

Singulär gestörte Differentialgleichungssysteme und quasistatische Lösungsverfahren in der Mehrkörperdynamik

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Herrn Dipl.-Math. Steffen Weber
geb. am 13. Juni 1982 in Merseburg

Gutachter:

1. Prof. Dr. Martin Arnold
2. Prof. Dr. Dirk Langemann

Datum der öffentlichen Verteidigung: 19.12.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theorie singulärer Störungen	9
2.1	Stand der Forschung	9
2.2	Dissipative quasistatische Approximation	17
2.3	Attraktive invariante Mannigfaltigkeit	18
2.3.1	Attraktive invariante Mannigfaltigkeit für ODEs erster Ordnung	18
2.3.2	Attraktive invariante Mannigfaltigkeit für Modellgleichungen . .	21
2.4	Abgeschwächtes Kriterium	23
2.5	Alternative Voraussetzungen	24
2.6	Supersingulär gestörte Probleme	25
3	MKS-Modellierung	29
3.1	Euler-Lagrange-Gleichungen	29
3.2	Modellierung flexibler Strukturen	31
3.3	Rayleigh-Dämpfung	32
3.4	Bewegungsgleichungen zu Mehrkörpersystemen	33
3.4.1	Verschiedene Koordinaten	33
3.4.2	Topologische Lösungsverfahren	34
3.5	Modellierung eines flexiblen Vier-Balken-Mechanismus	40
3.5.1	Vier-Balken-Modell mit Euler-Bernoulli-Balken	40
3.5.2	Der dritte Balken	42
3.5.3	Zwangsbedingungen und Anfangswerte	44
4	Singulär gestörte MKS-Modelle	47
4.1	Modelle mit kleinen Massen	48
4.1.1	Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit diagonalen Massematrix	48
4.1.2	Singulär gestörte Dämpfung	49
4.1.3	Mobot	49
4.1.4	Diagonalisierung	53
4.1.5	Mass-Lumping	53
4.1.6	Schur-Reduktion	54
4.2	Steife Modelle	57
4.3	Singular gestörte DAEs	60
4.3.1	Differentiationsindex	60
4.3.2	Singulär gestörte DAEs in der Literatur	61
4.3.3	Singulär gestörte DAEs in der Mehrkörpersimulation	62

4.3.4	Singuläre Störungen in Mehrkörpersystemen	65
4.4	Singuläre Störung im Vier-Balken-Mechanismus	66
4.5	Varianten und Alternativen	70
4.5.1	Guyan-Reduktion	70
4.5.2	Modifikation mit Masseerhaltung	71
4.5.3	Grenzfrequenz	71
4.5.4	Re-Modellierung basierend auf dem Lagrange-Formalismus . . .	74
5	Zusammenfassung	77

Kapitel 1

Einleitung

Die numerische Simulation ist ein substantieller Bestandteil der Entwicklung technischer Systeme. Die computergestützte Simulation erlaubt es, das Verhalten von mechanischen Systemen vorherzusagen, ohne teure Prototypen anzufertigen. Dabei müssen die dazu verwendeten Modelle für eine detailgetreue Simulation eine Vielzahl von Phänomenen nachbilden. Die zunehmende Komplexität von Modellen in den Anwendungen erfordert problemangepasste Konzepte.

Eine wesentliche Schwierigkeit in der numerischen Integration von Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme liegt in kleinen Schrittweiten infolge hochfrequenter Schwingungen begründet, welche Konvergenzprobleme in der Korrekteriteration von impliziten Zeitintegratoren verursachen [Lub93]. Tatsächlich sind hochfrequente Schwingungen mit kleinen Amplituden in vielen praktischen Anwendungen jedoch nicht relevant [Sim13]. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, welche Terme in Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (engl. ordinary differential equation, ODE) diese Schwingungen verursachen.

In der Theorie der singulären Störungen werden Differentialgleichungsprobleme betrachtet, die von einem kleinen Störungsparameter ε abhängen [OMa74]. Unter gewissen Voraussetzungen kann die Lösung eines gegebenen, singulär gestörten Problems durch die Lösung desjenigen Problems approximiert werden, das sich aus der Vernachlässigung der singulären Störung ergibt. Dass diese Vernachlässigung von kleinen Termen auch physikalisch sinnvoll sein kann, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 1.1: Wir betrachten die Modellgleichung zu den durch Federn (mit positiven Federkonstanten c_1, c_2) verbundenen Körpern \blacksquare (Masse ε) und \blacksquare (Masse 1) mit externer Anregung $f(t)$

$$\begin{aligned}\varepsilon \ddot{q}_1(t, \varepsilon) &= -c_1 q_1(t, \varepsilon) + c_2 (q_2(t, \varepsilon) - q_1(t, \varepsilon)) \\ \ddot{q}_2(t, \varepsilon) &= -c_2 (q_2(t, \varepsilon) - q_1(t, \varepsilon)) + f(t),\end{aligned}$$

wobei q_1 die Differenz zwischen der Länge der ersten Feder und deren nomineller Länge ℓ_1 sowie $q_2 - q_1$ die Differenz zwischen der Länge der zweiten Feder und deren nomineller Länge ℓ_2 ist, vgl. Abb. 1.1. Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ können wir die erste Gleichung nach $q_1^o = q_1(t, 0)$ auflösen und in die zweite einsetzen

$$\ddot{q}_2^o = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} q_2^o + f.$$

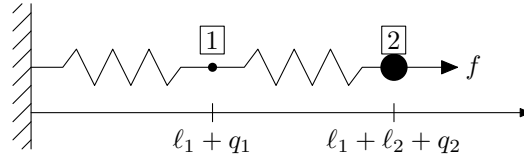


Abbildung 1.1: Ungedämpfter Zwei-Massen-Schwinger

Die Vernachlässigung der kleinen Masse lässt sich demnach auch als Ersetzung der beiden Federn durch eine andere Feder interpretieren. \diamond

Dabei ist zu betonen, dass die Anzahl der Variablen a priori reduziert wird und somit die Vorteile einer geringeren Datenfülle schon während der Bewegungssimulation genutzt werden können, anstatt die Datenmenge a posteriori zu reduzieren.

Anders als in Bsp. 1.1 führt die Reduktion von Bewegungsgleichungen in Anwendungen häufig auf Variablen, die keine entsprechende physikalische Interpretation besitzen.

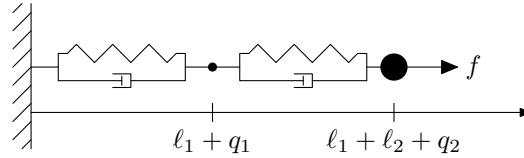


Abbildung 1.2: Gedämpfter Zwei-Massen-Schwinger

Beispiel 1.2: Für die Modellgleichung

$$\varepsilon \ddot{q}_1 = -d_1 \dot{q}_1 + d_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - c_1 q_1 + c_2(q_2 - q_1) \quad (1.1a)$$

$$\ddot{q}_2 = -d_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - c_2(q_2 - q_1) + f \quad (1.1b)$$

des in Abb. 1.2 dargestellten Zwei-Massen-Schwingers mit positiven Dämpfungsparametern d_1, d_2 kann im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ die Koordinate q_1^o nicht mehr mit allen Ableitungen eliminiert werden. Stattdessen erhalten wir

$$(d_1 + d_2)\dot{q}_1^o = d_2\dot{q}_2^o + c_2q_2^o - (c_1 + c_2)q_1^o \quad (1.2a)$$

$$\ddot{q}_2^o = -\frac{d_2 d_1}{d_1 + d_2} \dot{q}_2^o - \frac{c_2 d_1}{d_1 + d_2} q_2^o + \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1 + d_2} q_1^o + f. \quad (1.2b)$$

Das ist die Bewegungsgleichung einer gedämpften Feder mit einer zusätzlichen Zustandsvariable q_1 . Für die Parameter $\varepsilon = 0.005, d_1 = d_2 = 0.02, c_1 = c_2 = 10$ und die Kraft $f = 0.1$ suggeriert der Lösungsverlauf in Abb. 1.3, dass die Lösung von (1.2) nach einem kurzen Zeitintervall die Lösung des Gleichungssystem (1.1) gut approximiert. Außerdem benötigt die Routine `lsoda` [Pet83] beim Aufruf mittels `scipy.integrate.odeint` in Python hier 3147 Auswertungen der rechten Seite von (1.1) zur Lösung des Problems mit den Anfangswerten $(q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)) = (0, 0.1, 0, 0)$, während der gleiche Solver nur 529 Auswertungen der rechten Seite zum Lösen des reduzierten Problems (1.2) mit den Anfangswerten $(q_1^o(0), q_2^o(0), \dot{q}_2^o(0)) = (0, 0.1, 0)$ benötigt. \diamond

Das Ziel dieser Arbeit ist die Analyse von Bewegungsgleichungen mit singulären Störungen, die Entwicklung einer geeigneten Reduktionstechnik auf der Grundlage der Störungstheorie sowie deren praktische Erprobung mittels numerischer Zeitintegration.

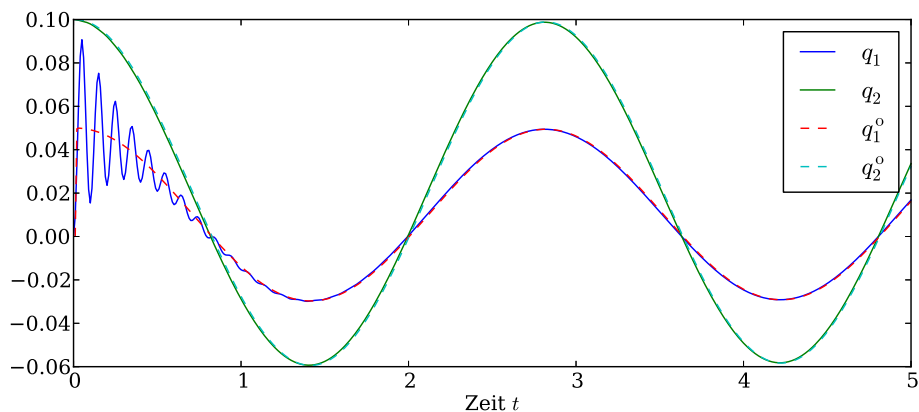


Abbildung 1.3: Lösungen der Gleichungssysteme (1.1) und (1.2)

In Kapitel 2 werden einige Ergebnisse aus der Theorie singularer Störungen vorgestellt und erklärt, unter welchen Voraussetzung die Vernachlässigung der singulären Störung zu einer Lösung führt, die das ursprüngliche Problem approximiert.

Die Grundlagen der Mehrkörpersystemdynamik werden in Kapitel 3 erläutert und am Beispiel des flexiblen Vier-Balken-Mechanismus angewendet.

Im Zentrum dieser Arbeit stehen Methoden, welche die Ergebnisse der Störungstheorie mit den Modellen von mechanischen Systemen verknüpft (Kapitel 4). Dieses interdisziplinäre Konzept wird mit diversen Testrechnungen verifiziert.

Kapitel 2

Theorie singulärer Störungen

2.1 Stand der Forschung

In der Störungstheorie wird das Verhalten der Lösung $x(t, \varepsilon)$ eines Differentialgleichungsproblems $P_\varepsilon(x(t, \varepsilon))$ mit kleinem Störungsparameter $\varepsilon > 0$ analysiert [Tik52, Vas62, Vas63, Was63, OMa74]. Dabei wird eine Reihenentwicklung

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t, \varepsilon)$$

der Lösung gesucht, wobei x_{i+1} asymptotisch vernachlässigbar gegenüber x_i ist. Wird der Parameter ε im gestörten Problem P_ε zu Null gesetzt, ergibt sich das reduzierte (oder ungestörte) Problem $P_0(x_0(t))$ mit der Lösung x_0 , welche auch als quasistatische Approximation [Sha⁺79] bezeichnet wird.

Definition 2.1: Das Problem $P_\varepsilon(x(t, \varepsilon))$ heißt regulär gestört (oder nichtdegeneriert), wenn die Lösung $x(t, \varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig bezüglich t gegen $x_0(t)$ konvergiert. Anderenfalls heißt das Problem singulär gestört (oder degeneriert). Die Ersetzung eines singulär gestörten Problems $P_\varepsilon(x(t, \varepsilon))$ durch ein ungestörtes Problem $P_0(x_0(t))$ nennen wir quasistatische Reduktion.

Beispiel 2.2 (Regulär gestörtes Problem): Gesucht werde die Lösung von

$$(1 + \varepsilon)\dot{x}(t, \varepsilon) = -x(t, \varepsilon), \quad t \in [0, t_{\text{end}}], \quad x(0, \varepsilon) = c.$$

Das reduzierte Problem

$$\dot{x}_0(t) = -x_0(t), \quad t \in [0, t_{\text{end}}], \quad x_0(0) = c$$

besitzt die Lösung $x_0(t) = ce^{-t}$. Wegen $|e^{-t/(1+\varepsilon)} - e^{-t}| = e^{-t} |e^{\varepsilon t/(1+\varepsilon)} - 1| < e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ für $0 \leq t < (1 + \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$ und $|e^{-t/(1+\varepsilon)} - e^{-t}| \leq e^{-t/(1+\varepsilon)} \leq e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$ für $t \geq (1 + \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$ kann zu jedem $\delta > 0$ ein von t unabhängiges ε_0 gewählt werden, so dass

$$\forall t \in [0, t_{\text{end}}] : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| < \delta$$

gilt. Also konvergiert die Lösung $x(t, \varepsilon) = ce^{-t/(1+\varepsilon)}$ des gestörten Problems gleichmäßig gegen x_0 . \diamond

Beispiel 2.3 (Singulär gestörtes Problem): Nun suchen wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$\varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) = -x(t, \varepsilon), \quad t \in [0, t_{\text{end}}], \quad x(0, \varepsilon) = c.$$

Das reduzierte Problem

$$0 = -x_0(t), \quad t \in [0, t_{\text{end}}]$$

ist eine algebraische Gleichung mit Lösung $x_0(t) = 0, t \in [0, t_{\text{end}}]$, so dass kein Anfangswert vorgegeben werden kann. Das reduzierte Problem besitzt also keine Freiheitsgrade für x . Die Lösung $x(t, \varepsilon) = c e^{-t/\varepsilon}$ des gestörten Problems konvergiert hier nicht gleichmäßig gegen x_0 für $c \neq 0$. \diamond

Tatsächlich konvergiert in Beispiel 2.3 für $t_i > 0$ die Funktion $x(t, \varepsilon)$ in jedem Intervall $[t_i, t_{\text{end}}]$ gleichmäßig gegen x_0 . Das Intervall der nichtgleichmäßigen Konvergenz heißt Grenzschicht.

In der Theorie der singulär gestörten Probleme wird sowohl die äußere Lösung oder glatte Lösung außerhalb der Grenzschicht gesucht als auch die innere Lösung innerhalb der Grenzschicht.

Um die Abschätzungen der Restterme von Reihenentwicklungen übersichtlich zu halten, werden häufig Landau-Symbole oder Ordnungssymbole verwendet.

Definition 2.4: Für zwei Funktionen $u, v: [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir $u \in \mathcal{O}(v)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, falls

$$\exists K > 0 \exists \varepsilon_1 > 0 \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1] : |u(\varepsilon)| \leq K|v(\varepsilon)|,$$

und $u \in o(v)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, falls

$$\forall K > 0 \exists \varepsilon_1 > 0 \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1] : |u(\varepsilon)| \leq K|v(\varepsilon)|. \quad \diamond$$

Falls $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u(\varepsilon)|}{|v(\varepsilon)|}$ existiert, können auch die Bedingungen $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u(\varepsilon)|}{|v(\varepsilon)|} < \infty$ oder $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(\varepsilon)}{v(\varepsilon)} = 0$ zum Nachweis von $u \in \mathcal{O}(v)$ bzw. $u \in o(v)$ verwendet werden. Statt $u \in \mathcal{O}(v)$ werden wir auch die gebräuchliche, symbolische Schreibweise $u = \mathcal{O}(v)$ verwenden, wohlwissend, dass das Gleichheitszeichen hier keine Äquivalenzrelation darstellt.

Definition 2.5: Eine Folge von Funktionen $(\phi_i)_{i=0}^{\infty}$ heißt asymptotische Folge, falls $\phi_{i+1} = o(\phi_i)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ für alle $i \geq 0$ gilt.

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \phi_i$ heißt asymptotische Entwicklung oder Poincaré-Entwicklung von f bezüglich der asymptotischen Folge $(\phi_i)_{i=0}^{\infty}$, falls $f - \sum_{i=0}^n a_i \phi_i = o(\phi_n)$ für alle $n \geq 0$ gilt. \diamond

Die Koeffizienten a_n zu $\phi_n \neq 0$ sind eindeutig bestimmt durch

$$a_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \phi_i}{\phi_n}.$$

Die Folge $(\phi_i)_{i=0}^{\infty}$ mit $\phi_i = \varepsilon^{2i+1}$ ist eine asymptotische Folge. Die Sinusfunktion besitzt die asymptotische Entwicklung $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \phi_i$, während $\sin^2(\varepsilon)$ bezüglich dieser asymptotischen Folge keine asymptotische Entwicklung hat. Im Allgemeinen beschränken wir unsere Aufmerksamkeit deshalb auf die asymptotische Folge $(\varepsilon^i)_{i=0}^N$ und Entwicklungen

$\sum_{i=0}^N a_i \varepsilon^i$, so dass die Multiplikation von asymptotischen Entwicklungen stets möglich ist.

Lemma 2.6 (Koeffizientenvergleich): Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k = 0$ für mindestens $n + 1$ paarweise verschiedene Werte ε erfüllt ist, dann gilt $0 = a_0 = a_1 = \dots = a_n$.

Beweis: Angenommen $\sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k$ wäre nicht das Nullpolynom, dann hat $\sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k$ höchstens n Nullstellen. Das widerspricht der Voraussetzung. Also ist $\sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k$ gleich dem Nullpolynom. \square

Häufig erfolgt die Analyse singular gestörter Probleme in zwei Teilen. Zunächst wird eine äußere Lösung mit der Reihenentwicklung

$$x^o(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N x_i(t) \varepsilon^i$$

bestimmt, die weniger Freiheitsgrade besitzt, so dass z. B. die Wahl der Anfangswerte eingeschränkt ist. Diese Reihe konvergiert für $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ nicht gleichmäßig [Mei⁺97]. Deshalb wird anschließend zu x^o eine Grenzschichtkorrektur

$$\xi(t/\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \xi_i(t/\varepsilon) \varepsilon^i$$

addiert, wobei der zusätzliche Term ξ (transiente Phase) die fehlenden Freiheitsgrade kompensiert und die Summanden abklingende Funktionen sind.

Als anderer Weg zur Vermeidung der Divergenz für $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ kann auch die skalierte Größe $t_1 = t/\varepsilon$ eingeführt und die Lösung $x^i(t_1, \varepsilon)$ bezüglich ε für festes t_1 untersucht werden. Diese innere Entwicklung $x^i(t_1, \varepsilon)$ kann jedoch nur für $t_1 = \mathcal{O}(1)$ konvergieren, d. h. für $t = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Nach der van Dyke'schen Vorschrift streben die Lösungen $x^o(t, \varepsilon)$ und $x^i(t_1, \varepsilon)$ im Überlappungsbereich gegen die selbe Funktion, vgl. [Van64, S. 89f].

Für das singular gestörte Problem

$$\dot{y}(t) = f(y(t), z(t)), \quad y(0) = \bar{y} \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon \dot{z}(t) = g(y(t), z(t)), \quad z(0) = \bar{z} \quad (2.1b)$$

lässt sich das äußere Problem in der Form

$$\dot{y}^o(t) = f(y^o(t), z^o(t)), \quad y^o(0) = \bar{y}$$

$$0 = g(y^o(t), z^o(t))$$

y^o, z^o und deren N Ableitungen bezüglich ε sind stetig bei $\varepsilon = 0$

schreiben [Hop71]. Dabei können die Koeffizienten der Reihenentwicklung formal bestimmt werden, falls $g_z(y, z)$ in einer Umgebung der Lösung des reduzierten Problems

$$\dot{y}_0(t) = f(y_0(t), z_0(t)), \quad y_0(0) = \bar{y} \quad (2.2a)$$

$$0 = g(y_0(t), z_0(t)) \quad (2.2b)$$

invertierbar ist. Das Gleichungssystem (2.2) ist nicht durch Umformungen nach der Ableitung \dot{z}_0 auflösbar, weshalb wir es differential-algebraische Gleichung (engl. differential-algebraic equation, DAE) nennen und z_0 als algebraische Variable bezeichnen [Asc⁺98]. In der DAE (2.2) ist die Ableitung der differentiellen Variable y_0 explizit gegeben, so dass wir bei der Form (2.2) von einer semi-expliziten DAE (2.2) sprechen.

Beispiel 2.7 (Van-der-Pol-Gleichung): Die Lösungen der linearen Differentialgleichung $u'' + au' + u = 0$ sind für $a > 0$ gedämpft und für $a < 0$ instabil. Nun soll a so von u abhängen, dass $a < 0$ für kleines u und $a > 0$ für großes u gilt. Mit dem Ansatz $a = \nu(u^2 - 1)$, $\nu > 0$ bekommen wir [Hai⁺02]

$$u'' + \nu(u^2 - 1)u' + u = 0.$$

Diese Gleichung wurde z. B. in [Hin91] und [Gra⁺05] für kleine Werte ν betrachtet. Die Lösung oszilliert für wachsendes ν mit zunehmender Frequenz (vgl. [Hai⁺02], S. 4), so dass wir die Skalierung $t = \frac{x}{\nu}$, $y(t) = u(x)$, $z(t) = \nu u'(x)$, $\varepsilon = \nu^{-2}$ betrachten und das Gleichungssystem

$$\dot{y} = z \tag{2.3a}$$

$$\varepsilon \dot{z} = (1 - y^2)z - y \tag{2.3b}$$

erhalten. Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ wird (2.3b) zu einer algebraischen Gleichung $(1 - y_0^2)z_0 = y_0$. Zusammen mit (2.3a) erhalten wir somit eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung $(1 - y_0^2)\dot{y}_0 = y_0$. Wir betrachten den Anfangswert $y(0) = 2$ wie er in [Hai⁺02] gegeben ist und bestimmen $z(0)$ so, dass die Lösung des Systems glatt ist. Dazu betrachten wir ε -Entwicklungen

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ z &= z_0 + \varepsilon^1 z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Der ε^i -Koeffizientenvergleich in (2.3a) liefert $\dot{y}_i = z_i$ für alle $i = 0, 1, 2, \dots$, während der ε^0 -Koeffizientenvergleich in (2.3b)

$$0 = (1 - y_0^2)z_0 - y_0 \tag{2.4}$$

liefert. Durch Einsetzen erhalten wir $z_0(0) = -\frac{2}{3}$. Wir differenzieren (2.4) und bekommen unter Berücksichtigung von $\dot{y}_0 = z_0$

$$0 = -2y_0 z_0^2 + (1 - y_0^2)\dot{z}_0 - z_0.$$

Somit ist $\dot{z}_0(0) = -\frac{10}{27}$. Das setzen wir in die Gleichung

$$\dot{z}_0 = (1 - y_0^2)z_1 - 2y_0 y_1 z_0 - y_1$$

ein, die aus dem ε^1 -Koeffizientenvergleich von (2.3b) folgt. Wir erhalten $z_1(0) = \frac{10}{81}$.

Analog folgen $\ddot{z}_0(0) = -\frac{2}{3}$, $\dot{z}_1(0) = \frac{292}{729}$, $z_2(0) = -\frac{292}{2187}$, $z_0^{(3)}(0) = -\frac{1486}{729}$, $\ddot{z}_1(0) = \frac{410}{243}$, $\dot{z}_2(0) = -\frac{4310}{6561}$, $z_3(0) = \frac{4310}{19683}$, usw. \diamond

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass die Lösung des singular gestörten Problems nicht immer durch das reduzierte Problem approximiert wird, indem wir die

rechte Seite des Anfangswertproblems in Beispiel 2.3 durch $x(t, \varepsilon)$ ersetzen. Die Lösung $c e^{t/\varepsilon}$, $c \neq 0$ ist instabil, d. h., die Lösung divergiert für $t \rightarrow \infty$. Ein Stabilitätskriterium kann mit Hilfe der logarithmischen Norm angegeben werden.

Definition 2.8: Sei A eine quadratische Matrix. Dann heißt

$$\mu[A] = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

die logarithmische Norm von A . ◇

Definition 2.9: Der Grenzwert

$$D^+ \phi = \limsup_{h \rightarrow +0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}$$

heißt (rechtsseitige) Dini-Ableitung. ◇

Lemma 2.10: Die Funktionen ϕ und ψ seien in $[0, t_{\text{end}}]$ stetig und besitzen in $[0, t_{\text{end}})$ rechtsseitige Dini-Ableitungen. Wenn

(a) $\phi(0) \leq \psi(0)$

(b) $D^+ \phi(t) + \beta \phi(t) < D^+ \psi(t) + \beta \psi(t)$ für $t \in [0, t_{\text{end}})$

für festes β gilt, dann ist $\phi(t) \leq \psi(t)$ für alle $t \in [0, t_{\text{end}}]$ erfüllt.

Beweis: Lemma 1.2.1 in [Str⁺92]. □

Lemma 2.11 ([Str⁺92]): Sei r die Lösung von $\dot{r}(t) = u(t, r(t))$ mit $u(t, 0) = 0$ und

$$\mu \left[\frac{\partial u}{\partial r}(t, \rho) \right] \leq -\beta \quad \text{für } \rho = \theta r, \quad \theta \in [0, 1].$$

Dann gilt für $t \geq 0$

$$|r(t)| \leq e^{-\beta t} |r(0)|.$$

Beweis: Aus der Taylor-Entwicklung und dem Mittelwertsatz folgt

$$|r(t+h)| = |r(t) + hu(t, r)| + \mathcal{O}(h^2) = \left| r(t) + h \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial r}(t, \theta r) r(t) d\theta \right| + \mathcal{O}(h^2).$$

Also ist

$$|r(t+h)| - |r(t)| \leq \left(\sup_{\substack{\rho = \theta r \\ \theta \in [0, 1]}} \left\| I + h \frac{\partial u}{\partial r}(t, \rho) \right\| - 1 \right) |r(t)| + \mathcal{O}(h^2).$$

Division durch h und Grenzübergang nach $h \rightarrow +0$ liefert

$$D^+ |r(t)| = \limsup_{h \rightarrow +0} \frac{|r(t+h)| - |r(t)|}{h} \leq -\beta |r(t)|$$

mit der Dini-Ableitung D^+ . Für die Funktionen $r_n(t) := r(t) - \frac{1}{n}$ gilt demnach

$$D^+|r_n(t)| = D^+|r(t)| \leq -\beta \left(|r_n(t)| + \frac{1}{n} \right) < -\beta|r_n(t)|$$

und $|r_n(t_0)| \leq e^{-\beta t_0} |r(0)|$ mit $t_0 = 0$, so dass wegen $D^+(e^{-\beta t} |r(0)|) = -\beta e^{-\beta t} |r(0)|$ mit Lemma 2.10 die Ungleichung $|r_n(t)| \leq e^{-\beta t} |r(0)|$ folgt. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert schließlich die Behauptung. \square

Nun haben wir alle Hilfsmittel, um die Existenz der Grenzschichtkorrektur zu beweisen [Hai⁺02], falls

$$\mu[g_z(y, z)] \leq -\beta < 0. \quad (2.5)$$

in einer Umgebung der Lösung von (2.2) gilt. Dazu setzen wir die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon) \\ z(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon) \end{aligned}$$

mit der bekannten glatten Lösung in (2.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} \eta'_j(t/\varepsilon) &= f \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon), \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon) \right) \\ &\quad - f \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(t), \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(t) \right) \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \zeta'_j(t/\varepsilon) &= g \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon), \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon) \right) \\ &\quad - g \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(t), \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(t) \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten das Problem in der gestreckten Variable $t_1 = t/\varepsilon$ und vergleichen die ε^0 -Koeffizienten

$$\eta'_1(t_1) = f(y_0(0), z_0(0) + \zeta_0(t_1)) - f(y_0(0), z_0(0)) =: \varphi(t_1) \quad (2.6a)$$

$$\zeta'_0(t_1) = g(y_0(0), z_0(0) + \zeta_0(t_1)) - g(y_0(0), z_0(0)). \quad (2.6b)$$

Aus (2.6b) und der Voraussetzung (2.5) folgt mit Lemma 2.11

$$|\zeta_0(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} |\zeta_0(0)|.$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f gilt für die rechte Seite $\varphi(t_1)$ von (2.6a) die Beschränkung $|\varphi(t_1)| \leq L|\zeta_0(0)|e^{-\beta t_1}$. Folglich ist die Lösung von (2.6a) eindeutig bestimmt und erfüllt

$$\eta_1(t_1) = \int_0^{t_1} \varphi(s) ds - \int_0^{\infty} \varphi(s) ds.$$

Ein Vergleich der ε^1 -Koeffizienten liefert analog mit Lemma 2.11

$$|\zeta_1(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} (|\zeta_1(0)| + Ct_1)$$

und anschließend eine eindeutig bestimmte Lösung η_2 . Diese Konstruktion kann fortgesetzt werden, wobei die Funktionen η_j, ζ_j jeweils abklingende Terme sind.

Definition 2.12: Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt quasimonoton wachsend, falls für alle $y, z \in D$ mit $y \leq z$ für $i = 1, 2, \dots, n$ aus $y_i = z_i$ stets $f_i(y) \leq f_i(z)$ folgt. Die Matrix $C = (c_{ij})$ heißt wesentlich positiv, falls $c_{ij} \geq 0$ für alle $i \neq j$ gilt. \diamond

Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge ist, dann ist eine lineare Funktion $f: y \mapsto Cy$ genau dann quasimonoton wachsend, wenn die Matrix C wesentlich positiv ist [Wal00, §10].

Vergleichssatz 2.13 ([Wal00]): Sei f quasimonoton wachsend und genüge einer Lipschitzbedingung. Wenn die in $[0, T]$ differenzierbaren Funktionen ϕ, ψ die Ungleichungen $\phi(0) \leq \psi(0)$ und $\dot{\phi}(t) - f(\phi(t)) \leq \dot{\psi}(t) - f(\psi(t))$ erfüllen, so folgt $\phi(t) \leq \psi(t)$ in $[0, T]$.

Satz VI.3.2 aus [Hai⁺02] liefert eine Abschätzung des Fehler der abgebrochenen Reihenentwicklung.

Satz 2.14: In einer ε -unabhängigen Umgebung der Lösung y_0, z_0 des reduzierten Problems (2.2) mit Anfangswert $y_0(0) = \bar{y}$ gelte (2.5). Wenn \bar{y}, \bar{z} in dieser Umgebung liegt, dann hat das Anfangswertproblem (2.1) mit Anfangswerten $y(0) = \bar{y}, z(0) = \bar{z}$ und hinreichend kleinem ε für $t \in [0, t_{\text{end}}]$ eine eindeutige Lösung der Form

$$y(t) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \quad (2.7a)$$

$$z(t) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}). \quad (2.7b)$$

Die Koeffizienten erfüllen $|\eta_j(t_1)| \leq e^{-\kappa t_1} |\eta_j(0)|$ und $|\zeta_j(t_1)| \leq e^{-\kappa t_1} |\zeta_j(0)|$ mit geeignetem $\kappa > 0$.

Beweis: Die Partialsummen

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon)$$

$$\hat{z}(t) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon)$$

erfüllen nach Konstruktion von $y_j, z_j, \eta_j, \zeta_j$ das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\hat{y}}(t) = f(\hat{y}(t), \hat{z}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$$

$$\varepsilon \dot{\hat{z}}(t) = g(\hat{y}(t), \hat{z}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Wir subtrahieren (2.1) von dieser Gleichung, so dass mit Bedingungen (2.5)

$$\begin{aligned}
|\hat{z}(t+h) - z(t+h)| &= |\hat{z}(t) - z(t) + \varepsilon^{-1}h(g(\hat{y}, \hat{z}) - g(y, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})) + \mathcal{O}(h^2)| \\
&= |\hat{z} - z + \varepsilon^{-1}h(g(\hat{y}, \hat{z}) - g(y, \hat{z})) + \varepsilon^{-1}h(g(y, \hat{z}) - g(y, z))| \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^N) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\leq \left| \hat{z} - z + \varepsilon^{-1}h \int_0^1 g_z(y, z + (\hat{z} - z)\theta) (\hat{z} - z) d\theta \right| \\
&\quad + \varepsilon^{-1}h|g(\hat{y}, \hat{z}) - g(y, \hat{z})| + \mathcal{O}(\varepsilon^N) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\leq \|I + \varepsilon^{-1}hg_z\| |\hat{z} - z| + \varepsilon^{-1}hL_3|\hat{y} - y| + \mathcal{O}(\varepsilon^N) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

gilt, wobei g_z an einer geeigneten Zwischenwertstelle $(y, z + (\hat{z} - z)\theta)$ ausgewertet wird. Somit folgt für die Dini-Ableitung

$$\begin{aligned}
\varepsilon D^+ |\hat{z}(t) - z(t)| &= \limsup_{h \rightarrow +0} \frac{\varepsilon |\hat{z}(t+h) - z(t+h)| - \varepsilon |\hat{z}(t) - z(t)|}{h} \\
&\leq L_3 |\hat{y} - y| + \varepsilon \limsup_{h \rightarrow +0} \frac{\|I + h\varepsilon^{-1}g_z\| - 1}{h} |\hat{z} - z| + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \\
&= L_3 |\hat{y} - y| + \varepsilon \mu[\varepsilon^{-1}g_z] |\hat{z} - z| + C_2 \varepsilon^{N+1} \\
&\leq L_3 |\hat{y} - y| - \beta |\hat{z} - z| + C_2 \varepsilon^{N+1}.
\end{aligned}$$

Aus der Taylor-Entwicklung und der Dreiecksungleichung lesen wir

$$\begin{aligned}
|\hat{y}(t+h) - y(t+h)| - |\hat{y}(t) - y(t)| &= h|f(\hat{y}(t), \hat{z}(t)) - f(y, z) + C_1 \varepsilon^{N+1}| + \mathcal{O}(h^2) \\
&\leq hL_1 |\hat{y} - y| + hL_2 |\hat{z} - z| + hC_1 \varepsilon^{N+1} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

direkt ab und erhalten

$$D^+ |\hat{y}(t) - y(t)| \leq L_1 |\hat{y} - y| + L_2 |\hat{z} - z| + C_1 \varepsilon^{N+1}.$$

Um diese Differentialungleichungen zu analysieren, betrachten wir die Lösung u, v des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \varepsilon \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \varepsilon^{N+1} \\ C_2 \varepsilon^{N+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\hat{y}(t) - y(t)| \\ |\hat{z}(t) - z(t)| \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & -\beta \end{pmatrix}$ ist wesentlich positiv, so dass nach dem Vergleichssatz 2.13

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq u(t), \quad |\hat{z}(t) - z(t)| \leq v(t)$$

gilt. □

Bemerkung 2.15: Für ζ_0 gilt die stärkere Ungleichung $|\zeta_0(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} |\zeta_0(0)|$, vgl. obige Konstruktion. ◇

Wenn wir die zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ zugehörige logarithmische Norm betrachten, ist $\mu[A]$ gleich dem größten Eigenwert von $\frac{1}{2}(A^T + A)$. Für die Spektralabszisse $\alpha[A] := \max \Re \lambda[A]$ gilt [Sod06]

$$\alpha[A] \leq \mu[A].$$

Aus der Voraussetzung (2.5) folgt somit stets $\alpha[g_z] < 0$. In [Lev⁺54], [Vas62], [MMi68] und [Mik⁺91] wurde die Bedingung $\alpha[g_z] < 0$ benutzt, um zu zeigen, dass die Lösung von (2.1) gegen die Lösung des reduzierten Problems (2.2) konvergiert. Die Beweise beruhen auf technischen Abschätzungen der Grenzschichtkorrektur für hinreichend kleine Umgebungen mit Hilfe von Eigenschaften der Fundamentalmatrix für gestörte Systeme.

2.2 Dissipative quasistatische Approximation

Die Bedingung (2.5) garantiert zwar, dass die Differenz zwischen der Lösung von (2.1) und derjenigen von (2.2) in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ für $t \geq t_i \gg \varepsilon$ liegt, jedoch kann die Konstante

$$\sup_{t \in [t_i, t_{\text{end}}]} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|y_0(t) - y_\varepsilon(t)| + |z_0(t) - z_\varepsilon(t)|}{\varepsilon}$$

für die Integration über ein längeres Intervall $[0, t_{\text{end}}]$ groß werden wie das nichtautonome Beispiel aus [Web⁺12, S. 1585] zeigt. Aber auch in autonomen Differentialgleichungen tritt dieses Phänomen auf.

Beispiel 2.16: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y, z) := y(t) + z(t) - 1, & y(0) &= 1 \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= g(y, z) := -z(t), & z(0) &= \bar{z} \end{aligned}$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.14, insbesondere gilt $\mu[g_z] = -1$. Die quasistatische Approximation $y_0(t) = 1$, $z_0(t) = 0$ ist beschränkt, jedoch wächst sowohl die Lösung $y(t) = 1 + \frac{\bar{z}\varepsilon}{1+\varepsilon}(e^t - e^{-t/\varepsilon})$, $z(t) = \bar{z}e^{-t/\varepsilon}$ des singular gestörten Problems als auch die Differenz $y - y_0 = \frac{\bar{z}\varepsilon}{1+\varepsilon}(e^t - e^{-t/\varepsilon})$ exponentiell in t . \diamond

Satz 2.17: In einer ε -unabhängigen Umgebung der Lösung y_0, z_0 des reduzierten Problems (2.2) mit Anfangswert $y_0(0) = \bar{y}$ gelten die Bedingungen

$$\mu[g_z] \leq -\beta < 0 \tag{2.8a}$$

$$\mu[f_y] \leq -\gamma < 0 \tag{2.8b}$$

$$\|f_z\| \leq L_2 \tag{2.8c}$$

$$\|g_y\| \leq L_3 \tag{2.8d}$$

$$L_2 L_3 < \beta \gamma. \tag{2.8e}$$

Wenn \bar{y}, \bar{z} in dieser Umgebung liegt, dann hat das Anfangswertproblem (2.1) mit Anfangswerten $y(0) = \bar{y}, z(0) = \bar{z}$ und hinreichend kleinem ε für $t \in [0, t_{\text{end}}]$ eine eindeutige Lösung der Form (2.7) und es gilt

$$\begin{aligned} \left| y(t) - \sum_{j=0}^N \varepsilon^j y_j(t) - \varepsilon \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon) \right| &\leq K_1 \varepsilon^{N+1} \\ \left| z(t) - \sum_{j=0}^N \varepsilon^j z_j(t) - \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon) \right| &\leq K_2 \varepsilon^{N+1} \end{aligned}$$

mit von t_{end} unabhängigen Konstanten K_1, K_2 .

Beweis: Wie im Beweis von 2.14 können wir äußere und innere Lösung konstruieren. Mit den Partialsummen

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \sum_{j=0}^N \varepsilon^j y_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \eta_j(t/\varepsilon) \\ \hat{z}(t) &= \sum_{j=0}^N \varepsilon^j z_j(t) + \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \zeta_j(t/\varepsilon).\end{aligned}$$

erhalten wir analog zum Beweis von Satz 2.14

$$\begin{aligned}D^+|\hat{y}(t) - y(t)| &\leq -\gamma|\hat{y} - y| + L_2|\hat{z} - z| + C_1\varepsilon^{N+1} \\ \varepsilon D^+|\hat{z}(t) - z(t)| &\leq L_3|\hat{y} - y| - \beta|\hat{z} - z| + C_2\varepsilon^{N+1}.\end{aligned}$$

Da die Matrix $\begin{pmatrix} -\gamma & L_2 \\ L_3 & -\beta \end{pmatrix}$ wesentlich positiv ist, liefert der Vergleichssatz 2.13

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq u(t), \quad |\hat{z}(t) - z(t)| \leq v(t),$$

wobei u, v Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \varepsilon \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & L_2 \\ L_3 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1\varepsilon^{N+1} \\ C_2\varepsilon^{N+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\hat{y}(0) - y(0)| \\ |\hat{z}(0) - z(0)| \end{pmatrix}$$

ist. Wegen der Bedingung $L_2L_3 < \beta\gamma$ sind sämtliche Eigenwerte der Matrix negativ, so dass die Differenz der abgebrochenen Reihe und der Lösung von (2.1) durch eine von t_{end} unabhängige Konstante beschränkt bleibt. \square

2.3 Attraktive invariante Mannigfaltigkeit

2.3.1 Attraktive invariante Mannigfaltigkeit für ODEs erster Ordnung

In [Nip92] wurde gezeigt, dass es unter später genannten Voraussetzungen eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(y, z) : z = s(y, \varepsilon)\}$ gibt, die invariant unter der Gleichung (2.1) ist, d. h., wenn die Anfangswerte $(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ erfüllen, dann liegt auch $(y(t), z(t))$ auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ε . Ferner konvergieren alle Lösungen des singulär gestörten Problems (2.1) gegen \mathcal{M}_ε , d. h., die Mannigfaltigkeit ist attraktiv. Für den Beweis der Aussage wurde u. a. folgendes Resultat aus [Nip⁺92] verwendet.

Satz 2.18: Seien Y, Z Banachräume und

$$P: Y \times Z \rightarrow Y \times Z, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_0(y) + \hat{f}(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix},$$

wobei f_0 invertierbar mit $|f_0^{-1}(y_1) - f_0^{-1}(y_2)| < \alpha|y_1 - y_2|$ sei und die Lipschitz-Bedingungen

$$\begin{aligned}|\hat{f}(y_1, z_1) - \hat{f}(y_2, z_2)| &\leq L_{11}|y_1 - y_2| + L_{12}|z_1 - z_2| \\ |g(y_1, z_1) - g(y_2, z_2)| &\leq L_{21}|y_1 - y_2| + L_{22}|z_1 - z_2|\end{aligned}$$

erfüllt seien. Für

$$\lambda = \frac{2L_{21}}{\frac{1}{\alpha} - L_{11} - L_{22} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} - L_{11} - L_{22}\right)^2 - 4L_{12}L_{21}}}$$

gelte weiterhin

$$2\sqrt{L_{12}L_{21}} \leq \frac{1}{\alpha} - L_{11} - L_{22} \quad (2.9a)$$

$$L_{12}\lambda < 1 - L_{22} \quad (2.9b)$$

$$L_{12}\lambda < \frac{1}{\alpha} - L_{11}. \quad (2.9c)$$

Dann existiert eine Funktion $s: Y \rightarrow Z$ mit folgenden Eigenschaften

- (a) Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \{(y, s(y)) : y \in Y\}$ ist invariant unter der Abbildung P , d. h. $P(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.
- (b) Die invariante Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist gleichmäßig attraktiv mit Attraktivitätskonstante $L_{22} + L_{12}\lambda < 1$, d. h., für $(y_0, z_0) \in Y \times Z$ und $(y_1, z_1) := P(y_0, z_0)$ gilt $|z_1 - s(y_1)| \leq (L_{22} + L_{12}\lambda)|z_0 - s(y_0)|$.
- (c) Wird das Relationszeichen in (2.9a) durch das strenge Ungleichheitszeichen ersetzt, so besitzt \mathcal{M} die Eigenschaft der asymptotischen Phase: Für jedes $(y_0, z_0) \in Y \times Z$ existiert $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0) \in \mathcal{M}$, so dass für $(y_i, z_i) := P(y_{i-1}, z_{i-1})$ und $(\tilde{y}_i, \tilde{z}_i) := P(\tilde{y}_{i-1}, \tilde{z}_{i-1})$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |y_i - \tilde{y}_i| &\leq c \cdot (L_{22} + L_{12}\lambda)^i |z_0 - s(y_0)| \\ |z_i - \tilde{z}_i| &\leq (1 + \lambda c) \cdot (L_{22} + L_{12}\lambda)^i |z_0 - s(y_0)| \\ \text{mit } c &= \frac{L_{12}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} - L_{11} - L_{22}\right)^2 - 4L_{12}L_{21}}} \end{aligned}$$

gelten.

- (d) Jede invariante Menge $\Omega \subset Y \times Z$ der Abbildung P ist in \mathcal{M} enthalten, d. h. $P(\Omega) = \Omega \Rightarrow \Omega \subset \mathcal{M}$.

Die letzte Eigenschaft garantiert, dass die Folge (y_i, z_i) gegen die durch die Approximation $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ gegebene Folge $(\tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ konvergiert und nicht „phasenverschoben“ gegen \mathcal{M} läuft.

Wir benötigen folgende Annahmen:

- (H1) $D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet und D_1 habe einen C^k -Rand mit $k \geq 2$.
- (H2) $f \in C_b^k(D, \mathbb{R}^m)$, $g \in C_b^k(D, \mathbb{R}^n)$ seien beschränkt in D , wobei C_b^k den Raum der C^k -Funktionen mit beschränkten Ableitungen bezeichnet.
- (H3) Es gebe eine Funktion $s_0 \in C_b^k(D_1, D_2)$ mit $g(y, s_0(y)) = 0$ für alle $y \in D_1$.
- (H4) Es existiere eine Konstante $\beta_0 > 0$, so dass die Realteile aller Eigenwerte von $B(y) := g_z(y, s_0(y))$ kleiner als $-\beta_0$ für jedes $y \in D_1$ sind.

Satz 2.19 ([Nip92]): Seien (H1)-(H4) erfüllt und D'_1 ein Teilgebiet mit $\overline{D'_1} \subset D_1$. Dann existieren für jedes $\beta \in (0, \beta_0)$ positive Konstanten ϵ^*, δ, K und eine Funktion $s \in C_b^k(D'_1 \times (0, \epsilon^*), D_2)$, so dass folgende Aussagen für $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ gelten.

(1) *Invarianz.* Die Menge $\mathcal{M}_\epsilon = \{(y, z) : z = s(y, \epsilon)\}$ ist invariant unter der ODE (2.1), d. h. $P_t(\mathcal{M}_\epsilon) = \mathcal{M}_\epsilon$ für $P_t : (\bar{y}, \bar{z}) \mapsto (y(t), z(t))$.

(2) *Attraktivität.* Jede Lösung $(y(t), z(t))$ des Problems (2.1) mit $|\bar{z} - s_0(\bar{y})| \leq \delta$ erfüllt

$$|z(t) - s(y(t), \epsilon)| \leq K e^{-\beta t/\epsilon} |\bar{z} - s(\bar{y}, \epsilon)|$$

für $t \geq 0$ so lange $y(t) \in D'_1$ bleibt.

(3) *Asymptotische Phase.* Für jede Lösung $(y(t), z(t))$ des Problems (2.1), dessen Anfangswerte $|\bar{z} - s_0(\bar{y})| \leq \delta$ erfüllen, gibt es ein $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0) \in \mathcal{M}_\epsilon$, so dass die Lösung $(\tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ der ODE (2.1) mit Anfangswerten $(\tilde{y}(0), \tilde{z}(0)) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq K e^{-\beta t/\epsilon} |\bar{z} - s(\bar{y}, \epsilon)|$$

$$|z(t) - \tilde{z}(t)| \leq K e^{-\beta t/\epsilon} |\bar{z} - s(\bar{y}, \epsilon)|$$

erfüllt so lange $y(t), \tilde{y}(t) \in D'_1$ bleiben.

(4) *Nähe zu $\mathcal{M}_0 := \{(y, z) : y \in D_1, z = s_0(y)\}$.* $\forall y \in D'_1 : s(y, 0) = s_0(y)$

Für den Beweis werden entsprechende Aussagen über die Lösung in einer skalierten Zeit $t_1 = t/\epsilon$ auf einem unbeschränkten Gebiet hergeleitet. Mit der Variablentransformation $z = s_0(y) + \zeta$ führt das zu dem System

$$\frac{d}{dt_1} y = \epsilon f(y, s_0(y) + \zeta) \quad (2.10a)$$

$$\frac{d}{dt_1} \zeta = g(y, s_0(y) + \zeta) - \frac{d}{dt_1} s_0(y) =: (B(y) + \hat{G}(y, \zeta))\zeta - \epsilon s'_0(y), \quad (2.10b)$$

wobei $\hat{G} = \mathcal{O}(|\zeta|)$ gilt. Da die Spektralabszisse der Jacobimatrix B nach Voraussetzung nach oben durch $-\beta_0$ beschränkt ist, kann auf das lineare Hilfsproblem $u'(t_1) = B(y(t))u(t_1)$ folgende Proposition angewendet werden.

Proposition 2.20 ([Cop78], Prop. 1.5): Sei $A(t)$ eine stetige $n \times n$ -Matrixfunktion auf $[0, t_{\text{end}}]$ mit $\alpha[A(t)] \leq -\beta_0$ und $|A(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, t_{\text{end}}]$. Dann existiert für alle $\nu > 0$ ein $\delta(M, \nu) > 0$, so dass

$$(\forall t^1, t^2 \in [0, t_{\text{end}}] : |A(t^2) - A(t^1)| < \delta |t^2 - t^1|) \Rightarrow (\forall t \in [0, t_{\text{end}}] : |X(t)| \leq K_\nu e^{(\nu - \beta_0)t})$$

gilt, wobei $X(t)$ die Fundamentalmatrix der Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ und die Konstante $K_\nu = \max\{(4M/\nu)^{n-1}, 1\}$ ist.

Proposition 2.21 ([Cop78], Prop. 1.1): Sei $A(t)$ eine stetige Matrixfunktion auf einem Intervall $[0, t_{\text{end}}]$ und die Fundamentalmatrix $X(t)$ der Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ erfülle die Ungleichung $|X(t)| \leq K e^{\alpha t}$ für $t \geq 0$. Falls $\tilde{A}(t)$ eine stetige Matrixfunktion mit $|\tilde{A}(t) - A(t)| \leq \delta$ für alle $t \in [0, t_{\text{end}}]$ ist, dann erfüllt die Fundamentalmatrix $\tilde{X}(t)$ des gestörten Systems $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}$ die Ungleichung $|\tilde{X}(t)| \leq K e^{\tilde{\alpha} t}$ für $t \geq 0$, wobei $\tilde{\alpha} = \alpha + \delta K$ ist.

Da die Norm der Matrix $\hat{G}(y, \zeta)$ beschränkt ist, kann die Fundamentalmatrix U des Problems $\dot{u} = (B(y) + \hat{G}(y, \zeta))u$ mittels Proposition 2.21 für jedes $\beta \in (0, \beta_0)$ durch $|U| \leq K_0 e^{-\beta_0 t}$ abgeschätzt werden. Mittels Variation der Konstanten wird gezeigt, dass die Lösung von (2.10) lipschitz-stetig von den Anfangswerten $\bar{y}, \bar{\zeta}$ abhängt. Anschließend wird gezeigt, dass für geeignetes h die Abbildung

$$P_h: \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y(h; \bar{y}, \bar{\zeta}) \\ \zeta(h; \bar{y}, \bar{\zeta}) \end{pmatrix}$$

die Voraussetzung von Satz 2.18 erfüllt. Die Maximalitätseigenschaft (d) von Satz 2.18 überträgt die Eigenschaften von P_h schließlich auf den Fluss P_t .

2.3.2 Attraktive invariante Mannigfaltigkeit für Modellgleichungen

Mit Satz 2.18 wurde in [Lub93] für die Gleichung eines steifen mechanischen Systems

$$M(q)\ddot{q} = f(q, \dot{q}) - \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla U(q) \quad (2.11)$$

bzw. in [Stu04] für das stark gedämpfte mechanische System mit der Differentialgleichung

$$M(q)\ddot{q} = f(q, \dot{q}) - \frac{1}{\varepsilon} D(q)\dot{q} \quad (2.12)$$

gezeigt, dass eine attraktive Mannigfaltigkeit existiert und jede glatte Lösung $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ -nah an dieser Mannigfaltigkeit liegt.

In [Stu04] wird vorausgesetzt, dass $M(q)$ symmetrisch, positiv definit und $D(q)$ symmetrisch, positiv semidefinit mit konstantem Rang für alle $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ ist, so dass eine Blockdiagonalisierung

$$M^{-1/2}(q)D(q)M^{-1/2}(q) = Q^T(q) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(q) \end{pmatrix} Q(q)$$

mit einer positiv definiten Matrix $A(q)$ existiert. Mit der Transformation

$$Q^T(q)M^{1/2}(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} y_2 \\ z \end{pmatrix}$$

ist das Gleichungssystem (2.12) dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y, z) \\ \varepsilon \dot{z} &= -A(y)z + \varepsilon \varphi(y, z) \end{aligned}$$

mit beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen F, φ . Mit der Definitheit von A wird gezeigt, dass die Lösung

$$\begin{aligned} y(h) &= \bar{y} + \int_0^h F(y(s), x(s)) ds \\ z(h) &= R_\varepsilon(h)\bar{z} + \int_0^h R_\varepsilon(h)R_\varepsilon^{-1}(s)\varphi(y(s), x(s)) ds \end{aligned}$$

zum Zeitpunkt h lipschitz-stetig von den Anfangswerten \bar{y}, \bar{z} abhängt, wobei R_ε die Fundamentalmatrix der ODE $\dot{z} = -\varepsilon^{-1}A(y)z$ ist. Für hinreichend kleine $h > 0$ und $\varepsilon < h$ wird die Bedingung (2.9a) mit $\alpha \neq 0$ nachgewiesen. Das Ergebnis soll als Satz zusammengefasst werden.

Satz 2.22 ([Stu04]): *Erfüllen die Anfangswerte $q(0), \dot{q}(0)$ von (2.12) die Bedingung $D(q(0))\dot{q}(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, so existiert zu dem stark gedämpften mechanischen System (2.12) eine attraktive invariante Mannigfaltigkeit \mathcal{N} . Lösungen, die außerhalb von \mathcal{N} starten, nähern sich der Mannigfaltigkeit mit exponentieller Geschwindigkeit, d. h., zu einer analytischen Lösung $q(t), \dot{q}(t)$ von (2.12) mit Anfangswerten q_0, \dot{q}_0 gibt es ein Paar $(\tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0) \in \mathcal{N}$ mit $(q_0, \dot{q}_0) - (\tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0) = \mathcal{O}(1)$, so dass für die Lösung $\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)$ von (2.12) zu den Anfangswerten $\tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0$ zur Zeit $t > 0$*

$$|(q(t), \dot{q}(t)) - (\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t))| = \mathcal{O}(e^{-Ct/\varepsilon})$$

mit geeigneter Konstante C gilt, die unabhängig von t und ε ist.

Lubich [Lub93] benutzt die Voraussetzungen

(U1) Es gibt eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{U} = \{u \in D : U(u) = \min_{y \in D} U(y)\} = \{u \in D : \nabla U(u) = 0\}$ für ein geeignetes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$

(U2) In einer Umgebung von \mathcal{U} ist U streng konvex entlang Richtungen, die nichttangential zu \mathcal{U} liegen, d. h., es gibt ein $\beta > 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{U}$ die Ungleichung $v^T \nabla^2 U(u) v \geq \beta v^T M(u) v$ für alle Vektoren v im $M(u)$ -orthogonalen Komplement des Tangentialraums $T_u \mathcal{U}$ gilt

zur Konstruktion lokaler Koordinaten x , mit denen die Bewegungsgleichung (2.11) in der Form

$$\hat{M}(x)\ddot{x} = \hat{f}(x, \dot{x}) - \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} x \quad (2.13)$$

geschrieben werden kann. Falls $M(q)$ symmetrisch positiv definit ist, so gilt das auch für $\hat{M}(x)$ und es gibt eine Blockdiagonalisierung

$$\hat{M}^{-1/2}(x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \hat{M}^{-1/2}(x) = Q^T(x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(x) \end{pmatrix} Q(x),$$

so dass wir (2.13) mit der Variablentransformation $Q^T \hat{M}^{1/2} x =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ in der Form

$$\ddot{u} = F_1(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \quad (2.14a)$$

$$\ddot{v} = F_2(u, v, \dot{u}, \dot{v}) - \frac{1}{\varepsilon^2} A(u, v) v \quad (2.14b)$$

darstellen können, wobei die Funktionen F_1, F_2 glatt sind. Für die Cholesky-Zerlegung $A(u, v) = L(u, v)L(u, v)^T$ werden Koordinaten $w := (v, \varepsilon L^{-1}\dot{v})$ eingeführt, so dass (2.14b) die Gestalt

$$\dot{w} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & L \\ -L^T & 0 \end{pmatrix} w + \phi(u, w, \dot{u}, \varepsilon)$$

annimmt. Unter geeigneten Voraussetzungen an die Anfangswerte folgt damit schließlich $|w| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Satz 2.23 ([Lub93]): Seien (U1) und (U2) erfüllt, sowie $M(q)$ symmetrisch positiv definit. Für alle $\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0$ im Tangentialbündel von \mathcal{U} existiert ein Paar $\bar{q}, \dot{\bar{q}}$, wobei die Differenz $(\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0) - (\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ist und im $M(\bar{q}_0)$ -orthogonalen Komplement des Tangentialraums $T_{\bar{q}_0}\mathcal{U}$ liegt, so dass die Lösung von (2.11) mit Anfangswerten $\bar{q}, \dot{\bar{q}}$ glatt ist und die Gestalt

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0(t) + \varepsilon^2 q_1(t) + \dots + \varepsilon^{2N} q_N(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2N+2}) \\ \dot{q}(t) &= \dot{q}_0(t) + \varepsilon^2 \dot{q}_1(t) + \dots + \varepsilon^{2N} \dot{q}_N(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2N+2}) \end{aligned}$$

mit ε -unabhängigen Funktionen $q_k(t)$ besitzt.

2.4 Abgeschwächtes Kriterium

Die Voraussetzung (2.5) von Satz 2.14 garantiert ein exponentielles Abklingen der Grenzschichtkorrektur. Allerdings erlaubt der Satz keine Aussage über das langfristige Verhalten der Lösung von singular gestörten Problemen, deren Jacobimatrix g_z nur semidefinit ist und in Gleichgewichtslage verschwindet.

Beispiel 2.24: Wir betrachten einen Ein-Massen-Schwinger, auf den eine konstante Kraft f wirkt und der durch

$$\varepsilon \ddot{r} + \dot{r} + \gamma r = f$$

modelliert wird. Wir untersuchen die Funktion $w = \varepsilon \dot{r}^2 + \gamma(r - f/\gamma)^2$ und errechnen

$$\dot{w} = 2\varepsilon \dot{r}\ddot{r} + 2\gamma \dot{r}(r - f/\gamma) = 2(f - \dot{r} - \gamma r)\dot{r} + 2\gamma \dot{r}(r - f/\gamma) = -2\dot{r}^2.$$

Der Wert von w ist also monoton fallend. Wegen $w \geq 0$ ist das langfristige Verhalten der Lösung durch $w = 0$ gegeben. Das bedeutet $r - f/\gamma = 0$. \diamond

Die Funktion $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aus Bsp. 2.24 heißt Ljapunov-Funktion [Lja07]. Sie ist in einer Umgebung der Gleichgewichtslage $r = f/\gamma$ stetig differenzierbar und erfüllt $w(r) \geq 0$ mit $w(r) = 0$ genau für $r = f/\gamma$ und $\dot{r} = 0$. Die Ableitung \dot{w} verschwindet in der Gleichgewichtslage $(r, \dot{r}) = (f/\gamma, 0)$ und ist außerhalb dieser nichtpositiv. Wir sprechen von einer strengen Ljapunov-Funktion, wenn \dot{w} außerhalb der Gleichgewichtslage sogar streng negativ ist. Den Existenzbeweis der Grenzschichtkorrektur mittels einer strengen Ljapunov-Funktion bereiten wir durch folgende Aussage vor.

Lemma 2.25: Sei $\beta > 0$, $\xi \in \mathcal{C}^1([0, T])$ und $\xi'(t_1) + 2\beta\xi(t_1) \leq 0$ für alle $t_1 \in [0, T]$. Dann gilt $\xi(t_1) \leq \xi(0) e^{-2\beta t_1}$ für alle $t_1 \in [0, T]$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung $\xi(T_1) \leq \xi(0) e^{-2\beta T_1}$ gilt für ein $T_1 \in [0, T]$ nicht, d. h. $0 < \xi(T_1) e^{2\beta T_1}$. Dann ist mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$0 < \xi(T_1) e^{2\beta T_1} - \xi(0) e^{2\beta \cdot 0} = (\xi'(\theta) e^{2\beta\theta} + 2\beta\xi(\theta) e^{2\beta\theta}) T_1$$

für eine Zwischenstelle $\theta \in (0, T_1)$, was der Voraussetzung $\xi'(\theta) + 2\beta\xi(\theta) \leq 0$ widerspricht. \square

Wie im Beweis zu Satz 2.14 betrachten wir die ε^0 -Terme der Grenzschichtkorrektur

$$\eta_1' = f(y_0, z_0 + \zeta_0) - f(y_0, z_0) \quad (2.15a)$$

$$\zeta_0' = g(y_0, z_0 + \zeta_0) - g(y_0, z_0), \quad (2.15b)$$

wobei \cdot' die Ableitung nach $t_1 = t/\varepsilon$ bezeichnet. Anstatt der Bedingung (2.5) nehmen wir an, dass die Funktion g im zweiten Argument linear ist, d. h.

$$g(y_0, z_0 + \zeta_0) = g(y_0, z_0) - D(y_0)\zeta_0.$$

Weiterhin sei $D(y_0)$ eine koerzitive Matrix, d. h. $\zeta^T D(y_0)\zeta \geq \beta|\zeta|^2$ für alle ζ und y_0 mit einer positiven Konstante β . Dann ist

$$(|\zeta_0|^2)' = 2\zeta_0^T (g(y_0, z_0 + \zeta_0) - g(y_0, z_0)) = -2\zeta_0^T D(y_0)\zeta_0 \leq -2\beta|\zeta_0|^2.$$

Mit $\xi(t_1) = |\zeta_0(t_1)|^2$ liefert Lemma 2.25 somit $|\zeta_0(t_1)|^2 \leq |\zeta_0(0)|^2 e^{-2\beta t_1}$ bzw.

$$|\zeta_0(t_1)| \leq |\zeta_0(0)| e^{-\beta t_1}.$$

Wegen Lipschitz-Stetigkeit von f sehen wir nun, dass die rechte Seite von (2.15a) durch $L|\zeta_0(0)|e^{-\beta t_1}$ beschränkt ist, so dass die Existenz von η_1 folgt.

Satz 2.26: *In einer ε -unabhängigen Umgebung der Lösung y_0, z_0 des reduzierten Problems (2.2) mit Anfangswert $y_0(0) = \bar{y}$ habe die Funktion g die Gestalt*

$$g(y_0, z_0 + \zeta_0) = g(y_0, z_0) - D(y_0)\zeta_0,$$

wobei es eine Konstante $\beta > 0$ gibt, so dass $\zeta^T D(y_0)\zeta \geq \beta|\zeta|^2$ für alle ζ, y_0 gilt. Dann hat das Problem (2.1) für hinreichend kleines ε die Form

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ z(t) &= z_0(t) + \zeta_0(t/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

2.5 Alternative Voraussetzungen

Sind alle Größen in (2.1) skalar, so fallen die Voraussetzungen der Sätze in [Hai⁺02], [Nip92] und [Lev⁺54] mit dem in Kapitel 4 von [OMa74] bewiesenen Satz zusammen. Außerdem sind dann $\mu[g_z]$ und $\alpha[g_z]$ identisch [Sod06].

Anstatt gleichmäßig asymptotischer Stabilität wurde in [Cha69] exponentielle Dichotomie der linearen Gleichung

$$\dot{v} = (f_y(y, z) - f_z(y, z)g_z^{-1}(y, z)g_y(y, z))v$$

vorausgesetzt, d. h., die Gleichung hat eine Fundamentalmatrix $V(t)$ mit $V(0) = I_m$, so dass

$$\begin{aligned} |V(t)PV^{-1}(s)| &\leq K e^{-\beta(t-s)} \quad \text{für } t \geq s \\ |V(t)(I_m - P)V^{-1}(s)| &\leq K e^{-\beta(s-t)} \quad \text{für } s \geq t, \end{aligned}$$

wobei P eine Projektionsmatrix ist und K, β positive Konstanten sind.

In [Hop66] wurde die Konvergenz der Lösung des gestörten Systems gegen die Lösung des degenerierten Systems durch eine Ljapunovfunktion [Lja07] gezeigt, die mit Hilfe des Lemmas von Massera [Mas49] konstruiert wurde, wobei insbesondere die gleichmäßig asymptotische Stabilität der Lösung von $dz/ds = g(\alpha, \beta, z)$, $z(0) = \bar{z}$ mit der gestreckten Variable $s = (t - \alpha)/\varepsilon$ in den Parametern α, β vorausgesetzt wurde.

2.6 Supersingulär gestörte Probleme

In Mehrkörpersystemen treten häufig Massematrizen mit Eigenwerten von mehr als zwei Größenordnungen auf. Das motiviert die Betrachtung von Problemen mit singularen Störungen mehrerer Größenordnungen. Als Beispiel betrachten wir das Systems aus [Web+10]

$$\dot{x} = f(x, y, z) \quad (2.16a)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y, z) \quad (2.16b)$$

$$\varepsilon^2 \dot{z} = h(x, y, z). \quad (2.16c)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich die DAE

$$\dot{x}_0 = f(x_0, y_0, z_0)$$

$$0 = g(x_0, y_0, z_0)$$

$$0 = h(x_0, y_0, z_0).$$

Falls die Matrix

$$\begin{pmatrix} g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \\ h_y(x_0, y_0, z_0) & h_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial(y, z)} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

regulär ist, so kann eine asymptotische ε -Entwicklung für y und z durch Koeffizientenvergleich berechnet werden. Somit bekommen wir die glatte Lösung $(x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)})$, welche wir in diesem Zusammenhang auch „ ε^0 -gestörte“ Lösung nennen. Diese Lösung besitzt keine Freiheitsgrade für $(y_{(0)}, z_{(0)})$.

Betrachten wir nun die „ ε^1 -gestörte“ Lösung

$$x_{(1)}(t) = x_{(0)}(t) + \xi(t/\varepsilon)$$

$$y_{(1)}(t) = y_{(0)}(t) + \eta(t/\varepsilon)$$

$$z_{(1)}(t) = z_{(0)}(t) + \zeta(t/\varepsilon)$$

zu (2.16) mit der gestreckten Variable $t_1 = t/\varepsilon$, so ergibt sich mit $D_t := \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} D_{t_1} \xi &= f(x_{(0)} + \xi, y_{(0)} + \eta, z_{(0)} + \zeta) - f(x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)}) \\ D_{t_1} \eta &= g(x_{(0)} + \xi, y_{(0)} + \eta, z_{(0)} + \zeta) - g(x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)}) \\ \varepsilon D_{t_1} \zeta &= h(x_{(0)} + \xi, y_{(0)} + \eta, z_{(0)} + \zeta) - h(x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)}). \end{aligned}$$

Wir suchen die asymptotischen Entwicklungen $\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ usw. bezüglich ε . Sei $f_{\langle 0 \rangle}(\xi, \eta, \zeta) = f(x_{\langle 0 \rangle} + \xi, y_{\langle 0 \rangle} + \eta, z_{\langle 0 \rangle} + \zeta)$, usw. Dann ist offensichtlich $\xi_0 = 0$ und der Vergleich der ε^0 -Koeffizienten liefert

$$D_{t_1}\xi_1 = f_{\langle 0 \rangle}(0, \eta_0(t_1), \zeta_0(t_1)) - f_{\langle 0 \rangle}(0, 0, 0) =: \varphi(t_1) \quad (2.17a)$$

$$D_{t_1}\eta_0 = g_{\langle 0 \rangle}(0, \eta_0(t_1), \zeta_0(t_1)) - g_{\langle 0 \rangle}(0, 0, 0) \quad (2.17b)$$

$$0 = h_{\langle 0 \rangle}(0, \eta_0(t_1), \zeta_0(t_1)) - h_{\langle 0 \rangle}(0, 0, 0). \quad (2.17c)$$

Wenn h_z in einer Umgebung von $(x_{\langle 0 \rangle}, y_{\langle 0 \rangle} + \eta, z_{\langle 0 \rangle})$ regulär ist, dann existiert nach dem Satz über implizite Funktionen ein σ mit $0 = h_{\langle 0 \rangle}(0, \eta_0, \sigma(\eta_0)) - h_{\langle 0 \rangle}(0, 0, 0)$. Gleichung (2.17b) wird dann zu

$$D_{t_1}\eta_0 = g_{\langle 0 \rangle}(0, \eta_0(t_1), \sigma(\eta_0(t_1))) - g_{\langle 0 \rangle}(0, 0, 0) =: \Phi(\eta_0(t_1)).$$

Da für die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\eta_0} &= g_{\langle 0 \rangle, y}(0, \eta_0, \sigma(\eta_0)) + g_{\langle 0 \rangle, z}(0, \eta_0, \sigma(\eta_0))\sigma'(\eta_0) \\ &= (g_y - g_z h_z^{-1} h_y)(x_{\langle 0 \rangle}, y_{\langle 0 \rangle} + \eta_0, z_{\langle 0 \rangle} + \sigma(\eta_0)) \end{aligned}$$

gilt, setzen wir weiter

$$\mu[g_y - g_z h_z^{-1} h_y] \leq -\beta < 0$$

voraus. Dann liefert Lemma 2.11 $|\eta_0(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} |\eta_0(0)|$. Lipschitz-Stetigkeit von $f_{\langle 0 \rangle}$ und σ ergibt $|D_{t_1}\xi_1(t_1)| = |\varphi(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} L|\eta(0)|$ und

$$\xi_1(t_1) = - \int_{t_1}^{\infty} \varphi(s) ds,$$

denn $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \xi_1(t_1) = 0$. Die ε^1 -gestörte Lösung $(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle})$ hat keinen Freiheitsgrad für $z_{\langle 1 \rangle}$.

Setzen wir die ε^2 -gestörte Lösung

$$\begin{aligned} x_{\langle 2 \rangle}(t) &= x_{\langle 1 \rangle}(t) + \bar{\xi}(t/\varepsilon^2) \\ y_{\langle 2 \rangle}(t) &= y_{\langle 1 \rangle}(t) + \bar{\eta}(t/\varepsilon^2) \\ z_{\langle 2 \rangle}(t) &= z_{\langle 1 \rangle}(t) + \bar{\zeta}(t/\varepsilon^2) \end{aligned}$$

mit $t_2 = t/\varepsilon^2$ in (2.16) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} D_{t_2} \bar{\xi} &= f(x_{\langle 1 \rangle} + \bar{\xi}, y_{\langle 1 \rangle} + \bar{\eta}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}) - f(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}) \\ \frac{1}{\varepsilon} D_{t_2} \bar{\eta} &= g(x_{\langle 1 \rangle} + \bar{\xi}, y_{\langle 1 \rangle} + \bar{\eta}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}) - g(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}) \\ D_{t_2} \bar{\zeta} &= h(x_{\langle 1 \rangle} + \bar{\xi}, y_{\langle 1 \rangle} + \bar{\eta}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}) - h(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}). \end{aligned}$$

Offenbar muss $\bar{\xi} = \varepsilon^2 \bar{\xi}_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, $\bar{\eta} = \varepsilon^1 \bar{\eta}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\bar{\zeta} = \varepsilon^0 \bar{\zeta}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^1)$ gelten. Der Vergleich der ε^0 -Koeffizienten ergibt

$$\begin{aligned} D_{t_2} \bar{\xi}_2 &= f(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}_0) - f(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}) \\ D_{t_2} \bar{\eta}_1 &= g(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}_0) - g(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}) \\ D_{t_2} \bar{\zeta}_0 &= h(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle} + \bar{\zeta}_0) - h(x_{\langle 1 \rangle}, y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}). \end{aligned}$$

Mit der Annahme $\mu[h_z] \leq -\bar{\beta} < 0$ liefert Lemma 2.11 $|\bar{\zeta}_0(t_2)| \leq e^{-\bar{\beta}t_2} |\bar{\zeta}_0(0)|$. Mit Lipschitz-Stetigkeit von f und g bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_2(t_2) &= - \int_{t_2}^{\infty} f(x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)} + \zeta_0(s)) - f(x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}) ds \\ \bar{\eta}_1(t_2) &= - \int_{t_2}^{\infty} g(x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)} + \zeta_0(s)) - g(x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}) ds.\end{aligned}$$

Diese Argumentation lässt sich auf Systeme der Form

$$\varepsilon^j \dot{x}_{(j)} = f_{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

unter entsprechenden Voraussetzung übertragen und somit die Lösung als ε^n -gestörte Lösung schreiben.

Satz 2.27: Seien $f_{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, n$ beliebig oft differenzierbare Funktionen, so dass

$$\left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial x_{(\ell)}} \right)_{k, \ell > j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

regulär ist und die Bedingungen

$$\mu \left[\frac{\partial f_{(j)}}{\partial x_{(j)}} - \left(\frac{\partial f_{(j)}}{\partial x_{(\ell)}} \right)_{\ell > j} \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial x_{(\ell)}} \right)_{k, \ell > j}^{-1} \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial x_{(j)}} \right)_{k > j} \right] \leq -\beta, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt sind. Dann besitzt das Problem

$$\varepsilon^j \dot{x}_{(j)} = f_{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

eine Lösung der Gestalt

$$x_{(j)} = x_{(j)\langle 0 \rangle} + \sum_{k=1}^n (x_{(j)\langle k \rangle} - x_{(j)\langle k-1 \rangle}) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

wobei $|x_{(j)\langle k \rangle} - x_{(j)\langle k-1 \rangle}| \leq K \exp(-\kappa t / \varepsilon^k)$ für gewisse positive, ε -unabhängige Konstanten K, κ gilt.

In [Lev⁺54, Kap. 5] wird $|x - x_{(0)}| + |y - y_{(0)}| + |z - z_{(0)}| \rightarrow 0$ außerhalb der transienten Phase gezeigt, wobei dort statt der logarithmischen Norm die Spektralabszisse von $g_y - g_z h_z^{-1} h_y$ und h_z durch negative Konstanten beschränkt sein soll. Tikhonov untersuchte in [Tik52] die Konvergenz auch für mehr als zwei Potenzen von ε . Allerdings wurde ein fehlerhafter Beweisteil jener Arbeit erst in [Hop67] korrigiert. Später zeigte Hoppensteadt sogar gleichmäßige Konvergenz für die Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \varepsilon_j \dot{y}_j &= g_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

wenn $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_{j+1}/\varepsilon_j \rightarrow 0$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ für $j = 1, 2, \dots, n-1$ gilt, wobei die explizite Abhängigkeit der ε_j von ε in der Notation unterdrückt wird, und die Funktionen f, g_j einige Bedingungen bezüglich Regularität, Glattheit und Stabilität erfüllen müssen [Hop69].

Kapitel 3

Modellierung von Mehrkörpersystemen

Mehrkörpersysteme sind mechanische Systeme aus endlich vielen Körpern, die durch (masselose) Gelenke miteinander verbunden sind. Die Gelenke schränken dabei die relative Lage der gekoppelten Körper zueinander ein, wobei insbesondere auch starre Verbindungen als Gelenk zählen. An den Körpern (starr oder flexibel) können außerdem noch Kräfte wirken, die z. B. durch Federn oder die Gravitation verursacht werden.

3.1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Der Zustand eines mechanischen Mehrkörpersystems wird durch endlich viele Freiheitsgrade beschrieben, die in einem Vektor r zusammengefasst werden. Wir nehmen an, dass die mechanischen Eigenschaften des Systems durch die kinetische Energie $T(r, \dot{r})$ und die potentielle Energie $U(r, t)$ bestimmt sind. Für die Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, t) := T(r, \dot{r}) - U(r, t) \quad (3.1)$$

besagt das Hamilton-Prinzip [Cou⁺89, IV.§10]: Zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t_{end} verläuft die Bewegung so, dass

$$\int_{t_0}^{t_{\text{end}}} L(r, \dot{r}, t) dt \rightarrow \text{stationär} \quad (3.2)$$

bezüglich aller benachbarten Koordinaten $r + \delta r, \dot{r} + \delta \dot{r}$ mit $\delta r(t_0) = \delta r(t_{\text{end}}) = 0$ und $\delta \dot{r}(t_0) = \delta \dot{r}(t_{\text{end}}) = 0$ gilt.

Damit das Integral in (3.2) stationär wird, muss für differenzierbare L die Ableitung

$$\int_{t_0}^{t_{\text{end}}} \frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} dt$$

verschwinden. Mit $\delta \dot{r} = \frac{d}{dt} \delta r$ ergibt partielle Integration

$$0 = \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} \frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{d}{dt} \delta r dt = \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} \frac{\partial L}{\partial r} \delta r dt - \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) \delta r dt$$

wegen $\delta r(t_0) = \delta r(t_{\text{end}}) = 0$. Da δr beliebig ist, kann das Integral nur dann verschwinden, wenn der Integrand selbst verschwindet. Das liefert die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (3.3)$$

Mit $M := \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{r} \partial \dot{r}}$ erhalten wir

$$M\ddot{r} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{r} \partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{r} \partial r} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial r}, \quad (3.4)$$

wobei alle Terme der rechten Seite häufig in einem Kraftterm zusammengefasst werden.

In der Herleitung von (3.4) haben wir benutzt, dass die Koordinaten r voneinander unabhängig sind, d. h. die Bewegungsgleichungen sind in Minimalkoordinaten r formuliert. Nun betrachten wir redundante Koordinaten q , die von den Minimalkoordinaten r abhängen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.3) liefern

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial r_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i T_{\dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{r}_j} \right) - \sum_i \left(T_{\dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial r_j} + T_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_j} - U_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \right) \\ &= \sum_i \frac{dT_{\dot{q}_i}}{dt} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{r}_j} + \sum_i T_{\dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{r}_j} - \sum_i T_{\dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial r_j} - \sum_i T_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_j} + \sum_i U_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_j}. \end{aligned}$$

Wegen $\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \dot{r}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}$ ist $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial r_j}$, also $\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial r_j}$. Mit den virtuellen Verrückungen $\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \delta r_j$ ergibt die endliche Summation

$$0 = \sum_j \sum_i \left(\frac{dT_{\dot{q}_i}}{dt} - T_{q_i} + U_{q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \delta r_j = \sum_i \left(\frac{dT_{\dot{q}_i}}{dt} - T_{q_i} + U_{q_i} \right) \delta q_i.$$

Mit den Kräften $f_i = T_{q_i} - U_{q_i}$ folgt das d'Alembertsche Prinzip [Ham67]:

$$0 = \sum_i \left(\frac{dT_{\dot{q}_i}}{dt} - f_i \right) \delta q_i. \quad (3.5)$$

Jetzt betrachten wir Zwangsbedingungen (engl. constraints) der Form $0 = g(t, q)$ und die Matrix $G = \frac{\partial g}{\partial q}$. Mit virtuellen Verrückungen δq_i , die mit den Bedingungen verträglich sind, gilt für jede Zwangsbedingung $0 = g_m(q_1 + \delta q_1, \dots) = g_m(q) + \sum_i G_{mi}(q) \delta q_i$. Wegen $g_m(q) = 0$ ist also $0 = \lambda_m \sum_i G_{mi}(q) \delta q_i$ für beliebige Lagrange-Multiplikatoren λ_m . Diese m Gleichungen werden summiert und zu (3.5) addiert

$$0 = \sum_i \left(\frac{dT_{\dot{q}_i}}{dt} - f_i + \sum_m \lambda_m G_{mi}(q) \right) \delta q_i.$$

Mit der Massematrix $M = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ lassen sich die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems somit in der Form

$$M(q)\ddot{q} + G^T \lambda = f(t, q, \dot{q}) \quad (3.6a)$$

$$0 = g(t, q) \quad (3.6b)$$

schreiben. Im entarteten Fall von null Zwangsbedingungen wird die Gleichung (3.6b) trivial und (3.6a) nimmt für $r = q$ die Gestalt (3.4) an, so dass wir kein neues Symbol für die Massematrix M einführen.

3.2 Modellierung flexibler Strukturen

Um bestimmte Effekte in der Simulation von mechanischen System korrekt abzubilden, müssen häufig einzelne Strukturen als flexible oder elastische Körper modelliert werden [Rhe⁺99, Sim13]. Indem in der Lagrange-Funktion (3.1) die Verzerrungsenergie W berücksichtigt wird, können wir (3.3) auch zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen von flexiblen Systemen benutzen. Die Bestimmung der Verzerrungsenergie elastischer Strukturen soll hier am Beispiel des flexiblen Euler-Bernoulli-Balkens mit konstanter Dichte ρ geschehen, siehe Abb. 3.1. Für die Modellierung des Euler-Bernoulli-

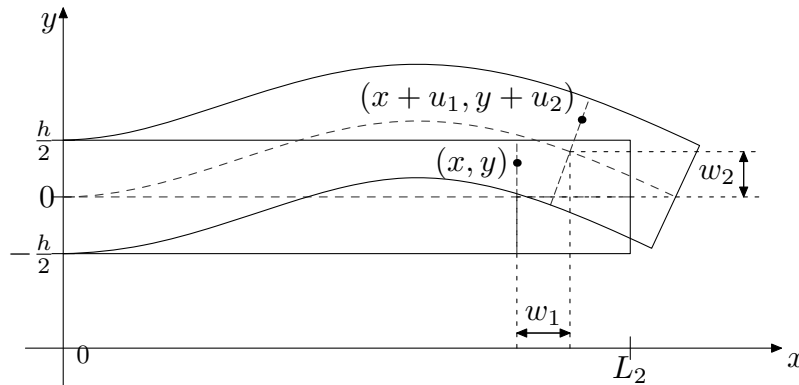


Abbildung 3.1: Flexibler Balken

Balkens wird gefordert, dass Querschnitte stets eben und senkrecht zur neutralen Faser (oder Balkenachse) bleiben. Weiterhin soll die Länge viel größer als die Querschnittsabmessungen sein. Die Verformung $u(x, y, z)$ des quaderförmigen Referenzvolumens $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, -d \leq 2y \leq d, -h \leq 2z \leq h\}$ ist unter diesen Voraussetzungen durch die Verformung $w(x)$ der neutralen Faser gegeben. Wenn keine Deformation in z -Richtung zugelassen wird, dann genügt es, die Verformung der Balkenachse durch $w(x) = (w_1(x), w_2(x))$ zu beschreiben. Die Verformung des Längsschnittes ergibt sich dann durch

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - y \end{pmatrix} + \frac{y}{\sqrt{(1 + w_1'(x))^2 + w_2'(x)^2}} \begin{pmatrix} -w_2'(x) \\ 1 + w_1'(x) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Aus dem Green-Saint-Venant-Spannungstensor

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u) = \frac{1}{2}((\nabla u + I)^T(\nabla u + I) - I)$$

und dem Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \epsilon)I + 2\mu\epsilon$$

mit Lamé-Konstanten $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ zu Youngschem Modul E (auch Elastizitätsmodul) und Poisson-Zahl ν (auch Querkontraktionszahl) berechnet sich die Verzerrungsenergie nach [Cia88] durch

$$W = \frac{1}{2} \int_V \text{tr}(\sigma^T \epsilon) dV = \frac{1}{2} \int_V \lambda (\text{tr} \epsilon)^2 + 2\mu \text{tr} \epsilon^2 dV.$$

Für die Verformung (3.7) ist

$$\nabla u = \begin{pmatrix} w'_1 & 0 \\ w'_2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y(w''_1 w'_2 - (1+w'_1)w''_2)}{s^3} (1+w'_1) & \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -w'_2 \\ 1+w'_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

mit $s = \sqrt{(1+w'_1)^2 + (w'_2)^2}$. Also folgt für den Verzerrungstensor

$$2\epsilon = (\nabla u + I)^T (\nabla u + I) - I = \begin{pmatrix} \left(s + \frac{y(w''_1 w'_2 - (1+w'_1)w''_2)}{s^2} \right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I.$$

Damit vereinfacht sich die Verzerrungsenergie zu

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\lambda + 2\mu) \epsilon_{11}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\nu E + (1-2\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{11}^2 dV,$$

wobei $2\epsilon_{11} = \left(s + \frac{y(w''_1 w'_2 - (1+w'_1)w''_2)}{s^2} \right)^2 - 1$ ist. Für kleine Deformationen kann der Verzerrungsterm durch

$$2\epsilon_{11} = s^2 - 1 + 2 \frac{y(w''_1 w'_2 - (1+w'_1)w''_2)}{s} + \frac{y^2(w''_1 w'_2 - (1+w'_1)w''_2)^2}{s^4} \approx 2(w'_1(x) - yw''_2(x))$$

approximiert werden [Sim00]. Somit vereinfacht sich die Berechnung der Verzerrungsenergie zu

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{EA} \int_0^L (w'_1(x))^2 dx + \frac{1}{2} \mathbf{EI} \int_0^L (w''_2(x))^2 dx \quad (3.8)$$

mit $\mathbf{E} = (1-\nu)E/((1+\nu)(1-2\nu))$, Querschnittsfläche $\mathbf{A} = dh$ und Flächenträgheitsmoment $\mathbf{I} = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dz = dh^3/12$. Für den Euler-Bernoulli-Balken sind Dehnsteifigkeit \mathbf{EA} und Biegesteifigkeit \mathbf{EI} konstant.

Die Verformungsfunktion w für die neutrale Faser wird entsprechend des Ritz-Verfahrens [Bre⁺92] im Raum diskretisiert, d. h., wir betrachten

$$w(t, x) = \sum \psi_i(x) z_i(t)$$

mit endlich vielen Ansatzfunktionen ψ_i .

3.3 Rayleigh-Dämpfung

Um das Lösungsverhalten von (3.4) zu analysieren, wird die Kraft häufig in der Form $f(t, q, \dot{q}) = -Kq + F(t, q, \dot{q})$ geschrieben, wobei $K = -\frac{\partial f}{\partial q}$ Steifigkeitsmatrix heißt

und bei Auswertung in einem festen Punkt (t, q, \dot{q}) konstant ist. Die Dynamik des mechanischen Systems wird dann durch die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{q} + Kq = F(t, q, \dot{q})$$

mit Massematrix M und Steifigkeitsmatrix K beschrieben. Bei der Auswertung von gemessenen Systemeigenschaften wurde beobachtet, dass die Energie in mechanischen Systemen abnimmt [Bat96, S. 165]. Das kann durch geschwindigkeitsabhängige Kräfte $D\dot{q}$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix D in

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = F(t, q, \dot{q}) \quad (3.9)$$

modelliert werden. In der Praxis ist es jedoch im Allgemeinen nicht möglich, die Dämpfungsmatrix D durch Messungen zu bestimmen. Deshalb wird häufig die Rayleigh-Dämpfung

$$D = \alpha M + \beta K$$

verwendet, wobei α, β nichtnegative Rayleigh-Parameter sind. Dabei werden die Parameter α, β so gewählt, dass $\alpha + \beta\omega_i = 2D\omega_i$ für zwei Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 des verallgemeinerten Eigenwertproblems $\omega^2 M\xi = K\xi$ gilt [Bat96, S. 797]. Typische Werte für das Dämpfungsmaß D liegen zwischen 0.01 und 0.1 [Nas10, S. 67]. Für gegebenes Dämpfungsmaß D zu Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 errechnen sich die Rayleigh-Parameter dann mittels

$$\alpha = 2D\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2) \quad \text{und} \quad \beta = 2D/(\omega_1 + \omega_2). \quad (3.10)$$

Bemerkung 3.1: Für symmetrisch positiv definite Matrizen M, K finden wir stets eine Diagonalmatrix Λ der verallgemeinerten Eigenwerte und eine Matrix X der Eigenvektoren für das Problem $MX\Lambda = KX$ [Gol⁺96]. Die Differentialgleichung (3.9) kann damit im Fall der Rayleigh-Dämpfung in

$$\begin{aligned} X^{-1}M^{-1}F &= X^{-1}M^{-1}(M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq) \\ &= \ddot{\bar{q}} + (\alpha I + \beta X^{-1}M^{-1}KX)\dot{\bar{q}} + X^{-1}M^{-1}KX\bar{q} \\ &= \ddot{\bar{q}} + (\alpha I + \beta\Lambda)\dot{\bar{q}} + \Lambda\bar{q} \end{aligned}$$

mit $\bar{q} = X^{-1}q$ transformiert werden. Im linearen Fall ist es somit ausreichend, die entkoppelten Gleichungen

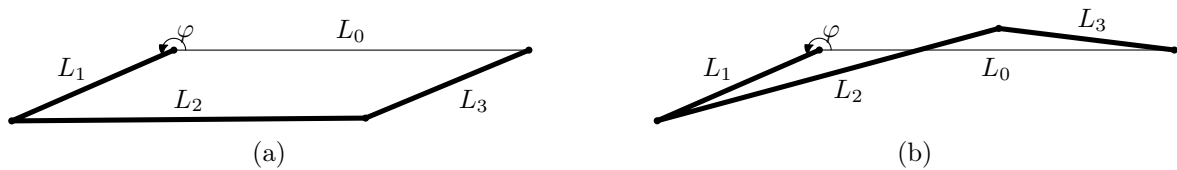
$$m\ddot{\xi} + (\alpha m + \beta k)\dot{\xi} + k\xi = f$$

von Einzelmassenschwingern zu untersuchen [Web⁺12]. ◇

3.4 Bewegungsgleichungen zu Mehrkörpersystemen

3.4.1 Verschiedene Koordinaten

Wird ein System mittels unabhängiger Koordinaten beschrieben, so stimmt deren Anzahl mit der Anzahl der Freiheitsgrade überein. Jedoch ist der Zustand des Gesamtmodells nur lokal eindeutig bestimmt [GdJ⁺94]. Beispielsweise besitzt der Vier-Balken-Mechanismus in Abb. 3.2a nur einen Freiheitsgrad, doch für die unabhängige Koordinate φ ist auch die Konfiguration in Abb. 3.2b möglich.

Abbildung 3.2: Konfigurationen des Vier-Balken-Mechanismus für gegebenes φ

Die Mehrdeutigkeit kann beseitigt werden, indem relative Koordinaten (auch Gelenkkordinaten) verwendet werden. Relative Koordinaten definieren die Lage jedes Körpers bezüglich eines vorhergehenden Körpers rekursiv durch algebraische Gleichungen. Diese Darstellung lässt sich meistens leicht auf die Minimalform bringen. Allerdings ist die Massematrix zustandsabhängig und voll besetzt [Eic⁺98].

Absolute Koordinaten (oder Referenzpunktkoordinaten) vermeiden diesen Nachteil, indem für jeden Körper die Lage und Orientierung direkt benutzt werden. Dadurch ist die Massematrix konstant und blockdiagonal. Jedoch erfordert das deutlich mehr Variablen (sechs Koordinaten je Starrkörper) zur Beschreibung des Systems und erhöht die Anzahl der Zwangsbedingungen.

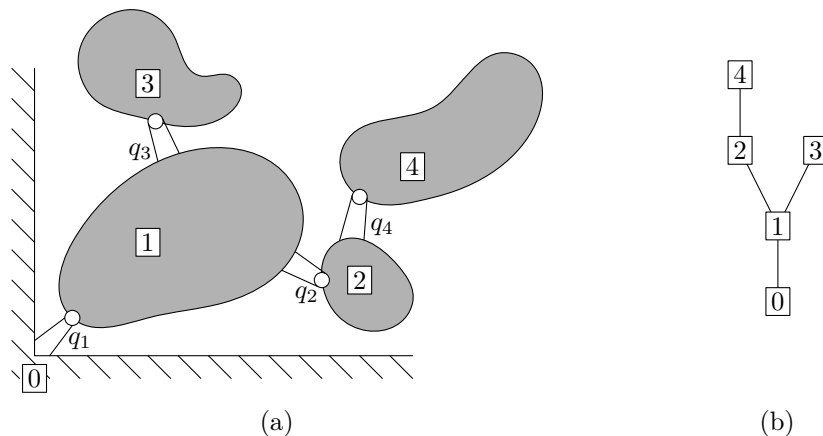


Abbildung 3.3: Topologie eines Mehrkörpersystems

Es existieren Algorithmen, welche die Vorteile beider Darstellungen nutzen, indem sowohl die relativen Koordinaten als auch die absoluten Koordinaten verwendet werden. Dies erlaubt es, zu vorgegebenen t, q, \dot{q}, λ die Beschleunigungen [Fea83] und die Residuen [Bra⁺86] in Gleichung (3.6) mit einem Rechenaufwand zu lösen, der nur linear von der Anzahl N der Körper des Systems abhängt.

3.4.2 Topologische Lösungsalgorithmen

Hier wird die Topologie des Mehrkörpersystems betrachtet wie sie in Abb. 3.3 veranschaulicht ist. Dem Mehrkörpersystem wird ein Graph zugeordnet, dessen Knoten den Körpern im System entsprechen. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante

Formel für \ddot{q} mittels Invertierbarkeit von $J_j^T M_j J_j$ herzuleiten. In [Ar13] wird statt der Inversen $(J_j^T M_j J_j)^{-1}$ die Moore-Penrose-Pseudo-Inverse $(J_j^T M_j J_j)^+$ benutzt [Ste⁺90], um

$$M_j J_j \ddot{q}_j = M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j J_j \ddot{q}_j = -M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T (M_j \gamma_j^{(\text{II})} + M_j \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)} - f_j)$$

für positiv semidefinite Matrizen M_j zu erhalten. Also ist

$$\begin{aligned} \mu_j &= f_j - M_j \ddot{p}_j = f_j - M_j (\gamma_j^{(\text{II})} + \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)}) - M_j J_j \ddot{q}_j \\ &= f_j - M_j \gamma_j^{(\text{II})} - M_j \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)} + M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T (M_j \gamma_j^{(\text{II})} + M_j \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)} - f_j). \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Gleichung in (3.14) liefert

$$\begin{pmatrix} \overline{M}_i & 0 & I \\ 0 & 0 & -J_i^T \\ I & -J_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_i \\ \ddot{q}_i \\ \mu_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f}_i \\ 0 \\ \gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

für jeden Körper i , der nur Blattkörper als Nachfolger besitzt, mit den Termen

$$\begin{aligned} \overline{M}_i &= M_i + \sum_{j:\pi(j)=i} \Gamma_j^T (M_j - M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j) \Gamma_j \\ \overline{f}_i &= f_i + \sum_{j:\pi(j)=i} \Gamma_j^T (I - M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T) (f_j - M_j \gamma_j^{(\text{II})}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese sogenannte Rückwärtssubstitution wird rekursiv auf alle Körper angewendet bis die Bewegungsgleichungen jedes Körpers in der Form (3.15) vorliegen.

Nun berechnen klassische Mehrkörperformalismen die Inverse

$$\begin{pmatrix} 0 & J_i & I \\ 0 & I & 0 \\ I & -\overline{M}_i J_i & -\overline{M}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (J_i^T \overline{M}_i J_i)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ J_i^T & I & -J_i^T \overline{M}_i \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

zur regulären Matrix in (3.15), um einen expliziten Ausdruck für $\ddot{p}_i, \ddot{q}_i, \mu_i$ zu erhalten. Die Modifikation der (singulär gestörten) Massematrix in Kapitel 4 führt dazu, dass die Körpermassematrix \overline{M}_i für einige Körper i nicht mehr regulär ist. Deshalb betrachten wir hier den Mehrkörperformalismus aus [Ar13]. Wenn die Matrix \overline{M}_i singulär ist und wir die Inverse $(J_i^T \overline{M}_i J_i)^{-1}$ in (3.17) durch die Moore-Penrose-Pseudo-Inverse $(J_i^T \overline{M}_i J_i)^+$ ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \ddot{p}_i &+ (J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{M}_i - I) J_i \ddot{q}_i \\ &= J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{f}_i + (I - J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{M}_i) (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}) \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} &(J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ (J_i^T \overline{M}_i J_i) \ddot{q}_i \\ &= (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ (J_i^T \overline{f}_i - J_i^T \overline{M}_i (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)})) \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} &(\overline{M}_i J_i - \overline{M}_i J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ (J_i^T \overline{M}_i J_i)) \ddot{q}_i + \mu_i \\ &= (I - \overline{M}_i J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T) \overline{f}_i + \overline{M}_i (J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{M}_i - I) (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}). \end{aligned} \quad (3.18c)$$

Lemma 3.2 ([Ar13]): Für jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$ mit $d \leq n$ gilt $C - C(C^T C)^+ C^T C = 0$.

Beweis: Für jede Matrix C gilt

$$\begin{aligned} & (C - C(C^T C)^+ C^T C)^T (C - C(C^T C)^+ C^T C) \\ &= C^T C - 2C^T C(C^T C)^+ C^T C + C^T C \underbrace{(C^T C)^+ C^T C(C^T C)^+}_{=(C^T C)^+} C^T C \\ &= C^T C - C^T C(C^T C)^+ C^T C = C^T C - C^T C = 0 \end{aligned}$$

unter Verwendung der beiden Moore-Penrose-Axiome $(C^T C)^+ C^T C(C^T C)^+ = (C^T C)^+$ und $C^T C(C^T C)^+ C^T C = C^T C$. Da das Produkt nur für $C - C(C^T C)^+ C^T C = 0$ verschwindet, folgt die Behauptung. \square

Für $C = \overline{M}_i^{1/2} J_i$ vereinfacht sich die linke Seite von (3.18c) nach Lemma 3.2 zu μ_i . Mit $D_i := I - J_i(J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{M}_i$ wird (3.18) zu

$$\ddot{p}_i - D_i J_i \ddot{q}_i = J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{f}_i + D_i (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}) \quad (3.19a)$$

$$(J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ (J_i^T \overline{M}_i J_i) \ddot{q}_i = (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ (J_i^T \overline{f}_i - J_i^T \overline{M}_i (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)})) \quad (3.19b)$$

$$\mu_i = D_i^T \overline{f}_i - \overline{M}_i D_i (\gamma_i^{(\text{II})} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}). \quad (3.19c)$$

Wenn $J_i^T \overline{M}_i J_i$ regulär und $\ddot{p}_{\pi(i)}$ bekannt ist, dann gilt $D_i J_i = 0$ und (3.19) liefert explizite Ausdrücke für $\ddot{p}_i, \ddot{q}_i, \mu_i$. Anderenfalls nehmen wir an, dass Körper mit singulärer Körpermassenmatrix M_i isoliert im zugeordneten Graphen liegen, d. h., wenn M_i singulär ist, dann ist $M_{\pi(i)}$ regulär, wobei $M_{\square} = I$ wegen $\ddot{p}_{\square} = 0$ verwendet wird. Wegen dieser Annahme ist für jedes Kind j eines Knotens $i = \pi(j)$ mit singulärer Körpermassenmatrix M_i die Matrix M_j regulär. Also kann die Beschleunigung \ddot{p}_j nach (3.19a) mittels

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j &= J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T f_j + D_j \gamma_j^{(\text{II})} + D_j \Gamma_j \left(J_i (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{f}_i + D_i \gamma_i^{(\text{II})} + D_i \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)} \right) \\ &\quad + D_j \Gamma_j D_i J_i \ddot{q}_i \end{aligned} \quad (3.20)$$

beschrieben werden, wobei M_j und f_j durch \overline{M}_j bzw. \overline{f}_j ersetzt werden müssen, falls j kein Blattkörper ist. Da M_j nach Annahme regulär ist, können wir

$$D_j \Gamma_j D_i J_i = M_j^{-1} (M_j D_j)^{1/2} (M_j D_j)^{1/2} \Gamma_j J_i (I - (J_i^T \overline{M}_i J_i)^+ J_i^T \overline{M}_i J_i)$$

schreiben, weil

$$\begin{aligned} M_j D_j &= M_j - M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j \\ &= M_j - 2M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j + M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j \\ &= D_j^T M_j D_j \end{aligned}$$

symmetrisch positiv semidefinit ist. Wir setzen $B = (M_j D_j)^{1/2} \Gamma_j$. Nach (3.16) ist

$$W = \overline{M}_i - B^T B = M_i + \sum_{k: \pi(k)=i, k \neq j} \Gamma_k^T M_k D_k \Gamma_k$$

symmetrisch positiv semidefinit, so dass die Voraussetzungen folgenden Lemmas erfüllt sind.

Lemma 3.3 ([Ar13]): Sei W symmetrisch positiv semidefinit und $C = (W + B^T B)^{1/2} J_i$. Dann gilt $B J_i (I - (C^T C)^+ C^T C) = 0$.

Beweis: Jeder Spaltenvektor z von $I - (C^T C)^+ C^T C$ erfüllt $Cz = 0$ nach Lemma 3.2, also gilt

$$0 = z^T C^T C z = z^T J_i^T (W + B^T B) J_i z = z^T J_i^T W J_i z + z^T J_i^T B^T B J_i z.$$

Da W und $B^T B$ symmetrisch positiv semidefinit sind, müssen alle Summanden verschwinden, insbesondere ist $\|B J_i z\|_2^2 = 0$, d. h., $B J_i z = 0$ gilt für alle Spaltenvektoren z von $I - (C^T C)^+ C^T C$. \square

Nach diesem Lemma ist $D_j \Gamma_j D_i J_i = M_j^{-1} (M_j D_j)^{1/2} B J_i (I - (J_i^T \bar{M}_i J_i)^+ J_i^T \bar{M}_i J_i) = 0$ und der letzte Summand in (3.20) verschwindet, so dass der Körper i mit singulärer Körpermassematrix in der Vorwärtsrekursion übersprungen werden kann.

Zur Berechnung von \ddot{q}_i benutzen wir die Beziehung

$$J_i^T \bar{M}_i J_i \ddot{q}_i = J_i^T \bar{f}_i - J_i^T \bar{M}_i (\gamma_i^{(II)} + \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}), \quad (3.21)$$

welche aus Gleichung (3.15) folgt. Die symmetrisch positiv semidefinite Matrix $J_i^T \bar{M}_i J_i$ kann blockdiagonalisiert werden, d. h.

$$J_i^T \bar{M}_i J_i = Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T$$

mit einer orthogonalen Matrix Q und einer positiv definiten Matrix A . Mit $C = M_i^{1/2} J_i$ gilt nach Lemma 3.2

$$\begin{aligned} 0 &= (C - C(C^T C)^+ C^T C)^T M_i^{1/2} = (I - C^T C (C^T C)^+) C^T M_i^{1/2} \\ &= (I - J_i^T \bar{M}_i J_i (J_i^T \bar{M}_i J_i)^+) J_i^T \bar{M}_i = (Q Q^T - Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T) Q \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T J_i^T \bar{M}_i \\ &= Q \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) Q^T J_i^T \bar{M}_i = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Q^T J_i^T \bar{M}_i. \end{aligned}$$

Mit $(0, I) Q^T J_i^T \bar{M}_i = (0, I) Q^T Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Q^T J_i^T \bar{M}_i = 0$ folgt aus (3.21) nach Linksmultiplikation mit Q^T und der Zerlegung entsprechend der Diagonalblöcke somit

$$A Q^T \ddot{q}_i = (I, 0) Q^T J_i^T (\bar{f}_i - \bar{M}_i \gamma_i^{(II)} - \bar{M}_i \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)}) \quad (3.22a)$$

$$0 = (0, I) Q^T J_i^T \bar{f}_i. \quad (3.22b)$$

Das benutzen wir, um die Beschleunigung der Gelenkkoordinate q_j jedes Kindes j eines Körpers $i = \pi(j)$ mit singulärer Körpermassematrix zu berechnen, welche nach Annahme eine reguläre Körpermassematrix M_j besitzt. Die Gleichungen (3.19a) und (3.19b) ergeben

$$\ddot{q}_j = (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T (f_j - M_j \gamma_j^{(II)} - M_j \Gamma_j (J_i (J_i^T \bar{M}_i J_i)^+ J_i^T \bar{f}_i + D_i \gamma_i^{(II)} + D_i \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)} + D_i J_i \ddot{q}_i)).$$

Mit der Ableitung der Geschwindigkeitskoordinate \dot{q}_i , die sich als Lösung der DAE (3.22) ergibt, bekommen wir so eine Gleichung für \ddot{q}_j , wenn \bar{M}_i singulär ist und deshalb

\ddot{p}_i in der Vorwärtsrekursion nicht berechnet wurde. Diese Umformungen fassen wir in einem Algorithmus zusammen, vgl. [Lub⁺92, Ar13].

Algorithmus 3.4: Gegeben seien M_i, J_i, Γ_i, f_i und $\gamma_i^{(\text{II})}$ für alle Körper $i \in \mathbb{A} := \{\mathbb{I}, \mathbb{J}, \dots, \mathbb{N}\}$.

Rückwärtssubstitution

$$\mathbb{B} := \{j : \{i : \pi(i) = j\} = \emptyset\}$$

solange $i \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ mit $\{j : \pi(j) = i\} \subseteq \mathbb{B}$ existiert, setze

$$M_i := M_i + \sum_{j:\pi(j)=i} \Gamma_j^T (M_j - M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j) \Gamma_j$$

$$f_i := f_i + \sum_{j:\pi(j)=i} \Gamma_j^T (I - M_j J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T) (f_j - M_j \gamma_j^{(\text{II})})$$

$$\mathbb{B} := \mathbb{B} \cup \{i\}$$

Vorwärtssubstitution

$$\mathbb{B} := \{\mathbb{O}\}$$

$$\ddot{p}_{\mathbb{O}} := 0$$

$$M_{\mathbb{O}} := I$$

$$J_{\mathbb{O}} := 0$$

solange $j \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ mit $\pi(j) \in \mathbb{B}$ existiert, setze

$$D_j := I - J_j (J_j^T M_j J_j)^+ J_j^T M_j$$

$$i := \pi(j)$$

falls $J_j^T M_j J_j$ regulär und $J_i^T M_i J_i$ regulär, dann

$$\ddot{p}_j := J_j (J_j^T M_j J_j)^{-1} J_j^T f_i + D_j (\gamma_j^{(\text{II})} + \Gamma_j \ddot{p}_i)$$

$$\ddot{q}_j := (J_j^T M_j J_j)^{-1} \left(J_j^T f_j - J_j^T M_j (\gamma_j^{(\text{II})} + \Gamma_j \ddot{p}_i) \right)$$

falls $J_j^T M_j J_j$ regulär und $J_i^T M_i J_i$ singular, dann

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j &:= J_j (J_j^T M_j J_j)^{-1} J_j^T f_j + D_j \gamma_j^{(\text{II})} \\ &\quad + D_j \Gamma_j \left(J_i (J_i^T M_i J_i)^+ J_i^T f_i + D_i \gamma_i^{(\text{II})} + D_i \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j &:= (J_j^T M_j J_j)^{-1} J_j^T \left(f_j - M_j \gamma_j^{(\text{II})} - M_j \Gamma_j (J_i (J_i^T M_i J_i)^+ J_i^T f_i + D_i \gamma_i^{(\text{II})} \right. \\ &\quad \left. + D_i \Gamma_i \ddot{p}_{\pi(i)} + D_i J_i \ddot{q}_i \right) \end{aligned}$$

falls $J_j^T M_j J_j$ singular, dann

$$Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T := J_j^T M_j J_j$$

berechne v als Lösung der DAE

$$A Q^T \dot{v} = (I, 0) Q^T J_j^T (f_j - M_j \gamma_j^{(\text{II})} - M_j \Gamma_j \ddot{p}_i)$$

$$0 = (0, I) Q^T J_j^T f_j(v)$$

$$\ddot{q}_j := \frac{d}{dt} v$$

$$\mathbb{B} := \mathbb{B} \cup \{j\}$$

◇

Dieser Algorithmus ermöglicht die effiziente Berechnung der Beschleunigungen \ddot{p}, \ddot{q} , so dass die Bewegungsgleichungen gelöst werden können, ohne die Massematrix zu invertieren.

3.5 Modellierung eines flexiblen Vier-Balken-Mechanismus

Für N Körper mit den Volumina V_i , $i = 1, 2, \dots, N$, sind die kinetische Energie und die potentielle Energie durch [Sim00]

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \varrho_i (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2) dV, \quad U = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \varrho_i \gamma Y_i dV \quad (3.23)$$

gegeben, wobei die Massepunkte (X_i, Y_i, Z_i) durch die körperfesten Referenzkoordinaten $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ bestimmt sind. Hierbei bezeichnet ϱ_i die Dichte und γ die Gravitationskonstante. Wenn wir $L = T - U - W$ mit der Verzerrungsenergie (3.8) in die Euler-Lagrange-Gleichung (3.3) einsetzen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen zu den N Körpern.

3.5.1 Vier-Balken-Modell mit Euler-Bernoulli-Balken

Wir werden nun einen Vier-Balken-Mechanismus mit dem flexiblen Euler-Bernoulli-Balken [2] modellieren, siehe Abb. 3.4. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen folgt

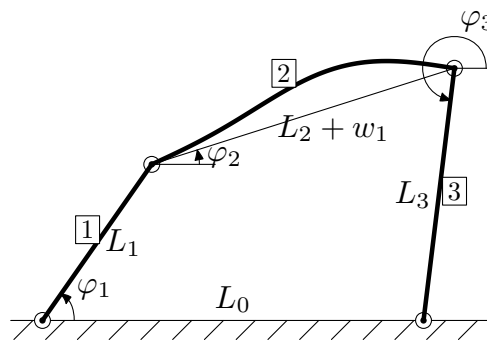


Abbildung 3.4: Vier-Balken-Mechanismus

der Modellierung für den Schubkurbeltrieb (engl. slider crank mechanism) in [Sim96]. Die Lage der Balken [1] , [2] , [3] wird durch die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ beschrieben. Außerdem wird die Deformation des flexiblen Balkens [2] mit Volumen V_2 wie in Abschnitt 3.2 durch eine Verformungsfunktion w der Balkenachse definiert. Die longitudinale Verschiebung

entlang der neutralen Faser wird mit

$$\begin{aligned} w_1(x) &:= 4z_3 \left(\left(\frac{x}{L_2} \right) - \left(\frac{x}{L_2} \right)^2 \right) + z_4 \left(2 \left(\frac{x}{L_2} \right)^2 - \left(\frac{x}{L_2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{x}{L_2} \right) \left((4z_3 - 2z_4) \frac{L_2 - x}{L_2} + z_4 \right), \end{aligned}$$

die laterale Verschiebung entlang der neutralen Faser mit

$$w_2(x) := \sin \left(\pi \frac{x}{L_2} \right) z_1 + \sin \left(2\pi \frac{x}{L_2} \right) z_2$$

angesetzt, so dass $w_1(0) = w_2(0) = w_2(L_3) = 0$ gilt. Für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ lautet die Energie (3.23)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \varrho (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) dV + \frac{1}{2} \int_{V_3} \varrho (\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2) dV \\ U &= \frac{1}{2} L_1 m_1 \gamma \sin \varphi_1 + \int_{V_2} \varrho \gamma Y_2 dV + m_3 \gamma (L_1 \sin \varphi_1 + (L_2 + w_1) \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} L_3 \sin \varphi_3) \end{aligned}$$

in Winkelkoordinaten, wobei J_1 das Trägheitsmoment des Balkens \square ist. Dabei sind die materiellen Punkte

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + u_1 \\ y + u_2 \end{pmatrix}$$

des flexiblen Balkens \square Funktionen in den Variablen x, y . Wegen $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ist

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = L_1 \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \end{pmatrix} + A(\varphi_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_2 A(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} x + u_1 \\ y + u_2 \end{pmatrix}$$

mit Drehmatrix

$$A(\phi) := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_2} \dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2 dV &= \frac{1}{2} \int_{V_2} L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 (x + u_1)^2 + \dot{\varphi}_2^2 (y + u_2)^2 dV \\ &\quad + \int_{V_2} L_1 \dot{\varphi}_1 (\dot{u}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{u}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) dV \\ &\quad + \int_{V_2} L_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 ((x + u_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - (y + u_2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)) dV \\ &\quad + \int_{V_2} \dot{u}_2 (x + u_1) - \dot{u}_1 (y + u_2) dV. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Da die Balkendicke symmetrisch um die neutrale Faser verteilt liegt, gilt für die Integrale $\int_{V_2} u dV = hd \int_0^{L_2} w dx$ und $\int_{V_2} \dot{u} dV = hd \int_0^{L_2} \dot{w} dx$.

3.5.2 Der dritte Balken

Da die Energieterme für die Balken \mathbb{I} und \mathbb{II} gleich denen für die entsprechenden Balken im flexiblen Schubkurbeltrieb [Sim96] sind, betrachten wir nur $T_3 = \frac{1}{2} \int_{V_3} \varrho (\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2) dV$ im Detail. Aus

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = A(\varphi_1) \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A(\varphi_2) \begin{pmatrix} L_2 + w_1(L_2) \\ 0 \end{pmatrix} + A(\varphi_3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

folgt wegen $w_2(L_2) = 0$ mit $m_3 = \int \varrho dV_3$ und $J_3 = \int \varrho (x^2 + y^2) dV_3$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} \varrho \int \dot{\varphi}_1^2 L_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 (L_2 + w_1)^2 + \dot{w}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (L_1, 0) A(-\varphi_1 + \varphi_2) \begin{pmatrix} L_2 + w_1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\dot{\varphi}_1 (L_1, 0) A(-\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \varphi_2) \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 (L_1, 0) A(-\varphi_1 + \varphi_3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\dot{\varphi}_2 (L_2 + w_1) A(-\frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2\dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 (L_2 + w_1, 0) A(-\varphi_2 + \varphi_3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\dot{\varphi}_3 (\dot{w}_1, 0) A(-\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dV_3 \\ &= \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 (L_2 + w_1)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 \\ &\quad + m_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(-\varphi_1 + \varphi_2) L_1 (L_2 + w_1) + m_3 \dot{\varphi}_2 \underbrace{\cos(-\frac{\pi}{2})}_{=0} (L_2 + w_1) \dot{w}_1 \\ &\quad + m_3 L_1 \cos(-\varphi_1 + \varphi_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + m_3 (L_2 + w_1) \cos(-\varphi_2 + \varphi_3) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \\ &\quad + m_3 \dot{\varphi}_1 \underbrace{\cos(-\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \varphi_2)}_{=\sin(-\varphi_1 + \varphi_2)} L_1 \dot{w}_1 + m_3 \dot{w}_1 \underbrace{\cos(-\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\pi}{2})}_{=\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_3. \end{aligned}$$

Somit hat die Massematrix die Darstellung

$$M = \begin{pmatrix} M_s + M_d & C^T \\ C & M_e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$$

mit symmetrischer Starrkörpermassematrix

$$M_s = \begin{pmatrix} J_1 + (m_2 + m_3) L_1^2 & \frac{1}{2} L_1 L_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + L_1 L_2 m_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & \frac{1}{2} L_1 L_3 m_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \\ * & J_2 + m_3 L_2^2 & \frac{1}{2} L_2 L_3 m_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ \text{sym} & * & J_3 \end{pmatrix},$$

Deformationsmatrix

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & \varrho L_1 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) e_1^T + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) e_2^T) z + L_1 w_1 m_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & 0 \\ * & z^T M_e z + 2\varrho e_{12}^T z + 2m_3 L_2 w_1 & \frac{1}{2} L_3 m_3 w_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ \text{sym} & * & 0 \end{pmatrix},$$

Diskretisierungsmatrix

$$M_e = \varrho d h L_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} + m_3 e_4 e_4^T$$

und Koppelblock

$$C^T = \begin{pmatrix} \varrho L_1 (\sin(-\varphi_1 + \varphi_2) c_1^T + \cos(-\varphi_1 + \varphi_2) c_2^T) + m_3 \sin(-\varphi_1 + \varphi_2) L_1 e_4^T \\ \varrho c_{21}^T + \varrho z^T B \\ \frac{1}{2} L_3 m_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) e_4^T \end{pmatrix},$$

wobei $e_4^T = (0, 0, 0, 1)$ der vierte Einheitsvektor ist. Die schief-symmetrische Matrix

$$B = dhL_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{16}{\pi^3} & \frac{8}{\pi^3} - \frac{1}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\pi} \\ \frac{16}{\pi^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\pi} - \frac{8}{\pi^3} & -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\begin{aligned} c_1 &= dhL_2(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})^T, \\ c_2 &= dhL_2(\frac{2}{\pi}, 0, 0, 0)^T, \\ c_{12} &= dhL_2^2(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T, \\ c_{21} &= dhL_2^2(\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, 0, 0)^T \end{aligned}$$

sind wie in [Sim96] definiert.

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung (3.3) erhalten wir wie bei der Modellierung des Schubkurbelmechanismus [Sim96] eine Starrkörperkraft

$$f_s = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} L_1 (\gamma(m_1 + 2m_2) \cos \varphi_1 + L_2 m_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ -\frac{1}{2} L_2 \gamma m_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 m_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine Deformationskraft

$$f_d = \begin{pmatrix} \varrho L_1 \left(\dot{\varphi}_2^2 (-\sin(\varphi_1 - \varphi_2) c_1^T z + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) c_2^T z) \right. \\ \left. - 2\dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) c_1^T \dot{z} + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) c_2^T \dot{z}) \right) \\ \varrho \left(L_1 \dot{\varphi}_1^2 (\sin(\varphi_1 - \varphi_2) c_1^T z - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) c_2^T z) - 2\dot{\varphi}_2 c_{12}^T \dot{z} \right. \\ \left. - \dot{z}^T B \dot{z} - \gamma (\cos \varphi_2 c_1^T z - \sin \varphi_2 c_2^T z) \right) - 2\dot{\varphi}_2 \dot{z}^T (M_e - m_3 e_4 e_4^T) z \\ 0 \end{pmatrix},$$

einen Kraftterm

$$\begin{aligned} f_e &= \dot{\varphi}_2^2 (M_e - m_3 e_4 e_4^T) z + \varrho (\dot{\varphi}_2^2 c_{12} + L_1 \varphi_1^2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) c_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) c_2) + 2\dot{\varphi}_2 B \dot{z}) \\ &\quad - \varrho \gamma (\sin \varphi_2 c_1 + \cos \varphi_2 c_2) \end{aligned}$$

und die aus dem Potential W resultierenden Steifigkeitsmatrix

$$K = Edh/L_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{24} (h/L_2)^2 \pi^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} (h/L_2)^2 \pi^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Mit der potentiellen Energie $U_3 = m_3\gamma(L_1 \sin \varphi_1 + (L_2 + w_1) \sin \varphi_2 + \frac{1}{2}L_3 \sin \varphi_3)$ des Balkens \mathbb{B} berechnen wir noch die Kräfte

$$f_{U_3} = \begin{pmatrix} m_3\gamma L_1 \cos \varphi_1 \\ m_3\gamma(L_2 + w_1) \cos \varphi_2 \\ \frac{1}{2}m_3\gamma L_3 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$f_{U_{3e}} = m_3\gamma \sin \varphi_2.$$

Unter Berücksichtigung des Ausdrucks $\frac{d}{dt} \frac{\partial T_3}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial T_3}{\partial z_i}$, der im Schubkurbelmechanismus nicht existiert, lauten die Kräfte dann

$$f = \begin{pmatrix} f_s + f_d - f_{T_3} - f_{U_3} \\ f_e - Kz - D_e \dot{z} - f_{T_{3e}} - f_{U_{3e}} \end{pmatrix}$$

mit Dämpfungsmatrix D_e und den Krafttermen

$$f_{T_3} = m_3 \begin{pmatrix} L_1(2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2 \dot{w}_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(L_2 + w_1) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}L_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2) \\ (L_2 + w_1)(-L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}L_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2) + 2\dot{\varphi}_2 \dot{w}_1(L_2 + w_1) \\ L_3(\cos(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_2 \dot{w}_1 - \frac{1}{2}L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{2}(L_2 + w_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_2^2) \end{pmatrix}$$

$$f_{T_{3e}} = -m_3(L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}L_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2) - \dot{\varphi}_2^2 m_3(L_2 + w_1).$$

Wegen $\dot{\varphi}_2^2(M_e - m_3 e_4 e_4^T)z + \dot{\varphi}_2^2 m_3(L_2 + w_1) = \dot{\varphi}_2^2 M_e z + \dot{\varphi}_2^2 m_3 L_2$ lässt sich der Term $f_e - f_{T_{3e}}$ vereinfachen.

3.5.3 Zwangsbedingungen und Anfangswerte

Die bisherigen Gleichungen $M\ddot{q} = f$ mit $q = \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix}$ beschreiben die Bewegung der kinematischen Kette \mathbb{A} - \mathbb{B} - \mathbb{C} . Die Verankerung des Endes von Balken \mathbb{B} in $(L_0, 0)$ wird als Zwangsbedingung formuliert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \sin \varphi_1 + (L_2 + w_1) \sin \varphi_2 + L_3 \sin \varphi_3 \\ L_0 - L_1 \cos \varphi_1 - (L_2 + w_1) \cos \varphi_2 - L_3 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.25a)$$

Die Drehung des Balkens \mathbb{A} mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω wird durch eine rheonome Zwangsbedingung

$$0 = g_3 = \varphi_1 - \varphi_0 - \omega t \quad (3.25b)$$

erzwungen.

Um Spannungen im Anfangszustand zu vermeiden, werden $z_1(0), z_2(0), z_3(0), z_4(0)$ sämtlich gleich Null gewählt. Durch die Bedingung $\varphi_1(0) = \varphi_0$ sind die Winkel $\varphi_2 \geq 0$ und $\varphi_3(0)$ dann durch die geometrischen Eigenschaften (3.25) des Vier-Balken-Modells eindeutig bestimmt. Wenn die Anfangswerte $\dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0), \dot{z}_3(0), \dot{z}_4(0)$ ebenfalls gleich Null gewählt werden, kann die versteckte Zwangsbedingung auf Geschwindigkeitsebene

$$0 = G(q(0), 0)\dot{q}(0) + g_t(q(0), 0)$$

nach den Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0), \dot{\varphi}_3(0)$ aufgelöst werden. Indem wir nun die Zwangsbedingung in (3.6) durch die versteckte Zwangsbedingung auf Beschleunigungsebene ersetzen, können wir auch die Beschleunigungen $\ddot{q}(0)$ und Lagrange-Multiplikatoren $\lambda(0)$ mittels

$$\begin{pmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(q, \dot{q}) \\ -G_t \dot{q} - \dot{G} \dot{q} - g_{tt} \end{pmatrix}$$

bestimmen, da G Vollrang hat und M regulär ist.

Die Bewegung des Vier-Balken-Mechanismus wird somit durch ein Anfangswertproblem beschrieben, dessen Lösungsverhalten wir in Abschnitt 4.4 analysieren.

Kapitel 4

Singulär gestörte Mehrkörpersystemmodelle

Die Komplexität vieler Modelle in technischen Simulationen bereitet erhebliche Schwierigkeiten in der Zeitintegration. Hochfrequente Oszillationen verursachen Stabilitätsprobleme bei der Integration mittels expliziter Runge-Kutta-Verfahren oder Adams-Bashforth-Verfahren [Ar⁺11, Str⁺12]. Implizite Verfahren haben diese Nachteile nicht, jedoch muss in jedem Integrationsschritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, so dass der Rechenaufwand auch bei dieser Verfahrensklasse hoch ist. Deshalb wollen wir die quasistatische Reduktion aus Kapitel 2 auf die Modellgleichungen anwenden. Dazu betrachten wir Modellgleichungen der Form

$$M\ddot{q} = f(q, \dot{q})$$

und interpretieren die kleinen Massen als singuläre Störungsparameter, falls die Kraft f von moderater Größe ist.

Im Gegensatz zu der Normalform (2.1) liegen die Gleichungen aus Kapitel 3 als Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor. Auch nach Transformation in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem erster Ordnung unter Verwendung von Geschwindigkeitskoordinaten $v := \dot{q}$ bleibt die Besetztheitsstruktur der Matrix M der Gleichung (3.4) erhalten und ist i. Allg. nicht in Diagonalgestalt. Die Eigenwerte der Massematrix M lassen keinen direkten Schluss auf die Eigenfrequenzen eines Systems zu, falls beispielsweise der Gradient U_q des Potentials (3.23) sehr groß ist [Lub93]. Weiterhin führen Modelle mit Zwangsbedingungen sogar zu differential-algebraische Gleichungen (3.6). Diese Gründe erschweren die Identifikation der Störungsparameter ε in Bewegungsgleichungen.

Die meisten Arbeiten zur Theorie singulär gestörter Probleme beschreiben nur den kanonischen Fall, bei dem die Matrix der linken Seite bereits diagonalisiert und zustandsunabhängig vorliegt. Jedoch ist die Diagonalisierung mit einer stetigen Transformationsmatrix nicht möglich, falls sich die Eigenwerte kreuzen [Kat95, S. 111], d. h., falls die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts von $M(q(t))$ für ein t größer ist als die geometrische Vielfachheit desselben Eigenwertes. Deshalb untersuchen wir in den nachfolgenden theoretischen Betrachtungen zumeist zustandsunabhängige Massematrizen.

4.1 Modelle mit kleinen Massen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, kleine Massen in Modellgleichungen der Form

$$M\ddot{q} = f(q, \dot{q}) \quad (4.1)$$

als singuläre Störungsparameter zu interpretieren und den quasistatischen Ansatz aus Kapitel 2 zu benutzen. Die Idee, kleine Massen in Modellgleichungen zu vernachlässigen, findet sich bereits in [Sic⁺88, Kok76, Rul⁺04].

4.1.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit diagonalen Massematrix

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{q}_M &= f_M(q_M, q_S, \dot{q}_M, \dot{q}_S) \\ \varepsilon \ddot{q}_S &= f_S(q_M, q_S, \dot{q}_M, \dot{q}_S). \end{aligned}$$

Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} q_M \\ q_S \\ \dot{q}_M \end{pmatrix}, & f(y, z) &= \begin{pmatrix} \dot{q}_M \\ \dot{q}_S \\ f_M(y, z) \end{pmatrix} \\ z &= \dot{q}_S, & g(y, z) &= f_S(y, z) \end{aligned}$$

erhalten wir ein System der Form (2.1). Die Anwendung des quasistatischen Ansatzes auf (2.1) liefert unter der Annahme $\mu[g_z] \leq -\beta < 0$ die differential-algebraische Gleichung (2.2), welche mit den Variablen

$$\begin{aligned} y_0 &= \begin{pmatrix} q_{0M} \\ q_{0S} \\ \dot{q}_{0M} \end{pmatrix} \\ z_0 &= \dot{q}_{0S} \end{aligned}$$

auf das Gleichungssystem

$$\ddot{q}_{0M} = f_M(q_{0M}, q_{0S}, \dot{q}_{0M}, \dot{q}_{0S}) \quad (4.2a)$$

$$0 = f_S(q_{0M}, q_{0S}, \dot{q}_{0M}, \dot{q}_{0S}) \quad (4.2b)$$

mit der Annahme $\mu[\partial f_S / \partial \dot{q}_S] \leq -\beta < 0$ führt. Das heißt, dass die logarithmische Norm der negierten Dämpfungsmatrix $\partial f_S / \partial \dot{q}_S$ streng negativ sein soll. Die Voraussetzung in Satz 2.14, dass die Anfangswerte \bar{y}, \bar{z} in einer Umgebung von $y_0(0), z_0(0)$ liegen, bedeutet hier, dass sowohl die Anfangswerte für $q = (q_M, q_S)$ als auch die Anfangswerte für \dot{q} in einer Umgebung von $q_0 = (q_{0M}, q_{0S})$ bzw. \dot{q}_0 liegen sollen. Anstelle einer Zwangsbedingung liefert die quasistatische Reduktion einer ODE zweiter Ordnung hierbei eine implizite ODE erster Ordnung der Gestalt (4.2b). Dabei müssen die Anfangsgeschwindigkeiten \dot{q}_S nach der quasistatischen Reduktion so gewählt werden, dass (4.2b) konsistent in $t = 0$ erfüllt ist [Lei⁺91].

Wenn f_S linear von \dot{q}_S abhängt, kann anstelle der Berechnung der logarithmischen Norm $\mu[\partial f_S / \partial \dot{q}_S]$ die Koerzivität von $-\partial f_S / \partial \dot{q}_S$ zur Anwendung von Satz 2.26 überprüft werden.

4.1.2 Singular gestörte Dämpfung

Als prototypische Gleichung eines nach Bem. 3.1 entkoppelten Systems mit kleiner Masse betrachten wir

$$\varepsilon^2 \ddot{\xi} + 2D\varepsilon \dot{\xi} + \xi = f(\xi).$$

Dabei liegt D in der Praxis oft zwischen 0.01 und 0.1 [Nas10]. Der übliche Ansatz $\dot{\xi} = v$ zur Transformation auf ein System erster Ordnung führt auf

$$\varepsilon^2 \dot{v} = f(\xi) - \xi - 2D\varepsilon v,$$

so dass die Skalierung $t_1 = t/\varepsilon$ erneut ein singular gestörtes Problem

$$\varepsilon D_{t_1} v = f(\xi) - \xi - 2D\varepsilon v$$

liefert, während das System

$$D_{t_2} v = f(\xi) - \xi - 2D\varepsilon v$$

mit der Skalierung $t_2 = t/\varepsilon^2$ nur sehr schwach gedämpft ist. Somit ist die Grenzschichtkorrektur zum ε^1 -gestörten Problem hochfrequent und die Grenzschichtkorrektur zum ε^2 -gestörten Problem klingt nicht ε^2 -unabhängig ab.

Der Ansatz $\varepsilon \dot{\xi} = u$ liefert das singular gestörte Problem

$$\varepsilon \dot{u} = f(\xi) - \xi - 2Du,$$

auf welches die Theorie der singularen Störungen angewendet werden kann.

4.1.3 Mobot

Um den Vorteil des quasistatischen Ansatzes bei der Simulation mechanischer Systeme zu beurteilen, betrachten wir einen mobilen Roboter (kurz Mobot) [Val08]. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein ebenes Modell, siehe Abb. 4.1. Die rechteckige

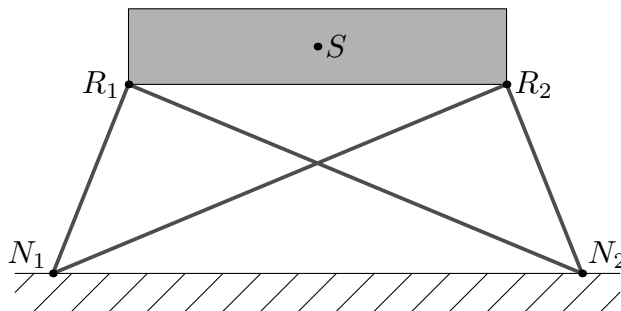


Abbildung 4.1: Ebener Mobot

Plattform mit Masse $m = 1$ und Trägheitsmoment $J = 1$ wird durch die Lage (x_S, y_S) des Schwerpunktes S und durch den Winkel φ_S , der die Rotation um S angibt, beschrieben. Die Plattform wird von zwei Beinen getragen, deren Masse $m_N = 0.02$ in

den Kontaktpunkten $N_j = (x_j, y_j)$ zwischen Mobot und Untergrund konzentriert sei. Um einseitige Zwangsbedingungen zu vermeiden, wird der Kontakt zwischen den Beinen und dem Untergrund durch Federn (Steifigkeit $k_N = 6000$, Dämpfung $k_B = 10$) modelliert.

Der Mobot führt verschiedene Bewegungsabläufe aus, indem er die Länge L_{ij} der teleskopischen Aktuatoren $R_i N_j$ regelt. Die Kraft zwischen R_i und N_j ist durch

$$F_{ij} = k_P(L_{ij} - L_{ij}^d) + k_I \int_0^t (L_{ij} - L_{ij}^d) d\tau + k_D \frac{d}{dt} L_{ij}$$

gegeben, wobei die Konstanten $k_P = 6200$, $k_I = 8000$, $k_D = 80$ einen PID-Regler (proportional-integral-derivative, [Son98]) beschreiben und Sollwerte mit hochgestelltem d gekennzeichnet sind. Mit der Notation $\cos \varphi_{ij} = (x_{N_j} - x_{R_i})/L_{ij}$ und $\sin \varphi_{ij} = (y_{N_j} - y_{R_i})/L_{ij}$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_S = \sum_{i,j} F_{ij} \cos \varphi_{ij} \quad (4.3a)$$

$$\ddot{y}_S = \sum_{i,j} F_{ij} \sin \varphi_{ij} - mg \quad (4.3b)$$

$$\ddot{\varphi}_S = \sum_{i,j} F_{ij} ((x_{R_i} - x_S) \sin \varphi_{ij} - (y_{R_i} - y_S) \cos \varphi_{ij}) \quad (4.3c)$$

$$m_N \ddot{x}_{N_j} = -k_B \dot{x}_{N_j} - k_N (x_{N_j} - x_{N_j}^d) - \sum_i F_{ij} \cos \varphi_{ij} \quad (4.3d)$$

$$m_N \ddot{y}_{N_j} = -k_B \dot{y}_{N_j} - k_N (y_{N_j} - y_{N_j}^d) - \sum_i F_{ij} \sin \varphi_{ij}. \quad (4.3e)$$

In [Web⁺12] wurde die vertikale Position y_S zur Zeit $t_m = 1$ geändert. Wir betrachten die Änderung des Winkels $\varphi_S^{d0} = 0^\circ$ zu $\varphi_S^{d1} = 15^\circ$ zum Zeitpunkt $t_m = 1$ als Stufenfunktion. Die Integration von $t_0 = 0$ bis $t_{\text{end}} = 3$ erfolgt mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweitensteuerung. Dabei wird das Integrationsintervall in zwei Teile $[0, t_m]$ und $(t_m, 3]$ zerlegt, um keine Fehler zu erhalten, die durch die Unstetigkeit bei $t_m = 1$ verursacht werden [Hai⁺00]. Die Genauigkeit der numerischen Lösung $(x_S^i, y_S^i, \varphi_S^i)_{i=0}^n$ werden wir durch den mittleren Fehler

$$\text{err} = \sum_{i=1}^n \frac{|x_S^i - x_S(t_i)| + |y_S^i - y_S(t_i)| + |\varphi_S^i - \varphi_S(t_i)|}{t_i - t_{i-1}}$$

messen, um einerseits den Fehler am Intervallende und andererseits den Fehler in der transienten Phase widerzuspiegeln. Für die Toleranz 10^{-3} des absoluten Fehlers benötigt das Verfahren 5606 Funktionsaufrufe und liefert in den Koordinaten (x_S, y_S, φ_S) einen mittleren Fehler von $1.4 \cdot 10^{-3}$ gegenüber der mit `ode15s` [Sha⁺97] und feinen Toleranzen berechneten Referenzlösung.

Da $m_N \ll m$ gilt, betrachten wir $m_N \ddot{x}_{N_j}, m_N \ddot{y}_{N_j}$ als singuläre Störungen und setzen $m_N = 0$ in (4.3d)–(4.3e). Wie in Abschnitt 4.1.1 führt das zu impliziten Gleichungen

erster Ordnung

$$0 = -k_B \dot{x}_{Nj} - k_N (x_{Nj} - x_{Nj}^d) - \sum_i F_{ij} \cos \varphi_{ij} \quad (4.4a)$$

$$0 = -k_B \dot{y}_{Nj} - k_N (y_{Nj} - y_{Nj}^d) - \sum_i F_{ij} \sin \varphi_{ij}. \quad (4.4b)$$

Weiterhin ist die Jacobi-Matrix der rechten Seite in (4.4) gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -k_B - k_D \sum_i \cos^2 \varphi_{ij} & -k_D \sum_i \cos \varphi_{ij} \sin \varphi_{ij} \\ -k_D \sum_i \cos \varphi_{ij} \sin \varphi_{ij} & -k_B - k_D \sum_i \sin^2 \varphi_{ij} \end{pmatrix},$$

welche für $k_D \geq 0$ nur reelle Eigenwerte kleiner als $-k_B$ besitzt. In diesem Beispiel können die impliziten Gleichungen (4.4) leicht in explizite Gleichungen umgeformt werden, so dass sie wieder mit dem expliziten Euler-Verfahren gelöst werden können. Mit nur 2098 Funktionsaufrufen wird die Lösung etwa dreimal so schnell berechnet, wobei der mittlere Fehler von $2.0 \cdot 10^{-3}$ zu der Referenzlösung des ursprünglichen Systems (4.3) nur doppelt so groß ist. Mit der Toleranz $3 \cdot 10^{-4}$ für den absoluten Fehler verringert sich der mittlere Fehler auf $1.1 \cdot 10^{-3}$ und die Zahl der Funktionsaufrufe ist mit 3576 immer noch deutlich geringer als in der ersten Simulation von (4.3). Abb. 4.2 zeigt

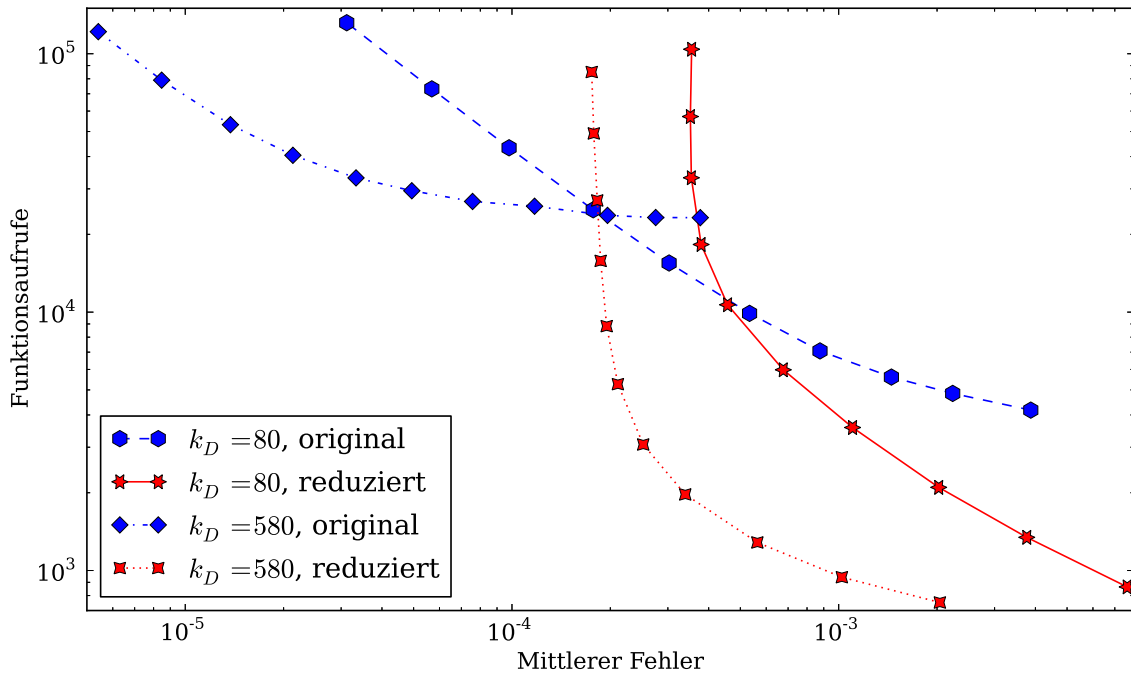


Abbildung 4.2: Fehler der Bewegung des Mobots im Interval $[0, 1] \cup (1, 3]$

die Zahl der Funktionsaufrufe gegen den mittleren Fehler für verschiedene Toleranzen $10^{-2}, \dots, 3 \cdot 10^{-7}$. Ferner wurden diese Kennlinien ebenfalls für den Dämpfungsparameter $k_D = 580$ berechnet.

Die reduzierten Modellgleichungen werden sehr effektiv für grobe Toleranzen gelöst und der Fehler der quasistatischen Approximation ist klein im Vergleich zum Diskretisierungsfehler des Euler-Verfahrens. Für feinere Toleranzen bleibt der Fehler der numerischen Lösung des reduzierten Systems auch bei größerer Anzahl von Funktionsaufrufen oberhalb einer gewissen Grenze err_{\min} , die den Fehler der quasistatischen Approximation widerspiegelt. Der Fehler der numerischen Lösung der ODE (4.3) kann diese Grenze err_{\min} zwar unterschreiten, benötigt dafür aber eine hohe Anzahl an Funktionsaufrufen. Wenn Simulationen mit mittlerem Fehler in der Größenordnung von 10^{-3} akzeptabel sind, ist das quasistatische Problem der originalen Modellgleichung vorzuziehen, da die Rechenzeit um den Faktor 2–3 und bei stärkerer Dämpfung sogar um den Faktor 10–20 verkürzt wird.

Um den Einfluss der Dämpfung auf den Fehler zu studieren, wird in einer weiteren Testreihe $k_D = 0$ gesetzt, so dass die Jacobi-Matrix der rechten Seite in (4.4) gleich $-k_B I$ wird. Außer dem mittleren Fehler bei Integration mit dem Euler-Verfahren und der Toleranz 10^{-3} für den relativen Fehler ist in Abb. 4.3 weiterhin die untere Fehlergrenze err_{\min} der quasistatischen Reduktion durch den Vergleich mit der in `ode15s` berechneten Approximation eingetragen. Je höher die Dämpfung $k_B = 0.5, 1, 2, 5, 10, \dots, 2000$

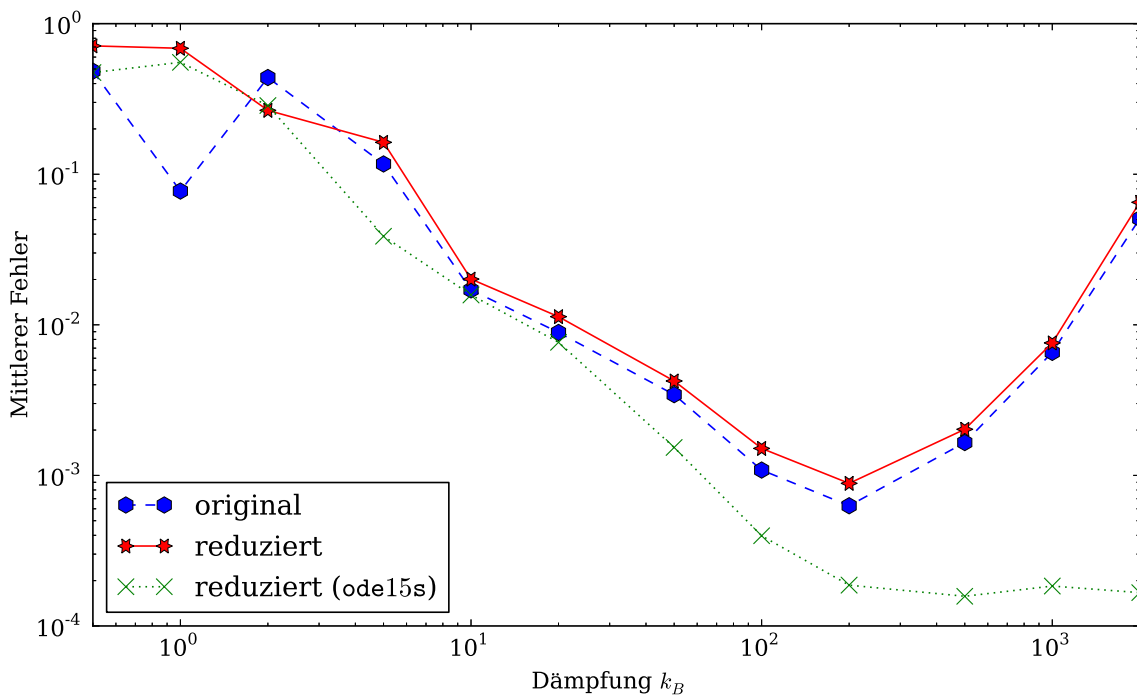


Abbildung 4.3: Fehler der Bewegung des Mobots in Abhängigkeit von k_B

ist, desto kleiner ist die Fehlergrenze err_{\min} . Bei der gegebenen Toleranz 10^{-4} ist der Modellierungsfehler der quasistatischen Approximation vernachlässigbar im Vergleich mit dem Diskretisierungsfehler des Euler-Verfahrens.

4.1.4 Diagonalisierung

Wenn die symmetrisch positiv definite Massematrix $M(q)$ in (4.1) keine Diagonalmatrix ist, so können wir eine orthogonale Transformationsmatrix $X(q)$ wählen, so dass $\Lambda = X^{-1}MX$ Diagonalgestalt besitzt. Die Bewegungsgleichungen (4.1) können damit transformiert werden in $\Lambda X^{-1}\ddot{q} = X^{-1}M\ddot{q} = X^{-1}f(q, \dot{q})$ bzw. $\Lambda\ddot{\rho} = X^{-1}f(X\rho, X\dot{\rho}) - 2\Lambda X^{-1}\dot{X}\dot{\rho} - \Lambda X^{-1}\ddot{X}\rho$ mit $\rho = X^{-1}q$ wegen $X^{-1}\ddot{q} = X^{-1}\ddot{X}\rho + 2X^{-1}\dot{X}\dot{\rho} + \ddot{\rho}$. Nach eventueller Permutation können wir $\Lambda = \text{blkdiag}(\Lambda_M, \Lambda_S)$ partitionieren, wobei Λ_M (M wie Master) die „großen“ Eigenwerte und Λ_S (S wie Slave) die „kleinen“ Eigenwerte von Λ enthält. Die Transformationsmatrix $X(q)$ ist nicht stetig, falls sich die Eigenwerte von $M(q)$ kreuzen [Kat95]. Deshalb werden orthogonale Transformationen betrachtet, die das System in die Gestalt

$$\begin{pmatrix} M_M & 0 \\ 0 & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_M(q_M, q_S, \dot{q}_M, \dot{q}_S) \\ f_S(q_M, q_S, \dot{q}_M, \dot{q}_S) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bringen, wobei die Eigenwerte von M_S um die Größenordnung ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) kleiner sind als die Eigenwerte von M_M und sich somit nicht kreuzen können. Da orthogonale Transformationen die Eigenwerte nicht verändern und Symmetrie erhalten, sind die Matrizen M_M und M_S symmetrisch positiv definit. Mit

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} q_M \\ q_S \\ \dot{q}_M \end{pmatrix}, & f(y, z) &= \begin{pmatrix} \dot{q}_M \\ \dot{q}_S \\ M_M^{-1}f_M(y, z) \end{pmatrix} \\ z &= \dot{q}_S, & g(y, z) &= \varepsilon M_S^{-1}f_S(y, z) \end{aligned}$$

erhalten wir ein System der Form (2.1).

In der technischen Mechanik werden häufig Modal-Ansätze verwendet, d. h., die Matrizen M und K werden wie in Bem. 3.1 gleichzeitig auf Diagonalgestalt gebracht, was für nichtkommutierende M, K keine Ähnlichkeitstransformation ist. Die Moden mit hohen Frequenzen werden dann zur Modellreduktion komplett vernachlässigt, d. h., sowohl q_S als auch \dot{q}_S werden aus den Modellgleichungen eliminiert [Gas⁺89]. Anders als in der technischen Mechanik approximiert die quasistatische Reduktion die Dynamik dieser Moden durch eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung.

4.1.5 Mass-Lumping

Für gewisse Modelle mechanischer Systeme gibt es Verfahren, welche die Lösung durch ODEs mit Massematrizen in Blockdiagonalgestalt approximieren [Leh07]. Als repräsentatives Beispiel betrachten wir ein Anfangswertproblem für die Wellengleichung in einem glatten, konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \Delta u &= f & \text{in } \Omega, t > 0 \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, t > 0 \end{aligned}$$

mit geeigneten Anfangsbedingungen. Wir diskretisieren diese partielle Differentialgleichung (PDE) zweiter Ordnung durch die Finite-Elemente-Methode (FEM) mit stetigen, stückweise linearen Funktionen auf einer Triangulierung \mathcal{T} zu Knoten P_k , siehe

[Tho06]. Sei $(\Phi_j)_{j=1}^N$ die kanonische Basis des Ansatzraumes mit $\Phi_j(P_i) = \delta_{ji}$, wobei δ_{ji} das Kroneckersymbol bezeichnet, d. h. $\delta_{ji} = 1$ für $j = i$ und $\delta_{ji} = 0$ sonst.

Partielle Integration liefert für die Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}} = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \Phi_j$ zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen die schwache Formulierung

$$\forall k = 1, \dots, N : \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k) = (f, \Phi_k).$$

mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int_{\Omega} uv dx$. Diese Gleichungen fassen wir in Matrixform

$$M \ddot{\alpha}(t) + K \alpha(t) = f_{\mathcal{T}}(t)$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ und den Matrixeinträgen $M_{kj} = (\Phi_j, \Phi_k)$, $K_{kj} = (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k)$ zusammen.

Das Mass-Lumping-Verfahren ersetzt die Massematrix M durch die Diagonalmatrix $\overline{M} = \text{diag}(M\mathbf{1})$, wobei $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ ist. Das kann als numerische Integration des ersten Terms $\sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}(t) (\Phi_j, \Phi_k)$ interpretiert werden, indem wir für jedes Dreieck $T = (P_{i1}, P_{i2}, P_{i3})$ der Triangulierung \mathcal{T} das Integral $\int_T uv dx$ durch die Quadraturformel $(uv(P_{i1}) + uv(P_{i2}) + uv(P_{i3})) \int_T \frac{1}{3} dx$ ersetzen, d. h., wir ersetzen das Skalarprodukt (u, v) durch

$$(u, v)_h := \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{uv(P_{i1}) + uv(P_{i2}) + uv(P_{i3})}{3} \int_T dx.$$

Proposition 4.1 ([Tho06]): Die Diagonalmatrix $\overline{M} = \text{diag}(M\mathbf{1})$ besitzt die Matrixeinträge $\overline{M}_{kj} = (\Phi_j, \Phi_k)_h$.

Beweis: Wegen $\Phi_j(P_i) \Phi_k(P_i) = 0$ für $j \neq i$ oder $k \neq i$ gilt

$$(\Phi_j, \Phi_k)_h = 0 \text{ für } j \neq k \text{ und } (\Phi_k, \Phi_k)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}, P_k \in T} \frac{1}{3} \int_T dx.$$

Sind P_j, P_k Eckpunkte in einem Dreieck T , so gilt

$$\int_T \Phi_j \Phi_k dx = \frac{1}{12} \int_T dx \text{ für } j \neq k \text{ und } \int_T \Phi_k^2 dx = \frac{1}{6} \int_T dx,$$

so dass die Behauptung unmittelbar folgt. \square

Die Diagonalmatrix \overline{M} ist symmetrisch positiv definit. Somit erhalten wir Bewegungsgleichungen der Form (4.5).

4.1.6 Schur-Reduktion

In diesem Abschnitt wollen wir eine Matrix als Summe einer singulären Matrix und einer kleinen Störung schreiben, ohne dafür die Singulärwertzerlegung berechnen zu müssen.

Definition 4.2: Sei eine 2×2 -Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit einer regulären Matrix A gegeben. Dann heißt $D - CA^{-1}B$ das Schur-Komplement von A in der Matrix. \diamond

Proposition 4.3 ([Web⁺13]): Wenn die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ positiv definit und A quadratisch ist, dann existiert $D - CA^{-1}B$ und ist positiv definit.

Beweis: Wenn die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ positiv definit ist, dann ist auch der Hauptminor A positiv definit und die Inverse A^{-1} existiert.

Sei $v \neq 0$ ein beliebiger Vektor. Dann ist $w := \begin{pmatrix} -A^{-1}Bv \\ v \end{pmatrix} \neq 0$. Da $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ positiv definit ist, gilt

$$0 < w^T \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} w = v^T (D - CA^{-1}B)v,$$

d. h., die Matrix $D - CA^{-1}B$ ist positiv definit. \square

Weiterhin sehen wir leicht, dass $D - CA^{-1}B$ symmetrisch ist, falls die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ symmetrisch ist. Das motiviert die Annahme $D - CA^{-1}B = \varepsilon LL^T$ mit ε -unabhängigem, regulärem L . Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ wird die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ singular.

Lemma 4.4: Für das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B + \varepsilon LL^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

mit invertierbaren, ε -unabhängigen Matrizen A, L liege $(u(0), v(0))$ in einer Umgebung der quasistatischen Lösung und die logarithmische Norm von

$$L^{-1}(-CA^{-1}, I) \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^{-1}B \\ I \end{pmatrix} L^{-T} \quad (4.7)$$

sei nach oben durch $-\beta < 0$ beschränkt. Dann besitzt das Problem für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und $t \in [0, t_{\text{end}}]$ eine eindeutige Lösung in der Form

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ v_0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^{-1}BL^{-T}\zeta(t/\varepsilon) \\ L^{-T}\zeta(t/\varepsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

wobei (u_0, v_0) die DAE (4.6) mit $\varepsilon = 0$ löst und $|\zeta_0(t_1)| \leq e^{-\beta t_1} |\zeta_0(0)|$ gilt.

Beweis: Wir benutzen die Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B + \varepsilon LL^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ C & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ & L^T \end{pmatrix},$$

um das System (4.6) als singular gestörtes Problem

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \varepsilon \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ C & L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}f(u, v) \\ -L^{-1}CA^{-1}f(u, v) + L^{-1}g(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

zu schreiben, wobei die Variablentransformation durch

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ & L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}BL^{-T} \\ & L^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Nach Voraussetzung ist die logarithmische Norm von

$$\frac{\partial}{\partial z}(-L^{-1}CA^{-1}f + L^{-1}g) = L^{-1}(-CA^{-1}, I) \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^{-1}B \\ I \end{pmatrix} L^{-T}$$

durch $-\beta < 0$ beschränkt, so dass für die Lösung von (4.8) nach Satz 2.14

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 + \zeta_0(t/\varepsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

gilt, wobei (y_0, z_0) die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ -L^{-1}CA^{-1} & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u(y_0, z_0), v(y_0, z_0)) \\ g(u(y_0, z_0), v(y_0, z_0)) \end{pmatrix}$$

ist und ζ_0 eine abklingende Funktion ist, vgl. Bem. 2.15. Somit ist

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}BL^{-T} \\ & L^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 + \zeta_0(t/\varepsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Weiterhin ist

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I & -A^{-1}BL^{-T} \\ & L^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

die Lösung der DAE

$$\begin{pmatrix} A & \\ C & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ & L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_0, v_0) \\ g(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Im Spezialfall $C = 0 = B^T$ haben wir eine Blockdiagonalmatrix wie in Gleichung (4.5). Bemerkenswert ist ebenfalls, dass B oder C von ε abhängen dürfen, sofern B, C gleichmäßig beschränkt bleiben. Insbesondere können komplette Blockzeilen oder Blockspalten in der Größenordnung von ε sein.

Bemerkung 4.5: Wir betrachten folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} + \varepsilon LL^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Die ODE (4.9) kann als Differentialgleichung erster Ordnung formuliert werden

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} + \varepsilon LL^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

Für $B^T = (0, 0, \mathcal{B}^T)$, $C = (0, 0, \mathcal{C})$ und $A = \text{blkdiag}(I, I, \mathcal{A})$ erhalten wir

$$CA^{-1}B = \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}.$$

Das Schur-Komplement der Matrix A in der Differentialgleichung erster Ordnung ist also gleich dem Schur-Komplement der Matrix \mathcal{A} in der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Ausdruck (4.7) in Lemma 4.4 vereinfacht sich zu

$$L^{-1}(-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}, I) \begin{pmatrix} f_{\dot{\phi}} & f_{\dot{\psi}} \\ g_{\dot{\phi}} & g_{\dot{\psi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} \\ I \end{pmatrix} L^{-T},$$

d. h., es genügt, in (4.9) die Koeffizientenmatrix von $(\ddot{\phi}, \ddot{\psi})$ und die Jacobimatrix der rechten Seite bezüglich $(\dot{\phi}, \dot{\psi})$ zu untersuchen. In Modellen mechanischer Systeme entspricht $-\begin{pmatrix} f_{\dot{\phi}} & f_{\dot{\psi}} \\ g_{\dot{\phi}} & g_{\dot{\psi}} \end{pmatrix}$ der Dämpfungsmatrix. \diamond

4.2 Steife Modelle

Die alleinige Untersuchung der Massematrix M in den Bewegungsgleichungen (4.1) liefert unbefriedigende Ergebnisse, wenn das System in unzureichend geeigneten Koordinaten beschrieben wird. Im Vier-Balken-Modell aus Abschnitt 3.5 entstehen hochfrequente Schwingungen nicht durch kleine Massen, sondern durch die hohe Dehn- und Biegesteifigkeit des Balkens \boxtimes , vgl. Abschnitt 3.2.

Um den Einfluss der Steifigkeit flexibler Elemente zu untersuchen, betrachten wir Probleme der Gestalt

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T \\ J & M_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - Kz - D_e \dot{z} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

bei denen die Starrkörperkoordinaten φ bereits so gewählt sind, dass die aus der kinetischen Energie resultierenden Kräfte f_1, f_2 beschränkt sind, aber die Diskretisierungsmatrix M_e zu den flexiblen Koordinaten z wesentlich kleinere Eigenwerte besitzt als die Steifigkeitsmatrix K . Das verursacht hochfrequente Schwingungen der Frequenz ω_1 , wobei ω_1^2 der größte Eigenwert von $M_e^{-1}K$ ist [Shb05].

Beispiel 4.6: Wir betrachten einen flexiblen Balken wie in Abschnitt 3.2. Die Verformung der neutralen Faser sei durch $w = (z(t)x, 0)$ beschrieben, so dass sich die Spannungsenergie (3.8) zu

$$W = \frac{1}{2}Edh \int_0^L (w_1')^2 dx = \frac{1}{2}EdhLz^2$$

vereinfacht. Mit der potentiellen Energie

$$U = \gamma \int_0^L \varrho Y dV = \frac{\gamma}{2} \varrho dhL^2(1+z) \sin \varphi$$

und der Masse $m = \rho dhL$ liefert der Lagrange-Formalismus die Gleichungen

$$m \left(\frac{L^2}{3}(1+z)^2 + \frac{h^2}{12} \right) \ddot{\varphi} = -m(1+z) \left(\frac{2L^2}{3} \dot{\varphi} \dot{z} + \frac{\gamma L}{2} \cos \varphi \right) \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{3} \ddot{z} &= m \left(\frac{L^2}{3} \dot{\varphi}^2 (1+z) - \frac{\gamma L}{2} \sin \varphi \right) - EdhLz \\ &\quad - D \left(\omega \frac{mL^2}{3} + \frac{1}{\omega} EdhL \right) \dot{z}, \end{aligned} \quad (4.11b)$$

wobei wir Rayleigh-Dämpfung mit dem Parameter $D = 0.05$ zur Frequenz

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{mL^2}{3} \right)^{-1} EdhL}$$

hinzugefügt haben. Für die dimensionslosen Parameter $m = 3.15$, $L = 1$, $d = h = 0.02$, $\gamma = 9.81$ sind die Trägheitsmatrizen $M_r = m \left(\frac{L^2}{3}(1+z)^2 + \frac{h^2}{12} \right)$ und $M_e = \frac{mL^2}{3}$ nicht klein, aber der Steifigkeitsterm ist sehr groß für den Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^{11}$. \diamond

Wir werden die Bewegungsgleichung (4.10) durch eine zweckmäßige Koordinatentransformation in ein System überführen, dessen rechte Seite gleichmäßig beschränkt bleibt. Wie in Abschnitt 3.3 und in Bsp. 4.6 wird angenommen, dass die Dämpfungsmatrix die Form $D_e = \alpha M_e + \beta K$ besitzt, d. h., die Bewegungsgleichung besitzt die Gestalt

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T \\ J & M_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - Kz - (\alpha M_e + \beta K) \dot{z} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

mit Rayleigh-Parametern $\alpha = 2D\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$ und $\beta = 2D/(\omega_1 + \omega_2)$, wobei ω_1^2 der größte Eigenwert von $M_e^{-1}K$ ist, vgl. Abschnitt 3.3. Da die Steifigkeitsmatrix K in Modellen mechanischer Systeme stets symmetrisch, positiv definit ist, können wir $K = R^T R$ zerlegen. Obwohl die Matrix R für eine differenzierbare Matrix K ebenfalls differenzierbar gewählt werden kann [Gol⁺96], ist es für die spätere Koordinatentransformation günstig, nur konstante Matrizen M_e , K und R zu betrachten.

Skalieren der flexiblen Koordinate z mit R liefert

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T R^{-1} \\ R^{-T} J & \hat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ R \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ R^{-T} f_2 - Rz - (\alpha \hat{M} + \beta I) R \dot{z} \end{pmatrix}$$

mit $\hat{M} = R^{-T} M_e R^{-1}$. Da die Matrix \hat{M} ähnlich zu $(M_e^{-1}K)^{-1} = R^{-1} R^{-T} M_e$ ist, besitzen beide Matrizen die gleichen Eigenwerte und der kleinste Eigenwert von \hat{M} ist ω_1^{-2} . Für den Vektor x mit $\hat{M}x = \omega_1^{-2}x$ erhalten wir

$$(\alpha \hat{M} + \beta I)x = \frac{2D}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 \omega_2 \hat{M}x + x) = \frac{2D}{\omega_1} x.$$

Wenn die Geschwindigkeit $R\dot{z}$ mit der symmetrisch positiv definiten Matrix \hat{M}^ν mit noch zu wählendem Parameter $\nu \in \mathbb{R}$ skaliert wird, bekommen wir mit der Variablen $\hat{z} = \hat{M}^\nu R z$ die Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T R^{-1} \hat{M}^{-\nu} \\ \hat{M}^{-\nu} R^{-T} J & \hat{M}^{-\nu} \hat{M} \hat{M}^{-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \hat{M}^{-\nu} R^{-T} f_2 - \hat{M}^{-2\nu} \hat{z} - \hat{M}^{-\nu} (\alpha \hat{M} + \beta I) \hat{M}^{-\nu} \hat{z} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Wir wählen $\nu = \frac{1}{4}$, so dass die neue Dämpfungsmatrix $\hat{M}^{-\nu}(\alpha\hat{M} + \beta I)\hat{M}^{-\nu}$ wieder den Eigenvektor x besitzt, welcher jetzt jedoch zu dem ω_1 -unabhängigen Eigenwert $2D$ gehört.

Wie in Bem. 4.5 können wir die Lösung der Bewegungsgleichungen entsprechend Lemma 4.4 quasistatisch approximieren durch die Lösung der DAE

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T R^{-1} \hat{M}^{-\nu} \\ \hat{M}^{-\nu} R^{-T} J & M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \hat{M}^{-\nu} R^{-T} f_2 - \hat{M}^{-2\nu} \hat{z}_0 - \hat{M}^{-\nu} (\alpha \hat{M} + \beta I) \hat{M}^{-\nu} \dot{\hat{z}}_0 \end{pmatrix}$$

mit $M_0 := \hat{M}^{-\nu} R^{-T} J M_r^{-1} J^T R^{-1} \hat{M}^{-\nu}$, wenn die logarithmische Norm von (4.7) nach oben durch eine negative Konstante beschränkt ist. Dabei ist die Koeffizientenmatrix von $\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{z}_0 \end{pmatrix}$ singular. Anschließend können wir das reduzierte Problem mittels $z_0 := R^{-1} \hat{M}^{-\nu} \hat{z}_0$ in die DAE

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T \\ J & M_{e0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - K z_0 - (\alpha M_e + \beta K) \dot{z}_0 \end{pmatrix}$$

mit $M_{e0} := R^T \hat{M}^\nu M_0 \hat{M}^\nu R$ transformieren, welche die gleiche Struktur wie Gleichung (4.12) besitzt.

Beispiel 4.6 (Fortsetzung): Die zuvor beschriebene Skalierung liefert hier

$$\begin{aligned} \hat{M} &= mL^2 / (3EdhL) \approx 1.3 \cdot 10^{-8} \\ \varepsilon &= \hat{M}^{1-2\nu} - \hat{M}^{-\nu} R^{-T} J M_r^{-1} J^T R^{-1} \hat{M}^{-\nu} \approx 10^{-4} \\ \hat{M}^\nu R &= (mL^2 / 3 \cdot EdhL)^\nu \approx 3 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

Wenn der Ausdruck $\varepsilon \ddot{z} = \varepsilon (\hat{M}^\nu R \ddot{z})$ zu Null gesetzt wird, so erhalten wir hier die beiden 1×1 -Matrizen $M_0 = 0$ und $M_{e0} = 0$. Wird $M_e = \frac{1}{3} mL^2$ in der linken Seite von (4.11b) durch Null ersetzt, so reduziert sich der Berechnungsaufwand von 13 773 Funktionsaufrufen zu 1303 Funktionsaufrufen im MATLAB-Integrator `ode15s` für $t_{\text{end}} = 1$, $\text{AbsTol} = 10^{-9}$, $\text{RelTol} = 10^{-8}$ und Anfangswerte $(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}) = (0, 0, 5.41, 0)$. Bei Anwendung auf das Modell des flexiblen Balkens aus Abschnitt 3.2 erkennen wir in Abb. 4.4, dass die Differenz zwischen der Lösung $z = z_\varepsilon$ der ursprünglichen Modellgleichung und der Lösung z_0 in der quasistatischen Lösung für wachsendes t gegen $\mathcal{O}(\varepsilon)|z|$ strebt. \diamond

Bemerkung 4.7: Durch die Form der Dämpfungsmatrix $D_e = \alpha M_e + \beta K$ für Rayleighdämpfung inspiriert, können wir auch die Koordinate $v = \dot{z} + \alpha z$ betrachten. Die Gleichung (4.12) nimmt dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T \\ J & M_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \alpha J^T (v - \alpha z) \\ f_2 - (1 - \alpha\beta) K z - \beta K v \end{pmatrix}$$

an. Wie zuvor schreiben wir $K = R^T R$, $\hat{M} = R^{-T} M_e R^{-1}$ und skalieren mit $\hat{M}^\nu R$. Das liefert

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T R^{-1} \hat{M}^{-\nu} \\ \hat{M}^{-\nu} R^{-T} J & \hat{M}^{1-2\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \hat{M}^\nu R \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + J^T \alpha (v - \alpha z) \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}$$

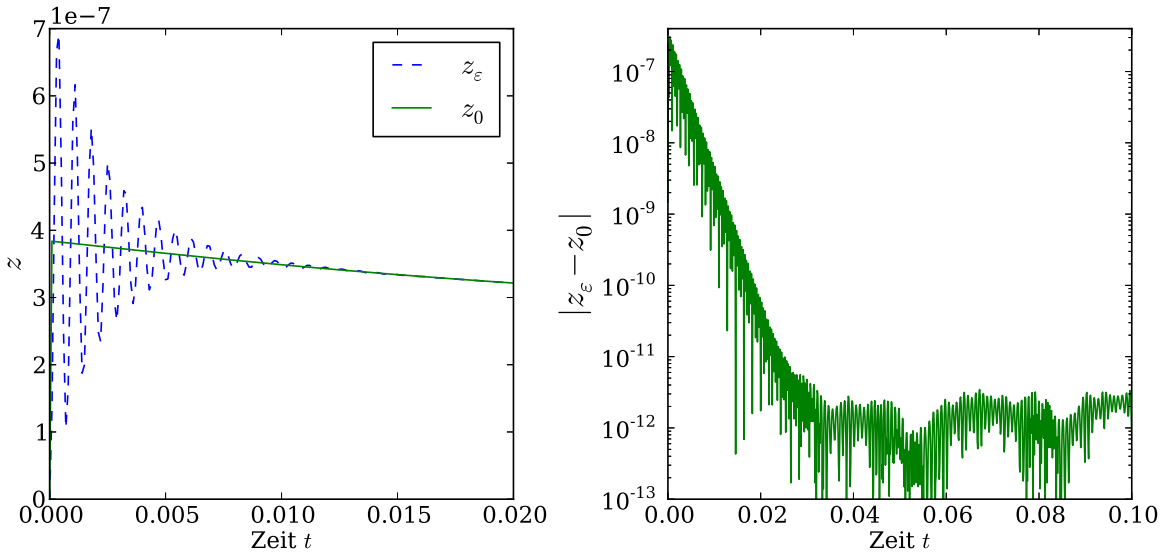


Abbildung 4.4: Flexible Koordinate des flexiblen Balkens

mit

$$\tilde{F}_2 = \hat{M}^{-\nu} R^{-T} f_2 - (1 - \alpha\beta)\hat{M}^{-\nu} R z - \beta\hat{M}^{-2\nu}(\hat{M}^{\nu} R v)$$

an. Für $\hat{M}x = \omega_1^{-2}x$ gilt

$$\beta\hat{M}^{-2\nu}x = \frac{2D}{\omega_1 + \omega_2}\omega_1^{4\nu}x,$$

so dass wir $\nu = \frac{1}{4}$ wählen, damit $\omega_1^{4\nu}/(\omega_1 + \omega_2) \in [\frac{1}{2}, 1]$ für alle $\omega_2 \leq \omega_1$. Da $1 - \alpha\beta = \mathcal{O}(1)$ wegen $\alpha\beta \leq D^2$ gilt, ist \tilde{F}_2 gleichmäßig stetig bezüglich $\hat{M}^{-\nu}Rz$.

Wenn wir v_0 durch $\dot{z}_0 + \alpha z_0$ ersetzen, erhalten wir die DAE

$$\begin{pmatrix} M_r & J^T \\ J & M_{e0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - Kz_0 - (\alpha M_{e0} + \beta K)\dot{z}_0 \end{pmatrix}.$$

Der quasistatische Ansatz für diese Formulierung beseitigt singuläre Störungen sowohl in der Matrix M_e als auch in der Dämpfungsmatrix $D_e = \alpha M_e + \beta K$. Werden beide Matrizen in Beispiel 4.6 entsprechend angepasst, so benötigt die Integration mit gleicher Toleranz 1382 Funktionsaufrufe. \diamond

4.3 Singular gestörte DAEs

4.3.1 Differentiationsindex

Die allgemeine Form einer differential-algebraischen Gleichung lautet

$$0 = F(\dot{u}, u), \quad (4.14)$$

wobei $\partial F/\partial \dot{u}$ singularär ist.

Definition 4.8 ([Hai⁺02]): Wenn es eine minimale Anzahl m an analytischen Differentiationen

$$0 = F(\dot{u}, u), \quad 0 = \frac{dF(\dot{u}, u)}{dt}, \quad \dots, \quad 0 = \frac{d^m F(\dot{u}, u)}{dt^m}$$

gibt, so dass diese Gleichungen durch algebraische Umformungen in ein explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\dot{u} = \varphi(u)$ überführt werden können, dann heißt m Differentiationsindex der Gleichung (4.14). Die Gleichung $\dot{u} = \varphi(u)$ wird zugrundeliegende ODE genannt. \diamond

Wenn Mehrkörpersysteme mit Zwangsbedingungen $0 = g(t, q)$ modelliert werden, erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der Deskriptorform (3.6)

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + G^T\lambda &= f(t, q, \dot{q}) \\ 0 &= g(t, q), \end{aligned}$$

wobei $G = \frac{\partial g}{\partial q}$ und λ der Vektor der Lagrange-Multiplikatoren ist.

Die Zwangsbedingung (3.6b) kann zweimal nach der Zeit differenziert werden

$$\begin{aligned} 0 &= G\dot{q} + g_t \\ 0 &= G\ddot{q} + \dot{G}\dot{q} + G_t\dot{q} + g_{tt} \end{aligned}$$

mit der Matrix $\dot{G} = \dot{q}^T G_q + G_t$, wobei G_q ein Tensor dritter Stufe ist. Falls G Vollrang besitzt, kann nach

$$\lambda = (GM^{-1}G^T)^{-1}(GM^{-1}f + \dot{G}\dot{q} + G_t\dot{q} + g_{tt})$$

aufgelöst werden [Shb05]. Eine weitere Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit t liefert schließlich das explizite Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= M^{-1}f(q, v) - M^{-1}G^T\lambda \\ \dot{\lambda} &= \frac{d}{dt} \left((GM^{-1}G^T)^{-1}(GM^{-1}f + \dot{G}v + G_tv + g_{tt}) \right). \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen (3.6) besitzen somit den Differentiationsindex 3 und werden auch als Index-3-Formulierung bezeichnet.

4.3.2 Singular gestörte DAEs in der Literatur

In [Yan94] wurde das Lösungsverhalten von

$$\dot{y} = f_1(y, z, \lambda, \varepsilon) \tag{4.15a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = f_2(y, z, \lambda, \varepsilon) \tag{4.15b}$$

$$0 = f_3(y, z, \lambda, \varepsilon) \tag{4.15c}$$

mit regulärem $\partial f_3/\partial\lambda$ untersucht. Die totale Zeitableitung der dritten Gleichung führt zu $0 = (\partial f_3/\partial y)f_1 + (\partial f_3/\partial z)\dot{z} + (\partial f_3/\partial\lambda)\dot{\lambda}$. Falls $\partial f_3/\partial\lambda \notin \mathcal{O}(\varepsilon)$, dann muss

$$\varepsilon\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial f_3}{\partial\lambda} \right)^{-1} \left(\varepsilon \frac{\partial f_3}{\partial y} f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial z} f_2 \right) =: f_4(y, z, \lambda, \varepsilon)$$

betrachtet werden. Im reduzierten Problem

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= f_1(y_0, z_0, \lambda_0, 0) \\ 0 &= f_2(y_0, z_0, \lambda_0, 0) \\ 0 &= f_4(y_0, z_0, \lambda_0, 0) \end{aligned}$$

folgt die letzte Gleichung $0 = f_4(y_0, z_0, \lambda_0, 0)$ direkt aus $0 = f_2(y_0, z_0, \lambda_0, 0)$, d. h., die Jacobimatrix $\frac{\partial}{\partial(z, \lambda)} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_4 \end{pmatrix}$ ist singular, so dass die Ergebnisse für singular gestörte ODEs nicht anwendbar sind. Dennoch wurde in [Yan94] die Existenz von äußerer und innerer Lösung gezeigt.

Falls $\partial f_3/\partial z = 0$ bzw. $0 = f_3(y, \lambda)$ gilt, lassen sich die Existenz von äußerer und innerer Lösung schneller zeigen. Dazu brauchen wir lediglich die Existenz einer Funktion ς mit $0 = f_3(y, \varsigma(y))$. Damit erhalten wir das ausgiebig untersuchte System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(y, z, \varsigma(y)) \\ \varepsilon\dot{z} &= f_2(y, z, \varsigma(y)). \end{aligned}$$

Die im nachfolgenden Abschnitt betrachteten Bewegungsgleichungen (3.6) haben nach Diagonalisierung der Massematrix die Struktur der singular gestörter DAE (4.15), vgl. Abschnitt 4.1.4, wobei λ den Lagrange-Multiplikatoren entspricht. Da die Zwangsbedingungen keine Lagrange-Multiplikatoren enthalten, ist $(\partial f_3/\partial\lambda) = 0$, so dass weder das Resultat von [Yan94] noch eine Funktion ς mit $0 = f_3(y, \varsigma(y))$ verwendet werden kann.

4.3.3 Singular gestörte DAEs in der Mehrkörpersimulation

Zu den Bewegungsgleichungen (3.6) betrachten wir die Index-1-Formulierung

$$\begin{pmatrix} 0 & G \\ G^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{G}\dot{q} - G_t\dot{q} - g_{tt} \\ f \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Anstatt eine Gleichung für $\dot{\lambda}$ aufzustellen, können wir den Lagrange-Multiplikator λ formal durch $\dot{\lambda}_I$ ersetzen [Gea88], um so ein implizites Differentialgleichungssystem zu erhalten. Wir werden jedoch weiterhin λ statt $\dot{\lambda}_I$ schreiben, damit die Darstellung übersichtlich bleibt.

Obwohl die Indexreduktion die anschließende Verwendung von ODE-Lösern erlaubt [Gea⁺84], liefert die numerische Lösung der indexreduzierten Formulierung oft einen globalen Fehler in der Zwangsbedingung (3.6b). Um diesen Drift-off-Effekt zu vermeiden suchen wir deshalb eine Formulierung, in welcher die Zwangsbedingung nicht differenziert wurde. Bei allen weiteren Schritten achten wir darauf, dass unser Vorgehen keinesfalls G modifiziert.

Wir partitionieren den Vektor $q^T = (q_{\mathbb{I}}^T, q_{\mathbb{J}}^T)$ mit disjunkten Indexmengen \mathbb{I}, \mathbb{J} , deren Vereinigung $\mathbb{I} \cup \mathbb{J} = \{1, \dots, n_q\}$ erfüllt. Den Indexmengen entsprechend zerlegen wir die Matrizen $G = (G_{\mathbb{I}}, G_{\mathbb{J}})$ und $M = \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} \end{pmatrix}$ ebenfalls und untersuchen Modifikationen der Matrix $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}}$. Wie in Bem. 4.5 müssen wir die ODE erster Ordnung

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\mathbb{I}} & G_{\mathbb{J}} \\ \hline 0 & G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ 0 & G_{\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \lambda \\ \ddot{q}_{\mathbb{I}} \\ \ddot{q}_{\mathbb{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{G}\dot{q} - G_t\dot{q} - g_{tt} \\ f_{\mathbb{I}} \\ f_{\mathbb{J}} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

nicht betrachten, weil das Schur-Komplement von $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}$ in der Matrix

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & G & & \\ \hline G^T & & M & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & G_{\mathbb{I}} & G_{\mathbb{J}} \\ \hline G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ G_{\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} \end{array} \right) \quad (4.18)$$

aus Gleichung (4.16) gleich dem Schur-Komplement von $A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}$ in der Matrix aus Gleichung (4.17) ist. Somit suchen wir Bedingungen, unter denen das Schur-Komplement

$$M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - (G_{\mathbb{J}}^T, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T) \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} = M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$$

von \mathcal{A} in der Matrix (4.18) positiv definit ist, wobei $\mathcal{C} := (G_{\mathbb{J}}^T, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T)$ gesetzt wird.

Für reguläres $G_{\mathbb{I}}$ ist die Matrix

$$M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - (G_{\mathbb{J}}^T, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T) \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} = (-G_{\mathbb{I}}^{-T}G_{\mathbb{J}}^T, I)M \begin{pmatrix} -G_{\mathbb{J}}G_{\mathbb{I}}^{-1} \\ I \end{pmatrix}$$

positiv definit. Falls die Indexmengen \mathbb{I}, \mathbb{J} so gewählt wurden, dass die Norm des Schur-Komplements $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$ zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ durch einen Term aus $\mathcal{O}(\varepsilon)$ beschränkt bleibt, so finden wir eine Matrix L mit $\varepsilon LL^T = M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$. Wir können $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} = \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T + \varepsilon LL^T$ durch $\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$ ersetzen, falls die logarithmische Norm der transformierten Jacobimatrix in Lemma 4.4 nach oben durch eine negative Konstante beschränkt ist, vgl. Bem. 4.5.

Dieser Ansatz soll nun auf nicht-quadratische Matrizen $G_{\mathbb{I}}$ erweitert werden [Web⁺13].

Lemma 4.9: *Falls M positiv definit ist und $G_{\mathbb{I}}$ Vollrang besitzt, dann ist die Matrix $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$ ebenfalls positiv definit.*

Beweis: Der Hauptminor $M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}$ ist positiv definit und insbesondere invertierbar. Da $G_{\mathbb{I}}$ Vollrang hat, ist $W = G_{\mathbb{I}}M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1}G_{\mathbb{I}}^T$ regulär und es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1}M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ -M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1}G_{\mathbb{I}}^T \end{pmatrix} W^{-1}(G_{\mathbb{J}} - G_{\mathbb{I}}M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1}M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - (G_{\mathbb{J}}^{\text{T}}, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}}) \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^{\text{T}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} \\ = M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} + (G_{\mathbb{J}} - G_{\mathbb{I}} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}})^{\text{T}} W^{-1} (G_{\mathbb{J}} - G_{\mathbb{I}} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}). \end{aligned}$$

Diese Matrix ist positiv definit, weil einerseits W positiv definit ist und andererseits die Definitheit von $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}^{-1} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}$ aus Proposition 4.3 folgt. \square

Da die Zwangbedingung auf Ebene der Beschleunigungskordinaten durch unser Vorgehen nicht modifiziert wurde, können wir sie zweimal integrieren und erhalten das linear implizite Gleichungssystem

$$M_0 \ddot{q}_0 + G^{\text{T}} \lambda_0 = f(q_0, \dot{q}_0) \quad (4.19\text{a})$$

$$0 = g(t, q_0), \quad (4.19\text{b})$$

wobei

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}} & \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{\text{T}} \end{pmatrix}$$

alle Terme der Massematrix M zusammenfasst, die nicht durch die singuläre Störung bestimmt sind.

Proposition 4.10: *Die Matrix M_0 ist singular.*

Beweis: Angenommen, die Matrix M_0 wäre regulär. Dann gäbe es eine inverse Matrix M_0^{-1} und die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 0 & G \\ G^{\text{T}} & M_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} & G_{\mathbb{J}} \\ G_{\mathbb{I}}^{\text{T}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ G_{\mathbb{J}}^{\text{T}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}} & \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{\text{T}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C}^{\text{T}} \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{\text{T}} \end{pmatrix} = 0$$

ließe sich nach der Schur-Determinanten-Identität [Pow11] als Produkt der Determinanten $\det(M_0)$ und $\det(-GM_0^{-1}G^{\text{T}})$ schreiben. Wegen der Vollrangforderung an G ist aber $\det(GM_0^{-1}G^{\text{T}})$ ungleich Null. \square

Bemerkung 4.11: Die Matrix M_0 ist invariant gegen Skalierungen der Zwangsbedingung $0 = g$, d. h., wenn G durch SG mit einer regulären Matrix S ersetzt wird, so erhalten wir für $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}}$ die gleiche Substitution $\mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{\text{T}}$ wegen

$$(G_{\mathbb{J}}^{\text{T}} S^{\text{T}}, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{\text{T}}) \begin{pmatrix} 0 & SG_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^{\text{T}} S^{\text{T}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} SG_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} = \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{\text{T}}. \quad \diamond$$

4.3.4 Singuläre Störungen in Mehrkörpersystemen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob die quasistatische Reduktion der Bewegungsgleichungen (3.14)

$$\begin{pmatrix} M_j & 0 & I \\ 0 & 0 & -J_j^T \\ I & -J_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_j \\ \ddot{q}_j \\ \mu_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ 0 \\ \gamma_j^{(\text{II})} + \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)} \end{pmatrix}$$

des Blattkörpers j möglich ist. Dazu partitionieren wir die Matrizen

$$M_j = \begin{pmatrix} M_{\text{II}} & M_{\text{IJ}} \\ M_{\text{IJ}}^T & M_{\text{JJ}} \end{pmatrix}, \quad J_j = \begin{pmatrix} J_{\text{I}} \\ J_{\text{J}} \end{pmatrix}$$

und den Kraftvektor $f_j^T = (f_{\text{I}}^T, f_{\text{J}}^T)$ mit disjunkten Indexmengen I, J . Mit den Matrizen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M_{\text{II}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -J_{\text{I}}^T & -J_{\text{J}}^T \\ I & -J_{\text{I}} & 0 & 0 \\ 0 & -J_{\text{J}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} M_{\text{IJ}} \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}$$

nimmt Gleichung (3.14) nach geeigneter Permutation die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathcal{A} & \mathcal{C}^T & \\ \hline \mathcal{C} & M_{\text{JJ}} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \ddot{p}_{\text{I}} \\ \ddot{q}_j \\ \mu_j \\ \ddot{p}_{\text{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\text{I}} \\ 0 \\ \gamma_j^{(\text{II})} + \Gamma_j \ddot{p}_{\pi(j)} \\ f_{\text{J}} \end{pmatrix}$$

an, wobei $\mu_j^T = (\mu_{\text{I}}^T, \mu_{\text{J}}^T)$ für eine kompakte Darstellung nicht partitioniert wird.

Proposition 4.12: Sei M_j positiv definit und J_{J} regulär. Dann ist das Schur-Komplement von \mathcal{A} in der Matrix $\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{C} & M_{\text{JJ}} \end{pmatrix}$ positiv definit.

Beweis: Da J_{J} regulär ist, besitzt $\begin{pmatrix} I & -J_{\text{I}} \\ 0 & -J_{\text{J}} \end{pmatrix}$ eine inverse Matrix und es gilt

$$\begin{pmatrix} I & -J_{\text{I}} \\ 0 & -J_{\text{J}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{\text{I}} J_{\text{J}}^{-1} \\ -J_{\text{J}}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen die Zerlegung

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -J_{\text{I}} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{\text{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{\text{II}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -J_{\text{I}}^T & -J_{\text{J}}^T \end{pmatrix},$$

um das Matrixprodukt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T &= (M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T, 0, 0, I) \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -J_{\mathbb{I}}^T & -J_{\mathbb{J}}^T \\ I & -J_{\mathbb{I}} & 0 & 0 \\ 0 & -J_{\mathbb{J}} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \\ &= (M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T, 0, -J_{\mathbb{J}}^{-T}J_{\mathbb{I}}^T, -J_{\mathbb{J}}^{-T}) \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ 0 \\ -J_{\mathbb{I}}J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ -J_{\mathbb{J}}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zu vereinfachen. Für die quadratische Matrix $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ existiert die inverse Matrix $\begin{pmatrix} \mathcal{D} & I \\ I & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & -\mathcal{D} \end{pmatrix}$, so dass wir für das Schur-Komplement

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T &= M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - (M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T, 0, -J_{\mathbb{J}}^{-T}J_{\mathbb{I}}^T, -J_{\mathbb{J}}^{-T}) \begin{pmatrix} -J_{\mathbb{I}}J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ -J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} + M_{\mathbb{I}\mathbb{I}}J_{\mathbb{I}}J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} + M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T J_{\mathbb{I}} J_{\mathbb{J}}^{-1} + J_{\mathbb{J}}^{-T} J_{\mathbb{I}}^T M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} + J_{\mathbb{J}}^{-T} J_{\mathbb{I}}^T M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} J_{\mathbb{I}} J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ &= (J_{\mathbb{J}}^{-T} J_{\mathbb{I}}^T, I) \underbrace{\begin{pmatrix} M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} & M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T & M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} \end{pmatrix}}_{=M_j} \begin{pmatrix} J_{\mathbb{I}} J_{\mathbb{J}}^{-1} \\ I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten. Da M_j nach Voraussetzung positiv definit ist und $(J_{\mathbb{J}}^{-T} J_{\mathbb{I}}^T, I)$ Vollrang besitzt, ist die Matrix $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C}^T$ ebenfalls positiv definit. \square

4.4 Singuläre Störung im Vier-Balken-Mechanismus

Die Methode aus den vorhergehenden Abschnitten sollen nun auf den Vier-Balken-Mechanismus aus Abschnitt 3.5 angewendet werden.

Dabei wollen wir über das Zeitintervall $[0, 0.5]$ integrieren, wobei die Parameter $m_1 = m_3 = 0.36$, $m_2 = 0.151104$, $L_1 = L_3 = 0.15$, $L_2 = 0.3$, $J_1 = J_3 = 2.727 \cdot 10^{-3}$, $J_2 = 4.5339259 \cdot 10^{-3}$, $\mathbf{E} = 2 \cdot 10^{11}$, $d = 0.008$, $h = 0.008$, $\varrho = 7870$, $\gamma = 0$ und $\omega = 10$ verwendet werden.

Wir studieren die Konfiguration $L_0 + L_1 = L_2 + L_3 + 0.001$, so dass der Zustand nahe $\varphi_1 = 180^\circ$ für Starrkörper unzulässig ist und der Zug des elastischen Balkens $\mathbb{2}$ wesentlich ist, um diesen Zustand zu durchlaufen. Obwohl das System mit dem flexiblen Balken $\mathbb{2}$ eine Lösung besitzt, hängt diese empfindlich von den Details der numerischen Integration ab. Nach Durchlauf des Zustandes $\varphi = 180^\circ$ könnte der Körper $\mathbb{3}$ in die negative Halbebene gelangen oder ähnlich wie in Abb. 3.2b in der positiven Halbebene verbleiben. Deshalb wird eine sehr feine Toleranz für eine numerisch bestimmte Referenzlösung gefordert.

Um zusätzliche Schwierigkeiten zu Beginn der Integration zu vermeiden, wird $\varphi_0 = 10^\circ$ gewählt, siehe Abb. 4.5 für den Anfangszustand. Die beiden größten Eigenfrequenzen zum Matrixpaar (M_e, K) betragen $\omega_1 = 55\,382$ und $\omega_2 = 10\,182$. Damit werden die Rayleigh-Parameter $\alpha = 2D\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$ und $\beta = 2D/(\omega_1 + \omega_2)$ für das Dämpfungsmaß $D = 0.005$ bestimmt, vgl. Gleichung (3.10).

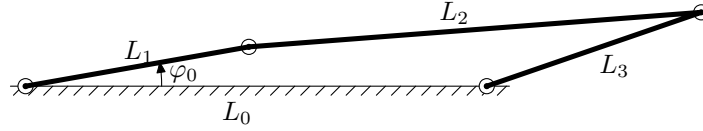


Abbildung 4.5: Anfangszustand des Vier-Balken-Mechanismus

Bei direkter Anwendung von ODE-Zeitintegrationsverfahren auf DAEs sind Index-3-Probleme schwer zu lösen und können Ordnungsreduktion verursachen [Ren⁺99]. Die Simulation in FORTRAN mit dem impliziten Runge-Kutta-Solver `radau5` [Hai⁺02] schlägt für absolute Toleranzen kleiner als 10^{-3} fehl. Die numerische Lösung zu größeren Toleranzen liefert einen Fehler in der Zwangsbedingung (3.25), der ebenso grob und deshalb in der Konfiguration $L_0 + L_1 = L_2 + L_3 + 0.001$ nicht akzeptabel ist. Deshalb muss die Zwangsbedingung (3.25) auf Lageebene mittels Differentiation durch die Zwangsbedingung

$$0 = G\dot{q} + g_t \quad \text{mit} \quad G = \begin{pmatrix} L_1 \cos \varphi_1 & (L_2 + w_1) \cos \varphi_2 & L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_2 \\ L_1 \sin \varphi_1 & (L_2 + w_1) \sin \varphi_2 & L_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & -\cos \varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf Geschwindigkeitsebene ersetzt werden. Die analytische Lösung wird durch diese Substitution zwar nicht verändert, jedoch kann für die numerische Lösung ein Fehler in der Zwangsbedingung beobachtet werden. Um die ursprüngliche Zwangsbedingung einzuhalten, wird eine zusätzliche Variable μ zur Stabilisation eingeführt [Gea⁺85]

$$\dot{q} = v - G^T \mu \tag{4.20a}$$

$$M(q)\dot{v} = f(q, v) - G^T \lambda \tag{4.20b}$$

$$0 = g(t, q) \tag{4.20c}$$

$$0 = Gv + g_t. \tag{4.20d}$$

Wenn M positiv definit ist und G Vollrang besitzt, dann hat die GGL-Formulierung (4.20) den Index 2 und erfüllt $\mu = 0$ [Gea⁺85, Thm. 1.1].

Die `radau5`-Routine integriert Probleme der Gestalt

$$M\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

mit konstanter, eventuell singulärer Matrix M , vgl. [Hai⁺02]. Um nun das System (4.20) in diese Gestalt zu bringen, ersetzen wir (4.20b) durch das Subsystem

$$\dot{v} = a$$

$$0 = M(q)a + G^T \lambda - f(q, v)$$

mit einer Beschleunigungsvariable a , vgl. [Hai⁺02, Kap. VII.7]. Jetzt ist M eine konstante Diagonalmatrix mit 14 Einsen und 13 Nullen auf der Diagonale.

Die Steuerung der Schrittweite h beruht auf einer Schätzung des lokalen Fehlers durch ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren [Str⁺12]. Die Variablen $q_1, \dots, q_7, v_1, \dots, v_7$ sind Index-1-Variablen, d. h., die Fehler dieser Variablen werden durch das eingebettete Verfahren asymptotisch korrekt geschätzt. Die Fehlerschätzung der Index-2-Variablen $a_1, \dots, a_7, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hingegen wird mit h multipliziert. Entsprechend setzen wir `IWORK(5)=14`, `IWORK(6)=13` und `IWORK(7)=0` in `radau5`. Da wir uns hauptsächlich für die Lagekoordinaten interessieren, werden die Toleranzen für Geschwindigkeit, Beschleunigung und Lagrange-Variablen um den Faktor 10 größer gewählt, d. h., wir geben in `radau5` die Toleranzen für `RTOL` und `ATOL` als Vektoren an (`ITOL=1`). Das Ergebnis dieser Simulation mit `RTOL(i) = 10-7` ($i = 1, 2, \dots, 27$), `ATOL(i) = 10-8` ($i = 1, 2, \dots, 7$) und `ATOL(i) = 10-7` ($i = 8, 9, \dots, 27$) dient als Referenzlösung.

Die folgenden Testrechnungen werden im MATLAB-Integrator `ode15s` durchgeführt. Diese Routine kann die Index-2-Formulierung nicht lösen, so dass wir in der Simulation λ durch $\dot{\lambda}_I$ ersetzen [Gea88]. Die Toleranz für den absoluten Fehler geben wir vektorwertig durch `AbsTol` $\cdot (1, 1, \dots, 1, 10, 10, \dots, 10)$ vor. Mit den Toleranzen `RelTol = 10-6` und `AbsTol = 32 \cdot 10-5` benötigt der Integrator `ode15s` dann 63 324 Funktionsaufrufe.

Wie in Abschnitt 4.2 sind die Koordinaten $q^T = (\varphi^T, z^T)$ in (4.16) unzweckmäßig. Deshalb skalieren wir \ddot{z} mit $\hat{M}^{1/4}R$. Das liefert

$$\begin{pmatrix} M_s + M_d & C^T R^{-1} \hat{M}^{-1/4} & G_r^T \\ \hat{M}^{-1/4} R^{-T} C & \hat{M}^{-1/4} R^{-T} M_e R^{-1} \hat{M}^{-1/4} & \hat{M}^{-1/4} R^{-T} G_e^T \\ G_r & G_e R^{-1} \hat{M}^{-1/4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \hat{M}^{1/4} R \ddot{z} \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

als linke Seite in (4.16) mit $G = (G_r, G_e) := (g_\varphi, g_z)$.

Um die Vollrangbedingung an $G_{\mathbb{I}}$ aus Abschnitt 4.3 im gesamten Intervall $[t_0, t_{\text{end}}] = [0, 0.5]$ zu erfüllen, kann nur $\mathbb{J} \subseteq \{4, 5, 6\}$ gewählt werden.

Der kleinste positive Eigenwert der Matrix (4.21) im Anfangszustand ist $1.9 \cdot 10^{-5}$ mit einem Eigenvektor x , der $\|x - e_6\|_2 < 0.06$ erfüllt. Der zweitkleinste positive Eigenwert $1.8 \cdot 10^{-4}$ ist erheblich größer, so dass genau eine quasistatische Variable zu reduzieren ist.

Obwohl die Matrizen M_r, J, G in diesem Modell nicht konstant sind, werden wir die Eigenwerte nicht in jedem Zeitschritt untersuchen, da die wiederholte Eigenwertanalyse zu aufwändig ist. Basierend auf der Untersuchung der Anfangssituation erwarten wir die besten Ergebnisse bei Anwendung des quasistatischen Ansatzes auf $\dot{q}_6 = \dot{z}_3$, d. h., wir substituieren das Diagonalelement $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}}$ in $M(q)$ durch

$$(G_{\mathbb{J}}^T, M_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^T) \begin{pmatrix} 0 & G_{\mathbb{I}} \\ G_{\mathbb{I}}^T & M_{\mathbb{I}\mathbb{I}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{\mathbb{J}} \\ M_{\mathbb{I}\mathbb{J}} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

mit den Indexmengen

$$\mathbb{I} = \{1, \dots, 7\} \setminus \{6\}, \quad \mathbb{J} = \{6\}.$$

Tatsächlich benötigt die Integration der Modellgleichung nach der Ersetzung von $M_{\mathbb{J}\mathbb{J}}$ durch (4.22) nur noch 15 075 Funktionsauswertungen, d. h., wir erhalten einen Speed-up-Faktor 4.2 für die quasistatische Approximation. In Abb. 4.6 ist für verschiedene

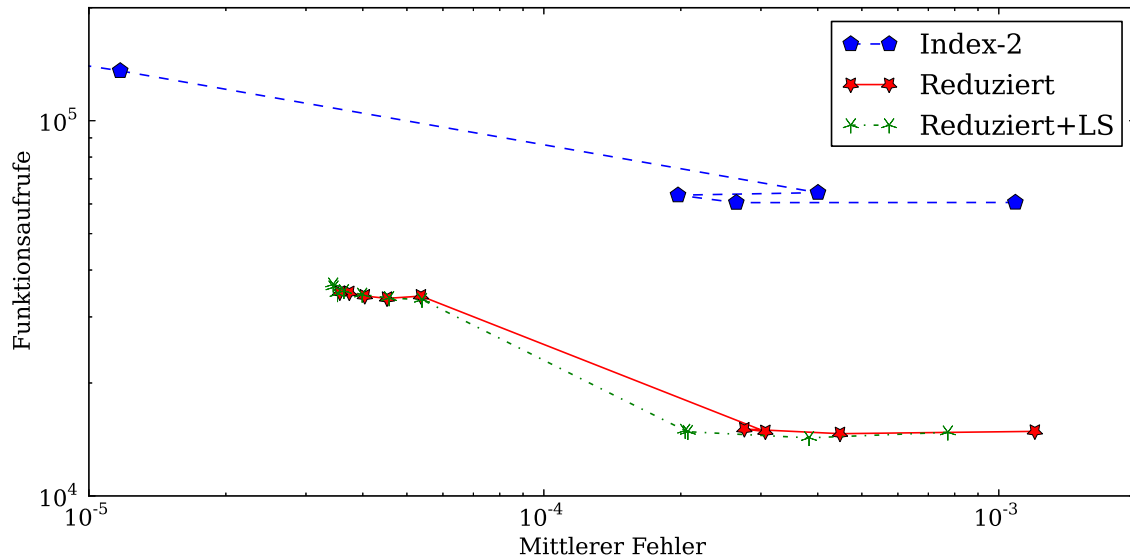


Abbildung 4.6: Fehler der Simulation des Vier-Balken-Mechanismus

Toleranzen $\text{AbsTo1} = 2^7 \cdot 10^{-5}, 2^6 \cdot 10^{-5}, \dots, 2^{-5} \cdot 10^{-5}$ die Anzahl der Funktionsaufrufe gegen den mittleren Fehler aufgetragen, wobei als mittlerer Fehler hier das arithmetische Mittel von $\|q_\varepsilon(t_i) - q_0(t_i)\|_1$ für das Zeitgitter $t_i = i \cdot 10^{-4}$, $i = 0, 1, \dots, 5000$ verwendet wird. Wir beobachten, dass die Lösung des reduzierten Problems schneller berechnet wird, aber der mittlere Fehler oberhalb eines Minimalwertes $\text{err}_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ verbleibt.

Wenn die Dämpfungsmatrix $\alpha M_e + \beta K$ wie in Bem. 4.7 angepasst wird, d. h., wenn wir die Substitution von M_{JJ} durch (4.22) auch in der rechten Seite verwenden, dann sind die Ergebnisse ähnlich, vgl. den Graphen „Reduziert+LS“ in Abb. 4.6.

Die Routine `ode15s` ist ein BDF-Verfahren mit Ordnungssteuerung ($1 \leq k \leq 5$). Diese Verfahrensklasse ist für Ordnung $k \geq 3$ nicht A-stabil [Hai⁺02, S. 247] und insbesondere nicht G-stabil, so dass der Solver solch eine kleine Schrittweite wählt, um die hochfrequenten Schwingungen aufzulösen. Für grobe Toleranzen sollte deshalb die maximale Ordnung beschränkt werden (`odeset('MaxOrder', 2)`). Die Ordnungsbeschränkungen $k \leq 5$, $k \leq 4$, $k \leq 3$ ergeben jeweils eine qualitativ ähnliche Anzahl von Funktionsaufrufen und einen ähnlichen mittleren Fehler. Die Abb. 4.7 zeigt die Anzahl der Funktionsaufrufe gegen den mittleren Fehler für die Ordnungsbeschränkungen $k \leq 2$ und $k \leq 4$. Die quasistatische Reduktion liefert für die A-stabilen Verfahren keine wesentliche Rechenzeitersparnis. Allerdings erlaubt die quasistatische Reduktion die Benutzung von BDF-Methoden höherer Ordnung, ohne dabei die erhebliche Schrittweitenbeschränkung durch hochfrequente Schwingungen zu beobachten. Dadurch kann das reduzierte Problem mit $\text{AbsTo1} = 2 \cdot 10^{-5}$, $k \leq 5$ schneller gelöst werden als das originale Problem mit $\text{AbsTo1} = 2 \cdot 10^{-5}$, $k \leq 2$ (beide Simulationen liefern hier den mittleren Fehler $5 \cdot 10^{-5}$).

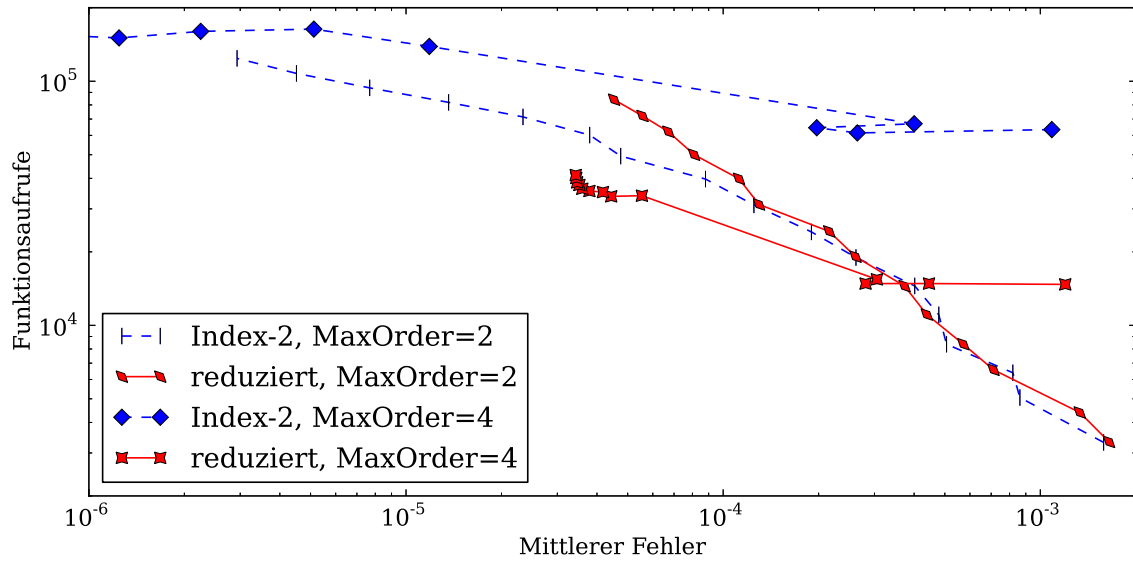


Abbildung 4.7: Fehler der Simulation des Vier-Balken-Mechanismus

4.5 Varianten und Alternativen

Neben der bereits in Bem. 4.7 präsentierten Anpassung der Dämpfungsmatrix für die quasistatische Approximation existieren weitere Gesichtspunkte und Alternativen zur Vermeidung längerer Rechenzeiten durch hochfrequente Schwingungen.

4.5.1 Guyan-Reduktion

Guyan beschreibt in [Guy65] eine Reduktionstechnik für lineare statische Probleme der Form

$$\begin{pmatrix} K_{MM} & K_{MS} \\ K_{SM} & K_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_M \\ q_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_M \\ f_S \end{pmatrix}$$

unter der Annahme, dass $f_S = 0$ gilt. Unter dieser Voraussetzung kann zunächst das reduzierte Gleichungssystem

$$(K_{MM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM})q_M = f_M$$

gelöst werden und anschließend können sämtliche Verschiebungen mittels

$$\begin{pmatrix} q_M \\ q_S \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ -K_{SS}^{-1}K_{SM} \end{pmatrix}}_{=:T} q_M \quad (4.23)$$

berechnet werden. In der Strukturmechanik wird diese Grundidee verwendet, um Bewegungsgleichungen der Form [Gas⁺89]

$$\begin{pmatrix} M_{MM} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{MM} & K_{MS} \\ K_{SM} & K_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_M \\ q_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_M \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf die Gleichung $M_{MM}\ddot{q}_M + (K_{MM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM})q_M = f_M$ zu reduzieren. Für lineare Bewegungsgleichungen der Gestalt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{MM} & M_{MS} \\ M_{SM} & M_{SS} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_S \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} D_{MM} & D_{MS} \\ D_{SM} & D_{SS} \end{pmatrix}}_{=D} \begin{pmatrix} \dot{q}_M \\ \dot{q}_S \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} K_{MM} & K_{MS} \\ K_{SM} & K_{SS} \end{pmatrix}}_{=K} \begin{pmatrix} q_M \\ q_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_M \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird die Guyan-Reduktion (4.23) ebenfalls verwendet und ergibt das kondensierte System

$$T^T M T \ddot{q}_M + T^T D T \dot{q}_M + T^T K T q_M = T^T f_M,$$

welche „bei vernünftiger Wahl von Haupt- und Nebenfreiheitsgraden allerdings eine sehr gute [Näherung]“ liefert [Gas⁺89, S. 202].

Falls M, D Blockdiagonalmatrizen sind, d. h., $M_{SM} = M_{MS}^T = 0$, $D_{SM} = D_{MS}^T = 0$, und weiterhin $D_{SS} = 0$ gilt, so ist die Guyan-Reduktion identisch mit der quasistatischen Reduktion des linearisierten Modellgleichungssystem (4.5) mit $f_S = -K_{SM}q_M - K_{SS}q_S$.

4.5.2 Modifikation mit Masseerhaltung

In einem geschlossenen System gilt das Prinzip der Masseerhaltung [Are⁺10]. Entsprechend werden Methoden bevorzugt, welche die Masse in einem System erhalten wie z. B. das Mass-Lumping-Verfahren aus Abschnitt 4.1.5.

Für den Mobot aus Abschnitt 4.1.3 bedeutet das, dass bei Ersetzung von (4.3d)–(4.3d) durch (4.4) die Masse der Plattform um m_N je Fuß schwerer wird. Das entspricht der Erhöhung der Dichte um den Faktor $1 + 2m_N/m$, so dass das Trägheitsmoment ebenfalls um den gleichen Faktor größer wird. Eine mathematische Begründung für diese zusätzliche Modifikation liegt nicht vor. Abb. 4.8 zeigt den mittleren Fehler der mit Dämpfungsparameter $k_D = 80$ berechneten numerischen Lösung in Anhängigkeit von der Zahl der Funktionsaufrufe für verschiedene Toleranzen $10^{-2}, \dots, 3 \cdot 10^{-7}$. Die zusätzliche Modifikation bringt qualitativ die gleiche Rechenzeiterparnis wie die quasistatische Reduktion, erhöht jedoch die Modellfehler.

4.5.3 Grenzfrequenz

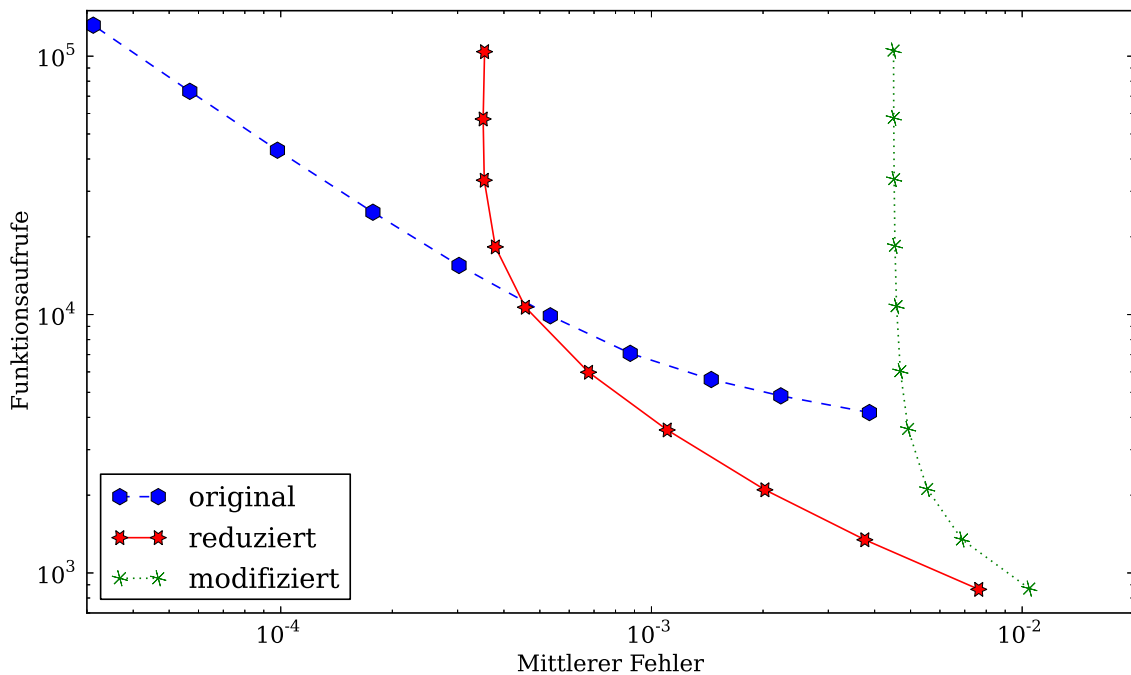
In [Scn03] wurde vorgeschlagen, hochfrequente Schwingungen mit vernachlässigbaren Amplituden in den Modellgleichungen flexibler Mehrkörpersysteme dadurch zu vermeiden, dass einzelne modale Massen erhöht werden. Nach der Entkopplung entsprechend Bem. 3.1 bedeutet das, dass die Gleichung

$$m\ddot{\xi} + k\xi = f \text{ mit } k/m > \hat{\omega}^2 \quad (4.24)$$

durch die Gleichung

$$\hat{m}\ddot{\xi} + k\xi = f \text{ mit } \hat{m} = k/\hat{\omega}^2$$

ersetzt wird, wobei die sogenannte Grenzfrequenz $\hat{\omega}$ auf Grund physikalischer Überlegungen gewählt wird. Insbesondere sollte „die Grenzfrequenz (...) deutlich oberhalb

Abbildung 4.8: Fehler der Bewegung des Mobots im Intervall $[0, 1] \cup (1, 3]$

des abzubildenden Frequenzspektrums liegen, um eine unbeabsichtigte Beeinflussung der Zielgrößen zu vermeiden“ [Scn03, S. 64]. Die durch die Grenzfrequenz-Methode approximierten Aufgabe gehört zur Problemklasse wie die ursprüngliche Aufgaben, d. h., alle zur Lösung von (4.24) vorhandenen Algorithmen stehen auch für die Lösung der approximierten Aufgabe zur Verfügung.

An einem Balkenmodell mit maximalen Eigenfrequenzen von 80 kHz wurde die Auswirkung einer Grenzfrequenz von 8 kHz untersucht und verifiziert, dass dieses Konzept befriedigende Simulationsergebnisse liefert [Scn03]. Die Theorie der singulären Störungen erlaubt uns, den Fehler der Grenzfrequenz-Methode zu analysieren. Wir können annehmen, dass Gleichung (4.24) bereits zweckmäßig skaliert vorliegt, vgl. Abschnitt 4.2. In der Simulation des Balkens in [Scn03] ist der Quotient aus maximaler Eigenfrequenz und Grenzfrequenz gleich 10. Deshalb setzen wir weiterhin voraus, dass der Quotient aus maximaler Eigenfrequenz und Grenzfrequenz durch eine ε -unabhängige Konstante beschränkt bleibt. Dann entspricht die Grenzfrequenz-Methode der Ersetzung von $\varepsilon \dot{z} = g(y, z)$ in (2.1) durch $\hat{\varepsilon} \dot{\hat{z}} = g(\hat{y}, \hat{z})$. Wenn Bedingung (2.5) erfüllt ist, gilt für die Lösung des modifizierten Systems

$$\hat{z}(t) = z_0(t) + \hat{\varepsilon} z_1(t) + \zeta_0(t/\hat{\varepsilon}) + \hat{\varepsilon} \zeta_1(t/\hat{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}^2)$$

nach Satz 2.14. Zusammen mit der Darstellung von $z(t)$ aus Satz 2.14 ergibt sich

$$\hat{z}(t) - z(t) = (\hat{\varepsilon} - \varepsilon) z_1(t) + \zeta_0(t/\hat{\varepsilon}) - \zeta_0(t/\varepsilon) + \hat{\varepsilon} \zeta_1(t/\hat{\varepsilon}) - \varepsilon \zeta_1(t/\varepsilon) + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Für das Verhältnis $\hat{\varepsilon}/\varepsilon = 10$ folgt

$$|\hat{z}(t) - z(t)| \leq 9\varepsilon |z_1(t)| + e^{-\kappa t/10\varepsilon} (1 + e^{-9\kappa t/10\varepsilon}) (|\zeta_0(0)| + \varepsilon |\zeta_1(0)|) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Nach der Einschwingzeit stimmt die Lösung des aus der Grenzfrequenz-Methode resultierenden Systems mit dem ursprünglichen System also bis auf einen Fehler der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ überein. Ohne Berücksichtigung der abklingenden Grenzsichtkorrekturterme ist der theoretische Fehler der Grenzfrequenz-Methode bei $\hat{\varepsilon}/\varepsilon = 10$ um den Faktor 9 höher als der Fehler der quasistatischen Lösung.

Die Bewegungsgleichungen in Bsp. 4.6 liegen bereits entkoppelt vor. Wenn wir die modale Masse $M_e = mL^2/3$ in Gleichung (4.11b) mittels Grenzfrequenz-Methode durch $M_{eG} = 10M_e$ ersetzen, so werden immer noch 10 113 Funktionsaufrufe benötigt. Der Dämpfungsgrad $\frac{1}{2}(\alpha M_e + \beta K)/\sqrt{M_{eG}K}$ in der modifizierten Gleichung ist kleiner als der Dämpfungsgrad $\frac{1}{2}(\alpha M_e + \beta K)/\sqrt{M_e K}$ in der ursprünglichen Gleichung (4.11b) für die feste Dämpfungsmatrix $\alpha M_e + \beta K$, so dass die Amplitude der Schwingung länger oberhalb der Toleranz liegt. Falls weiterhin der Summand αM_e in der Dämpfungsmatrix $\alpha M_e + \beta K$ entsprechend Bem. 4.7 angepasst wird, d. h. falls $\alpha M_{eG} + \beta K$ als Dämpfungsmatrix benutzt wird, so sinkt die Anzahl der Funktionsauswertungen auf 4873.

Die Anwendung der Grenzfrequenz-Methode auf nichtentkoppelte Mehrkörpersysteme soll anhand des Vier-Balken-Mechanismus aus Abschnitt 4.4 untersucht werden. Der Quotient aus zweitkleinstem und kleinstem positiven Eigenwert der Matrix (4.21) liegt zwischen 3 und 10 für die Simulation. Deshalb wählen wir $\hat{\varepsilon}/\varepsilon = 3$. In der Notation von Lemma 4.4 ersetzen wir also $D = CA^{-1}B + \varepsilon LL^T$ durch $CA^{-1}B + 3\varepsilon LL^T = 3D - 2CA^{-1}B$. Der Fehler ist etwa doppelt so groß wie jener der quasistatischen Approximation und die Anzahl der Funktionsaufrufe etwa um den Faktor 2.5 höher, beispielsweise 41 521 Funktionsaufrufe bei $\text{AbsTo1} = 2^5 \cdot 10^{-5}$. Die Modifikation der Frequenzen führt ebenso wie die quasistatische Approximation zu einem Modellfehler, der nicht durch feinere Toleranzen verkleinert werden kann, siehe Abb. 4.9.

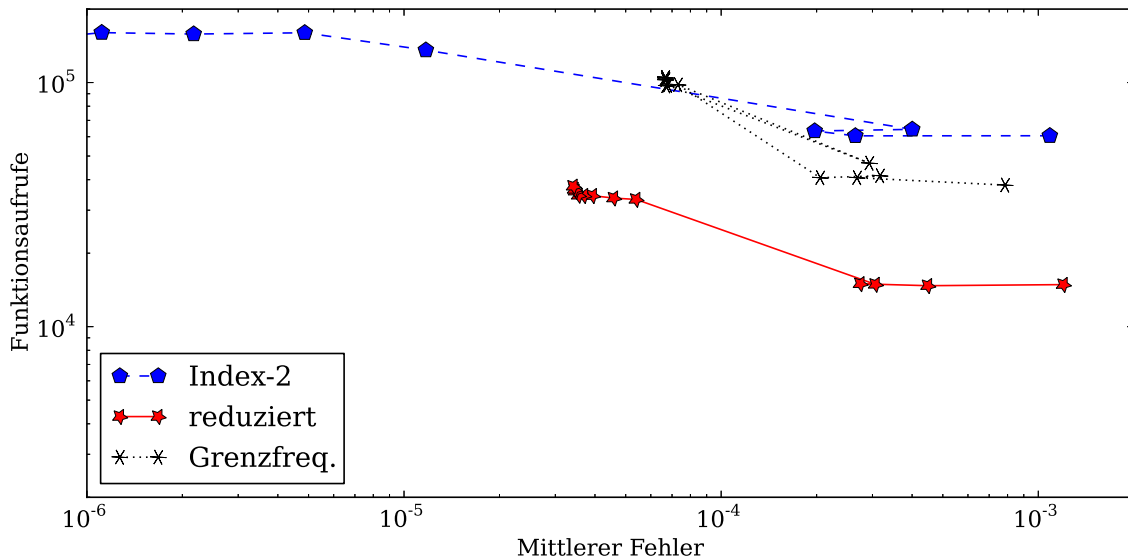


Abbildung 4.9: Fehler der Simulation des Vier-Balken-Mechanismus

Bemerkung 4.13: Für zweckmäßig skalierte Probleme kann das Systemverhalten anhand der Eigenwerte m_i der Massematrix beschrieben werden. Die Grenzfrequenz-Me-

thode bildet die Eigenwerte in der Form

$$(m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_i > m_{i+1} \geq \dots) \mapsto (m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_i \geq \hat{m} = \hat{m} = \dots)$$

ab mit $\hat{m} \geq m_{i+1}$. Der quasistatischen Approximation entspricht die Abbildung

$$(m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_j > m_{j+1} \geq \dots) \mapsto (m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_j > 0 = 0 = \dots)$$

der Eigenwerte mit $\varepsilon \geq m_{j+1}$. Eine Kombination beider Ansätze lässt sich in der Form

$$(m_1 \geq \dots \geq m_i > m_{i+1} \geq \dots \geq m_j > m_{j+1} \geq \dots) \\ \mapsto (m_1 \geq \dots \geq m_j \geq \hat{m} = \dots = \hat{m} > 0 = \dots)$$

darstellen, wobei $\hat{m} > \varepsilon$ gilt. Das resultierende Problem würde einerseits die durch $m_{i+1} \geq \dots \geq m_j$ hochfrequenten Frequenzen verlangsamen und andererseits die sehr kleinen Eigenwerte $m_{j+1} \geq \dots$ eliminieren. \diamond

4.5.4 Re-Modellierung basierend auf dem Lagrange-Formalismus

Die Massematrix $M = \frac{\partial^2 T}{(\partial \dot{r})^2}$ in den Euler-Lagrange-Gleichungen (3.4) ergibt sich aus der kinetischen Energie T . Wir wählen die Abbildung $T \mapsto T_0$ so, dass $\frac{\partial^2 T_0}{(\partial \dot{r})^2}$ gleich der modifizierten Massematrix M_0 ist. Mit dieser modifizierten Energie wird u. U. die rechte Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen (3.4) für lageabhängiges T verändert.

In Bsp. 4.6 müssen wir den Term $m\dot{z}^2 L^2/6$ in der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \int \varrho (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dV = \frac{1}{2} \int \varrho ((\dot{\varphi}^2(1+z)^2 + \dot{z}^2)x^2 + \dot{\varphi}^2 y^2 - 2\dot{\varphi}\dot{z}xy) dV \\ = \frac{1}{2} \varrho dhL \left(\frac{1}{3} (\dot{\varphi}^2(1+z)^2 + \dot{z}^2) L^2 + \frac{1}{12} \dot{\varphi}^2 h^2 \right)$$

vernachlässigen, was ebenfalls durch Approximation der Geschwindigkeit

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \approx \dot{\varphi} A'(\varphi) \begin{pmatrix} x + w_1 \\ y \end{pmatrix}$$

der materiellen Punkte erreicht wird. Mit dieser modifizierten Energie

$$T_0 = \frac{1}{6} m \left(\dot{\varphi}^2(1+z)^2 L^2 + \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 h^2 \right)$$

liefert der Lagrange-Formalismus für die Lagrange-Funktion $T_0 - U - W$ die Gleichungen

$$m \left(\frac{L^2}{3} (1+z_0)^2 + \frac{h^2}{12} \right) \ddot{\varphi}_0 = -m(1+z_0) \left(\frac{2L^2}{3} \dot{\varphi}_0 \dot{z}_0 + \frac{\gamma L}{2} \cos(\varphi_0) \right) \\ 0 = m \left(\frac{L^2}{3} \dot{\varphi}_0^2 (1+z_0) - \frac{\gamma L}{2} \sin(\varphi_0) \right) - EdhLz_0.$$

Wenn zur letzten Gleichung der Term $-D(\omega \frac{mL^2}{3} + \frac{1}{\omega} EdhL) \dot{z}_0$ addiert wird, welcher in Bsp. 4.6 der Rayleigh-Dämpfung entspricht, so erhalten wir die gleichen Ausdrücke wie sie die quasistatische Reduktion liefert. Für das Bsp. 4.6 kommutiert also das in Abb. 4.10 dargestellte Diagramm.

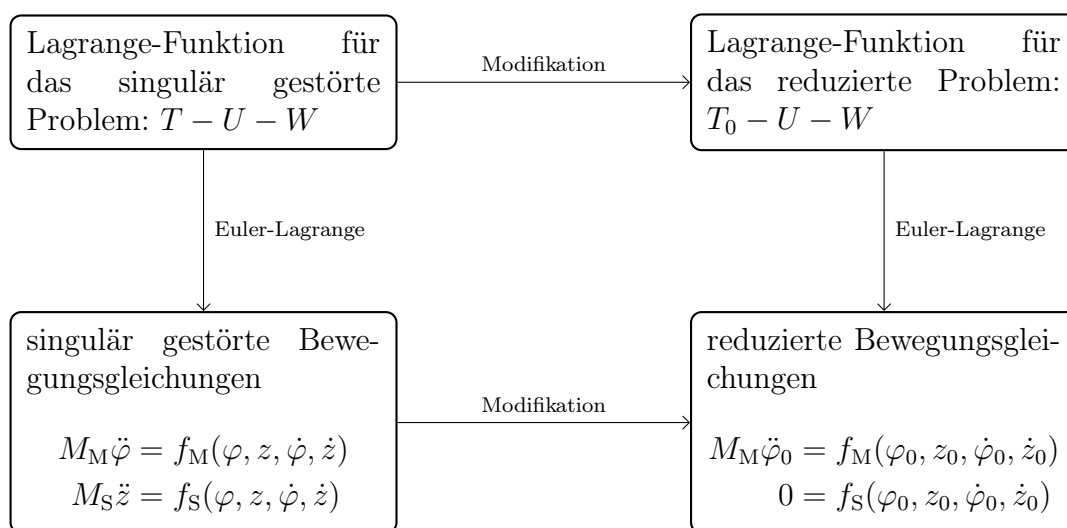


Abbildung 4.10: Vorgehen zur Reduktion der Modellgleichungen

Kapitel 5

Zusammenfassung

Das Verhalten mechanischer Systeme lässt sich gut mit Hilfe physikalischer Modelle vorhersagen. Die zunehmende Komplexität der Modelle und ihrer beschreibenden Bewegungsgleichungen stellt erhöhte Anforderungen an Simulationswerkzeuge. Im besonderen Maße verursachen hochfrequente Schwingungen häufig Schwierigkeiten bei der numerischen Integration.

Aus der Theorie der singulären Störungen ist bekannt, dass die Lösung eines Differentialgleichungssystems, für welches die Koeffizientenmatrix der höchsten Ableitung kleine Eigenwerte besitzt, unter gewissen Voraussetzungen durch die Lösung einer differential-algebraischen Gleichung approximiert werden kann. In dieser Arbeit wurden verschiedene Voraussetzungen betrachtet. Ferner wurden Probleme untersucht, für welche die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der höchsten Ableitung in mehr als zwei Größenordnungen auftreten.

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass die Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme häufig nach geeigneter Transformation die Voraussetzungen erfüllen und die quasistatische Approximation zu wesentlichen Rechenzeiterparnissen führen kann.

Anhand typischer flexibler Mehrkörpersysteme wurden geeignete Transformationen hergeleitet und an Beispielen verifiziert. Dabei sind die Voraussetzungen zur quasistatische Reduktion in gedämpften Systemen erfüllt. Weiterhin ließ sich der quasistatische Ansatz auf Modelle übertragen, die durch differential-algebraischen Gleichungen beschrieben werden.

Die Bewegung von Mehrkörpersystemen kann durch Euler-Lagrange-Gleichungen modelliert werden. Dabei setzen klassische Formalismen zum Lösen dieser Gleichungen voraus, dass die Massematrix positiv definit ist. Die reduzierten Modellgleichungen, die sich aus der quasistatischen Approximation ergeben, erfüllen diese Annahme nicht mehr. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Algorithmus vorgestellt, der die Modellierung von Mehrkörpersystemen und deren effiziente Integration auch für positiv semi-definite Massematrizen erlaubt.

Die quasistatische Reduktion ermöglicht die Benutzung einiger Integratoren, die nicht für steife Probleme optimiert sind. Somit steht eine größere Klasse von Solvern bei der Simulation physikalischer Modelle durch diesen Ansatz zur Verfügung.

Die Theorie der singulären Störung erlaubt auch die Untersuchung von bekannten Integrationsverfahren, die in der Praxis bereits gute Resultate liefern. Damit konnte der Approximationsfehler der Grenzfrequenz-Methoden analysiert werden.

Weiterer Forschungsbedarf besteht bei der Frage, ob die quasistatische Approximation auch für ungedämpfte Systeme zu brauchbaren Simulationsergebnissen führt. Außerdem bleibt offen, ob weiterhin eine Rechenzeitersparnis erzielt werden kann, wenn die Eigenwerte der Massematrix sensitiv auf Zustandsänderungen reagieren.

Die quasistatische Reduktion kann zu einem Rechenzeitgewinn führen, wenn geeignete Terme in den Modellgleichungen als singuläre Störungen identifiziert werden. Gegenwärtig geschieht die Ermittlung jener Terme durch die Analyse des jeweiligen Problems. Es bleibt offen, ob eine automatische Ermittlung möglich ist und wie viel Zeit dieser zusätzliche Schritt benötigt.

Literaturverzeichnis

- [Ar⁺11] M. Arnold, B. Burgermeister, C. Führer, G. Hippmann, G. Rill: *Numerical methods in vehicle system dynamics: state of the art and current developments*; Vehicle System Dynamics **49**:7 (2011), S. 1159–1207
- [Ar13] M. Arnold: *A recursive multibody formalism for systems with small mass and inertia terms*; Mechanical Sciences **4** (2013), S. 221–231
- [Are⁺10] W. Arendt, K. Urban: *Partielle Differenzialgleichungen*; Spektrum Akademischer Verlag (2010)
- [Asc⁺98] U. M. Ascher, L. R. Petzold: *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*; SIAM (1998)
- [Bat96] K.-J. Bathe: *Finite element procedures*; Prentice Hall (1996)
- [Bra⁺86] H. Brandl, R. Johanni, M. Otter: *A very efficient algorithm for the simulation of robots and similar multibody systems without inversion of the mass matrix*; IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Theory of Robots (1986), S. 95–100
- [Bre⁺92] H. Bremer, F. Pfeiffer: *Elastische Mehrkörpersysteme*; Teubner (1992)
- [Cha69] K. W. Chang: *Two problems in singular perturbations of differential equations*; J. Austral. Math. Soc. **10** (1969), S. 33–50
- [Cia88] P. G. Ciarlet: *Mathematical elasticity. Vol. I*; North-Holland Publishing Co. (1988)
- [Cop78] W. A. Coppel: *Dichotomies in stability theory*; Springer-Verlag (1978)
- [Cou⁺89] R. Courant, D. Hilbert: *Methods of mathematical physics. Vol. I*; Interscience Publishers (1989)
- [Eic⁺98] E. Eich-Soellner, C. Führer: *Numerical methods in multibody dynamics*; B. G. Teubner (1998)
- [Fea83] R. Featherstone: *The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias*; Internat. J. of Robotics Research **2**:1 (1983), S. 13–30
- [Gas⁺89] R. Gasch, K. Knothe: *Strukturdynamik: Kontinua und ihre Diskretisierung*; Springer (1989)
- [GdJ⁺94] J. García de Jalón, E. Bayo: *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*; Springer-Verlag (1994)
- [Gea⁺84] C. W. Gear, L. R. Petzold: *ODE methods for the solution of differential/algebraic systems*; SIAM J. Numer. Anal. **21**:4 (1984), S. 716–728

- [Gea⁺85] C. W. Gear, B. Leimkuhler, G. K. Gupta: *Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints*; J. Comput. Appl. Math. **12/13** (1985), S. 77–90
- [Gea88] C. W. Gear: *Differential-algebraic equation index transformations*; SIAM J. Sci. Statist. Comput. **9**:1 (1988), S. 39–47
- [Gol⁺96] G. H. Golub, C. F. Van Loan: *Matrix computations*; Johns Hopkins University Press (1996)
- [Gra⁺05] J. Grasman, F. Verhulst, S.-D. Shih: *The Lyapunov exponents of the van der Pol oscillator*; Math. Methods Appl. Sci. **28**:10 (2005), S. 1131–1139
- [Guy65] R. J. Guyan: *Reduction of stiffness and mass matrices*; AIAA **3** (1965), S. 380
- [Hai⁺00] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner: *Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems*; Springer-Verlag (2000)
- [Hai⁺02] E. Hairer, G. Wanner: *Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems*; Springer-Verlag (2002)
- [Ham67] G. Hamel: *Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*; Springer (1967)
- [Hin91] E. J. Hinch: *Perturbation methods*; Cambridge University Press (1991)
- [Hop66] F. C. Hoppensteadt: *Singular perturbations on the infinite interval*; Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), S. 521–535
- [Hop67] F. Hoppensteadt: *Stability in systems with parameter*; J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), S. 129–134
- [Hop69] F. Hoppensteadt: *On systems of ordinary differential equations with several parameters multiplying the derivatives*; J. Differential Equations **5** (1969), S. 106–116
- [Hop71] F. Hoppensteadt: *Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters*; Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), S. 807–840
- [Kat95] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*; Springer-Verlag (1995)
- [Kok76] P. V. Kokotović: *Singular perturbations in optimal control*; Rocky Mountain J. Math. **6**:4 (1976), S. 767–773
- [Leh07] M. Lehner: *Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen*; Shaker (2007)
- [Lei⁺91] B. Leimkuhler, L. R. Petzold, C. W. Gear: *Approximation methods for the consistent initialization of differential-algebraic equations*; SIAM J. Numer. Anal. **28**:1 (1991), S. 205–226
- [Lev⁺54] J. J. Levin, N. Levinson: *Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and an associated boundary layer equation*; J. Rational Mech. Anal. **3**:2 (1954), S. 247–270
- [Lja07] A. Ljapunoff: *Problème général de la stabilité du mouvement*; Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (2) **9** (1907), S. 203–474

- [Lub⁺92] C. Lubich, U. Nowak, U. Pöhle, C. Engstler: *MEXX - numerical software for the integration of constrained mechanical multibody systems*; Tech. Report SC 92-12, ZIB (1992)
- [Lub93] C. Lubich: *Integration of stiff mechanical systems by Runge-Kutta methods*; Z. Angew. Math. Phys. **44**:6 (1993), S. 1022–1053
- [MMi68] D. B. MacMillan: *Asymptotic methods for systems of differential equations in which some variables have very short response times*; SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), S. 704–722
- [Mas49] J. L. Massera: *On Liapounoff's conditions of stability*; Ann. of Math. (2) **50** (1949), S. 705–721
- [Mei⁺97] A. Meister, T. Sonar: *Asymptotische Entwicklung und ihre Anwendungen in technischen Problemstellungen*; unkorrigiertes Manuskript, <http://www-amna.math.uni-wuppertal.de/~ehrhardt/AsyAna/Skripte/meison.ps.gz> (1997)
- [Mik⁺91] J. R. Mika, A. Palczewski: *Asymptotic analysis of singularly perturbed systems of ordinary differential equations*; Computers & Mathematics with Applications **21**:10 (1991), S. 13–32
- [Nas10] L. Nasdala: *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*; Vieweg+Teubner (2010)
- [Nip92] K. Nipp: *Smooth attractive invariant manifolds of singularly perturbed ODE's*; Tech. Report 92-13, ETH Zürich (1992)
- [Nip⁺92] K. Nipp, D. Stoffer: *Attractive invariant manifolds for maps – existence, smoothness and continuous dependence on the map*; Tech. Report 92-11, ETH Zürich (1992)
- [OMa74] R. E. O'Malley, Jr.: *Introduction to singular perturbations*; Academic Press (1974)
- [Pet83] L. Petzold: *Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations*; SIAM J. Sci. Statist. Comput. **4**:1 (1983), S. 137–148
- [Pow11] P. D. Powell: *Calculating determinants of block matrices*; arXiv:1112.4379 (2011), S. 1–11
- [Ren⁺99] P. Rentrop, O. Scherf, B. Simeon: *Mechanical multibody systems with deformable components*; High performance scientific and engineering computing (Munich, 1998), Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Vol. 8, Springer (1999), S. 143–155
- [Rhe⁺99] W. C. Rheinboldt, B. Simeon: *Computing smooth solutions of DAEs for elastic multibody systems*; Comput. Math. Appl. **37**:6 (1999), S. 69–83
- [Rul⁺04] A. Eichberger, W. Rulka: *Process save reduction by macro joint approach: The key to real time and efficient vehicle simulation*; Vehicle System Dynamics **41**:5 (2004), S. 401–413

- [Scn03] R. Schönen: *Strukturdynamische Mehrkörpersimulation des Verbrennungsmotors mit elastohydrodynamischer Grundlagerkopplung*; Kassel Univ. Press (2003)
- [Sha⁺79] L. F. Shampine, C. W. Gear: *A user's view of solving stiff ordinary differential equations*; SIAM Rev. **21**:1 (1979), S. 1–17
- [Sha⁺97] L. F. Shampine, M. W. Reichelt: *The MATLAB ODE suite*; SIAM J. Sci. Comput. **18**:1 (1997), S. 1–22
- [Shb05] A. A. Shabana: *Dynamics of multibody systems*; Cambridge University Press (2005)
- [Sic⁺88] B. Siciliano, W. J. Book: *A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators*; I. J. Robotic Res. (1988), S. 79–90
- [Sim00] B. Simeon: *Numerische Simulation gekoppelter Systeme von partiellen und differential-algebraischen Gleichungen in der Mehrkörperdynamik*; VDI-Verlag (2000)
- [Sim13] B. Simeon: *Computational flexible multibody dynamics. A differential-algebraic approach*; Springer (2013)
- [Sim96] B. Simeon: *Modelling a flexible slider crank mechanism by a mixed system of DAEs and PDEs*; Mathematical Modelling of Systems **2**:1 (1996), S. 1–18
- [Sod06] G. Söderlind: *The logarithmic norm. history and modern theory*; BIT Numerical Mathematics **46**:3 (2006), S. 631–652
- [Son98] E. D. Sontag: *Mathematical control theory*; Springer-Verlag (1998)
- [Ste⁺90] G. W. Stewart, J. G. Sun: *Matrix perturbation theory*; Academic Press Inc. (1990)
- [Str⁺12] K. Strehmel, R. Weiner, H. Podhaisky: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*; Vieweg+Teubner Verlag (2012)
- [Str⁺92] K. Strehmel, R. Weiner: *Linear-implizite Runge-Kutta-Methoden und ihre Anwendung*; B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH (1992)
- [Stu04] T. Stumpp: *Integration stark gedämpfter mechanischer Systeme mit Runge-Kutta-Verfahren*; Diss., Universität Tübingen (2004)
- [Tho06] V. Thomée: *Galerkin finite element methods for parabolic problems*; Springer-Verlag (2006)
- [Tik52] A. N. Tikhonov: *Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives*; Mat. Sb. **31**:3 (1952), S. 575–586
- [Val08] M. Valášek: *Mobot contact benchmark for efficient multibody system time integration*; Bulletin of Applied Mechanics **4**:15 (2008), S. 102–104
- [Van64] M. Van Dyke: *Perturbation methods in fluid mechanics*; Academic Press (1964)
- [Vas62] A. B. Vasil'eva: *Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations with small parameters multiplying the highest derivatives*; Uspehi Mat. Nauk **17**:4 (1962), S. 225–231

- [Vas63] A. B. Vasil'eva: *Asymptotic behaviour of solutions of certain problems for ordinary non-linear differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives*; Uspehi Mat. Nauk **18**:3 (111) (1963), S. 15–86
- [Wal00] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*; Springer-Verlag (2000)
- [Was63] W. Wasow: *Singular perturbation problems of systems of two ordinary analytic differential equations*; Arch. Rational Mech. Anal. **14**:1 (1963), S. 61–80
- [Web⁺10] S. Weber, M. Arnold: *Model reduction via quasistatic approximations*; PAMM **10**:1 (2010), S. 655–656
- [Web⁺12] S. Weber, M. Arnold, M. Valášek: *Quasistatic approximations for stiff second order differential equations*; Appl. Numer. Math. **62**:10 (2012), S. 1579–1590
- [Web⁺13] S. Weber, M. Arnold: *Semi-analytical methods for singularly perturbed multi-body system models*; J. Comput. Appl. Math., accepted for publication (2013)
- [Yan94] X. Yan: *Singularly perturbed differential/algebraic equations*; Tech. report, Institute of Computational Mathematics and Applications, University of Pittsburgh (1994)

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Institut für Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Martin Arnold bedanken, der den Weg zu dieser Arbeit ermöglicht hat. Ebenso gilt mein Dank Prof. Dr. Michael Valášek für die Zusammenarbeit im DFG-Projekt „Quasi-statische Lösungsverfahren zur numerischen Behandlung flexibler Mehrkörpersysteme“.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am Institut danke ich für das freundliche und angenehme Arbeitsklima. Insbesondere Helmut Podhaisky, Markus Arthur Köbis und Robert Fiedler möchte ich für die anregenden Diskussionen danken.

Mein herzlicher Dank gilt auch meinen Eltern für die Unterstützung während der Anfertigung.

Lebenslauf

Dipl.-Math. Steffen Weber

Adresse: Basedowstr. 15
06217 Merseburg

Geboren: 13. Juni 1982 in Merseburg

1989–1993 Grundschule Schkopau

1993–1997 Domgymnasium Merseburg

1997–2002 Georg-Cantor-Gymnasium Halle, Abschluss: Abitur (1,5)

2002–2007 Diplom-Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

2007 Diplomarbeit „Nichtkommutativgraphen ausgewählter einfacher Gruppen“

Abschluss: Mathematik-Diplom (sehr gut)

2007–2010 Mitarbeiter an der Martin-Luther-Universität im DFG-Projekt „Quasistatische Lösungsverfahren zur numerischen Behandlung flexibler Mehrkörpersysteme“

2010–2013 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Martin-Luther-Universität

seit 2013 Mathematischer Entwickler bei Analytic Company GmbH

Publikationsliste

- [1] S. Weber, M. Arnold: *Model reduction via quasistatic approximations*; PAMM **10**:1 (2010), S. 655–656
- [2] M. Arnold, B. Burgermeister, S. Weber: *Improved time integration of multibody system models using methods from singular perturbation theory*, in Proc. of The 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, Lappeenranta, Finland, May 25–27 (2010)
- [3] S. Weber, M. Arnold: *Methods from singular perturbation theory applied to flexible multibody systems*; in Proc. of Multibody Dynamics: ECCOMAS Thematic Conference, Brussels, Belgium, July 4–7 (2011)
- [4] S. Weber, M. Arnold, M. Valášek: *Quasistatic approximations for stiff second order differential equations*; Appl. Numer. Math. **62**:10 (2012), S. 1579–1590
- [5] S. Weber, M. Arnold: *Semi-analytical methods for singularly perturbed multibody system models*; J. Comput. Appl. Math., in press (2014)

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe, sowie andere als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt habe. Die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Merseburg, den 03.01.2014

Steffen Weber