung) sind rot bzw. blau und Außensegmente grün dargestellt. Die Ziffern über dem Strahl geben das Tiefenlevel an. . .	90
4.13.	Vorteile beider Verfahren anhand von Beispiel 14; In Abb. 4.2 und Abb. 5.1d ist die Hüllfläche von außen zu sehen. . . . .	92
4.14.	Hüll- und Kanalfläche aus Beispiel 15 . . . . .	93
5.1.	Numerische Ungenauigkeiten am Beispiel einiger Hüllflächen . . . . .	105
6.1.	Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 16 . . . . .	108
6.2.	Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 17 . . . . .	108
6.3.	Hüll- und Kanalfläche zu Beispiel 19 . . . . .	109
6.4.	Einhüllende und Kanalfläche zu Beispiel 20 . . . . .	110

6.5. Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 21 . . . . .	110
6.6. Transzendente Funktionen; Die Funktionsgraphen schneiden die $x$ -Achse unendlich oft. Das gilt auch für Hüllflächen $\mathcal{H}^{c,r}$ von Kugelscharen, welche diese Graphen als Mittenkurve haben. . . . .	113
A.1. Stereografische Projektion bzw. Inversion an der Kugel . . . . .	120



# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation bzw. Problemstellung

Die Darstellung von parametrisierten oder implizit gegebenen Flächen jeder Art spielt schon immer eine wesentliche Rolle in der Computergrafik. In dieser Arbeit geht es im Speziellen um die Visualisierung von Kanalflächen (siehe Definition 4.1). Sie entstehen durch die Bewegung einer Kugel, deren Radius veränderlich ist, entlang einer Bahn für ihren Mittelpunkt. Statt von einer einzigen Kugelbewegung über einen bestimmten Zeitraum, kann auch von einer Menge von Kugeln, einer sogenannten Schar (vgl. Definition 2.1), gesprochen werden. Sie könnten beispielsweise zum Planen und Abbilden von Tunnelsystemen und Pipelinenetzen eingesetzt werden. In Abb. 1.1 sind eine Tunnelbohrmaschine wie sie beim Bau von U-Bahnstrecken eingesetzt wird und ein S-Bahn-Tunnel zu sehen.

Die Kanalflächen sind eng mit den Einhüllenden von Kugelscharen verwandt und werden in der Literatur sogar häufig mit ihnen gleichgesetzt. Die Entstehung einer Hüllfläche ist in Abb. 1.2 illustriert. In dieser Arbeit wird, wie in Abb. 1.3 dargestellt, nur der äußere Teil der Hüllflächen von Kugelscharen als Kanalfläche angesehen.

In der Computergrafik werden Oberflächen oft mittels eines Punkterasters modelliert. Dabei liegen die Punkte auf verschiedenen Begrenzungskurven, welche eine Art Gerüst der Fläche darstellen. Diese Kurven sind im Allgemeinen stückweise zusammengesetzt. Die einzelnen Kurventeile werden wiederum durch vorgegebene Kontrollpunkte und die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Kurvenklasse, wie beispielsweise den Bezier- oder Hermite-Kurven (siehe [PBP02]) bestimmt.

Die Problematik bei der Darstellung von Kanalflächen liegt darin, dass für sie weder eine implizite Gleichung noch eine Parametrisierung existiert. Somit sind die üblichen Herangehensweisen zur Visualisierung nicht möglich.

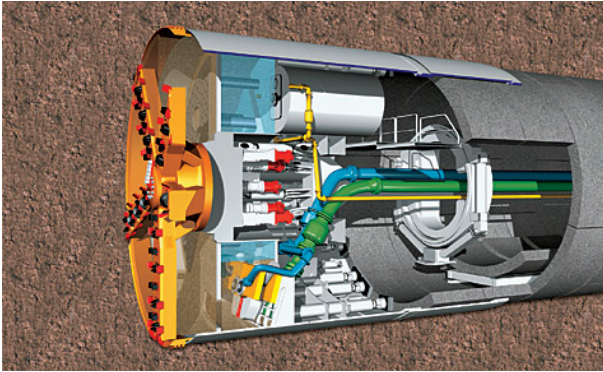
## 1.2. Zielsetzung

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es nun, trotz der genannten Schwierigkeiten, ein Verfahren zur Darstellung von Kanalflächen theoretisch zu erarbeiten und dieses praktisch umzusetzen. Hierzu sollen zwei verschiedene Ansätze untersucht werden.

Bei dem ersten (Abschnitt 4.2) soll eine Menge von Polygonen (Mesh) zur Repräsentation der Kanalfläche erstellt werden. Hierzu wird die Hüllfläche der Kugelschar entlang ihres Selbstschnittes zerteilt und eine ausgewählte Untermenge der Einzelteile wieder zu einer Fläche zusammengesetzt. Dabei spielen die charakteristischen Kreise (siehe Definition 2.8) eine wesentliche Rolle. Mit Hilfe einer Tiefenfunktion (siehe Definition 3.23) und einiger Erkenntnisse über das Tiefenlevel wird ermittelt, welche Teile dieser Kreise miteinander verbunden werden müssen, um eine geeignete Repräsentation der Kanalfläche zu erhalten.

Der zweite Ansatz (Abschnitt 4.3) besteht in der Anpassung eines Raycasting-Verfahrens an

1. Einleitung



(a) Schematische Darstellung zum sogenannten Schildvortrieb, einer Technik zum Bohren von Tunneln (Bild aus [AG] entnommen)



(b) S-Bahn-Tunnel in München (aus [HK12] entnommen)

Abbildung 1.1.: Kanalfächen im Alltag

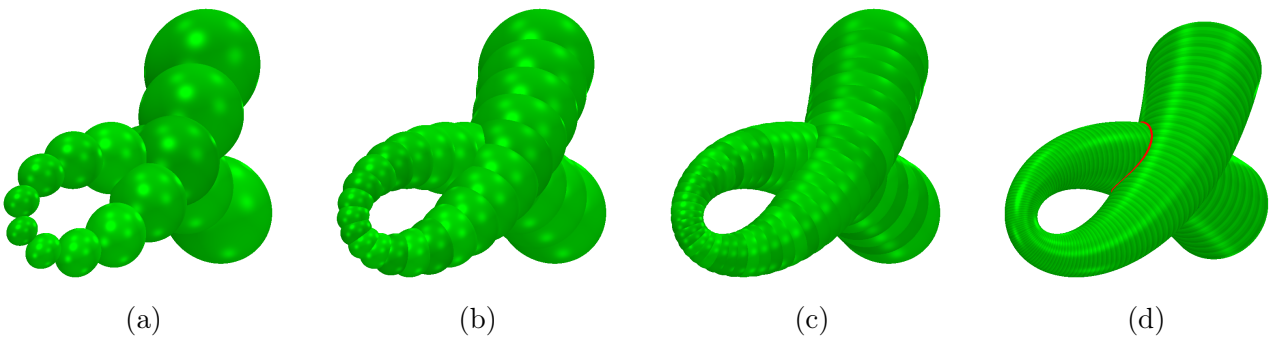
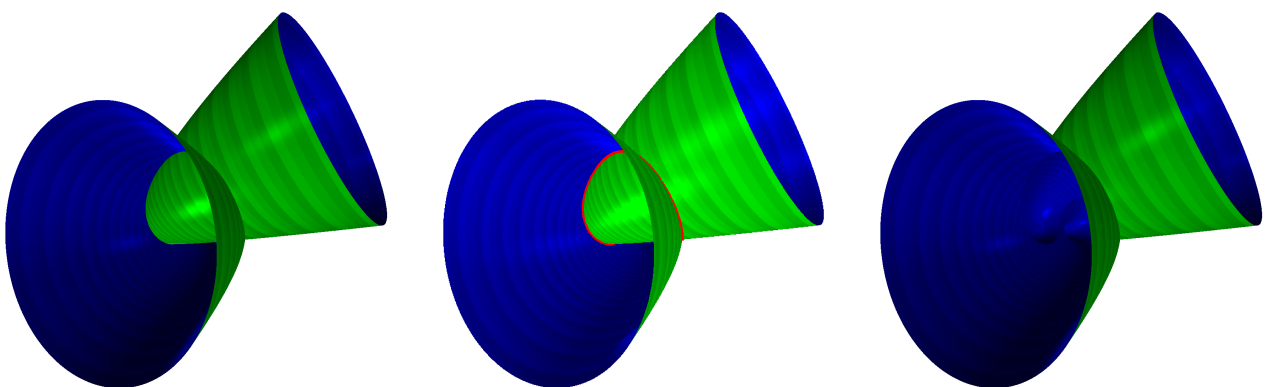


Abbildung 1.2.: Entstehung einer Hüllfläche aus einer Kugelschar



(a) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus Beispiel 14

(b) Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit eingezeichnetem Selbstschnitt (rot)

(c) Kanalfäche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$

Abbildung 1.3.: Entfernung des inneren Teils einer Hüllfläche zum Erhalt der zugehörigen Kanalfäche



die speziellen Erfordernisse für Kanalflächen. Er basiert auch, genau wie der erste, auf dem Tiefenlevel bezüglich der zu Grunde liegenden Kugelschar. Dieses wird entlang des jeweiligen Augstrahls aktualisiert und so zur Identifikation der Schnittpunkte des Strahls mit der Hüllfläche, welche auch zur Kanalfläche gehören, genutzt.

Für beide Herangehensweisen müssen Schnittberechnungen mit Hüllflächen durchgeführt sowie gewisse theoretische Grundlagen erarbeitet und bewiesen werden. Außerdem soll geprüft werden, welches der beiden Verfahren für die Visualisierung der Kanalflächen geeigneter ist und welche Einschränkungen für die Kugelfamilien notwendig und sinnvoll sind. Außerdem soll einer der beiden Ansätze soweit ausgebaut und implementiert werden, dass die Darstellung dieser Flächen mittels eines kleinen Programms möglich wird.

### 1.3. Aufbau der Arbeit

Für beide Herangehensweisen zur Darstellung von Kanalflächen ist die Kenntnis der Enveloppen von grundlegender Bedeutung. Aus diesem Grund ist ihnen auch gleich das folgende Kapitel gewidmet. Im dritten Kapitel werden dann der Selbstschnitt spezieller Hüllflächen und deren Schnitt mit allgemeinen Kurven genauer betrachtet. Das ist ebenfalls für beide Visualisierungsvarianten von entscheidender Bedeutung. Kapitel vier befasst sich mit den Kanalflächen und deren Darstellung. Es werden beide Darstellungsansätze detailliert erläutert. Im sich anschließenden Kapitel wird auf einige Besonderheiten bei der Implementierung eingegangen und im sechsten Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung bzw. Auswertung der Ergebnisse.

*Bemerkung.* Nicht an allen Stellen dieser Arbeit wird angegeben aus welchen Mengen verwendete Indices stammen. Dies geschieht dann implizit durch die Definition der jeweils indizierten Menge oder kann anderweitig aus dem Kontext geschlossen werden. Sei  $\mathcal{F}$  beispielsweise eine beliebige Schar mit Intervall  $J$  für den Scharparameter, so ist mit Definition 2.1 und nach Verwendung eines Terms  $\mathcal{F}_h$  implizit klar, dass  $h$  aus  $J$  sein muss.



## 2. Enveloppen

In diesem Kapitel werden Enveloppen genauer untersucht. Ausgehend von einer Definition solcher Einhüllenden wird veranschaulicht, was man sich unter ihnen vorzustellen hat. Das geschieht zunächst durch die Betrachtung von Kurvenscharen der Ebene. Es werden wichtige Eigenschaften der Einhüllenden herausgearbeitet. Nach diesen allgemeineren Betrachtungen geht es im Speziellen hauptsächlich um Einhüllende von Kugelscharen, die sehr eng mit den Kanalfächern verbunden sind.

**Definition 2.1** (Schar). Gegeben seien ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $n \in \{2, 3\}$ . Eine (**einparametrische**) **Schar** oder **Familie**  $\mathcal{F}$  ist eine Menge von Elementen  $\mathcal{F}_t$  mit  $t \in I$ . Diese Elemente können auf die folgenden beiden Weisen bestimmt sein.

- Es seien  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und

$$f : I \times D \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (t, P) \mapsto f(t, P)$$

eine stetige Funktion. Dann definiert für ein festes  $t_0 \in I$

$$\mathcal{F}_{t_0} := \{Q : Q \in D \text{ mit } f(t_0, Q) = 0\}$$

**als Nullstellenmenge** von  $f_{t_0}(P) := f(t_0, P)$  genau eine Kurve ( $n = 2$ ) bzw. Fläche ( $n = 3$ ) der Schar.

- Es seien  $U \subset \mathbb{R}^m$  mit  $m \in \{1, 2\}$  sowie

$$\mathfrak{P} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad (t, u) \mapsto \mathfrak{P}(t, u)$$

eine stetige Abbildung. Dann definiert für ein festes  $t_0 \in I$

$$\mathcal{F}_{t_0} := \mathfrak{P}(t_0, U) = \{\mathfrak{P}(t_0, u) : u \in U\}$$

**als Bildmenge**  $\mathfrak{P}_{t_0}(U) := \mathfrak{P}(t_0, U)$  genau eine Kurve ( $m = 1$ ) bzw. Fläche ( $m = 2$ ) der Familie.

In beiden Fällen gilt  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in I\}$  und durch

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{F}} : I \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad t \mapsto \mathcal{F}_t$$

wird eine stetige Abbildung definiert, die jedem Parameterwert aus  $I$  ein Element der Schar zuordnet. Der Parameter  $t$  wird auch Scharparameter genannt. Sind die Elemente der Schar regulär (siehe Definition A.9 und Definition B.1), so heißt auch die Schar **regulär**. Die Vereinigung aller Elemente der Schar  $\mathcal{F}$  sei mit  $\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{F}_t$  bezeichnet.

Sämtliche, eine Schar definierende, Abbildungen  $f$  und  $\mathfrak{P}$  dieses Kapitels sind mindestens zweimal stetig differenzierbar. In allen theoretischen Betrachtungen, ohne konkrete Angabe der Abbildungen wird diese Eigenschaft implizit vorausgesetzt.

## 2. Enveloppen

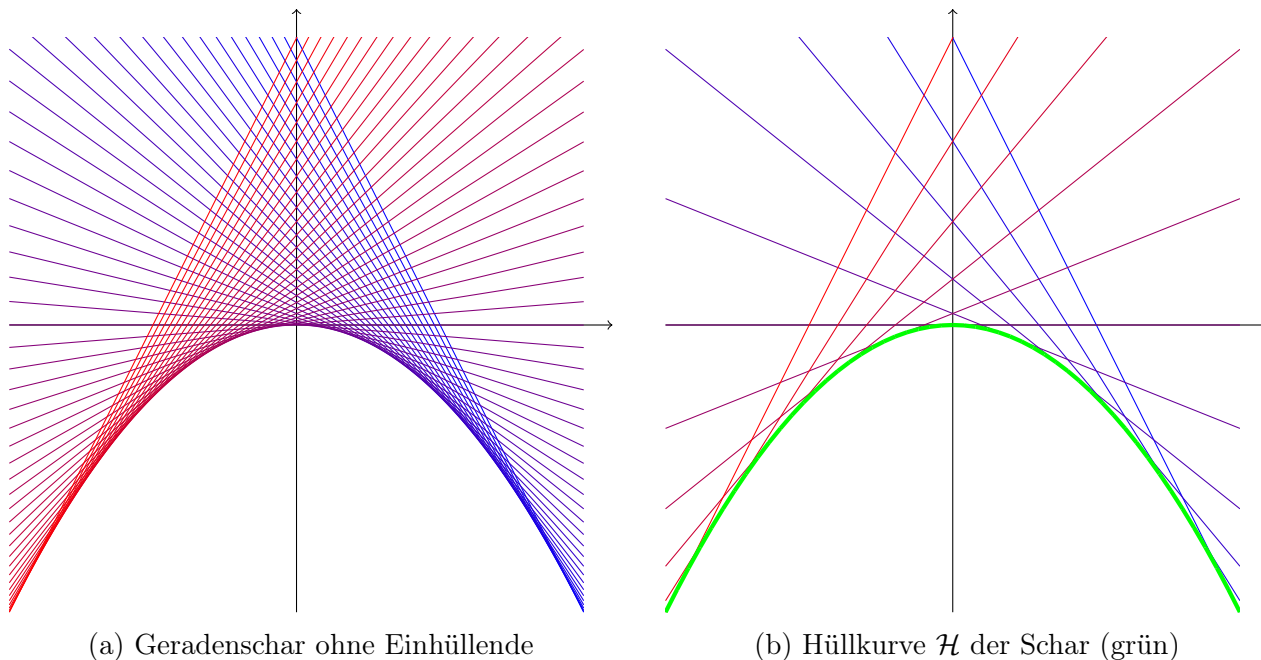


Abbildung 2.1.: Geradenschar mit ihrer Enveloppe für  $t \in [-1, 1]$  (Beispiel 1)

**Definition 2.2** (Einhüllende/Envelope). Es sei eine reguläre Schar  $\mathcal{F}$  von Kurven oder Flächen mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Definition 2.1 gegeben. Dann sind die folgenden Definitionen der Einhüllenden dieser Familie gleichwertig:

- Ist  $\mathcal{F}$  durch Nullstellenmengen  $\mathcal{F}_t = f_t^{-1}(0) \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben, bezeichnet die **Einhüllende/Envelope** die Menge

$$\mathcal{H}^{\mathcal{F}} := \{Q : Q \in D \text{ mit } f(t_0, Q) = (\partial_t f(t, P))(t_0, Q) = 0 \text{ für ein } t_0 \in I\}.$$

- Es sei  $\mathcal{F}$  durch parametrisierte Kurven bzw. Flächen  $\mathcal{F}_t = \mathfrak{P}_t(U) \subset \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann ist die **Einhüllende/Envelope**  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  die Menge der kritischen Werte von  $\mathfrak{P}$  im Sinne der Definition A.11.

Die Einhüllende wird auch als **Hüllkurve** bzw. **Hüllfläche** bezeichnet.

### 2.1. Hüllkurven in der Ebene

Da in der Ebene vieles einfacher und leichter verständlich ist als im Raum werden in diesem Abschnitt zunächst einige Hüllkurven in der Ebene näher betrachtet. Dazu werden Beispiele für Kurvenscharen angegeben und mit Hilfe der Definition 2.2 Gleichungen für die Hüllkurven aufgestellt. Diese Beispiele werden später bei verschiedenen Gelegenheiten zur Veranschaulichung wieder herangezogen. Die Scharen  $\mathcal{F}$  werden in impliziter Form durch  $f_t(x, y) = f(t, x, y)$  mit  $\mathcal{F}_t = f_t^{-1}(0)$  und in einer Parameterform  $\mathfrak{P}_t(s) = \mathfrak{P}(t, s) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\mathcal{F}_t = \mathfrak{P}_t(U)$  angegeben, wobei  $U \subseteq \mathbb{R}$  der Parameterraum von  $\mathfrak{P}$  für  $s$  ist.

*Beispiel 1* (Geradenschar).

$$f(t, x, y) = y - 2tx - t^2, \quad \mathfrak{P}(t, s) = \begin{pmatrix} s \\ 2ts + t^2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

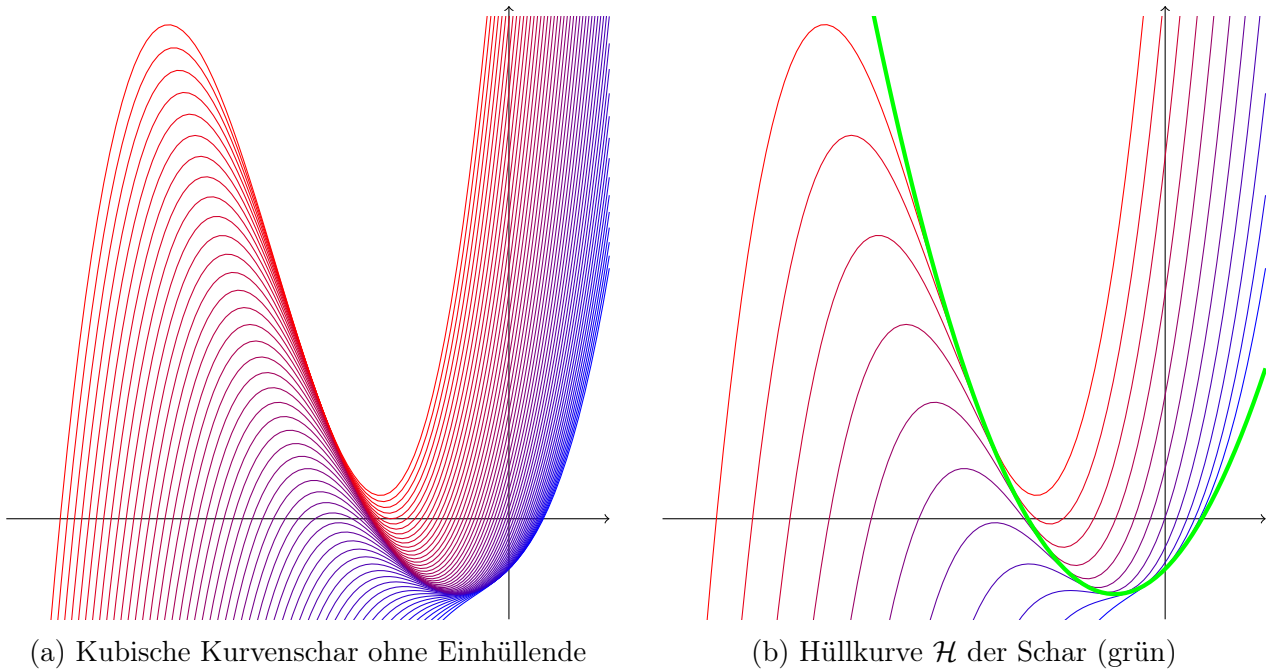


Abbildung 2.2.: Kubische Kurvenschar aus Beispiel 2 mit  $g(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$  und  $t \in [0, 2]$

Es ist leicht zu sehen, dass sowohl die Nullstellenmenge  $f_t^{-1}(0)$  als auch die Parameterdarstellung die gleiche Familie von Kurven beschreiben. Die Geraden haben den Anstieg  $2t$  und schneiden die  $y$ -Achse bei  $y = t^2$ . Aus

$$\partial_t f(t, x, y) = -2t - 2x = 0$$

folgt,  $t = -x$ . Durch Einsetzen in die Gleichung der Schar ergibt sich die Enveloppengleichung

$$f^{\mathcal{H}}(x, y) = y + x^2 = 0,$$

die eine an der  $x$ -Achse gespiegelte Normalparabel beschreibt (vgl. Abb. 2.1). Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist gegeben durch

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t + 2s & 2t \end{pmatrix}$$

und der Wert ihrer Determinante beträgt  $-2(t + s)$ . Somit hat das Differential für  $t = -s$  den Rang 1. Die Menge der kritischen Werte ist also  $\{(s, -s^2)^T : s \in \mathbb{R}\}$ , welche offensichtlich der Nullstellenmenge  $(f^{\mathcal{H}})^{-1}(0)$  entspricht.

*Beispiel 2* (Kubische Kurve). Es sei  $g$  ein beliebiges univariates Polynom.

$$f(t, x, y) = y - (x + t)^3 - g(x), \quad \mathfrak{P}(t, s) = \begin{pmatrix} s \\ (s + t)^3 + g(s) \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Es ist leicht zu sehen, dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  sowohl die Nullstellenmenge  $f_t^{-1}(0)$  als auch die Parameterdarstellung  $\mathfrak{P}_t(\mathbb{R})$  die gleiche Kurve beschreiben. Dabei handelt es sich um die Graphen univariater Polynome dritten Grades. Aus

$$\partial_t f(t, x, y) = -3(x + t)^2 = 0$$

## 2. Enveloppen

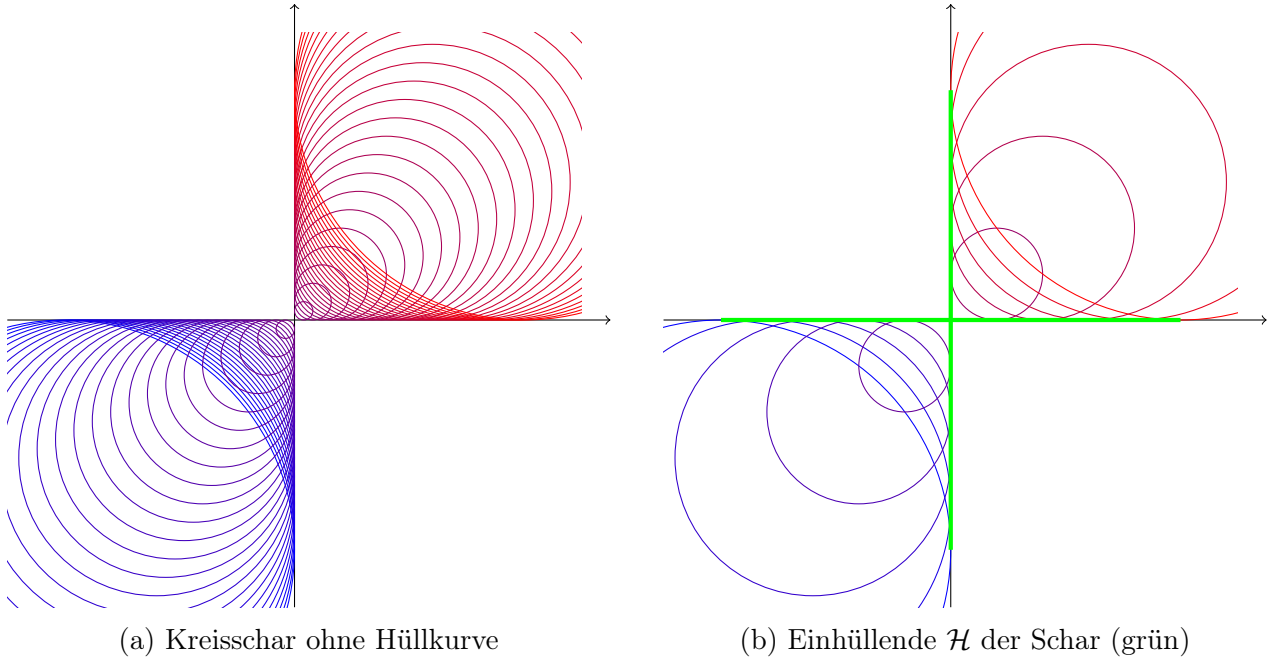


Abbildung 2.3.: Kreisschar mit ihrer Enveloppe für  $t \in [-0.8, 0.8]$  (Beispiel 3)

folgt,  $t = -x$ . Durch Einsetzen in die Gleichung der Schar ergibt sich die Enveloppengleichung

$$f^{\mathcal{H}}(x, y) = y - g(x) = 0.$$

Das heißt, dass die Hüllkurve der Graph des Polynoms  $g(x)$  ist (vgl. Abb. 2.2). Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist durch

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3(s+t)^2 & 3(s+t)^2 + g'(s) \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante durch  $-3(s+t)^2$  gegeben. Somit hat das Differential von  $\mathfrak{P}$  für  $t = -s$  nicht den vollen Rang. Die Menge der kritischen Werte ist also  $\{(s, g(s))^T : s \in \mathbb{R}\}$ , welche offensichtlich der Nullstellenmenge  $(f^{\mathcal{H}})^{-1}(0)$  entspricht.

*Beispiel 3* (Kreisschar entlang einer Geraden mit Radiusfunktion  $|t|$ ).

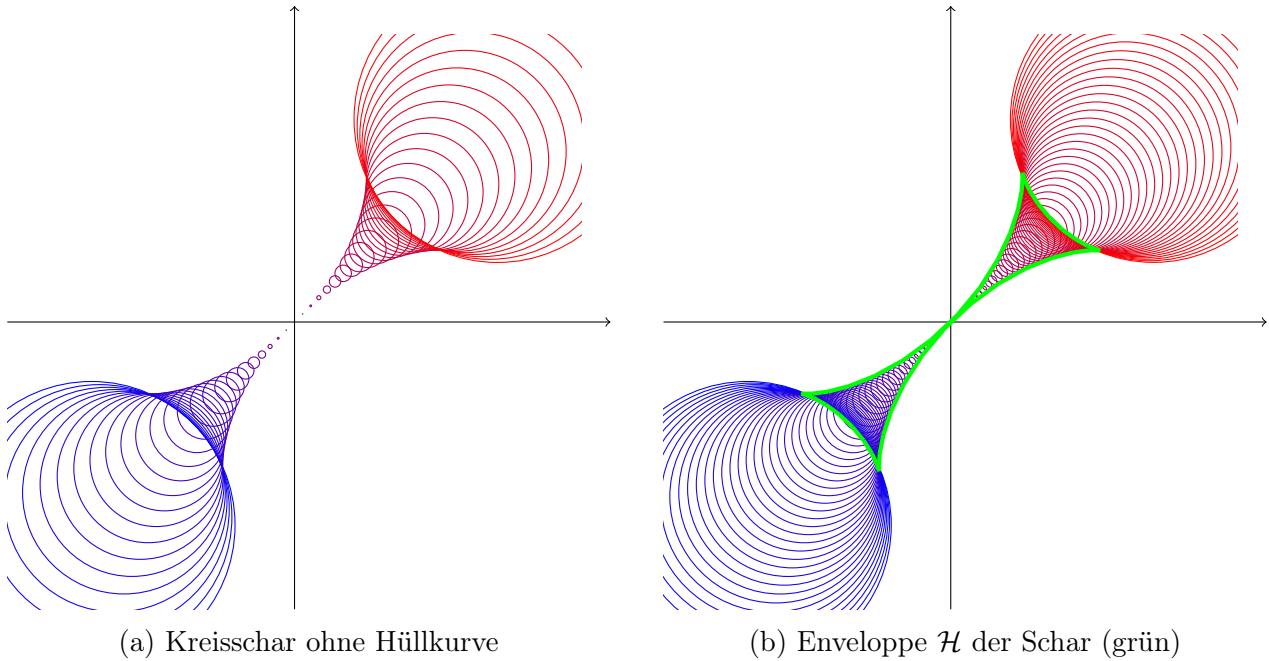
$$f(t, x, y) = (x - t)^2 + (y - t)^2 - t^2, \quad \mathfrak{P}(t, s) = \begin{pmatrix} t + t \cos(s) \\ t + t \sin(s) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, s \in [0, 2\pi]$$

Hier werden Kreise mit variablem Radius  $r(t) = |t|$  beschrieben, deren Mittelpunkte sich auf der Winkelhalbierenden zwischen  $x$ - und  $y$ -Achse befinden. Die partielle Ableitung des Polynoms der impliziten Darstellung nach  $t$  und die Ableitungsmatrix der Parametrisierung sehen wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = -2(x - t) - 2(y - t) - 2t, \quad \mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(s) + 1 & -t \sin(s) \\ \sin(s) + 1 & t \cos(s) \end{pmatrix}$$

Aus  $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = 0$  folgt

$$(x - t) = -(y - t) - t \iff x = t - y \tag{2.1}$$


 Abbildung 2.4.: Kreisschar mit ihrer Enveloppe für  $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  (Beispiel 4)

und nach Einsetzen in  $f(t, x, y) = 0$  und Umformen erhält man  $y(y - t) = 0$ , was die beiden Lösungen  $y = 0$  bzw.  $y = t$  liefert. Mit Gleichung (2.1) ergibt sich  $x = t$  im ersten Fall und  $x = 0$  im zweiten. Das entspricht offensichtlich den beiden Koordinatenachsen (siehe Abb. 2.3).

Die Determinante der Jacobi-Matrix

$$t(\cos^2(s) + \sin^2(s) + \cos(s) + \sin(s)) = t(\cos(s) + \sin(s) + 1)$$

gleich null zu setzen, liefert  $t = 0$ , was dem Koordinatenursprung entspricht, oder

$$\sin(s) + \cos(s) = -1 \quad \implies \quad (\sin(s) + \cos(s))^2 = 1 \quad \iff \quad \sin(s) \cos(s) = 0.$$

Somit hat die Determinante der Jacobi-Matrix also genau für  $\sin(s) = 0$  und  $\cos(s) = -1$  oder  $\sin(s) = -1$  und  $\cos(s) = 0$  den Wert 0. Durch Einsetzen in die Parametrisierung ergibt sich die Menge der kritischen Werte

$$\{(0, t)^T : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 0)^T : t \in \mathbb{R}\}.$$

Das entspricht wieder genau den beiden Achsen des Koordinatensystems.

*Beispiel 4* (Kreisschar entlang einer Geraden mit Radiusfunktion  $t^2$ ). Für  $t \in \mathbb{R}$  und  $s \in [0, 2\pi]$  seien die Abbildungen

$$f(t, x, y) = (x - t)^2 + (y - t)^2 - t^4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}(t, s) = \begin{pmatrix} t + t^2 \cos(s) \\ t + t^2 \sin(s) \end{pmatrix}$$

gegeben. Hier werden Kreise mit variablem Radius  $r(t) = t^2$  beschrieben, deren Mittelpunkte sich auf der Winkelhalbierenden zwischen x- und y-Achse befinden. Die partielle Ableitung des Polynoms der impliziten Darstellung nach  $t$  und die Ableitungsmatrix der Parametrisierung sehen wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = -2(x - t) - 2(y - t) - 4t^3, \quad \mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s) = \begin{pmatrix} 2t \cos(s) + 1 & -t^2 \sin(s) \\ 2t \sin(s) + 1 & t^2 \cos(s) \end{pmatrix}$$

## 2. Enveloppen

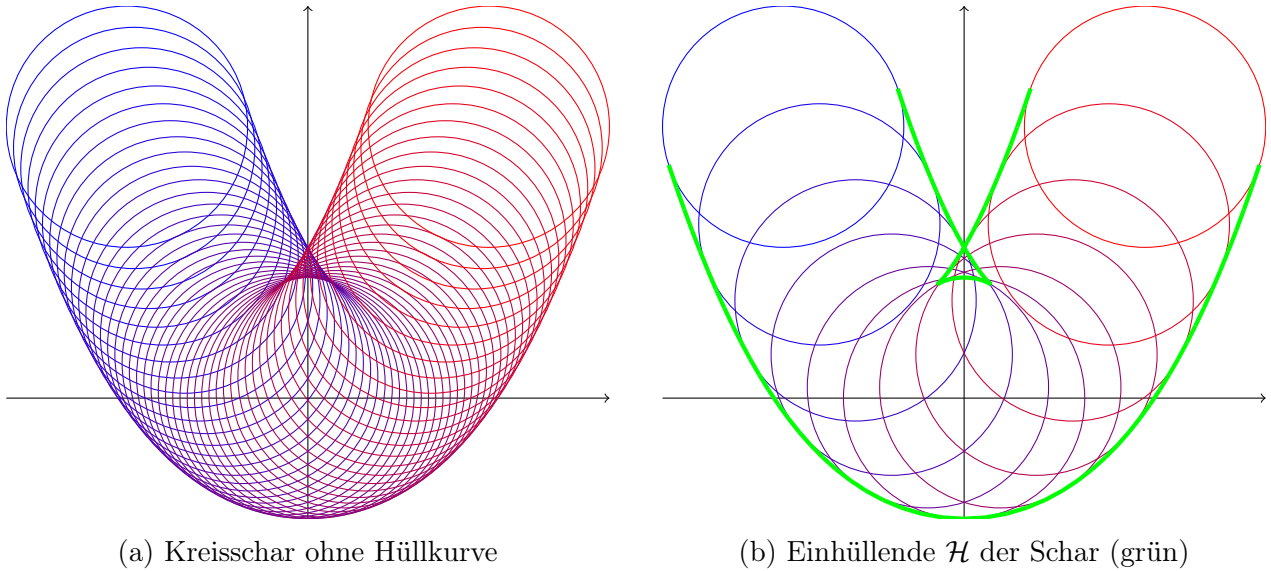


Abbildung 2.5.: Kreisschar mit ihrer Enveloppe für  $t \in [-1.5, 1.5]$  (Beispiel 5)

Die Determinante der Jacobi-Matrix

$$2t^3(\cos^2(s) + \sin^2(s)) + t^2(\cos(s) + \sin(s)) = t^2(2t + \cos(s) + \sin(s))$$

gleich null zu setzen, liefert doppelt  $t = 0$ , was dem Koordinatenursprung entspricht, oder

$$t = -\frac{\sin(s) + \cos(s)}{2} \implies t^2 = \left( \frac{2 \sin(s) \cos(s) + 1}{4} \right). \quad (2.2)$$

Die Extremstellen  $s_{\pm}$  von  $g(s) := \cos(s) + \sin(s)$  erfüllen die Gleichung

$$0 = g'(s_{\pm}) = -\sin(s_{\pm}) + \cos(s_{\pm})$$

und aus  $\sin(s_{\pm}) = \cos(s_{\pm})$  folgt  $\sin(s_{\pm}) = \cos(s_{\pm}) = \pm\sqrt{2}/2$ . Somit gilt für alle  $s \in [0, 2\pi]$ , dass der Betrag von  $g(s)$  niemals größer ist als  $\sqrt{2}$ . Also kann die Gleichung  $|\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}| = 0$  für alle  $t$ , die vom Betrag her größer als  $\sqrt{2}/2$  sind, nicht erfüllt sein.

Durch Einsetzen von  $t$  und  $t^2$  aus Gleichung (2.2) in die Parametrisierung ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{\mathcal{H}}(s) &= \begin{pmatrix} -\frac{\sin(s)+\cos(s)}{2} + \left(\frac{2 \sin(s) \cos(s)+1}{4}\right) \cos(s) \\ -\frac{\sin(s)+\cos(s)}{2} + \left(\frac{2 \sin(s) \cos(s)+1}{4}\right) \sin(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \sin(s) \cos^2(s) - 2 \sin(s) - \cos(s) \\ 2 \sin^2(s) \cos(s) - \sin(s) - 2 \cos(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der Einhüllenden. Durch Elimination erhält man auch die implizite Form

$$16x^6 + 48x^4y^2 + 48x^2y^4 + 16y^6 - 13x^4 - 36x^3y + 82x^2y^2 - 36xy^3 - 13y^4 + 8x^2 - 16xy + 8y^2 = 0$$

der Kurve.



*Beispiel 5* (Kreisschar entlang einer Parabel). In diesem Beispiel wird eine Schar von Kreisen mit konstantem Radius  $r(t) \equiv r$  betrachtet. Ihre Mittelpunkte bilden die Normalparabel.

$$f_t(x, y) = (x - t)^2 + (y - t^2)^2 - r^2, \quad \mathfrak{P}(t, s) = \begin{pmatrix} t + r \cos(s) \\ t^2 + r \sin(s) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, s \in [0, 2\pi]$$

Für die partielle Ableitung von  $f$  nach  $t$  und die Jacobi-Matrix der Parametrisierung  $\mathfrak{P}$  ergeben sich

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = -2(x - t) - 4t(y - t^2) \quad \text{und} \quad \mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & -r \sin(s) \\ 2t & r \cos(s) \end{pmatrix}.$$

Aus  $|\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s)| = r \cos(s) + 2tr \sin(s) = 0$  folgt  $t = -\frac{1}{2} \cot(s)$ . Durch Einsetzen in die Parametrisierung der Schar erhält man

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{H}}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot(s) + r \cos(s) \\ \frac{1}{4} \cot^2(s) + r \sin(s) \end{pmatrix}.$$

Entweder müssen alle Vielfachen von  $\pi$  aus dem Definitionsbereich für  $s$  entfernt werden oder man erweitert den Wertebereich um  $1/0 = \infty$ .

Man kann die Lösung auch mittels geometrischer Überlegungen erhalten. Die Gleichung  $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = 0$  beschreibt eine Familie von Geraden. Für ein festes  $t$  ist die entsprechende Gerade parallel zu  $(-2t, 1)^T$  und enthält den Punkt  $(t, t^2)^T$ . Sie schneidet die Tangente an die Parabel in diesem Punkt im rechten Winkel, denn diese hat die Richtung  $(1, 2t)^T$ . Die Hüllkurve besteht aus den Schnittpunkten dieser Geraden mit den zugehörigen Kreisen. Die Schnittpunkte können durch

$$\hat{\mathfrak{P}}^{\mathcal{H}}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \pm \frac{r}{\sqrt{4t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \mp \frac{2rt}{\sqrt{4t^2 + 1}} \\ t^2 \pm \frac{r}{\sqrt{4t^2 + 1}} \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Dass die Parametrisierungen  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}}(s)$  und  $\hat{\mathfrak{P}}^{\mathcal{H}}(t)$  wirklich die gleiche Kurve beschreiben, sieht man durch die Umparametrisierung  $t(s) = -\frac{1}{2} \cot(s)$ . Damit ist

$$\sqrt{4t^2(s) + 1} = \sqrt{4 \frac{\cos^2(s)}{4 \sin^2(s)} + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2(s) + \sin^2(s)}{\sin^2(s)}} = \frac{1}{\sin(s)}$$

und es folgt

$$\hat{\mathfrak{P}}^{\mathcal{H}}(t(s)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot(s) \mp \frac{-r \frac{\cos(s)}{\sin(s)}}{\frac{1}{\sin(s)}} \\ \frac{1}{4} \cot^2(s) \pm \frac{\frac{r}{1}}{\frac{1}{\sin(s)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cot(s) \pm r \cos(s) \\ \frac{1}{4} \cot^2(s) \pm r \sin(s) \end{pmatrix}.$$

Das alternative Vorzeichen vertauscht nur die Reihenfolge, in der die beiden Kurvenäste der Einhüllenden durchlaufen werden. Ist das Vorzeichen positiv, so entspricht  $\hat{\mathfrak{P}}^{\mathcal{H}}(t(s))$  für  $s \in (0, \pi)$  dem Teil der Hüllkurve, der über der Normalparabel liegt, und für  $s \in (\pi, 2\pi)$  dem darunter. Bei negativem Vorzeichen ist es umgekehrt.

Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Enveloppe durchaus auch lokal selbst durchdringen kann (siehe Abb. 2.5). Derartige Selbstschnitte werden in Abschnitt 3.1 für Hüllflächen von Kugelscharen genauer betrachtet.

## 2. Enveloppen

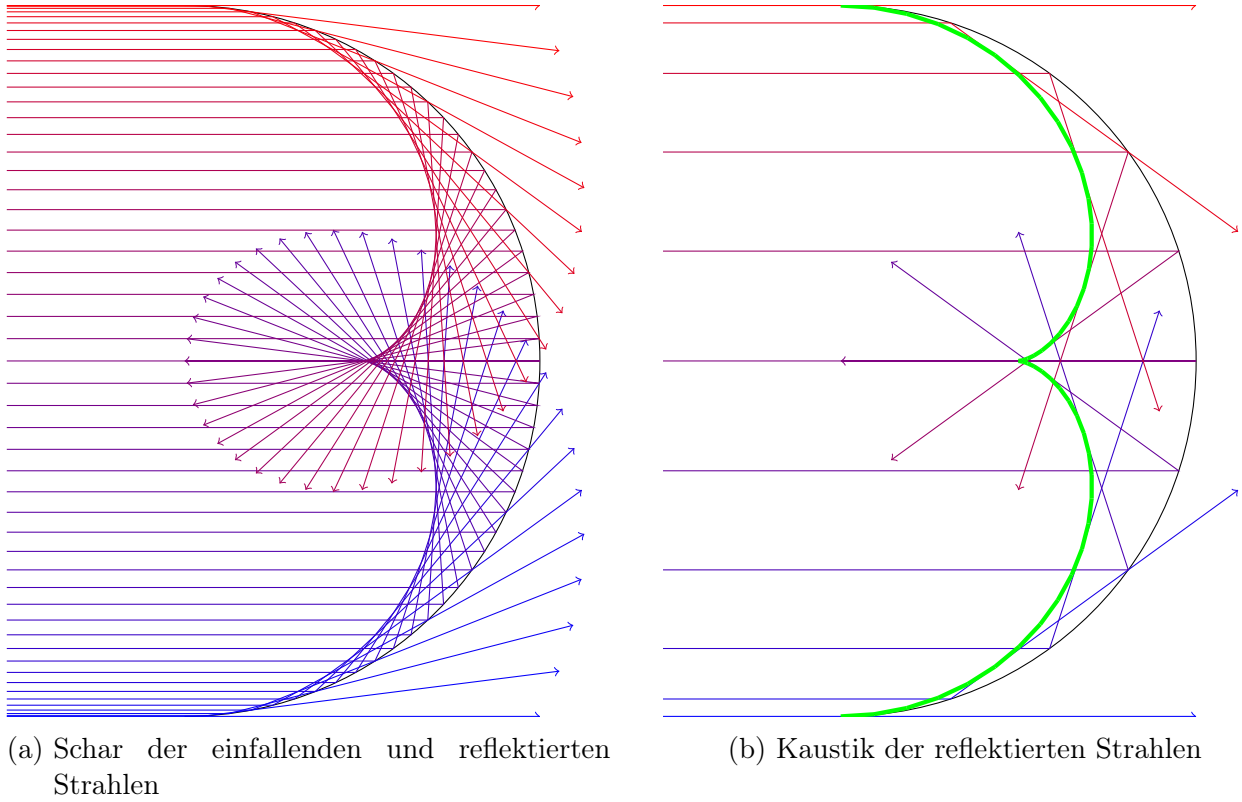


Abbildung 2.6.: Katakaustik (Beispiel 6)

*Beispiel 6* (Kaustik). Einhüllende von Lichtstrahlen werden als Kaustiken bezeichnet. Bei gebrochenen Lichtstrahlen wird von Diakaustiken, bei reflektierten Strahlen von Katakaustiken gesprochen. Das wohl bekannteste Beispiel ist die sogenannte Kaffeetassen-Katakaustik. Hierbei werden die in  $x$ -Richtung parallel einfallenden Lichtstrahlen an dem rechten Halbkreis des Einheitskreises reflektiert. Damit sind die Punkte  $P(t)$ , in denen die Lichtstrahlen reflektiert werden, die entsprechenden Oberflächennormalen  $\vec{n}(t)$  in diesen Punkten und der Vektor zur Lichtquelle  $\vec{l}$  trivialerweise durch

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.3)$$

gegeben. Für die Parametrisierung der Schar der reflektierten Strahlen gilt

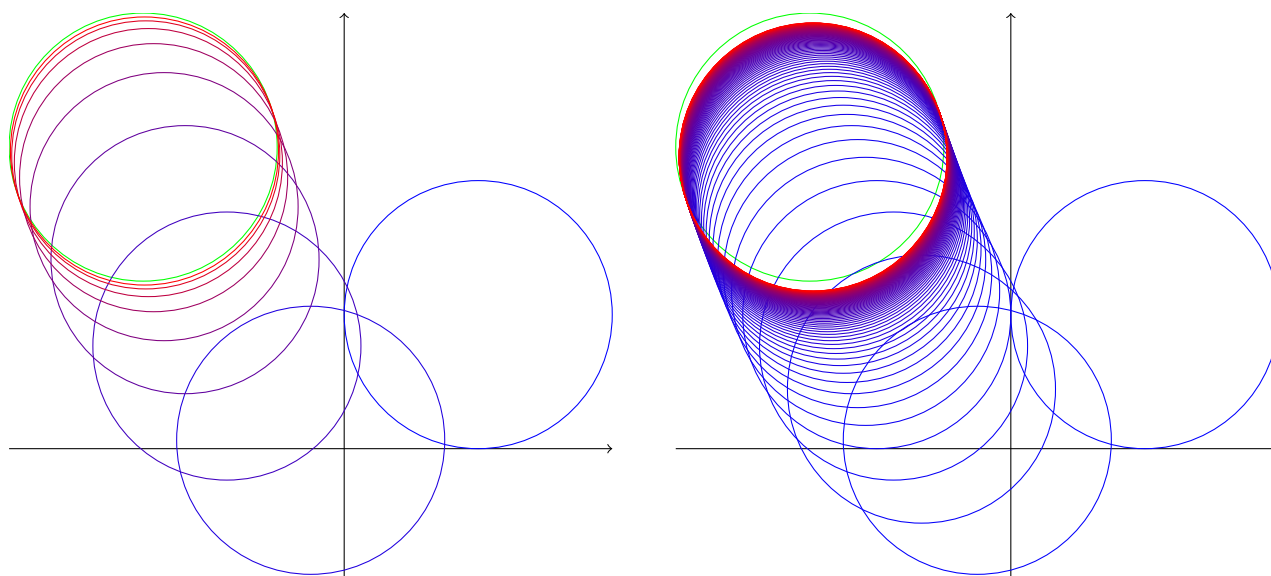
$$\mathfrak{P}^r(t, s) = P(t) + s(\vec{v}(t) + (\vec{v}(t) - \vec{l})) \quad \text{mit} \quad \vec{v}(t) = \langle \vec{l}, \vec{n}(t) \rangle \vec{n}(t) \quad \text{und} \quad s \in \mathbb{R}$$

Die Strahlen und ihre Hüllkurve sind in Abb. 2.6 dargestellt. Insgesamt ergeben sich

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\cos^2(t) \\ -\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{P}^r(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2(t) \\ -2\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

mit  $s \in \mathbb{R}^+$  und  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Die Jacobi-Matrix von  $\mathfrak{P}(t, s)$  ist

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{P}^r}(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) + 4s\sin(t)\cos(t) & 1 - 2\cos^2(t) \\ \cos(t) - 2s(\cos^2(t) - \sin^2(t)) & -2\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$



(a) Kreise mit Parametern  $t = t_0 + 2.5 \cdot 2^{-i}$  für Folgenglieder  $i = 0, \dots, 8$

(b) Parameterwerte  $t = t_0 + 2.5/(i + 1)$  für Folgenglieder  $i = 0, \dots, 100$

Abbildung 2.7.: Infinitesimale Nachbarschaft der Kreise der Schar aus Beispiel 5 bei  $t_0 = -1.5$ . Der fest ausgewählte Kreis bei  $t_0$  ist grün dargestellt. Die Folge von Kreisen  $\mathcal{F}_{\rightarrow t_0}$  ist blau bis rot eingefärbt.

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{J}^{\mathfrak{H}^r}(t, s)| &= (-\sin(t) + 4s \sin(t) \cos(t))(-2 \sin(t) \cos(t)) \\
 &\quad - (\cos(t) - 2s(\cos^2(t) - \sin^2(t)))(1 - 2 \cos^2(t)) \\
 &= 2 \sin^2(t) \cos(t) + 2 \cos^3(t) - \cos(t) \\
 &\quad - 2s(2 \sin^2(t) \cos^2(t) + 2 \cos^4(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
 &= \cos(t) - 2s(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
 &= \cos(t) - 2s
 \end{aligned}$$

für ihre Determinante. Aus  $|\mathcal{J}^{\mathfrak{H}^r}(t, s)| = 0$  folgt somit  $s = \frac{\cos(t)}{2}$  und die Parameterdarstellung der Kaustik sieht demzufolge wie folgt aus:

$$\mathfrak{H}^r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \left( \frac{3}{2} - \cos^2(t) \right) \\ \sin(t) (1 - \cos^2(t)) \end{pmatrix}$$

## 2.2. Lokaler Schnitt der Ursprungsschar

Der lokale Schnitt einer Familie  $\mathcal{F}$  entsteht durch den Schnitt von sehr nahe beieinander liegenden Elementen der Schar. Das soll im Folgenden noch formal definiert werden. Hierfür werden zunächst ein paar Notationen eingeführt.

**Notation.** Es sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann bezeichne  $\mathbf{t}_{\rightarrow t_0}$  eine Folge

$$\mathbf{t}_{\rightarrow t_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad n \mapsto t_{\rightarrow t_0}(n),$$

## 2. Enveloppen

welche den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\rightarrow t_0}(n) = t_0$$

hat. Für eine Schar  $\mathcal{F}$  bezeichne  $\mathcal{F}_{\rightarrow t_0}$  mit  $t_0 \in I$  eine Folge

$$\mathcal{F}_{\rightarrow t_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad n \mapsto \mathfrak{P}^{\mathcal{F}}(t_{\rightarrow t_0}(n)) = \mathcal{F}_{t_{\rightarrow t_0}(n)}$$

der Scharelemente  $\{\mathcal{F}_{t_{\rightarrow t_0}(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ .

Durch die Stetigkeit von  $\mathfrak{P}^{\mathcal{F}}$  gilt natürlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\rightarrow t_0}(n) = \mathcal{F}_{t_0}.$$

**Definition 2.3** (Infinitesimale Nachbarschaft). Es sei  $\mathcal{F}$  eine Schar von Kurven oder Flächen nach Definition 2.1. Dann ist  $\mathcal{F}_{t_0}$  für ein beliebig großes  $n_0 \in \mathbb{N}$  **infinitesimal benachbart** zu allen Elementen  $\mathcal{F}_{\rightarrow t_0}(n)$  mit  $n > n_0$ , unabhängig von der Folge  $t_{\rightarrow t_0}$ . Man spricht auch von **infinitesimal benachbarten** Elementen bei  $t_0$ .

*Bemerkung.* Alternativ könnte man die reellen Zahlen wie in [LR94, S.23 3.9 bzw. S. 99 9.1] erweitern und zwei Scharelemente infinitesimal benachbart nennen, wenn die Differenz ihrer Scharparameter infinitesimal ist.

**Definition 2.4** (Lokaler Schnitt). Der **lokale Schnitt** einer Schar  $\mathcal{F}$  bei  $t_0 \in I$  ist die Menge aller Schnittpunkte infinitesimal benachbarter Elemente bei  $t_0$ . Er sei mit  $\mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{F}}$  bezeichnet und formal gilt

$$\mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{F}} = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \bigcap_{n > n_0} \mathcal{F}_{\rightarrow t_0}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{t_0} \cap \mathcal{F}_{\rightarrow t_0}(n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{t_0} \cap \mathcal{F}_{t_0 + \epsilon}.$$

Dieser Grenzwert existiert unabhängig von der konkreten Folge  $t_{\rightarrow t_0}$ , da  $\mathfrak{P}^{\mathcal{F}}$  stetig ist. Der **lokale Schnitt**  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} := \cup_{t \in I} \mathcal{L}_t^{\mathcal{F}}$  der Familie  $\mathcal{F}$  ist die Vereinigung aller Schnittpunkte, die aus derartigen Überschneidungen resultieren.

Der lokale Schnitt einer regulären Schar stimmt in vielen Fällen mit der Einhüllenden überein. Das wird nun für einige der bereits bekannten Beispiele gezeigt.

*Beispiel 1* (Lokaler Schnitt). Den Ausgangspunkt bilden zwei beliebige, aber voneinander verschiedene ( $t_1 \neq t_2$ ) Geraden  $\mathcal{F}_{t_1} = f_{t_1}^{-1}(0)$  sowie  $\mathcal{F}_{t_2} = f_{t_2}^{-1}(0)$  der Schar mit

$$f_{t_1}(x_1, y_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad f_{t_2}(x_2, y_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2 = 0$$

Für den Schnittpunkt  $Q = (q_x, q_y)^T$  der beiden Geraden gilt natürlich

$$f_{t_1}(q_x, q_y) = 0 = f_{t_2}(q_x, q_y),$$

woraus

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0$$

folgt. Da nach Voraussetzung  $t_1 \neq t_2$  gilt, löst nur  $q_x = -(t_1 + t_2)/2$  die Gleichung und der Schnittpunkt ist gegeben durch  $Q = (-(t_1 + t_2)/2, -t_1t_2)^T$ . Definiert man nun  $\epsilon := t_2 - t_1$  und lässt  $\epsilon$  gegen null gehen, erhält man den Schnitt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{t_1} \cap \mathcal{F}_{\rightarrow t_1}(n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\epsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}$$

infinitesimal benachbarter Geraden der Familie bei  $t_1$ . Nach einer Umparametrisierung  $t_1(t) = -t$  ist leicht zu sehen, dass die Menge all dieser Schnittpunkte

$$\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = \{(t, -t^2)^T : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{H}^{\mathcal{F}},$$

welche den lokalen Schnitt darstellt, mit der errechneten Menge der kritischen Werte (siehe Seite 17) übereinstimmt.

*Beispiel 4* (Lokaler Schnitt). Hier wird die Überschneidung zweier Kreise der Schar  $\mathcal{F}_{t_1} = f_{t_1}^{-1}(0)$  und  $\mathcal{F}_{t_2} = \mathfrak{P}_{t_2}(s)$  mit  $t_1 \neq t_2$  betrachtet. Der Schnitt erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = f_{t_1}(\mathfrak{P}_{t_2}(s)) &= (t_2 + t_2^2 \cos(s) - t_1)^2 + (t_2 + t_2^2 \sin(s) - t_1)^2 - t_1^4 \\ &= t_2^4 - t_1^4 + 2(t_2 - t_1)^2 + 2(t_2 - t_1)t_2^2(\cos(s) + \sin(s)) \\ &= (t_2 - t_1) \left( (t_2 + t_1)(t_2^2 + t_1^2) + 2(t_2 - t_1) + 2t_2^2(\cos(s) + \sin(s)) \right). \end{aligned}$$

Da  $t_1$  und  $t_2$  verschieden sind, kann die Gleichung nur dadurch erfüllt werden, dass der zweite Faktor der letzten Zeile null ergibt.

Für  $t_2 \rightarrow t_1$  und  $t := t_1$  gilt also

$$4t^3 + 2t^2(\cos(s) + \sin(s)) = 2t^2(2t + \cos(s) + \sin(s)) = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch 2, erhält man  $|\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, s)| = 0$ . Somit ist mit derselben Argumentation wie auf Seite 20 zu erkennen, dass sich infinitesimal benachbarte Elemente der Schar nur bei  $t \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$  schneiden und ihre Schnittpunkte mit den Punkten der Einhüllenden identisch sind. Es gilt also  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = \mathfrak{P}^{\mathcal{H}}(U) = \mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  mit  $U = [0, 2\pi]$ .

Diese Beispiele lassen vermuten, dass der lokale Schnitt  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$  einer regulären Schar stets identisch mit ihrer Enveloppe  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  ist. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, wie am folgenden, bereits bekannten, Beispiel zu sehen ist.

*Beispiel 2* (Lokaler Schnitt). Für alle Schnittpunkte  $Q = (q_x, q_y)^T \in \mathcal{F}_{t_1} \cap \mathcal{F}_{t_2}$  zweier kubischer Kurven  $\mathcal{F}_{t_1} = f_{t_1}^{-1}(0)$  und  $\mathcal{F}_{t_2} = f_{t_2}^{-1}(0)$  mit

$$f_{t_1}(x_1, y_1) = y_1 - (x_1 + t_1)^3 - g(x_1) \quad \text{sowie} \quad f_{t_2}(x_2, y_2) = y_2 - (x_2 + t_2)^3 - g(x_2)$$

muss

$$f_{t_1}(q_x, q_y) = 0 = f_{t_2}(q_x, q_y)$$

gelten, was

$$(q_x + t_1)^3 = (q_x + t_2)^3$$

impliziert. Daraus folgt sofort  $q_x + t_1 = q_x + t_2$  und damit auch  $t_1 = t_2$ . Das heißt, dass  $\mathcal{F}_{t_1}$  und  $\mathcal{F}_{t_2}$  nur dann gemeinsame Punkte haben, wenn  $t_1$  und  $t_2$  gleich sind. Also schneiden sich verschiedene Elemente der Schar nicht. Der lokale Schnitt der Schar  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$  ist somit leer, dennoch existiert die zuvor berechnete Hüllkurve. Zusammengefasst gilt hier also

$$\mathcal{L}^{\mathcal{F}} = \emptyset \quad \neq \quad \{(s, g(s))^T : s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{H}^{\mathcal{F}}.$$

Auch wenn der lokale Schnitt  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$  einer regulären Schar  $\mathcal{F}$  nicht in allen Fällen mit deren Einhüllender  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  übereinstimmt, so gilt doch wenigstens die Teilmengenbeziehung  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{H}^{\mathcal{F}}$ . Das wird im Folgenden für Nullstellenmengen gezeigt.

## 2. Enveloppen

**Lemma 2.5.** *Eine Schar  $\mathcal{F}$  sei als Nullstellenmenge wie in Definition 2.1 gegeben. Schneiden sich infinitesimal benachbarte Elemente der Familie bei  $t_0 \in I$  im Punkt  $Q \in D$ , so gelten sowohl  $f(t_0, Q) = 0$  als auch  $(\partial_t f(t, P))(t_0, Q) = 0$ .*

*Beweis.* Betrachtet man einen Schnittpunkt  $Q$  zweier Elemente  $\mathcal{F}_{t_1}$  und  $\mathcal{F}_{t_2}$  der Schar mit zugehörigen Parametern  $t_1, t_2 \in I$ , so ist klar, dass  $f(t_1, Q) = f(t_2, Q) = 0$  gelten muss, denn der Schnittpunkt gehört natürlich zur Nullstellenmenge von  $f_{t_1}$  und  $f_{t_2}$ . Liegen  $t_1$  und  $t_2$  nun noch beliebig nah beieinander, folgt außerdem, dass der Funktionswert von  $f(t, Q)$  gleich null bleibt, wenn man  $Q$  fixiert und  $t$  von  $t_1$  nach  $t_2$  laufen lässt. Eine leichte Variation von  $t$  an der Stelle  $(t_1, Q)$  führt also zu keiner Funktionswertänderung, was bedeutet, dass auch  $\partial_t f(t, P) = 0$  gilt.  $\square$

**Korollar 2.6.** *Es sei die Familie  $\mathcal{F}$  als Nullstellenmenge gegeben. Dann ist jeder Punkt des lokalen Schnittes der Schar auch ein Punkt ihrer Einhüllenden:*

$$\mathcal{L}^{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{H}^{\mathcal{F}}$$

*Beweis.* Für jeden Punkt  $S \in \mathcal{L}^{\mathcal{F}}$  des lokalen Selbstschnittes der Schar  $\mathcal{F}$  gibt es nach Definition 2.4 ein  $t_0 \in I$  mit  $S \in \mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{F}}$  und damit gehört  $S$  zum Schnitt infinitesimal benachbarter Elemente von  $\mathcal{F}$  bei  $t_0$ . Nach Lemma 2.5 gilt dann

$$f(t_0, S) = (\partial_t f(t, P))(t_0, S) = 0$$

und mit Definition 2.2 gehört  $S$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Die Gleichheit von  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$  und  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  gilt im Allgemeinen nicht, wie die Betrachtungen zu Beispiel 2 auf Seite 25 zeigen. Nur die Punkte von Hüllkurven, die noch eine Zusatzbedingung erfüllen, gehören auch zum lokalen Schnitt der Familie. Das wird in Lemma 2.7 formuliert.

**Lemma 2.7.** *Es seien eine ebene Kurvenschar  $\mathcal{F}$  als Nullstellenmenge sowie ein Punkt  $Q \in \mathcal{F}_{t_0}$  der Hüllkurve  $\mathcal{H}^{\mathcal{F}}$  gegeben. Ist dann noch die Zusatzbedingung*

$$\begin{vmatrix} \partial_x f(t, P) & \partial_y f(t, P) \\ \partial_t \partial_x f(t, P) & \partial_t \partial_y f(t, P) \end{vmatrix} (t_0, Q) \neq 0 \quad (2.5)$$

*erfüllt, gehört  $Q$  zum lokalen Schnitt der Schar  $\mathcal{F}$  bei  $t_0$ .*

*Beweis.* Die Aussage wird in ähnlicher Form in [MK90, S. 525, Nr. 177] bewiesen.  $\square$

Diese Zusatzbedingung soll nun für zwei Beispiele überprüft werden.

*Beispiel 1* (Zusatzbedingung 2.5). Für die Determinante aus 2.5 gilt

$$\begin{vmatrix} \partial_x f(t, P) & \partial_y f(t, P) \\ \partial_t \partial_x f(t, P) & \partial_t \partial_y f(t, P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Also ist die Zusatzbedingung stets erfüllt. Jeder Punkt der Hüllkurve gehört somit auch zum lokalen Schnitt  $\mathcal{L}^{\mathcal{F}}$ .

*Beispiel 2* (Zusatzbedingung 2.5). Hier ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \partial_x f(t, P) & \partial_y f(t, P) \\ \partial_t \partial_x f(t, P) & \partial_t \partial_y f(t, P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3(x+t)^2 - g'(x) & 1 \\ -6(x+t) & 0 \end{vmatrix} (t_0, Q) = 6(q_x + t_0)$$

mit  $Q = (q_x, q_y, q_z)^T \in \mathcal{F}_{t_0}$  für die entsprechende Determinante. Die Zusatzbedingung 2.5 ist für alle Punkte  $Q$  der Hüllkurve nicht erfüllt, denn diese sind gerade durch  $q_x + t_0 = 0$  (vgl. Seite 17) charakterisiert.

## 2.3. Einhüllende von Kugelscharen

In diesem Abschnitt werden im Speziellen die Enveloppen von Kugelscharen genauer betrachtet. Diese sind sehr eng mit den Kanalflächen, die in Kapitel 4 vorgestellt werden, verwandt. Der Radius der Kugeln soll dabei variabel sein. Genauer gesagt ist er stets größer oder gleich null und durch eine Funktion

$$r : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad t \mapsto r(t)$$

vorgegeben. Die Mittelpunkte der Kugeln werden durch eine Raumkurve

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto c(t)$$

festgelegt.

**Notation** (Parameterintervall der Kugelschar). Hierbei und im Folgenden ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  immer ein Intervall der reellen Zahlen und mit  $I_o \subseteq I$  sei das beidseitig offene Intervall bezeichnet, welches alle Werte aus  $I$  bis auf die Intervallgrenzen enthält. Somit ist  $I_o$  die Vereinigung aller offenen Intervalle, die in  $I$  enthalten sind und  $I \setminus I_o$  enthält maximal die linke und bzw. oder rechte Intervallgrenze von  $I$ , falls  $I$  an der entsprechenden Seite abgeschlossen ist.

Sowohl die Radiusfunktion  $r$  als auch die Kurve  $c$ , welche auch Seele oder Mittenkurve genannt wird, sollen wenigstens zweimal stetig differenzierbar und  $c$  zusätzlich regulär sein. Die Kugelschar werde im Folgenden mit  $\mathcal{S}^{c,r}$  und die zugehörige Hüllfläche mit  $\mathcal{H}^{c,r}$  bezeichnet. Diese Bezeichnungen sowie die Eigenschaften von  $c$  und  $r$  gelten für dieses und alle weiteren Kapitel. Die implizite Gleichung für die Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  ist dann durch

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P) = 0 \tag{2.6}$$

mit  $t \in I$  und  $P \in \mathbb{R}^3$  gegeben, wobei

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P) := \langle P - c(t), P - c(t) \rangle - r^2(t)$$

gilt. Für ein festes  $t = t_0 \in I$  erfüllen alle Punkte  $P$ , die auf der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  mit Mittelpunkt  $c(t_0)$  und Radius  $r(t_0)$  liegen, Gleichung (2.6).  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  ist also die Nullstellenmenge von  $f_{t_0}^{\mathcal{S}^{c,r}}$ .

*Beispiel 7* (Kugelschar entlang verzerrter Normalparabel). Es seien die Mittenkurve und der Radius durch

$$c(t) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10t \\ 10t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(t) = \frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{2}$$

gegeben. Dann ist

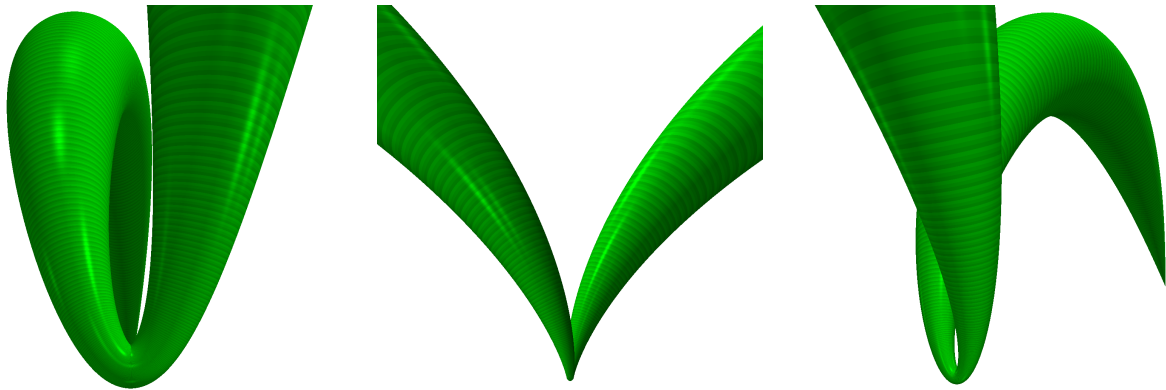
$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z) = (x - t)^2 + (y - t^2)^2 + \left(z - \frac{1}{10}t^3\right)^2 - \left(\frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

die implizite Gleichung der Kugelschar und für die partielle Ableitung nach  $t$  gilt

$$\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z) = -2(x - t) - 4t(y - t^2) - \frac{3}{5}t^2 \left(z - \frac{1}{10}t^3\right) - \frac{4}{5}t \left(\frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Nach Definition 2.2 bilden alle Punkte  $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ , die diese beiden Gleichungen erfüllen, die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ . Sie ist in Abb. 2.8 dargestellt.

## 2. Enveloppen



(a) Blick entlang der  $z$ -Achse. (b) Blickrichtung entgegen der  $x$ -Achse. (c) Kameraposition bei  $(15.4, 5.1, 23.6)^T$ .

Abbildung 2.8.: Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  aus Beispiel 7.

Doch hier ist es im Vergleich zu den bisherigen Beispielen schon nicht mehr ohne entsprechenden Rechenaufwand möglich, eine implizite Enveloppengleichung anzugeben. Man könnte die partiell nach  $t$  abgeleitete Gleichung nach  $(x - t)$ ,  $(y - t^2)$  oder  $(z - \frac{1}{10}t^3)$  umstellen, das Ergebnis quadrieren und in  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z) = 0$  einsetzen. Auf diese Weise erhält man die Gleichung eines allgemeinen Kegelschnittes mit  $t$  als Parameter. Diese könnte man dann mittels Hauptachsentransformation und einer geeigneten Verschiebung, beides in Abhängigkeit von  $t$ , so umwandeln, dass sich daraus für ein festes  $t = t_0 \in I$  eine allgemeine Kreisgleichung in den neuen Koordinaten ergibt. Es ist jedoch erheblich weniger Rechenaufwand, die Problematik mittels geometrischer Betrachtungen zu lösen. Das geschieht in Abschnitt 2.3.1.

Um die Behauptungen plausibel zu machen, soll hier nur noch kurz der Fall für  $t = 0$  betrachtet werden. Dann ist durch

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(0, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{4} = 0$$

die Kugel  $\mathcal{S}_0^{c,r}$  mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und Radius  $1/2$  gegeben. Außerdem ist  $(\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z))(0, x, y, z) = -2x = 0$ . und damit liegen die Punkte, die für  $t = 0$  zur Hüllfläche gehören, auf dem Kreis in der Ebene  $x = 0$  mit Radius  $1/2$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, denn aus  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(0, 0, y, z) = 0$  ergibt sich

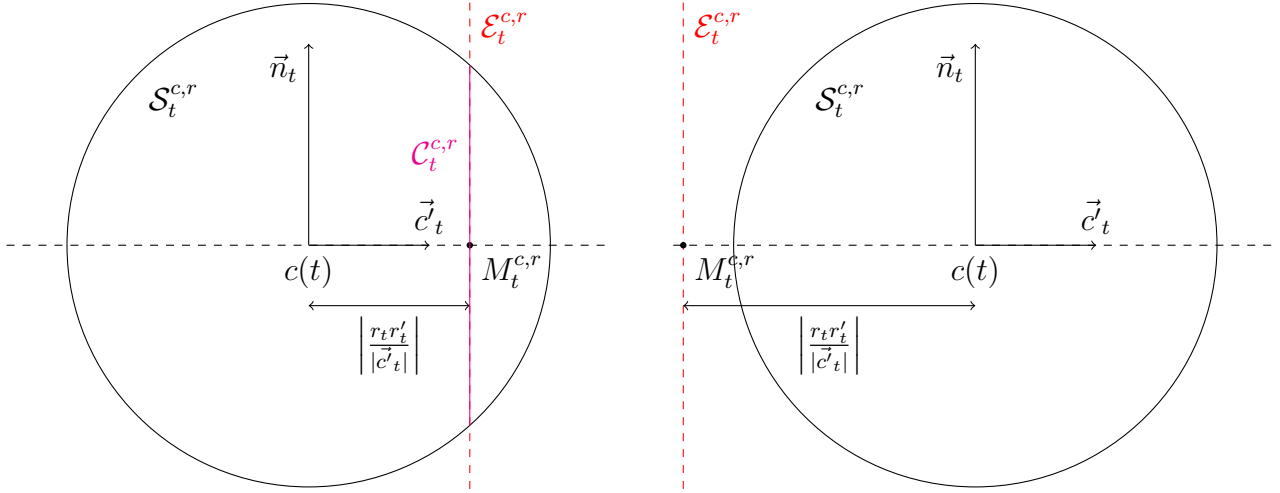
$$y^2 + z^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Hier ist keine Hauptachsentransformation erforderlich, da sich die beschriebenen Punkte schon in der Ebene  $x = 0$  befinden. Die Verschiebung entfällt ebenfalls, weil der Mittelpunkt des Kreises schon im Ursprung liegt.

### 2.3.1. Charakteristische Kreise

In diesem Abschnitt werden implizite Gleichungen für die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  einer Kugelfamilie mit Seele  $c$  und Radiusfunktion  $r$  angegeben. Auch die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen wird erläutert. Es wird gezeigt, dass sich die Einhüllende aus sogenannten charakteristischen Kreisen zusammensetzt. Hierzu wird von Gleichung (2.6) für die Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  ausgegangen.





(a) Die Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  schneidet die Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  in dem Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ .

(b) Hier existiert kein charakteristischer Kreis bei  $t$ . Es gilt  $\mathcal{C}_t^{c,r} = \emptyset$ .

Abbildung 2.9.: Charakteristischer Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  als Schnitt der Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  mit  $\mathcal{E}_t^{c,r}$ , dargestellt in der Ebene, welche  $c(t)$  enthält und senkrecht auf  $\vec{b}_t$  steht

Nach Definition 2.2 muss für die Punkte  $Q$  der Einhüllenden nicht nur  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q)$  für ein  $t_0 \in I$  gleich null sein, sondern auch die partielle Ableitung von  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P)$  nach  $t$

$$\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P) = -2 \langle \vec{c}'(t), P - c(t) \rangle - 2r(t)r'(t)$$

an der Stelle  $(t_0, Q)$ . Das ist für

$$f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P) := \langle \vec{c}'(t), P - c(t) \rangle + r(t)r'(t) \quad (2.7)$$

gleichbedeutend mit  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$ . Die Gleichung

$$f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P) = 0 \quad \text{mit} \quad t \in I \quad \text{und} \quad P \in \mathbb{R}^3 \quad (2.8)$$

beschreibt eine Familie von Ebenen. Für ein bestimmtes  $t_0 \in I$  wird somit durch  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r} := (f_{t_0}^{\mathcal{E}^{c,r}})^{-1}(0)$  eine Ebene bestimmt, die senkrecht auf  $\vec{c}'(t)$  steht. Für eine konstante Radiusfunktion  $r(t) \equiv r_c \in \mathbb{R}^+$  ist natürlich  $r'(t) \equiv 0$  und damit verläuft  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  immer durch  $c(t)$ . Sonst ist die Ebene parallel zur Tangentenrichtung der Seele verschoben. Die Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  schneidet die Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  im Allgemeinen in einem Kreis.<sup>1</sup>

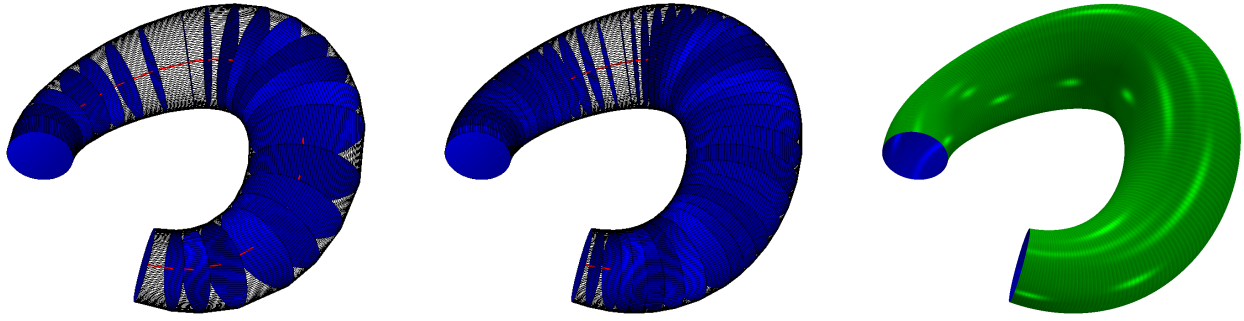
**Definition 2.8** (Charakteristischer Kreis). Sofern für ein  $t_0 \in I$  der Schnitt zwischen  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  und  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  nicht leer ist, werde er als **charakteristischer Kreis**  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  bezeichnet (siehe Abb. 2.9a). Andernfalls ist  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r} = \emptyset$  und bei  $t_0$  existiert kein charakteristischer Kreis (vgl. Abb. 2.9b).

**Lemma 2.9.** Die Vereinigung aller charakteristischen Kreise einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  ist die Hüllfläche dieser Familie, also gilt

$$\mathcal{H}^{c,r} = \bigcup \mathcal{C}^{c,r}.$$

<sup>1</sup> Natürlich kann der Schnitt auch leer sein oder nur aus einem einzigen Berührungspunkt bestehen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht wird in Abschnitt 2.3.2 genauer erläutert.

## 2. Enveloppen



(a) Kreisscheiben zu einigen Vertretern der Kreisschar  $\mathcal{C}^{c,r}$

(b) Erhöhung der Anzahl dargestellter Kreisscheiben

(c) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$

Abbildung 2.10.: Erzeugung der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus der Kreisschar  $\mathcal{C}^{c,r}$ ; Illustration zu Lemma 2.9

*Beweis.* Für jeden Punkt  $Q \in \bigcup \mathcal{C}^{c,r}$  gibt es mindestens ein  $t_0 \in I$  mit  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ . Weil  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  gilt, sind Gleichungen (2.6) und (2.8) für  $t = t_0$  sowie  $P = Q$  erfüllt und somit gehört  $Q$  zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ . Das heißt, es ist  $\bigcup \mathcal{C}^{c,r} \subseteq \mathcal{H}^{c,r}$ .

Sei nun umgekehrt  $Q \in \mathcal{H}^{c,r}$ . Dann existiert nach Definition 2.2 ein  $t_0 \in I$ , sodass  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  und  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  gelten. Demzufolge ist der Punkt  $Q$  ein Element der Schnittmenge  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{C}_{t_0}^{c,r} \subseteq \bigcup \mathcal{C}^{c,r}$ . Also gilt auch  $\mathcal{H}^{c,r} \subseteq \bigcup \mathcal{C}^{c,r}$ .

Damit ist die Gültigkeit der Behauptung  $\bigcup \mathcal{C}^{c,r} = \mathcal{H}^{c,r}$  gezeigt.  $\square$

Die Enveloppe besteht also wiederum aus einer Schar von Kreisen (vgl. Abb. 2.10). Jeder einzelne stellt den Teil seiner zugehörigen Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  dar, der etwas zur Einhüllenden beiträgt und ist außerdem, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, der Schnitt infinitesimal benachbarter Kugeln bei  $t$ . Natürlich ist für alle  $t$ , für die sich  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  und  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  schneiden, der Fußpunkt des Lotes von  $c(t)$  auf die Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  der Mittelpunkt des entsprechenden Schnittkreises. Somit entspricht er dem Schnittpunkt der Tangente  $\{c(t) + s \cdot \vec{c}'(t) : s \in \mathbb{R}\}$  im Punkt  $c(t)$  mit  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  und ist durch

$$M_t^{c,r} := c(t) - \frac{r(t)r'(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle} \vec{c}'(t) \quad (2.9)$$

gegeben. Auch hier ist wieder leicht zu sehen, dass bei konstantem Radius der Kugeln die Verschiebung von  $M_t^{c,r}$  in Tangentenrichtung  $\vec{c}'(t)$  entfällt und somit  $M_t^{c,r} = c(t)$  ist. Der charakteristische Kreis wäre somit ein Großkreis auf der zugehörigen Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  und hätte auch den gleichen Radius  $r(t)$  wie sie. Sonst wird  $M_t^{c,r}$  für  $r'(t) > 0$  entgegen der Tangentenrichtung und für  $r'(t) < 0$  in Richtung der Tangente verschoben und es gilt

$$l_t^2 = r^2(t) - \left| \frac{r(t)r'(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle} \vec{c}'(t) \right|^2 = r^2(t) \left( 1 - \frac{r'^2(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle} \right) \quad (2.10)$$

für den Radius  $l_t^{c,r}$  des charakteristischen Kreises nach dem Satz des Pythagoras. Hierzu muss man sich nur in einer Ebene, welche die Tangente an die Mittlenkurve im Punkt  $c(t)$  enthält, das

entsprechende rechtwinklige Dreieck mit dem Kugelradius als Hypotenuse und dem Kreisradius als eine der Katheten betrachten. Die Länge der Verschiebung von  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  in Tangentenrichtung  $\vec{c}'(t)$  bzw. der Abstand zwischen  $M_t^{c,r}$  und  $c(t)$  entspricht der Länge der anderen Kathete.

Falls  $|r'(t)| > |\vec{c}'(t)|$  an einer Stelle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, wird die rechte Seite von Gleichung (2.10) negativ und es gibt keine reelle Lösung für  $l_t^{c,r}$  und auch keinen Schnitt zwischen  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  und  $\mathcal{E}_t^{c,r}$ . Dieser Fall wird in Abschnitt 2.3.2 genauer untersucht.

### 2.3.2. Komplette Verdeckung von Kugeln durch ihre Nachbarn

In Abschnitt 2.3.1 wird gezeigt, dass im Allgemeinen jede Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  der Ursprungsschar einen Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r} \subset \mathcal{S}_t^{c,r}$  zur Enveloppe beisteuert. Doch wenn sich der Radius der Kugeln in einem Intervall zu stark ändert, kann es passieren, dass Kugeln ganz im Inneren ihrer Nachbarn verschwinden und somit keinen einzigen Punkt mit der Hüllfläche gemeinsam haben.

Im Folgenden gelte  $t_1 < t_2$  für  $t_1, t_2 \in I$ . Eine Kugel  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  liegt genau dann komplett im Inneren einer anderen  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$ , wenn der Radius  $r(t_2)$  der zweiten Kugel größer ist als die Distanz zwischen beiden Kugelmittelpunkten und der Radius der ersten Kugel  $r(t_1)$  zusammen. Es muss also

$$r(t_2) > |c(t_2) - c(t_1)| + r(t_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1} > \frac{|c(t_2) - c(t_1)|}{t_2 - t_1}$$

gelten. Analog erhält man für den Fall, dass die Kugel  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  im Inneren von  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  verschwindet, die Ungleichung

$$r(t_1) > |c(t_2) - c(t_1)| + r(t_2) \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1} > \frac{|c(t_2) - c(t_1)|}{t_2 - t_1}.$$

Für den Fall, dass  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  infinitesimal benachbart sind, also  $(t_2 - t_1) \rightarrow 0$ , gehen diese Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und es gilt  $r'(t_1) > |\vec{c}'(t_1)| \geq 0$  bzw.  $-r'(t_1) > |\vec{c}'(t_1)| \geq 0$ . Eine Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  wird also genau dann von ihren unmittelbaren Nachbarn (Vorgängern oder Nachfolgern) vollständig umschlossen, wenn eine der beiden Ungleichungen für  $t$  gilt. Diese können zusammengefasst werden. Somit wird die Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  genau dann von ihren infinitesimalen Nachbarn komplett verdeckt, wenn

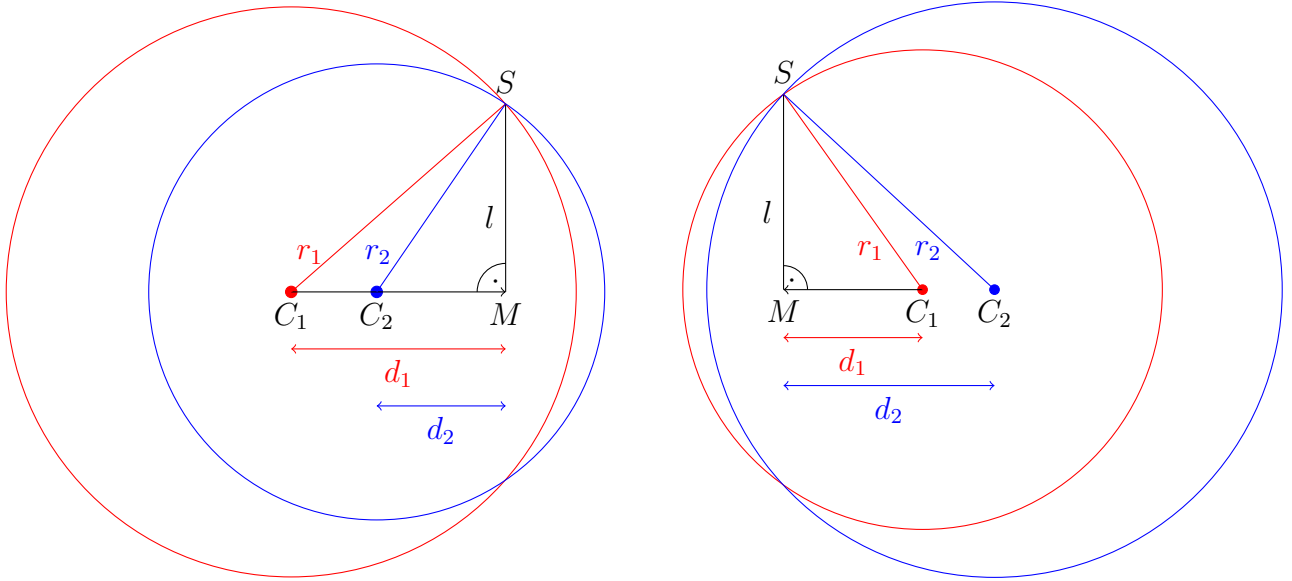
$$|r'(t)| > |\vec{c}'(t)| \tag{2.11}$$

gilt. Genau dann, wenn diese Ungleichung gilt, ist auch der Abstand der Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$ , die durch Gleichung (2.8) definiert wird, zum Kugelmittelpunkt  $c(t)$  von  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  größer als der Kugelradius  $r(t)$  und somit gibt es keinen Schnitt zwischen  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  und  $\mathcal{S}_t^{c,r}$ . Für den Fall der Gleichheit der Beträge aus Ungleichung 2.11 berühren sich sowohl die infinitesimal benachbarten Kugeln bei  $t$  als auch die Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  und Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  in demselben Punkt. Dieser entspricht dann dem Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  mit Radius  $l_t^{c,r} = 0$ , wie man auch leicht mit Hilfe von Gleichung (2.10) nachvollziehen kann.

### 2.3.3. Lokaler Schnitt der Kugelschar

In Abschnitt 2.2 wurden bereits Beziehungen zwischen dem lokalen Schnitt einer Schar und ihrer Einhüllenden hergestellt. Für Kugelscharen im Speziellen gilt aber noch mehr.

## 2. Enveloppen



(a) Die Kugel  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  ist größer als  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$ .

(b) Hier gilt  $r_1 < r_2$ .

Abbildung 2.11.: Schnitt der beiden Kugeln  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  dargestellt in einer Ebene, welche durch die Verbindungsgerade der Kugelmittelpunkte verläuft; Hier gelten  $r_1 = r(t_1)$  und  $r_2 = r(t_2)$ .

**Lemma 2.10.** *Der lokale Schnitt  $\mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{S}^{c,r}}$  einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  bei  $t_0 \in I$  entspricht dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ . Es gilt also*

$$\mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{S}^{c,r}} = \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}.$$

*Beweis.* Zunächst werde ein nicht leerer Schnitt zweier Kugeln  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  der Schar betrachtet. Alle Schnittpunkte liegen in einer Ebene, die senkrecht zur Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte  $C_1 := c(t_1)$  und  $C_2 := c(t_2)$  verläuft. Der Durchstoßpunkt dieser Geraden durch die Ebene sei  $M$ . Er ist gleichzeitig auch der Mittelpunkt des Schnittkreises.

Für einen beliebigen Punkt  $S \in \mathcal{S}_{t_1}^{c,r} \cap \mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  aus der Schnittmenge beider Kugeln ist die Problematik in Abb. 2.11 für die Ebene, welche durch die Punkte  $C_1$ ,  $C_2$  und  $S$  bestimmt wird, dargestellt. Es seien  $l$  der Abstand von  $S$  und  $M$  sowie  $\vec{t}$  der normierte Vektor mit Richtung  $(C_2 - C_1)$ . Außerdem werden mit  $d_1$  und  $d_2$  die orientierten Abstände von  $C_1$  und  $M$  bzw.  $M$  und  $C_2$  bezeichnet. Das heißt es sind

$$d_1 := \langle \vec{t}, M - C_1 \rangle \quad \text{sowie} \quad d_2 := \langle \vec{t}, C_2 - M \rangle$$

und damit ergibt sich für die Summe der beiden orientierten Abstände

$$d_1 + d_2 = \langle \vec{t}, M - C_1 \rangle + \langle \vec{t}, C_2 - M \rangle = \langle \vec{t}, C_2 - C_1 \rangle = |C_2 - C_1|. \quad (2.12)$$

Weil die Dreiecke  $C_1MS$  und  $C_2MS$  rechtwinklig sind, lässt sich das Quadrat der Länge der gemeinsamen Kathete sowohl durch  $r^2(t_1) - d_1^2$  als auch durch  $r^2(t_2) - d_2^2$  darstellen. Mit  $d_2 = |C_2 - C_1| - d_1$  aus Gleichung (2.12) erhält man

$$\begin{aligned} r^2(t_1) - d_1^2 &= r^2(t_2) - (|c(t_2) - c(t_1)| - d_1)^2 \\ &= r^2(t_2) - |c(t_2) - c(t_1)|^2 - d_1^2 + 2d_1|c(t_2) - c(t_1)| \end{aligned}$$

und somit ist nach Umstellung

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|c(t_2) - c(t_1)|^2 - (r^2(t_2) - r^2(t_1))}{2|c(t_2) - c(t_1)|} \\ &= \frac{1}{2}|c(t_2) - c(t_1)| - \frac{(r(t_2) - r(t_1))(r(t_2) + r(t_1))}{2|c(t_2) - c(t_1)|} \\ &= \frac{1}{2}|c(t_2) - c(t_1)| - \frac{\frac{(r(t_2) - r(t_1))}{t_2 - t_1}(r(t_2) + r(t_1))}{2\frac{|c(t_2) - c(t_1)|}{t_2 - t_1}}. \end{aligned}$$

Für  $t_0 := t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_0$  geht die Verbindungsgerade von  $c(t_1)$  und  $c(t_2)$  in die Tangente  $\vec{c}'(t_0)$  über. Diese ist nun eine Normale der Schnittebene der Kugeln. Außerdem gilt

$$d_0 := d_1 = -\frac{r'(t_0)2r(t_0)}{2|\vec{c}'(t_0)|} = -\frac{r(t_0)r'(t_0)}{|\vec{c}'(t_0)|},$$

woraus für den Mittelpunkt des Schnittkreises infinitesimal benachbarter Kugeln bei  $t_0$

$$M = c(t) + d_t \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|} = c(t) - \vec{c}'(t) \frac{r(t)r'(t)}{|\vec{c}'(t)|}$$

folgt. Das entspricht exakt Gleichung (2.9) für den Mittelpunkt  $M_{t_0}^{c,r}$  des charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ . Also schneiden sich infinitesimal benachbarte Kugeln bei  $t_0$  in der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  und somit ist der Schnitt durch

$$\mathcal{L}_{t_0}^{\mathcal{S}^{c,r}} = \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$$

gegeben. Falls der lokale Schnitt  $\mathcal{L}_q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  für ein  $q \in I$  leer ist, existiert bei  $q$  auch kein charakteristischer Kreis (vgl. Abschnitt 2.3.2) und es gilt ebenfalls die Gleichheit von  $\mathcal{L}_q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  und  $\mathcal{C}_q^{c,r}$ .  $\square$

**Satz 2.11.** *Die Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  besteht genau aus den Schnittpunkten infinitesimal benachbarter Elemente dieser Familie und somit gilt*

$$\mathcal{L}^{\mathcal{S}^{c,r}} = \mathcal{H}^{c,r}.$$

*Beweis.* Mit Lemma 2.9 und Lemma 2.10 gilt

$$\mathcal{H}^{c,r} = \bigcup \mathcal{C}^{c,r} = \bigcup_{t \in I} \mathcal{C}_t^{c,r} = \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t^{\mathcal{S}^{c,r}} = \mathcal{L}^{\mathcal{S}^{c,r}}.$$

$\square$

Vergleicht man Satz 2.11 mit Lemma 2.7, so erwartet man, dass eine der Forderung 2.5 im Raum entsprechende Bedingung für Kugelscharen gelten muss. Tatsächlich ist die für den Raum analoge Aussage der Zusatzbedingung 2.5 für fast alle Punkte  $Q \in \mathcal{H}^{c,r}$  der Hüllfläche jeder beliebigen Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  erfüllt. Diese lautet für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  der Hüllfläche:

Die Matrix

$$M(t_0, Q) := \begin{vmatrix} \partial_x f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) & \partial_y f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) & \partial_z f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) \\ \partial_t \partial_x f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) & \partial_t \partial_y f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) & \partial_t \partial_z f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) \end{vmatrix}$$

## 2. Enveloppen

hat den vollen Rang, es gilt also  $\text{rank}(M(t_0, Q)) = 2$ .

Zur Überprüfung des Ranges von  $M(t_0, Q)$  werden die partiellen Ableitungen

$$\partial_w f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z) = 2(w - c_w(t))$$

und

$$\partial_t \partial_w f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, x, y, z) = -2c'_w(t)$$

von  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}$  für  $w \in \{x, y, z\}$  benötigt. Damit ergibt sich

$$M^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) = \begin{pmatrix} 2(Q_x - c_x(t_0)) & 2(Q_y - c_y(t_0)) & 2(Q_z - c_z(t_0)) \\ -2c'_x(t_0) & -2c'_y(t_0) & -2c'_z(t_0) \end{pmatrix},$$

wobei  $Q = (Q_x, Q_y, Q_z)^T$  ist. Diese Matrix hat genau dann nicht den vollen Rang 2, wenn die Vektoren  $(Q - c(t_0))$  und  $\vec{c}'(t_0)$  linear abhängig voneinander, also parallel sind. Der Schnitt der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  mit der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  muss demnach mindestens den Punkt  $Q$  mit der Geraden durch  $c(t_0)$  und dem Richtungsvektor  $\vec{c}'(t_0)$  gemeinsam haben. Das ist nur dann möglich, wenn die Ebene  $\mathcal{E}_t^{c,r}$  die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  ausschließlich in einem Punkt berührt und der charakteristische Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  zu dem Punkt  $Q$  entartet. Es wäre also der Radius  $l_{t_0}^{c,r}$  von  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  gleich null und der Mittelpunkt  $M_{t_0}^{c,r}$  des charakteristischen Kreises würde mit  $Q$  zusammenfallen. Dieser Fall wird bereits in Abschnitt 2.3.2 kurz beleuchtet. Er tritt ein, wenn  $|\vec{c}'(t_0)| = |r'(t_0)|$  (vgl. Ungleichung 2.11) gilt.

### 2.3.4. Hauptnennerbildung für rationale Funktionen

Bei der Berechnung des Selbstschnittes von Einhüllenden in Abschnitt 3.2 und den Schnittpunktberechnungen beim Raycasting in Abschnitt 4.3 werden die Parametrisierungen des Radius  $r$  und der Komponenten der Mittenkurve  $c$  auf rationale Funktionen beschränkt. Diese lassen sich als Quotient zweier Polynome darstellen. Die Schnittberechnungen können dann auf die Nullstellenbestimmung von Polynomen zurückgeführt werden.

In Vorbereitung darauf werden hier Notationen für die entsprechenden Zählerpolynome von  $c(t)$  und  $r(t)$  sowie deren Ableitungen nach der Bildung des Hauptnenners  $h(t)$  sowohl aller Komponenten der Kurve  $c(t)$  als auch von  $r(t)$  eingeführt. Es gelten

$$c(t) = \frac{1}{h(t)} \begin{pmatrix} \bar{c}_x(t) \\ \bar{c}_y(t) \\ \bar{c}_z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(t) = \frac{\bar{r}(t)}{h(t)}, \quad (2.13)$$

wobei alle Komponenten des Vektors  $\bar{c} := (\bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{c}_z)^T$  sowie  $\bar{r}$  Polynome sind.

**Lemma 2.12.** *Der Hauptnenner  $h(t)$  ist über dem gesamten Intervall  $I$  ungleich null.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe ein  $t_0 \in I$  mit  $h(t_0) = 0$ . Dann ist  $(t - t_0)$  ein Teiler von  $h(t)$ . Weil  $h$  der Hauptnenner aller Komponenten der Kurvenparametrisierung  $c$  sowie von  $r$  ist, muss es eine Funktion  $\bar{f} \in \{\bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{c}_z, \bar{r}\}$  derart geben, dass  $(t - t_0)$  kein Teiler von  $\bar{f}$  ist. Daraus folgt, dass  $\frac{\bar{f}}{h(t)}$  bei  $t_0 \in I$  nicht stetig ist, die Funktion hat dort eine Polstelle. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass sowohl alle Komponenten von  $c$  als auch die Radiusfunktion  $r$  für alle  $t \in I$  stetig sein sollen. Also ist die Annahme falsch und die Aussage bewiesen.  $\square$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\vec{c}(t) = \frac{1}{h^2(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{c}'_x(t)h(t) - \bar{c}_x h'(t) \\ \bar{c}'_y(t)h(t) - \bar{c}_y h'(t) \\ \bar{c}'_z(t)h(t) - \bar{c}_z h'(t) \end{pmatrix}}_{=: \tilde{c}(t)}, \quad r'(t) = \frac{\overbrace{\bar{r}'(t)h(t) - \bar{r}(t)h'(t)}^{=: \hat{r}(t)}}{h^2(t)} \quad (2.14)$$

und die zweiten Ableitungen haben dann entsprechend die Form

$$\vec{c}''(t) = \frac{1}{h^3(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{c}'_x(t)h(t) - 2\tilde{c}_x h'(t) \\ \tilde{c}'_y(t)h(t) - 2\tilde{c}_y h'(t) \\ \tilde{c}'_z(t)h(t) - 2\tilde{c}_z h'(t) \end{pmatrix}}_{=: \hat{c}(t)}, \quad r''(t) = \frac{\overbrace{\tilde{r}'(t)h(t) - 2\tilde{r}(t)h'(t)}^{=: \hat{r}(t)}}{h^3(t)}. \quad (2.15)$$

Hierbei sind auch wieder sowohl  $\tilde{r}$  und  $\hat{r}$  als auch alle Komponenten der Vektoren  $\tilde{c}$  und  $\hat{c}$  Polynome.

### 2.3.5. Parametrisierungen

Für die Darstellung von Kurven und Flächen aller Art ist es meistens sehr nützlich, eine Parameterdarstellung von ihnen zu haben. Außerdem ist eine Parametrisierung der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  für die Berechnung ihres Selbstschnittes in Abschnitt 3.2.1 unerlässlich. In diesem Abschnitt werden verschiedene Parametrisierungen für Hüllflächen von Kugelfamilien angegeben. Zunächst sollen jedoch ausgehend von einer Parameterdarstellung der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$  die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.3.1 über  $\mathcal{H}^{c,r}$ , nämlich dass sich die Einhüllende aus den charakteristischen Kreisen zusammensetzt, mit Hilfe von Definition 2.2 noch einmal für den Fall, dass die Kugeln der Schar in Parameterform gegeben sind, bestätigt werden. Es sei

$$\vec{v}(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \sin(\alpha) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha \in [0, 2\pi]$  und  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  der normierte Vektor, der im Winkel  $\beta$  zur  $x$ - $y$ -Ebene steht und dessen Projektion in diese Ebene mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  einschließt. Eine Parametrisierung der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$  sei dann durch

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, \alpha, \beta) = c(t) + r(t)\vec{v}(\alpha, \beta)$$

mit  $t \in I$  und der zugehörigen Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{P}^{\mathcal{S}^{c,r}}}(t, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \vec{c}'_x(t) + r'(t) \cos(\beta) \cos(\alpha) & -r(t) \cos(\beta) \sin(\alpha) & -r(t) \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ \vec{c}'_y(t) + r'(t) \cos(\beta) \sin(\alpha) & r(t) \cos(\beta) \cos(\alpha) & -r(t) \sin(\beta) \sin(\alpha) \\ \vec{c}'_z(t) + r'(t) \sin(\beta) & 0 & r(t) \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

## 2. Enveloppen

gegeben. Für die Determinante dieser Ableitungsmatrix gilt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}^{\mathfrak{P}^{S^{c,r}}}(t, \alpha, \beta)| &= r^2(t) \cos(\beta) (\cos(\beta) \cos(\alpha) (\vec{c}'_x(t) + r'(t) \cos(\beta) \cos(\alpha)) \\
&\quad + \sin(\beta) (\vec{c}'_z(t) + r'(t) \sin(\beta)) (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) \\
&\quad + \cos(\beta) \sin(\alpha) (\vec{c}'_y(t) + r'(t) \cos(\beta) \sin(\alpha))) \\
&\quad = \langle \vec{c}'(t), \vec{v}(\alpha, \beta) \rangle \\
&= r^2(t) \cos(\beta) \left( \overbrace{\vec{c}'_x(t) \cos(\beta) \cos(\alpha) + \vec{c}'_y(t) \cos(\beta) \sin(\alpha) + \vec{c}'_z(t) \sin(\beta)} \right) \\
&\quad + r'(t) \underbrace{(\cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha))}_{=1} \Big),
\end{aligned}$$

woraus sich letztlich

$$|\mathcal{J}^{\mathfrak{P}^{S^{c,r}}}(t, \alpha, \beta)| = r^2(t) \cos(\beta) \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{v}(\alpha, \beta) \rangle + r'(t) \right) \quad (2.16)$$

ergibt. Die Nullstellen der Determinante, die aus  $\cos(\beta) = 0$  resultieren, sind ausschließlich von der Parametrisierung der Kugeln abhängig und damit geometrisch irrelevant. Die beiden Parametrisierungen

$$\tilde{\mathfrak{P}}(t, \alpha, \beta) = c(t) + r(t) \vec{v}(\alpha, \beta)$$

und

$$\hat{\mathfrak{P}}(t, \alpha, \beta) = c(t) + r(t) \vec{w}(\alpha, \beta)$$

mit  $t \in I$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$  sowie  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und

$$\vec{w}(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

überdecken beispielsweise auch alle Punkte der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$ , jedoch gilt hier  $\cos(\beta) \neq 0$  für den gesamten Definitionsbereich. Die zweite Parametrisierung ergibt sich durch Drehung der Kugeln der ersten um einen Winkel von 90 Grad. Die Rotationsachsen verlaufen durch die Kugelmittelpunkte und sind parallel zur  $x$ -Achse. Durch Nachrechnen sieht man, dass

$$|\mathcal{J}^{\hat{\mathfrak{P}}}(t, \alpha, \beta)| = -r^2(t) \cos(\beta) \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{w}(\alpha, \beta) \rangle + r'(t) \right) \quad (2.17)$$

gilt. Das Gleichsetzen der Determinanten aus 2.16 bzw. 2.17 mit null hat entweder  $r(t) = 0$  oder

$$\langle \vec{c}'(t), \vec{v}(\alpha, \beta) \rangle + r'(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle \vec{c}'(t), \vec{w}(\alpha, \beta) \rangle + r'(t) = 0 \quad (2.18)$$

zur Folge. Diese beiden Situationen werden jetzt genauer betrachtet.

Falls  $r(t_0) = 0$  für ein  $t_0 \in I$  gilt, degeneriert die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  zu dem Punkt  $c(t_0)$ , welcher auch als Schnitt der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  vom Radius null mit der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$ , die senkrecht auf  $\vec{c}'(t_0)$  steht und durch  $c(t_0)$  verläuft, aufgefasst werden kann.

Aus der Bedingung 2.18 ergibt sich, dass die Punkte  $\tilde{\mathfrak{P}}(t, \alpha, \beta)$  bzw.  $\hat{\mathfrak{P}}(t, \alpha, \beta)$  in der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  liegen müssen, denn die Punkte  $(c(t_0) + r(t_0) \vec{u})$  mit  $\langle \vec{c}'(t_0), \vec{u} \rangle + r'(t_0) = 0$  und  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  beschreiben genau diese Ebene, schließlich gilt  $f_t^{\mathcal{S}^{c,r}}(c(t_0) + r(t_0) \vec{u}) = 0$ .



Das heißt, dass in jedem Fall die Menge der kritischen Werte, welche zu  $t = t_0$  gehören, genau dem Schnitt der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  mit der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  und somit dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  entspricht. Damit sind die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3.1 bestätigt.

Um eine Parameterdarstellung der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  zu bekommen, genügt es also, die Kreisfamilie  $\mathcal{C}^{c,r}$  zu parametrisieren. Das kann beispielsweise über das Frenet'sche Koordinatensystem geschehen.

### Parameterdarstellung mittels Frenet'scher Koordinaten

Für eine Parameterdarstellung der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  müssen die Kreise  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ , welche senkrecht auf  $\vec{c}(t)$  stehen und damit in der Normalenebene liegen, parametrisiert werden. Das kann mit Hilfe der Frenet'schen Koordinaten (siehe Definition B.4) durch

$$\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, \alpha) := \mathfrak{F}^{\mathcal{C}^{c,r}}(t, \alpha) := M_t^{c,r} + l_t^{c,r}(\cos(\alpha)\vec{n}(t) + \sin(\alpha)\vec{b}(t)) \quad (2.19)$$

mit  $\alpha \in [0, 2\pi]$  geschehen. Die Normalenebene im Punkt  $c(t)$  wird durch die Vektoren  $\vec{n}_t$  und  $\vec{b}_t$  aufgespannt. Hierbei sind  $M_t^{c,r}$  der Mittelpunkt und  $l_t^{c,r}$  der Radius des charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  aus Gleichungen (2.9) und (2.10). Die Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, \alpha)$  der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist für deren grafische Darstellung gut geeignet, da die einzelnen Kreise gleichmäßig über den Winkel unterteilt werden können (vgl. Abb. 2.12c). Außerdem ist sie für theoretische Betrachtungen sehr nützlich. Jedoch hat diese Parameterdarstellung den Nachteil, dass sie auch für rationale Funktionen  $c$  und  $r$  selbst nicht rational ist, was gerade für die Berechnung des Selbstschnittes der Enveloppen (Abschnitt 3.2) und das Raycasting-Verfahren (Abschnitt 4.3) eine wichtige Voraussetzung ist.

Die Irrationalität liegt nicht allein an den trigonometrischen Funktionen, diese könnten mit Hilfe der rationalen Parametrisierung des Einheitskreises  $(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2})$  mit  $s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  ersetzt werden, wodurch sich die alternative Parametrisierung

$$\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, s) := \hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{C}^{c,r}}(t, s) := M_t^{c,r} + l_t^{c,r} \left( \frac{1-s^2}{1+s^2} \vec{n}(t) + \frac{2s}{1+s^2} \vec{b}(t) \right)$$

ergibt. Da der Betrag eines Vektors  $|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$  nur dann rational ist, wenn sein Skalarprodukt mit sich selbst das Quadrat eines rationalen Terms darstellt, führt die Normierung des Vektors im Allgemeinen auch für rationale Vektoren zu irrationalen Ergebnissen. Somit verhindert also spätestens die Normierung der Vektoren der Frenet'schen Koordinaten im Regelfall die Rationalität der Parameterdarstellung  $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{H}^{c,r}}$ , auch wenn die Mittenkurve und der Radius der Kugeln rational parametrisiert sind.

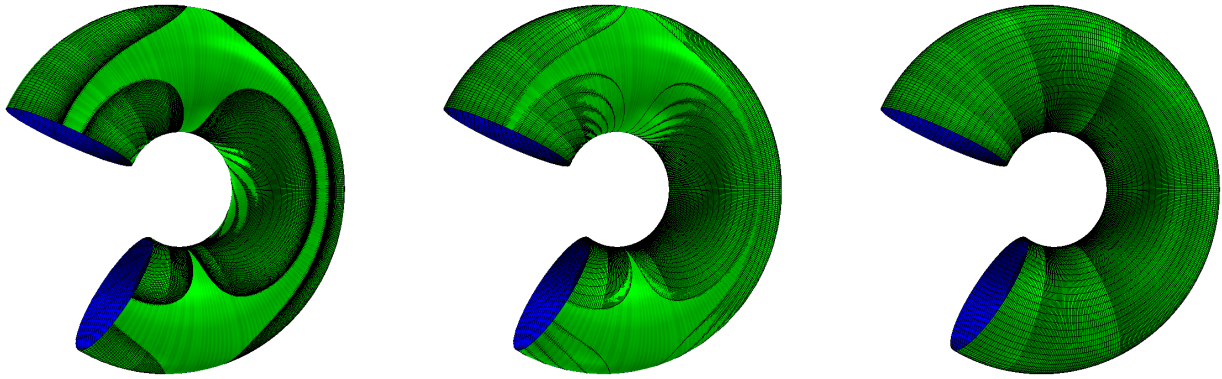
### Rationale Parametrisierung mittels stereografischer Projektion

Peternell und Pottmann haben in [PP97] eine Methode vorgestellt, die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  rational zu parametrisieren, wenn sowohl der Radius als auch die Seele der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$  als rationale Funktionen vorliegen und für alle  $t \in I$  die Ungleichung

$$\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle \geq r'^2(t) \quad (2.20)$$

gilt. Eine solch rationale Darstellung ist in dieser Arbeit vor allem für die Berechnung des Selbstschnittes der Enveloppen unerlässlich. Der Weg wird im Folgenden erläutert, da viele darin vorkommende Gleichungen noch benötigt werden. Für nähere Informationen sei auf [PP97] verwiesen.

## 2. Enveloppen



- (a) Bei der Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  werden die charakteristischen Kreise nicht gleichmäßig unterteilt, obwohl der Parameter  $u$  64 gleichverteilte Werte aus dem Intervall  $[-16, 16]$  annimmt.
- (b) Hier werden zunächst wieder (wie in Abb. 2.12a) gleichverteilte Werte aus dem Intervall  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  entnommen und anschließend der Tangens davon berechnet, um die Werte für  $u$  zu erhalten.
- (c) Bei der Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  führt die gleichmäßige Unterteilung des Intervalls  $[0, 2\pi]$  für den Parameter  $\alpha$  auch zu einer gleichmäßigen Verteilung der Punkte auf den Kreisen.

Abbildung 2.12.: Vergleich der Parametrisierungen  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  und  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  anhand der eingezeichneten Gitternetzlinien auf einem Torus-Ausschnitt; Der Fläche selbst liegt immer die Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  zu Grunde. In allen Fällen befinden sich 64 verschiedene Stützpunkte auf jedem charakteristischen Kreis.

Die Idee besteht darin, zunächst eine Kurve auf der Einhüllenden zu finden, die mit jedem charakteristischen Kreis der Schar  $\mathcal{C}^{c,r}$  genau einen Punkt gemeinsam hat. Anschließend werden diese einzelnen Punkte an jedem Durchmesser des zugehörigen Kreises gespiegelt. Auf diese Weise erzeugt jeder einzelne Punkt der gefundenen Kurve einen kompletten Kreis. Somit wird eine rationale Parametrisierung für die gesamte Hüllfläche erstellt.

Um die bereits erwähnte Kurve auf der Hüllfläche zu finden, wird in mehreren Schritten verfahren. Zunächst wird von dem geraden Kreiskegel  $\mathfrak{K}_t$ , welcher die Kugel  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  berührt, nicht aber schneidet, und den Basiskreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  hat, ausgegangen. Dieser ist eindeutig bestimmt und berührt die Kugel ausschließlich in seinem Grundkreis. Die Spitze dieses Kegels sei mit  $S_t$  bezeichnet. Ebenfalls eindeutig bestimmt ist die Kugel  $\mathfrak{S}_t$  mit Radius 1, welche den Kegel ebenfalls nur berührt und deren Mittelpunkt  $E_t$  auf der Achse des Kegels liegt. Jetzt wird jeder Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  auf den ihm entsprechenden Kreis  $\mathfrak{C}_t$  der Kugel  $\mathfrak{S}_t$  abgebildet, wie in Abb. 2.13 dargestellt.

Die Koordinaten von  $S_t$  und  $E_t$  werden wie folgt bestimmt. In dem Dreieck  $C_t M_t^{c,r} A_t$  sind alle Seitenlängen und damit auch die Winkel bekannt. Es sei mit  $D_t$  bezeichnet. Das Dreieck  $C_t S_t A_t$  hat die gleichen Innenwinkel wie  $D_t$  und ist somit kongruent dazu. Deshalb gilt

$$\frac{|C_t - S_t|}{r_t} = \frac{r_t}{|C_t - M_t^{c,r}|},$$

woraus

$$|C_t - S_t| = \frac{r^2(t) |\vec{c}'(t)|}{|r(t) r'(t)|} = \frac{r(t)}{|r'(t)|} |\vec{c}'(t)|$$

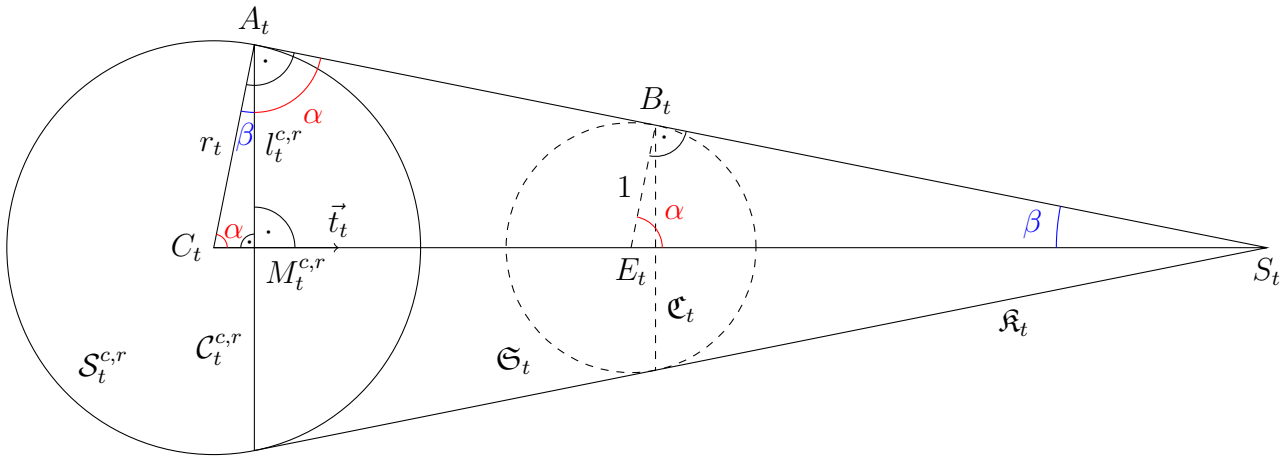


Abbildung 2.13.: Gerader Kreiskegel  $\mathfrak{K}_t$ ; Diese Abbildung wurde aus [PP97] entnommen und leicht modifiziert.

folgt. Mit Hilfe von Gleichung (2.9) ist leicht zu überprüfen, dass die Strecke  $\overline{C_t M_t^{c,r}}$  die Länge  $\frac{|r(t)r'(t)|}{|\vec{c}'(t)|}$  hat. Für die Spitze  $S_t$  des Kegels ergibt sich demzufolge

$$S_t = c(t) - \frac{r(t)}{r'(t)} \vec{c}'(t).$$

Das Vorzeichen der Verschiebung von  $C_t$  parallel zu  $\vec{c}'(t)$  um  $C_t - S_t$  ergibt sich dadurch, dass  $M_t^{c,r} - C_t$  die gleiche Richtung hat wie  $S_t - C_t$ . Nach dem Strahlensatz gilt außerdem

$$\frac{|E_t - S_t|}{|C_t - S_t|} = \frac{1}{r_t} \quad \text{und mit} \quad |C_t - E_t| = |C_t - S_t| - |E_t - S_t| \quad \text{folgt}$$

$$|C_t - E_t| = |C_t - S_t| \left(1 - \frac{1}{r_t}\right) = \frac{r(t) - 1}{|r'(t)|} |\vec{c}'(t)|.$$

Damit erhält man für den Mittelpunkt des Kreises  $\mathfrak{C}_t$

$$E_t = c(t) - \frac{r(t) - 1}{r'(t)} \vec{c}'(t).$$

Auch hier ergibt sich das Vorzeichen der Verschiebung von  $C_t$  nach  $E_t$  wieder durch die gleiche Richtungsbeziehung. Für den Fall, dass  $r(t) < 1$  ist, kehrt sich das Vorzeichen um, da  $E_t$  dann nicht zwischen  $C_t$  und  $S_t$  liegt.

In dem nächsten Schritt wird das Koordinatensystem um den Ortsvektor von  $E_t$  verschoben, sodass der neue Ursprung im Kugelmittelpunkt von  $\mathfrak{S}_t$  liegt. Danach wird die Projektion  $\pi$  aus Anhang A.2.1 mit dem Nordpol der Einheitskugel als Projektionszentrum durchgeführt. Das Bild des verschobenen Kreises  $\mathfrak{C}_t$  ist im Allgemeinen wieder ein Kreis. Er werde mit  $\mathfrak{C}_t^\pi := \pi(\mathfrak{C}_t - E_t)$  bezeichnet. Sein Mittelpunkt

$$M_t^\pi = \pi(S_t - E_t) = \pi \left( -\frac{\vec{c}'(t)}{r'(t)} \right) = \frac{1}{1 + \frac{c'_z(t)}{r'(t)}} \begin{pmatrix} -\frac{c'_x(t)}{r'(t)} \\ -\frac{c'_y(t)}{r'(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Enveloppen

ist nach Lemma A.17 das Bild der verschobenen Kegelspitze  $S_t - E_t$  unter  $\pi$  und ist vereinfacht durch

$$M_t^\pi = \frac{-1}{r'(t) + c'_z(t)} \begin{pmatrix} c'_x(t) \\ c'_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

gegeben<sup>2</sup>. Falls  $\vec{c}'(t)$  nicht parallel zu  $(0, 0, 1)^T$  ist,<sup>3</sup> steht der Vektor  $\vec{v}_t := (0, 0, 1)^T \times \vec{c}'(t)$  senkrecht auf  $\vec{c}'(t)$  und somit liegt

$$\begin{aligned} P_t &:= E_t - \frac{r'(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle} \vec{c}'(t) + \frac{l_t^{c,r}}{r(t)|\vec{v}_t|} \vec{v}_t \\ &= E_t - \frac{r'(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle} \begin{pmatrix} c'_x(t) \\ c'_y(t) \\ c'_z(t) \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{1 - \frac{r'^2(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}}}{\sqrt{c_x'^2(t) + c_y'^2(t)}} \begin{pmatrix} -c'_y(t) \\ c'_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

auf dem Kreis  $\mathfrak{C}_t$ . Die Projektion des verschobenen Punktes  $P_t$  ist durch

$$\begin{aligned} P_t^\pi &:= \pi(P_t - E_t) = -\frac{r'(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t)} \begin{pmatrix} c'_x(t) \\ c'_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle - r'^2(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle (c_x'^2(t) + c_y'^2(t))}} \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t)} \begin{pmatrix} -c'_y(t) \\ c'_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben und somit gilt

$$\begin{aligned} (l_t^\pi)^2 &= \langle M_t^\pi - P_t^\pi, M_t^\pi - P_t^\pi \rangle \\ &= \left( \frac{-c'_x(t)}{r'(t) + c'_z(t)} + \frac{r'(t)c'_x(t) - \sqrt{\frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2 - r'^2(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}{c_x'^2(t) + c_y'^2(t)}} c'_y(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t)} \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{-c'_y(t)}{r'(t) + c'_z(t)} + \frac{r'(t)c'_y(t) + \sqrt{\frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2 - r'^2(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}{c_x'^2(t) + c_y'^2(t)}} c'_x(t)}{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t)} \right)^2 \end{aligned}$$

für den Radius  $l_t^\pi$  des projizierten Kreises. Nach dem Quadrieren heben sich die Wurzel-Terme gegenseitig auf:

$$\begin{aligned} (l_t^\pi)^2 &= \frac{c_x'^2(t) + c_y'^2(t)}{(r'(t) + c'_z(t))^2} + \frac{-2r'(t)(c_x'^2(t) + c_y'^2(t))}{(r'(t) + c'_z(t)) \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)} \\ &\quad + \frac{r'^2(t)(c_x'^2(t) + c_y'^2(t)) + \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2 - r'^2(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}{\left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)^2} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Siehe Bemerkung 2.13.

<sup>3</sup>Sonst definiert man  $\vec{v}_t := (0, 1, 0)^T \times \vec{c}'(t)$  und verfährt analog.

Nach Bildung des Hauptnenners und Sortierung der Potenzen von  $c'_z(t)$  erhält man

$$\begin{aligned}
 (l_t^\pi)^2 &= \frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^3 - r'^2(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2}{(r'(t) + c'_z(t))^2 \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)^2} \\
 &+ \frac{-2r'^3(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + 2r'(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2}{(r'(t) + c'_z(t))^2 \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)^2} c'_z(t) \\
 &+ \frac{r'^2(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle - r'^4(t)}{(r'(t) + c'_z(t))^2 \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)^2} c_z'^2(t) \\
 &= \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle - r'^2(t) \right) \frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle^2 + c'_z(t)2r'(t) \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + c_z'^2(t)r'^2(t)}{(r'(t) + c'_z(t))^2 \left( \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle + r'(t)c'_z(t) \right)^2}
 \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$(l_t^\pi)^2 = \frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle - r'^2(t)}{(r'(t) + c'_z(t))^2} = \frac{\langle \tilde{c}(t), \tilde{c}(t) \rangle - \tilde{r}^2(t)}{(\tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t))^2} \quad (2.22)$$

für den Radius des projizierten Kreises  $\mathfrak{C}_t^\pi$ . Die vierte Potenz des Hauptnenners  $h(t)$  aus Abschnitt 2.3.4 lässt sich herauskürzen. Unter der Voraussetzung, dass für alle  $t \in I$  die Ungleichung 2.20 gilt, ist das Zählerpolynom von  $(l_t^\pi)^2$  stets größer oder gleich null und erfüllt damit die Voraussetzungen für Lemma A.13. Also lassen sich durch Bestimmung der komplexen Nullstellen von  $\langle \tilde{c}(t), \tilde{c}(t) \rangle - \tilde{r}^2(t)$  (siehe Abschnitt 5.3.4) Polynome  $\bar{g}_x$  und  $\bar{g}_y$  mit

$$(l_t^\pi)^2 = \frac{\bar{g}_x^2(t) + \bar{g}_y^2(t)}{(\tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t))^2}$$

finden. Diese beiden Polynome werden jetzt als Komponenten eines von  $t$  abhängigen Vektors

$$\vec{g}_t := (g_x(t), g_y(t))^T \quad \text{mit} \quad g_x(t) := \frac{\bar{g}_x(t)}{\tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t)} \quad \text{und} \quad g_y(t) := \frac{\bar{g}_y(t)}{\tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t)}$$

genutzt. Somit liegt für alle  $t \in \mathbb{R}$  der Punkt  $M_t^\pi + \vec{g}_t$  auf dem Kreis  $\mathfrak{C}_t^\pi$ . Die Rückprojektion dieser Punkte mittels der Umkehrung der stereografischen Projektion  $\pi^{-1}$  aus Anhang A.2.1 und anschließende Skalierung und Verschiebung würde jetzt die eingangs erwähnte Kurve auf  $\mathcal{H}^{c,r}$  liefern. Doch zuvor wird die Spiegelung der Punkte an allen Durchmessern des Kreises  $\mathfrak{C}_t^\pi$  noch in der Ebene durchgeführt, was für ein festes  $t \in I$  die Darstellung des ganzen Kreises zur Folge hat. Für die Parametrisierung der Kreisschar  $\mathfrak{C}_t^\pi$  ergibt sich somit

$$\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}^\pi}(t, u) = M_t^\pi + \vec{g}_t - 2 \frac{g_x(t)u + g_y(t)}{u^2 + 1} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

für  $t \in I$  und  $u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

## 2. Enveloppen

Durch die Anwendung der Umkehrabbildung  $\pi^{-1}$  zur stereografischen Projektion auf  $\mathfrak{P}^{\mathfrak{e}^\pi}(t, u)$  erhält man alle Punkte der Kreise  $\mathfrak{C}_t$ , verschoben um den negierten Ortsvektor von  $E_t$ . Die so berechneten Punkte befinden sich alle auf der Einheitskugel. Für Ihre Ortsvektoren gilt

$$\vec{q}(t, u) = \pi^{-1}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{e}^\pi}(t, u)). \quad (2.24)$$

Die Parametrisierung der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist dann durch

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u) = c(t) + r(t)\vec{q}(t, u) \quad (2.25)$$

gegeben.

*Bemerkung 2.13.* Falls  $r'(t) + c'_z(t) \equiv 0$  ist, verlaufen alle charakteristischen Kreise durch den Nordpol, der nach  $E_t$  verschobenen Einheitskugel, wodurch die Projektion von  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  eine Gerade ist, welche man als Kreis mit Mittelpunkt im Unendlichen und unendlichem Radius auffassen kann. In diesem Fall wählt man ein anderes Projektionszentrum mit entsprechender Projektionsebene, beispielsweise kann  $(1, 0, 0)^T$  als Zentrum festgelegt und in die  $y$ - $z$ -Ebene projiziert werden.

*Bemerkung 2.14.* Für Darstellungszwecke der Flächen ist die Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  eher ungeeignet, weil eine gleichmäßige Unterteilung des Parameterintervalls für  $u$  nicht zu einer gleichmäßigen Unterteilung der charakteristischen Kreise führt (siehe Abb. 2.12a und 2.12b).

### 2.3.6. Klassifizierung und Fortsetzung

In diesem Abschnitt wird eine Einteilung der Hüllflächen nach ihrem Verhalten bei den Intervallgrenzen von  $I$  vorgenommen. Außerdem wird gezeigt, wie die Zugehörigkeit einer Einhüllenden zu einer bestimmten Klasse durch eine geeignete Fortsetzung geändert werden kann.

**Notation.** Für eine Funktion  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_0 \in I$  sowie  $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  ist unter

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \epsilon) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon)$$

der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert von  $f(t)$  bei  $t_0$  zu verstehen. Es gelten außerdem

$$\lim_{t \rightarrow -\infty^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(-t) =: f(-\infty) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) =: f(\infty)$$

für die einseitigen Grenzwerte im Unendlichen.

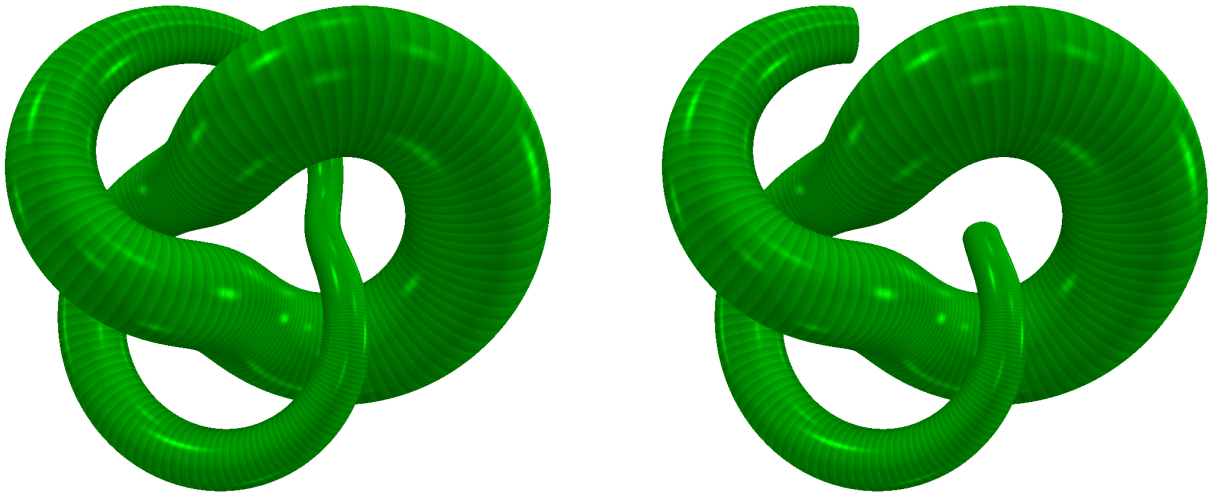
**Definition 2.15** (Zyklische Einhüllende). Eine Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit Scharparameterintervall  $I = [t_a, t_b]$  oder  $I = ]t_a, t_b]$  bzw.  $I = [t_a, t_b[$  heißt **zyklisch**, wenn sowohl für ihre Mittenkurve  $c$

$$\lim_{t \rightarrow t_a^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} c(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_a^+} \vec{c}'(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} \vec{c}'(t) \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow t_a^+} \vec{c}''(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} \vec{c}''(t)$$

als auch für ihre Radiusfunktion  $r$

$$\lim_{t \rightarrow t_a^+} r(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} r(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_a^+} r'(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} r'(t) \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow t_a^+} r''(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^-} r''(t)$$

gelten.



(a) Mit der Radiusfunktion  $r = \frac{2t^2+7}{8(t^2+1)}$  und dem Intervall  $I = \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{H}^{c,r}$  zyklisch.

(b) Durch Einschränkung des Scharparameter-Intervalls auf  $[-2, 100]$  ist  $\mathcal{H}^{c,r}$  nicht mehr zyklisch.

Abbildung 2.14.: Zyklische und nicht zyklische Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  entlang der Kleeblattschlinge aus Beispiel 8.

*Bemerkung.* Für Hüllflächen nach Definition 2.15 kann man sich das Intervall  $I$  als zyklisch denken, indem man die Grenzen  $t_a$  und  $t_b$  miteinander identifiziert. Die Grenzwert-Bedingungen entsprechen dann der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit beider Abbildungen an der Stelle  $t_a$ .

*Beispiel 8* (Kleeblattschlinge). Die Kleeblattschlinge ist eine Raumkurve, welche durch

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos(3t)) \cos(2t) \\ (2 + \cos(3t)) \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden kann. Durch Anwendung der Additionstheoreme und anschließendes Ersetzen der transzendenten Funktionen  $\sin(t)$  und  $\cos(t)$  durch die rationalen Terme  $\frac{1-t^2}{1+t^2}$  bzw.  $\frac{2t}{1+t^2}$  wie in Abschnitt 2.3.5 erhält man

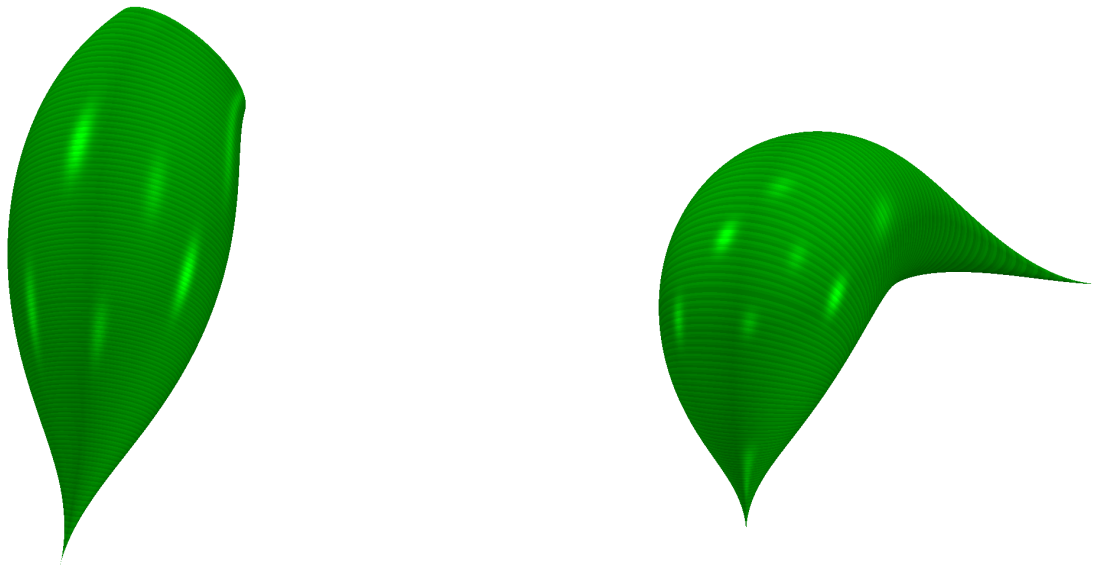
$$c(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^5} \begin{pmatrix} (t^6 + 21t^4 - 9t^2 + 3)(t^4 - 6t^2 + 1) \\ 4t(t^2 - 1)(-t^6 - 21t^4 + 9t^2 - 3) \\ 2(t^2 + 1)^2(3t^5 - 10t^3 + 3t) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

als rationale Parameterdarstellung dieser Kurve. Sie erfüllt für  $I = ] - \infty, \infty[ = \mathbb{R}$  die Bedingungen, welche in Definition 2.15 an die Seele gestellt werden. Wird nun noch wie in Abb. 2.14a eine geeignete Radiusfunktion  $r$  gewählt, so ist die entsprechende Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  zyklisch.

**Definition 2.16** (Beschränktheit). Es sei  $t_a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  eine Intervallgrenze von  $I$  mit

$$\lim_{t \rightarrow t_a} c(t) = Q \in \mathbb{R}^3,$$

## 2. Enveloppen



- (a) Die Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus Beispiel 9 ist rechtsseitig beschränkt, aber nicht verschlossen.  
 (b) Diese Enveloppe ist bei  $t = 1$  unbeschränkt (vgl. Beispiel 10).

Abbildung 2.15.: Linksseitig verschlossene Hüllflächen  $\mathcal{H}^{c,r}$  über  $I = [-1, 1[$

wobei  $t$  stets aus  $I$  ist. Dann heißen  $c$  und die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  (**einseitig**) **beschränkt** (bei  $t_a$ ).

*Bemerkung.* Insbesondere ist eine Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  bei  $t_a$  beschränkt, wenn das Intervall  $I$  bei  $t_a \in I \setminus t_o$  abgeschlossen ist. Es gilt dann  $\lim_{t \rightarrow t_a} c(t) = c(t_a)$  durch die Stetigkeit von  $c$ .

**Definition 2.17** (Verschluss). Eine Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  heißt **bei  $t_a$  verschlossen**, wenn  $t_a \in I$  eine Intervallgrenze von  $I$  ist und  $r(t_a) = 0$  für die Radiusfunktion gilt.

**Definition 2.18** (Geschlossenheit). Eine Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  heißt **geschlossen**, wenn sie zyklisch ist oder an jeder Intervallgrenze von  $I$  entweder verschlossen oder nicht beschränkt ist.

*Beispiel 9.* Die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  über dem Intervall  $I = [-1, 1[$  mit Seele

$$c(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^6 + t^5 + t^3 + t + 1 \\ 2(t^2 + 10t - 1) \\ 2(t^3 - 5t + 1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(t) = (t + 1)^2(t - 2)^2 \quad (2.27)$$

als Radiusfunktion ist linksseitig verschlossen, weil  $r(-1) = 0$  ist. An der rechten Intervallgrenze  $t = 1$  ist die Einhüllende mit

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} c(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} r(t) = 4$$

beschränkt (siehe Abb. 2.15a).



*Beispiel 10.* Durch leichte Änderung von  $c$  und  $r$  aus Beispiel 9 zu

$$c_2(t) = \frac{1}{2(t-1)^2} \begin{pmatrix} t^6 + t^5 + t^3 + t + 1 \\ 2(t-1)^2(t^2 + 10t - 1) \\ 4(t^3 - 5t + 1) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r_2(t) = \frac{(t+1)^2(t-2)^2}{t-1}$$

erhält man eine rechtsseitig unbeschränkte Enveloppe (vgl. Abb. 2.15b).

*Bemerkung 2.19.* Hüllflächen die an einer Intervallgrenze beschränkt, aber nicht verschlossen sind, können durch eine geeignete Fortsetzung verschlossen werden.

**Notation.** Es sei  $]t_a, t_b[$  die Bezeichnung für ein Intervall mit den Grenzen  $t_a$  und  $t_b$ . Dabei ist nicht festgelegt, ob die Grenzen offen oder abgeschlossen sind. Mit der Schreibweise  $]t_a, t_b[$  kann also sowohl  $[t_a, t_b]$  als auch  $]t_a, t_b]$  oder  $[t_a, t_b[$  bzw.  $]t_a, t_b[$  gemeint sein.

**Definition 2.20** (Zusammensetzung / Fortsetzung). Zwei Hüllflächen  $\mathcal{H}_1^{c,r}$  und  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  mit Mitlenkurven  $c_1, c_2$  sowie Radiusfunktionen  $r_1$  bzw.  $r_2$  über den Intervallen  $I_1$  und  $I_2$  können zu einer einzigen **zusammengesetzt** werden, wenn die Bedingungen

1.

$$I_1 = ]t_a, t_b[ \quad \text{und} \quad I_2 = ]t_b, t_c[ \quad \text{mit} \quad t_a, t_c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \quad \text{sowie} \quad t_b \in \mathbb{R}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_b^-} c_1(t) &= \lim_{t \rightarrow t_b^+} c_2(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_b^-} \vec{c}'_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^+} \vec{c}'_2(t) \\ \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow t_b^-} \vec{c}''_1(t) &= \lim_{t \rightarrow t_b^+} \vec{c}''_2(t) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_b^-} r_1(t) &= \lim_{t \rightarrow t_b^+} r_2(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_b^-} r'_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_b^+} r'_2(t), \\ \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow t_b^-} r''_1(t) &= \lim_{t \rightarrow t_b^+} r''_2(t) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Die **zusammengesetzte Einhüllende**  $\mathcal{H}^{c,r}$  wird dann durch

$$c(t) := \begin{cases} c_1(t), & \text{falls } t \in I_1 \cup \{t_b\} \\ c_2(t), & \text{falls } t \in I_2 \setminus \{t_b\} \end{cases} \quad \text{und} \quad r(t) := \begin{cases} r_1(t), & \text{falls } t \in I_1 \cup \{t_b\} \\ r_2(t), & \text{falls } t \in I_2 \setminus \{t_b\} \end{cases}$$

über dem Intervall

$$I := I_1 \cup \{t_b\} \cup I_2$$

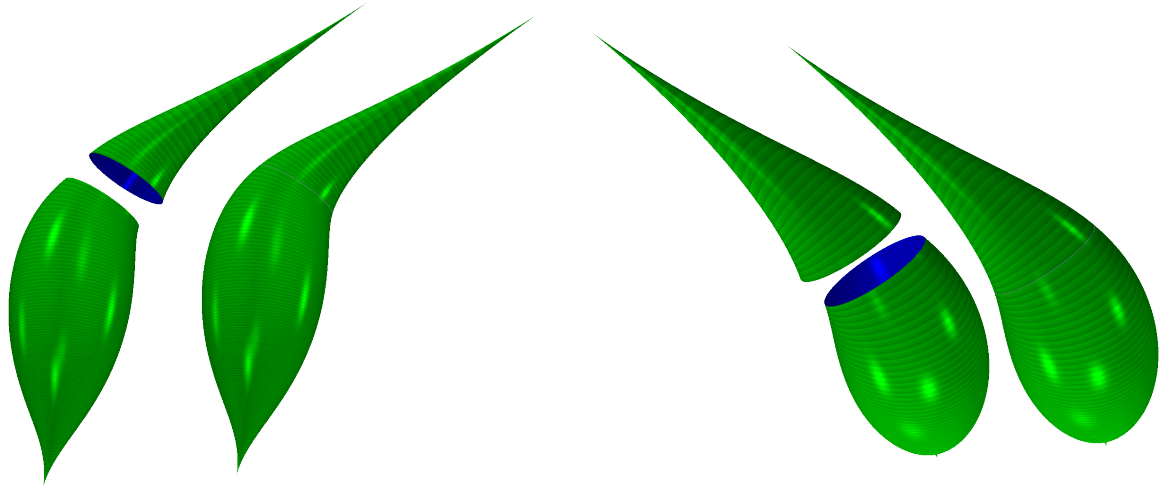
bestimmt.

Jede der beiden Hüllflächen  $\mathcal{H}_1^{c,r}$  bzw.  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  wird als **Fortsetzung** der jeweils anderen bezeichnet.

*Beispiel 11* (Fortsetzung der Hüllfläche aus Beispiel 9). Eine Fortsetzung  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  der Einhüllenden aus Beispiel 9 muss sowohl

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} c_2(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} \vec{c}'_2(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} \vec{c}''_2(t) = \begin{pmatrix} 28 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## 2. Enveloppen



- (a) Zusammensetzung der Enveloppen aus Beispiel 9 und Beispiel 11; Links sind die beiden Teile leicht versetzt dargestellt. (b) Die gleiche Situation wie in Abb. 2.16a aus anderer Perspektive

Abbildung 2.16.: Zusammensetzung von Hüllflächen aus zwei Blickwinkeln

als auch die Bedingungen

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} r_2(t) = 4 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} r_2'(t) = -4 \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} r_2''(t) = -6$$

erfüllen.

Die Hüllfläche  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  entlang der Kurve

$$c_2(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 28t^2 - 41t + 18 \\ 2t^2 + 20t - 2 \\ 6t^2 - 16t + 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r_2(t) = -3t^2 - 4t + 4$$

als Radiusfunktion genügt diesen Bedingungen. Das Parameter-Intervall dieser Fortsetzung sei  $I_2 := ]1, 2]$ . Obwohl eins nicht in der Vereinigung beider Intervalle liegt, hat die Zusammensetzung der Hüllflächen  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus Beispiel 9 und  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  das Intervall  $[-1, 2]$  für den Scharparameter. Die Fortsetzung  $\mathcal{H}_2^{c,r}$  ist rechtsseitig und damit natürlich die zusammengesetzte Hüllfläche beidseitig verschlossen.

# 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Überschneidungen der Hüllflächen  $\mathcal{H}^{c,r}$  von Kugelfamilien  $\mathcal{S}^{c,r}$ , die in Abschnitt 2.3 beschrieben werden. Hierbei spielt der Selbstschnitt eine große Rolle. Er setzt sich aus lokalen und globalen Selbstdurchdringungen der Einhüllenden zusammen (siehe Definition 3.7). Außerdem werden in Abschnitt 3.3 weitere wichtige Grundlagen für die beiden Verfahren zur Darstellung von Kanalfächen gelegt.

## 3.1. Lokale Selbstüberschneidung der Enveloppe

Der lokale Selbstschnitt der Einhüllenden einer Kugelfamilie ist eine spezielle Art der Selbstdurchdringung dieser Hüllfläche. Er sei wie folgt definiert.

**Definition 3.1** (Lokaler Selbstschnitt). Der **lokale Selbstschnitt**  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  bei  $t_0$  sei die Überschneidung infinitesimal benachbarter charakteristischer Kreise der Schar  $\mathcal{C}^{c,r}$  bei  $t_0 \in I$  und entspricht somit dem lokalen Schnitt  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  der Kreisschar  $\mathcal{C}^{c,r}$ . Der **lokale Selbstschnitt** der Enveloppe ist die Menge aller Schnittpunkte, die aus derartigen Überschneidungen resultieren. Er werde mit  $\mathcal{L}^{c,r} = \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t^{c,r}$  bezeichnet.

**Definition 3.2** (Charakteristische Punkte). Die Punkte des lokalen Selbstschnittes  $\mathcal{L}^{c,r}$  werden auch **charakteristische Punkte** genannt.

Die folgende Aussage stellt ein wichtiges Kriterium zur Identifikation eines lokalen Selbstschnittes dar.

**Lemma 3.3.** *Ein Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  gehört genau dann zum lokalen Selbstschnitt  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$ , wenn die Gleichungen*

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) &= 0 && \text{und} \\ f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) &= 0 && \text{sowie} \\ f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) &= 0 && \text{mit } f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t, P) := \partial_t f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P) \end{aligned}$$

für ein  $t_0 \in I$  erfüllt sind.

*Beweis.* Ein beliebiger Punkt  $Q \in \mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  gehört nach Definition 3.1 zum Schnitt infinitesimal benachbarter Kreise bei  $t_0$ . Natürlich durchdringen sich in  $Q$  auch die Ebenen, in denen diese Kreise liegen. Diese Ebenen gehören zu der Schar  $\mathcal{E}^{c,r}$ , die als Nullstellenmenge von  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}$  definiert ist, und sind ebenfalls infinitesimal benachbart. Darauf lässt sich nun Lemma 2.5 anwenden und

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

es folgt, dass sowohl  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P)$  als auch die partielle Ableitung davon nach  $t$  an der Stelle  $(t_0, Q)$  gleich null sind. Es gelten also  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  und

$$\underbrace{\left\langle \vec{c}'(t_0), Q - c(t_0) \right\rangle - \left\langle \vec{c}'(t_0), \vec{c}'(t_0) \right\rangle + r'^2(t_0) + r(t_0)r''(t_0)}_{f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q)} = 0. \quad (3.1)$$

Natürlich liegt der Punkt  $Q$  insbesondere auf dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  und somit auch auf  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$ , wie in Abschnitt 2.3.1 dargestellt. Also ist auch  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  erfüllt. Für alle Punkte  $Q$  des lokalen Selbstschnittes  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  der Einhüllenden ergibt sich also insgesamt  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) = f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  als notwendige Bedingung.

Nimmt man umgekehrt an, dass alle Gleichungen aus Lemma 3.3 für ein  $t_0$  aus  $I$  und einen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  erfüllt sind, so kann Lemma 2.5 zum einen für die Familie von Kugeln  $\mathcal{S}^{c,r}$  und zum anderen für die Ebenenschar  $\mathcal{E}^{c,r}$  Anwendung finden, da  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  äquivalent zu  $(\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P))(t_0, Q) = 0$  ist und  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) = (\partial_t f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P))(t_0, Q)$  gilt. Somit schneiden sich dann infinitesimal benachbarte Kugeln und Ebenen bei  $t_0$  in  $Q$  und es ist

$$Q \in \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{S}_{t_0+\epsilon}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0+\epsilon}^{c,r} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \underbrace{\mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r}}_{\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}} \cap \underbrace{\mathcal{S}_{t_0+\epsilon}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0+\epsilon}^{c,r}}_{\mathcal{C}_{t_0+\epsilon}^{c,r}} \right) = \mathcal{L}_{t_0}^{c,r}.$$

Damit ist gezeigt, dass  $Q$  zum Schnitt infinitesimal benachbarter charakteristischer Kreise bei  $t_0$  und demzufolge nach Definition 3.1 zum lokalen Selbstschnitt  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  von  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehört.  $\square$

#### 3.1.1. Ermittlung eines lokalen Schnittes

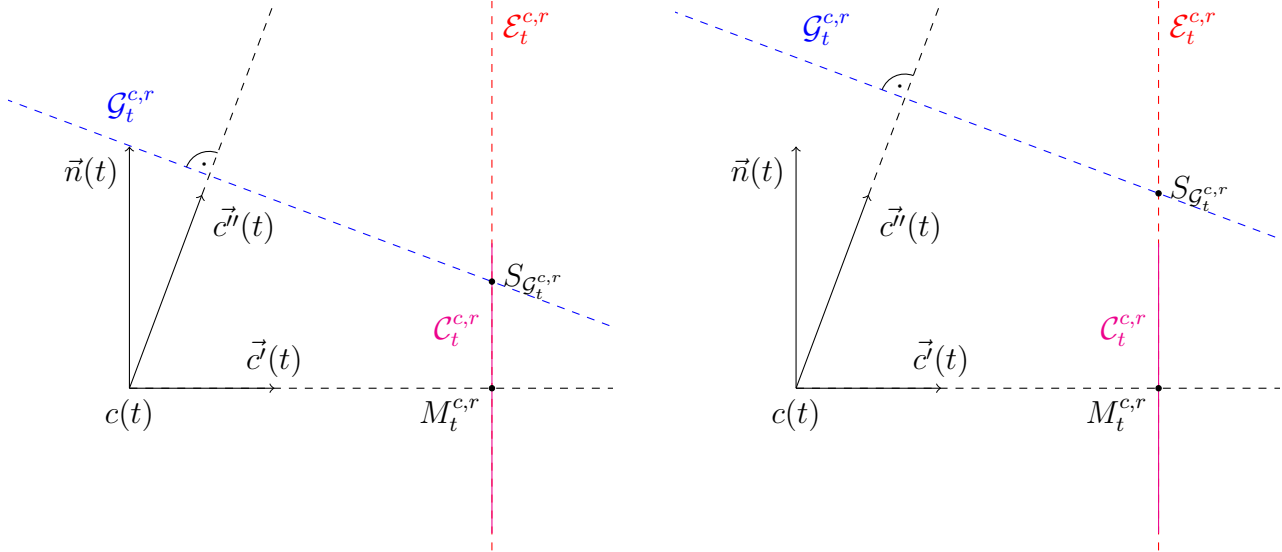
Mit Hilfe von Lemma 3.3 kann leicht festgestellt werden, ob ein Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  für ein vorgegebenes  $t_0 \in I$  zum lokalen Selbstschnitt  $\mathcal{L}_{t_0}^{c,r}$  gehört. Ist  $t_0$  nicht bekannt, so müssten, beispielsweise ausgehend von der letzten Gleichung aus Lemma 3.3, die Nullstellen von  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t) = f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t, Q)$  bestimmt werden, wobei  $t_i$  die  $i$ .te bezeichne. Erfüllt ein Paar  $(t_i, Q)$  auch die anderen beiden Gleichungen des Lemmas, so gehört  $Q$  zum lokalen Schnitt der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  bei  $t_i$ .

Oft stellt sich aber die Frage, ob eine Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  sich überhaupt lokal schneidet und falls ja, für welche Parameterwerte  $t \in I$ . Natürlich sind in diesem Fall auch die Schnittpunkte nicht bekannt. Für die Beantwortung dieser Frage ist Lemma 3.3 nicht geeignet. Dazu wird im Folgenden ein besseres Kriterium (siehe 3.2) hergeleitet.

Hierzu betrachtet man das Ganze aus geometrischer Sicht. Gleichung (3.1) definiert wieder eine Familie  $\mathcal{G}^{c,r}$  von Ebenen. Für jedes  $t \in I$  steht  $\vec{c}'(t)$  senkrecht auf  $(f_t^{\mathcal{G}^{c,r}})^{-1}(0) = \mathcal{G}_t^{c,r} \subset \mathcal{G}^{c,r}$ . Die ersten beiden Gleichungen aus Lemma 3.3 definieren für ein festes  $q \in I$  den Kreis  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  (siehe Abschnitt 2.3.1). Das heißt, dass es für  $q$  genau dann einen lokalen Selbstschnitt  $\mathcal{L}_q^{c,r}$  gibt, wenn sich  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  und  $\mathcal{G}_q^{c,r}$  schneiden. Da sowohl die Kreisebene  $\mathcal{E}_q^{c,r}$  als auch  $\mathcal{G}_q^{c,r}$  parallel zu  $\vec{c}'(q) \times \vec{c}''(q)$  verlaufen, können beide in die Ebene, die  $c(q)$  enthält und senkrecht auf  $\vec{b}_q$  steht, projiziert und das Schnittproblem dort gelöst werden (siehe Abb. 3.1). Mit  $\vec{b}_q$  ist der in Definition B.4 definierte Binormalenvektor im Kurvenpunkt  $c(q)$  gemeint. Es sei weiter  $\vec{n}_q$  der entsprechende Normalenvektor. Der Schnittpunkt der Geraden  $\{M_q^{c,r} + s \cdot \vec{n}_q : s \in \mathbb{R}\}$  mit der Ebene  $\mathcal{G}_q^{c,r}$  sei  $S_{\mathcal{G}_q^{c,r}} = M_q^{c,r} + s_{\mathcal{G}_q^{c,r}} \cdot \vec{n}_q$  mit dem zugehörigen Schnittparameter  $s_{\mathcal{G}_q^{c,r}}$ . Ein lokaler Schnitt bei  $q$  liegt genau dann vor, wenn der Abstand dieses Schnittpunktes vom Mittelpunkt des Kreises  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  nicht größer ist als dessen Radius. Allgemein ergibt sich also

$$|S_{\mathcal{G}_t^{c,r}} - M_t^{c,r}| = |s_{\mathcal{G}_t^{c,r}} \cdot \vec{n}_t| = |s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}| \leq l_t^{c,r} \quad (3.2)$$

### 3.1. Lokale Selbstüberschneidung der Enveloppe



(a) Ebene  $\mathcal{G}_t^{c,r}$  schneidet den Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ .

(b) Hier ist der lokale Schnitt bei  $t$  leer.

Abbildung 3.1.: Lokaler Selbstschnitt der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  als Parallelprojektion in Richtung des Binormalenvektors  $\vec{b}_t$

als Kriterium für die Existenz eines lokalen Schnittes bei  $t$ . Zur Bestimmung des Schnittparameters  $s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}$  wird die Gleichung

$$f^{\mathcal{G}_t^{c,r}}(t, S_{\mathcal{G}_t^{c,r}}) = \langle \vec{c}^{\prime\prime}(t), M_t^{c,r} + s_{\mathcal{G}_t^{c,r}} \cdot \vec{n}(t) - c(t) \rangle - \langle \vec{c}^{\prime}(t), \vec{c}^{\prime}(t) \rangle + r'^2(t) + r(t)r''(t) = 0$$

betrachtet. Daraus folgt

$$s_{\mathcal{G}_t^{c,r}} = \frac{r(t)r'(t) \langle \vec{c}^{\prime}(t), \vec{c}^{\prime\prime}(t) \rangle + \langle \vec{c}^{\prime}(t), \vec{c}^{\prime}(t) \rangle^2 - (r'^2(t) + r(t)r''(t)) \langle \vec{c}^{\prime}(t), \vec{c}^{\prime}(t) \rangle}{\langle \vec{c}^{\prime}(t), \vec{c}^{\prime}(t) \rangle \langle \vec{c}^{\prime\prime}(t), \vec{n}(t) \rangle}.$$

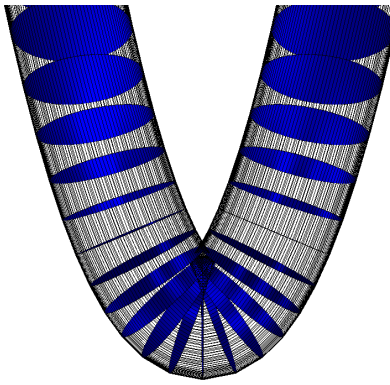
Dieser Ausdruck ist zwar recht kompliziert, dennoch ermöglicht er über die Nullstellenbestimmung von  $g(t) := |s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}| - l_t^{c,r}$ , alle Intervalle für den Parameter  $t$  zu identifizieren, in denen es einen lokalen Schnitt der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gibt. Die eigentlichen Schnittpunkte müssen dafür nicht bekannt sein.

*Bemerkung.* Mit Hilfe des Kriteriums 3.2 ist es natürlich auch möglich, effizient zu entscheiden, ob sich die Hüllfläche bei einem bestimmten  $t_0 \in I$  lokal schneidet, ohne die Schnittpunkte zu kennen. Diese können dann leicht durch

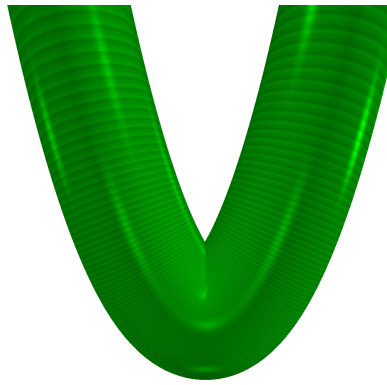
$$S_{\pm} = M_{t_0}^{c,r} + s_{\mathcal{G}_{t_0}^{c,r}} \cdot \vec{n}_{t_0} + b_{\pm} \cdot \vec{b}_{t_0}$$

berechnet werden, wobei  $b_- \in \mathbb{R}$  und  $b_+ \in \mathbb{R}$  durch  $s_{\mathcal{G}_{t_0}^{c,r}}^2 + b_{\pm}^2 = l_{t_0}^{c,r2}$  nach dem Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken  $M_{t_0}^{c,r} S_- S_{\mathcal{G}_{t_0}^{c,r}}$  und  $M_{t_0}^{c,r} S_{\mathcal{G}_{t_0}^{c,r}} S_+$  bestimmbar sind.

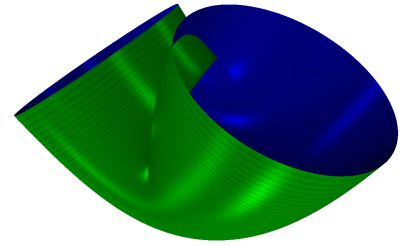
### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien



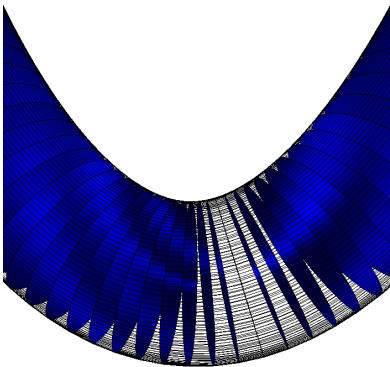
(a) Bei  $r \equiv 1$  existiert ein lokaler Selbstschnitt der Kreisschar  $\mathcal{C}^{c,r}$ .



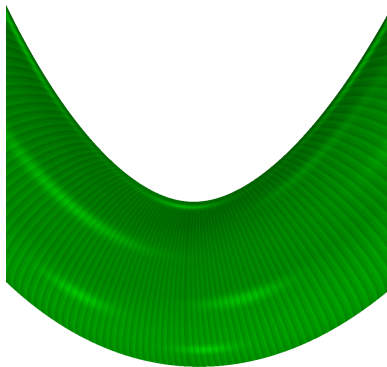
(b) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  zu Abb. 3.2a



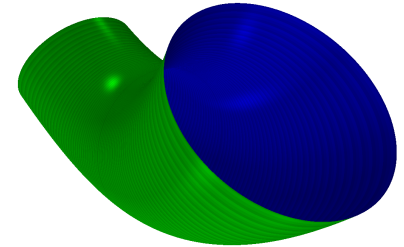
(c) Hüllfläche von Abb. 3.2b eingeschränkt auf Intervall  $[-1, 1]$



(d) Für  $r \equiv \frac{1}{4}$  gibt es keine Selbstüberschneidung mehr.



(e) Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  zur Kreisschar aus Abb. 3.2d



(f) Enveloppe von Abb. 3.2e eingeschränkt auf Intervall  $[-0.5, 0.5]$

Abbildung 3.2.: Hüllflächen entlang der Normalparabel mit verschiedenen, konstanten Radien

#### Konstanter Radius

Für den Fall, dass der Radius  $r(t) \equiv r$  konstant ist, gelten  $r'(t) \equiv 0 \equiv r''(t)$  sowie  $M_t^{c,r} = c(t)$  und  $l_t^{c,r} = r$ . Damit ist

$$f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t, \mathcal{S}_{\mathcal{G}_t^{c,r}}) = s_{\mathcal{G}_t^{c,r}} \langle \vec{c}''(t), \vec{n}(t) \rangle - \langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle = 0$$

und das Kriterium 3.2 für die Existenz eines lokalen Schnittes  $\mathcal{L}_t^{c,r}$  vereinfacht sich dann zu

$$|s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}| = \frac{\langle \vec{c}'(t), \vec{c}'(t) \rangle}{|\langle \vec{c}''(t), \vec{n}(t) \rangle|} \leq r. \quad (3.3)$$

*Beispiel 12.* Für den Fall, dass die Mittenkurve durch die Normalparabel gegeben ist, gelten für deren Parametrisierung und ihre Ableitungen

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{c}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

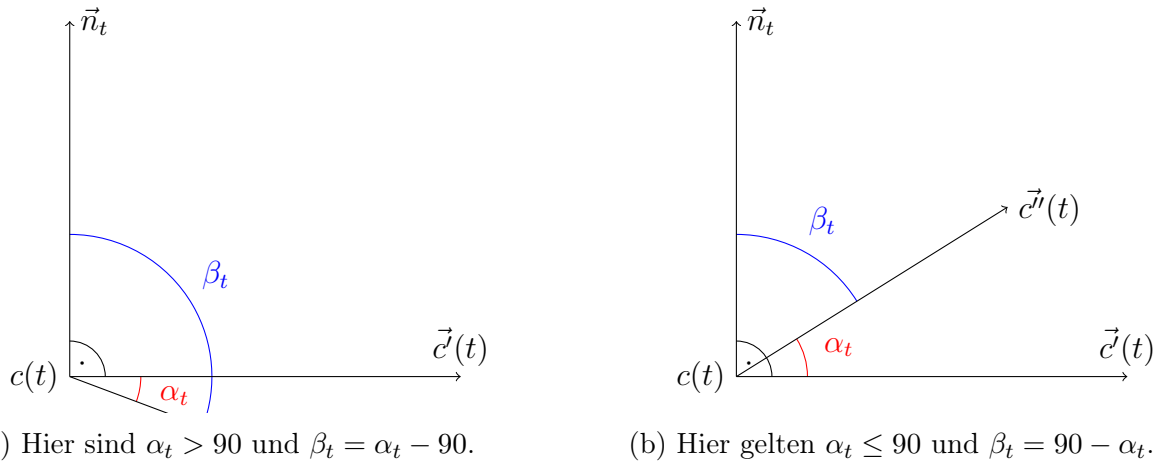


Abbildung 3.3.: Hier sind die zwei prinzipiellen Möglichkeiten für die Richtung von  $\vec{c}'(t)$  im Kurvenpunkt  $c(t)$  dargestellt.

Daraus lassen sich leicht die Vektoren

$$\vec{c}'(t) \times \vec{c}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{als auch} \quad \vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wenn der Radius konstant ist, ergibt sich

$$s_{\mathcal{G}_t^{c,r}} = \frac{4t^2 + 1}{\sqrt{4t^2+1}} = \frac{(\sqrt{4t^2+1})^3}{2}$$

für den Schnittparameter, was dem Reziproken der Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{c}'(t) \times \vec{c}''(t)|}{|\vec{c}'(t)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{4t^2+1})^3}$$

von  $c(t)$  entspricht. Das gilt nicht nur für dieses Beispiel, sondern auch allgemein und wird in Lemma 3.4 festgehalten.

Offensichtlich ist  $s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}$  stets größer oder gleich  $\frac{1}{2}$ . Das heißt für alle Radien  $r < \frac{1}{2}$  gibt es keinen lokalen Selbstschnitt. Größere Radien führen zu einer lokalen Selbstüberschneidung der Hüllfläche für Parameterwerte  $t$  in einem Intervall  $[-a, a]$  mit  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Für  $r = 1$  ist beispielsweise  $a = \frac{1}{2}\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} \approx 0,38$ . In Abb. 3.2 sind die beiden Situationen, einmal mit und einmal ohne lokalen Selbstschnitt der Einhüllenden, dargestellt.

**Lemma 3.4.** *Für eine Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  mit einem konstanten Radius  $r(t) \equiv r \in \mathbb{R}$  ist die Gleichung*

$$|s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}| = \frac{1}{\kappa(t)}$$

für alle  $t \in I$  erfüllt. Hierbei ist  $\kappa$  die Krümmung der Mittenkurve  $c$ .

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

*Beweis.* Seien  $\alpha_t$  der Winkel zwischen  $\vec{c}(t)$  und  $\vec{c}'(t)$  und  $\beta_t$  der zwischen  $\vec{n}(t)$  und  $\vec{c}'(t)$ . Dann gelten entweder  $\alpha_t = 90 - \beta_t$  (Abb. 3.3b) oder  $\alpha_t = \beta_t + 90$  (Abb. 3.3a). In beiden Fällen ist  $\sin(\alpha_t) = \cos(\beta_t)$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |s_{\mathcal{G}_t^{c,r}}| &= \frac{\left| \langle \vec{c}(t), \vec{c}'(t) \rangle \right|}{\left| \langle \vec{c}'(t), \vec{n}(t) \rangle \right|} = \frac{|\vec{c}'(t)|^2}{|\vec{c}'(t)| \cdot |\vec{n}(t)| \cos(\beta_t)} = \frac{|\vec{c}'(t)|^3}{|\vec{c}'(t)| \cdot |\vec{c}'(t)| \sin(\alpha_t)} \\ &= \frac{|\vec{c}'(t)|^3}{\left| \langle \vec{c}(t), \vec{c}'(t) \rangle \right|} = \frac{1}{\kappa(t)} \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

## 3.2. Globaler Selbstschnitt der Einhüllenden

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie die Punkte der globalen Selbstüberschneidung einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ermittelt werden können. Im Wesentlichen wird eine Parameterdarstellung in die impliziten Gleichungen der Einhüllenden eingesetzt, eine Variable eliminiert und das Ergebnis für einen Parameter spezialisiert. Anschließend können die Nullstellen eines Ausdrucks, der nur noch von einem Parameter abhängt, bestimmt werden. Hierfür werden sowohl für die Parametrisierung der Komponenten der Kurve  $c$  als auch für die Radiusfunktion  $r$  nur noch rationale Funktionen zugelassen. Außerdem soll Ungleichung 2.20 für alle  $t \in I$  erfüllt sein.

**Definition 3.5** (Globaler Selbstschnitt). Der **globale Selbstschnitt**  $\mathcal{J}^{c,r}$  der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  besteht aus allen Punkten, die mindestens zu zwei verschiedenen Teilen der Hüllfläche gehören und ist somit durch

$$\mathcal{J}^{c,r} := \{S : S \in \mathcal{C}_{t_1}^{c,r} \cap \mathcal{C}_{t_2}^{c,r} \text{ mit } t_1, t_2 \in I \text{ und } t_1 \neq t_2\}$$

definiert. Die Schnittmenge besteht also genau aus den Punkten durch die mindestens zwei verschiedene charakteristische Kreise der Enveloppe verlaufen. Mit dem **globalen Selbstschnitt**  $\mathcal{J}_{t_0}^{c,r}$  bei  $t_0$  seien die Punkte der Selbstüberschneidung bezeichnet, die zum charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  gehören. Es gilt somit  $\mathcal{J}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{J}^{c,r} \cap \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ .

### 3.2.1. Berechnung mittels rationaler Parametrisierung $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$

Hier wird für die Berechnung des Selbstschnittes  $\mathcal{J}^{c,r}$  einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  die Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  aus Abschnitt 2.3.5 inklusive aller dort eingeführten Bezeichnungen verwendet. Daraus ergibt sich natürlich auch die Beschränkung auf rationale Funktionen für  $r$  und die Komponenten von  $c$ . Zu Beginn werden noch einige Terme vorberechnet und ein paar entsprechende Bezeichnungen zur Abkürzung eingeführt. Für die erste Komponente von  $\mathfrak{P}^{e^\pi}$  aus Gleichung (2.23) ergibt sich

$$\mathfrak{P}_x^{e^\pi}(t, u) = \frac{u^2 \overbrace{(M_x^\pi(t) - g_x(t))}^{=:A_1} + u \overbrace{(-2g_y(t))}^{=:B_1} + \overbrace{M_x^\pi(t) + g_x(t)}^{=:C_1}}{u^2 + 1} \quad (3.4)$$



und für die y-Koordinate

$$\mathfrak{P}_y^{\mathcal{E}^\pi}(t, u) = \frac{u^2 \overbrace{(M_y^\pi(t) + g_y(t))}^{=:A_2} + u \overbrace{(-2g_x(t))}^{=:B_2} + \overbrace{M_y^\pi(t) - g_y(t)}^{=:C_2}}{u^2 + 1}, \quad (3.5)$$

wobei  $M^\pi(t) = M_t^\pi$  ist. Außerdem gilt für die Summe der Quadrate

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}^{\mathcal{E}^\pi}(t, u)|^2 &= \left( M_x^\pi(t) + g_x(t) - 2u \frac{g_x(t)u + g_y(t)}{u^2 + 1} \right)^2 \\ &\quad + \left( M_y^\pi(t) + g_y(t) - 2 \frac{g_x(t)u + g_y(t)}{u^2 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{u^2 A + uB + C}{u^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit

$$A = -4g_x(t)M_x^\pi(t) + D \quad \text{und} \quad C = -4g_y(t)M_y^\pi(t) + D$$

sowie

$$B = -4g_x(t)M_y^\pi(t) - 4g_y(t)M_x^\pi(t),$$

wobei

$$D = (M_x^\pi)^2(t) + (M_y^\pi)^2(t) + (l_t^\pi)^2 + 2 \langle M_t^\pi, \vec{g}(t) \rangle.$$

Natürlich sind  $A$  bis  $D$  auch mit eventuellen Indizes aller Funktionen von  $t$ , doch bei ihnen wird das Argument zu Gunsten der besseren Lesbarkeit weggelassen. Das Einsetzen der Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)$  einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus Gleichung (2.25) in  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w, P)$  für  $P$  unter Einbeziehung von Gleichungen (3.4) bis (3.6) liefert

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)) &= \langle c(t) + r(t)\vec{q}(t, u) - c(w), c(t) + r(t)\vec{q}(t, u) - c(w) \rangle - r(w)^2 \\ &= 2r(t) \frac{2(u^2 A_1 + uB_1 + C_1)v_x + 2(u^2 A_2 + uB_2 + C_2)v_y}{u^2(A + 1) + uB + C + 1} \\ &\quad + 2r(t) \frac{(u^2(A - 1) + uB + C - 1)v_z}{u^2(A + 1) + uB + C + 1} + d \end{aligned}$$

mit

$$d = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + r^2(t) - r(w)^2 \quad \text{und} \quad \vec{v} = c(t) - c(w). \quad (3.7)$$

Die Parameterwerte für  $t$  und  $w$ , welche die Gleichung  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)) = 0$  erfüllen, gehören zum Schnitt der Kugel  $\mathcal{S}_w^{c,r}$  mit dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ . Durch Multiplikation<sup>1</sup> mit  $(u^2(A + 1) + uB + C + 1)$  ergibt sich daraus die Gleichung

$$\begin{aligned} &4r(t)(u^2 A_1 + uB_1 + C_1)v_x + 4r(t)(u^2 A_2 + uB_2 + C_2)v_y \\ &+ 2r(t)(u^2(A - 1) + uB + C - 1)v_z + d(u^2(A + 1) + uB + C + 1) = 0, \end{aligned}$$

welche quadratisch in  $u$  ist. Im Allgemeinen gibt es also zwei Lösungen der Gleichung für  $u$  in Abhängigkeit von  $t$  und  $w$ . Das entspricht den beiden Schnittpunkten der Kugel  $\mathcal{S}_w^{c,r}$  mit dem

<sup>1</sup>Diese Multiplikation kann die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung erweitern, falls der Faktor null ist. Das heißt, es gibt Parameterwerte, welche die neue, nicht aber die ursprüngliche Gleichung lösen. Diese zusätzlichen Lösungen werden am Ende mittels eines einfachen Tests wieder herausgefiltert.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ , die im Allgemeinen existieren. Der Parameter  $u$  bestimmt dabei den genauen Punkt auf dem Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$ . Durch Ordnen nach den Potenzen von  $u$  erhält man

$$\begin{aligned} & u^2 \underbrace{(2r(t)(2A_1v_x + 2A_2v_y + (A-1)v_z) + d(A+1))}_{=:a} \\ & + u \underbrace{(2r(t)(2B_1v_x + 2B_2v_y + Bv_z) + dB)}_{=:b} \\ & + \underbrace{2r(t)(2C_1v_x + 2C_2v_y + (C-1)v_z) + d(C+1)}_{=:c} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Auch hier werden die Argumente  $w$  und  $t$  nicht explizit angegeben. Die beiden Lösungen<sup>2</sup> für  $u$  sind dann durch

$$u_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.9)$$

gegeben, falls  $a \neq 0$ .

*Bemerkung 3.6.* Es ist unmöglich, dass bei demselben Paar von Parameterwerten für  $t$  und  $w$  sowohl  $a = 0$  als auch  $b \neq 0$  gelten, denn das würde bedeuten, dass Gleichung (3.8) linear in  $u$  ist und somit der Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  die Kugel  $\mathcal{S}_w^{c,r}$  nur in einem einfachen Punkt schneidet, was geometrisch ausgeschlossen ist. Schneiden sich beide Figuren nur in einem Punkt, so muss es sich um einen Berührungs- bzw. Doppelpunkt handeln. Aus  $a(t_0, w_0) = 0$  folgt also automatisch auch  $b(t_0, w_0) = 0$ . Also kann Gleichung (3.8) für  $a(t_0, w_0) = 0$  nur dann erfüllt sein, wenn auch  $b(t_0, w_0) = 0$  und  $c(t_0, w_0) = 0$  sind. In diesem Fall ist sie unabhängig von  $u$  immer gültig. Das heißt, dass der gesamte Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  auf der Kugel  $\mathcal{S}_{w_0}^{c,r}$  liegt. Das ist beispielsweise natürlich für  $t_0 = w_0$  erfüllt. Die entsprechenden Parameterwerte von  $w$  erhält man in diesen Fällen durch Nullstellenbestimmung des für  $t = t_0$  spezialisierten rationalen Terms  $c_{t_0}(w)$ .

Nun wird die Parameterdarstellung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)$  der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  in  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w, P)$  für  $P$  eingesetzt und Gleichungen (3.4) bis (3.6) verwendet. Man erhält

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)) &= \left\langle \vec{c}(w), c(t) + r(t)\vec{q}(t, u) - c(w) \right\rangle + r(w)r'(w) \\ &= r(t) \frac{2c'_x(w)(u^2A_1 + uB_1 + C_1) + 2c'_y(w)(u^2A_2 + uB_2 + C_2)}{u^2(A+1) + uB + C + 1} \\ &+ r(t) \frac{c'_z(w)(u^2(A-1) + uB + C - 1)}{u^2(A+1) + uB + C + 1} + \hat{d}, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{d} = r(w)r'(w) + \left\langle \vec{c}(w), c(t) - c(w) \right\rangle$$

gilt.

Hier erfüllen die Parameterwerte  $t_0$  und  $w_0$  die Gleichung  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w_0, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u)) = 0$ , wenn die Ebene  $\mathcal{E}_{w_0}^{c,r}$  den charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  schneidet. Nach Multiplikation<sup>3</sup> dieser Gleichung mit  $u^2(A+1) + uB + C + 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & 2r(t)c'_x(w)(u^2A_1 + uB_1 + C_1) + 2r(t)c'_y(w)(u^2A_2 + uB_2 + C_2) \\ & + r(t)c'_z(w)(u^2(A-1) + uB + C - 1) + \hat{d}(u^2(A+1) + uB + C + 1) = 0. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Für  $b^2 - 4ac < 0$  existiert natürlich keine reelle Lösung.

<sup>3</sup>siehe Fußnote 1 Seite 53

Auch hier gibt es im Allgemeinen wieder zwei mögliche Lösungen für  $u$  als Funktion von  $t$  und  $w$ , welche die beiden Schnittpunkte von  $\mathcal{E}_w^{c,r}$  mit dem Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  bestimmen. Nach dem Sortieren der Potenzen von  $u$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & u^2 \underbrace{(r(t)(2A_1c'_x(w) + 2A_2c'_y(w) + (A-1)c'_z(w)) + (A+1)\hat{d})}_{=: \hat{a}} \\ & + u \underbrace{(r(t)(2B_1c'_x(w) + 2B_2c'_y(w) + Bc'_z(w)) + B\hat{d})}_{=: \hat{b}} \\ & + \underbrace{r(t)(2C_1c'_x(w) + 2C_2c'_y(w) + (C-1)c'_z(w)) + (C+1)\hat{d}}_{=: \hat{c}} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für den Fall, dass  $\hat{a} \neq 0$  ist, gibt es die beiden Lösungen<sup>4</sup>

$$u_{\pm} = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}} \quad (3.11)$$

für  $u$  als Funktion von  $t$  und  $w$ . Für  $\hat{a} = 0$  ist die analoge Aussage von Bemerkung 3.6 über die Ebene  $\mathcal{E}_w^{c,r}$  anstelle der Kugel  $\mathcal{S}_w^{c,r}$  gültig.

Zur Elimination von  $u$  können entweder die Lösungen für  $u$  aus der Schnittgleichung von Kugel- und Kreisschar in die Schnittgleichung von Ebenen- und Kreisschar eingesetzt werden oder umgekehrt.

Bei der ersten Variante führt das Einsetzen von Gleichung (3.9) in Gleichung (3.10) zu

$$\left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \hat{a} + \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \hat{b} + \hat{c} = 0.$$

Durch geeignetes Umstellen und Quadrieren,<sup>5</sup> kann der Wurzelterm beseitigt werden

$$(b^2 - 4ac)(2a\hat{b} - 2b\hat{a})^2 = (-(2b^2 - 4ac)\hat{a} + 2abb\hat{b} - 4a^2\hat{c})^2$$

und es werde

$$f^{\mathcal{J}^{c,r}}(t, w) := (b^2 - 4ac)(2a\hat{b} - 2b\hat{a})^2 - (-(2b^2 - 4ac)\hat{a} + 2abb\hat{b} - 4a^2\hat{c})^2 \quad (3.12)$$

definiert.

Für die zweite Variante setzt man Gleichung (3.11) in Gleichung (3.8) ein, was

$$\left( \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}} \right)^2 a + \left( \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c}}}{2\hat{a}} \right) b + c = 0$$

ergibt. Analog zur ersten Variante wird auch hier der Wurzelterm auf eine Seite gebracht und anschließend quadriert<sup>5</sup>. Man erhält

$$(\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c})(2\hat{a}b - 2\hat{b}a)^2 = (-(2\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c})a + 2\hat{a}bb - 4\hat{a}^2c)^2$$

<sup>4</sup>Für  $\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c} < 0$  gibt es natürlich wieder keine reelle Lösung.

<sup>5</sup>Auch das Quadrieren der Gleichung bringt wieder eine Erweiterung der Lösungsmenge mit sich.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

und es sei

$$\hat{f}^{\mathcal{J}^{c,r}}(t, w) := (\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c})(2\hat{a}\hat{b} - 2\hat{b}a)^2 - (-(2\hat{b}^2 - 4\hat{a}\hat{c})a + 2\hat{a}\hat{b}b - 4\hat{a}^2c)^2$$

definiert.

Die Gleichungen  $f^{\mathcal{J}^{c,r}}(t, w) = 0$  und  $\hat{f}^{\mathcal{J}^{c,r}}(t, w) = 0$  aus der ersten bzw. zweiten Variante können für beliebige Stellen  $t = t_0$  spezialisiert und anschließend die Nullstellen der rationalen Funktionen  $f_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}(w)$  oder  $\hat{f}_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}(w)$  numerisch approximiert werden. Die Implementierung der Nullstellenbestimmung ist in Abschnitt 5.3 beschrieben. Die so erhaltenen Werte  $w_j$  für  $w$  sowie die Spezialisierung  $t = t_0$  können dann in Gleichung (3.9) bzw. Gleichung (3.11) eingesetzt werden, um auch die entsprechenden Werte  $u_0$  für  $u$  zu erhalten.

*Bemerkung.* Für  $a(t_0, w_0) = 0$  bei der ersten bzw.  $\hat{a}(t_0, w_0) = 0$  bei der zweiten Variante ist die entsprechende Gleichung  $f^{\mathcal{J}^{c,r}}(t_0, w_0) = 0$  bzw.  $\hat{f}^{\mathcal{J}^{c,r}}(t_0, w_0) = 0$  immer erfüllt, weil nach Bemerkung 3.6 auch  $b(t_0, w_0) = 0$  bzw.  $\hat{b}(t_0, w_0) = 0$  gelten. In diesen Fällen können die Parameterwerte für  $u$  über die jeweils andere quadratische Gleichung  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w_j, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u)) = 0$  bzw.  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w_j, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u)) = 0$  bestimmt werden.

Mittels der Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  können die zugehörigen Punkte  $Q_0 = \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u_0)$  ermittelt werden. Falls sie nicht die Gleichungen<sup>6</sup>  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q_0) = 0$  und  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q_0) = 0$  erfüllen, werden sie gemeinsam mit ihren entsprechenden Parameterwerten verworfen. Sie gehören zu Lösungen, welche durch nicht äquivalente Umformungen, wie die Multiplikation mit null oder das Quadrieren zur Beseitigung der Wurzelterme hinzugekommen sind.

Der Index  $j \in \mathbb{N}$  dient der Nummerierung und somit der Unterscheidung der Lösungen für  $w$ . Abschließend ist es möglich, auch die zu einem Schnittpunkt

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u_j) = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_j) = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(w_j, \beta) \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$$

des Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  mit  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  gehörigen Winkelparameterwerte  $\alpha_j$  und  $\beta$  für  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  mit Hilfe von

$$\cos(\alpha_j) = \frac{\langle \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, 0) - c(t_0), \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, u_j) - c(t_0) \rangle}{(r(t_0))^2}$$

und der analogen Gleichung für  $\beta$  zu ermitteln.

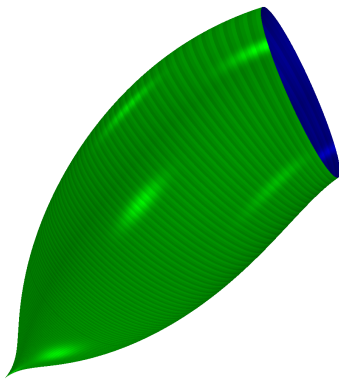
Weil sich viele Aussagen gleichermaßen auf lokale und globale Selbstschnittpunkte beziehen, ist die folgende Definition sinnvoll.

**Definition 3.7** (Selbstschnitt). Der **Selbstschnitt**  $\mathcal{I}^{c,r}$  einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist die Vereinigung ihres lokalen und globalen Selbstschnittes und es gelten

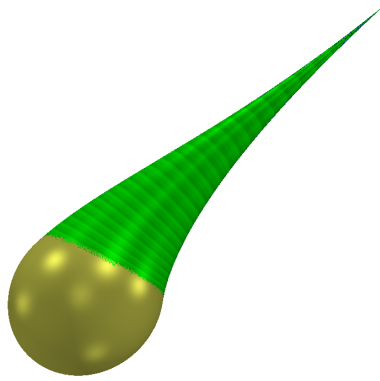
$$\mathcal{I}_{t_0}^{c,r} := \mathcal{L}_{t_0}^{c,r} \cup \mathcal{J}_{t_0}^{c,r} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{I}^{c,r} = \bigcup_{t \in I} \mathcal{I}_{t_0}^{c,r},$$

wobei  $\mathcal{I}_{t_0}^{c,r}$  der **Selbstschnitt** von  $\mathcal{H}^{c,r}$  bei  $t_0 \in I$  ist.

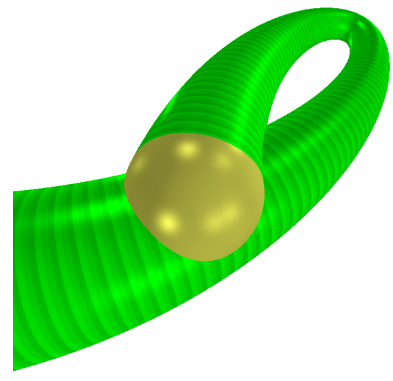
<sup>6</sup>Die Überprüfung dieser beiden Bedingungen wird mit Schwellwerten realisiert, schließlich werden die Funktionswerte im Allgemeinen von null verschieden sein, da die Nullstellen ja nur approximiert und nicht exakt berechnet werden.



(a) Bei der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus Beispiel 9 ist  $I = [-1, 1[$  rechts offen. Damit existiert bei  $t = 1$  keine Verschlusskappe. Die Verschlusskappenmenge ist leer.



(b) Hier ist das Intervall  $I = [1, 2]$  links abgeschlossen, die Hüllfläche aber nicht verschlossen. Damit existiert bei  $t = 1$  eine Verschlusskappe (goldfarben).



(c) Die Hüllfläche über dem Intervall  $I = [-1, \infty[$  hat bei  $t = -1$  eine Verschlusskappe (goldfarben).

Abbildung 3.4.: Einhüllende und ihre Verschlusskappen

### 3.3. Topologische Betrachtungen

In diesem Abschnitt werden wichtige Fakten für die Visualisierungsansätze in Abschnitt 4.2 bzw. Abschnitt 4.3 erarbeitet. Für beide Verfahren ist es wichtig zu wissen, wann ein Punkt eines charakteristischen Kreises bzw. eines Strahles außerhalb oder innerhalb der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  liegt. Dazu werden Aussagen über Inneres und Äußeres einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  getroffen und bewiesen. Ein Tiefenlevel wird eingeführt und Kriterien zu dessen Bestimmung gegeben. Zu Beginn sind jedoch ein paar Definitionen und Vorbemerkungen erforderlich.

**Definition 3.8** (Inneres). Ein Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  wird als **Innenpunkt** oder **innerer Punkt** der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  bezeichnet, wenn er im Inneren einer Kugel der Schar liegt. Für jeden solchen Punkt gibt es also ein  $t_0 \in I$ , so dass  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) < 0$  gilt. Die Vereinigung aller Innenpunkte wird als das **Innere**  $\mathcal{O}^{c,r}$  der Kugelschar bezeichnet.

**Definition 3.9** (Äußeres). Jeder Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$ , welcher kein innerer Punkt ist, werde als **Außenpunkt** oder **äußerer Punkt** der Schar  $\mathcal{S}^{c,r}$  bezeichnet. Ein solcher Punkt wird von keiner Kugel der Familie eingeschlossen, was bedeutet, dass  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) \geq 0$  für alle  $t \in I$  gilt. Das **Äußere**  $\mathcal{A}^{c,r}$  der Kugelschar bezeichne die Vereinigung aller Außenpunkte.

**Definition 3.10** (Verschlusskappen). Für eine Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  und eine Grenze  $t_a$  ihres Scharparameterintervalls  $I$  ist

$$\mathcal{V}_{t_a}^{c,r} := \bigcup_{t \in I \cap \{t_a\}} ((\mathcal{S}_t^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}) \setminus \mathcal{C}_t^{c,r}) \quad (3.13)$$

die Verschlusskappe bei  $t_a$ . Die Verschlussmenge

$$\mathcal{V}^{c,r} := \bigcup_{t \in I \setminus I_o} \mathcal{V}_t^{c,r} \quad (3.14)$$

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

sei die Vereinigung der Verschlusskappen abgeschlossener Intervallgrenzen von  $I$ . Ihre Elemente heißen **Verschlusspunkte**.

**Lemma 3.11.** *Es sei  $Q \in \mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  mit  $t_0 \in I$  ein Außenpunkt einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ . Dann liegt  $Q$  auf dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  oder ist ein Verschlusspunkt.*

*Beweis.* Man betrachte  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t) := f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q)$  als Funktion von  $t$  und fasse  $Q$  als konstant auf. Weil  $Q$  ein Außenpunkt ist, gilt  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t) \geq 0$  für alle  $t \in I$ . Außerdem ist  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0) = 0$ , da  $Q$  auf  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  liegt. Daraus folgt, dass  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$  bei  $t = t_0$  ein lokales Minimum mit Funktionswert null hat oder  $t_0 \in I \setminus I_o$  eine Intervallgrenze von  $I$  ist.

Im ersten Fall hat die Ableitung von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  bei  $t = t_0$  den Wert null und somit gilt

$$0 = (f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}})'(t_0) = (\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P))(t_0, Q).$$

Das ist äquivalent zu  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$ , woraus sofort  $Q \in \mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  folgt. Deswegen ist  $Q \in \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{E}_{t_0}^{c,r} = \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  ein Punkt des Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ .

Im zweiten Fall liegt  $Q$  entweder auch auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  oder gehört nach Definition 3.10 zur Verschlusskappenmenge  $\mathcal{V}^{c,r}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Der Beweis von Lemma 3.11 zeigt, dass die Menge  $\mathcal{V}_t^{c,r}$  aus Gleichung (3.13) für alle reellen Werte  $t \in \mathbb{R} \setminus (I \setminus I_o)$ , welche keine abgeschlossene Intervallgrenze von  $I$  darstellen, leer ist. Aus diesem Grund wird bei Definition 3.10 in Gleichung (3.14) für  $\mathcal{V}^{c,r}$  auch nur die Vereinigung dieser abgeschlossenen Grenzen von  $I$  gebildet.

**Korollar 3.12.** *Hat eine Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  der Schar  $\mathcal{S}^{c,r}$  mehr Außenpunkte als die des Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ , gilt also*

$$\mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r} \supsetneq \mathcal{C}_{t_0}^{c,r},$$

dann ist  $t_0 \in I \setminus I_o$  eine abgeschlossene Intervallgrenze von  $I$ .

*Beweis.* Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 3.11.  $\square$

*Konvention 3.13.* Ab sofort werden für den gesamten restlichen Abschnitt nur noch geschlossene Hüllflächen nach Definition 2.18 betrachtet. Außerdem sei Ungleichung 2.20 für alle  $t \in I$  erfüllt.

*Bemerkung.* Für die Einhüllenden nach Konvention 3.13 ist die Verschlussmenge  $\mathcal{V}^{c,r}$  leer und in Lemma 3.11 entfällt die Möglichkeit, dass  $Q$  ein Verschlusspunkt ist. Derartige Hüllflächen  $\mathcal{H}^{c,r}$  trennen das Äußere ihrer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  vom Inneren. Es ist unmöglich auf einer Kurve von Außen nach Innen zu gelangen, ohne die Enveloppe zu durchstoßen. Diese Eigenschaft ist in Abschnitt 3.3.1 wichtig, um Sonderfälle zu vermeiden. Die meisten Sätze und Beweise müssten sonst, ähnlich wie Lemma 3.11, um Aussagen über die Verschlussmenge erweitert werden. Eine nicht geschlossene Einhüllende kann durch eine geeignete Fortsetzung nach Definition 2.20 geschlossen werden. Natürlich müssen für zusammengesetzte Hüllflächen bei den Berechnungen des Selbstschnittes die Schnittpunkte aller möglichen Paarungen der Hüllflächenteile berechnet werden. Das kann analog zu Abschnitt 3.2.1 durch Einsetzen der Parametrisierung der einen Enveloppe eines Paares in die impliziten Gleichungen für Kugel- und Ebenenschar der jeweils anderen geschehen. Damit steigt der Rechenaufwand quadratisch in der Anzahl dieser Teile.

**Definition 3.14** (Zyklisches Intervall). Für  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$  sei das **zyklische Intervall**  $[[\alpha_1, \alpha_2]] \subset [0, 4\pi[$  wie folgt definiert:

$$[[\alpha_1, \alpha_2]] := \begin{cases} [\alpha_1, \alpha_2], & \text{falls } \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ [\alpha_1, 2\pi] \cup [2\pi, 2\pi + \alpha_2], & \text{für } \alpha_1 > \alpha_2 \end{cases}$$

Analog seien die **offenen zyklischen Intervalle**  $]]\alpha_1, \alpha_2]]$ ,  $[[\alpha_1, \alpha_2[[$  und  $]]\alpha_1, \alpha_2[[$ , welche den jeweiligen Rand nicht enthalten, definiert.

Durch diese Definitionen werden im Folgenden viele Fallunterscheidungen vermieden. Für  $\alpha_1 > \alpha_2$  werden auf alle Werte des Intervalls  $[0, \alpha_2]$   $2\pi$  aufaddiert, um wieder ein zusammenhängendes Intervall zu erhalten.

**Notation** (Kreisbogen). Für  $t \in I$  und  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$  ist unter  $\mathcal{C}_{t, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  der **Kreisbogen** des charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  zwischen den Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  (zwischen den Punkten  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, \alpha_1)$  und  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, \alpha_2)$ ) bezüglich der Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  aus Abschnitt 2.3.5 zu verstehen. Er ist durch die Menge

$$\mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} := \{\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha) : \alpha \in [[\alpha_1, \alpha_2]]\}$$

definiert. Für  $\alpha_1 > \alpha_2$  wird mit  $\mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  die Vereinigung  $\mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, 2\pi}^{c,r} \cup \mathcal{C}_{t_0, 0, \alpha_2}^{c,r}$  bezeichnet. Es wird also in jedem Fall der Teil des Kreises mit  $\mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  bezeichnet, der von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$  in positiver Richtung durchlaufen wird. Die Menge

$$\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} := \mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \setminus \{\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_1), \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_2)\} = \{\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha) : \alpha \in ]]\alpha_1, \alpha_2[[\}$$

der Punkte eines Kreisbogens ohne seine Randpunkte wird **offener Kreisbogen** genannt. Als Abkürzungen seien sowohl  $\mathcal{C}_{t_0, Q_1, Q_2}^{c,r} := \mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  als auch  $\mathcal{B}_{t_0, Q_1, Q_2}^{c,r} := \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  für  $Q_1 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_1)$  und  $Q_2 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_2)$  zugelassen.

*Bemerkung 3.15.* Dank der Einführung des zyklischen Intervalls mit Definition 3.14 bezeichnet

$$\mathcal{B}_{t_0, \alpha_2, \alpha_1}^{c,r} = \mathcal{C}_{r_0}^{c,r} \setminus \mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$$

den zu  $\mathcal{C}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  komplementären, offenen Kreisbogen. Außerdem muss ein Kreisbogen, welcher über die 0 bzw. 360 Grad verläuft nicht jedes Mal als Vereinigung zweier Teilkreisbögen definiert werden.

**Definition 3.16** (Nachbarschaft von Schnittpunkten). Es seien

$$S_1 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_1) \in \mathcal{I}_{t_0}^{c,r} \quad \text{und} \quad S_2 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_2) \in \mathcal{I}_{t_0}^{c,r}$$

zwei Punkte des Selbstschnittes der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  bei  $t_0 \in I$  in gegebener Parameterdarstellung mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ . Dann heißen die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  **benachbart auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$** , wenn der offene Kreisbogen  $\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  keinen Punkt des Selbstschnittes der Einhüllenden enthält, also wenn  $\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \cap \mathcal{I}^{c,r} = \emptyset$  gilt. Es ist oft ausreichend, die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  **benachbart** zu nennen, wenn der Rest aus dem Kontext klar wird.

*Bemerkung.* Die so definierte Nachbarschaftsrelation ist weder symmetrisch noch transitiv.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

*Beobachtung.* Ein offener Kreisbogen zwischen benachbarten Schnittpunkten besteht entweder vollständig aus Außen- oder vollständig aus Innenpunkten. Er kann nicht sowohl Außen- als auch Innenpunkte enthalten.

**Lemma 3.17.** *Es seien  $S_1 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_1)$  und  $S_2 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_2)$  benachbarte Punkte auf  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ . Dann besteht der offene Kreisbogen  $\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  entweder*

- *ausschließlich aus inneren Punkten der Kugelschar, es gelten also*

$$\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r} = \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \cap \mathcal{O}^{c,r} = \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r},$$

oder

- *ausschließlich aus äußeren Punkten der Familie  $\mathcal{S}^{c,r}$ , also gelten*

$$\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r} = \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \cap \mathcal{O}^{c,r} = \emptyset.$$

*Beweis.* Angenommen ein offener Kreisbogen  $\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  zwischen benachbarten Schnittpunkten enthalte sowohl Außen- als auch Innenpunkte. Dann sind  $\beta_1, \beta_2 \in ]]\alpha_1, \alpha_2][[$  so wählbar, dass  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_1) \in \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  ein Außenpunkt ist und  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_2) \in \mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r}$  ein Innenpunkt. Zunächst wird der Fall  $\beta_1 < \beta_2$  angenommen.

Nun sei eine Schar von Funktionen

$$d : I \times [0, 4\pi[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (s, \beta) \mapsto f^{\mathcal{S}^{c,r}}(s, \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta))$$

definiert. Die Funktion  $d_{s_0}(\beta) := d(s_0, \beta)$  für ein festes  $s_0 \in I$  ist genau dann kleiner null, wenn der Punkt  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta)$  im Inneren der Kugel  $\mathcal{S}_{s_0}^{c,r}$  liegt. Jede Funktion  $d_s(\beta) := d(s, \beta)$  der Schar ist stetig für alle  $\beta \in [0, 4\pi[$  und genau dann kleiner null, wenn der Punkt  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta)$  des Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  im Inneren der Kugel  $\mathcal{S}_s^{c,r}$  liegt.

Aus der Existenz des Innenpunktes  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_2)$  folgt, dass es ein  $s_2 \in I$  mit  $d_{s_2}(\beta_2) < 0$  gibt. Die Tatsache, dass  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_1)$  ein Außenpunkt ist, impliziert  $d_s(\beta_1) \geq 0$  für alle  $s \in I$ . Die Stetigkeit der Funktionen  $d_s$  ermöglicht die Festlegung

$$\gamma := \max\{\beta : \beta \in [[\beta_1, \beta_2]] \text{ mit } d_s(\beta) \geq 0 \text{ für alle } s \in I\}. \quad (3.15)$$

Dann existieren  $s_\gamma \in I$  und  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $\delta > 0$ , sodass  $d_{s_\gamma}(\gamma) = 0$  und  $d_{s_\gamma}(\gamma + \epsilon) < 0$  für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \epsilon < \delta$ , sonst besteht ein Widerspruch zur Maximalität von  $\gamma$ . Außerdem muss  $s_\gamma \neq t_0$  gelten, denn  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta)$  liegt auf  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  und damit ist  $d_{t_0}(\beta)$  insbesondere für alle  $\beta \in [[\beta_1, \beta_2]]$  gleich null, was analog für  $s_\gamma$  nicht gilt.

Aus  $d_{s_\gamma}(\gamma) = 0$  folgt, dass der Punkt  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \gamma)$  auf der Kugel  $\mathcal{S}_{s_\gamma}^{c,r}$  liegt und weil er nach der Definition von  $\gamma$  ein Außenpunkt der Kugelschar ist, folgt mit Lemma 3.11, dass er Bestandteil des charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_{s_\gamma}^{c,r}$  ist. Damit enthält der offene Kreisbogen  $\mathcal{B}_{t_0, \alpha_1, \alpha_2}^{c,r} \supsetneq \mathcal{C}_{t_0, \beta_1, \beta_2}^{c,r}$  mit  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \gamma) \in \mathcal{C}_{t_0, \beta_1, \beta_2}^{c,r}$  also einen Schnittpunkt des Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  mit  $\mathcal{C}_{s_\gamma}^{c,r}$ , wobei  $s_\gamma \neq t_0$  ist. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_1)$  und  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \alpha_2)$  auf  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  benachbarte Schnittpunkte sind. Die Annahme ist also falsch und somit ist die Aussage für  $\beta_1 < \beta_2$  bewiesen.

Der Beweis des Falles, dass nach der Wahl des Außenpunktes  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_1)$  und des Innenpunktes  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_2)$  die Ungleichung  $\beta_1 > \beta_2$  gilt, verläuft analog. Es muss nur  $\gamma$  nicht als Maximum, sondern als Minimum der angegebenen Menge definiert werden.  $\square$



*Bemerkung.* Anschaulich beschrieben, bewegt man sich solange auf dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  von dem gewählten Außenpunkt  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_1)$  in Richtung des Innenpunktes  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_0, \beta_1)$  weg wie man sich noch nicht im Inneren der Enveloppe befindet. Der so gefundene Punkt liegt dann nicht nur auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ , sondern noch auf einem weiteren und ist somit ein Schnittpunkt der Einhüllenden mit sich selbst.

Für weitere Betrachtungen ist es nicht nur von Bedeutung, ob ein Punkt ein Innen- oder Außenpunkt ist, sondern es ist notwendig zu wissen innerhalb wievieler Teile der Einhüllenden sich der Punkt befindet. Das macht die folgenden Definitionen erforderlich.

**Definition 3.18** (Schlauchstück). Eine zusammenhängende Vereinigung charakteristischer Kreise einer Schar  $\mathcal{C}^{c,r}$  werde als **Schlauchstück** der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  bezeichnet. Für  $t_1 \in I$  und  $t_2 \in I$  mit  $t_1 \leq t_2$  ist

$$\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r} := \{P : P \in \mathcal{C}_t^{c,r} \text{ mit } t \in [t_1, t_2]\} = \bigcup_{t_1 \leq t \leq t_2} \mathcal{C}_t^{c,r}$$

das Schlauchstück der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  von  $t_1$  bis  $t_2$ . Mit

$$\mathcal{U}_{\leq t_2}^{c,r} := \bigcup_{t \leq t_2} \mathcal{C}_t^{c,r} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r} := \bigcup_{t \geq t_1} \mathcal{C}_t^{c,r} \quad \text{für } t \in I$$

seien die **Randschlauchstücke** von der unteren bzw. bis zur oberen Intervallgrenze von  $I$  bezeichnet.

**Definition 3.19** (Umschließendes Schlauchstück). Es sei  $Q \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt im Inneren der Hüllfläche. Ein Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r} \not\ni Q$  heißt **Q umschließend** und wird mit  $\mathcal{U}_{Q, t_0}^{c,r}$  bezeichnet, wenn die Zusatzbedingungen

- $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_1, Q) = 0$ ,
- $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_2, Q) = 0$ ,
- $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) < 0$  für  $t \in ]t_1, t_2[$  und
- $t_0 \in ]t_1, t_2[$

erfüllt sind. Es handelt sich somit um den Teil der Hüllfläche, der zu dem Intervall  $[t_1, t_2]$  des Scharparameters gehört, wobei die Kugeln  $\mathcal{S}_t^{c,r}$  für  $t \in ]t_1, t_2[$  den Punkt  $Q$  zu ihrem Inneren zählen, während  $Q$  auf den Kugeloberflächen  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{S}_{t_2}^{c,r}$  liegt.

Für  $t_0 \in I$  mit  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q) \geq 0$  sei  $\mathcal{U}_{Q, t_0}^{c,r} := \emptyset$  definiert. Es werden auch  $\mathcal{U}_{\leq t_2}^{c,r}$  bzw.  $\mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r}$  zu den  $Q$  umschließenden Schlauchstücken gezählt, wenn  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_2, Q) = 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) < 0$  für alle  $t \in I$  mit  $t < t_2$  bzw. die analogen Bedingungen für  $\mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r}$  gelten.

Ein Innenpunkt kann durchaus von mehreren verschiedenen Schlauchstücken umschlossen werden. Erst das  $t_0$  im Index sorgt als Repräsentant für deren Unterscheidbarkeit und damit, in Verbindung mit Lemma 3.21, auch für die Eindeutigkeit von  $\mathcal{U}_{Q, t_0}^{c,r}$ .

*Bemerkung.* Die folgenden Resultate über Schlauchstücke und Tiefenlevel sind insbesondere auch dann gültig, wenn umschließende Randschlauchstücke  $\mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r}$  bzw.  $\mathcal{U}_{\leq t_2}^{c,r}$  existieren. In den Beweisen werden diese Spezialfälle aber zu Gunsten der Übersichtlichkeit ignoriert.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

**Korollar 3.20.** *Es seien  $Q \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt und  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  ein ihn umschließendes Schlauchstück. Dann sind  $t_1$  und  $t_2$  keine lokalen Extremstellen von  $f_Q^{S^{c, r}}$ .*

*Beweis.* Angenommen  $t_1$  sei eine Extremstelle von  $f_Q^{S^{c, r}}$ , so ist  $(\partial_t f^{S^{c, r}}(t, P))(t_1, Q)$  und damit auch  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q)$  gleich null. Gemeinsam mit der Bedingung  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q) = 0$  für das  $Q$  umschließende Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  ist klar, dass  $Q$  auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_1}^{c, r}$  liegt und somit zu  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  gehört. Das ist in Definition 3.19 für  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  ausgeschlossen. Also kann  $t_1$  keine Extremstelle von  $f_Q^{S^{c, r}}$  sein. Für  $t_2$  gilt das analog auch.  $\square$

**Lemma 3.21.** *Ein  $Q$  umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q, t_q}^{c, r} = \mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  ist maximal. Das bedeutet, dass es kein Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_0, t_3}^{c, r}$  mit  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r} \subsetneq \mathcal{U}_{t_0, t_3}^{c, r}$  gibt, welches  $Q$  umschließt.*

*Beweis.* Gäbe es ein  $Q$  umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_0, t_3}^{c, r} \supsetneq \mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$ , so muss auch  $[t_1, t_2] \subsetneq [t_0, t_3]$  gelten. Es kann ohne Einschränkung  $t_0 < t_1$  angenommen werden, andernfalls trifft die folgende Aussage analog für  $t_2$  und  $t_3$  zu. Dann ist zwangsläufig entweder die Zusatzbedingung  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q) = 0$  des Schlauchstücks  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  oder  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q) < 0$  für  $t_1 \in ]t_0, t_3[$  von  $\mathcal{U}_{t_0, t_3}^{c, r}$  verletzt. Somit kann es also kein  $Q$  umschließendes Schlauchstück geben, welches  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  als echte Teilmenge beinhaltet.  $\square$

**Lemma 3.22.** *Es seien  $Q \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt sowie  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  und  $\mathcal{U}_{t_3, t_4}^{c, r}$  zwei ihn umschließende Schlauchstücke. Dann überschneiden sich die zugehörigen Intervalle nicht, es gilt also  $[t_1, t_2] \cap [t_3, t_4] = \emptyset$ .*

*Beweis.* Es muss  $t_1 \notin ]t_3, t_4[$  gelten, weil sonst entweder die Zusatzbedingung  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q) = 0$  des Schlauchstücks  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c, r}$  oder  $f^{S^{c, r}}(t_1, Q) < 0$  für  $t_1 \in ]t_3, t_4[$  von  $\mathcal{U}_{t_3, t_4}^{c, r}$  verletzt wäre. Analog kann gezeigt werden, dass die übrigen Intervallgrenzen nicht im Inneren des jeweils anderen Intervalls liegen. Damit könnten höchstens noch  $t_2 = t_3$  oder  $t_4 = t_1$  gelten.

Angenommen es gelte  $t_2 = t_3$ . Dann folgen aus den Zusatzbedingungen für die Schlauchstücke insbesondere  $f^{S^{c, r}}(t_2, Q) = 0$  und  $f^{S^{c, r}}(t, Q) < 0$  für  $t \in ]t_1, t_4[ \setminus \{t_2\}$ . Also hat die Funktion  $f_Q^{S^{c, r}}$  bei  $t_2$  ein lokales Maximum, was im Widerspruch zu Korollar 3.20 steht. Somit ist die Annahme falsch und es gilt  $t_2 \neq t_3$ . Analog kann  $t_4 = t_1$  widerlegt werden.  $\square$

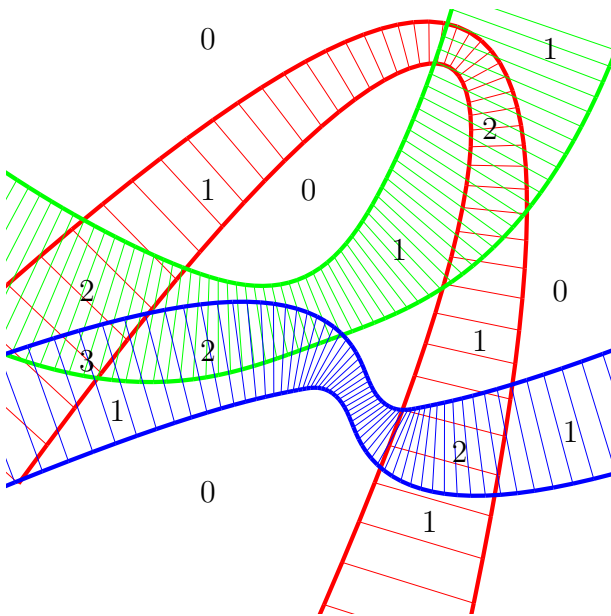
**Definition 3.23** (Tiefenlevel/Tiefenfunktion). Das **Tiefenlevel bezüglich einer Hüllfläche**  $\mathcal{H}^{c, r}$  eines Punktes  $P \in \mathbb{R}^3$  gibt an, wieviele verschiedene umschließende Schlauchstücke für diesen Punkt existieren und wird durch die Funktion

$$\mathfrak{d}^{c, r} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad P \mapsto |\{\mathcal{U}_{P, t}^{c, r} : t \in I\}|$$

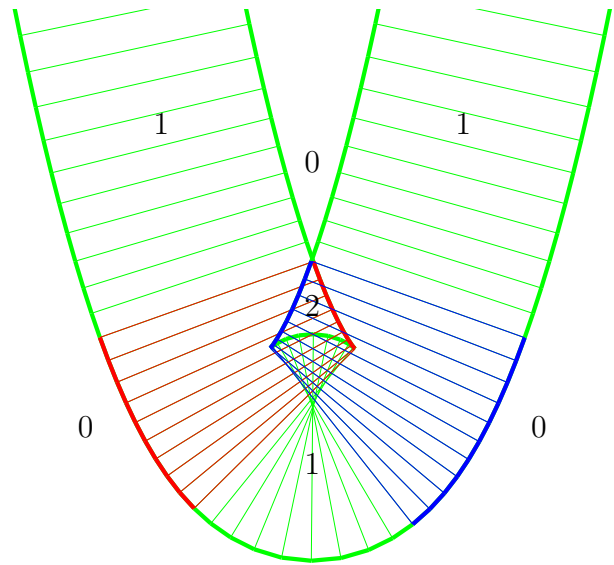
bestimmt, welche auch als **Tiefenfunktion bezüglich der Hüllfläche**  $\mathcal{H}^{c, r}$  bezeichnet wird. Für einen Punkt  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c, r}$  der Enveloppe, der nicht im Inneren einer Kugel der Schar  $\mathcal{S}^{c, r}$  liegt, ist das Tiefenlevel also null, denn alle Schlauchstücke, die  $\mathcal{C}_{t_0}^{c, r}$  enthalten, sind nach Definition 3.19 keine  $Q$  umschließenden Schlauchstücke und werden somit nicht mitgezählt.

**Definition 3.24** (Universelle Hüllfläche). Eine zyklische Enveloppe wird **universell** genannt, wenn es einen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  gibt, sodass  $f_Q^{S^{c, r}}(t)$  für alle  $t \in I$  negativ ist. Dieser Punkt  $Q$  wird dann also von der gesamten Einhüllenden umschlossen (vgl. Abb. 3.7b).

*Bemerkung.* Universelle Hüllflächen zählen bei der Tiefenlevelbestimmung wie zwei normale Schlauchstücke (siehe Abb. 3.7b).

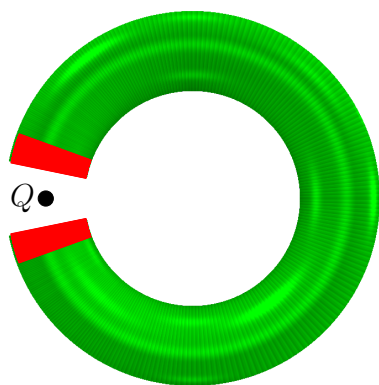


(a) Zusammenhängende Schlauchstücke sind mit der gleichen Farbe gekennzeichnet.

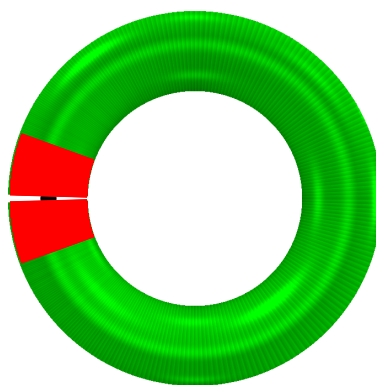


(b) Einhüllende der Kugelschar entlang der Normalparabel mit konstantem Radius  $r \equiv 1.5$  in der Schnittebene  $z = 0$ ; Die beiden verschiedenen Schlauchstücke, welche die Punkte in der Region mit Tiefenlevel 2 umschließen, sind rot und blau markiert.

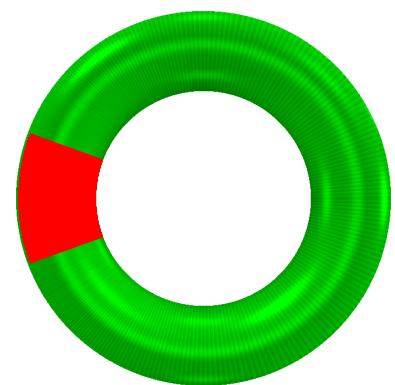
Abbildung 3.5.: Enveloppen von Kugelfamilien, deren Mittenkurven vollständig in der Bildebene liegen; Die Ziffern sind Tiefenlevelangaben und die dünnen Linien die Profile der senkrecht zur Schnittebene verlaufenden charakteristischen Kreise.



(a)  $I = [-10, 10]$



(b)  $I = [-100, 100]$



(c)  $I = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Abbildung 3.6.: Verschmelzung von Randschlauchstücken (rot markiert) am Beispiel des Torus (Beispiel 13)

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

*Konvention 3.25.* Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sämtliche Hüllflächen nicht universell sind, solange dies nicht explizit erwähnt wird.

*Bemerkung 3.26.* Gibt es für zyklische Hüllflächen zwei, einen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  umschließende, Randschlauchstücke  $\mathcal{U}_{\leq t_2}^{c,r}$  und  $\mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r}$ , so verschmelzen diese zu einem einzigen  $\mathcal{U}_{t_2, t_1}^{c,r} := \mathcal{U}_{\leq t_2}^{c,r} \cup \mathcal{U}_{\geq t_1}^{c,r}$  mit  $t_2 > t_1$  und werden auch nur als eins gezählt (vgl. Abb. 3.6c). Auch diese Spezialfälle werden wie die übrigen, die Randschlauchstücke betreffenden, im Folgenden nicht explizit diskutiert.

*Beispiel 13* (Verschmelzung von Randschlauchstücken am Beispiel des Torus). Das wohl einfachste Beispiel für eine solche Verschmelzung von Randschlauchstücken bilden der Einheitskreis in der Ebene  $z = 0$  als Seele mit rationaler Parametrisierung  $c(t) = \left(\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}, 0\right)^T$  und eine konstante Radiusfunktion, beispielsweise  $r(t) \equiv \frac{1}{4}$ , sowie  $I = [-\infty, \infty]$ . Die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist offensichtlich ein Torus. Der Punkt  $Q := (-1, 0, 0)^T$  wird dann von genau einem Schlauchstück, nämlich  $\mathcal{U}_{t_2, t_1}^{c,r}$  mit  $t_1 = -\sqrt{63}$  und  $t_2 = \sqrt{63}$ , umschlossen (siehe Abb. 3.6c). Die Intervallgrenzen lassen sich leicht durch

$$\langle c(t) - Q, c(t) - Q \rangle = \left(\frac{1-t^2}{t^2+1} + 1\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4}{(t^2+1)}$$

und die Bedingung

$$\langle c(t) - Q, c(t) - Q \rangle \leq r^2(t), \quad \text{also} \quad \frac{4}{(t^2+1)} \leq \frac{1}{16}$$

für  $Q \in \mathcal{S}_t^{c,r}$  ermitteln. Durch Umstellung ergibt sich dann  $t^2 \geq 63$ .

#### 3.3.1. Schnitt mit Kurven

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$  stets eine durch  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}$  parametrisierte Kurve ohne Selbstüberschneidungen. Mit  $J \subseteq \mathbb{R}$  sei das Intervall, welches den Definitionsbereich von  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}$  darstellt, bezeichnet. Es werden allgemeine Aussagen über den Schnitt von Kurven mit einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  bewiesen, welche die Änderung des Tiefenlevels der Kurvenpunkte bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$  während man sich entlang der Kurve am Schnittpunkt vorbei bewegt, zum Inhalt haben. Diese Resultate lassen sich dann insbesondere für charakteristische Kreise und Strahlen als spezielle Kurven anwenden und werden vor allem in Kapitel 4 für die Erstellung eines Meshes und das Raycasting benötigt.

*Bemerkung.* Alternativ könnte man die Aussagen auch zunächst nur für Geraden beweisen und dann argumentieren, dass sich jede Kurve stetig auf eine Gerade abbilden lässt und umgekehrt, wodurch die Aussagen ihre Gültigkeit nicht verlieren.

**Definition 3.27** (Zugehöriger Kurvenparameterwert). Es sei  $Q \in \mathcal{W}$  ein Kurvenpunkt. Dann ist der **Q entsprechende Kurvenparameter(-wert)**, die eindeutig bestimmte reelle Zahl  $q \in J$ , welche die Gleichung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q) = Q$  erfüllt. Dieses  $q$  wird auch der **zu Q gehörige Kurvenparameter(-wert)** genannt.

**Definition 3.28** (Ordnung auf der Kurve). Es seien  $P$  und  $Q$  sowie  $R$  Punkte einer Kurve  $\mathcal{W}$ . Es heißt, dass  $P$  auf der Kurve **vor** bzw. **hinter Q** liegt, wenn der  $P$  entsprechende Parameter kleiner bzw. größer ist als der zu  $Q$  gehörige. Der Punkt  $P$  liegt **zwischen Q** und **R**, wenn sein entsprechender Parameterwert zwischen den zu  $P$  und  $Q$  gehörigen ist. Natürlich müssen sich bei solchen Aussagen alle entsprechenden Parameterwerte auf dieselbe Parametrisierung beziehen.

**Notation.** Für einen Kurvenpunkt  $Q \in \mathcal{W}$  mit zugehörigem Parameterwert  $q$  und ein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  beschreibt

$$\mathcal{W}_{Q-\delta} := \{\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q-t) : |\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q-s) - Q| < \delta \text{ für } s \leq t \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}^+ \text{ und } q-t \in J\}$$

eine Menge von Punkten, die auf der Kurve vor  $Q$  liegen und einen Abstand kleiner  $\delta$  zu  $Q$  haben. Analog seien mit

$$\mathcal{W}_{Q+\delta} := \{\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q+t) : |\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q+s) - Q| < \delta \text{ für } s \leq t \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}^+ \text{ und } q+t \in J\}$$

Punkte, welche auf der Kurve hinter  $Q$  liegen und weniger als  $\delta$  von  $Q$  entfernt sind, bezeichnet.

Beide Mengen sind Bildmengen eines jeweils geeigneten Teilintervalls von  $J$  unter  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}$ . Das wird dadurch erreicht, dass per Definition nur Punkte  $P \in \mathcal{W}$  in die Mengen aufgenommen werden, für die auch alle anderen Punkte auf  $\mathcal{W}$  zwischen  $Q$  und  $P$  in der Menge enthalten sind. Somit handelt es sich um Teilkurven von  $\mathcal{W}$ . Der Punkt  $Q$  ist in beiden Mengen enthalten.

Mit  $\mathcal{W}_{Q\pm\delta} := \mathcal{W}_{Q-\delta} \cup \mathcal{W}_{Q+\delta}$  werde die stetige Teilkurve benannt, welche komplett innerhalb der Kugel mit Mittelpunkt  $Q$  und Radius  $\delta$  liegt.

**Lemma 3.29.** *Es seien  $\mathcal{S}^{c,r}$  eine Kugelschar und  $\mathcal{W}$  eine Kurve sowie  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{W}$  zwei Punkte auf dieser Kurve.*

*Sind nun alle Punkte der Kurve zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  Außenpunkte bezüglich  $\mathcal{S}^{c,r}$ , so sind auch  $Q_1$  und  $Q_2$  äußere Punkte der Kugelfamilie.*

*Beweis.* Angenommen es sei  $Q_1$  ein Innenpunkt der Schar  $\mathcal{S}^{c,r}$ , obwohl alle Voraussetzungen aus Lemma 3.29 erfüllt sind. Dann gibt es nach Definition 3.8 ein  $t_1 \in I$ , sodass der Funktionswert  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_1, Q_1)$  negativ ist und der Punkt  $Q_1$  im Inneren der Kugel  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  liegt. Nun sei  $\delta := r(t_1) - |c(t_1) - Q_1|$  der Abstand von  $Q_1$  zur Kugeloberfläche  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$ . Dann liegen natürlich auch alle Punkte  $Q \in \mathcal{W}_{Q_1\pm\delta}$  innerhalb der Kugel  $\mathcal{S}_{t_1}^{c,r}$  und sind somit innere Punkte von  $\mathcal{S}^{c,r}$ . Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass alle Punkte zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  Außenpunkte sind und somit kann  $Q_1$  auch nur ein äußerer Punkt sein. Für  $Q_2$  wird die Aussage analog bewiesen.  $\square$

*Bemerkung.* Durch den Schnitt einer Kurve mit der Menge aller Außenpunkte bezüglich einer Kugelschar entstehen im Allgemeinen mehrere Teilkurven. Die zu maximalen Teilkurven gehörenden Parameterintervalle  $J_i \subset \mathbb{R}$  sind nach Lemma 3.29 abgeschlossen. Unter maximal ist in diesem Fall zu verstehen, dass es kein Intervall  $J_k \supsetneq J_i$  gibt, so dass  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(J_k) \subseteq \mathcal{A}^{c,r}$  auch wieder eine Kurve ist.

*Beobachtung.* Unterscheidet sich das Tiefenlevel zweier Punkte  $Q_1 \in \mathcal{W}$  und  $Q_2 \in \mathcal{W}_{Q\pm\delta}$  bezüglich einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  für ein hinreichend kleines  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , so impliziert das nach Definition 3.23 mindestens einen der folgenden Punkte. Beim Passieren des Kurvenstückes  $\mathcal{W}_{Q\pm\delta}$  von  $Q_1$  nach  $Q_2$

1. zerfällt ein  $Q_1$  umschließendes Schlauchstück in mehrere oder
2. mindestens zwei verschiedene  $Q_1$  umschließende Schlauchstücke verschmelzen zu einem oder
3. ein  $Q_1$  umschließendes Schlauchstück löst sich ganz auf oder
4. es entsteht ein neues  $Q_2$  umschließendes Schlauchstück.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

**Lemma 3.30.** *Es seien  $Q \in \mathcal{W}$  ein Punkt auf einer Kurve  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{U}_{Q,t_0}^{c,r} \neq \emptyset$  ein ihn umschließendes Schlauchstück mit  $\mathcal{U}_{Q,t_0}^{c,r} = \mathcal{U}_{t_1,t_2}^{c,r}$  sowie  $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  beliebig klein.*

*Dann gibt es ein  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass für alle  $Q_\delta \in \mathcal{W}_{Q \pm \delta}$  auch  $\mathcal{U}_{Q_\delta,t_0}^{c,r} = \mathcal{U}_{t_3,t_4}^{c,r} \neq \emptyset$  ein  $Q_\delta$  umschließendes Schlauchstück mit  $\max\{|t_3 - t_1|, |t_4 - t_2|\} \leq \epsilon$  ist.*

*Das heißt im Wesentlichen, dass sich beim Übergang von  $Q$  nach  $Q_\delta$  das umschließende Schlauchstück nur geringfügig ändert und man sich die Intervallgrenzen als stetige Funktion in Abhängigkeit des Kurvenparameters  $s \in J$  von  $\mathcal{W}$  vorstellen kann.*

*Beweis.* Es seien

$$\mu_1 := \min\{|f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_e, Q)| : f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_e, Q) = 0 \text{ und } t_e \in ]t_1, t_2[ \} > 0$$

das Minimum aller Funktionswertbeträge von Extrem- und Wendestellen der Funktion  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}$  im Intervall  $]t_1, t_2[$  sowie

$$\begin{aligned} \epsilon_1 := \min \left( \{|t_1 - t_e| : f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_e, Q) = 0 \text{ und } t_e \in I \setminus \{t_1\}\} \right. \\ \left. \cup \{|t_2 - t_e| : f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_e, Q) = 0 \text{ und } t_e \in I \setminus \{t_2\}\} \right) > 0 \end{aligned}$$

die minimale Entfernung einer Extremstelle von einer Intervallgrenze. Mit

$$\epsilon_2 := \min\{\epsilon, \epsilon_1, |t_0 - t_1|, |t_1 - t_0|\}$$

ist  $\epsilon_2$  zusätzlich kleiner oder gleich  $\epsilon$  und den Abständen von  $t_0$  zu den Intervallgrenzen  $t_1$  sowie  $t_2$ . Weiterhin sei

$$\mu_2 := \min\{|f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_1 - \epsilon_2, Q)|, |f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_1 + \epsilon_2, Q)|, |f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_2 - \epsilon_2, Q)|, |f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_2 + \epsilon_2, Q)|\}$$

das Minimum aller Funktionswertbeträge der um  $\epsilon_2$  in beide Richtungen verschobenen Intervallgrenzen. Mit  $\mu := \min\{\mu_1, \mu_2\}$  gilt  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) \geq \mu$  für alle  $t$  innerhalb des eingeschränkten Intervalls  $[t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$  sowie für  $t_1 - \epsilon_2$  und  $t_2 + \epsilon_2$ .

*Bemerkung.* Sämtliche Minima existieren, weil sie alle über endlichen Mengen definiert sind.

Die Funktion  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}$  ist stetig und somit nach dem Satz von Heine (siehe Lemma A.5) auf dem abgeschlossenen Intervall  $[t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$  gleichmäßig stetig. Durch die gleichmäßige Stetigkeit von  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}$  in diesem Intervall und die punktweise Stetigkeit im Allgemeinen gibt es ein  $\delta_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass

$$|f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) - f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q_{\delta_0})| < \mu$$

für alle  $Q_{\delta_0} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|Q - Q_{\delta_0}| < \delta_0$  und für alle  $t \in [t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2] \cup \{t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon\}$  erfüllt ist. Außerdem existiert auch ein  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass  $|Q - Q_{\delta_1}| < \delta_0$  für  $Q_{\delta_1} \in \mathcal{W}_{Q \pm \delta_1}$  gilt, weil auch  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}$  stetig ist. Insgesamt ist dann

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q_{\delta_1}) &< f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) + |f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) - f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q_{\delta_1})| \\ &< f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) + \mu \leq 0 \end{aligned}$$

für  $t \in [t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$ . Analog erhält man  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_1 - \epsilon_2, Q_{\delta_1}) > 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_2 + \epsilon_2, Q_{\delta_1}) > 0$ . Das heißt, dass die Vorzeichen der Funktionswerte von  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q)$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q_{\delta_1})$  für  $t$  aus dem Intervall  $[t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$  sowie für die um  $\epsilon_2$  nach außen verschobenen Intervallgrenzen gleich sind.

Weil  $t_0$  im Intervall  $[t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$  enthalten ist, gilt insbesondere  $f^{S^{c,r}}(t_0, Q_{\delta_1}) < 0$  und damit existiert das  $Q_{\delta_1}$  umschließende Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q_{\delta_1}, t_0}^{c,r} = \mathcal{U}_{t_3, t_4}^{c,r}$  mit entsprechenden Intervallgrenzen  $t_3$  und  $t_4$ .

Aus  $f^{S^{c,r}}(t, Q_{\delta_1}) < 0$  für  $t \in [t_1 + \epsilon_2, t_2 - \epsilon_2]$  und  $f^{S^{c,r}}(t_1 - \epsilon_2, Q_{\delta_1}) > 0$  folgt dann, dass  $t_3$  im Intervall  $[t_1 - \epsilon_2, t_1 + \epsilon_2]$  liegen muss und damit  $|t_3 - t_1| \leq \epsilon_2 \leq \epsilon$ . Analog gelten auch  $t_4 \in [t_2 - \epsilon_2, t_2 + \epsilon_2]$  und  $|t_4 - t_2| \leq \epsilon$ .  $\square$

**Lemma 3.31.** *Es seien  $Q$  ein Punkt auf einer Kurve  $\mathcal{W}$  und  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta}$  jeweils ein umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q_-, t_{q_-}}^{c,r}$  mit  $t_{q_-} \in I$  existiert, welches beim Übergang nach  $Q$  verschwindet. Dann ist  $Q$  ein Punkt der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$ .*

*Beweis.* Im Folgenden seien  $q_- \in J$  der zu  $Q_-$  gehörige Kurvenparameterwert und  $q \in J$  der entsprechende für  $Q$ . Das Verschwinden von  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r}$  mit  $t_1, t_2 \in I$  kann im Wesentlichen zwei Ursachen haben.

- Zum einen könnte  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r}$  mit einem anderen  $Q_-$  umschließenden Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_3, t_4}^{c,r}$  verschmelzen. Das bedeutet, dass entweder die Intervallgrenzen  $t_2$  und  $t_3$  gegeneinander streben während der Kurvenparameter von  $q_-$  auf  $q$  zustrebt oder es gilt die analoge Aussage für die Intervallgrenzen  $t_4$  und  $t_1$ , falls  $t_4 < t_1$  ist.

Somit ist, je nach Lage der Intervalle zueinander, entweder  $f^{S^{c,r}}(t_2, Q) = 0$  oder  $f^{S^{c,r}}(t_1, Q) = 0$  ein lokales Maximum von  $f_Q^{S^{c,r}}$  und es gilt auch  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_2, Q) = 0$  bzw.  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_1, Q) = 0$ .

- Zum anderen könnten alle Funktionswerte von  $f^{S^{c,r}}(t, \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q_-))$  für  $t \in [t_1, t_2]$  größer oder gleich null werden, falls  $q_- \rightarrow q$ . Durch die Stetigkeit von  $f^{S^{c,r}}$  und die Tatsache, dass für jedes noch so kleine  $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  die Funktionswerte  $f^{S^{c,r}}(t, \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q - \mu))$  für  $t \in ]t_1, t_2[$  kleiner null sind, gilt für das jeweilige Minimum der Funktionswerte dieses Intervalls, welches bei  $t = t_m(\mu)$  liege,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} f^{S^{c,r}}(t_m(\mu), \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(q - \mu)) = 0.$$

Somit ist  $f^{S^{c,r}}(t_m(0), Q) = 0$  ein lokales Minimum von  $f_Q^{S^{c,r}}$  und es gilt auch  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_m, Q) = 0$ .

Also ist  $Q$  nach Definition 2.2 ein Punkt der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Die Intervallgrenzen  $t_1$  und  $t_2$  kann man sich hierbei wieder wie in Lemma 3.30 für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta} \setminus \{Q\}$  als stetige Funktion des Kurvenparameters von  $\mathcal{W}$  denken. Außerdem gilt die Schlussfolgerung natürlich auch, wenn die für  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q+\delta}$  analoge Voraussetzung gegeben ist.

**Definition 3.32** (Nachbarschaft von Schnittpunkten). Es seien  $\mathcal{W}$  eine Kurve sowie  $S_1 = \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(s_1) \in \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{W}$  und  $S_2 = \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(s_2) \in \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{W}$  zwei verschiedene Schnittpunkte der Kurve mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ , wobei  $s_1$  und  $s_2$  die entsprechenden Kurvenparameter aus  $\mathbb{R}^+$  mit  $s_1 < s_2$  sind. Dann heißen die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  **benachbart auf der Kurve  $\mathcal{W}$  bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$** , wenn das Kurvenstück zwischen  $S_1$  und  $S_2$  keine weiteren Punkte der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  enthält, falls also

$$\{\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(s) : s \in ]s_1, s_2[ \} \cap \mathcal{H}^{c,r} = \emptyset$$

gilt. Auch hier genügt es, die Punkte  $S_1$  und  $S_2$  **benachbart** zu nennen, wenn der Rest aus dem Kontext geschlossen werden kann.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

*Bemerkung.* Definition 3.32 ist eine Verallgemeinerung von Definition 3.16 für Kurven.

**Satz 3.33** (Leveländerung). *Alle Punkte zwischen benachbarten Schnittpunkten einer Kurve  $\mathcal{W}$  mit einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  haben das gleiche Tiefenlevel bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$ . Es gilt also*

$$\mathfrak{d}^{c,r}(\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(s_x)) = \mathfrak{d}^{c,r}(\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(s_y)) \quad \text{für } s_x, s_y \in ]s_1, s_2[,$$

wobei  $s_1$  und  $s_2$  die entsprechenden Kurvenparameterwerte zweier benachbarter Schnittpunkte von  $\mathcal{W}$  mit  $\mathcal{H}^{c,r}$  sind.

*Beweis.* Angenommen es gäbe auf der Kurve  $\mathcal{W}$  zwischen benachbarten Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  von  $\mathcal{W}$  mit  $\mathcal{H}^{c,r}$  zwei Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  unterschiedlichen Tiefenlevels. Dann gibt es einen Punkt  $Q \in \mathcal{W}$  auf der Kurve zwischen  $S_1$  und  $S_2$  sowie ein  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass entweder

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q) \neq \mathfrak{d}^{c,r}(Q_-) \quad \text{für alle } Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta_1} \quad (3.16)$$

oder

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q) \neq \mathfrak{d}^{c,r}(Q_+) \quad \text{für alle } Q_+ \in \mathcal{W}_{Q+\delta_1}$$

gilt. Ohne Einschränkung gelte die Aussage 3.16, der andere Fall ist analog.

Der minimale Abstand zweier Intervalle, die zu  $Q$  umschließenden Schlauchstücken gehören sei mit

$$\mu := \min\{|t_i - t_j| : \text{es gibt } t_k, t_l \in I, \text{ sodass } \mathcal{U}_{t_k, t_i}^{c,r} \text{ und } \mathcal{U}_{t_j, t_l}^{c,r} \text{ } Q \text{ umschließen}\}$$

bezeichnet. Nach Lemma 3.30 gibt es für jedes  $Q$  umschließende Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_i, t_j}^{c,r}$  ein  $\delta_{ij} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  mit  $\delta_{ij} < \delta_1$ , sodass für  $Q_{\pm} \in \mathcal{W}_{Q \pm \delta_{ij}}$  ein Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_k, t_l}^{c,r}$  mit  $|t_i - t_k| \leq \frac{1}{3}\mu$  und  $|t_j - t_l| \leq \frac{1}{3}\mu$  umschließend ist. Es sei  $\delta$  das Minimum aller  $\delta_{ij}$ . Damit ist der Abstand zwischen Intervallgrenzen von verschiedenen  $Q_{\pm} \in \mathcal{W}_{Q \pm \delta}$  umschließenden Schlauchstücken immer noch größer oder gleich  $\frac{1}{3}\mu$ . Somit können diese Schlauchstücke auch nicht zusammenfallen und es gibt für jedes solche Schlauchstück von  $Q$  genau ein entsprechendes für  $Q_{\pm}$ . Deshalb ist das Tiefenlevel von  $Q_{\pm}$  mindestens genauso groß wie das von  $Q$  und weil natürlich die Aussage 3.16 insbesondere auch für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta} \subset \mathcal{W}_{Q-\delta_1}$  gilt, muss es dann dafür größer sein. Also gibt es mindestens ein  $Q_-$  umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q_-, t_q}^{c,r}$  mit geeignetem  $t_q \in I$ , welches beim Übergang entlang der Kurve nach  $Q$  vollständig verschwindet. Nach Lemma 3.31 gehört dann aber  $Q$  zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ , was der Voraussetzung, dass  $S_1$  und  $S_2$  benachbarte Schnittpunkte auf  $\mathcal{W}$  bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$  sind, widerspricht. Also ist die Annahme falsch und somit die Aussage bewiesen.  $\square$

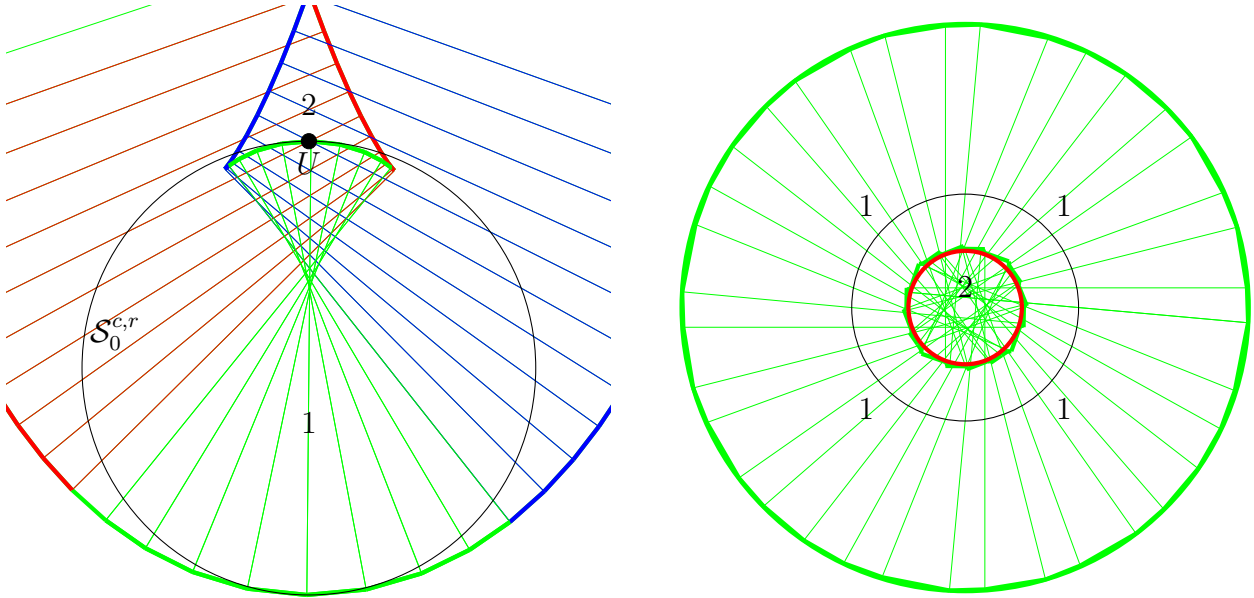
Satz 3.33 sagt aus, dass sich das Tiefenlevel der Punkte entlang einer Kurve  $\mathcal{W}$  bezüglich einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  nur bei den Schnittpunkten von  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{H}^{c,r}$  ändert. Das rechtfertigt die folgende Definition.

**Definition 3.34** (Eintritt/Austritt). Der Schnittpunkt  $Q$  einer Kurve  $\mathcal{W}$  mit einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  werde als **Eintrittspunkt** der Kurve in  $\mathcal{H}^{c,r}$  bezeichnet, wenn sich das Tiefenlevel der Punkte auf  $\mathcal{W}$  beim Passieren von  $Q$  erhöht. Verringert es sich, wird  $Q$  **Austrittspunkt** genannt. Das heißt, dass es ein  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  gibt, sodass

- im Falle eines Eintritts durch Punkt  $Q$

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q_-) < \mathfrak{d}^{c,r}(Q_+)$$





(a) Ausschnitt aus Abb. 3.5b; Wird die Kugel  $\mathcal{S}_0^{c,r}$  über den Umkehrpunkt  $U$  verlassen, erhöht sich das Tiefenlevel von 1 auf 2.

(b) Die Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$ , welche durch eine Kugelschar entlang des Einheitskreises (schwarz) mit konstanter Radiusfunktion  $r \equiv 1.5$  entsteht, ist universell. Aus diesem Grund sind die Punkte auf dem roten Kreis keine Umkehrpunkte. Alle Punkte innerhalb des rot gekennzeichneten Bereiches liegen im Inneren einer jeden Kugel der Schar  $\mathcal{S}^{c,r}$ .

Abbildung 3.7.: Veranschaulichung von Umkehrpunkten nach Definition 3.35 anhand zweier Beispiele

- bzw. für den Fall des Austritts bei  $Q$

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q_-) > \mathfrak{d}^{c,r}(Q_+)$$

für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta} \setminus \{Q\}$  und für alle  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q+\delta} \setminus \{Q\}$  gilt. Der Punkt  $Q$  kann auch verkürzend einfach als **Eintritt** bzw. **Austritt** bezeichnet werden.

**Definition 3.35** (Umkehrpunkt). Es sei  $Q \in \mathcal{H}^{c,r}$  ein Punkt einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  und  $t_0 \in I$  mit  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ . Gilt zusätzlich  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) > 0$ , ist  $Q$  ein **Umkehrpunkt von  $\mathcal{H}^{c,r}$** .

*Bemerkung.* Falls ein lokaler Schnitt  $\mathcal{L}_t^{c,r}$  bei  $t$  existiert, schneidet die Ebene  $\mathcal{G}_t^{c,r}$  den Kreis  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  und unterteilt ihn im Allgemeinen in zwei Teile, die in unterschiedlichen, durch diese Ebene definierten Halbräumen liegen. Alle Punkte des einen Teiles sind Umkehrpunkte (siehe Abb. 3.1a).

**Satz 3.36.** *Es seien  $Q \in (\mathcal{H}^{c,r} \setminus \mathcal{I}^{c,r}) \cap \mathcal{W}$  ein Schnittpunkt einer Kurve  $\mathcal{W}$  mit einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$ , welcher nicht zu deren Selbstschnitt gehört sowie  $t_0 \in I$  mit  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$ .*

*Unter der Voraussetzung, dass  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) < 0$  gilt, ist  $Q$  genau dann ein Eintritt bzw. Austritt, wenn die Kurve  $\mathcal{W}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  hineingeht bzw. diese verlässt. Ist  $Q$  ein Umkehrpunkt von  $\mathcal{H}^{c,r}$ , kehrt sich dieses Kriterium um (vgl. Abb. 3.7).*

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

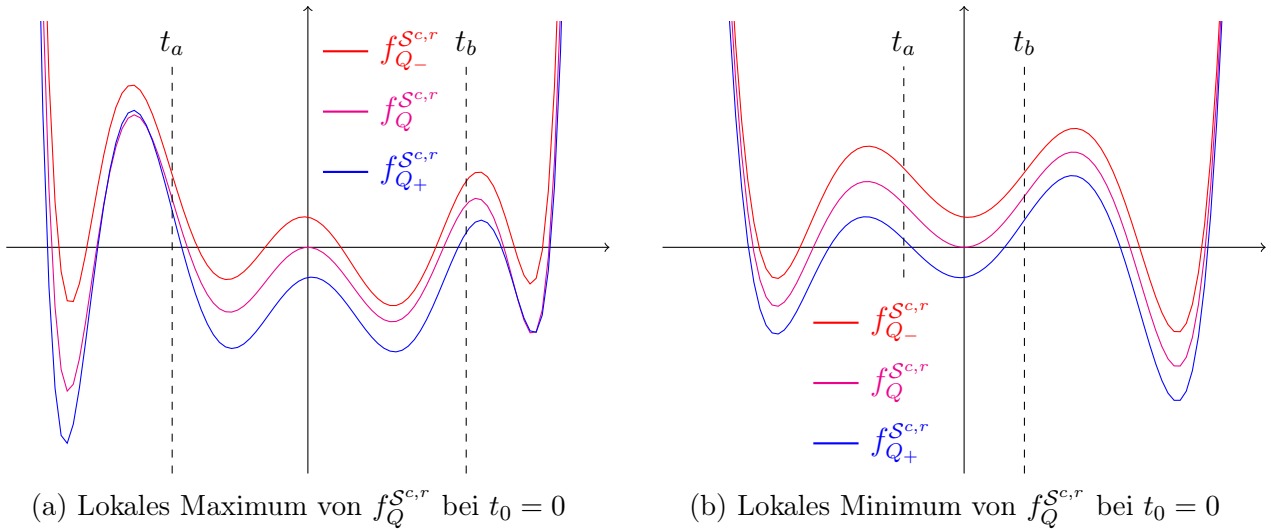


Abbildung 3.8.: Funktionsgraphen von  $f_P^{S^{c,r}}(t)$  für  $P$  gleich  $Q$  sowie Punkte auf der Kurve  $\mathcal{W}$  kurz vor und hinter  $Q$ ; Die Kurve  $\mathcal{W}$  tritt bei  $Q$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  ein. Links ist  $Q$  ein Umkehrpunkt, rechts nicht.

*Beweis.* Um die Gültigkeit der Aussage zu zeigen, wird die Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  in drei Teile unterteilt. Das geschieht durch die Unterteilung des Intervalls  $I$  für den Scharparameter. Dazu werden noch  $t_a$  und  $t_b$  aus  $I$  falls möglich so gewählt, dass  $f^{S^{c,r}}(t_a, Q) > 0$  bzw.  $f^{S^{c,r}}(t_b, Q) > 0$  gilt, während im Intervall  $[t_a, t_0[$  bzw.  $]t_0, t_b]$  so wenig Nullstellen von  $f_Q^{S^{c,r}}$  liegen wie möglich (siehe Abb. 3.8). Wird nur  $t_a$  oder nur  $t_b$  bzw. keins von beiden festgelegt, so wird die Hüllfläche auch nur in zwei Teile bzw. gar nicht unterteilt.

Nach Definition 3.23 ist klar, dass das Tiefenlevel  $\mathfrak{d}^{c,r}(P)$  für alle  $P \in \mathbb{R}^3$  die Summe der Tiefenlevel von  $P$  bezüglich der drei Hüllflächenteile mit den entsprechenden Intervallen

$$I_1 := \{t : t \in I \text{ und } t < t_a\}, \quad I_2 := [t_a, t_b], \quad I_3 := \{t : t \in I \text{ und } t > t_b\}$$

der Scharparameter ist.

Nun wähle man  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  so, dass  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  der einzige Schnittpunkt des Kurvenstücks  $\mathcal{W}_{Q \pm \delta}$  mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist. Da  $t_0$  weder in  $I_1$  noch in  $I_3$  liegt, schneidet das Kurvenstück die zu diesen Intervallen gehörenden Teile der Einhüllenden nicht. Deshalb kann Satz 3.33 darauf angewendet werden und somit ist klar, dass die Tiefenlevel bezüglich dieser beiden Hüllflächenteile für alle  $Q_\delta \in \mathcal{W}_{Q \pm \delta}$  gleich sind. Somit muss nur noch das Intervall  $I_2$  genauer betrachtet werden.

Es sei

$$\mu := \min\{|t_i - t_j| : t_i, t_j \in I \text{ mit } f^{S^{c,r}}(t_i, Q) = 0 = f^{S^{c,r}}(t_j, Q) \text{ und } t_i \neq t_j\}$$

der minimale Abstand von je zwei verschiedenen Nullstellen der Funktion  $f_Q^{S^{c,r}}$  zueinander. Weil  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  liegt, gelten sowohl

- $f^{S^{c,r}}(t_0, Q) = 0$  als auch
- $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, Q) = 0$ .

Nun wird eine Fallunterscheidung vorgenommen.

- Es sei  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) < 0$ .

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(\partial_t \partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P))(t_0, Q) = -2f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) > 0$$

und damit hat  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t) := f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q)$ , betrachtet als Funktion von  $t$ , bei  $t = t_0$  ein lokales Minimum mit Funktionswert 0. Nun seien  $t_a := t_0 - \frac{1}{3}\mu$  und  $t_b := t_0 + \frac{1}{3}\mu$  definiert. Mit der Definition von  $\mu$  folgen  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_a, Q) > 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_b, Q) > 0$ .

Falls  $\mathcal{W}_{Q_{\pm\delta}}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  hineingeht (vgl. Abb. 3.8b), gibt es ein  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass  $\mathcal{U}_{Q_+, t_0}^{c,r} = \mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r}$  für alle  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q_+\delta_1} \setminus \{Q\}$  ein  $Q_+$  umschließendes Schlauchstück mit  $t_1$  und  $t_2$  aus  $I_2$  ist. Für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q_-\delta_1} \setminus \{Q\}$  und alle  $t \in I_2$  ist  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q_-) > 0$ . Das heißt, dass sich das Tiefenlevel für diesen Hüllflächenteil und somit auch für die gesamte Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  beim Eintritt der Kurve  $\mathcal{W}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  um eins erhöht und beim Austritt verringert. Damit ist der erste Teil der Aussage bewiesen.

- Es sei  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(t_0, Q) > 0$ , also ist  $Q$  ein Umkehrpunkt.

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$(\partial_t \partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P))(t_0, Q) < 0$$

und somit hat  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$  bei  $t = t_0$  ein lokales Maximum mit Funktionswert 0. Falls noch Nullstellen von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  existieren, die kleiner sind als  $t_0$ , seien

$$t_1 := \max\{t : t \in I \text{ mit } t < t_0 \text{ und } f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) = 0\}$$

die größte Nullstelle von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$ , welche noch kleiner  $t_0$  ist, und  $t_a := t_1 - \frac{1}{3}\mu$  definiert. Analog wird, falls existent, mit

$$t_2 := \min\{t : t \in I \text{ mit } t > t_0 \text{ und } f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q) = 0\}$$

die kleinste Nullstelle von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$ , welche noch größer  $t_0$  ist, bezeichnet und  $t_b := t_2 + \frac{1}{3}\mu$  festgelegt. Auch hier gelten wieder  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_a, Q) > 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_b, Q) > 0$  nach Definition von  $\mu$  und weil es außer bei  $t_0$  kein lokales Extremum mit Funktionswert null von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  gibt.

Für den Fall, dass  $\mathcal{W}_{Q_{\pm\delta}}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  hineingeht (siehe Abb. 3.8a), gibt es ein  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass  $\mathcal{U}_{Q_+, t_0}^{c,r} = \mathcal{U}_{t_3, t_4}^{c,r}$  für alle  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q_+\delta_1} \setminus \{Q\}$  ein  $Q_+$  umschließendes Schlauchstück mit  $|t_1 - t_3| < \epsilon$  und  $|t_2 - t_4| < \epsilon$  ist. Hierbei ist  $\epsilon$  eine positive, reelle Zahl, die von  $\delta_1$  abhängt und nach Lemma 3.30 mit sinkendem  $\delta_1$  beliebig klein sein kann. Für alle  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q_-\delta_1} \setminus \{Q\}$  gibt es zwei umschließende Schlauchstücke  $\mathcal{U}_{t_5, t_6}^{c,r}$  und  $\mathcal{U}_{t_7, t_8}^{c,r}$  mit  $|t_5 - t_1| < \epsilon$  und  $|t_6 - t_0| < \epsilon$  sowie  $|t_7 - t_0| < \epsilon$  und  $|t_8 - t_2| < \epsilon$ . Wählt man  $\delta_1$  klein genug, sodass  $\epsilon < \frac{1}{3}\mu$  gilt, können die Schlauchstücke  $\mathcal{U}_{t_5, t_6}^{c,r}$  und  $\mathcal{U}_{t_7, t_8}^{c,r}$  beim Übergang von  $Q_-$  nach  $Q_+$  nicht mit anderen, sondern nur miteinander verschmelzen. Das heißt, dass sich das Tiefenlevel für diesen Hüllflächenteil und somit auch für die gesamte Einhüllende  $\mathcal{H}^{c,r}$  beim Eintritt der Kurve  $\mathcal{W}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  um eins verringert und beim Austritt erhöht. Beim Austritt zerfällt im Prinzip ein  $Q$  umschließendes Schlauchstück in zwei verschiedene.

*Bemerkung.* Das Tiefenlevel von  $Q$  bezüglich des Einhüllendenteils mit Scharparameter-Intervall  $I_2$  ist übrigens null, da laut Definition 3.19 weder das Schlauchstück  $\mathcal{U}_{t_1, t_0}^{c,r}$  noch  $\mathcal{U}_{t_0, t_2}^{c,r}$  umschließend für  $Q$  ist.

### 3. Schnitt und Selbstschnitt der Enveloppen von Kugelfamilien

□

*Bemerkung.* Eine Kurve  $\mathcal{W}$  geht bei  $Q \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  hinein, wenn  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q_-) > 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q_+) < 0$  für ein  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta} \setminus \{Q\}$  und ein  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q+\delta} \setminus \{Q\}$  gelten. Hierbei muss  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  nur kleiner oder gleich dem geringsten Abstand zwischen  $Q$  und allen weiteren Schnittpunkten von  $\mathcal{W}$  mit  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  sein. Gibt es außer  $Q$  keine weiteren Schnittpunkte, so ist  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  beliebig wählbar, solange der Parameterraum der Kurve nicht verlassen wird. Für  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q_-) < 0$  und  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t_0, Q_+) > 0$  verlässt  $\mathcal{W}$  die Kugel bei  $Q$ . Haben beide Funktionswerte das gleiche Vorzeichen, so handelt es sich nur um einen Berührungspunkt von Kurve und Kugel.

**Korollar 3.37.** *Es sei  $Q \in (\mathcal{H}^{c,r} \setminus \mathcal{I}^{c,r}) \cap \mathcal{W}$  wie in Satz 3.36.*

*Dann beträgt der Unterschied des Tiefenlevels von  $Q_- \in \mathcal{W}_{Q-\delta} \setminus \{Q\}$  und  $Q_+ \in \mathcal{W}_{Q+\delta} \setminus \{Q\}$  genau eins. Das heißt, falls es sich bei  $Q$  um einen Eintritt handelt, wird die Gleichung*

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q_+) = \mathfrak{d}^{c,r}(Q_-) + 1,$$

*erfüllt und im Falle eines Austritts gilt*

$$\mathfrak{d}^{c,r}(Q_+) = \mathfrak{d}^{c,r}(Q_-) - 1.$$

*Hierbei sei  $\delta$  wie im Beweis von Satz 3.36 gewählt. Ist  $Q$  weder ein Ein- noch ein Austritt, also ein Berührungspunkt, so gilt die Gleichheit der Tiefenlevel von  $Q_-$  und  $Q_+$ .*

**Korollar 3.38.** *Es sei  $S \in (\mathcal{H}^{c,r} \setminus \mathcal{L}^{c,r}) \cap \mathcal{W}$  ein Schnittpunkt einer Kurve  $\mathcal{W}$  mit einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  und  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  hinreichend klein, sodass auf dem Kurvenstück  $\mathcal{W}_{Q \pm \delta}$  außer  $S$  kein weiterer Punkt der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  liegt.*

*Dann gilt für die Änderung des Tiefenlevels beim Passieren von  $S$  entlang der Kurve*

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}^{c,r}(S_+) &= \mathfrak{d}^{c,r}(S_-) + |\{t_j \in I : \mathcal{W} \text{ tritt bei } t_j \text{ in } \mathcal{H}^{c,r} \text{ ein}\}| \\ &\quad - |\{t_k \in I : \mathcal{W} \text{ tritt bei } t_k \text{ aus } \mathcal{H}^{c,r} \text{ aus}\}|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

*Beweis.* Für jeden Punkt  $Q \in \mathcal{H}^{c,r} \setminus \mathcal{I}^{c,r}$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $t_0 \in I$ , so dass  $Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r} \subset \mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  und damit auch auf der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  liegt. Alle Punkte  $S \in \mathcal{I}^{c,r} \setminus \mathcal{L}^{c,r}$ , die zum Selbstschnitt aber nicht zum lokalen Selbstschnitt der Hüllfläche gehören, liegen auf mindestens zwei verschiedenen charakteristischen Kreisen.

Diese Punkte des Selbstschnittes werden formal in so viele Punkte  $S_{t_i}$  unterteilt, wie es verschiedene charakteristische Kreise  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r} \ni S$  gibt, die  $S$  enthalten. Dabei sei  $n$  die Anzahl solcher Kreise und  $i \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq i \leq n - 1$ . Natürlich haben alle Punkte  $S_{t_i}$  die gleichen Koordinaten wie  $S$ . Die Punkte, die nicht zum Selbstschnitt gehören, können ebenfalls mit dem für sie eindeutig bestimmten Scharparameterwert  $t$  indiziert werden. Ein Punkt  $S \in \mathcal{I}^{c,r} \cap \mathcal{W}$  kann dann sowohl aus Eintrittspunkten  $S_{t_j}$  als auch aus Austrittspunkten  $S_{t_k}$ , für natürliche Zahlen  $j$  und  $k$  zwischen eins und  $n$ , bestehen. Die eindeutige Festlegung, ob es sich um einen Ein- oder Austritt handelt, kann für die Punkte des Selbstschnittes  $\mathcal{I}^{c,r}$  einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  also lokal in Abhängigkeit einer bestimmten Umgebung von  $t_i$  und somit für  $S_{t_i}$  getroffen werden. Die Änderung des Tiefenlevels beim Passieren eines solchen Punktes entspricht der Summe der Änderungen über all seine Teilpunkte und somit gilt

$$\mathfrak{d}^{c,r}(S_+) = \mathfrak{d}^{c,r}(S_-) + |\{j : S_{t_j} \text{ ist Eintritt}\}| - |\{k : S_{t_k} \text{ ist Austritt}\}|,$$

was schon äquivalent zu der Aussage aus Korollar 3.38 ist.

□

## 4. Kanalflächen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Kanalflächen und deren Visualisierung. Wie in Abschnitt 3.2 werden sowohl die Komponenten der Mittenkurve als auch die Radiusfunktion auf rationale Funktionen beschränkt, welche die Ungleichung 2.20 für alle  $t \in I$  erfüllen. Es werden zwei verschiedene Ansätze zur Visualisierung dieser Flächen vorgestellt.

Der eine basiert auf der Idee nur die Teile der charakteristischen Kreise darzustellen, die zum Äußeren der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehören. Hierfür werden die Kreise  $\mathcal{C}_t^{c,r}$  an ihren Schnittpunkten mit der übrigen Enveloppe in verschiedene Segmente unterteilt. Von diesen Segmenten werden nur die, die nicht zum Inneren der Hüllfläche gehören, geeignet miteinander verbunden.

Der zweite Ansatz ist eine Visualisierung mittels eines Raycasting-Verfahrens. Hierzu werden für jedes Pixel des zu erstellenden Bildes alle Schnittpunkte eines sogenannten Augstrahles mit der Einhüllenden berechnet. Dabei werden ausschließlich die Schnittpunkte des Strahles mit der Hüllfläche, welche zu einer Außenwand der Enveloppe gehören, für die Farbberechnung genutzt.

Zunächst soll jedoch erst einmal der Unterschied zwischen einer Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  nach Definition 2.2 und dem, was hier unter einer Kanalfläche verstanden wird, erläutert werden.

### 4.1. Abgrenzung von bzw. Bezug zu Enveloppen

In der Literatur existieren verschiedene, sich widersprechende Definitionen von Kanalflächen. Häufig werden Kanalflächen als Enveloppen von Kugelscharen mit veränderlichem Radius entlang einer Mittenkurve aufgefasst (vgl. [Özt+10; DZ08; Kra07; LSW01; PP97; Mül99]).

In dieser Arbeit wird jedoch die folgende Definition, welche dem Verständnis einer Kanalfläche in [Blu11] entspricht, zu Grunde gelegt.

**Definition 4.1** (Kanalfläche). Eine **Kanalfläche**

$$\mathcal{K}^{c,r} := \left( \bigcup \mathcal{S}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r} \right) \setminus (\mathcal{V}^{c,r} \setminus \mathcal{H}^{c,r})$$

besteht aus allen Außenpunkten der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$  abzüglich der Verschlusspunkte, die nicht zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehören.

*Bemerkung.* Im Unterschied zu Definition 4.1 haben die eingehüllten Kugeln in [Blu11] alle den gleichen Radius. Ist die Radiusfunktion der Kugelschar konstant, wird sonst meist von Röhrenflächen (pipe surfaces) gesprochen (vgl. [DZ08; LSW01; PP97; Mül99]).

**Lemma 4.2.** *Eine Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  ist die Schnittmenge der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit der Menge der Außenpunkte  $\mathcal{A}^{c,r}$  der zu Grunde liegenden Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ , das heißt*

$$\mathcal{K}^{c,r} = \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}.$$

*Ein Punkt gehört also genau dann zu einer Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$ , wenn er sowohl ein äußerer Punkt der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  ist als auch zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehört.*

#### 4. Kanalflächen

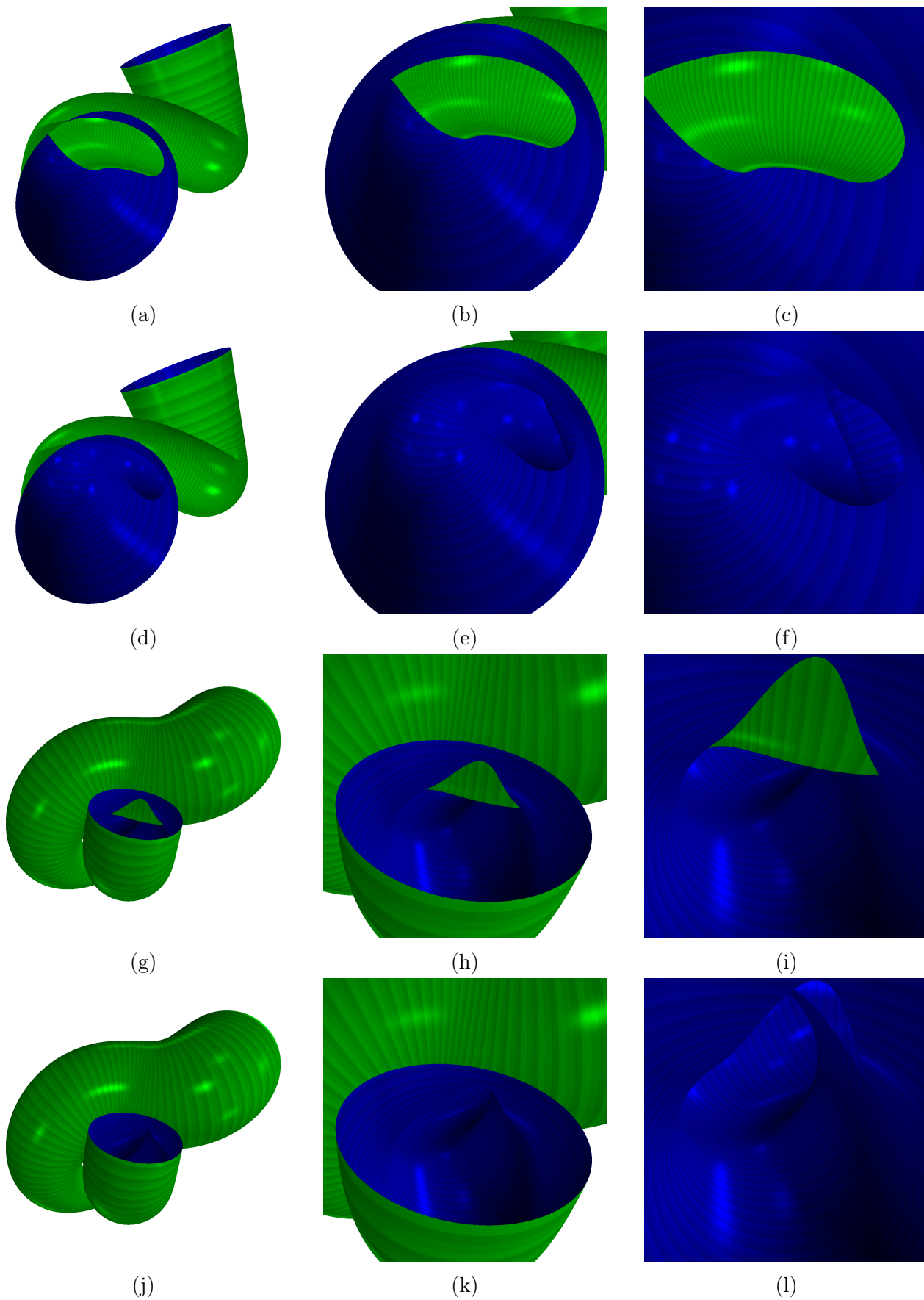
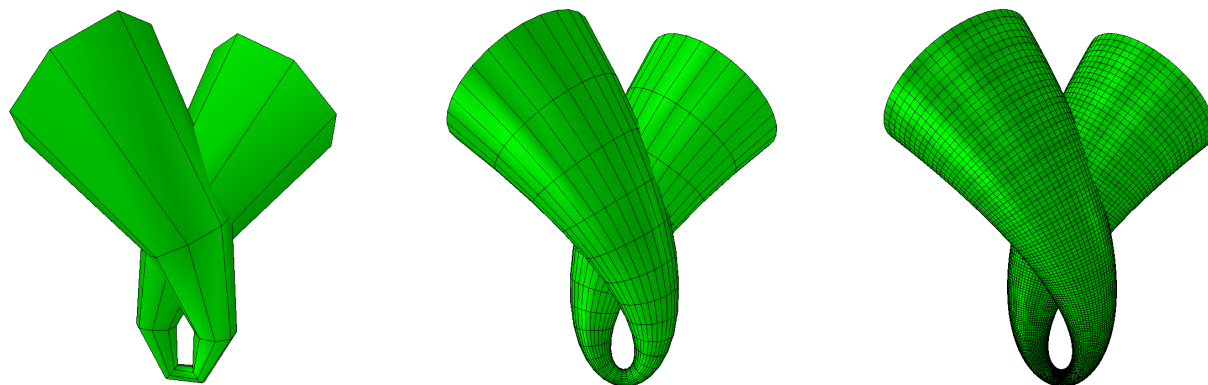


Abbildung 4.1.: Unterschied von Kanalfläche zur Einhüllenden an zwei Beispielen; In der jeweils ersten Reihe ist die Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  aus verschiedenen Perspektiven dargestellt, in der zweiten die Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$ .



(a) Parameterschrittweite 0.4 und 8 Punkte pro Kreis      (b) Parameterschrittweite 0.1 und 32 Kreispunkte      (c) Parameterschrittweite 0.01 und 64 Kreispunkte

Abbildung 4.2.: Darstellung einer Fläche durch ein polygonales Netz mit wachsender Feineinteilung

*Beweis.* Nach Definition 4.1 ist jeder Punkt  $Q \in \mathcal{K}^{c,r}$  einer Kanalfläche ein Punkt der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ , welcher zugleich ein Außenpunkt dieser Kugelfamilie ist. Mit Lemma 3.11 ist klar, dass  $Q$  zur Familie  $\mathcal{C}^{c,r}$  der charakteristischen Kreise und damit auch zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehört oder ein Verschlusspunkt ist. Doch weil der Punkt  $Q$  nach Definition 4.1 nicht aus  $\mathcal{V}^{c,r} \setminus \mathcal{H}^{c,r}$  sein kann, ist er Bestandteil des Schnittes der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit der Menge der Außenpunkte von  $\mathcal{S}^{c,r}$ . Also gilt  $Q \in \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}$  und da  $Q \in \mathcal{K}^{c,r}$  beliebig war, folgt  $\mathcal{K}^{c,r} \subseteq \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}$ .

Es sei nun  $Q \in \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}$  ein Außenpunkt der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ , welcher gleichzeitig auch zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehört. Dann gibt es ein  $t_0 \in I$ , sodass

$$Q \in \mathcal{C}_{t_0}^{c,r} \subseteq \mathcal{S}_{t_0}^{c,r} \subseteq \bigcup \mathcal{S}^{c,r}$$

gilt. Damit ist  $Q \in \bigcup \mathcal{S}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}$  und weil  $Q$  auf der Enveloppe liegt, folgt  $Q \notin \mathcal{V}^{c,r} \setminus \mathcal{H}^{c,r}$ . Somit gehört der Punkt  $Q$  nach Definition 4.1 zur Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$ .

Insgesamt ist dann die Behauptung bewiesen.  $\square$

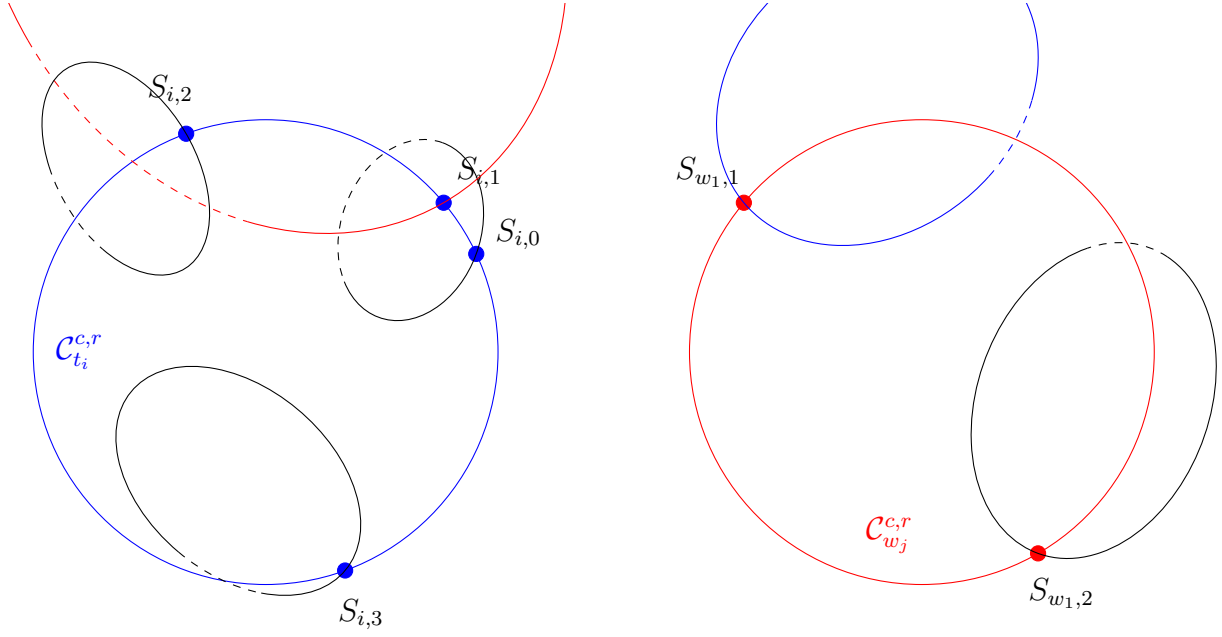
Das Resultat aus Lemma 4.2 kann für die Visualisierung einer Kanalfläche genutzt werden, indem für jeden charakteristischen Kreis nur die Außenpunkte dargestellt werden.

## 4.2. Polygonales Netz

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie für eine Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  ein polygonales Netz, auch Mesh genannt, erstellt werden kann. Solche Netze sind in der Computergrafik ein grundlegendes Hilfsmittel zur Darstellung von Flächen jeder Art. Die Fläche wird dabei durch eine Menge von Polygonen approximiert, schließlich lassen sich runde Formen bzw. stetige Verläufe von Flächen nicht exakt durch Polygone repräsentieren. Die Abweichungen von der angestrebten Fläche werden natürlich immer kleiner je feiner die Unterteilung des Meshes ist (siehe Abb. 4.2). Bei einer ausreichend guten Unterteilung sind die Unterschiede zu der angenäherten Fläche nicht mehr sichtbar. Für weitere, allgemeine Informationen zu Meshes sei auf [Wat95, S. 24 ff.] verwiesen.



#### 4. Kanalfächen



(a) Ein Kreis  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit Schnittpunkten  $S_{i,j} \in \mathcal{I}_{t_i}^{c,r}$  und den zugehörigen Kreisen  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  für  $j \in \{0, \dots, |\mathcal{I}_{t_i}^{c,r}| - 1\}$  und  $|\mathcal{I}_{t_i}^{c,r}| = 4$

(b) Hier ist der zum Schnittpunkt  $S_{i,1}$  gehörende charakteristische Kreis  $\mathcal{C}_{w_1}^{c,r}$  aus der benachbarten Abbildung mit seinen Schnittpunkten skizziert.

Abbildung 4.3.: Projektion der Schnittsituation zweier Kreise  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  im Punkt  $S_{i,1} = S_{w_1,0}$  in die entsprechenden Kreisebenen

Für die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  wäre die Approximation durch ein Mesh dank der Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, \alpha)$  aus Abschnitt 2.3.5 kein Problem. Hierfür würde man die Intervalle für die beiden Parameter hinreichend oft unterteilen und somit  $n$  bzw.  $m$  verschiedene Parameterwerte  $t_0, \dots, t_{n-1} \in I$  und  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in [0, 2\pi]$  in jeweils aufsteigender Reihenfolge erhalten. Die Menge der  $n$  Parameterwerte für  $t$  sei mit  $T_n := \{t_0, \dots, t_{n-1}\}$  bezeichnet. Die  $n \cdot m$  Punkte  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_j)$  mit  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  und  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  können durch Vierecke (Quads) mit den Eckpunkten  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_j)$ ,  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_{k_j})$  sowie  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_{k_i}, \alpha_{k_j})$  und  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_{k_i}, \alpha_i)$  miteinander verbunden werden, wobei  $k_i = (i+1) \bmod n$  und  $k_j = (j+1) \bmod m$  gelten.

Für eine Kanalfäche  $\mathcal{K}^{c,r}$  nach Definition 4.1 ist keine solche globale Parametrisierung bekannt. Aus diesem Grund ist die Erstellung eines Meshes für diese Fläche auch nicht trivial.

Im Folgenden wird gezeigt wie mit Hilfe der Parametrisierung  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  und der Kenntnis ihres Selbstschnittes ein polygonales Netz für die Kanalfäche  $\mathcal{K}^{c,r}$  erstellt werden kann. Die Idee besteht letztlich darin, nur die äußeren Teile der charakteristischen Kreise bezüglich der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  geeignet miteinander zu verbinden.

Es wird davon ausgegangen, dass die Selbstschnittproblematik der Einhüllenden bereits gelöst ist. Das heißt, dass für jedes  $t_i \in T_n$  alle Schnittpunkte

$$S_{i,j} = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_j) = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(w_j, \beta_j) \in \mathcal{C}_{t_i}^{c,r} \cap \mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$$

für  $j \in \{0, \dots, |\mathcal{I}_{t_i}^{c,r}| - 1\}$  des charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit der übrigen Hüllfläche sowie alle zugehörigen Parameterwerte  $\alpha_j$  und  $w_j$  sowie  $\beta_j$  bereits bekannt sind. Die Situation ist in Abb. 4.3 skizziert. Die Schnittpunkte  $S_{i,j}$  eines jeden Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  seien dabei aufsteigend nach



ihrem zugehörigen Winkelparameter  $\alpha_j$  sortiert, sodass  $S_{i,j}$  der  $(j+1)$ .te Schnittpunkt auf  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  ist, wenn man den Kreis in positiver Richtung, begonnen bei  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, 0)$ , durchläuft. Es wird festgelegt dass mit  $S_{i,k}$  bzw.  $w_k$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $k \geq |\mathcal{I}_{t_i}^{c,r}|$  stets  $S_{i,l}$  bzw.  $w_l$  gemeint sind, wobei  $l = k \bmod |\mathcal{I}_{t_i}^{c,r}|$  ist.

*Bemerkung.* Mehrfache Schnittpunkte werden auf diese Weise wie auch im Beweis von Korollar 3.38 wie mehrere einfache geführt und behandelt. Das gilt auch für Berührungspunkte, die ein Kreis  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit der übrigen Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  hat. In diesem Fall gibt es also zwei Punkte  $S_{i,j}$  und  $S_{i,j+1}$  mit den gleichen Koordinaten und den zugehörigen Schnittparametern  $w_j = w_{j+1}$  sowie  $\beta_j = \beta_{j+1}$ . Ein solcher Berührungspunkt existiert genau dann, wenn die Diskriminante von Gleichung (3.8) bzw. Gleichung (3.10) an der Stelle  $(t_i, w_j)$  null ist. Mehrfache Schnittpunkte und Berührungspunkte sind nicht damit zu verwechseln, dass jeder einzelne Schnittpunkt  $S_{i,j}$  zwei verschiedene Bezeichnungen hat, sobald auch der entsprechende Schnittkreis  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  in  $\mathcal{C}_{T_n}^{c,r}$  ist, wobei

$$\mathcal{C}_{T_n}^{c,r} := \{\mathcal{C}_{t_i}^{c,r} : t_i \in T_n\}$$

gilt. Dann folgt nämlich  $S_{i,j} = S_{k,l}$  für ein  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $k \neq i$  und ein  $l \in \{0, \dots, |\mathcal{I}_{t_k}^{c,r}| - 1\}$ .

### 4.2.1. Ermittlung aller Außenpunkte eines charakteristischen Kreises

In diesem Abschnitt wird gezeigt wie man die äußeren Teile eines charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  bezüglich der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  bestimmen kann. Im Zuge dessen werden einige Erkenntnisse aus Abschnitt 3.3.1 auf Kreisbögen angewendet. Das ist möglich, weil jeder Kreisbogen  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  mit  $q \in I$  und  $\gamma, \delta \in [0, 2\pi[$  eines Kreises  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  mit Radius  $l_q^{c,r} > 0$  eine Kurve  $\mathcal{W}$  ohne Selbstüberschneidung ist und damit die Voraussetzungen aus Abschnitt 3.3.1 erfüllt. Dazu sei das Folgende definiert.

**Definition 4.3** (Schnittsegment). Ein Kreisbogen  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  zwischen benachbarten Schnittpunkten  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(q, \gamma) \in \mathcal{I}_q^{c,r}$  und  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(q, \delta) \in \mathcal{I}_q^{c,r}$  des Kreises  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  bezüglich der übrigen Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r} \setminus \mathcal{C}_q^{c,r}$  werde als (**abgeschlossenes**) **Schnittsegment** bezeichnet. Außerdem heißt  $\mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  **offenes Schnittsegment**, sofern  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  ein Schnittsegment ist.

*Bemerkung.* Hierbei ist es wesentlich, dass die Nachbarschaftsbeziehung der Schnittpunkte bezüglich der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ohne den Kreis  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  herangezogen wird, da schließlich jeder Punkt des Kreisbogens ein Schnittpunkt mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist und somit zwei verschiedene Punkte von  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  niemals benachbart bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$  sein können.

**Definition 4.4** (Außenkreis/Außenbogen). Ein Schnittsegment  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  eines charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  wird als **Außenbogen** oder **äußerer Bogen** bezeichnet, wenn es ausschließlich Außenpunkte von  $\mathcal{S}^{c,r}$  enthält.

Charakteristische Kreise, die nur aus äußeren Punkten bestehen, werden **Außenkreise** genannt.

*Bemerkung.* Jeder charakteristische Kreis kann mehrere Außenbögen haben. Es kann charakteristische Kreise ohne einen einzigen Außenpunkt geben.

**Korollar 4.5.** *Es sei  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  ein Schnittsegment.*

*Aus der Existenz eines einzigen Außenpunktes  $Q$  im offenen Kreisbogen  $\mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  folgt schon, dass  $\mathcal{C}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  ein Außenbogen ist.*

#### 4. Kanalflächen

*Beweis.* Die Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 3.17 und Lemma 3.29 angewendet auf den Kreisbogen  $\mathcal{C}_{q,\alpha_1,\alpha_2}^{c,r}$  als Kurve  $\mathcal{W}$ .  $\square$

Zur Identifikation sämtlicher Außenbögen eines charakteristischen Kreises könnte man also einfach aus jedem offenen Schnittsegment einen Punkt  $Q$  auswählen und überprüfen, ob es sich um einen Außenpunkt handelt. Das kann, wie in Abschnitt 5.4.1 beschrieben, geschehen. Der Punkt  $Q$  ist genau dann ein Außenpunkt, wenn es ein  $q \in I$  mit  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q) > 0$  gibt und die Funktion keine Nullstellen hat oder nur welche mit gerader Vielfachheit. Doch die für diese Bestimmung notwendige Nullstellenisolation ist relativ aufwändig. Für eine möglichst effiziente Erstellung eines Meshes gilt es also, die Zahl dieser Operationen zu minimieren. Deshalb wird im Folgenden eine effizientere Alternative dazu beschrieben.

Nach Definition 3.23 hat jeder Außenpunkt einer Kugelschar das Tiefenlevel null, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Ein Umkehrpunkt  $U \in \mathcal{H}^{c,r}$  kann durchaus wie im Beweis von Satz 3.36 das Tiefenlevel null haben, obwohl er offensichtlich kein Außenpunkt ist (siehe Abb. 3.8a). Über einen Punkt mit Tiefenlevel null sagt Lemma 4.6 etwas aus.

**Lemma 4.6.** *Es sei  $Q \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt mit Tiefenlevel  $\mathfrak{d}^{c,r}(Q) = 0$  bezüglich einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ . Dann ist  $Q$  entweder ein Außenpunkt von  $\mathcal{S}^{c,r}$ , ein Umkehrpunkt oder ein charakteristischer Punkt, also einer des lokalen Selbstschnittes  $\mathcal{L}^{c,r}$  der Hüllfläche.*

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{d}^{c,r}(Q) = 0$ , so kann dies daran liegen, dass  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$  für alle  $t \in I$  größer oder gleich null ist. In diesem Fall wäre  $Q$  ein Außenpunkt der Kugelschar.

Ist aber nun  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q_0) < 0$  für ein  $q_0 \in I$ , so gibt es durch die Stetigkeit von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$  entweder ein  $q_1 \in I$  mit  $q_1 < q_0$  und  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q_1) = 0$  oder es ist  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t) < 0$  für alle  $t \in I$  mit  $t \leq q_0$ . Die analoge Aussage über die Funktionswerte von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(t)$  mit  $t > q_0$  für  $q_2$  anstelle von  $q_1$  gilt natürlich auch. Also umschließt nach Definition 3.19 eins der Schlauchstücke  $\mathcal{U}_{q_1,q_2}^{c,r}$  oder  $\mathcal{U}_{\leq q_2}^{c,r}$  oder  $\mathcal{U}_{\geq q_1}^{c,r}$  den Punkt  $Q$ , falls er nicht selbst zu diesen Schlauchstücken gehört. Somit wäre also das Tiefenlevel von  $Q$  nach Definition 3.23 größer null, wenn  $Q$  kein Teil des entsprechenden Schlauchstückes wäre. Da aber nach Voraussetzung  $\mathfrak{d}^{c,r}(Q) = 0$  ist, muss  $Q$  ein Teil dieses Schlauchstückes sein. Das heißt, dass  $Q$  auf einem Kreis  $\mathcal{C}_{q_3}^{c,r}$  mit  $q_3 \in I$  liegt, wobei  $q_3 \in [q_1, q_2]$  oder  $q_3 \leq q_2$  oder  $q_3 \geq q_1$  ist, je nachdem welches Schlauchstück  $Q$  umschließt. Weil aus  $Q \in \mathcal{C}_{q_3}^{c,r} \subset \mathcal{S}_{q_3}^{c,r}$  schon  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q_3) = 0$  und  $(\partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q))(q_3, Q) = 0$  folgen, kann nur  $q_3 = q_1$  oder  $q_3 = q_2$  sein und  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q_3)$  ist entweder ein lokales Maximum oder ein Wendepunkt von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$ . Handelt es sich um ein lokales Maximum, so gilt

$$(\partial_t \partial_t f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q))(q_3, Q) = -2f^{\mathcal{G}^{c,r}}(q_3, Q) < 0$$

und damit ist  $Q$  nach Definition 3.35 ein Umkehrpunkt. Für den Fall, dass  $q_3$  eine Wendestelle von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$  ist, folgen  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(q_3, Q) = 0$  und  $Q \in \mathcal{L}_{q_3}^{c,r} \subset \mathcal{L}^{c,r}$  mit Hilfe von Lemma 3.3.  $\square$

Gelingt es also, sämtliche offene Schnittsegmente mit Tiefenlevel null eines Kreises  $\mathcal{C}_{q_0}^{c,r}$  zu bestimmen, müssen nur noch die Segmente abgezogen werden, welche aus Umkehrpunkten bestehen.

**Definition 4.7** (Umkehrsegment). Ein Segment, welches nur aus Umkehrpunkten besteht, heißt **Umkehrsegment**.

*Bemerkung.* Es ist richtig, dass hier von (offenen) Segmenten gesprochen wird, welche komplett aus Umkehrpunkten bestehen, denn wie schon auf Seite 69 erwähnt, wird ein Kreis  $\mathcal{C}_{q_0}^{c,r}$  im Falle

der Existenz seines lokalen Schnittes  $\mathcal{L}_{q_0}^{c,r} = \{L_1, L_2\}$  durch ihn in zwei Teile geteilt, wovon einer vollständig aus Umkehrpunkten besteht. Ohne Einschränkung sei es hier  $\mathcal{B}_{q_0, L_1, L_2}^{c,r}$ . Jedes offene Schnittsegment  $\mathcal{M}$  gehört nun entweder ganz zu dem einen oder dem anderen Teil. Eine Überlappung ist ausgeschlossen, da sonst entweder  $L_1$  oder  $L_2$  auf  $\mathcal{M}$  liegen würde, was Definition 4.3 widerspricht.

Falls der lokale Schnitt  $\mathcal{L}_{q_0}^{c,r}$  nicht leer ist, werden also einfach nur noch die offenen Segmente weiter betrachtet, welche Teil des Kreisbogens  $\mathcal{C}_{q_0, L_2, L_1}^{c,r}$  sind. Diese enthalten nun keinerlei Umkehrpunkte mehr, da jeder ihrer Punkte  $Q$  ausschließlich auf dem charakteristischen Kreis  $\mathcal{C}_{q_0}^{c,r}$  liegt und  $f^{\mathcal{G}^{c,r}}(q_0, Q) < 0$  gilt.

Das Entfernen der Umkehrsegmente kann noch vor der Tiefenlevelbestimmung geschehen. Die den verbleibenden offenen Schnittsegmenten entsprechenden abgeschlossenen sind dann die Menge aller Außenbögen des Kreises  $\mathcal{C}_{q_0}^{c,r}$ .

Die Bestimmung des Tiefenlevels eines beliebigen Punktes  $Q \in \mathbb{R}^3$  nach Abschnitt 5.4.2 erfordert genau wie die Überprüfung, ob  $Q$  ein Außenpunkt ist, eine Nullstellenisolation. Dennoch ist die Verwendung des Tiefenlevels eine erhebliche Verbesserung, denn es ist eine Reduktion der Tiefenlevelbestimmungen auf maximal eins pro charakteristischem Kreis möglich.

Genau genommen ist jeder Punkt eines Kreisbogens von  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  ein Schnittpunkt dieser Kurve mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ . Aus diesem Grund ist auch beispielsweise Satz 3.33 nicht ohne Weiteres auf ein Schnittsegment anwendbar. Aus diesem Grund ist Korollar 4.8 erforderlich.

**Korollar 4.8.** *Alle Punkte  $Q$  eines offenen Schnittsegmentes  $\mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  haben das gleiche Tiefenlevel bezüglich  $\mathcal{H}^{c,r}$ .*

*Beweis.* Für die Teile der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit Parameterintervall  $I_1 := \{t \in I : t < q\}$  bzw.  $I_2 := \{t \in I : t > q\}$  lässt sich jeweils Satz 3.33 für den Kreisbogen  $\mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  als Kurve  $\mathcal{W}$  anwenden. Also sind die Tiefenlevel bezüglich dieser beiden Teile der Einhüllenden für alle Punkte  $Q$  des Kreisbogens gleich.

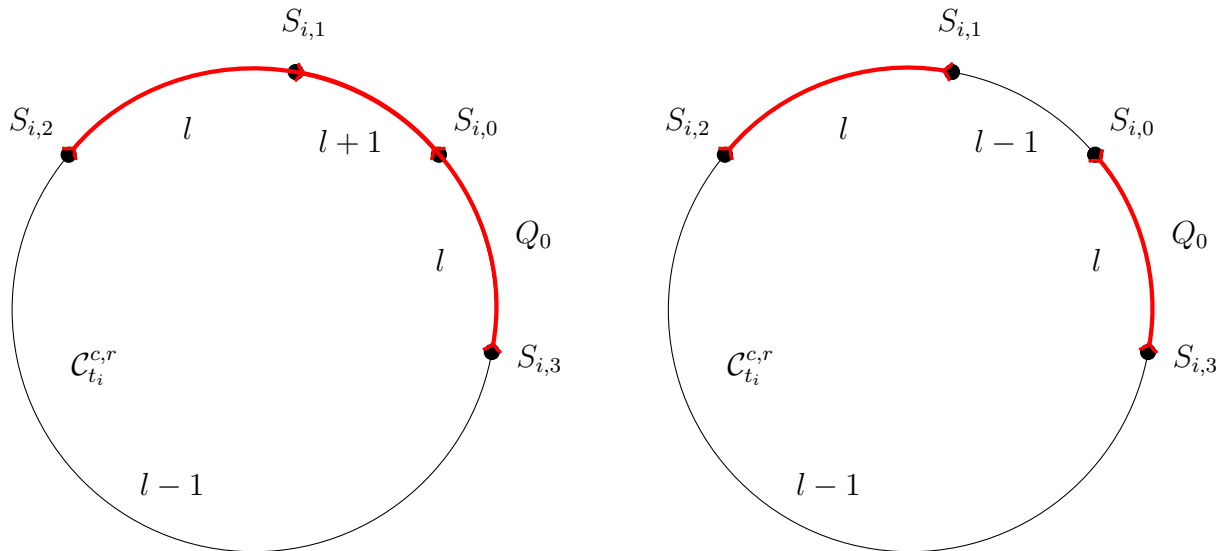
Außerdem ist  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}(q) = 0$  für alle  $Q \in \mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  gleichermaßen entweder ein lokales Maximum von  $f_Q^{\mathcal{S}^{c,r}}$ , falls  $\mathcal{B}_{q,\gamma,\delta}^{c,r}$  ein Umkehrsegment ist, oder Minimum andernfalls. Also verhält sich  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, Q)$  für alle Kreisbogenpunkte  $Q$  in der Umgebung von  $t = q$  gleich. Damit ist klar, dass auch die Anzahl der  $Q$  umschließenden Schlauchstücke und somit auch das Tiefenlevel auf dem Kreisbogen invariant ist.  $\square$

*Bemerkung.* Korollar 4.8 ist das Analogon von Satz 3.33 für ein Schnittsegment als Kurve  $\mathcal{W}$ . Die Gültigkeit der entsprechenden Resultate von Satz 3.36 und Korollar 3.37 sowie Korollar 3.38 für Schnittsegmente lässt sich analog zum Beweis von Korollar 4.8 zeigen.

Die Aussagen sind auch deshalb plausibel, weil sich ein Kreis  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  vollständig auf der Kugel  $\mathcal{S}_{t_i}^{c,r}$  befindet und somit kein Kreisbogen von  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  in diese hineingeht bzw. diese verlässt. Also kommt  $t_i$  in keiner der beiden Mengen aus Gleichung (3.17) vor und trägt somit auch nicht zur Leveländerung bei. Da innerhalb eines Schnittsegmentes keine weiteren Punkte der Einhüllenden vorkommen, ändert sich das Tiefenlevel auf diesem nicht.

Mit Hilfe der Erkenntnisse aus Korollar 3.37 und Korollar 3.38 kann das Tiefenlevel von Schnittsegmenten entlang des Kreises, auf dem sie liegen, weiterverfolgt bzw. aktualisiert werden, wie in Abb. 4.4 dargestellt. Das Tiefenlevel des ersten offenen Schnittsegmentes  $\mathfrak{d}^{c,r}(Q_0) = l$  wird nach Abschnitt 5.4.2 bestimmt und anschließend wird der Kreis in einer Richtung durchlaufen. Berührungspunkte können ignoriert werden, denn die Punkte vor und hinter Ihnen haben das gleiche Level. Beim Passieren eines Schnittpunktes wird das Level im Falle eines

#### 4. Kanalflächen



(a) Die Punkte  $S_{i,3}$  und  $S_{i,0}$  sind Eintritts- und  $S_{i,1}$  sowie  $S_{i,2}$  Austrittspunkte, wenn der Kreis im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

(b) Hier haben die Punkte  $S_{i,0}$  und  $S_{i,0}$  ihre Rollen getauscht. Es gibt also zwei Außenbögen, wenn die Levelberechnung  $l = 1$  liefert.

Abbildung 4.4.: Tiefenlevelbestimmung entlang eines Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$ ; Wird der Kreis in einem Schnittpunkt in Pfeilrichtung durchlaufen, handelt es sich bei diesem um einen Eintrittspunkt. Die roten, offenen Kreisbögen liegen auf jeden Fall im Inneren der Kreisschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ .

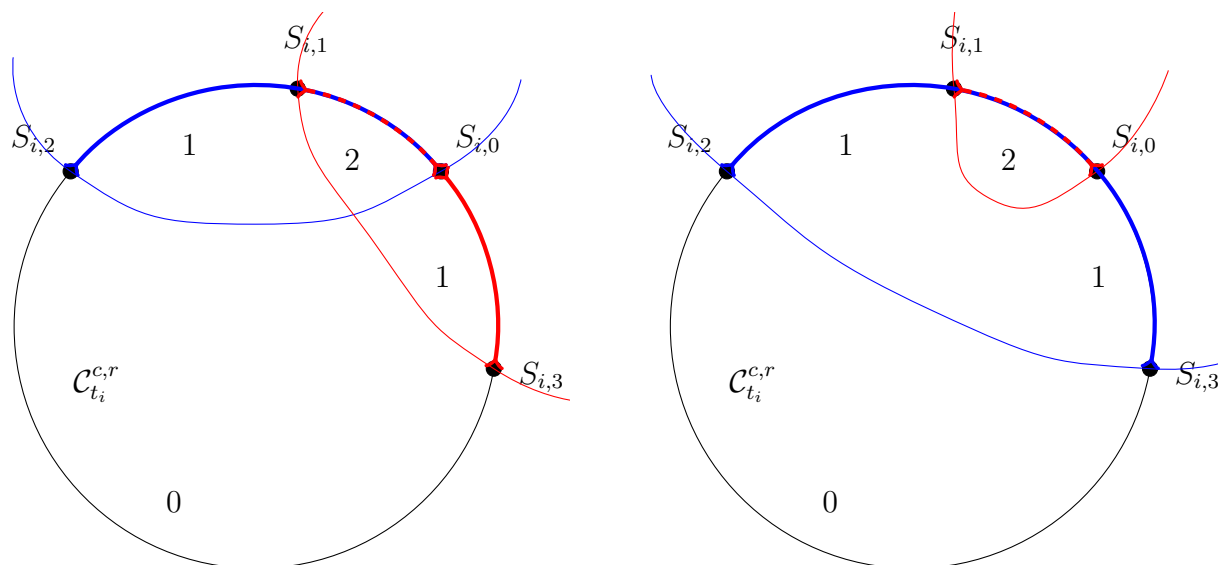
Eintritts um eins erhöht und bei einem Austritt gesenkt. Dazu ist es nur erforderlich für jeden Schnittpunkt zu wissen, ob er ein Eintritt oder Austritt des Kreises bezüglich der Einhüllenden ist. Das entspricht mit dem Kriterium aus Satz 3.36 und der zugehörigen Bemerkung von Seite 72 nur noch der Komplexität einer Funktionswertberechnung von  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}$ .

Um alle Außenpunkte eines charakteristischen Kreises bestimmen zu können, genügt es also das Tiefenlevel eines einzigen Punktes bzw. offenen Kreisbogens zu kennen.

*Bemerkung.* Weiß man von einem Kreis, dass er mindestens einen Außenpunkt hat, so kann man bei der Levelberechnung des Kreises mit einem beliebigen offenen Schnittsegment beginnen und weist diesem zunächst den Levelwert  $l \in \mathbb{N}$  einer Variablen zu. Nach dem Vorgang hat jeder Kreisbogen ein Tiefenlevel welches von  $l$  abhängt. Das niedrigste kann dann dem Wert null gleichgesetzt und somit  $l$  bestimmt werden. Danach liegen dann die Tiefenlevel eines jeden offenen Schnittsegmentes konkret vor. Für einen solchen Kreis muss also die Bestimmung des Tiefenlevels nicht ein einziges Mal nach Abschnitt 5.4.2 durchgeführt werden.

**Definition 4.9.** Eine Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  werde als **selbst verschlingend** bezeichnet, wenn ein  $q \in I$  existiert, sodass der Kreis  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  ausschließlich aus Innenpunkten von  $\mathcal{S}^{c,r}$  besteht, also  $\mathcal{C}_q^{c,r} \subset \mathcal{O}^{c,r}$  gilt.

*Bemerkung.* Für eine sich selbst verschlingende Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  gibt es immer ein Schlauchstück, welches komplett im Inneren der Kugelfamilie  $\mathcal{S}^{c,r}$  liegt. Aus  $\mathcal{C}_q^{c,r} \subset \mathcal{O}^{c,r}$  folgt automatisch  $\mathcal{S}_q^{c,r} \subset \mathcal{O}^{c,r}$ , schließlich ist  $\mathcal{C}_q^{c,r}$  der einzige Teil der Kugel  $\mathcal{S}_q^{c,r}$ , welcher nicht schon von ihren unmittelbaren Nachbarn verdeckt wird.



(a) Hier gehören die Schnittpunkte  $S_{i,0}$  und  $S_{i,1}$  sowie  $S_{i,3}$  und  $S_{i,2}$  zusammen.

(b) In diesem Fall bilden  $S_{i,3}$  und  $S_{i,2}$  sowie  $S_{i,0}$  und  $S_{i,1}$  jeweils ein Paar.

Abbildung 4.5.: Die eingefärbten Kurven, welche nicht auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  liegen, stellen Konturen von Schlauchstücken dar. Die Verteilung von Ein- und Austritten ist dieselbe wie in Abb. 4.4a. Die Zahlen im Kreisinneren geben das Tiefenlevel an.

Für eine Enveloppe, die nicht selbst verschlingend ist, kann vollständig auf die aufwändige Bestimmung des Tiefenlevels nach Abschnitt 5.4.2 verzichtet werden, da jeder ihrer charakteristischen Kreise mindestens einen Außenpunkt hat.

Nachdem alle Außenbögen sämtlicher Kreise  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit  $t_i \in T_n \subsetneq I$  bekannt sind, müssen diese noch geeignet miteinander verbunden werden.

## 4.2.2. Verbindung der Außenbögen

Hier wird erläutert wie die in Abschnitt 4.2.1 bestimmten Außenbögen zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise miteinander verbunden werden.

**Definition 4.10.** Zwei charakteristische Kreise  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r} \in \mathcal{C}_{T_n}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r} \in \mathcal{C}_{T_n}^{c,r}$  mit  $q_1 < q_2$  einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  werden **aufeinanderfolgend** genannt, wenn es in der aktuellen Diskretisierung  $T_n$  des Scharparameterintervalls  $I$  keinen Wert zwischen  $q_1$  und  $q_2$  gibt. Für aufeinanderfolgende Kreise  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  impliziert also  $q_1 < q < q_2$  schon  $q \notin T_n$ .

### Paarung der Schnittpunkte eines Kreises

*Bemerkung.* Die Schnittpunkte eines charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit der übrigen Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  treten immer paarweise auf. Das ist in Abb. 4.5 dargestellt. Für jeden Eintritt des Kreises in die Hüllfläche muss es auch einen entsprechenden Austritt geben, da das Tiefenlevel nach einem ganzen Kreisumlauf unverändert ist. Zu jedem Austritt existiert nach dem gleichen Argument ein zugehöriger Eintritt. Ist ein Schnittpunkt nur ein Berührungspunkt mit einem anderen Kreis, so kommt er doppelt vor und ist sein eigener Partner.

#### 4. Kanalflächen

**Definition 4.11** (Schnittpunktpaar). Zwei Schnittpunkte  $S_{i,j}$  und  $S_{i,k}$  mit  $w_j \leq w_k$  bilden genau dann ein **(Schnittpunkt-)Paar**, wenn entweder für alle Punkte  $Q_1 \in \mathcal{B}_{t_i, \alpha_j, \alpha_k}^{c,r}$  ein umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q_1, q}^{c,r}$  oder für alle  $Q_2 \in \mathcal{B}_{t_i, \alpha_k, \alpha_j}^{c,r}$  ein umschließendes Schlauchstück  $\mathcal{U}_{Q_2, q}^{c,r}$  mit  $q \in [w_j, w_k]$  existiert.

*Beobachtung.* Es seien  $S_{i,j}$  und  $S_{i,k}$  mit  $w_j \leq w_k$  ein Schnittpunktpaar.

Dann gilt für alle Schnittpunkte  $S_{i,l}$  mit  $l \in \{0, \dots, |\mathcal{L}_{t_i}^{c,r}| - 1\}$  die Aussage  $w_l \notin ]w_j, w_k[$ .

*Bemerkung.* Für einen Eintrittspunkt  $S_{i,j}$  des Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  in die übrige Hüllfläche ist sein Schnittpunktpartner  $S_{i,k}$  der erste Austritt entlang der Einhüllenden, wobei hier die Differenz der Schnittparameter die Ordnung festlegt. Die Punkte eines Schnittpunktpaares werden auf ihrem Kreis nie durch einen Außenbogen getrennt.

Die Zuordnung der Paare kann durch Sortieren der Schnittpunkte nach ihren zugehörigen Schnittparameterwerten in aufsteigender Wertigkeit erfolgen. Nach der Sortierung bilden jeweils zwei aufeinanderfolgende Elemente ein Schnittpunktpaar. Für zyklische Enveloppen können auch der erste und letzte Punkt zusammengehören. Stellt man sich das Intervall des Scharparameters für diese Hüllflächen wieder als zyklisch vor, trifft die Aussage auch auf sie zu.

*Bemerkung.* Bei gleicher Anordnung der Ein- und Austrittspunkte kann es verschiedene Paarungen der Schnittpunkte geben. Das ist in Abb. 4.5 zu sehen.

#### Paarung der Außenbögen nach Schnittparametern

Ist die Anzahl der Außenbögen zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  gleich, können diese ähnlich wie die Schnittpunkte mit Hilfe einer Sortierung nach den zu ihren Randpunkten gehörigen Schnittparameterwerten in aufsteigender Reihenfolge zu Paaren zusammengestellt werden. Hierbei ist es wichtig, dass entweder von allen Außenbögen die Schnittparameterwerte ihrer Startpunkte oder von allen die ihrer Endpunkte verglichen werden.

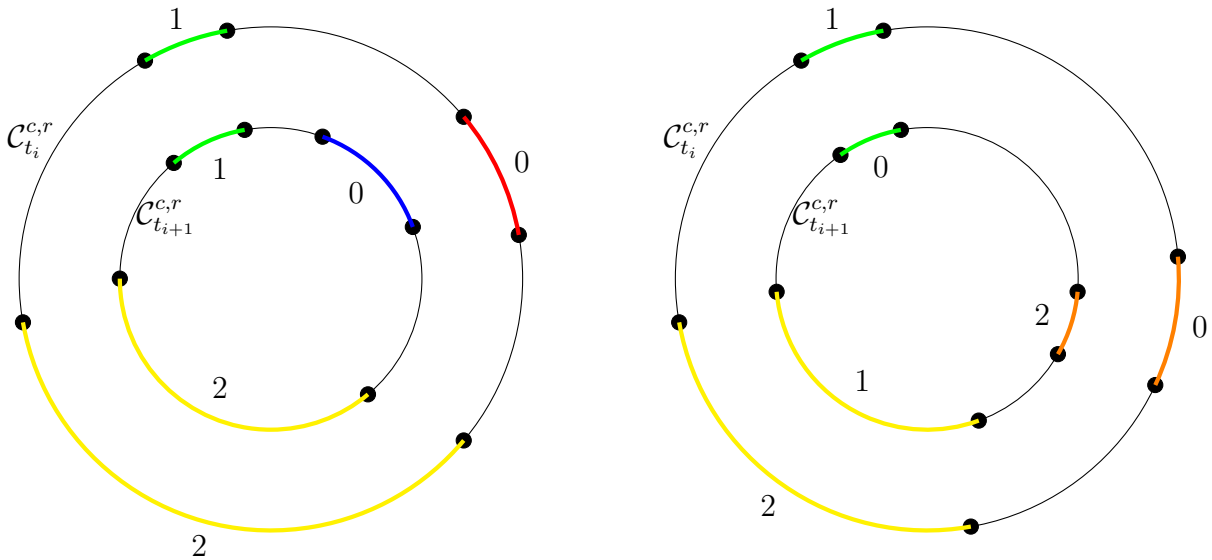
Nach dem Sortieren haben die Außenbögen eine eindeutig bestimmte Nummer. Für nicht zyklische Enveloppen gehören die Außenbögen mit der gleichen Nummer zusammen. Für zyklische Hüllflächen ist es auch möglich, dass der Außenbogen mit der höchsten Nummer von  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  zu dem mit der niedrigsten von  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  gehört oder umgekehrt. Hier kann ein Vergleich der Differenzen der Winkelparameter ihrer Randpunkte weiterhelfen. Bilden dann der erste Außenbogen des einen Kreises und der letzte des anderen ein Paar, so müssen alle Nummern der Außenbögen des zweiten Kreises um eins erhöht werden. Danach können die übrigen Außenbögen ihren Nummern entsprechend gepaart werden.

Zusätzlich ist es möglich, die Winkelabweichung von Außenbogenpaaren zu testen und bei Erreichen eines gewissen Schwellenwertes die gefundene Paarung zu verwerfen. Die Winkelabweichung kann auch gleich zur Paarfindung genutzt werden.

#### Paarung der Außenbögen nach Winkelparametern

Eine weitere Möglichkeit, die Außenbögen aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise paarweise zusammenzustellen besteht darin, ihre Winkelparameter miteinander zu vergleichen. Auch hierfür muss die Anzahl der Außenbögen beider Kreise übereinstimmen.

**Definition 4.12** (Paarung Außenbögen). Zwei Außenbögen  $\mathcal{C}_{t_i, \alpha_j, \alpha_{j+1}}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}}^{c,r}$  aufeinanderfolgender Kreise bilden ein  $(\alpha_\epsilon)$ -**Paar**, wenn sowohl  $|\alpha_j - \alpha_k| < \alpha_\epsilon$  als auch  $|\alpha_{j+1} - \alpha_{k+1}| < \alpha_\epsilon$



(a) Die Winkelabweichung zwischen dem roten und blauen Außenbogen ist zu groß.

(b) Der erste Außenbogen von  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und der letzte des darauffolgenden Kreises bilden ein Paar.

Abbildung 4.6.: Schematische Darstellung der Paarung von Außenbögen nach Winkelabweichung mit Nummerierung; Außenbögen desselben Paares haben die gleiche Farbe.

gilt. Die Kreisbögen eines solchen Paares werden dann **Partner** genannt. Gehören alle Außenbögen zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise zu einem Paar, wird von einer  $(\alpha_\epsilon)$ -**Paarung** für diese Kreise gesprochen.

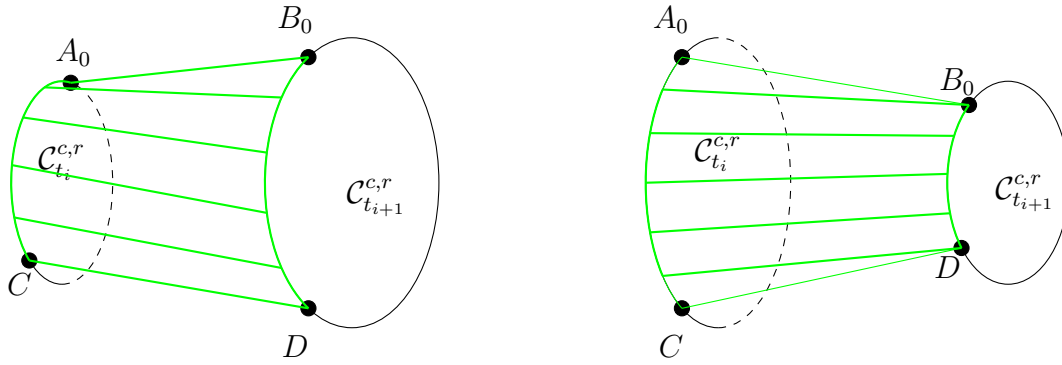
*Bemerkung.* Damit zwei Außenbögen ein Paar bilden, darf die Winkelabweichung ihrer entsprechenden Randpunkte einen bestimmten, zuvor festgelegten Schwellwert  $\alpha_\epsilon$  nicht erreichen. Je kleiner dieser ist, desto besser wird die Approximation durch das Mesh ausfallen. Natürlich ist der Aufwand zur Berechnung dann auch höher.

Um eine Paarung zu finden, wird zunächst überprüft, ob der erste Außenbogen auf  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  mit dem letzten oder dem ersten von  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  ein Paar bildet. Falls nicht, wird das Gleiche mit vertauschten Rollen der Kreise wiederholt. Ist wieder kein Paar dabei, kann keine Paarung für die Kreise gefunden werden. Die Ordnung der Kreisbögen richtet sich hierbei nach den Winkelparameterwerten ihrer Endpunkte. Wurde ein Paar gefunden, können ausgehend von diesem die jeweils nächsten Außenbögen von  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  überprüft werden. Das wird wiederholt bis entweder alle Außenbögen gepaart sind (siehe Abb. 4.6b) oder zwei kein Paar bilden (Abb. 4.6a). Im zweiten Fall gibt es keine Paarung für die beiden Kreise  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$ .

*Bemerkung.* Auf diese Weise lässt sich eine Paarung finden, ohne jeden Außenbogen des einen Kreises mit jedem des anderen zu vergleichen. So ist der Aufwand dafür nur linear und nicht quadratisch in Abhängigkeit der Anzahl von Außenbögen.

Haben alle Außenbögen zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise einen entsprechenden Partner auf dem jeweils anderen Kreis, können alle Paare miteinander verbunden werden.

#### 4. Kanalflächen



(a) Beide Außenbögen werden in gleich viele Teile unterteilt.

(b) Der Außenbogen  $\mathcal{C}_{t_i, A_0, C}^{c,r}$  wird öfter unterteilt als  $\mathcal{C}_{t_{i+1}, B_0, D}^{c,r}$ .

Abbildung 4.7.: Verbindung zweier zueinander gehöriger Außenbögen der aufeinanderfolgenden charakteristischen Kreise  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  in verschiedenen Situationen

#### Verbindung eines Außenbogenpaares

In Abb. 4.7 ist skizziert wie die Verbindung von gepaarten Außenbögen  $\mathcal{C}_{t_i, A_0, C}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}, B_0, D}^{c,r}$  erfolgt. Man entnimmt den zyklischen Intervallen  $[[\alpha_{A_0}, \alpha_C]]$  bzw.  $[[\beta_{B_0}, \beta_D]]$  inklusive der Randpunkte jeweils  $m + 1$  gleichverteilte Werte  $\alpha_k$  bzw.  $\beta_k$  mit  $k \in \{0, \dots, m\}$  und berechnet die Punkte  $A_k = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_k)$  bzw.  $B_k = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_{i+1}, \beta_k)$ . Hierbei sind  $m \in \mathbb{N}$  sowie  $A_0 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_{A_0})$ ,  $C = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_i, \alpha_C)$ ,  $B_0 = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_{i+1}, \alpha_{B_0})$  und  $D = \mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t_{i+1}, \alpha_D)$ .

Es ist natürlich auch möglich, die Anzahl der Unterteilungen  $m$  von der Länge der jeweiligen Kreisbögen abhängig zu machen, um die Aufteilung für kurze Kreisbögen nicht zu fein und für lange nicht zu grob zu gestalten. In diesem Fall müssen dann mehrere Punkte des längeren Kreisbogens mit denselben Punkten des kürzeren verbunden werden, wie es in Abb. 4.7b zu sehen ist.

#### Verbindung über Zwischenkreise

Haben nicht alle Außenbögen zweier aufeinanderfolgender Kreise  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  einen entsprechenden Partner, so wird zwischen den Kreisen ein weiterer Kreis  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  mit  $t_i < t_z < t_{i+1}$  eingefügt, indem  $n$  um eins erhöht wird und die Mengen  $T_n$  sowie  $\mathcal{C}_{T_n}^{c,r}$  entsprechend erweitert werden.

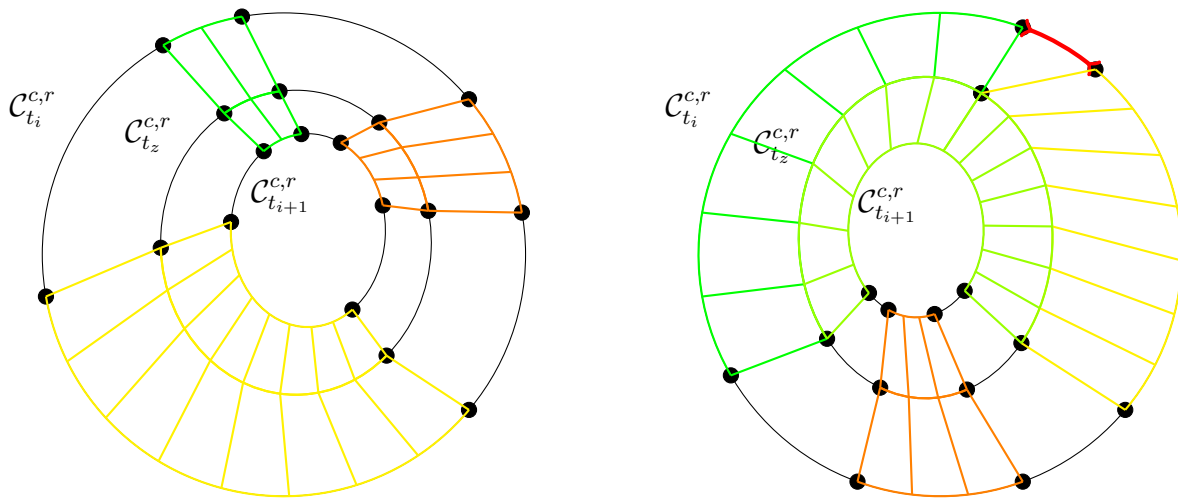
Um zu erkennen, dass dieses Einfügen im Falle von nicht gepaarten Außenkreisen tatsächlich eine Lösung darstellt, muss man die möglichen Ursachen für das Scheitern der Paarbildung etwas genauer beleuchten.

Im einfachsten Fall kann es sein, dass sich die zu den Randpunkten eines Außenbogens gehörenden Winkel beim Übergang von  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  zu  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise zu stark verändert haben. Dieser Fall trifft auf den roten und blauen Außenbogen in Abb. 4.6a zu. Natürlich kann diese Veränderung wegen der Stetigkeit von  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  durch hinreichende Verringerung der Differenz der Parameterwerte  $t_i$  und  $t_{i+1}$  verkleinert werden. Also ist das Aufnehmen eines Zwischenkreises hier durchaus eine akzeptable Lösung (siehe Abb. 4.8a).

Es kann aber auch sein, dass die Anzahl der Außenbögen aufeinanderfolgender Kreise nicht übereinstimmt. Dafür gibt es im Wesentlichen zwei Gründe.

Zum einen kann beim Übergang von  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  nach  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  ein Schnittsegment derart komplett ver-





- (a) Starke Winkeländerung der Randpunkte eines Außenbogens; Die Ausgangssituation entspricht der schematischen Darstellung aus Abb. 4.6a.
- (b) Wegfall einer Überschneidung (rot) mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ ; Existenz eines Zwischenkreises  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$ , auf dem  $S_{t_z,0} = S_{t_z,1}$  gilt

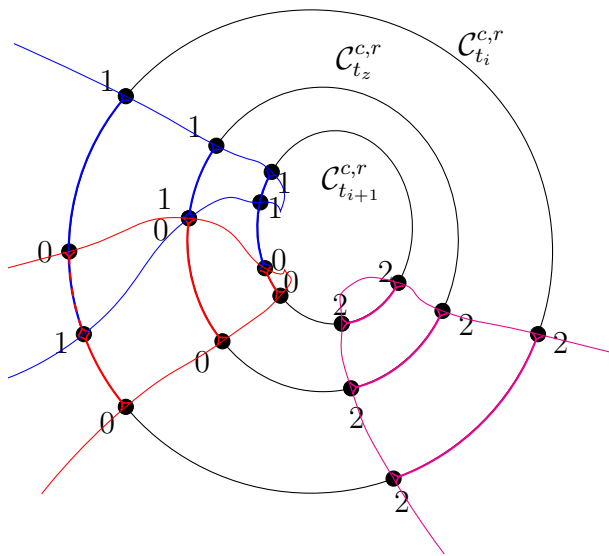
Abbildung 4.8.: Einfügung eines Kreises  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  zwischen  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  in verschiedenen Situationen

schwunden bzw. neu dazu gekommen sein, dass es zur Verschmelzung zweier Außenbögen zu einem bzw. zur Aufteilung eines Außenbogens in zwei verschiedene kommt. In diesem Fall gibt es einen Kreis  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  mit  $t_i < t_z < t_{i+1}$  bei dem das Schnittsegment ausschließlich aus einem einzigen Punkt besteht (vgl. Abb. 4.8b). Der Kreis  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  berührt die übrige Einhüllende in diesem Punkt. Auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  wird ein Hilfspunkt eingefügt, welcher den gleichen Winkelparameterwert hat wie der Berührungspunkt und den Außenbogen, zu dem er gehört, in zwei verschiedene Kreisbögen unterteilt. Diese werden dann mit den an den Berührungspunkt angrenzenden Außenbögen genauso wie Außenbogenpaare verbunden und die wiederum verbindet man mit denen, die auf  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  an das wegfallende Schnittsegment angrenzen.

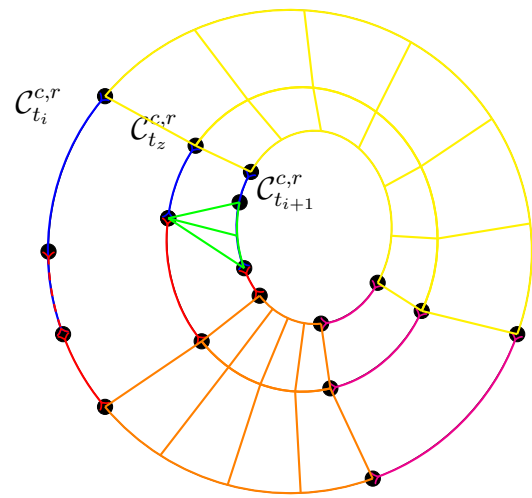
Zum anderen ist es möglich, dass zwei Schnittpunkte ihren Platz auf dem Kreis getauscht haben. Was damit konkret gemeint ist, stellt Abb. 4.9 dar. Zwischen aufeinanderfolgenden Kreisen ändert sich in diesen Fällen die Abfolge der Schnittpunktpaare. Wegen der Stetigkeit von  $\mathfrak{F}^{\mathcal{H}^{c,r}}$  existiert ein Zwischenkreis  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  auf dem die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Es muss nur der eine Außenbogen auf  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  zwischen den beiden Schnittpunkten, die ihren Platz getauscht haben, mit dem Mehrfachschnittpunkt auf  $\mathcal{C}_{t_z}^{c,r}$  verbunden werden.

Abschließend kann also festgestellt werden, dass auch für den Fall einer unterschiedlichen Anzahl von Außenbögen zweier aufeinanderfolgender charakteristischer Kreise  $\mathcal{C}_{q_1}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{q_2}^{c,r}$  das Einfügen des richtigen Zwischenkreises das Problem löst, falls nicht mehrere solcher Situationen wie Schnittpunkttausch oder der Wegfall bzw. das Dazukommen von Schnittsegmenten gleichzeitig eintreten. Ist dies der Fall, wird möglicherweise gar nicht erkannt, dass die Aufteilung zu grob gewählt ist und weitere Kreise eingefügt werden müssten (siehe Abb. 4.10). Das führt dann zu Fehlern im Aufbau des Polygonnetzes, welche leider erst bei der grafischen Darstellung

#### 4. Kanalflächen

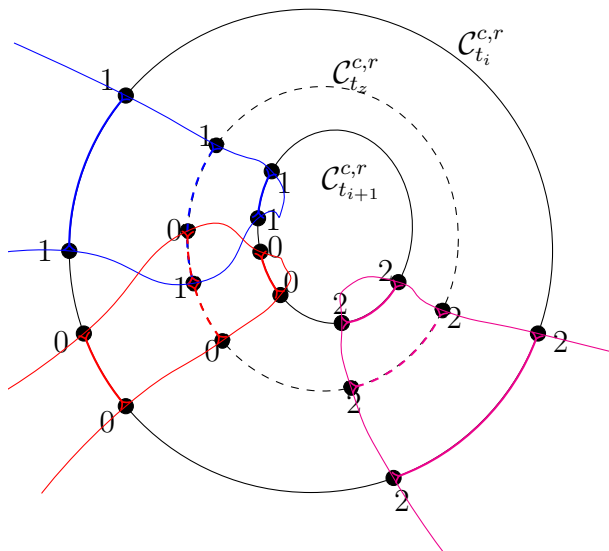


(a) Platztausch zweier Schnittpunkte; Die Zahlen sind die Nummern der Paare, zu welchen die Schnittpunkte gehören.

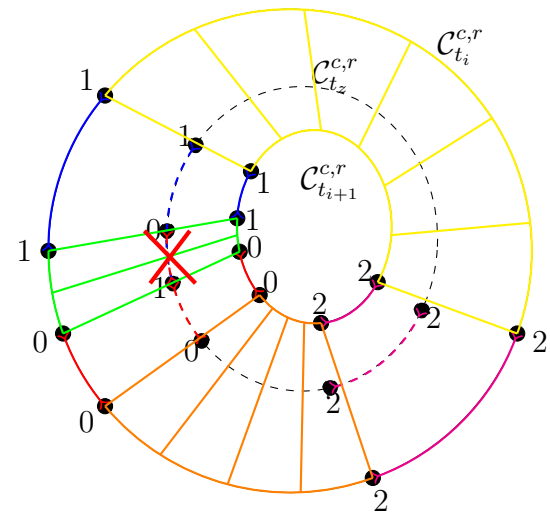


(b) Verbindung des neuen Außenbogens auf  $C_{t_i}^{c,r}$  mit dem Tauschpunkt auf  $C_{t_z}^{c,r}$  in grün

Abbildung 4.9.: Ein Platztausch relevanter Schnittpunkte setzt die Existenz eines Zwischenkreises, auf dem beide Schnittpunkte zusammenfallen, voraus.



(a) Zwei Schnittpunkte tauschen ihren Platz zwischen  $C_{t_i}^{c,r}$  und  $C_{t_{i+1}}^{c,r}$  zweimal. Die Zahlen sind die Nummern der Paare, zu welchen die Schnittpunkte gehören.



(b) Die grün dargestellte Verbindung der Außenbögen von  $C_{t_i}^{c,r}$  und  $C_{t_{i+1}}^{c,r}$  ist nicht korrekt.

Abbildung 4.10.: Hier wird die Notwendigkeit des Einfügens mehrerer Zwischenkreise nicht erkannt, weil sich zwei Fehler ausgleichen.

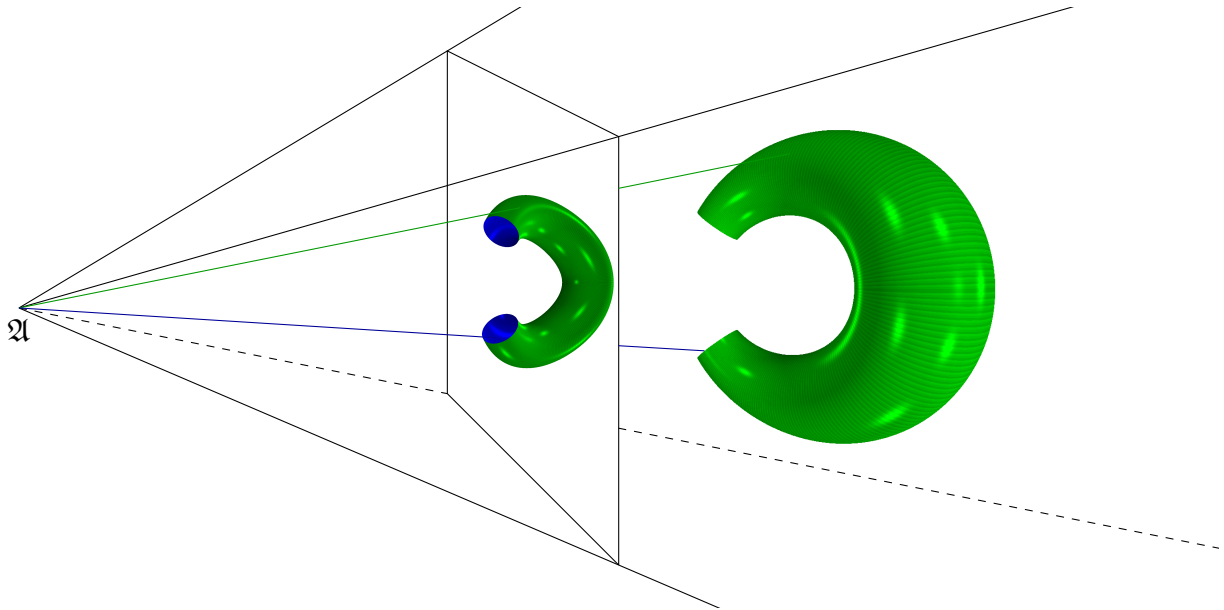


Abbildung 4.11.: Funktionsprinzip des Raycastings anhand zweier eingezeichneter Augstrahlen

erkannt werden. In diesem Fall muss die Unterteilung des Parameterintervalls  $I$  vom Nutzer verfeinert werden.

Eine weitere Hürde ist das Finden des korrekten Parameterwertes  $t_z$ . Er kann durch das Einfügen mehrerer Zwischenkreise immer weiter angenähert werden.

Da im Allgemeinen für einen Schnittpunkt  $S_{i,j}$  des Kreises  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  mit der restlichen Hüllfläche der entsprechende Schnittpunkt  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  nicht schon in  $\mathcal{C}_{T_n}^{c,r}$  enthalten ist, sollte er auch eingefügt werden, um dafür zu sorgen, dass das Netz an den Schnittpunkten bündig abschließt und keine Löcher entstehen. Der neu eingefügte Kreis  $\mathcal{C}_{w_j}^{c,r}$  habe dann die Nummer  $k$ , sodass  $w_j = t_k$  gilt und schneidet ein Schlauchstück, welches  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  enthält, zusätzlich in einem zweiten Punkt  $S_{k,l}$ . Im Allgemeinen liegt dieser aber nicht auf  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und somit gilt  $w_l \neq t_i$ . Auf diese Weise würden so ständig wieder neue Kreise eingefügt werden müssen. Abhilfe schafft die Festlegung eines Schwellwertes  $t_\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , sodass keine weiteren Kreise zwischen  $\mathcal{C}_{t_i}^{c,r}$  und  $\mathcal{C}_{t_{i+1}}^{c,r}$  eingefügt werden, wenn  $|t_{i+1} - t_i| < t_\epsilon$  gilt.

Aufgrund der erwähnten Probleme, die bei der Erstellung eines Meshes für die Kanalfläche auftreten können, wird das Raycasting als Alternative zur Visualisierung der Kanalflächen betrachtet.

## 4.3. Raycasting

Im Folgenden wird die Visualisierung einer Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  mittels eines Raycasting-Verfahrens erläutert. Zuvor wird jedoch kurz der allgemeine Ansatz beim Raycasting beschrieben.

### 4.3.1. Allgemeines

Das Raycasting ist ein weit verbreitetes Verfahren zur Darstellung verschiedener Objekte einer dreidimensionalen Szene auf dem Bildschirm. Es werden, ausgehend von einem sogenannten

## 4. Kanalflächen

Augpunkt oder Kamerapunkt, Strahlen durch ein Rechteck, dessen Ebene nicht den Kamerapunkt enthält, hindurch geschickt (siehe Abb. 4.11). Die Strahlen werden auch Augstrahlen genannt. Das zu zeichnende Bild soll auf dem Rechteck entstehen. Dazu wird es, der gewünschten Auflösung entsprechend, in ein Punktraster aus Pixeln verwandelt. Für jeden Bildpunkt wird getestet, ob der eindeutig bestimmte Strahl, welcher sowohl durch den Aug- als auch den Bildpunkt verläuft, auf irgendein Objekt trifft, das heißt es schneidet. Es genügt im Allgemeinen jeweils den ersten Schnittpunkt mit einem der Objekte zu berechnen. Im Fall eines Treffers wird für diesen Schnittpunkt mittels eines lokalen Beleuchtungsmodells ein Farbwert ermittelt. Dieser Farbwert wird dann dem entsprechenden Bildpunkt zugewiesen und in einem Bildspeicher abgelegt. Nachdem dies für alle Strahlen geschehen ist, enthält dieser Framebuffer die Projektion des betrachteten Szenenausschnittes. Er wird durch die Lage des Rechteckes vorgegeben und mit ihr verändert. Der Framebuffer wird zuvor mit der gewünschten Hintergrundfarbe initialisiert.

Das Raycasting ist im Wesentlichen eine Vereinfachung des Raytracings. Bei letzterem geht nicht nur der erste Schnittpunkt eines Augstrahles mit einem Objekt in die Berechnung ein. Nach einem Auftreffen eines Strahles wird er entsprechend der getroffenen Oberfläche in mehrere Strahlen aufgeteilt, welche ebenfalls weiterverfolgt werden. Auf diese Weise können auch Brechungen und Reflexionen von Lichtstrahlen berücksichtigt werden. Für weitere Informationen zum Raytracing sei auf [Wat95, S. 267 ff.] und [Suf07] verwiesen.

### 4.3.2. Anpassung des Verfahrens

Die Objekte, welche hier dargestellt werden sollen, sind natürlich Kanalflächen. Für die Schnittberechnungen der Augstrahlen mit einer Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  werden die impliziten Gleichungen  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, P) = 0$  und  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, P) = 0$  herangezogen, weil für die Kanalfläche selbst keine bekannt sind und nach Lemma 4.2 die Beziehung  $\mathcal{K}^{c,r} = \mathcal{H}^{c,r} \cap \mathcal{A}^{c,r}$  gilt. Es werden zunächst die Schnittparameter aller Schnittpunkte eines Augstrahles mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  berechnet und anschließend der bzw. die bestimmt, welche auch wirklich zur Kanalfläche gehören.

*Bemerkung.* Soll die Kanalfläche transparent dargestellt werden, ist es nicht ausreichend nur den ersten Schnittpunkt des Strahles mit ihr zu kennen, sonst natürlich schon.

Die ermittelten Schnittpunkte werden dann gemeinsam mit den Normalenvektoren der Fläche in diesen Punkten für die Bildberechnung verwendet.

### Berechnung der Schnittparameter

Im Folgenden wird beschrieben wie die Schnittpunkte eines eindeutig bestimmten Augstrahls mit der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  berechnet werden. Dieser Strahl  $\mathcal{R}$  habe die Parametrisierung

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s) = \mathfrak{A} + s \cdot \vec{d}$$

mit Strahlparameter  $s \in \mathbb{R}^+$ . Hierbei sind  $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^3$  der Augpunkt und  $\vec{d} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  die Richtung des Strahles mit  $|\vec{d}| \neq 0$ . Das Einsetzen der Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}$  in die implizite Gleichung der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  liefert

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, \mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)) = \left\langle \mathfrak{A} + s \cdot \vec{d} - c(t), \mathfrak{A} + s \cdot \vec{d} - c(t) \right\rangle - r^2(t) = 0.$$

Durch Sortieren nach den Potenzen von  $s$  erhält man

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(t, \mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)) = s^2 A + sB(t) + C(t) = 0 \quad (4.1)$$

mit

$$A := \langle \vec{d}, \vec{d} \rangle \quad \text{und} \quad B(t) := 2 \langle \vec{d}, \mathfrak{A} - c(t) \rangle$$

sowie

$$C(t) := \langle \mathfrak{A} - c(t), \mathfrak{A} - c(t) \rangle - r^2(t).$$

Gleichung (4.1) ist für  $t = t_0 \in \mathbb{R}$  genau dann erfüllbar, wenn der Strahl  $\mathcal{R}$  die Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  schneidet. Die beiden Lösungen  $s_{\pm}$  liefern dann die beiden Schnittpunkte  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s_{\pm})$ .

Analog wird die Gleichung

$$f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t, \mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)) = \langle \vec{c}'(t), \mathfrak{A} + s \cdot \vec{d} - c(t) \rangle + r(t)r'(t) = 0, \quad (4.2)$$

von den zu dem Schnittpunkt  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s_0)$  des Strahles  $\mathcal{R}$  mit der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  gehörenden Parameterwerten  $s_0$  und  $t_0$  erfüllt. Hier gibt es maximal eine mögliche Lösung, deshalb kommt  $s$  auch nur linear in dieser Gleichung vor. Durch Umstellung nach dem Strahlparameter erhält man

$$s(t) = \frac{s_1(t)}{s_2(t)} \quad (4.3)$$

mit

$$s_1(t) := \langle \vec{c}'(t), c(t) - \mathfrak{A} \rangle - r(t)r'(t) \quad \text{und} \quad s_2(t) := \langle \vec{c}'(t), \vec{d} \rangle,$$

wodurch  $s$  in Abhängigkeit des Kurvenparameters  $t$  von  $c$  bestimmt ist.

*Bemerkung.* Der Ausdruck  $s_1(t_0)$  für  $t_0 \in I$  entspricht  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(t_0, \mathfrak{A})$  und ist somit genau dann gleich null, wenn der Kamerapunkt in der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  liegt. Im Falle, dass  $s_2(t_0)$  gleich null ist, verläuft der Strahl  $\mathcal{R}$  parallel zur Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$ , denn sein Richtungsvektor steht dann senkrecht auf dem Normalenvektor  $\vec{c}'(t_0)$  dieser Ebene.

Der Strahlparameter in Abhängigkeit von  $t$  aus Gleichung (4.3) kann für  $s$  in 4.1 eingesetzt und das Ergebnis mit dem Quadrat des Nenners aus Gleichung (4.3)  $s_2^2(t)$  multipliziert werden. Somit erhält man die im Allgemeinen rationale Funktion

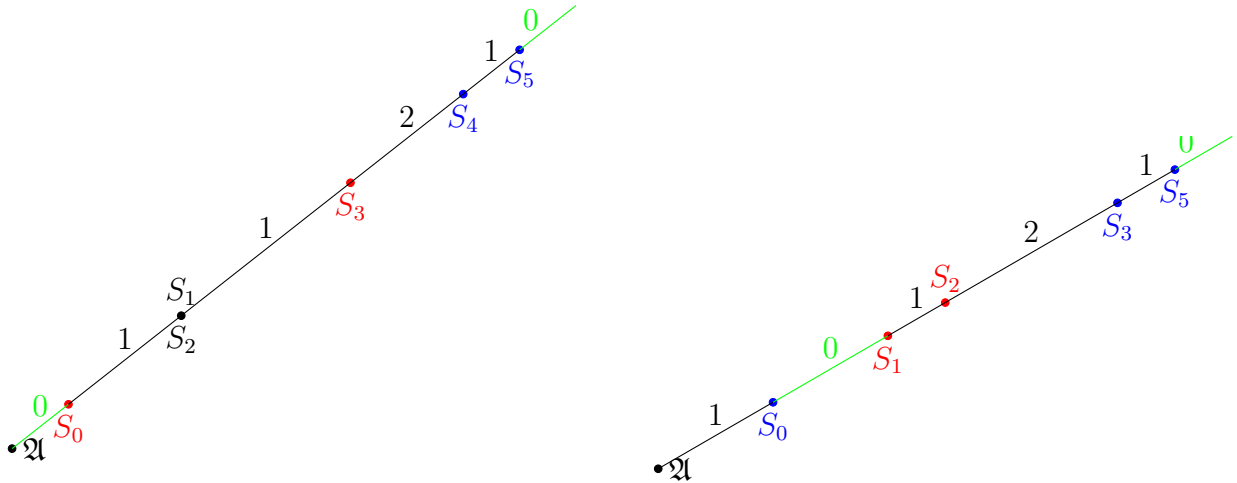
$$f^{\mathcal{R}}(t) := s_1^2(t)A + s_1(t)s_2(t)B(t) + s_2^2(t)C(t), \quad (4.4)$$

deren Nullstellen genau die Parameterwerte für  $t$  liefern, die zu einem Schnitt der Strahlgeraden mit der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehören. Setzt man diese Werte in die Gleichung 4.3 ein, erhält man die zugehörigen Werte für den Parameter  $s$ , welche durchaus noch negativ sein können. Die Werte kleiner als null gehören zu Schnittpunkten der Hüllfläche mit der Strahlgeraden, nicht aber dem Strahl, und werden verworfen. Die übrigen liefern mit der Parametrisierung  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}$  die entsprechenden Schnittpunkte.

Die implementierte Nullstellenbestimmung wird in Abschnitt 5.3 beschrieben.

*Bemerkung.* Für eine Lösung  $t = t_0 \in I$  von Gleichung (4.4) die zusätzlich  $s_2(t_0) = 0$  erfüllt, lässt sich der entsprechende Wert für  $s$  nicht durch  $s(t_0)$  aus Gleichung (4.3) ermitteln. Das ist klar, denn dann ist  $f^{\mathcal{R}}(t_0) = s_1^2(t_0)A$  und weil  $A$  das Quadrat der Länge von  $\vec{d}$  und dieser Vektor nicht der Nullvektor ist, folgt aus  $f^{\mathcal{R}}(t_0) = 0$  schon  $s_1(t_0) = 0$ . Also liegt der Kamerapunkt

#### 4. Kanalflächen



- (a) Der Kamerapunkt ist ein Außenpunkt ( $\mathfrak{d}^{c,r}(\mathfrak{A}) = 0$ ).      (b) Hier gilt  $\mathfrak{d}^{c,r}(\mathfrak{A}) = 1$ , also liegt der Augpunkt im Inneren der Kugelschar.

Abbildung 4.12.: Aktualisierung des Tiefenlevels entlang eines Augstrahls; Eingangs- und Ausgangspunkte (bezüglich der Strahlrichtung) sind rot bzw. blau und Außen-segmente grün dargestellt. Die Ziffern über dem Strahl geben das Tiefenlevel an.

$\mathfrak{A}$  in der Ebene  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  und weil der Strahl  $\mathcal{R}$  zusätzlich auch parallel zu  $\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}$  verläuft, liegt er vollständig in der Ebene und damit ist  $f^{\mathcal{E}_{t_0}^{c,r}}(t_0, \mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)) = 0$  für alle  $s \in \mathbb{R}^+$  erfüllt. Deshalb ist der Ausdruck in Gleichung (4.3) auch unbestimmt. Hier wird auf Gleichung (4.1) zurückgegriffen und die beiden Lösungen

$$s_{\pm} = -\frac{B(t)}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2(t) - 4C^2(t)}{4A^2}}$$

für  $s$  über den Schnitt des Strahles  $\mathcal{R}$  mit der Kugel  $\mathcal{S}_{t_0}^{c,r}$  ermittelt.

#### Auswahl des richtigen Schnittpunktes

Nachdem die Schnittparameter aller Schnittpunkte des Strahles  $\mathcal{R}$  mit der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  bekannt sind, werden sie ihrer Größe nach aufsteigend sortiert und von null bis  $n - 1$  durchnummeriert, wobei  $n$  die Anzahl der ermittelten Strahlparameterwerte bezeichnet. Jeder Schnittpunkt lässt sich dann durch

$$S_i = \mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s_i) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}_{t_i}^{c,r} \quad \text{mit} \quad i \in \{0, \dots, n - 1\}$$

beschreiben, wobei  $t_i \in I$  der zum  $(i + 1)$ -ten Strahlparameterwert  $s_i$  gehörende Scharparameterwert ist.

*Bemerkung.* Die Bezeichner  $n$  und  $S$  haben hier eine andere Bedeutung als in Abschnitt 4.2 und sollten nicht mit denen verwechselt werden. Das Gleiche gilt für ihre Indizierung mit  $i$ .

Um zu wissen, welche Schnittpunkte des Augstrahles  $\mathcal{R}$  mit der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  zur Kanalfläche gehören, wird das Tiefenlevel aus Definition 3.23 herangezogen. Zuerst wird das Tiefenlevel des Augpunktes  $\mathfrak{A}$  nach Abschnitt 5.4.2 bestimmt. Anschließend kann das Tiefenlevel entlang

des Strahles, wie in Abb. 4.12 dargestellt, aktualisiert werden. Hierzu finden die Resultate aus Abschnitt 3.3.1 für den Strahl  $\mathcal{R}$  als Kurve  $\mathcal{W}$  Anwendung. So ist nach Satz 3.33 klar, dass nur bei den Schnittpunkten des Strahles mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  eine Änderung des Tiefenlevels eintritt.

*Bemerkung 4.13.* Berührungspunkte des Strahles mit der Hüllfläche können ignoriert werden, da sich das Tiefenlevel beim Durchlaufen solcher Punkte nicht ändert. Sie sind dadurch charakterisiert, dass sowohl der entsprechende Strahlparameterwert als auch der zugehörige Scharparameterwert doppelt vorkommen. Für die übrigen Mehrfachsnittpunkte ist nur der Strahlparameterwert gleich, nicht aber der für den Scharparameter.

Die Aussagen aus Satz 3.36 und Korollar 3.37 sowie Korollar 3.38 geben darüber Auskunft, wie sich das Tiefenlevel beim Passieren eines Schnittpunktes auf dem Strahl ändert. Korollar 4.14 liefert ein einfaches Kriterium dafür, ob ein Strahl  $\mathcal{R}$  in eine Kugel eintritt.

**Korollar 4.14.** *Ein Strahl  $\mathcal{R}$  tritt genau dann bei  $S_i$*

- *in die Kugel  $\mathcal{S}_{t_i}^{c,r}$  ein, wenn*

$$2s_i A + B(t_i) < 0$$

- *bzw. aus der Kugel  $\mathcal{S}_{t_i}^{c,r}$  aus, wenn*

$$2s_i A + B(t_i) > 0$$

*gilt. Bei Gleichheit berührt er sie nur in einem Doppelpunkt.*

*Beweis.* Die quadratische Funktion

$$g(s) := f_{t_i}^{\mathcal{S}^{c,r}}(\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)) = s^2 A + s B(t_i) + C(t_i)$$

von  $s$  mit den Bezeichnungen aus Gleichung (4.1) ist genau dann kleiner als null, wenn  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s)$  im Inneren der Kugel  $\mathcal{S}_{t_i}^{c,r}$  liegt. Für den Schnittparameter  $s = s_i$  ist sie natürlich gleich null, weil  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}(s_i)$  ein Schnittpunkt des Strahles mit der Kugel ist. Um herauszufinden, wie sich die Funktionswerte mit steigendem  $s$  entwickeln, kann die Ableitung  $g'(s) = 2sA + B(t_i)$  verwendet werden. Ist sie bei  $s = s_i$  kleiner null, tritt  $\mathfrak{P}^{\mathcal{R}}$  in die Kugel ein und umgekehrt.  $\square$

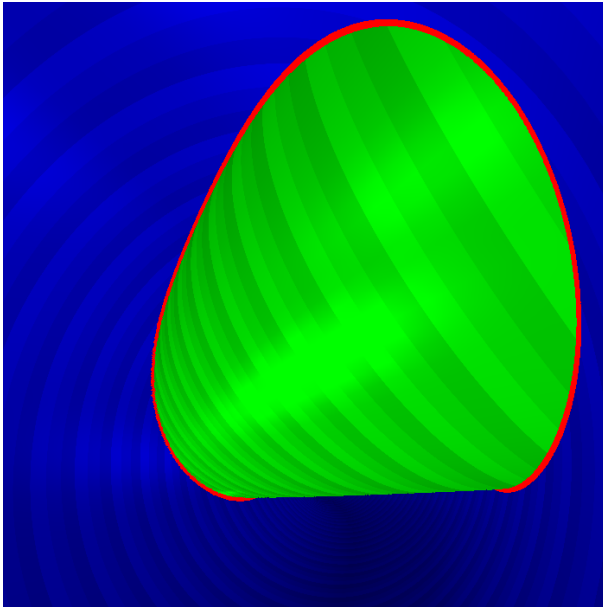
**Korollar 4.15.** *Jeder Punkt  $Q \in \mathfrak{P}^{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{H}^{c,r}$  des Strahles, welcher kein Schnittpunkt mit der Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$  ist und das Tiefenlevel  $\mathfrak{d}^{c,r}(Q) = 0$  hat, ist ein Außenpunkt bezüglich der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 4.6 ist  $Q$  entweder ein Außenpunkt, Umkehrpunkt oder charakteristischer Punkt, wobei die letzten beiden Möglichkeiten ausgeschlossen werden können, weil  $Q$  nicht zur Hüllfläche gehört.  $\square$

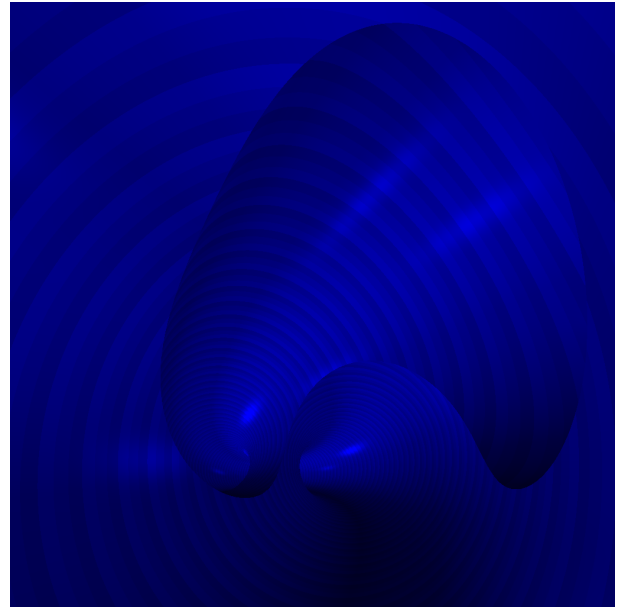
Es gehören genau die Schnittpunkte  $S_i$ , welche an einen Teil des Strahles  $\mathcal{R}$  mit Tiefenlevel null angrenzen, zur Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$ , denn diese sind nach Korollar 4.15 und Lemma 3.29 äußere Punkte der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  und liegen zudem auf der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  und somit nach Lemma 4.2 auch auf der Kanalfläche.

Der Normalenvektor der Kanalfläche in einem Schnittpunkt  $S_i$  ist durch  $S_i - c(t_i)$  gegeben. Damit sind alle benötigten Angaben für die Beleuchtung nach einem lokalen Beleuchtungsmodell bekannt und das Raycasting-Verfahren vollständig abgehandelt.

#### 4. Kanalflächen



(a) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit Selbstüberschneidung von innen; Die Punkte des Selbstschnittes sind rot eingezeichnet.



(b) Mittels Raycasting gerenderte Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Enveloppe aus Abb. 4.13a

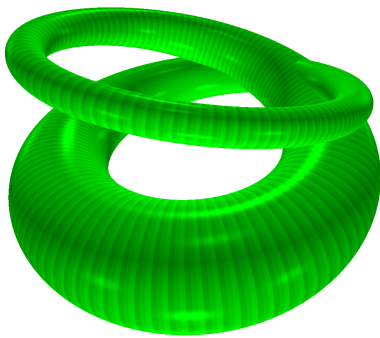
Abbildung 4.13.: Vorteile beider Verfahren anhand von Beispiel 14; In Abb. 4.2 und Abb. 5.1d ist die Hüllfläche von außen zu sehen.

### 4.4. Vergleich der beiden Verfahren

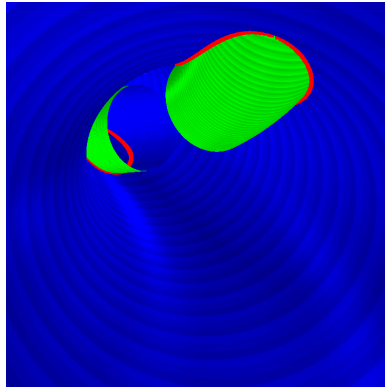
Hier wird kurz auf die Vor- und Nachteile der beiden erläuterten Verfahren zur Darstellung von Kanalflächen eingegangen.

Die Vorteile des Raycastings liegen in einer pixelgenauen Darstellung der Kanalfläche, sofern es keine numerischen Probleme bei der Nullstellenbestimmung (siehe Abschnitt 5.5) gibt. Der Nachteil ist die relativ lange Berechnungsdauer pro frame. An ein Echtzeitrendering ist hier schon für kubische Ausgangskurven nicht zu denken (siehe Abschnitt 6.2). Natürlich ist die Zeit für die Berechnung eines polygonalen Netzes schon allein wegen der enorm aufwändigen Selbstschnittberechnung, welche die Nullstellenbestimmung von Polynomen noch wesentlich höheren Grades beinhaltet, nicht kürzer. Diese Berechnungen müssen aber nicht für jeden frame, sondern nur ein einziges Mal pro Kanalfläche durchgeführt werden. Außerdem ist es mit dieser Variante möglich, den Selbstschnitt einer Einhüllenden genauer zu betrachten (vgl. Abb. 4.13a). Letztlich wurde die Entscheidung getroffen, sowohl die Selbstschnittberechnung ohne anschließende Erstellung des Meshes als auch das Raycasting-Verfahren zu implementieren. Somit können die Kanalflächen exakt dargestellt und auch der Selbstschnitt der entsprechenden Enveloppen eingezeichnet werden. Auf diese Weise nutzt man einige Vorteile beider Verfahren.

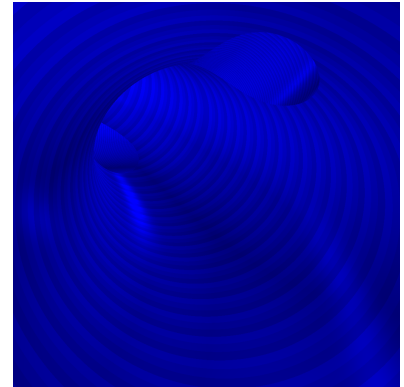




(a) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  von außen mit Selbstschnitt (rot)



(b) Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit Selbstschnitt (rot) von innen; Die Hüllfläche ist nicht geschlossen. Dadurch ist der eingezeichnete Selbstschnitt besser zu erkennen.



(c) Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$

Abbildung 4.14.: Hüll- und Kanalfläche aus Beispiel 15



# 5. Implementierung

In diesem Kapitel wird auf einige Besonderheiten bzw. Probleme bei der Implementierung der vorgestellten Verfahren eingegangen. Außerdem werden die eingesetzten Hilfsmittel beschrieben.

## 5.1. Programmierumgebung

Der Programmcode ist größtenteils in C++ geschrieben. Dieser Teil lässt sich mit dem Compiler g++ übersetzen. Unter Linux wurde das mit den Versionen 4.8.2 und 4.8.4 der GCC (siehe [GCC]) und unter Windows mit der Version 4.8.1 von minGW ([MP]) getestet.

Für die grafischen Benutzeroberflächen wird die Bibliothek Qt 5.2 [Com] genutzt. Sie ermöglicht eine plattformunabhängige Implementierung und ist sehr umfangreich.

Symbolische Ausdrücke werden mit Hilfe der Bibliothek GiNaC [Bau+] berechnet. Der Einsatz ist aber im Wesentlichen auf die Erstellung der Polynome  $f^{\mathcal{J}^{c,r}}$  und  $f^{\mathcal{R}}$  aus den Nutzereingaben für die Seele und den Radius beschränkt. Das implementierte Raycasting-Verfahren ist GPU-basiert. Hierfür wird die CUDA-Technik von Nvidia verwendet, weshalb zusätzlich zu dem C++-Compiler auch noch nvcc aus einem aktuellen Cuda-Toolkit (6.5 [NVib] oder höher) erforderlich ist.

## 5.2. Parallelisierung mittels GPU

Raycasting-Verfahren sind ein Paradebeispiel für den Einsatz von Grafikkarten zur Parallelisierung der Berechnungen. Hierbei muss der gleiche Code sehr oft, nämlich für jeden Bildpunkt einmal, mit unterschiedlichen Eingabewerten ausgeführt werden, wobei die Ergebnisse vollkommen unabhängig voneinander sind (SIMD). Für eine SVCD-Auflösung sind das immerhin schon über eine viertel Million Durchläufe, bei FullHD schon über zwei Millionen.

Die einzige Eingabegröße, welche von Bildpunkt zu Bildpunkt variiert, ist der Richtungsvektor  $\vec{d}$  des Augstrahles  $\mathcal{R}$ . Für jeden Bildpunkt wird ein eigener Thread ausgeführt. Auf der Grafikkarte können hunderte bis tausende solcher Threads parallel abgearbeitet werden. Bei der GeForce GTX 670 MX können beispielsweise bis zu  $5 \cdot 2048$  Threads (2048 pro Multiprozessor) gleichzeitig aktiv sein, dennoch ist der maximal zu erreichende Beschleunigungsfaktor deutlich geringer, denn pro Multiprozessor und Takt werden nur 8 Instruktionen von 8 verschiedenen Threads abgearbeitet. Die restlichen befinden sich in einer Wartestellung, um Speicherzugriffzeiten auszugleichen. Die Aufteilung auf die Hardware-Ressourcen wird im Wesentlichen von CUDA übernommen. Es können lediglich bestimmte Einflussgrößen, wie Registernutzung, Einsatz von Shared-Memory und die Anzahl der Threads pro Block bedingt verändert werden. Zur optimalen Einstellung, stellt Nvidia den CUDA GPU Occupancy Calculator [NVIa] zur Verfügung, welcher einfach nur aus einer Excel-Datei besteht, in der die theoretische Auslastung der GPU unter Berücksichtigung dieser Größen berechnet wird. Es gibt auch Software-Werkzeuge

## 5. Implementierung

wie den Visual Profiler [NVId], welche helfen, mögliche Schwachstellen bezüglich der Performance zu identifizieren. Auch die Entwicklungsumgebung Nsight [NVIC] kann eine große Hilfe sein, vor allem beim Debugging.

### 5.3. Nullstellenbestimmung

Für die Berechnung des Selbstschnittes einer Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  und die Ermittlung der Schnittpunkte eines Augstrahles  $\mathcal{R}$  mit einer solchen Enveloppe ist die Bestimmung der Nullstellen bestimmter rationaler Funktionen erforderlich. Hier wird erläutert, wie diese Nullstellenberechnungen implementiert sind.

Dazu werden aus den rationalen Funktionen erst Polynome gebildet, deren Nullstellenmenge entweder gleich der der rationalen Funktion oder eine Obermenge davon ist. Deren Nullstellen können dann mittels des in Abschnitt 5.3.4 beschriebenen Polynomsolvers angenähert werden.

#### 5.3.1. Erstellung eines Polynoms für $f_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}$

Setzt man in Gleichung (2.21) die Ausdrücke aus 2.14 ein, sieht man, dass sich die vierte Potenz des Hauptnenners  $h$  wie in Gleichung (2.22) herauskürzen lässt und es gilt

$$M_t^\pi = \frac{-1}{\tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t)} \begin{pmatrix} \tilde{c}_x(t) \\ \tilde{c}_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

für die Mittelpunkte der projizierten Kreise  $\mathfrak{C}_t^\pi$ . Somit muss nur noch der Nenner  $N := \tilde{r}(t) + \tilde{c}_z(t)$  eliminiert werden.

Für alle Terme  $T_1 \in \{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\}$  sowie  $T_2 \in \{A, B, C\}$  aus Abschnitt 3.2.1 seien

$$\overline{T}_1 := T_1 N \quad \text{und} \quad \overline{T}_2 := T_2 N^2$$

definiert. Dabei handelt es sich dann nur noch um reine Polynome.

Für  $d$  und  $\vec{v}$  aus Gleichung (3.7) gilt

$$\vec{v} = \frac{\overbrace{h(w)\tilde{c}(t) - h(t)\tilde{c}(w)}^{=: \vec{v}}}{h(t)h(w)} \quad \text{sowie} \quad d = \frac{\overbrace{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + h^2(w)\tilde{r}^2(t) - h^2(t)\tilde{r}^2(w)}^{=: \vec{d}}}{h^2(t)h^2(w)}$$

und außerdem sind

$$a = \frac{\overbrace{2h(w)\tilde{r}(t)(2\overline{A}_1 N \vec{v}_1 + 2\overline{A}_2 N \vec{v}_2 + (\overline{A} - N^2)\vec{v}_3) + \vec{d}(\overline{A} + N^2)}^{=: \vec{a}}}{h^2(t)h^2(w)N^2}$$

sowie

$$b = \frac{\overbrace{2h(w)\tilde{r}(t)(2\overline{B}_1 N \vec{v}_1 + 2\overline{B}_2 N \vec{v}_2 + \overline{B}\vec{v}_3) + \vec{d}\overline{B}}^{=: \vec{b}}}{h^2(t)h^2(w)N^2}$$

und

$$c = \frac{\overbrace{2h(w)\bar{r}(t)(2\bar{C}_1N\bar{v}_1 + 2\bar{C}_2N\bar{v}_2 + (\bar{C} - N^2)\bar{v}_3) + \bar{d}(\bar{C} + N^2)}^{=:\bar{c}}}{h^2(t)h^2(w)N^2}$$

für die Terme aus Gleichung (3.8) erfüllt, wobei sämtliche Zähler Polynome sind. Durch Multiplikation<sup>1</sup> dieser Gleichung mit  $h^2(t)h^2(w)N^2$  erhält man

$$f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u))h^2(t)h^2(w) = u^2\bar{a} + u\bar{b} + \bar{c} = 0. \quad (5.2)$$

Analog gilt für die Ausdrücke  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  aus Gleichung (3.10):

$$\hat{d} = \frac{\overbrace{h(t)\bar{r}(w)\tilde{r}(w) + \langle \tilde{c}(w), \bar{v} \rangle}^{=:\hat{d}}}{h(t)h^3(w)}$$

$$\hat{a} = \frac{\overbrace{h(w)\bar{r}(t)(2\bar{A}_1N\tilde{c}_1(w) + 2\bar{A}_2N\tilde{c}_2(w) + (\bar{A} - N^2)\tilde{c}_3(w)) + (\bar{A} + N^2)\hat{d}}^{=:\hat{a}}}{h(t)h^3(w)}$$

$$\hat{b} = \frac{\overbrace{h(w)\bar{r}(t)(2\bar{B}_1N\tilde{c}_1(w) + 2\bar{B}_2N\tilde{c}_2(w) + \bar{B}\tilde{c}_3(w)) + \bar{B}\hat{d}}^{=:\hat{b}}}{h(t)h^3(w)}$$

$$\hat{c} = \frac{\overbrace{h(w)\bar{r}(t)(2\bar{C}_1N\tilde{c}_1(w) + 2\bar{C}_2N\tilde{c}_2(w) + (\bar{C} - N^2)\tilde{c}_3(w)) + (\bar{C} + N^2)\hat{d}}^{=:\hat{c}}}{h(t)h^3(w)N^2}$$

Auch hier sind wieder alle Zähler Polynome. Nach Multiplikation<sup>2</sup> von Gleichung (3.10) mit  $h(t)h^3(w)N^2$  hat sie die Form

$$f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u))h(t)h^3(w) = u^2\tilde{a} + u\tilde{b} + \tilde{c} = 0. \quad (5.3)$$

Durch Einsetzen der Lösungen für  $u$  aus Gleichung (5.2) in Gleichung (5.3) und geeignetes Umformen wie in Abschnitt 3.2.1 erhält man das bivariate Polynom

$$\overline{f^{\mathcal{J}^{c,r}}}(t, w) := (\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c})(2\bar{a}\bar{b} - 2\bar{b}\bar{a})^2 - (-(2\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c})\bar{a} + 2\bar{a}\bar{b}\bar{b} - 4\bar{a}^2\bar{c})^2, \quad (5.4)$$

welches noch spezialisiert wird. Anschließend werden die Nullstellen des Polynoms  $\overline{f_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}}(w)$  anstelle der rationalen Funktion  $f_{t_0}^{\mathcal{J}^{c,r}}(w)$ , wie in Abschnitt 5.3.4 beschrieben, bestimmt.

Analog erhält man das entsprechende bivariate Polynom

$$\widehat{f^{\mathcal{J}^{c,r}}}(t, w) := (\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c})(2\tilde{a}\tilde{b} - 2\tilde{b}\tilde{a})^2 - (-(2\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c})\tilde{a} + 2\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b} - 4\tilde{a}^2\tilde{c})^2 \quad (5.5)$$

zu  $\hat{f}^{\mathcal{J}^{c,r}}$  für die zweite Variante aus Abschnitt 3.2.1.

<sup>1</sup> Die Multiplikation kann für  $N = 0$  die Nullstellenmenge erweitern. Diese zusätzlichen Lösungen werden mittels einer Probe herausgefiltert.

<sup>2</sup>siehe Fußnote 1 auf Seite 97

### 5.3.2. Erstellung eines Polynoms für $f^{\mathcal{R}}$

Mit den Ausdrücken für die Parametrisierung der Kurve  $c(t)$  sowie der Radiusfunktion  $r(t)$  und deren Ableitungen  $\vec{c}'(t)$  sowie  $r'(t)$  aus Gleichungen (2.13) und (2.14) gelten

$$B(t) = \frac{\overline{B}(t)}{h(t)} \quad \text{und} \quad C(t) = \frac{\overline{C}(t)}{h^2(t)} \quad (5.6)$$

mit

$$\overline{B}(t) := 2 \left\langle \vec{d}, h(t) \cdot \mathfrak{A} - \vec{c}(t) \right\rangle$$

und

$$\overline{C}(t) := \langle h(t)\mathfrak{A} - \vec{c}(t), h(t)\mathfrak{A} - \vec{c}(t) \rangle - \tilde{r}^2(t)$$

für  $B$  und  $C$  aus Gleichung (4.1).

Außerdem sind die Terme aus Gleichung (4.3) durch

$$s_1(t) = \frac{\overline{s}_1(t)}{h^3(t)} \quad \text{und} \quad s_2(t) = \frac{\overline{s}_2(t)}{h^2(t)} \quad \text{sowie} \quad s(t) = \frac{\overline{s}_1(t)}{\overline{s}_2(t)h(t)} \quad (5.7)$$

mit

$$\overline{s}_1(t) := \langle \tilde{c}(t), \vec{c}(t) - h(t) \cdot \mathfrak{A} \rangle - \tilde{r}(t)\tilde{r}'(t) \quad \text{und} \quad \overline{s}_2(t) := \left\langle \tilde{c}(t), \vec{d} \right\rangle$$

bestimmt. Das Einsetzen von  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  aus Gleichung (5.7) sowie  $B(t)$  und  $C(t)$  aus 5.6 in  $f^{\mathcal{R}}(t) = 0$  aus Gleichung (4.4) und anschließende Multiplikation<sup>3</sup> mit  $h^6(t)$  liefert das Polynom

$$\overline{f^{\mathcal{R}}}(t) := \overline{s}_1^2(t)A + \overline{s}_1(t)\overline{s}_2(t)\overline{B}(t) + \overline{s}_2^2(t)\overline{C}(t), \quad (5.8)$$

welches die gleichen Nullstellen hat wie  $f^{\mathcal{R}}$ . Diese können nun, wie in Abschnitt 5.3.4 beschrieben, bestimmt werden. Für  $h(t) \equiv 1$  ergibt sich natürlich  $\overline{f^{\mathcal{R}}}(t) = f(t)$ .

### 5.3.3. Gradabschätzungen

Um den Aufwand der Nullstellenbestimmungen einschätzen zu können, ist es wichtig zu wissen, welchen Grad die entsprechenden Polynome  $\overline{l^\pi} := \sqrt{\langle \tilde{c}(t), \tilde{c}(t) \rangle - \tilde{r}^2(t)}$  (siehe Gleichung (2.22)) und  $\overline{f^{\mathcal{J}^{c,r}}}$  sowie  $\overline{f^{\mathcal{R}}}$  haben. In Tabelle 5.1 sind die maximalen Grade der Polynome für das Raycasting-Verfahren und in Tabelle 5.2 die für die globale Selbstschnittberechnung angegeben.

### 5.3.4. Nullstellenbestimmung der reellen Polynome

An verschiedenen Stellen dieser Arbeit ist es notwendig, die Nullstellen reeller Polynome zu bestimmen. Dabei wird zwischen den im Allgemeinen komplexen und den rein reellen Nullstellen unterschieden.

#### Reelle Nullstellen

Die Nullstellenbestimmung teilt sich im Wesentlichen in zwei Schritte. Erst werden die Nullstellen isoliert, das heißt es werden Intervalle bestimmt, in denen sich genau eine Nullstelle des Polynoms befindet. Anschließend werden die Nullstellen innerhalb ihres Intervalls bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit angenähert.

<sup>3</sup>Diese Multiplikation ist unproblematisch, da  $h(t)$  nach Lemma 2.12 für alle  $t \in I$  ungleich null ist.

$\deg(f)$	unter den Voraussetzungen $\max\{\deg(\bar{c}_x), \deg(\bar{c}_y), \deg(\bar{c}_z), \deg(\bar{r})\} \leq k$ und $\deg(h) = l$	und $m := \max\{k, l\}$
$\deg(\tilde{c}_v)$	$\leq \max\{\deg(\tilde{c}_v) - 1 + \deg(h), \deg(\tilde{c}_v) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\tilde{c}_v) + \deg(h) - 1$ $\leq k + l - 1$	$2m - 1$
$\deg(\tilde{r})$	$\leq \max\{\deg(\tilde{r}) - 1 + \deg(h), \deg(\tilde{r}) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\tilde{r}) + \deg(h) - 1$ $\leq k + l - 1$	$2m - 1$
$\deg(\hat{c}_v)$	$\leq \max\{\deg(\tilde{c}_v) - 1 + \deg(h), \deg(\tilde{c}_v) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\tilde{c}_v) + \deg(h) - 1$ $\leq k + 2l - 2$	$3m - 2$
$\deg(\hat{r})$	$\leq \max\{\deg(\tilde{r}) - 1 + \deg(h), \deg(\tilde{r}) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\tilde{r}) + \deg(h) - 1$ $\leq k + 2l - 2$	$3m - 2$
$\deg(\bar{B})$	$\leq \max\{\deg(h), \deg(\bar{c})\}$ $\leq \max\{k, l\}$	$m$
$\deg(\bar{C})$	$\leq 2 \max\{\max\{\deg(h), \deg(\bar{c})\}, \deg(\bar{r})\}$ $\leq 2 \max\{k, l\}$	$2m$
$\deg(\bar{s}_1)$	$\leq \max\{\deg(\tilde{c}) + \max\{\deg(\bar{c}), \deg(h)\}, \deg(\bar{r}) + \deg(\tilde{r})\}$ $= \max\{k + l - 1 + \max\{k, l\}, 2k + l - 1\}$ $\leq k + l - 1 + \max\{k, l\}$	$3m - 1$
$\deg(\bar{s}_2)$	$\leq \deg(\tilde{c})$ $\leq k + l - 1$	$2m - 1$
$\deg(d_2)$	$\leq \max\{2 \deg(\tilde{c}), \deg(\bar{c}) + \deg(\hat{c}), 2 \deg(\tilde{r}), \deg(\bar{r}) + \deg(\hat{r})\}$ $\leq 2k + 2l - 2$	$4m - 2$
$\deg(f^{\mathcal{R}})$	$\leq \max\{2 \deg(\bar{s}_1), \deg(\bar{s}_1) + \deg(\bar{s}_2) + \deg(\bar{B}), 2 \deg(\bar{s}_2) + \deg(\bar{C})\}$ $\leq 2k + 2l - 2 + 2 \max\{k, l\}$	$6m - 2$

Tabelle 5.1.: Gradabschätzungen zum Raycasting; Hierbei ist  $v \in \{x, y, z\}$  und bezeichnet eine beliebige Komponente.

## 5. Implementierung

$\deg(f)$	unter den Voraussetzungen $\max\{\deg(\bar{c}_x), \deg(\bar{c}_y), \deg(\bar{c}_z), \deg(\bar{r})\} \leq k$ und $\deg(h) = l$	und $m := \max\{k, l\}$
$\deg(\tilde{c}_v)$	$\leq \max\{\deg(\bar{c}_v) - 1 + \deg(h), \deg(\bar{c}_v) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\bar{c}_v) + \deg(h) - 1$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$2m - 1$
$\deg(\tilde{r})$	$\leq \max\{\deg(\bar{r}) - 1 + \deg(h), \deg(\bar{r}) + \deg(h) - 1\}$ $= \deg(\bar{r}) + \deg(h) - 1$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$2m - 1$
$\deg(\overline{M}_v^\pi)$	$\leq \max\{\deg(\tilde{c}_x), \deg(\tilde{c}_y), \deg(\tilde{c}_z)\}$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{l}^\pi)$	$\leq \max\{\tilde{c}_v, \tilde{r}\}$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{g}_v)$	$\leq \deg(\overline{l}^\pi)$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{A}_1)$ $\deg(\overline{B}_2)$ $\deg(\overline{C}_1)$	$\leq \max\{\deg(\overline{M}_x^\pi), \deg(\overline{g}_x)\}$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{A}_2)$ $\deg(\overline{B}_1)$ $\deg(\overline{C}_2)$	$\leq \max\{\deg(\overline{M}_y^\pi), \deg(\overline{g}_y)\}$ $\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{D})$	$\leq \max\{2 \deg(\overline{M}_v^\pi), 2 \deg(\overline{l}^\pi), \deg(\overline{M}_v^\pi) + \deg(\overline{g}_v)\}$ $\leq (2(k + l - 1), 0)$	$(4m - 2, 0)$
$\deg(\overline{A})$	$\leq \max\{\deg(\overline{g}_x) + \deg(\overline{M}_x^\pi), \deg(\overline{D})\}$ $\leq (2(k + l - 1), 0)$	$(4m - 2, 0)$
$\deg(\overline{C})$	$\leq \max\{\deg(\overline{g}_y) + \deg(\overline{M}_y^\pi), \deg(\overline{D})\}$ $\leq (2(k + l - 1), 0)$	$(4m - 2, 0)$
$\deg(\overline{B})$	$\leq \max\{\deg(\overline{g}_x) + \deg(\overline{M}_y^\pi), \deg(\overline{g}_y) + \deg(\overline{M}_x^\pi)\}$ $\leq (2(k + l - 1), 0)$	$(4m - 2, 0)$
$\deg(\overline{N})$	$\leq (k + l - 1, 0)$	$(2m - 1, 0)$
$\deg(\overline{v}_v)$	$\leq (\max\{k, l\}, \max\{k, l\})$	$(m, m)$
$\deg(\overline{d})$	$\leq (2 \max\{k, l\}, 2 \max\{k, l\})$	$(2m, 2m)$
$\deg(\overline{a})$ $\deg(\overline{b})$ $\deg(\overline{c})$	$\leq (2(k + l - 1) + 2 \max\{k, l\}, 2 \max\{k, l\})$	$(6m - 2, 2m)$
$\deg(\overline{d})$	$\leq (2 \max\{k, l\}, 2 \max\{k, l\})$	$(2m, 2m)$
$\deg(\overline{a})$ $\deg(\overline{b})$ $\deg(\overline{c})$	$\leq (2(k + l - 1) + 2 \max\{k, l\}, (k + l - 1) + \max\{k, l\})$	$(6m - 2, 3m - 1)$
$\deg(f^{\mathcal{J}^{c,r}})$	$\leq (12(k + l - 1) + 10 \max\{k, l\}, 2(k + l - 1) + 10 \max\{k, l\})$	$(34m - 12, 14m - 2)$

Tabelle 5.2.: Gradabschätzungen zur globalen Selbstschnittberechnung; Bei den Angaben mit mehreren Komponenten ist die erste für den Parameter  $t$  und die zweite für den Parameter  $w$  aus  $f^{\mathcal{S}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)) = 0$  bzw.  $f^{\mathcal{E}^{c,r}}(w, \mathfrak{P}^{\mathcal{H}^{c,r}}(t, u)) = 0$ . Auch hier ist  $v \in \{x, y, z\}$  und bezeichnet eine beliebige Komponente.



## Nullstellenisolation

Zur Isolation der reellen Nullstellen kommt ein Verfahren, welches auf der Vorzeichenregel von Descartes (siehe Satz A.15) basiert, zum Einsatz. Es wurde im Laufe der Zeit immer wieder diskutiert und leicht modifiziert (siehe [KM06]). Eigenwillig hat dem Thema eine ganze Dissertation [Eig08] gewidmet.

Das Prinzip besteht darin, das Ausgangsintervall  $]0, 1[$  eines Polynoms  $f$  solange immer weiter zu halbieren, bis nach der Vorzeichenregel klar ist, dass  $f$  im aktuellen Intervall genau eine oder keine Nullstelle hat. Dazu wird die Koeffizientenfolge des transformierten Polynoms

$$g(x) := (x + 1)^n f\left(\frac{1}{x + 1}\right)$$

dessen Nullstellenzahl in  $]0, \infty[$  mit der von  $f$  in  $]0, 1[$  übereinstimmt, betrachtet.

*Bemerkung.* Diese Transformation wird in zwei Schritten  $\bar{g}(x) := x^n f(\frac{1}{x})$  und  $g(x) := \bar{g}(x + 1)$  durchgeführt, wobei der erste nur der Umkehrung der Koeffizientenreihenfolge von  $f$  entspricht. Der zweite ist der sogenannte Taylor-Shift um eins. Die Unterteilung der Intervalle wird ebenfalls durch geeignete Polynomtransformationen realisiert.

Die wiederholte Halbierung des Ausgangsintervalls kann mit Hilfe eines Binärbaumes dargestellt werden, wobei die Tiefe  $b$  des Baumes die aktuelle Intervallgröße  $2^{-b}$  bestimmt.

Für das Verfahren wird in [RZ04] ein generischer Algorithmus angegeben, welcher es ermöglicht, die einzelnen Transformationsschritte, die Durchlaufreihenfolge des Binärbaumes, welcher die zu durchsuchenden Intervalle von  $f$  enthält, und die interne Speicherung zu verändern. Außerdem wird ein effizienter, speicheroptimaler Algorithmus auf Grundlage des generischen vorgestellt. Im Wesentlichen wurde dieser bis auf kleine Änderungen implementiert.

Zur Isolierung aller reellen Nullstellen eines Polynoms  $f$  werden die Polynome

$$f_-(x) := f\left(-\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad f_0(x) := f(2x - 1) \quad \text{sowie} \quad f_+(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$$

definiert. Offensichtlich gelten nun

$$\begin{aligned} f(]-\infty, 1]) &= f_-([0, 1]) \quad \text{und} \quad f(]-1, 1]) = f_0([0, 1]) \quad \text{sowie} \\ f(]-\infty, 1]) &= f_+([0, 1]), \end{aligned}$$

was es ermöglicht, die Nullstellen der drei neuen Polynome im Intervall  $]0, 1[$  zu isolieren, um die Nullstellen-Intervalle für  $f$  zu erhalten. Natürlich müssen die Intervallgrenzen entsprechend angepasst werden.

Jeder Knoten im Unterteilungsbaum repräsentiert ein Intervall von  $f$ . Wird eine Nullstelle  $t_0$  isoliert, so befindet sie sich in diesem Intervall. Es gilt also stets

$$t_0 \in \left] \frac{a}{2^b}, \frac{a+1}{2^b} \right[ \quad \text{mit} \quad 0 \leq a < 2^b. \quad (5.9)$$

Ein Terminierungsbeweis für quadratfreie Eingabepolynome ist in [AG98] oder [RZ04] zu finden. In dieser Implementierung wird jedoch auf die Berechnung des quadratfreien Teils des Ausgangspolynoms verzichtet, was ein zusätzliches Abbruchkriterium

$$a \geq 2^{31P} \quad \text{mit} \quad P \in \mathbb{N} \quad (5.10)$$

## 5. Implementierung

erforderlich macht, um sicherzustellen, dass der Algorithmus terminiert. Die Abhängigkeit von  $P$  gewährleistet auch, dass die Nummer  $a$  des aktuellen Intervalls in der jeweiligen Schicht des Baumes mit dem Typ CuMpf (siehe Abschnitt 5.5.1) darstellbar ist. Aus Gleichung (5.9) folgt  $b \geq \lceil \log_2(a) \rceil$  und mit der Abbruchbedingung 5.10 gilt dann  $b \geq 31$ .

Durch die neue Abbruchbedingung kann es theoretisch sein, dass Nullstellen ignoriert und nicht isoliert werden. Das betrifft für ein hinreichend großes  $P$  nur mehrfache Nullstellen. Das Ignorieren dieser Nullstellen ist aber kein Problem. Sowohl der Schnitt eines Strahles  $\mathcal{R}$  beim Raycasting (vgl. Abschnitt 4.3) mit der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  an einer Stelle  $t = t_0 \in I$  als auch der Schnitt eines charakteristischen Kreises  $\mathcal{C}_{t_0}^{c,r}$  mit einem anderen (für die Berechnung des globalen Selbstschnittes in Abschnitt 3.2.1) kann maximal die Vielfachheit zwei haben. Da diese Berührungspunkte keinen Einfluss auf die Levelbestimmung haben (vgl. Bemerkung 4.13), reicht es aus, die einfachen Nullstellen zu ermitteln.

### Approximation der Nullstellen

Für die Annäherung wurde ein Bisektionsverfahren implementiert, welches das jeweils zu untersuchende Intervall in jedem Schritt halbiert (siehe [Pre+07, 9.1.1 S. 447 ff.]).

Die Vorteile dieses Verfahrens sind, dass es mit wenigen und einfachen Operationen auskommt und immer konvergiert, solange das Polynom im angegebenen Intervall wirklich genau eine Nullstelle hat.

### Komplexe Nullstellen

Zur Annäherung der komplexen Nullstellen reeller Polynome wurde hier auf eine frei verfügbare Implementierung [CRBa] des Verfahrens nach Jenkins und Traub zur Approximation komplexer Nullstellen reeller Polynome von [CRBb] zurückgegriffen. Der zu Grunde liegende Algorithmus wird in [JT70; Jen75] beschrieben.

Diese Implementierung wurde als Black-Box verwendet, da sie ohnehin nur an einer Stelle, nämlich zur Dekomposition des Zählerpolynoms  $\langle \tilde{c}(t), \tilde{c}(t) \rangle - \tilde{r}^2(t)$  von  $(l_t^\pi)^2$  aus Gleichung (2.22), eingesetzt wird und ihre Laufzeit nicht entscheidend für die Gesamtberechnungen ist. Ausgewählt wurde dieses Verfahren, weil es robust und global konvergent ist.

## 5.4. Wichtige Operationen

In diesem Abschnitt wird auf die Implementierung einiger häufig genutzter, elementarer Operationen eingegangen. Dafür sei zuvor noch festgehalten, dass das Polynom

$$\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t) := \langle Qh(t) - \bar{c}(t), Qh(t) - \bar{c}(t) \rangle - \bar{r}^2(t) = f^{S^{c,r}}(t, Q)h^2(t) \quad (5.11)$$

dieselben Nullstellen wie die rationale Funktion  $f_Q^{S^{c,r}}(t)$  hat, da nach Lemma 2.12  $h(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt.

### 5.4.1. Außentest

Hier wird gezeigt, wie für einen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  ermittelt wird, ob es sich bei ihm um einen Außenpunkt bezüglich einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  handelt.

**Lemma 5.1.** *Ein Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  ist genau dann ein Außenpunkt bezüglich einer Kugelfamilie  $S^{c,r}$ , wenn das Polynom  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t)$  aus Gleichung (5.11) keine einfache Nullstelle  $t_0$  im offenen Intervall  $I_o$  hat und es ein  $t_1 \in I$  mit  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t_1) > 0$  gibt.*

*Beweis.* Die Existenz einer einfachen Nullstelle  $t_0 \in I_o$  von  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t, Q)$  impliziert sofort

$$0 > \overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t_1) = f^{S^{c,r}}(t_1, Q)h^2(t_1)$$

für ein  $t_1 \in I$ . Daraus folgt wiederum  $f^{S^{c,r}}(t_1, Q) < 0$ , da nach Lemma 2.12  $h(t_1) \neq 0$  gilt. Dann ist  $P$  nach Definition 3.9 kein Außenpunkt. Also kann es für einen Außenpunkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  keine einfache Nullstelle von  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t)$  in  $I$  geben und mit Definition 3.9 folgt der erste Teil der Aussage von Lemma 5.1.

Umgekehrt ergibt sich aus der Existenz eines  $t_1 \in I$  mit  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t_1) > 0$  und der Tatsache, dass  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}$  in  $I_o$  keine mehrfachen Nullstellen hat, für alle  $t \in I$  die Aussage  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}(t) \geq 0$ . Dann ist  $Q$  nach Definition 3.9 ein Außenpunkt.  $\square$

Für die Nullstellenzählung kann das Verfahren zur Bestimmung der reellen Nullstellen eines reellen Polynoms aus Abschnitt 5.3.4 genutzt werden.

## 5.4.2. Bestimmung des Tiefenlevels

Die Bestimmung des Tiefenlevels eines beliebigen Punktes  $Q \in \mathbb{R}^3$  kann nach Definition 3.23 über die Funktion  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}$  erfolgen. Es müssen alle Intervalle  $[t_1, t_2]$  gezählt werden, für die  $\mathcal{U}_{t_1, t_2}^{c,r}$  ein umschließendes Schlauchstück von  $Q$  ist.

Das geschieht mittels der reellen Nullstellen des Polynoms  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}$ . Wenn  $Q$  nicht zur Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  gehört, hat  $\overline{f_Q^{S^{c,r}}}$  keine mehrfachen Nullstellen.

Auch in diesem Fall kann die Methode zur Bestimmung der reellen Nullstellen eines reellen Polynoms aus Abschnitt 5.3.4 genutzt werden.

## 5.5. Numerische Probleme

Bei der Nullstellenbestimmung kann es schnell zu fehlerhaften Ergebnissen kommen, falls die zur Verfügung stehende Genauigkeit nicht ausreichend ist. Das ist teilweise schon bei Eingangsgraden von  $k = 3$  der Fall (vgl. Abb. 5.1a). Das liegt daran, dass die Polynom-Transformationen wie  $g(x) = f(x+1)$  bzw.  $g(x) = f(x-1)$  nicht mehr exakt, sondern nur noch mit Fehlern ausgeführt werden können. Bei geringer Rechengenauigkeit ist schon das erstellte Ausgangspolynom, von welchem die Nullstellen berechnet werden sollen, nicht korrekt.

Zur Beseitigung solcher Fehler hat Schenk in [Sch13] eine Bibliothek für die GPU zur Darstellung von und zum Rechnen mit Gleitkommazahlen beliebiger Genauigkeit entwickelt, welche im Rahmen dieser Arbeit ausgebaut und weiterentwickelt wurde (siehe Abschnitt 5.5.1).

### 5.5.1. Klasse CuMpf

Die Klasse CuMpf ist eine Weiterentwicklung der in [Sch13] beschriebenen Methoden. Sie ermöglicht das Darstellen von Zahlen mit einstellbarer Genauigkeit<sup>4</sup> sowie das Rechnen mit diesen.

<sup>4</sup>Natürlich sind hier schon durch den relativ geringen Speicherplatz auf der Grafikkarte Grenzen gesetzt.

## 5. Implementierung

Jedes Objekt der Klasse CuMpf hat die Attribute  $n$  vom Typ boolean zur Speicherung des Vorzeichens und  $e$  vom Typ int für den Exponenten sowie das Feld  $m$ , welches aus  $P$  unsigned ints besteht, für die Mantisse. Hierbei ist  $P$  eine konstante, statische Größe der Klasse vom Typ int, welche bestimmt, wie viele **digits** für die Mantissen der CuMpf-Zahlen verwendet werden. Der Wert einer Zahl  $c$  vom Typ CuMpf errechnet sich durch

$$z = (-1)^n \sum_{i=0}^{P-1} m[i] b^{-i-1} b^e. \quad (5.12)$$

Die Basis  $b$  ist in der Implementierung  $2^{32}$ . Das signifikanteste digit  $m[0]$  ist stets für alle von 0 und  $\pm\infty$  verschiedenen Zahlen ungleich null.

Die null wird durch  $e = e_{\min} := -2^{31}$  gekennzeichnet. Je nachdem welchen Wert  $n$  hat, steht  $e = e_{\max} := 2^{31} - 1$  für  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

### Genauigkeit

Die Genauigkeit ist also am geringsten, wenn  $m[0] = 1$  ist, weil in diesem Fall 31 Bits nicht genutzt werden. Es werden also niemals weniger als  $(32(P - 1) + 1)$  Bits für die Mantisse genutzt. Damit ergeben sich die folgenden Größen für die Anzahl der minimal genutzten Bits pro Mantisse in Abhängigkeit von  $P$ :

$P$	1	2	3	4	8	16
Bits	1	33	65	97	225	481

Demzufolge ist völlig klar, dass  $P = 1$  nur unbrauchbare Ergebnisse liefern kann. Mit  $P = 2$  wird bereits die einfache Genauigkeit von Gleitkommazahlen nach [IEE] (23 Bits für die Mantisse bei float) übertroffen und die doppelte (52 Bit-Mantisse bei double) bei  $P = 3$ . Sämtliche Bilder dieser Arbeit ohne abweichende Angaben für  $P$  wurden mit dem Standardwert  $P = 8$  berechnet, auch wenn das nicht in allen Fällen erforderlich gewesen wäre.

### Darstellbarer Zahlenbereich

Für die Werte  $m_v$  der Mantisse gilt

$$m_v := \sum_{i=0}^{P-1} m[i] b^{-i-1} \leq 1 - 2^{-32P} =: m_{\max},$$

wobei  $m_{\max}$  auch noch darstellbar ist. Der Bereich der darstellbaren Zahlen ist nach Gleichung (5.12) offensichtlich symmetrisch und geht von  $-z_{\max}$  bis  $z_{\max}$ , wobei

$$z_{\max} = m_{\max} 2^{32(e_{\max}-1)} < 2^{32(e_{\max}-1)} = 2^{2^{36}-64}$$

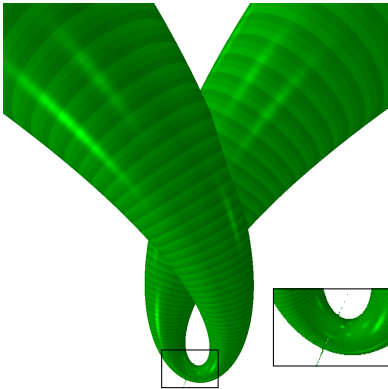
die größte darstellbare Zahl ist. Mit

$$z_{\min} = 2^{-32} 2^{32(e_{\min}-1)} = 2^{32(e_{\min}-2)} = 2^{-(2^{36}+64)}$$

sei die betragsmäßig kleinste, von null verschiedene, durch CuMpf realisierbare Zahl bezeichnet. Außerdem können alle ganzen Zahlen im Bereich von

$$-2^{32P} + 1 \quad \text{bis} \quad 2^{32P} - 1$$

dargestellt werden.



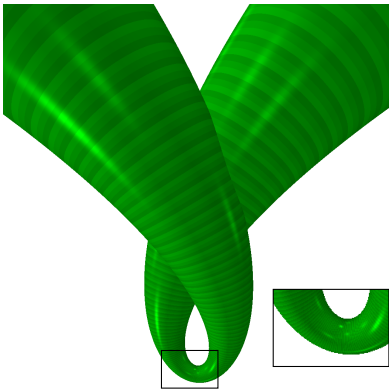
(a) Hüllfläche aus Beispiel 14 mit  $k = 3$  und Hauptnenner  $h \equiv 1$ ; Bei  $P = 2$  treten Fehler auf.



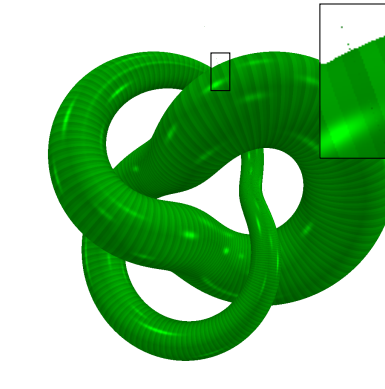
(b) Einhüllende aus Beispiel 8 mit maximalem Eingangsgrad  $k = l = 10$  und  $P = 3$



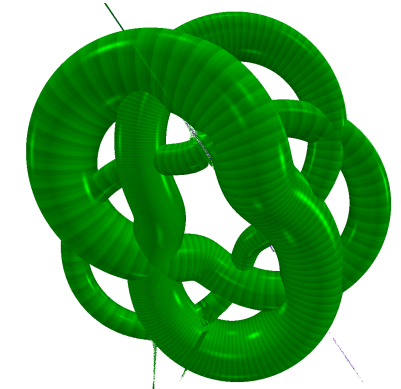
(c) Enveloppe einer Kugelschar entlang eines Torusknotens mit  $k = l = 16$  und  $P = 4$  (Beispiel 21)



(d) Für  $P = 3$  treten schon keine sichtbaren Fehler mehr wie in Abb. 5.1a auf.



(e) Anders als in Abb. 5.1b ist hier  $P = 4$ . Es treten immer noch kleine Fehler auf, die bei  $P = 5$  verschwinden (siehe Abb. 2.14a).



(f) Dieselbe Einhüllende wie in Abb. 5.1c mit  $P = 5$ ; Die restlichen Fehler verschwinden für  $P = 6$  (siehe Abb. 6.5a).

Abbildung 5.1.: Numerische Ungenauigkeiten am Beispiel einiger Hüllflächen

### 5.5.2. Beispiele

Zur Veranschaulichung der Fehler bei der Nullstellenbestimmung werden hier die mit dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen Verfahren erstellten Bilder einiger Beispiele von Hüllflächen herangezogen.



## 6. Auswertung / Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Resultate der Arbeit ausgewertet. Dazu werden zunächst anhand weiterer Beispiele Resultate in Form von Abbildungen geliefert. Im Anschluss werden die Laufzeiten für diese Berechnungen angegeben und kurz diskutiert. Außerdem sollen auch ein paar Funktionen des entwickelten Programms kurz genannt werden. Abschließend werden eine Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse gegeben und ein paar Perspektiven aufgezeigt.

### 6.1. Beispiele

In diesem Abschnitt werden für ein paar weitere Beispiele von Kugelscharen  $\mathcal{S}^{c,r}$  die rationalen Funktionen  $c$  und  $r$  angegeben. Zu jedem Beispiel gibt es eine Darstellung der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  von außen zur Orientierung sowie eine mit eingezeichnetem Selbstschnitt aus einer ausgewählten Perspektive von innen. Das dritte Bild zu jedem Beispiel zeigt die Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  aus der gleichen Perspektive wie das zweite Bild. Die zugehörigen Grade der Polynome und die Laufzeiten der Berechnungen für diese Bilder werden in Tabelle 6.1 angegeben.

*Beispiel 14* (Schleife).

$$c(t) = \begin{pmatrix} 2(t^2 - 1) \\ (t^2 - 1)t \\ \frac{1}{5}t \end{pmatrix}, \quad r(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{10}$$

In Abb. 1.3 auf Seite 12 sind die Bilder zu diesem Beispiel zu finden.

*Beispiel 15* (Doppelring). Die transzendente Parametrisierung

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$$

kann durch Anwendung der Additionstheoreme so umgeformt werden, dass die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  nur noch  $t$  als Argument haben. Anschließend werden  $\sin(t)$  durch  $\frac{2s}{1+s^2}$  und  $\cos(t)$  durch  $\frac{1-s^2}{1+s^2}$  ersetzt und man erhält

$$c(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} t^4 - 6t^2 + 1 \\ -4t^3 + 4t \\ t^3 + t \end{pmatrix}. \quad \text{Die Radiusfunktion sei } r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(4t^2 - 3t + 5)\right)^2}{(1+t^2)^2}.$$

In Abb. 4.14 ist dieses Beispiel dargestellt.

*Beispiel 16* (c3s2s3). Die Parametrisierung

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

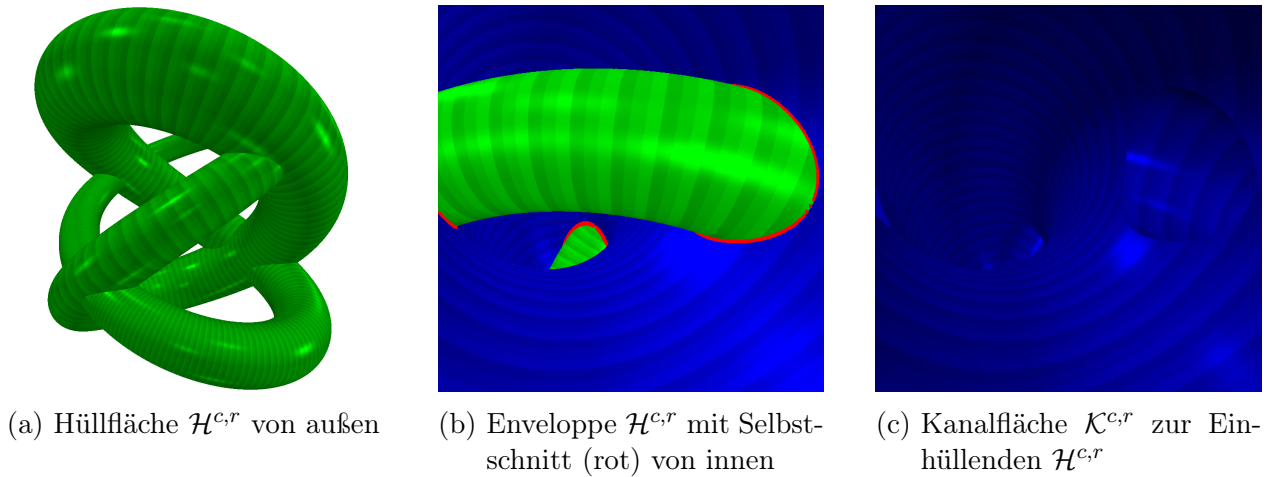


Abbildung 6.1.: Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 16

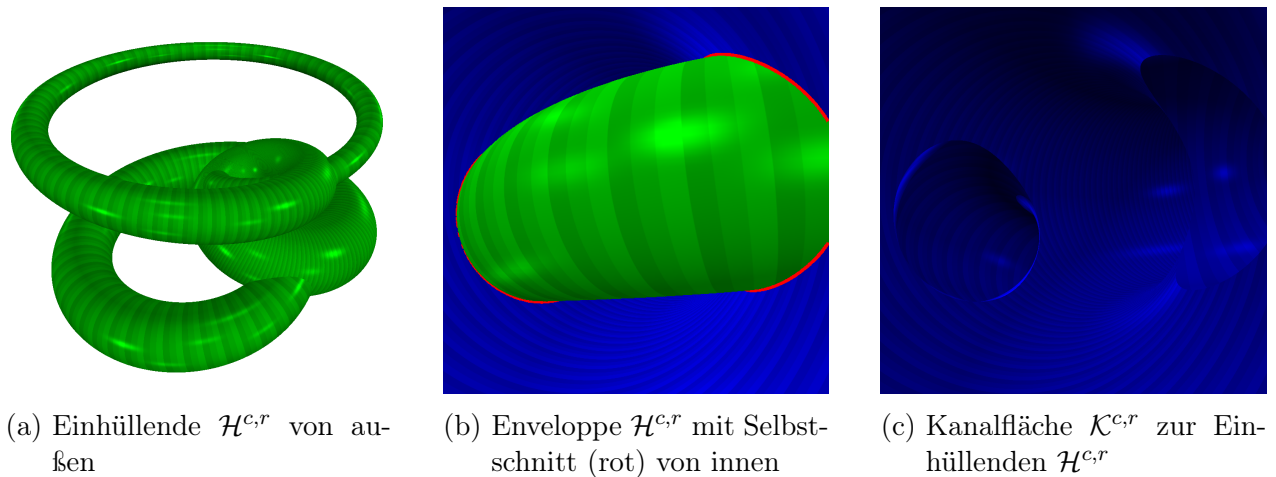


Abbildung 6.2.: Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 17

hat die rationale Form

$$c(t) = \frac{1}{(1+t^2)^3} \begin{pmatrix} -t^6 + 15t^4 - 15t^2 + 1 \\ -4t^5 + 4t \\ 6t^5 - 20t^3 + 6t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(4t^2 + 1t + 6)\right)^2}{(1+t^2)^2}$$

sei als Radiusfunktion vorgegeben. Siehe Abb. 6.1.

*Beispiel 17* (Hoher Ring). Die Parametrisierung

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \cos(3t) \\ \sin(t) \sin(3t) \\ \frac{1}{2} \sin(t) \end{pmatrix}$$

kann rational durch

$$c(t) = \frac{1}{(1+t^2)^4} \begin{pmatrix} -2t^7 + 30t^5 - 30t^3 + 2t \\ 12t^6 - 40t^4 + 12t^2 \\ t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t \end{pmatrix}$$



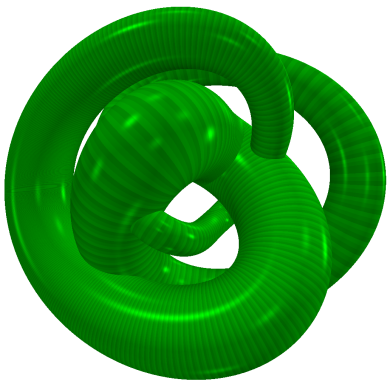
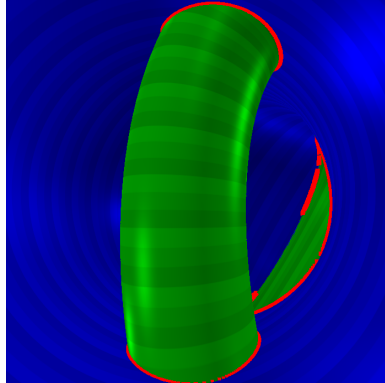
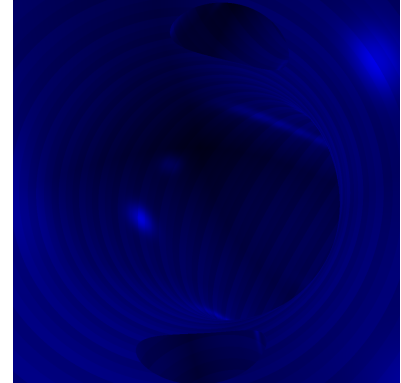
(a) Außenansicht der Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$ (b) Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  mit Selbstschnitt (rot) von innen(c) Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$ 

Abbildung 6.3.: Hüll- und Kanalfläche zu Beispiel 19

dargestellt werden. Es sei

$$r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(4t^2 - 2t + 3)\right)^2}{(1 + t^2)^2}$$

die Radiusfunktion. Siehe Abb. 6.2.

*Beispiel 18* (Torusknoten). Die Raumkurve

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos(pt)) \cos(qt) \\ (2 + \cos(pt)) \sin(qt) \\ \sin(pt) \end{pmatrix}$$

werde als Torusknoten bezeichnet. Für die Parameter  $p$  und  $q$  können natürliche Zahlen eingesetzt und die Terme der Komponenten analog zu Beispiel 15 umgeformt werden. Auf diese Weise erhält man eine ganze Klasse von Beispielen.

*Beispiel 19* (TK23c5). Der Torusknoten aus Beispiel 18 hat für  $p = 2$  und  $q = 3$  sowie  $\hat{c}_z = \cos(5t)$  die rationale Parameterdarstellung

$$c(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^5} \begin{pmatrix} -3t^{10} + 47t^8 - 78t^6 + 78t^4 - 47t^2 + 3 \\ 18t^9 - 72t^7 + 76t^5 - 72t^3 + 18t \\ -t^{10} + 45t^8 - 210t^6 + 210t^4 - 45t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Der Radius sei durch

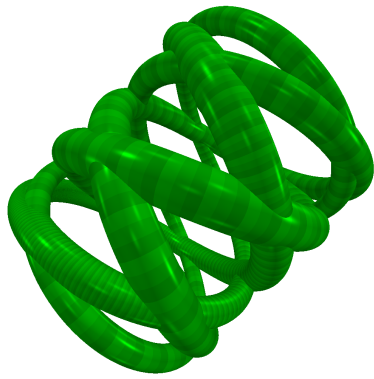
$$r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(8t^2 - 4t + 7)\right)^2}{(1 + t^2)^2}$$

gegeben. (vgl. Abb. 6.3)

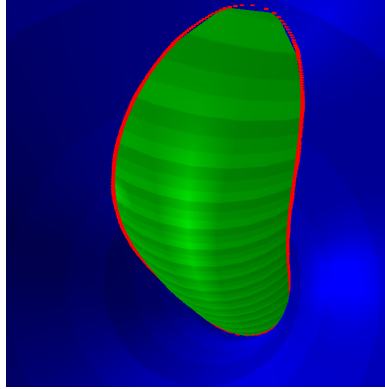
*Beispiel 20* (Spule). Aus der Parameterdarstellung

$$\hat{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \cos(5t) \\ \sin(2t) \sin(5t) \\ \sin(7t) \end{pmatrix}$$

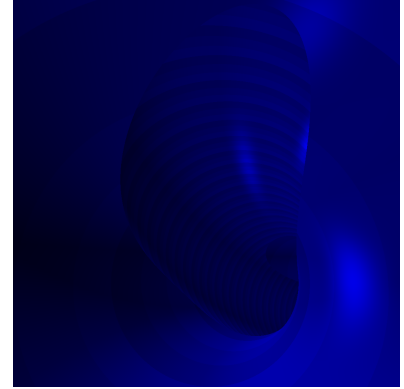
6. Auswertung / Ergebnisse



(a) Außenansicht der Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$

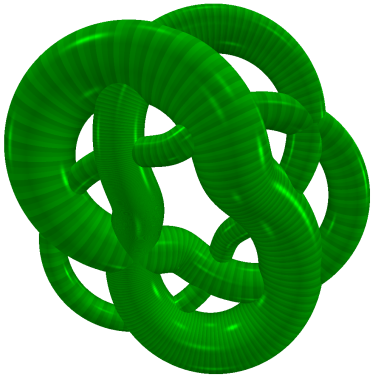


(b) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  von innen mit eingezeichnetem Selbstschnitt (rot)

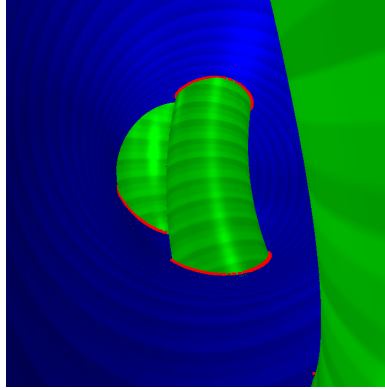


(c) Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$

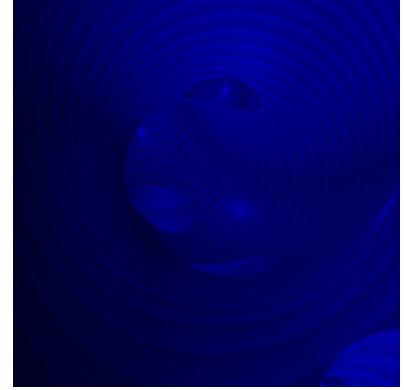
Abbildung 6.4.: Einhüllende und Kanalfläche zu Beispiel 20



(a) Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  von außen



(b) Enveloppe  $\mathcal{H}^{c,r}$  von innen mit eingezeichnetem Selbstschnitt (rot)



(c) Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  zur Einhüllenden  $\mathcal{H}^{c,r}$

Abbildung 6.5.: Enveloppe und Kanalfläche zu Beispiel 21

kann die rationale Form

$$c(t) = \frac{1}{(1+t^2)^7} \begin{pmatrix} -t^{14} + 51t^{12} - 481t^{10} + 1515t^8 - 1515t^6 + 481t^4 - 51t^2 + 1 \\ -40t^{12} + 520t^{10} - 1488t^8 + 1488t^6 - 520t^4 + 40t^2 \\ 14t^{13} - 364t^{11} + 2002t^9 - 3432t^7 + 2002t^5 - 364t^3 + 14t \end{pmatrix}$$

hergeleitet werden. Die Radiusfunktion sei

$$r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(3t^2 - 1t + 3)\right)^2}{(1+t^2)^2}.$$

Abb. 6.4 zeigt dieses Beispiel.

*Beispiel 21* (TK53s3). Der Torusknoten aus Beispiel 18 hat für  $p = 5$ ,  $q = 3$  und  $\hat{c}_z = \sin(3t)$

$$c(t) = \frac{1}{(1+t^2)^8} \begin{pmatrix} -t^{16} - 40t^{14} + 1000t^{12} - 3904t^{10} + 6390t^8 - 4168t^6 + 800t^4 - 80t^2 + 3 \\ 6t^{15} + 310t^{13} - 2234t^{11} + 5510t^9 - 5950t^7 + 2098t^5 - 270t^3 + 18t \\ 6t^{15} + 10t^{13} - 34t^{11} - 110t^9 - 110t^7 - 34t^5 + 10t^3 + 6t \end{pmatrix}$$

als rationale Parametrisierung. Die Radiusfunktion sei

$$r(t) = \frac{\left(\frac{1}{10}(7t^2 - 3t + 6)\right)^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Abb. 6.5 zeigt dieses Beispiel.

## 6.2. Laufzeiten

Aus Tabelle 5.1 ist zu entnehmen, dass der Grad von  $f^{\mathcal{R}}$  fast das Sechsfache des Ausgangsgrades ( $6m - 2$  bei  $k = l = m$ ) erreichen kann. Sind die Komponenten von  $c$  und die Radiusfunktion  $r$  der Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  ganzrationale Funktionen ( $l = 0$  und  $m = k$ ), so kann der Grad von  $f^{\mathcal{R}}$  höchstens  $4k - 2$  betragen. Dennoch ergibt das selbst bei nur kubischen Eingangsfunktionen immerhin schon eine Funktion zehnten Grades. Noch dramatischer verhält es sich bei der Selbstschnittberechnung der Hüllflächen wie in Tabelle 5.2 zu sehen ist. Hier kann der Grad von  $f^{\mathcal{J}^{c,r}}$  maximal ( $34m - 12$ ,  $14m - 4$ ) bzw. ( $22k - 12$ ,  $12k - 2$ ) für  $l = 0$  sein.

Das zeigt deutlich, dass schon bei relativ geringen Eingangsgraden, die Nullstellen von Polynomen höheren bis hohen Grades berechnet werden müssen. Außerdem genügt es in keinem Fall, nur eine einzige Nullstelle zu bestimmen, wie es beispielsweise beim Standard-Raycasting der Fall ist. Es werden stets alle reellen Nullstellen benötigt.

Aus diesen Gründen ist ein Rendering der Kanalflächen in Echtzeit mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich gewesen. Der Einsatz der Grafikkarte hat dennoch zumindest beim Raycasting einen erheblichen Geschwindigkeitszuwachs (Faktor 60, vgl. Tabelle 6.1 Beispiel 14) eingebracht.

Bei der Selbstschnittberechnung sind die Geschwindigkeitsvorteile nicht so groß. Für Polynome hohen Grades nehmen schon die Erstellung von  $f^{\mathcal{J}^{c,r}}$  und verschiedene Nachberechnungen auf der CPU einen sehr hohen Zeitanteil ein. Diese Prozesse laufen auch mit Grafikkartenbeschleunigung noch auf der CPU ab, was die Gesamtbeschleunigung natürlich verringert. Die Bibliothek GiNaC ([Bau+]) versagt beim Expandieren von Polynomen höheren Grades ganz. Aus diesem Grund wurde hierfür extra eine Klasse BivPoly als Template zum Rechnen mit bivariaten Polynomen implementiert.

In Tabelle 6.1 sind sowohl die Laufzeiten des Raycastings und die der Selbstschnittberechnung als auch die Grade der zu lösenden Polynome für die Beispiele aus Abschnitt 6.1 angegeben.

## 6.3. Programmfeatures / Programmbeschreibung

Hier werden die wichtigsten Merkmale des entwickelten Programms kurz genannt. Es soll keine ausführliche Programmbeschreibung gegeben werden.

Das entstandene Programm ist in der Lage, sowohl die Hüllfläche  $\mathcal{H}^{c,r}$  als auch die Kanalfläche  $\mathcal{K}^{c,r}$  einer Kugelschar  $\mathcal{S}^{c,r}$  mittels des Raycasting-Verfahrens aus Abschnitt 4.3 darzustellen. Für die Komponenten von  $c$  und die Radiusfunktion können rationale Ausdrücke in symbolischer Schreibweise angegeben werden. Dabei ist zu beachten, dass der Parameter stets  $t$  sein muss. Es sind also nur Ziffern, „ $t$ “ als Parameter, die Zeichen „+“, „-“, „\*“, „/“ für die Grundoperationen, die Klammern „(“ sowie „)“, das Zeichen „^“ zum Potenzieren und „.“ als Komma zugelassen.

Fläche	$k$	$l$	$\text{deg}(f^{\mathcal{R}})$	Ray CPU	Ray GPU	$\text{deg}(f^{\mathcal{J}^{cr}})$	$n$	Int CPU	IntGPU	Nst CPU	Nst GPU
Beispiel 14	3	0	10	1358	22	(54, 34)	2802	69	34	63	27
Schleife							28002	698	100	640	41
Beispiel 15	4	4	20	3091	45	(112, 52)	4072	221	79	177	36
Doppelring							9580	499	124	418	42
Beispiel 16	6	6	32	10353	166	(180, 80)	1455	293	192	178	75
c3s2s3							15839	2272	491	1902	120
							116047	15922	2831	13870	454
Beispiel 17	7	8	44	19568	244	(248, 108)	2009	866	581	516	229
Hoher Ring							20863	6387	1264	5393	246
Beispiel 19	10	10	56	34538	581	(316, 136)	2359	1873	1069	993	177
TK23c5							9423	5209	1452	3944	220
Beispiel 20	14	14	80	63403	927	(452, 192)	3551	6210	4195	2825	754
Spule							35419	33276	8248	26917	1992
Beispiel 21	16	16	92	76862	1146	(520, 220)	4021	9101	6297	3493	762
TK53s3							8049	12685	6873	6812	972

Tabelle 6.1.: Laufzeiten vom Raycasting (Ray) und der Selbstschnittberechnung (Int) auf der CPU (nicht parallelisiert) und der GPU (parallelisiert) in Sekunden für  $P = 8$ ; Beim Raycasting beziehen sich die Zeiten auf die zu den Beispielen gehörigen Innenansichten der Kanalfächen mit einer Auflösung von 1024x1024. Mit Nst CPU und Nst GPU sind die Laufzeiten der reinen Nullstellenberechnung von  $f^{\mathcal{J}^{cr}}$  angegeben. Die Grade der relevanten Polynome sind zum Vergleich auch mit angegeben. Dabei ist der Grad von  $f^{\mathcal{J}^{cr}}$  ein Tupel, bei dem der zweite Teil interessant ist. Für die erste Variable werden die Werte der Spezialisierungsstellen eingesetzt. Die Variable  $n$  bezeichnet die Anzahl dieser Stellen,  $k$  und  $l$  sind wie in Tabellen 5.1 und 5.2 belegt. Als Grafikkarte kam eine GeForce GTX 670MX zum Einsatz. Bei der CPU handelt es sich um einen Intel Core i7 – 3630QM Prozessor (2.40 GHz).

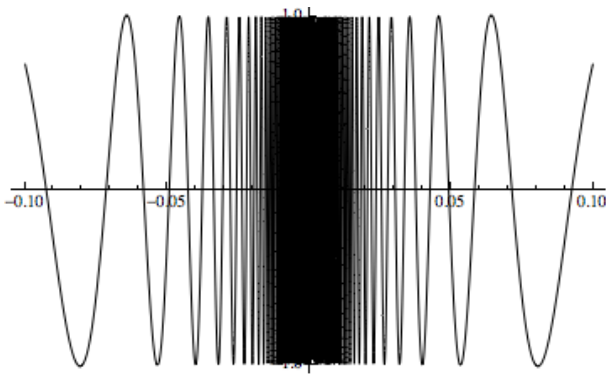
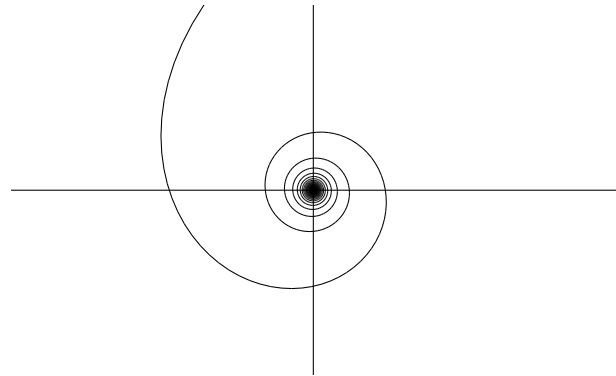
(a) Funktion  $\sin(1/t)$ ; Bild aus [McC](b) Die Spirale  $(\frac{1}{t} \cos(t), \frac{1}{t} \sin(t))^T$  hat in jeder noch so kleinen Umgebung um den Ursprung unendlich viele Windungen.

Abbildung 6.6.: Transzendente Funktionen; Die Funktionsgraphen schneiden die  $x$ -Achse unendlich oft. Das gilt auch für Hüllflächen  $\mathcal{H}^{c,r}$  von Kugelscharen, welche diese Graphen als Mittenkurve haben.

Das OpenGL-Fenster unter den Eingabefeldern der Komponentenfunktionen kann für genauere Betrachtungen der Hüllflächen oder zum Einstellen der frei beweglichen Kamera genutzt werden. Welche Elemente dargestellt werden sollen, wird über den Menüpunkt *Anzeigen*  $\rightarrow$  *Elemente zeichnen* ausgewählt. Der Selbstschnitt muss zuvor durch Auswahl von *Berechnung*  $\rightarrow$  *Selbstschnitt* wahlweise mit (GPU) oder ohne Beschleunigung durch die Grafikkarte (CPU) berechnet werden. Es können verschiedene Beispielkurven über das Menü (*Kurve*) gewählt werden. Hier ist es auch möglich, eine Bezier- oder Hermite-Kurve (siehe [PBP02]) durch die Verschiebung (mit der Maus) der nach Auswahl des entsprechenden Menüpunktes angezeigten Kontrollpunkte als Mittenkurve zu erstellen. Über *Kurve*  $\rightarrow$  *Näherung ändern* kann eine feste Parameterschrittweite (*Schrittweite*) eingestellt werden, oder man wählt, dass die Bogenlänge (*Bogenlänge*) bzw. die Winkelabweichung (*Winkel*) des Tangenten- und Normalenvektors zwischen zwei Stützstellen einen bestimmten Wert nicht überschreiten darf.

Das Speichern und Laden von Kamerapositionen (*Perspektive*), Kanälen (*Kanal*), Lichteinstellungen (*Lichtquellen*) und Materialien (*Materialien*) ist möglich. Die beiden letzten können über *Einstellungen* natürlich auch angepasst werden.

## 6.4. Zusammenfassung bzw. Wertung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Ansätze zur Darstellung von Kanalflächen nach Definition 4.1 verfolgt. Beide wurden theoretisch vollständig erarbeitet. Hierzu wurden eine Tiefenfunktion  $\mathfrak{d}^{c,r}$  und ein von ihr bestimmtes Tiefenlevel eingeführt (Definition 3.23) und mehrere Hilfssätze über das Verhalten dieses Levels bezüglich der Schnittpunkte einer Kurve mit der Hüllfläche aufgestellt und bewiesen. Diese Aussagen wurden dann auf die charakteristischen Kreise der Enveloppen bzw. auf die Augstrahlen beim Raycasting als spezielle Kurven angewendet. Für die globalen Selbstschnittberechnungen der Hüllflächen nach der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methode war es erforderlich, bestimmte Einschränkungen für die Komponenten der Mittenkurve und die Radiusfunktion vorzunehmen. So wurden die Zusatzbedingungen

## 6. Auswertung / Ergebnisse

1.  $c_x, c_y, c_z$  und  $r$  sind rationale Funktionen von  $I$  nach  $\mathbb{R}$  sowie
2.  $|\vec{c}'(t)| > |r'(t)|$  für alle  $t \in I$

gefordert. Dabei handelt es sich aber durchaus auch um sinnvolle Einschränkungen. So sind beispielsweise Enveloppen, welche in ganzen Intervallen nur aus einer einzigen Kugel bestehen, nicht besonders interessant. Dieser Fall tritt ein, wenn die zweite Bedingung verletzt wird (siehe Abschnitt 2.3.2). Die erste Bedingung schließt transzendente Funktionen aus. In Abb. 6.6 ist anhand zweier Beispiele zu sehen, dass für solche Funktionen Hüllflächen entstehen können, welche sich unendlich oft mit einem einzigen Strahl schneiden, was eine Schnitzzählung und damit die Bestimmung des Tiefenlevels unmöglich macht.

Das Raycasting-Verfahren (Abschnitt 4.3), welches bei hinreichender Genauigkeit (CuMpf::P aus Abschnitt 5.5.1 hoch genug) exakte Ergebnisse liefert, wurde vollständig implementiert. Von dem anderen Visualisierungsansatz (Abschnitt 4.2) wurde zudem noch die Berechnung des Selbstschnittes der Hüllflächen umgesetzt. Beides wurde so in das entwickelte Programm mit grafischer Benutzerschnittstelle aufgenommen, dass die Berechnungen sowohl mit Unterstützung durch die GPU als auch ohne durchgeführt werden können. Somit ist der erreichte Geschwindigkeitsvorteil (siehe Tabelle 6.1), welchen der Einsatz der Grafikkarte für die Berechnungen mit sich bringt, messbar.

Zur Lösung sämtlicher Schnittpunkte wurde ein Nullstellen-Solver implementiert, welcher in der Lage ist, auch die Nullstellen von Polynomen hohen Grades zu bestimmen. Der höchste Grad aller getesteten Polynome ist 220 von  $\overline{f^{\mathcal{J}^{c,r}}}$  aus Beispiel 21 (siehe Tabelle 6.1). Dieser Solver wurde so ausgelegt, dass er auch mit dem begrenzten Speicherplatz der Grafikkarte auskommt, um auch auf ihr ausgeführt werden zu können. Er nutzt die Klasse CuMpf, welche eine Erweiterung der von Schenk in [Schenk] entwickelten Bibliothek zum Rechnen mit Gleitkommazahlen beliebiger Genauigkeit ist.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Zielstellung weitestgehend abgearbeitet wurde. Darüber hinaus wurden auch Zusammensetzungen von Hüllflächen theoretisch betrachtet. Die Darstellung dieser Enveloppen war nicht Bestandteil dieser Arbeit.

### 6.4.1. Perspektiven

Die Fortsetzungen von Hüllflächen (siehe Definition 2.20) bieten eine Möglichkeit, den Verlauf von Enveloppen über lange Strecken kontrolliert vorzugeben und dabei den Grad der rationalen Funktionen gering zu halten. Es könnten mehrere Hüllflächen kleineren Grades, deren Verlauf durch Kontrollpunkte bestimmt wird, stückweise zusammengesetzt werden. Das verringert den Aufwand für die Schnittberechnungen mit den einzelnen Hüllflächen, jedoch müsste zur Ermittlung des Selbstschnittes der kompletten Einhüllenden jedes Teilstück mit jedem anderen geschnitten werden, was den Aufwand quadratisch in der Anzahl der Teilstücke erhöht. Für das Raycasting-Verfahren sieht es günstiger aus. Jeder Augstrahl müsste mit jedem Teilstück geschnitten werden, was also einen linearen Aufwand in der Anzahl dieser Teilstücke bedeutet. Die Sortierung aller Schnitte pro Strahl muss sowieso einmal erfolgen. Hierin liegt also möglicherweise noch Potenzial für künftige Arbeiten.

Außerdem ist in dieser Arbeit die Parallelisierung der Berechnungen dadurch erfolgt, dass beim Raycasting die Operationen für die einzelnen Bildpunkte bzw. Augstrahlen und bei der Selbstschnittberechnung die Nullstellenbestimmungen der Polynome  $\overline{f_{t_i}^{\mathcal{J}^{c,r}}}$  für die verschiedenen

Werte  $t_i$  aus  $T$  parallel ablaufen. Ob und wenn ja wie die Parallelisierung der Nullstellenberechnung eines einzigen Polynoms möglich ist, war nicht Gegenstand dieser Arbeit. So wurden beispielsweise die einzelnen Operationen der Klasse CuMpf (vgl. Abschnitt 5.5.1) nicht parallelisiert, sondern laufen nur parallel ab. Hier können eventuell spätere Arbeiten ansetzen, um die Berechnungen zu beschleunigen.





# A. Analytische Grundlagen

In diesem Kapitel werden ein paar Grundlagen erläutert, deren Kenntnis eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis dieser Arbeit ist. Weil diese Fakten den meisten Lesern dieser Arbeit wahrscheinlich bekannt sind, sie aber dennoch nicht ganz vernachlässigt werden sollen, ist dieses Kapitel im Anhang platziert worden.

## A.1. Funktionen/Abbildungen

**Definition A.1** (Stetigkeit). Es seien  $D \subset \mathbb{R}^m$  und  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- Eine (mehrstellige) Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x)$$

heißt genau dann **stetig im Punkt**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ , wenn es für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\epsilon > 0$  ein  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  Folgendes gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- Eine Abbildung

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x \mapsto g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$$

ist genau dann **stetig im Punkt**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ , wenn jede ihrer Komponenten  $g_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  in  $x_0$  stetig ist.

Die Funktion  $f$  bzw. die Abbildung  $g$  wird genau dann als **stetig** bezeichnet, wenn sie in allen Punkten  $x \in D$  stetig ist.

**Definition A.2** (Differenzierbarkeit). Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  gegeben. Eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x)$$

ist genau dann **bei**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$  **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Er heißt Ableitung von  $f$  bei  $x_0$ .

Eine Abbildung

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x \mapsto g(x)$$

heißt **bei**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$  **differenzierbar**, wenn all ihre Komponenten bei  $x_0$  differenzierbar sind.

Die Funktion  $f$  bzw. die Abbildung  $g$  ist **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches  $D$  differenzierbar ist.

## A. Analytische Grundlagen

**Definition A.3** (Stetige Differenzierbarkeit). Eine Abbildung heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie differenzierbar und ihre Ableitung stetig ist. Ist eine Abbildung  $k$ -mal stetig differenzierbar, so ist sie eine  $\mathbf{C}^k$ -Abbildung.

**Definition A.4** (Gleichmäßige Stetigkeit). Es seien  $D \subset \mathbb{R}^m$  für eine natürliche Zahl  $m$  und eine (mehrstellige) Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x)$$

gegeben. Dann heißt  $f$  **gleichmäßig stetig auf**  $J \subseteq D$ , wenn es für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  ein  $\delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  gibt, sodass für alle  $x_1, x_2 \in J$  aus  $|x_2 - x_1| < \delta$  schon  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$  folgt.

**Lemma A.5** (Satz von Heine). *Es sei  $f$  eine Abbildung, welche in  $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$  stetig ist. Dann ist  $f$  im Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig stetig.*

**Definition A.6** (Partielle Ableitung). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^m$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist die **i.te partielle Ableitung** definiert durch

$$\partial_{x_i} f(x) := \partial_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i} := g'_i(h)$$

für  $x \in D$  mit

$$g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h \mapsto g_i(h) = f(x + h \cdot \vec{e}_i)$$

Die i.te partielle Ableitung von  $f$  existiert nur dann, wenn  $g_i$  bei 0 differenzierbar ist.

**Definition A.7** (Gradient). Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $D \subset \mathbb{R}^m$  und  $x \in D$ . Der **Gradient** von  $f$  ist der Zeilenvektor aus allen partiellen Ableitungen und ist durch

$$\nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_m} f(x))$$

definiert.

**Lemma A.8.** *Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $D \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $0 \in f(D)$  sowie  $\mathfrak{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit  $I \subset \mathbb{R}$  und  $\mathfrak{P}(I) \subset f^{-1}(0)$ . Dann ist*

$$\langle (\nabla f(\mathfrak{P}(t)))^T, \mathfrak{P}'(t) \rangle = 0.$$

*Das heißt, dass der Gradient als Spaltenvektor  $(\nabla f(\mathfrak{P}(t)))^T$  im Punkt  $\mathfrak{P}(t)$  senkrecht auf der Tangente von  $\mathfrak{P}$  steht.*

*Beweis.* Aus  $\mathfrak{P}(I) \subset f^{-1}(0)$  folgt unmittelbar  $f(\mathfrak{P}(t)) = 0$  für alle  $t$  aus  $I$ . Durch Ableitung dieser Gleichung nach  $t$  erhält man

$$0 = \nabla f(\mathfrak{P}(t)) \cdot \mathfrak{P}'(t) = \langle (\nabla f(\mathfrak{P}(t)))^T, \mathfrak{P}'(t) \rangle.$$

□

**Definition A.9** (Regulärer Punkt/Wert). Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Dann ist  $x \in D$  ein **regulärer Punkt** von  $f$ , wenn  $|\nabla f(x)| \neq 0$  gilt. Sind alle  $x \in f^{-1}(y)$  reguläre Punkte, so heißt  $y \in \mathbb{R}$  **regulärer Wert** von  $f$ .

**Definition A.10.** (Jacobi-Matrix) Die **Jacobi-Matrix** einer differenzierbaren Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad D \in \mathbb{R}^m$$

ist die  $n \times m$ -Matrix

$$\mathcal{J}^f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

der ersten partiellen Ableitungen dieser Funktion.

**Definition A.11** (Kritische Punkte/Werte). Gegeben seien  $U \subset \mathbb{R}^m$  mit  $m \in \{1, 2\}$ , ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sowie die Abbildung

$$\mathfrak{P} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad (t, u) \mapsto \mathfrak{P}_t(u) = \mathfrak{P}(t, u),$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl mit  $n > m$  ist. Dann ist die Menge der **kritischen Punkte** durch

$$\mathcal{M} := \{(t, u) : t \in I \text{ und } u \in U \text{ und } \text{rank}(\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, u)) < m + 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

definiert. Wobei  $\mathcal{J}^{\mathfrak{P}}(t, u)$  die Jacobi-Matrix von  $\mathfrak{P}$  im Punkt  $(t, u)$  aus Definition A.10 ist. Die Menge  $\mathfrak{P}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^n$  sind die **kritischen Werte** von  $\mathfrak{P}$ .

### A.1.1. Polynome

**Definition A.12** (Polynom). Eine Funktion

$$p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

heißt (**reelles**) **Polynom**. Der **Grad** von  $p$  ist definiert durch  $\deg(p) = n$ .

**Lemma A.13.** *Es sei  $f$  ein reelles Polynom und  $x \in \mathbb{C}$  eine komplexe Nullstelle mit  $f(x) = 0$ . Dann ist auch die zu  $x$  konjugiert komplexe Zahl  $\bar{x}$  eine Nullstelle von  $f$ .*

*Beweis.* Aus  $f(x) = 0$  folgt  $\overline{f(x)} = 0$  und wegen  $\overline{f(x)} = f(\bar{x})$  gilt auch  $f(\bar{x}) = 0$ . Also ist auch  $\bar{x}$  eine Nullstelle von  $f$ .  $\square$

**Lemma A.14.** *Es sei  $f$  ein reelles Polynom, dessen Funktionswerte  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  nichtnegativ sind. Dann lassen sich Polynome  $g_1$  und  $g_2$  finden, sodass  $f(x) = g_1^2(x) + g_2^2(x)$  gilt.*

*Beweis.* Nach Lemma A.13 und dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich  $f$  als

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\deg(f)/2} (x - x_k) \prod_{k=1}^{\deg(f)/2} (x - \bar{x}_k)$$

darstellen. Mit  $g(x) := \prod_{k=1}^{\deg(f)/2} (x - x_k)$  gilt

$$f(x) = g(x)\overline{g(x)} = \Re(g(x))^2 + \Im(g(x))^2.$$

Mit  $g_1 := \Re(g)$  als Realteil und  $g_2 := \Im(g)$  als Imaginärteil von  $g$  folgt die Behauptung.  $\square$

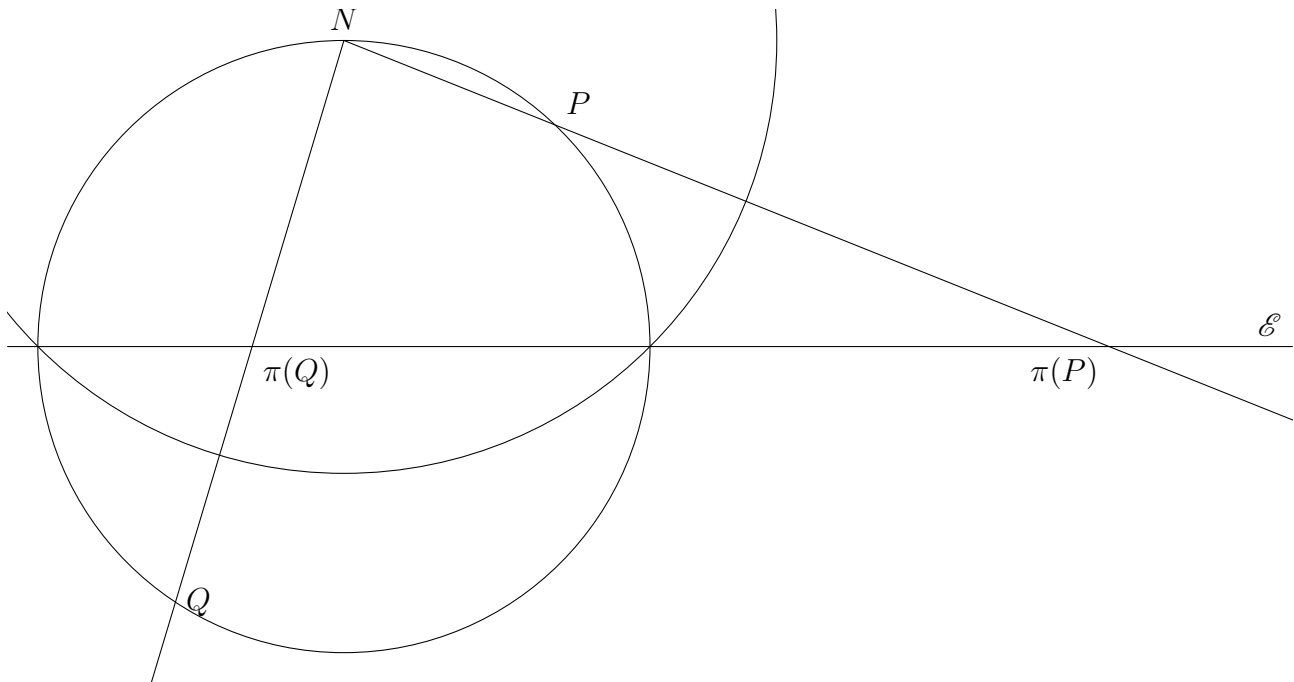


Abbildung A.1.: Stereografische Projektion bzw. Inversion an der Kugel

**Satz A.15** (Vorzeichenregel von Descartes (abgeschwächt)). *Ein reelles von null verschiedenes Polynom hat entweder genauso viele positive, reelle Nullstellen wie es Vorzeichenwechsel in seiner Koeffizientenfolge gibt, oder die Anzahl solcher Nullstellen ist um eine gerade, natürliche Zahl geringer.*

*Beweis.* Siehe [Obr63, S. 54 ff.] oder [KM06, Theorem 2]. □

## A.2. Stereografische Projektion

Die stereografische Projektion

$$\pi_Z : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$$

ist eine Zentralprojektion von einer Kugel  $\mathcal{S}$  auf eine Ebene  $\mathcal{E}$ . Hierbei ist  $Z \in \mathcal{S}$  das Projektionszentrum. Die Ebene  $\mathcal{E}$  muss parallel zu der Tangentialebene in  $Z$  an die Kugel  $\mathcal{S}$  sein. Das Bild eines Punktes  $P$  der Kugel ist der Schnittpunkt der Geraden, die durch  $Z$  und  $P$  geht, mit der festgelegten Ebene  $\mathcal{E}$ . Das Bild von  $Z$  ist der Fernpunkt, nämlich der Schnitt der Ebene  $\mathcal{E}$  mit einer zu ihr parallelen Geraden, die durch  $Z$  verläuft und tangential zur Kugel ist.

*Bemerkung.* Die Tangentialebene in  $Z$  an die Kugel  $\mathcal{S}$  ist keine geeignete Wahl für  $\mathcal{E}$ , da so alle Punkte der Kugel außer  $Z$  auf  $Z$  abgebildet würden. Für  $Z$  selbst gäbe es kein eindeutig bestimmtes Bild.

**Lemma A.16.** *Die stereografische Projektion ist winkeltreu. Das heißt, dass der Winkel zwischen Tangenten, die zu sich schneidenden Kurven auf der Kugel gehören, gleich dem Winkel, den die Tangenten an die projizierten Kurven in ihrem Schnittpunkt einschließen, ist.*

*Beweis.* Siehe [Kel68, S. 38 4.]. □

**Lemma A.17.** *Die stereografische Projektion ist kreistreu. Das heißt, dass Kreise der Kugel, welche durch  $Z$  verlaufen, auf Geraden und alle anderen wieder auf Kreise abgebildet werden. Im zweiten Fall ist der Mittelpunkt  $M$  des projizierten Kreises  $\pi_Z(\mathcal{C})$  die Projektion der Spitze  $S$  des eindeutig bestimmten geraden Kreiskegels  $\mathcal{K}$ , welcher  $\mathcal{C}$  als Grundkreis hat, und die Kugel  $\mathcal{S}$  in jedem Kreispunkt berührt.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{C}_N$  ein Kreis, der durch das Projektionszentrum  $N$  der Kugel verläuft. Dann bilden die Projektionsgeraden der Kreispunkte die Ebene des Kreises  $\mathcal{C}_N$ . Diese Ebene schneidet sich mit der Projektionsebene  $\mathcal{E}$  in einer Geraden, welche somit das Bild des Kreises  $\mathcal{C}_N$  unter der stereografischen Projektion  $\pi$  darstellt.

Nun sei  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  ein Kreis, welcher nicht durch  $Z$  verläuft. Für die folgenden Betrachtungen wird der Definitionsbereich von  $\pi_Z$  auf  $\mathbb{R}^3$  erweitert. Die Mantellinien des Kegels  $\mathcal{K}$  bilden eine Schar von Geraden, welche sich in seiner Spitze  $S$  und damit auch nach der Projektion in  $\pi_Z(S)$  schneiden. Jede Mantellinie des Kegels schneidet den Kreis  $\mathcal{C}$  in der entsprechenden Tangentialebene an die Kugel  $\mathcal{S}$  im rechten Winkel. Da die stereografische Projektion nach Lemma A.16 winkeltreu ist, schneidet jede projizierte Mantellinie das Bild  $\pi_Z(\mathcal{C})$  des Kreises  $\mathcal{C}$  wieder im rechten Winkel. Außerdem sind die Projektionen der Mantellinien natürlich wieder Geraden, weil sie der Schnitt der Projektionsebene mit der Ebene, welche durch die jeweilige Mantellinie und das Projektionszentrum  $Z$  bestimmt wird, sind. Somit ist die Projektion des Kreises  $\mathcal{C}$  eine Kurve, welche jede projizierte Mantellinie im rechten Winkel schneidet. Das kann nur ein Kreis sein, welcher den Mittelpunkt  $\pi_Z(S)$  hat. □

### A.2.1. Stereografische Projektion vom Nordpol der Einheitskugel aus

Beispielhaft sei hier die stereografische Projektion

$$\pi_N : S^2 \rightarrow \mathcal{E}_N = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

von der Einheitskugel  $S^2$  auf die  $x - y$ -Ebene mit dem Nordpol  $N = (0, 0, 1)^T$  als Projektionszentrum betrachtet. Um das Bild des Punktes  $P = (u, v, w)^T \in S^2$  unter  $\pi$  zu bestimmen, wird zunächst die Geradengleichung

$$P(t) = N + t(P - N) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

aufgestellt. Die dritte Komponente liefert

$$0 = 1 + t_{\mathcal{E}_N}(w - 1) \quad \text{und somit} \quad t_{\mathcal{E}_N} = \frac{1}{1 - w}$$

für den Schnittpunkt  $P(t_{\mathcal{E}_N})$  der Geraden durch  $N$  und  $P$  mit der Ebene  $\mathcal{E}$ . Somit ergibt sich

$$\pi(P) = \begin{pmatrix} \frac{u}{1-w} \\ \frac{v}{1-w} \\ 0 \end{pmatrix}$$

für das Bild von  $P$ .

**Lemma A.18.** *Die stereografische Projektion  $\pi$  entspricht der Inversion an der Kugel mit Mittelpunkt  $N$  und Radius  $\sqrt{2}$ .*

## A. Analytische Grundlagen

*Beweis.* Da sich für jeden Punkt  $P = (u, v, w) \in S^2$  der zugehörige Bildpunkt  $\pi(P)$  auf der Geraden durch  $N$  und  $P$  befindet, muss nur noch gezeigt werden, dass

$$|P - N| \cdot |\pi(P) - N| = \sqrt{2}^2 = 2$$

gilt:

$$\begin{aligned} |P - N| \cdot |\pi(P) - N| &= \sqrt{u^2 + v^2 + (w - 1)^2} \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{(1 - w)^2} + 1} \\ &= \sqrt{u^2 + v^2 + (w - 1)^2} \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + (w - 1)^2}{(1 - w)^2}} \\ &= \frac{u^2 + v^2 + (w - 1)^2}{1 - w} = \frac{1 - w^2 + (w - 1)^2}{1 - w} \\ &= \frac{2(1 - w)}{1 - w} = 2 \end{aligned}$$

□

Für nähere Informationen sei hier [Kow05, S. 16 ff.] empfohlen.

### Umkehrung

Für die Umkehrung  $\pi_N^{-1}$  der stereografischen Projektion  $\pi_N$  gilt

$$\pi_N^{-1} : \mathcal{E}_N \rightarrow S^2 \quad \text{mit} \quad \pi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

## B. Kurven und Flächen

Dieses Kapitel enthält einige grundlegende Definitionen zum Thema Kurven und Flächen.

**Definition B.1** (Kurve). Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $n \in \{2, 3\}$ . Eine (**parametrisierte reelle**) **Kurve**  $\mathcal{W}$  ist das Bild einer stetigen Abbildung

$$\mathfrak{P}^{\mathcal{W}} : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad t \mapsto \mathfrak{P}^{\mathcal{W}}(t),$$

welche auch als Parametrisierung oder Parameterdarstellung der Kurve  $\mathcal{W}$  bezeichnet wird. Man spricht von einer  **$C^k$ -Kurve**, wenn  $\mathfrak{P}^{\mathcal{W}}$  eine  $C^k$ -Abbildung ist. Eine differenzierbare Kurve heißt **regulär**, wenn  $|(\mathfrak{P}^{\mathcal{W}})'(t)| \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt, sonst **singulär**.

**Definition B.2** (Fläche). Es seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  zwei Intervalle. Eine stetige Abbildung

$$m : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (u, v) \mapsto m(u, v) = (m_x(u, v), m_y(u, v), m_z(u, v))^T$$

heißt **parametrisierte (reelle) Fläche**. Auch die Bildmenge  $m(I \times J) \subset \mathbb{R}^3$  wird **Fläche** genannt.

**Definition B.3** (Hyperfläche). Es sei eine differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

gegeben. Dann ist die Nullstellenmenge

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

eine **Hyperfläche** im  $\mathbb{R}^n$ . Für  $n = 2$  handelt es sich bei der Hyperfläche um eine Kurve in der Ebene und für  $n = 3$  eine Fläche im Raum. Ist 0 ein regulärer Wert von  $f$ , so bildet die Menge  $f^{-1}(0)$  eine **reguläre Hyperfläche**.

**Definition B.4** (Frenet'sches Koordinatensystem). Die Frenet'schen Formeln geben für jeden Punkt  $c(t)$  einer Raumkurve  $c$  drei normierte, zueinander orthogonale Vektoren

$$\vec{t}_t := \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|} \quad \text{und} \quad \vec{n}_t = \vec{b}_t \times \vec{t}_t \quad \text{sowie} \quad \vec{b}_t = \frac{\vec{c}'(t) \times \vec{c}''(t)}{|\vec{c}'(t) \times \vec{c}''(t)|}$$

vor, welche gemeinsam mit dem Kurvenpunkt  $c(t)$  als Ursprung das sogenannte **Frenet'sche Dreibein** oder **Frenet'sche Koordinatensystem** bilden.  $\vec{t}$  ist der Tangenten- oder Tangentialvektor,  $\vec{n}$  der Normalenvektor und  $\vec{b}$  der Binormalenvektor.

*Bemerkung.* Unter Verwendung der Graßmann-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$$

für  $\vec{u} = \vec{w} = \vec{t}_t$  und  $\vec{v} = \vec{c}''(t)$  stimmt Definition B.4 mit der in [Jos94, S. 4] überein. Für Kurven, die nach der Bogenlänge parametrisiert sind, ergibt sich der Spezialfall, dass  $\vec{n}_t = \frac{\vec{c}''(t)}{|\vec{c}''(t)|}$  und  $\vec{b}_t = \vec{t}_t \times \vec{n}_t$  gilt (siehe [Car93, S. 16] bzw. [Küh05, S. 9 f.]). Mitunter werden auch einzelne Vektoren vertauscht, wie beispielsweise  $\vec{n}$  und  $\vec{b}$  in [Wat95, S. 29 f.].





# Stichwortverzeichnis

## Symbols

$][t_a, t_b][$	45
$\mathcal{B}_{t, \alpha_1, \alpha_2}^{c, r}$	59
$\mathcal{C}^{c, r}$	29
$\mathcal{C}_{t, \alpha_1, \alpha_2}^{c, r}$	59
$\mathfrak{d}^{c, r}$	62
$\mathcal{E}^{c, r}$	29
$f^{\mathcal{E}^{c, r}}$	29
$f^{\mathcal{G}^{c, r}}$	47
$f^{\mathcal{S}^{c, r}}$	27
$\mathcal{G}^{c, r}$	48
$\mathcal{K}^{c, r}$	73
$\mathcal{S}^{c, r}$	27
$\mathcal{U}^{c, r}$	61
$\mathcal{U}_{Q, t_0}^{c, r}$	61
$\mathcal{V}^{c, r}$	57
$[[\alpha_1, \alpha_2]]$	59

## A

aufeinanderfolgende char. Kreise	81
Augpunkt	88
Augstrahl	88
Außenbogen	77
Außenkreis	77
Außenpunkt einer Kugelschar	57
äußerer Punkt	57
Äußeres einer Kugelschar	57
Austritt(-spunkt)	68

## B

benachbarte Schnittpunkte	59
beschränkte Enveloppe	43

## C

charakteristische Kreise	29
charakteristische Punkte	47

## D

Differenzierbarkeit	117
digits	104

## E

Einhüllende	16
Eintritt(-spunkt)	68
Enveloppe	16

## F

Fläche	123
Fortsetzung einer Enveloppe	45

## G

geschlossene Einhüllende	44
gleichmäßige Stetigkeit	118
globaler Schnitt	52
Gradient	118

## H

Hüllfläche	16
Hüllkurve	16
Hyperfläche	123

## I

infinitesimale Nachbarschaft	24
Innenpunkt	57
innerer Punkt	57
Inneres	57

## J

Jacobi-Matrix	119
---------------	-----

## K

Kanalfläche	73
-------------	----

## Stichwortverzeichnis

Kreisbogen .....	59	U	
Kurve .....	123	Umkehrpunkt .....	69
<b>L</b>		Umkehrsegment .....	78
lokaler Schnitt		umschließendes Schlauchstück .....	61
Envelope .....	47	universelle Hüllfläche .....	62
Schar .....	24	<b>V</b>	
<b>N</b>		verschlingend .....	80
Nachbarschaft von Schnittpunkten		verschlossene Enveloppen .....	44
auf einem Kreis .....	59	Verschlusskappen .....	57
auf einer Kurve .....	67	Verschlussmenge .....	57
<b>O</b>		Verschlusspunkte .....	58
offener Kreisbogen .....	59	<b>Z</b>	
<b>P</b>		zusammengesetzte Enveloppen .....	45
Paarung Außenbögen .....	82	zyklische Einhüllende .....	42
partielle Ableitung .....	118	zyklisches Intervall .....	59
Polynom .....	119		
<b>R</b>			
Randschlauchstücke .....	61		
Raycasting .....	87		
Raytracing .....	88		
regulärer Punkt .....	118		
regulärer Wert .....	118		
<b>S</b>			
Satz von Heine .....	118		
Schar .....	15		
Schlauchstück .....	61		
Schnittpunktpaar .....	82		
Schnittsegment .....	77		
Selbstschnitt von Einhüllenden .....	56		
selbst verschlingend .....	80		
stereografische Projektion .....	120		
stetige Differenzierbarkeit .....	118		
Stetigkeit .....	117		
<b>T</b>			
Tiefenfunktion .....	62		
Tiefenlevel .....	62		

# Literatur

- [AG] Hamburger Hochbahn AG, Hrsg. *Bauverfahren U4*. URL: <http://u4.hochbahn.de/bauverfahren-u4/u4-bau-jungfernstieg-bis-hafencity-universitaet/tunnel-bauverfahren.html> (besucht am 28.08.2015).
- [AG98] A. Alesina und M. Galuzzi. „A new proof of Vincent’s theorem“. Englisch. In: *L’Enseignement Mathématique* 44 (Jan. 1998), S. 219–256. URL: <http://retoseals.ch/cntmng?pid=ensmat-001:1998:44::158> (besucht am 01.08.2015).
- [Bau+] Christian Bauer, Alexander Frink, Vladimir V. Kisil, Richard B. Kreckel, Alexei Sheplyakov und Jens Vollinga, Hrsg. *GiNaC*. URL: <http://www.ginac.de> (besucht am 28.06.2015).
- [Bie12] Andreas Bienert. „Generating polygonal meshes for canal surfaces“. In: *Proceedings of the 28th Spring Conference on Computer Graphics. (Smolenice, Slovakia)*. Hrsg. von Roman Durikovič und Carol O’Sullivan. Comenius University, Bratislava, Slovakia, Mai 2012. ISBN: 978-80-223-3211-8. URL: <http://www.sccg.sk/en/past-proceedings/proceedings-2012/> (besucht am 11.08.2015).
- [Blu11] Otto Blumenthal. „Kanalflächen und Enveloppenflächen“. In: *Mathematische Annalen* 70 (Apr. 1911), S. 377–404.
- [Car93] Manfred P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. 3. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1993. ISBN: 3-528-27255-4.
- [Com] The Qt Company, Hrsg. *Download Qt*. URL: <http://www.qt.io/download> (besucht am 28.06.2015).
- [CRBa] CRBond, Hrsg. *Jenkins-Traub in C++ complete port rpoly.cpp*. URL: <http://www.crbond.com/download/misc/rpoly.cpp> (besucht am 31.05.2015).
- [CRBb] CRBond, Hrsg. *Software for Scientific Applications*. URL: <http://www.crbond.com/scientific.htm> (besucht am 31.05.2015).
- [DZ08] Marc Dohm und Severinas Zube. *The implicit equation of a canal surface*. Englisch. Cornell University Library. 25. Juni 2008. URL: <http://arxiv.org/pdf/0806.4127v1.pdf> (besucht am 01.08.2015).
- [Eig08] Arno Eigenwillig. „Real Root Isolation For Exact And Approximate Polynomials Using Descartes’ Rule of Signs“. Englisch. Dissertation. Saarbrücken: Universität des Saarlandes, 2008.
- [GCC] GCC, Hrsg. *GCC, the GNU Compiler Collection*. URL: <https://gcc.gnu.org/> (besucht am 28.06.2015).
- [HK12] Dominik Hutter und Christian Krügel. „So müsste niemand in die Röhre schauen“. In: *Süddeutsche Zeitung* (23. Jan. 2012). URL: <http://www.sueddeutsche.de/muenchen/alternativen-fuer-ein-besseres-s-bahn-netz-so-muesste-niemand-in-die-roehre-schauen-1.1130249> (besucht am 29.08.2015).

## Literatur

- [IEE] IEEE, Hrsg. *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic*. URL: <http://754r.ucbtest.org/standards/754.pdf> (besucht am 10.08.2015).
- [Jen75] M. A. Jenkins. „Algorithm 493. Zeros of a Real Polynomial“. Englisch. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 1 (Juni 1975), S. 178–189. ISSN: 0098-3500 EISSN: 1557-7295. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=355643&dl=ACM&coll=DL&CFID=687722250&CFTOKEN=33777784> (besucht am 26.06.2015).
- [Jos94] Jürgen Jost. *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. Berlin: Springer, 1994. ISBN: 3-540-56904-9.
- [JT70] M. A. Jenkins und J. F. Traub. „A THREE-STAGE ALGORITHM FOR REAL POLYNOMIALS USING QUADRATIC ITERATION“. Englisch. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 7 (Dez. 1970), S. 178–189. ISSN: 0036-1429 EISSN: 1095-7170. URL: [http://academiccommons.columbia.edu/download/fedora\\_content/download/ac:166446/CONTENT/Traub\\_\\_a\\_three\\_stage\\_algorithm\\_for\\_real\\_polynomials\\_using\\_quadratic\\_iteration.pdf](http://academiccommons.columbia.edu/download/fedora_content/download/ac:166446/CONTENT/Traub__a_three_stage_algorithm_for_real_polynomials_using_quadratic_iteration.pdf) (besucht am 26.06.2015).
- [Kel68] Ott-Heinrich Keller. *Hochschulbücher für Mathematik*. Bd. 26: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*. Dritte, berichtigte und ergänzte Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968.
- [KM06] Werner Krandick und Kurt Mehlhorn. „New bounds for the Descartes method“. Englisch. In: *Journal of Symbolic Computation* 41 (Jan. 2006), S. 49–66. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717105001252/pdf?md5=0795691079be52842295e484db64820d&pid=1-s2.0-S0747717105001252-main.pdf> (besucht am 28.06.2015).
- [Kow05] Gerhard Kowol. *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene*. Birkhäuser, 2009-05. ISBN: 978-3-7643-9901-6.
- [Kra07] Rimvydas Krasauskas. „Minimal rational parametrizations of canal surfaces“. Englisch. In: *Computing* 79 (März 2007), S. 281–290.
- [Küh05] Wolfgang Kühnel. *Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg, Juli 2005. ISBN: 3-8348-0023-6.
- [LR94] Dieter Landers und Lothar Rogge. *Nichtstandard Analysis*. Berlin: Springer, 1994. ISBN: 3-540-57115-9.
- [LSW01] Günter Landsmann, Josef Schicho und Franz Winkler. „The Parametrization of Canal Surfaces and the Decomposition of Polynomials into a Sum of Two Squares“. Englisch. In: *J. Symbolic Computation* 32 (Juli 2001), S. 119–132. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717101904535> (besucht am 01.08.2015).
- [McC] Mark McClure, Hrsg. *Mathematics*. URL: <http://math.stackexchange.com/questions/292275/discontinuous-derivative> (besucht am 31.08.2015).
- [MK90] Hans Mangoldt und Konrad Knopp. *Höhere Mathematik*. Bd. 2: *Differentialrechnung. Unendliche Reihen Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie*. 16. Aufl. Stuttgart: Hirzel, 1990. ISBN: 3-7776-0462-3.

- [MP] MinGW und MSYS Projects, Hrsg. *Minimalist GNU for Windows*. URL: <http://www.mingw.org/> (besucht am 28.06.2015).
- [Mül99] Andreas Müller. „Zykliden und Kanalflächen“. Dissertation. Universität Karlsruhe, 1999.
- [NVIa] NVIDIA, Hrsg. *CUDA Occupancy Calculator*. NVIDIA. URL: [http://developer.download.nvidia.com/compute/cuda/CUDA\\_occupancy\\_calculator.xls](http://developer.download.nvidia.com/compute/cuda/CUDA_occupancy_calculator.xls) (besucht am 31.07.2015).
- [NVIb] NVIDIA, Hrsg. *CUDA Toolkit 6.5*. NVIDIA. URL: <https://developer.nvidia.com/cuda-toolkit-65> (besucht am 31.07.2015).
- [NVIc] NVIDIA, Hrsg. *NVIDIA Nsight*. NVIDIA. URL: <http://www.nvidia.com/object/nsight.html> (besucht am 26.05.2015).
- [NVId] NVIDIA, Hrsg. *NVIDIA Visual Profiler*. NVIDIA. URL: <https://developer.nvidia.com/nvidia-visual-profiler> (besucht am 31.07.2015).
- [Obr63] Nikola Obreschkoff. *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
- [Özt+10] Günay Öztürk, Betül Bulca, B. K. Bayram und Kadri Arslan. „On Canal Surfaces in  $E^3$ “. Englisch. In: *Selçuk Journal of Applied Mathematics* 11 (Mai 2010), S. 103–108. URL: [http://www.researchgate.net/publication/49597178\\_On\\_Canal\\_Surfaces\\_in\\_E](http://www.researchgate.net/publication/49597178_On_Canal_Surfaces_in_E) (besucht am 01.08.2015).
- [PBP02] Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm und Marco Paluszny. *Bézier- and B-spline techniques*. New York: Springer, 2002. ISBN: 3-540-43761-4.
- [PP97] Martin Peternell und Helmut Pottmann. „Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces“. Englisch. In: *J. Symbolic Computation* 23 (Feb. 1997), S. 255–266.
- [Pre+07] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling und Brian P. Flannery. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. 3. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-521-88068-8.
- [RZ04] Fabrice Rouillier und Paul Zimmermann. „Efficient isolation of polynomial’s real roots“. Englisch. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 162 (Jan. 2004), S. 33–55. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703007271/pdf?md5=8cf86ae58dd0396f4b6fe66e1676a585&pid=1-s2.0-S0377042703007271-main.pdf> (besucht am 28.06.2015).
- [Sch13] Sebastian Schenk. „Numerische Approximation kritischer Stellen bivariater Polynome mit Hilfe von CUDA“. Masterarbeit. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2013.
- [Suf07] Kevin Suffern. *Ray Tracing from the Ground Up*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 2007. ISBN: 978-1-56881-272-4.
- [Wat95] Alan Watt. *3D Computer Graphics*. Englisch. 2. Aufl. Addison-Wesley, 1995. ISBN: 0-201-63186-5.



# Eidesstattliche Erklärung

## Declaration under Oath

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

I declare under oath that this thesis is my own work entirely and has been written without any help from other people. I used only the sources mentioned and included all the citations correctly both in word or content.

Halle, 21. September 2015

  
Andreas Bienert





# Lebenslauf

## Persönliche Daten

---

Name	Andreas Bienert
Geburtsdatum	01.03.1983
Geburtsort	Halle
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

## Schulbildung

---

### **Grundschule**

1989 - 1993 POS Albrecht Dürer, Halle

### **Gymnasium**

1993 - 2001 Gymnasium am Reileck, Halle  
2001 - 2002 Thomas-Müntzer-Gymnasium, Halle  
Abschluss: Abitur (1,3)

## Zivildienst

---

10/2002 - 07/2003 Deutsches Rotes Kreuz, Halle

## Studium

---

10/2003 - 06/2008 Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
Hauptfach: Informatik  
Nebenfach: Mathematik  
Abschluss: Diplom-Informatiker (1,3)  
10/2008 - 11/2009 Pflege der Großmutter nach Krebserkrankung  
10/2010 - 09/2011 Graduiertenstipendium des Landes Sachsen-Anhalt

## Beruflicher Werdegang

---

seit 10/2011 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der  
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
in der Arbeitsgruppe Computergrafik

Halle, 21. September 2015

  
Andreas Bienert