Institut für Mathematik
der Naturwissenschaftlichen Fakultät III
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Thema

Gruppen lokaler Charakteristik:
Eine Kennzeichnung von Gruppen vom Lie Typ in ungerader Charakteristik

---

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium

Vorgelegt von

Diplom Mathematiker Andreas Seidel
geb. am 16.11.1980 in Staßfurt

Gutachter: Prof. Dr. Barbara Baumeister

Prof. Dr. Gernot Stroth

Verteidigung am: 6. November 2009

Halle/Saale, 18. August 2009

Für

Judith

und

Linnea

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einfache Gruppen und lokale Charakteristik

Es seien stets G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.

Für G gibt es immer eine Reihe der Form

$$1 = G_1 < G_2 < ... < G_{n-1} < G_n = G$$

mit $G_i \trianglelefteq G$ für $i = 1, ..., n$, so dass G_{i+1}/G_i elementar abelsch oder einfach ist. Einfache Gruppen sind also so etwas wie die kleinsten Bausteine einer Gruppe, weswegen man daran interessiert ist, möglichst viele von ihnen zu kennen.

Nun wurden alle endlichen einfachen Gruppen klassifiziert. Dazu definieren wir:

Definition 1.1. *Wir nennen G eine $\mathcal{K}$-Gruppe, falls G eine bekannte einfache Gruppe ist, d.h. eine Gruppe vom Lie-Typ, eine alternierende Gruppe, eine der* 26 *sporadischen Gruppen oder eine abelsche Gruppe von Primzahlordnung.*

Satz 1.2 (Klassifikationssatz)**.** *Die endlichen einfachen Gruppen sind genau die $\mathcal{K}$-Gruppen.*

Diese Arbeit ist Teil des Projektes zur Klassifikation aller Gruppen mit lokaler Charakteristik p. Dazu benötigen wir zunächst einige Grundlegende Definitionen.

Mit $O_p(G)$ bezeichnen wir den eindeutig bestimmten maximalen p-Normalteiler von G, auch p-Radikal genannt. Eine p-lokale Untergruppe von G ist der Normalisator einer nichttrivialen p-Untergruppe von G.

Ist $\mathcal{T}$ eine Menge von Untergruppen von G, und H eine weitere Untergruppe von G, so setze

$$\mathcal{T}_H = \{X \in \mathcal{T} | T \leq H\} \qquad \mathcal{T}(H) = \{X \in \mathcal{T} | H \leq X\}.$$

Setze
$$\mathcal{L} = \{X \leq G | \mathbb{C}_G(O_p(X)) \leq O_p(X) \text{ und } O_p(X) \neq 1\}$$
und
$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{L} | X \text{ maximal bezüglich Inklusion}\}.$$

$P \leq X$ ist eine parabolische (Untergruppe) von X, falls $O_p(X) \neq 1$ ist und P eine Sylow p-Untergruppe von X enthält. Ist $X = G$, so sagen wir, P ist eine parabolische.

Die folgende Definition ist eine Eigenschaft vieler einfacher Gruppen:

Definition 1.3. *Wir sagen, G hat Charakteristik p, falls*
$$\mathbb{C}_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$$
ist. Das ist äquivalent zu $F^*(G) = O_p(G)$. G hat lokale Charakteristik p, falls alle p-lokalen in $\mathcal{L}$ sind. G hat parabolische Charakteristik p, falls alle parabolischen Untergruppen in $\mathcal{L}(S)$ sind

Die Klassifiktion der endlichen einfachen Gruppen liefert wie gesehen die $\mathcal{K}$-Gruppen. Dafür gibt es momentan zwei - mehr oder weniger komplizierte - Beweise. Wie sich herausstellt, haben die meisten einfachen Gruppen lokale Charakteristik p für eine gewisse Primzahl p, z.B. alle Gruppen vom Lie Typ über einem Körper der Charakteristik p oder die alternierende Gruppe A_p. Aber auch einige der sporadischen Gruppen finden wir hier wieder, wie z.B. McL für $p = 3$, Ly für $p = 5$, $O'N$ für $p = 7$ und J_4, M_{24} und Th, für $p = 2$. Deshalb eröffnet das Untersuchen von Gruppen mit lokaler Charakteristik p einen neuen Einstieg in die Klassifikation, um sie nach Möglichkeit zu Vereinfachen, wie z.B. durch Alternativen zur Klassifikation der quasi-dünnen Gruppen. Für weitere Details zu diesem Projekt vgl. [mss3] und [ms1].

Da diese Arbeit im Zusammenhang mit einem 3.-Generationen-Beweis für die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen steht, werden wir später voraussetzen, dass wir gewisse Untergruppen der Gruppe G relativ gut kennen. Genauer wird G folgender Eigenschaft genügen:

Definition 1.4. *Wir nennen G eine $\mathcal{K}_p$-Gruppe, falls jede einfache Gruppe, die in einer p-lokalen Untergruppe von G involviert ist, eine $\mathcal{K}$-Gruppe ist.*

1.1 Die Struktursätze

Sei G eine $\mathcal{K}_p$-Gruppe in lokaler Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$. Die Struktur von G soll in mehreren Schritten analysiert werden:

(i) **Moduln:** Ist M eine p-lokale Untergruppe von G, so operiert M auf den Hauptfaktoren von $O_p(M)$, also elementar abelschen Gruppen. Dies sind dann Moduln für M, weswegen zunächst die Wechselbeziehungen zwischen Moduln und Gruppen untersucht werden.

(ii) **Lokale Analyse** Hier wird versucht, die wesentliche Struktur der p-lokalen Untergruppen zu ermitteln.

(iii) **Globale Analyse** Die Gruppe G wird mit Hilfe ihrer p-lokalen Untergruppen bis auf Isomorphie bestimmt.

Wir betrachten zunächst die p-lokale Untergruppe M von G. Dann kann man M eine eindeutig bestimmte, charakteristische Untergruppe zuordnen:

Definition 1.5. *[mss1] Sei $M \in \mathcal{L}(S)$. Eine p-reduzierte Untergruppe von M ist eine elementar abelsche, normale p-Untergruppe Y von M mit $O_p(M/\mathbb{C}_M(Y)) = 1$.*

Lemma 1.6. *[mss1] Seien L, $M \in \mathcal{L}(S)$, $L \leq M$. Setze $C_M = \mathbb{C}_M(Y_M)$ und $N_M = \mathbb{N}_M(S \cap C_M)$.*

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte, maximale p-reduzierte, normale Untergruppe von M, die wir mit Y_M bezeichnen.

(b) Ist X eine p-reduzierte Untergruppe von L, dann ist $\langle X^M \rangle$ eine p-reduzierte Untergruppe von M.

(c) $Y_L \leq Y_M$.

(d) Es gelten $S \cap C_M = O_p(N_M)$ und $Y_M = \Omega_1(Z(S \cap \mathbb{C}_M(Y_M)))$.

(e) $M = N_M C_M$ und $Y_{N_M} = Y_M$.

Beweis: (a) Sei Y_M die Untergruppe, die von allen p-reduzierten Normalteilern erzeugt wird. Wäre $O_p(M/\mathbb{C}_M(Y_M))$ nichttrivial, so gilt das auch für alle Erzeuger von Y_M, Widerspruch.

(b) Sei $Y = \langle X^M \rangle$ und $D = \mathbb{C}_M(Y)$. Setze $N/D = O_p(M/D)$. Dann ist $N = (N \cap S)D = (N \cap L)D$. Da X für L p-reduziert ist, folgt $[X, N \cap L] = 1$. Weiter ist $[D, X] = 1$, also auch $[N, X] = 1$. Da N normal in M ist, ist $[N, Y] = 1$. Also ist Y p-reduziert für M.

(c) Folgt aus (b) mit $X = Y_L$.

(d) Da $O_p(M/C_M) = 1$ ist, haben wir $O_p(N_M) \leq C_M$. Also haben wir $O_p(N_M) \leq S \cap C_M$ und damit $O_p(N_M) = S \cap C_M$. Setze $X = \Omega_1(Z(S \cap C_M))$. Dann ist $Y_M \leq X$. Setze $Y = \langle X^M \rangle$. Dann ist $Y = \langle X^{C_M} \rangle$, da $M = N_M C_M$ mit dem Frattini-Argument gilt. Nun ist X p-reduziert für $S \cap C_M$, also ist Y p-reduziert für C_M. Setze $D = \mathbb{C}_M(Y)$ und $N/D = O_p(M/D)$. Da $Y_M \leq X \leq Y$ gilt und Y_M p-reduziert für M ist, erhalten wir $N \leq C_M$. Da Y p-reduziert für C_M ist, erhalten wir $[N, C_M] = 1$. Somit ist Y p-reduziert für M, und damit $Y \leq Y_M \leq X$, d.h. $X = Y_M$.

(e) Die erste Aussage ist das Frattini-Argument. Also ist $Y_M \leq Y_{N_M}$. Mit (c) folgt $Y_{N_M} \leq Y_M$. □

Die nächste Definition gibt ein Maß für die Größe von G an, betrachtet man parabolische Untergruppen. Insbesondere werden uns im letzten Kapitel kleine parabolische Untergruppen interessieren.

Definition 1.7. *Eine Untergruppe $P \in \mathcal{L}(S)$ heißt minimal parabolische, falls S in einer eindeutig bestimmten maximalen Untergruppe von P enthalten ist, aber $S \ntrianglelefteq P$ gilt.*

Der Rang von G ist die minimale Mächtigkeit einer Menge Σ von minimal parabolischen mit $O_p(\langle \Sigma \rangle) = 1$ (gibt es keine solche ist der Rang von G gleich 1).

Um starke Aussagen über die p-lokale Struktur von G zu treffen, sind wir auf die Existenz einer geeigneten Untergruppe von G angewiesen:

Definition 1.8. *Eine nichttriviale p-Untergruppe $\widetilde{Q} \leq G$ ist groß, falls $\mathbb{C}_G(\widetilde{Q}) \leq \widetilde{Q}$ ist, und es gilt*

$$\mathbb{N}_G(A) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) \text{ für alle } 1 \neq A \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q}).$$

Wie wir noch sehen werden, ist eine beträchtlicher Teil jeder parabolischen Untergruppe bereits in $\mathbb{N}_G(\widetilde{Q})$, für eine große Untergruppe $\widetilde{Q}$ von G.

Wir interessieren uns für die Struktur einer Gruppe $M \in \mathcal{M}(S)$. Zunächst einige Bezeichnungen. Setze

$$M^0 = \left\langle \widetilde{Q}^g | g \in G, \widetilde{Q}^g \leq M \right\rangle.$$

Weiter gibt es (vgl. [mss1]) eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(S)$, so dass

(i) für alle $L \in \mathcal{L}(S)$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $L = (L \cap F)\mathbb{C}_L(Y_L)$ und $Y_L \leq Y_F$, und

(ii) $\mathcal{M}(L) = \{F\}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und für alle $L \in \mathcal{L}(S)$ mit $F = L\mathbb{C}_F(Y_F)$.

(i) sagt, will man die Struktur jeder parabolischen Untergruppe bestimmen, so genügt es, die Struktur der parabolischen aus $\mathcal{F}$ zu bestimmen. Mit (ii) kann man statt $M^\dagger$ eine kleinere, transparentere Untergruppe betrachten, ohne $M^\dagger$ aus den Augen zu verlieren.

Wir nehmen an, dass G eine große Untergruppe $\widetilde{Q}$ besitzt. In [mss1] wird gezeigt, dass dann entweder $\mathcal{M}(S) = \{\mathbb{N}_G(\widetilde{Q})\}$ gilt, oder $|\mathcal{F}| \geq 2$ und $\widetilde{Q}$ ist in höchstens einem Element von $\mathcal{F}$ normal. Der Struktursatz beschäftigt sich mit dem zweiten Fall. Es werden die Struktur von $M^\dagger/\mathbb{C}_{M^\dagger}(Y_{M^\dagger})$ und der $GF(p)$ $M^\dagger$-Modul $Y_{M^\dagger}$ bestimmt für alle $M^\dagger \in \mathcal{F}$ mit $\widetilde{Q} \ntrianglelefteq M^\dagger$.

Satz 1.9 (Struktursatz). *[mss1] Sei G eine endliche $\mathcal{K}_p$-Gruppe von lokaler Charakteristik p, $S \in Syl_p(G)$ und $|\mathcal{M}(S)| > 1$. Es gebe weiter eine große Untergruppe $\widetilde{Q}$ von G. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{L}(S)$ derart, dass*

(i) $\mathcal{M}(M) = \{M^\dagger\}$, $Y_M = Y_{M^\dagger}$, $M^\dagger = M\mathbb{C}_{M^\dagger}(Y_M)$,

(ii) $\mathbb{C}_M(Y_M)$ *hat eine normale Sylow p-Untergruppe und* $\mathbb{C}_M(Y_M)/O_p(M) \leq \phi(M/O_p(M))$,

(iii) $\widetilde{Q} \ntrianglelefteq M$.

Darüberhinaus gilt für alle $M \in \mathcal{L}(S)$, die (i)-(ii) erfüllen eines der Folgenden, wobei $V = [Y_M, M_0]$, $\overline{M}^\dagger = M^\dagger/\mathbb{C}_{M^\dagger}(Y_M)$ und $M_0 = M^{\dagger\circ}\mathbb{C}_S(Y_M)$:

(1) **Der generische Fall**

- *(a)* $\overline{M_0} \cong SL_n(p^f)$, $n \geq 3$, $Sp_{2n}(p^f)$, $n \geq 2$, *oder* $Sp_4(2)'$ *(und $p = 2$),*
- *(b)* *V ist der natürliche Modul für $\overline{M_0}$,*
- *(c)* *falls $V \neq [Y_M, M_0]$, so $p = 2$, und entweder $\overline{M_0} \cong SL_3(2)$ und $|Y_M/V| = 2$, oder $\overline{M_0} \cong SL_2(p^f)$, $Sp_{2n}(p^f)$ oder $Sp_4(2)'$ und $|Y_M/V| \leq p^f$ oder 2 entsprechend.*
- *(d)* *Ist $\overline{M_0} \cong Sp_{2n}(p^f)$, $n \geq 2$, und $Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$, dann ist $p = 2$.*

(2) **Der direktes Produkt Fall**
$P := M_0S$ ist eine minimal parabolische, $Y_P = Y_M$, und es gibt eine eindeutig bestimmte und normale Untergruppe P^* von P, die $O_p(P)$ enthält, so dass:

- *(a)* $\overline{P^*} = K_1 \times \cdots \times K_r$, $K_i \cong SL_2(p^f)$, $Y_M = V_1 \times \cdots \times V_r$, *wobei die $V_i = [Y_M, K_i]$ natürliche K_i-Moduln sind,*
- *(b)* *$\widetilde{Q}$ permutiert die Untergruppen K_i transitiv,*
- *(c)* *$O^p(P) = O^p(P^*) = O^p(M_0)$, und $P^*\mathbb{C}_M(Y_P)$ ist normal in M.*
- *(d)* *Eines der Folgenden gilt:*
  - *(i)* $\mathbb{C}_{M_0}(Y_P) = O_p(M_0)$.
  - *(ii)* *$p = 2$, $r > 1$, $K_i \cong SL_2(2)$, und $\mathbb{C}_{M_0}(Y_P)/O_2(M_0) = Z(M_0/O_2(M_0))$ ist eine 3-Gruppe.*

(3) **Der singuläre Fall**

- *(a)* *$\overline{M_0} \cong SL_3(2)$ und V ist ein natürlicher $SL_3(2)$-Modul,*
- *(b)* *$|Y_M| = 2^4$, $V \leq O_2(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$ und $Y_M \nleq O_2(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$.*

(4) **Der orthogonale Fall**

- *(a)* *$\overline{M_0} \cong \Omega_n^\pm(p^f)$, $n \geq 3$, wobei p ungerade ist, falls n ungerade ist,* *(b)* Y_M *ist der natürliche Modul für* $\overline{M_0}$*,*

(c) $Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$.

(5) **Der Tensorprodukt Fall**
Es gibt Untergruppen $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ *von* $\overline{M}$*, so dass*

(a) $\overline{K}_i \cong SL_{m_i}(p^f)$, $m_i \geq 2$, $[\overline{K}_1, \overline{K}_2] = 1$, *und* $\overline{K}_1\overline{K}_2 \trianglelefteq \overline{M}$,

(b) Y_M *ist das Tensorprodukt über* $GF(p^f)$ *der entsprechenden natürlichen Moduln für* $\overline{K}_1$ *und* $\overline{K}_2$*,*

(c) $Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$,

(d) $\overline{M} = \overline{M}^0 \cong SL_2(2) \wr \mathbb{Z}_2$, *oder* $\overline{M^0}$ *ist eine der Gruppen* $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ *oder* $\overline{K_1K_2}$.

(6) **Der nicht-natürliche** $SL_n(p^f)$**-Fall**
$\overline{M_0} \cong SL_n(p^f)$, $Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$ *und es gilt eines der Folgenden:*

(a) $\overline{M}_0 \cong SL_n(p^f) \,/\, \langle(-\mathrm{id})^{n-1}\rangle$, $n \geq 5$, *und* Y_M *ist das äußere Quadrat des natürlichen* $SL_n(p^f)$*-Moduls.*

(b) $\overline{M}_0 \cong SL_n(p^f) \,/\, \langle(-\mathrm{id})^{n-1}\rangle$, $n \geq 3$, *und* Y_M *ist das symmetrische Quadrat des natürlichen Moduls.*

(c) $\overline{M}_0 \cong SL_n(p^f) \,/\, \left\langle \lambda\mathrm{id} | \lambda \in GF(p^f), \lambda^n = \lambda^{p^{f/2}+1} = 1 \right\rangle$, $n \geq 3$, *und* Y_M *ist isomorph zu einem einfachen Untermodul von* $W \otimes_{GF(p^f)} W^{p^f}$*, wobei* W *ein natürlicher* $SL_n(p^f)$*- Modul ist.*

(7) **Der Ausnahmefall**
$Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$ *und es gilt eines der Folgenden:*

(a) $\overline{M}_0 \cong \mathrm{Spin}_{10}^+(p^f)$, *und* Y_M *ist ein Halb-Spin-Modul.*

(b) $\overline{M}_0 \cong E_6(p^f)$ *und* Y_M *ist bis auf Isomorphie einer von zwei einfachen* $GF(p^f)$*Moduln der Ordnung* $(p^f)^{27}$.

(8) **Der sporadische Fall**
$Y_M \nleq O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$ *und es gilt eines der Folgenden:*

(a) $\overline{M} \cong 3.\Sigma_6$ *oder* $3.A_6$ *und* Y_M *ist einfach von der Ordnung* 2^6.

(b) $p = 2$, $\overline{M}_0 \cong M_{22}$ *und* Y_M *ist der einfache Golay-Code Modul der Ordnung* 2^{10}.

(c) $p = 2$, $\overline{M}_0 \cong M_{24}$ *und* Y_M *ist der einfache Todd- oder Golay-Code Modul der Ordnung* 2^{11}

(d) $p = 3$, $\overline{M}_0 \cong M_{11}$ *und* Y_M *ist der einfache Golay-Code Modul der Ordnung* 3^5.

Natürlich ist es zunächst möglich, dass $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$ ist, aber $[Y_M, M] \leq \widetilde{Q}$. Dann gilt aber:

Satz 1.10. *[ms2] Mit den Voraussetzungen aus (1.9) gilt: Ist $M \in \mathcal{L}(S)$, so dass $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$ aber $[Y_M, M] \leq \widetilde{Q}$ sind, so ist $G \cong \mathrm{Aut}(G_2(3))$.*

Damit wollen wir ab jetzt immer annehmen, dass, wenn $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$ ist, auch $[Y_M, M] \not\leq \widetilde{Q}$ ist für ein $M \in \mathcal{L}(S)$.

Der Struktursatz ist ein Bestandteil der lokalen Analyse der Gruppe G von lokaler Charakteristik p. Mit den darin gewonnenen Informationen möchte man die Gruppe G bestimmen.

Dazu bestimmt man zunächst mit Hilfe einer geeigneten parabolischen M und einer Untergruppe von $\mathbb{N}_G(\widetilde{Q})$ eine (einfache) Untergruppe H von G. Darüber gibt der H-Struktursatz eine Auskunft. Im Wesentlichen gilt:

Satz 1.11 (H-Struktursatz, [ms1])**.** *Seien G eine endliche $\mathcal{K}_p$-Gruppe in parabolischer Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$. Seien $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $\widetilde{Q} \leq S \leq M \leq G$. Angenommen es gelten:*

(i) $\widetilde{Q}$ ist eine große Untergruppe von G und $\widetilde{Q} = O_p(\mathbb{N}_G(\widetilde{Q}))$. Setze $\widetilde{C} = \mathbb{N}_G(\widetilde{Q})$.

(ii) M und $\widetilde{C}$ sind keine minimal parabolischen.

(iii) $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$.

Dann gilt entweder

(1.) Es gibt eine Untergruppe D von $\mathbb{N}_G(\widetilde{Q})$, $M_0 \not\geq D \geq M_0 \cap \widetilde{C}$, mit $\langle M_0, D\rangle = H$, so dass $F^*(H)$ eine Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik P und Rang mindestens 3 ist, oder

(2.) einige sporadische Fälle für $p = 2$ oder 3.

Bis auf einige (überschaubare) Ausnahmefälle können wir also immer eine Gruppe vom Lie Typ in der Gruppe G konstruieren.

Am Ende möchte man nun mit Hilfe von H die Gruppe G klassifizieren. In der Regel gilt $H = G$, aber es gibt auch Ausnahmen, wie wir später sehen werden. Um schlussendlich G zu bestimmen, ist man auf noch weitere Methoden angewiesen, die wir im nächsten Abschnitt kurz vorstellen wollen.

1.2 Stark p-eingebettete Untergruppen

Der Struktursatz bestimmt die p-lokalen Untergruppen von G. Der H-Struktursatz konstruiert daraus generisch eine Untergruppe H, so dass $F^*(H)$ eine Gruppe vom

Lie Typ ist. Es gibt zunächst keinen Grund, weswegen nicht $H < G$ gelten sollte. Eine zentrale Rolle zur Klassifikation von G spielen dabei stark p-eingebettete Untergruppen:

Definition 1.12. *Sei $H < G$ und $S \in Syl_p(G)$. Ist $p \mid |H|$ und $\langle \mathbb{N}_G(X) | X \leq S \rangle \leq H$, so nennen wir H eine stark p-eingebettete Untergruppe von G.*

In [ps] wurde untersucht, wann H stark p-eingebettet in G sein kann, wenn $F^*(H)$ eine Gruppe vom Lie Typ ist.

Satz 1.13. *Sei p eine ungerade Primzahl und H eine stark p-eingebettet Untergruppe von G. Dann ist $F^*(H)$ keine Gruppe vom Lie Typ über einem Körper der Charakteristik p und Rang mindestens 3.*

Ist es also möglich, zu zeigen, dass die Gruppe H aus (1.11), mit $F^*(H)$ einer Gruppe vom Lie Typ über einem Körper der Charakteristik p und Rang mindestens 3, stark p-eingebettet in G ist, so folgt bereits $H = G$!

Nun ist es zunächst sehr aufwändig, $\mathbb{N}_G(X)$ zu bestimmen für alle $1 \neq X \leq S$. Mit dem Ergebnis aus [sast] genügt es aber, nur solche X zu betrachten, die normal in S sind:

Satz 1.14. *[sast] Angenommen es gelten:*

(a) Sei $H \leq G$, so dass $F^*(H) = G(p^e)$ eine Gruppe vom Lie Typ und Rang mindestens zwei ist, bzw. Rang mindestens drei, falls p ungerade ist.

(b) Die Gruppe G ist von lokaler Charakteristik p.

(c) Ist $S \in \mathrm{Syl}_p(H)$ und $1 \neq X \trianglelefteq S$, so ist $\mathbb{N}_G(X) \leq H$.

Dann ist H stark p-eingebettet in G.

Können wir also die Bedingung (c) für die Gruppe $H \leq G$ aus (1.11) nachweisen - oder äquivalent dazu $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$ - so folgt $H = G$ für alle Gruppen aus (a)!

1.3 Setup und Hauptsatz

Setze im weiteren Verlauf der Arbeit $\overline{X} := X/Z(X)$ für eine Gruppe X.

In der Gruppe G von lokaler Charakteristik p konnten wir mit Hilfe einer geeigneten parabolischen die Untergruppe H konstruieren. In dieser Arbeit wollen wir die Lücke zwischen (1.11) und (1.13) schließen. Zur Erinnerung:

$$M^0 = \left\langle \widetilde{Q}^g | \widetilde{Q}^g \leq M, g \in G \right\rangle, M_0 = M^0 S.$$

Wir betrachten folgende Situation:

Setup 1.15.

(i) *Seien G eine $\mathcal{K}_p$-Gruppe mit lokaler Charakteristik p und $O_p(G) = 1$. Seien $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $\widetilde{C} \leq \mathcal{M}(S)$ mit $\widetilde{Q} = O_p(\widetilde{C})$ eine große Untergruppe von G. Sei $M \in \mathcal{M}(S)$ mit $[Y_M, M] \not\leq \widetilde{Q}$.*

(ii) *Sei $K \leq H \leq G$ mit $M_0 \leq H$, so dass $H = \mathbb{N}_G(K)$ ist, und $K = F^*(H)$ ist eine einfache Gruppe vom Lie Typ in ungerader Charakteristik p definiert über dem Körper $GF(p^e)$ mit Lie-Rang mindestens 2. Setze $Q = O_p(\mathbb{N}_H(Z(S \cap K)))$ und L ein Levikomplement in $\mathbb{N}_H(Z(S \cap K))$.*

(iii) *Es sei $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar.*

(i) sind die generalen Voraussetzungen rund um das Projekt über Gruppen mit lokaler Charakteristik und den Struktursatz (1.9). (ii) spiegelt das generische Ergebnis des H-Struktursatzes (1.11) wieder. Zur Definition und Eigenschaften von Q und L verweise ich auf das nächste Kapitel im Abschnitt über Gruppen vom Lie Typ. Wir werden die Bezeichnungen häufig brauchen, weswegen wir die Gruppen bereits hier eingeführt haben. (iii) ist eine technische Voraussetzung, dazu gleich mehr.

Die Struktur von M ist durch (1.9) bekannt. Insbesondere ist $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$. H ist die in (1.11) konstruierte Untergruppe, allerdings hat H dort den Rang mindestens 3, während wir auch Rang 2 Gruppen untersuchen werden.

K und (1.9) legen die Möglichkeiten für M fest, während die Bedingung an $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar zu sein die Auswahl für K beschränkt - jedoch nicht sehr, wie wir sehen werden. Eine genaue Auflistung aller Kombinationen für M und K werden wir im 3. Kapitel angeben.

Wie man sieht ist $S \leq M_0 \leq H$, d.h. H enthält eine Sylow p-Untegruppe von G. Bis auf eine Ausnahme wird sich $\widetilde{C} = \mathbb{N}_G(Z(S \cap K))$ herausstellen.

Insgesamt werden wir mit unseren Voraussetzungen zeigen:

Hauptsatz. *Es gelte (1.15). Dann ist $\langle \mathcal{L}(S) \rangle = H$.*

Um den Hauptsatz zu zeigen sind wir nur an den Stellen auf lokale Charakteristik angewiesen, an denen wir den Struktursatz (1.9) verwenden, darüberhinaus genügt uns parabolische Charakteristik!

Wir haben nun genau die Voraussetzungen um (1.13) und (1.14) anwenden zu können. Damit erhalten wir sofort als Korollar:

Korollar 1.16. *Es gelte (1.15) und der Rang von H sei mindestens drei. Dann ist $H = G$.*

Die Voraussetzung an $\widetilde{C} \cap H$, nicht auflösbar zu sein, ist nicht nur für die Wahl von K entscheidend: Es gibt keine Beispiele für $H < G$, falls $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist.

Es gibt zahlreiche Beispiele für $H < G$, falls $\widetilde{C} \cap H$ auflösbar ist:

H	$\widetilde{C} \cap H$	G	$\widetilde{C}$
$L_4(3).2$	$3^{1+4}(2S_4 \times 2)$	$F_4(2)$	$3(3^2Q_8 \times 3^2Q_8)S_3$
$U_4(3)$ $U_4(3) : D_8$	$3^{1+4} : 2S_4$	McL $\leq Co_2$	$3^{1+4}2S_5$ $\leq 3^{1+4} : 2^{1+4}S_5$
$\Omega_7(3)$	$3^{1+6} : (2A_4 \times A_4)2$	Fi_{22} $\leq {}^2E_6(2)$	$3^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2$ $\leq 3^{1+6} : 2^{3+6}(S_3 \times 3)$
$\Omega_8^+(3).S_3$	$3^{1+8} : 2(A_4 \times A_4 \times A_4).2S_3$	Fi_{23}	$3^{1+8}.2^{1+6}.3^{1+2}.2S_4$

Die Gruppe $\widetilde{C} \cap H$ ist im Fall der Auflösbarkeit auf viele verschiedene Arten erweiterbar; oftmals sind mehrere Schritte möglich, was eine Klassifizierung der Ausnahmen erschwert. Dazu kommt ein Charakteristikwechsel. Hier sind also andere Techniken notwendig. Das macht eine Unterteilung in die Fälle $\widetilde{C} \cap H$ auflösbar bzw nicht auflösbar sinnvoll.

Im Beweis werden wir als erstes $\widetilde{Q}$ bestimmen. Das liefert uns $\widetilde{C} \cap H = \mathbb{N}_H(\widetilde{Q})$. Damit können wir die Möglichkeiten für K angeben. Als nächsten großen Schritt werden wir $\widetilde{C}$ bestimmen und dazu $\widetilde{C} \leq H$ zeigen. Dabei wird quadratische Operation (mehr dazu im nächsten kapitel) eine zentrale Rolle spielen. Haben wir $\widetilde{C}$ bestimmt, so werden wir zeigen, dass jede minimal parabolische, die nicht in $\widetilde{C}$ enthalten ist, bereits in H liegt. Also liegt jede parabolische in H, d.h. es gilt der Hauptsatz.

Kapitel 2

Vorbetrachtungen

2.1 Moduln und Operation

Wie anfangs erwähnt, spielen Moduln eine wichtige Rolle.

Das Lemma von Schur wird uns in den folgenden Kapiteln die Anzahl und Größe der Komponenten von $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$ minimieren. $Q/Z(Q)$ wird meistens ein irreduzibler L-Modul sein, was die Struktur stark einschränken wird.

Lemma 2.1. *[gls1, 9.4.] Sei X eine Gruppe und $Y \leq X$. Sei V ein treuer Modul für X über dem Körper F und $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ mit V_i absolut irreduzible FY-Untermoduln. Dann ist $\mathbb{C}_X(Y) \lesssim GL_s(F)$. Ist X absolut irreduzibel, dann operiert $Z(X)$ als Skalarmatrizen auf V. (Ist insbesondere $F \cong GF(p^e)$, so ist $Z(X) \lesssim \mathbb{Z}_{p^e-1}$.)*

Moduln und insbesondere F- bzw $2F$-Moduln spielen eine wichtige Rolle in den Struktursätzen und im H-Struktursatz. Wir werden uns hingegen besonders für quadratische Operation interessieren.

Definition 2.2. *Sei G eine Gruppe und V ein nichttrivialer, treuer $GF(p)G$-Modul.*

(i) Wir nennen V einen F-Modul, falls es eine nichttriviale elementarabelsche p-Untergruppe A von G gibt mit $|V : \mathbb{C}_V(A)| \leq |A|$. Die Gruppe A heißt dann Offender.

(ii) Wir nennen V einen $2F$-Modul, falls es eine nichttriviale elementarabelsche p-Untergruppe A von G gibt mit $|V : \mathbb{C}_V(A)| \leq |A|^2$. Die Gruppe A heißt dann Offender.

(iii) Eine elementar abelsche Untergruppe A von G operiert quadratisch auf V, falls $[V, A, A] = 1$ ist.

F-Moduln sind insbesondere quadratisch (vgl. [gls1, 26.8]), was wir aber nicht benötigen werden. F-Moduln und auch $2F$-Moduln wurden in [glm] und [gm] klassifiziert. Für F-Moduln erhält man folgende Liste:

Lemma 2.3. *[gm] Sei $F^*(X)$ quasieinfach und V ein irreduzibler, treuer $F^*(X)$-Modul über $GF(p)$, der ein F-Modul ist. Dann ist $F^*(X)$ klassisch, $G_2(p^e)$, A_n oder $3A_n$, und es gilt eines der Folgenden:*

(1) $F^*(X)$ ist klassisch oder A_n und V ist der natürliche Modul (im Fall von A_n ist $p = 2$).

(2) $F^*(X) \cong SL_n(p^e)$ und V ist das äußere Quadrat des natürlichen Moduls oder sein dualer.

(3) $F^*(X) \cong Sp_6(p^e)$, $p = 2$, $\Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_{10}^+(p^e)$ und V ist der Spin- oder Halbspinmodul entsprechend.

(4) $F^*(X) \cong G_2(p^e)$ oder $3A_6$, $p = 2$, und V ist der 6-dimensionale Modul.

(5) $X \cong A_7$ und V ist der 4-dimensionale Modul.

Um später $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ zu bestimmen, werden wir sogenannte „quadratische Paare“ benutzen. Dazu betrachten wir eine Gruppe X, V einen treuen irreduziblen $GF(p)$ X-Modul und $1 \neq A \leq X$ eine auf V quadratisch operierende Gruppe. Quadratischen Paare wurden erstmals von Thompson untersucht, allerdings für $p > 3$. Die folgenden von Chermak verallgemeinerten Aussagen gelten auch für $p = 3$. In Gruppen vom Lie Typ, und speziell in unserem Fall in $\widetilde{C}$, finden wir im Allgemeinen quadratische Paare - außer für $K \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(3)$, wie sich zeigen wird. Das werden wir benutzen, um $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ zu bestimmen. Im Fall $K \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(3)$ müssen wir zu anderen Methoden greifen.

Die erste Aussage über quadratische Paare werden wir anwenden, um den Fall $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q}) = F(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ auszuschließen.

Satz 2.4. *[che1] Seien X eine endliche Gruppe, p eine ungerade Primzahl und V ein irreduzibler Modul für X über $GF(p)$. Angenommen es gelten:*

(i) Es gibt eine Untergruppe $A \neq 1$ von X, so dass $[V, A, A] = 1$ und $X = \langle A^X \rangle$ sind.

(ii) Es ist $\mathbb{C}_X(F(X)) \leq F(X)$.

Dann gelten:

(a) $|A| = p = 3$;

(b) $F(X) = O_2(X) = Z(X)E$, wobei E eine extraspezielle 2-Gruppe ist (von einer gewissen Weite $n \geq 1$), und $Z(G)$ ist zyklisch von der Ordnung 2 oder 4; und

(c) *mit n wie in (b) ist $X/O_2(X)$ isomorph zu A_{2n+1}, A_{2n+2}, $GU_n(2)$, $\Omega^{\epsilon}_{2n}(2)$ ($\epsilon = \pm$) oder $Sp_{2n}(2)$. Darüberhinaus induziert Konjugation in X eine treue Operation von $X/F(X)$ auf $F(X)/Z(X)$, für die $F(X)/Z(X)$ ein natürlicher irreduzibler Modul ist.*

Dann erhalten wir Komponenten von $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$. Das nächste Lemma wird uns deren Anzahl reduzieren:

Lemma 2.5. *[che1, 1.4] Sei X eine endliche Gruppe, p eine ungerade Primzahl und V ein treuer, irreduzibler $GF(p)X$-Modul. Sei $A \leq X$ mit $\langle A^X \rangle = X$ und $[V, A, A] = 1$. Sei weiter $F^*(X) \neq F(X)$. Dann ist $F^*(X) = Z(X)K$, wobei K eine Komponente von X ist, und $Z(X)$ ist zyklisch.*

Schlussendlich wird uns der folgende Satz liefern, dass $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ im Wesentlichen ein Produkt von Gruppen vom Lie Typ ist. Damit folgt jedoch noch nicht $L \cong F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$. Die Möglichkeit bleibt, dass L (oder einzelne Komponenten von L) echt in einer Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p enthalten ist. Dies werden wir erst mit den Ergebnissen im nächsten Kapitel ausschließen können.

Satz 2.6. *[che2] Sei X eine endliche Gruppe, p eine ungerade Primzahl und V ein treuer, irreduzibler $GF(p)X$-Modul. Sei $A \leq X$ mit $\langle A^X \rangle = X$ und $[V, A, A] = 1$. Sei $K \trianglelefteq X$ mit $K/Z(K)$ eine bekannte einfache Gruppe und $\mathbb{C}_X(K) = Z(X)$. Dann ist $Z(X) \leq K$ und $K = X$ ist eine Gruppe vom Lietyp in Charakteristik p, oder $|A| = p = 3$ und eine der folgenden Aussagen gilt:*

(a) *$X \cong PGU_n(2)$, $n \geq 5$;*

(b) *$|Z(X)| = 2$, $\overline{X} \cong A_n$, $n \geq 5$ und $n \neq 6$;*

(c) *$|Z(X)| = 2$, $\overline{X} \cong \Omega^+_8(2)$, $G_2(4)$, $S_6(2)$, Co_1, Suz oder J_2.*

Die nächsten drei Lemmatas werden wir benötigen, um die Fittinguntergruppe von $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$ durch ihre Operation auf $\widetilde{Q}$ zu beschränken für $K \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega^-_8(3)$. Wir werden die Situation betrachten, dass eine (quasieinfache) Gruppe X nichttrivial auf $F(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ operiert. Unter Umständen bleibt eine elementar abelsche Untergruppe invariant. Diese ist dann zu groß, um auf $\widetilde{Q}$ zu operieren. Das zweite Lemma liefert uns daraufhin eine spezielle Untergruppe von $F(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$, die X-invariant ist. Das dritte Lemma wird zeigen, dass es solch eine spezielle Gruppe nicht geben kann.

Lemma 2.7. *[asc1, S. 50] Sei E eine endliche Untergruppe von $GL(V)$, wo bei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper F ist. Ist $1 \neq E$ eine elementarabelsche p-Gruppe mit $[E, V] = V$, so ist $V = \bigoplus_{E^0 \in \Gamma} \mathbb{C}_V(E^0)$, wobei Γ die Menge aller Hyperebenen von E ist. Ist insbesondere auf V ein Skalarprodukt definert, das von E respektiert wird, so ist die direkte Summe auch orthogonal.*

Lemma 2.8. *[asc1, S. 114] Sei $1 \neq P$ eine p-Gruppe und X eine Gruppe, die auf P operiert. Ist $P = [P, X]$ und zentralisiert X jede charakteristische, abelsche Untergruppe von P, so ist P speziell und $Z(P) = \mathbb{C}_P(X)$.*

Lemma 2.9. *[gor, 5.5] Sei P eine extraspezielle q-Gruppe der Ordnung q^{2r+1} und F ein Körper einer Charakteristik teilerfremt zu q mit einer primitiven q^2-ten Einheitswurzel. Dann haben alle treuen, irreduziblen Darstellungen von P über F den Grad p^r.*

Zum Abschluss führen wir noch Bezeichnungen für häufig auftretende Moduln ein.

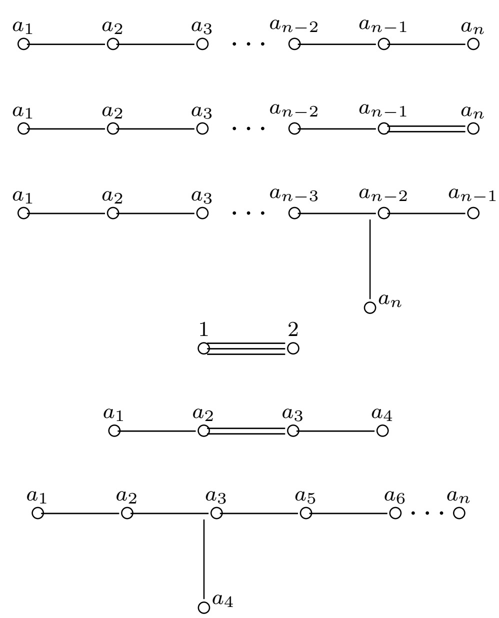
Definition 2.10. *Sei X eine klassische Gruppe vom Lie Typ. Schreibe V_n^{nat} für einen natürlichen X-Modul der Dimension n. $\Lambda^k(V_n^{nat})$ sei der k-te Fundamentalmodul, d.h. $\Lambda^2(V_n^{nat})$ ist das äußere Quadrat des natürlichen Moduls usw. Sei $S^2(V_n^{nat})$ das symmetrische Quadrat des natürlichen Moduls. Für einen Modul V sei V^* der duale Modul*

2.2 Gruppen vom Lie Typ

Da wir den überwiegenden Teil der Arbeit Gruppen vom Lietyp betrachten werden, wollen wir hier einige Grundlegende Eigenschaften zusammentragen. Für weitere Informationen und Hintergründe siehe z.B. [gls2] bzw [kl]. Die folgenden allgemeinen Aussagen finden sic in [kl].

Sei K eine Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p über dem Körper $GF(p^e)$ und $K \leq H \leq \mathrm{Aut}(K)$.

Sei zunächst K ungetwistet und vom Rang n. Dann gibt es eine einfache Lie Algebra korrespondierend zu K mit Wurzelsystem ϕ und Fundamentalwurzelsytem $\Gamma = \{a_1, ..., a_n\}$ mit den folgenden Diagrammen



A_n

B_n, C_n

D_n

G_2

F_4

$E_n (n = 6, 7, 8)$

Die Gruppe K wird von Wurzeluntergruppen X_α, $\alpha \in \phi$, erzeugt. Sei ϕ^+ die Menge aller positiven Linearkombinationen von $a_1, ..., a_l$, die wieder in ϕ liegen. Dann ist $U = \langle X_\alpha | \alpha \in \phi^+ \rangle$ eine Sylow p-Untergruppe von K. Ist T eine Cartanuntergruppe, die U normalisiert, so ist $B = TU$ eine Boreluntergruppe von K. Die Untergruppen von K, die B enthalten, heißen (auch) parabolische Untergruppen (hierher rührt die allgemeine Definition aus dem ersten Kapitel). Diese korrespondieren zu Teilmengen von $\Gamma = \{a_1, ..., a_n\}$. Ist J eine solche Teilmenge, dann ist die korrespondierende parabolische Untergruppe P_J von der Form $Q_J L_J T$, wobei

$$Q_J = \left\langle X_\alpha | \alpha \in \phi^+ \setminus \mathbb{Z}J \right\rangle \text{ und}$$

$$L_J = \langle X_\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}J \cap \phi \rangle$$

sind ($\mathbb{Z}J$ ist die Menge aller Linearkombinationen von J). Hier heißen Q_J das unipotente Radikal von P_J und L_J das Levikomplement von P_J. Weiter ist $L_J = O^{p'}(L_J H)$, und L_J ist ein zentrales Produkt von Gruppen vom Lie Typ korrespondierend zum Unterdiagramm auf J.

Definition 2.11. *Für $\Gamma = \{a_1, ..., a_n\}$ und $J = \{a_{i_1}, ..., a_{i_r}\} \subseteq \Gamma$ setze $\Gamma_{i_1,...,i_r} := \Gamma \setminus J$.*

Ist K eine getwistete Gruppe, so besteht sie aus den Elementen, die von einem Automorphismus γ der entsprechenden ungetwisteten Gruppe zentralisiert werden. Dabei induziert γ eine Symmetrie ρ des ungetwisteten Diagramms. Solche Symmetrieen gibt es für A_n, B_2, D_n, E_6, F_4, G_2 (mit ρ von der Ordnung 2) und für D_4 (mit ρ von der Ordnung 3). Für getwistete Gruppen gibt es nur dann parabolische Untergruppen, wenn J eine ρ-invariante Teilmenge des Dynkin Diagramms ist. Das Levikomplement von P_J ist die Menge der Fixpunkte des Automorphismus γ des Levikomplementes L_J der entsprechenden ungetwisteten Gruppe.

Die klassischen Gruppen sind unter den Gruppen vom Lie Typ vertreten:

Lemma 2.12. *[kl, 5.1.A.] Die klassischen Gruppen entsprechen folgenden Gruppen vom Lie Typ:*

Diagramm	A_n	${}^2A_n$	B_n	C_n	D_n	${}^2D_n$
$K/Z(K)$	$L_{n+1}(p^e)$	$U_{n+1}(p^e)$	$\Omega_{2n+1}(p^e)$	$S_{2n}(p^e)$	$\Omega^+_{2n}(p^e)$	$\Omega^-_{2n}(p^e)$

Sei X_α eine (lange) Wurzeluntergruppe. Seien $P = \mathbb{N}_K(X_\alpha)$, $Q = O_p(P)$ und L ein Levikomplement. Da Normalisatoren von Wurzeluntergruppen eine zentrale Rolle spielen werden, geben wir Q und L für ausgewählte K an:

Lemma 2.13. *[gls2] Sei $p \neq 2$.*

$K/Z(K)$	$L/Z(L)$	$m_p(Q/Z(Q))$	$Q/Z(Q)$
$L_n(p^e), n \geq 2$	$L_{n-2}(p^e)$	$2(n-2)e$	$V_{n-2}^{nat} \oplus (V_{n-2}^{nat})^*$ $(*)$
$U_n(p^e), n \geq 3$	$U_{n-2}(p^e)$	$(n-2)2e$	V_{n-2}^{nat}
$S_{2n}(p^e), n \geq 2$	$S_{2(n-1)}(p^e)$	$2(n-1)e$	V_{n-1}^{nat}
$\Omega_{2n+1}(p^e), n \geq 3$	$L_2(p^e) \times \Omega_{2(n-2)+1}(p^e)$	$2(2(n-2)+1)e$	$V_2^{nat} \otimes V_{2(n-2)+1}^{nat}$
$\Omega_{2n}^{\pm}(p^e), n \geq 4$	$L_2(p^e) \times \Omega_{2(n-2)}^{\pm}(p^e)$	$4(n-2)e$	$V_2^{nat} \otimes V_{4(n-2)}^{nat}$
$E_6(p^e)$	$L_6(p^e)$	$20e$	$(p^e)^{20}$
${}^2E_6(p^e)$	$U_6(p^e)$	$20e$	$(p^e)^{20}$
$E_7(p^e)$	$\Omega_{12}^{+}(p^e)$	$32e$	$Spin$
$E_8(p^e)$	$E_7(p^e)$	$56e$	$(p^e)^{56}$
$F_4(p^e)$	$S_6(p^e)$	$14e$	$(p^e)^{14}$

In allen Fällen ist Q speziell, $Z(Q) = X_\alpha$ für eine lange Wurzeluntergruppe und $|Z(Q)| = p^e$. Bis auf $(*)$ ist $Q/Z(Q)$ immer ein irreduzibler L-Modul.

Genau für $L_2(p^e)$, $L_3(p^e)$ und $U_3(p^e)$ ist Q eine Sylow p-Untergruppe von K.

Lemma 2.14. *[gls2, 3.2.4., 3.2.5.] Ist $K \cong G_2(3^e)$, so sind die parabolischen von K isomorph zu $((3^e)^2 \times (3^e)^{1+2}) : SL_2(3^e)$.*

Ist $K \cong G_2(p^e)$, $p \neq 3$, so sind die parabolischen von K isomorph zu $(3^e)^{2+1+1} : SL_2(p^e)$ oder $(3^e)^{1+4} : SL_2(p^e)$.

Ist $K \cong {}^3D_4(p^e)$, so sind die parabolischen von K isomorph zu $(p^e)^{2+3+6} : SL_2(p^e)$ und $(p^e)^{1+8} : SL_2(p^{3e})$.

Als nächstes wollen wir auf die Struktur von $\mathrm{Out}(K)$ eingehen.

Lemma 2.15. *[gls2, 2.5.1.] Sei $x \in \mathrm{Out}(K)$. Dann ist $x = dfg$ so dass gelten:*

(a) d ist ein Diagonalautomorphismus. Insbesondere gilt $p \nmid o(d)$, und d normalisiert jedes X_α.

(b) f ist ein „Körperautomorphismus", d.h. hervorgehend aus einem Automorphismus σ von $GF(p^e)$. Für Wurzelelemente $X_\alpha(t)$ gilt $X_\alpha(t)^f = X_\alpha(t^\sigma)$, d.h. f ist auch ein Körperautomorphismus auf allen parabolischen Untergruppen von K und allen Levikomplementen.

(c) g ist ein Graphautomorphismus, hervorgehend aus einer Symmetrie des Dynkin Diagramms. $g = 1$, falls K getwistet ist.

Das nächste Lemma wird hilfreich sein, die Struktur von Moduln zu bestimmen.

Lemma 2.16. *Es gelten:*

(i) [smi] Sei k ein endlicher Körper und X eine Gruppe vom Lie Typ über k. Sei P eine parabolische Untergruppe mit unipotentem Radikal U und Levikomplement L. Sei V ein endlichdimensionaler irreduzibler kX-Modul. Dann ist $\mathbb{C}_V(U)$ ein irreduzibler kL-Modul.

(ii) Ist insbesondere $S \in \mathrm{Syl}_p(X)$, so ist $\mathbb{C}_V(S)$ eindimensional.

Beweis: (ii) Sei $B = TS$ eine Boreluntergruppe von X, T die Cartanuntergruppe von X. T operiert als Skalarmultiplikationen auf V. Also sind die irreduziblen Moduln von T auf V eindimensional. Es ist $\mathbb{C}_V(S)$ nach (i) ein irreduzibler T-Modul, womit die Behauptung folgt. □

2.3 Einfache Gruppen

In diesem Paragraphen tragen wir einige Aussagen über bekannte (quasi) einfache Gruppen zusammen, auf die wir später zurückgreifen werden.

Wir werden in einigen Fällen Gruppen vom Lie Typ mit anderen Gruppen über die p-Ordnungen und die p-Anteile der Sylow p-Untergruppen vergleichen. Dies erweist sich manchmal als sinnvoll, zumal wir parabolische Untergruppen mit voller Sylow p-Untergruppe von G betrachten.

Lemma 2.17. *[gls2, S. 39] Sei $X(p^e)$ eine quasieinfache Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p, mit $p \nmid |Z(X)|$ und $|X(p^e)|_p = (p^e)^r$. Dann ist r durch folgende Tabelle gegeben:*

$L_n(p^e)$	$U_n(p^e)$	$S_{2n}(p^e)$	$\Omega_{2n+1}(p^e)$	$\Omega^+_{2n}(p^e)$	$\Omega^-_{2n}(p^e)$	${}^3D_4(p^e)$
$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n^2	n^2	$n(n-1)$	$n(n-1)$	12
$E_6(p^e)$	${}^2E_6(p^e)$	$E_7(p^e)$	$E_8(p^e)$	$F_4(p^e)$	$G_2(p^e)$	${}^2G_2(p^e)$
36	36	63	120	24	6	3

Lemma 2.18. *[gls2, 3.3.3.] Sei X eine Gruppe vom Lietyp in ungerader Charakteristik p mit $p \nmid |Z(X)|$. Dann ist $m_p(X)$ gegeben durch folgende Tabelle:*

X	$m_p(X)$
$L_n(p^e)$	$[(n/2)^2]\, e$
$U_n(p^e)$	$(n/2)^2 e, n$ *gerade* $\left((\frac{n-1}{2})^2+1\right) e, n$ *ungerade*
$\Omega_{2n+1}(p^e)$ $n \geq 2$	$(2n-1)e, n \leq 3$ $(1+\binom{n}{2})\, e, n \geq 4$
$S_{2n}(p^e)$ $n \geq 2$	$\binom{n+1}{2} e$
$\Omega^+_{2n}(p^e)$ $n \geq 4$	$\binom{n}{2} e$
$\Omega^-_{2n}(p^e)$ $n \geq 4$	$e + m_p(\Omega_{2n-1}(p^e))$

X	$m_p(X)$
${}^3D(p^e)$	$5e$
$G_2(p^e)$	$3e, p \neq 3$ $4e, p = 3$
${}^2G_2(3^e)'$	$2e$
$F_4(p^e)$	$9e$
$E_6(p^e)$	$16e$
${}^2E_6(p^e)$	$12e$
$E_7(p^e)$	$27e$
$E_8(p^e)$	$36e$

Die weiteren Aussagen werden wir benötigen, um in kleinen Fällen $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ zu bestimmen.

Ist E eine elementarabelsche q-Gruppe, $q \neq p$, und operiert E auf einem $GF(p^f)$-Modul der Dimension n, so ist $E \lesssim GL_n(p^f)$. Das folgende Lemma liefert uns eine Abschätzung für $m_q(E)$.

Lemma 2.19. *[kl, S. 204]*
(i) $m_{p'}(GL_n(p^f)) \leq n$ *für alle* $f \in \mathbb{N}_0$.
(ii) $m_{p'}(L_n(p^f)) \leq n$ *für alle* $f \in \mathbb{N}_0$.

In den Hauptfaktoren von $\widetilde{C}$ werden wir häufig die Situation haben, dass eine (quasi-)einfache Gruppe (zumeist L) auf einem irreduziblen Modul operiert. Die folgenden Lemmatas schränken die Möglichkeiten für beides ein. Zunächst erklären wir:

Definition 2.20. *Sei X eine Gruppe. Sei $R(X)$ (bzw $R^i(X)$) die kleinste Zahl $t > 1$, so dass X eine projektive Darstellung (bzw eine projektive, irreduzible Darstellung) vom Grad t über einem endlichen Körper hat. Seien $R_q(X)$ bzw $R^i_q(X)$ entsprechend über einem endlichen Körper der Charakteristik q.*

Ist X eine einfache Gruppe vom Lie Typ über einem Körper der Charakteristik q, so setze $l(X)$ die kleinste Zahl $t > 1$, so dass X eine projektive irreduzible Darstellung vom Grad t über einem Körper der Charakteristik verschieden von q hat.

Dann gelten:

Lemma 2.21. *[sz]Es gelten:*

(i) $l(L_2(4)) = 2$, $l(L_2(9)) = 3$ *und* $l(X) = (p^e - 1)/\mathrm{ggT}(2, p^e - 1)$ *sonst.;*

(ii) $l(U_6(3)) = 182$, $l(S_6(3)) = 13$, $l(E_7(3)) = 8 \cdot 3^{15}$*;*

(iii) $l(U_n(2)) = \begin{cases} 2(2^n - 1)/3, & n \text{ ungerade} \\ 2^n - 1/3, & n \text{ gerade} \end{cases}.$

Lemma 2.22. *[kl, S. 186]*
(i) Ist $l \geq 9$, *so ist* $R(A_l) = l - 2$.
(ii) Für $5 \leq l \leq 8$ *ist* $R_p(A_l)$ *wie folgt:*

l	$R_2(A_l)$	$R_3(A_l)$	$R_5(A_l)$	$R_p(A_l), p \geq 7$
5	2	2	2	2
6	3	2	3	3
7	4	4	3	4
8	7	7	7	7

Lemma 2.23. *[kl, S. 187] Sei X eine sporadische Gruppe. Dann gilt für $R(X)$ folgende Tabelle:*

X	M_{11}	M_{12}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	J_1	J_2	J_3	J_4	HS	McL	He	Ru
$R(X)$	5	6	6	11	11	7	6	9	110	20	21	18	28

X	Suz	$O'N$	Co_1	Co_2	Co_3	Fi_{22}	Fi_{23}	Fi'_{24}	HN	Ly	Th	F_2	F_1
$R(X)$	12	31	24	22	22	27	234	702	56	110	48	234	729

Ebenfalls beim Bestimmen von $F^*(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$ werden wir uns für minimale Permutationsdarstellungen von gewissen Gruppen X interessieren. Z.B. wenn X in der alternierenden Gruppe A_n involviert ist, fragen wir uns, wie groß n dafür sein muss. Ist andererseits $Y \leq X$, so operiert X auf den Nebenklassen von Y, hat also eine Permutationsdarstellung vom Grad $|X : Y|$. Das nächste Lemma liefert uns für n wie auch für $|X : Y|$ eine Abschätzung:

Lemma 2.24. *[kl, S.174,175] Sei X eine Gruppe und*

$$P(X) := \min\{n|X \text{ hat eine nichttriviale Permutationsdarstellung vom Grad } n\}.$$

Dann ist $P(X)$ der Index der größten maximalen Untergruppe von G. Insbesondere gelten

(i) $P(L_2(5)) = 5$, $P(L_2(7)) = 7$, $P(L_2(9)) = 6$, $P(L_2(11)) = 11$, $P(L_4(2)) = 8$ *und* $P(L_n(p^e)) = (p^{ne}-1)/(p^e-1)$ *sonst;*

(ii) $P(U_3(p^e)) = (p^e)^3+1$ *für* $p^e \neq 5$, $P(U_3(5)) = 50$; $P(U_4(3)) = 328$, $P(U_6(3)) = \frac{1}{8}(3^6-1)(3^5+1)$;

(iii) $P(S_4(3)) = 27$, $P(S_6(3)) = 3^6 - 1/2$.

Mit Hilfe des nächsten Lemmas werden wir eine charakteristische Untergruppe von $\widetilde{C} \cap M$ konstruieren können, mit der wir schlussendlich $\widetilde{C}$ bestimmen werden.

Lemma 2.25. *[gls2, 3.2.2.] Sei $K \not\cong G_2(3^e)$ eine Gruppe vom Lie Typ in ungerader Charakteristik p. Sei P eine parabolische Untergruppe von K. Dann ist die aufsteigende Zentralreihe von $O_p(P)$ gleich der absteigenden Zentralreihe.*

Zuweilen werden wir die Möglichkeit untersuchen, dass ein (zentrales) Produkt von Gruppen vom Lie Typ in einer weiteren Gruppe X vom Lie Typ enthalten ist. Das nächste Lemma gibt uns eine Abschätzung dafür, wie „groß“ X sein muss, um ein solches Produkt zu enthalten. Setze zunächst

$$\mathcal{F} := \{\Omega_2^{\pm}(q^f), \Omega_4^{+}(q^f)|q \text{ bel.}\} \cup \{L_2(2), L_2(3), \Omega_3(3), U_3(2)\}.$$

Dann gilt:

Lemma 2.26. *[kl, 5.2.12,S.181] Seien X, X_i einfache Gruppen vom Lie Typ oder in $\mathcal{F}$ für $i = 1, ..., t$. Angenommen eine zentrale Erweiterung von $\prod_{i=1}^{t} X_i$ bettet in X ein. Seien l, l_i die Lie-Ränge von X und X_i entsprechend. Dann ist $\sum_{i=1}^{t} l_i \leq l$.*

In (2.4) und (2.6) treten Gruppen vom Lie Typ in Charakteristik $q \neq p$ und alternierende Gruppen auf. In der späteren Anwendung, wird gefordert werden, dass sie isomorph zu einer Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p sind. Das folgende Lemma sagt uns, wann das nur der Fall sein kann.

Lemma 2.27. *[kl, 2.9.1, S.43] Es gibt genau die folgenden Isomorphien zwischen klassischen Gruppen in gerader und ungerader Charakteristik und alternierenden Gruppen (ist eine Gruppe isomorph zu mehreren klassischen Gruppen in gleicher Charakteristik, so geben wir den Isomorphismus nur für einen Vertreter an):*

(i) $L_2(2) \cong S_3$;

(ii) $L_2(3) \cong A_4$;

(iii) $L_2(4) \cong L_2(5) \cong A_5$;

(iv) $L_3(2) \cong L_2(7)$;

(v) $L_2(9) \cong A_6$;

(vi) $L_4(2) \cong A_8$;

(vii) $U_4(2) \cong S_4(3)$;

(viii) $Sp_4(2) \cong S_6$.

Nun haben wir alle notwendigen Voraussetzungen zusammengetragen.

Kapitel 3

Erste Schritte

3.1 Setup und Hauptsatz Revisited

In diesem Paragraphen gelten stets die Voraussetzungen von (1.15).

Unser Ziel ist es, zunächst $\widetilde{C}$ zu bestimmen. Momentan haben wir nicht viele Informationen über $\widetilde{C}$. In diesem Abschnitt werden wir aber (unter Anderem) $\widetilde{C} \cap H$ bestimmen können. Das liefert uns dann eine Liste der Gruppe, die für K in Frage kommen. Ein wesentlicher Teil von $\widetilde{C}$ ist leicht zu bestimmen:

Lemma 3.1. $\mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \widetilde{C}$.

Beweis: Es ist $Z(S) \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q}) \leq \widetilde{Q}$. Also ist, da $\widetilde{Q}$ groß ist, $\mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) = \widetilde{C}$. □

Möglicherweise vorhandene Graphautomorphismen von K von der Ordnung p erschweren nicht nur die Betrachtung parabolischer Untergruppen von H, sondern auch von ganz G, womit wir uns im letzten Kapitel beschäftigen werden. Besonders für $p = 2$ tritt dies häufig auf. Für ungerade Primzahlen p, wie sie bei uns nur vorkommen, befinden wir uns in einer angenehmen Situation. Wie wir sehen werden, spielen für uns nur p-Körperautomorphismen eine Rolle. Damit wird es uns auch leichter Fallen, grundlegende Aussagen über $\widetilde{C}$ zu treffen.

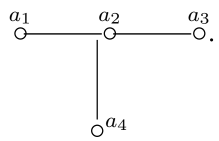
Lemma 3.2. *Induziert H auf K äußere p-Automorphismen, so sind dies Körperautomorphismen. Insbesondere ist $S/(S \cap K)$ zyklisch.*

Beweis: Angenommen falsch. Da Diagonalautomorphismen von K eine p'-Ordnung haben, können wir annehmen, dass es ein $g \in S$ gibt, und g induziert einen Graph- (oder Graphkörper-)automorphismus auf K.

K ist eine Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p und g ist ein p-Element. Das geht nur, falls $K \cong \Omega_8^+(3^e)$ ist, und g ist ein Graphautomorphismes von der Ordnung 3.

Mit (3.1) folgt $\mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \widetilde{C}$. Weil $Q = O_p(\mathbb{N}_G(Z(S))$ ist, ist $\widetilde{Q} \leq Q$. Da $Q/Z(Q)$ nach (2.13) ein irreduzibler $\mathbb{N}_H(Q)$-Modul ist, folgt $Q = \widetilde{Q}$.

Weiter folgt dann mit (2.16) $|\mathbb{C}_{Q/Z(Q)}(S \cap L)| = 3^e$, d.h. $|Z_2(S \cap K)| = 3^{2e}$ und $Z_2(S \cap K) \leq Q$. Sei $\Gamma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ein Fundamentalsystem zu S gehörend. K besitzt dann folgendes Diagramm:



Die parabolischen von H sind g-invariant. Damit korrespondieren die parabolischen zu $J_1 = \{a_2\}$ oder $J_2 = \{a_1, a_3, a_4\}$. Da $M_0 \not\leq \widetilde{C} \cap H$ ist, korrespondiert M_0 zu J_1. Es sind dann $M^0/O_p(M^0) \cong SL_2(3^e)$ und Y_M ein natürlicher Modul. Damit ist $Y_M = Z_2(S \cap K) \leq Q = \widetilde{Q}$, ein Widerspruch zu $Y_M \not\leq \widetilde{Q}$. □

Nicht alle Gruppen vom Lietyp in ungerader Charakteristik p erfüllen unsere Vorausstzungen. Da der Struktursatz $|\mathcal{M}(S)| \geq 1$ vorausstzt, ist in unseren Voraussetzungen H mindestens eine Rang 2 Gruppe. Aber es gibt auch einige Rang zwei Gruppen, die nicht von unserem Interesse sind:

Lemma 3.3. *$K \not\cong G_2(p^e)$ oder ${}^3D_4(p^e)$.*

Beweis: Mit (3.1) folgt $\mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \widetilde{C}$.

K besitzt genau zwei Klassen von minimal parabolischen Untergruppen. Da $M_0 \cap K \not\leq \widetilde{C}$ ist, gehört $M_0 \cap K$ zu der von $\widetilde{C} \cap K$ verschiedenen Klasse. Es ist dann $M^0/O_p(M) \cong SL_2(p^e)$ und die genaue Struktur ist gegeben durch (2.14). Da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist, ist $K \not\cong G_2(3)$. Also ist auch M_0 nicht auflösbar.

Also ist $Y_M = \Omega_1(Z(O_p(M_0)))$ von der Ordnung p^{2e} falls $K \not\cong G_2(3^e)$, bzw 3^{3e} falls $K \cong G_2(3^e)$. Es ist $\mathbb{C}_M(Y_{M_0}) = O_p(M_0)$.

Ist $K \not\cong G_2(3^e)$, so ist, da $|S \cap K : O_p(M_0)| = p^e$ ist, $Y_M \leq Z_2(S \cap K) \leq Q$. Da jeweils $Q/Z(Q)$ ein irreduzibler L-Modul ist, ist $\widetilde{Q} = Q$. Dann ist aber $Y_M \leq Z_2(S_0 \cap K) \leq Q$, Widerspruch.

Ist $K \cong G_2(3^e)$, $e \neq 1$, so ist Q mit (2.14) ein direktes Produkt einer speziellen Gruppe Q_1 der Ordnung p^{3e} mit einer elementarabelschen Gruppe Q_2 der Ordnung p^{2e}. Es ist $Q = O_p(\mathbb{N}_H(Z(S))$. Da $\mathbb{N}_H(Z(S)) \leq \widetilde{C}$ ist, folgt $\widetilde{Q} \leq Q$. Dann ist $Z(Q) = Z(Q_1) \times Q_2 \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q}) \leq \widetilde{Q}$. Da $\mathbb{C}_G(\widetilde{Q}) \leq \widetilde{Q}$ ist, muss $Z(Q) < \widetilde{Q}$ sein. $Q/Z(Q)$ ist ein irreduzibler L-Modul und $L \leq \widetilde{C}$, also ist $\widetilde{Q} = Q$.

Es ist $Z(Q) \cong Z(O_p(M_0)) = Y_M$ und $M \cap K \cong \widetilde{C} \cap K$. Also ist $[Y_M, M]$ ein natürlicher $SL_2(p^e)$-Modul und wieder $[Y_M, M] \leq Z_2(S \cap K) \leq Q = \widetilde{Q}$. Aber nach

Voraussetzung ist $[Y_M, M] \nleq \widetilde{Q}$, Widerspruch. □

Nun können wir $\widetilde{C} \cap H$ identifizieren:

Lemma 3.4. *Es sind $\mathbb{N}_H(Q) \leq \widetilde{C}$ und $\widetilde{Q} \leq Q$. Ist $K \ncong L_n(p^e)$, so ist $\widetilde{Q} = Q$. Gilt $\widetilde{Q} < Q$, so ist $K \cong L_n(p^e)$ und $\widetilde{C} \cap H$ ist eine maximal parabolische Untergruppe von K. Insbesondere ist dann $\widetilde{Q}$ abelsch.*

Beweis: Mit (3.3) ist $K \ncong G_2(p^e)$ oder ${}^3D_4(p^e)$. Dann sind Q und L durch (2.13) gegeben. Mit (3.1) folgt $\mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \widetilde{C}$. Mit (3.2) sind alle von S auf K induzierten äußeren Automorphismen Körperautomorphismen.

Ist $L \neq 1$, so sind dies auch welche von L. Dann ist $Q = O_p(\mathbb{N}_H(Z(S)))$. Da $\mathbb{N}_H(Z(S)) \leq \widetilde{C}$ ist, folgt $\widetilde{Q} \leq Q$. Ist $L = 1$, so folgt mit (2.13) $K \cong L_3(p^e)$. Da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist, ist $\widetilde{C} \cap H$ eine maximal parabolische von H. Genauso ist nun $\widetilde{Q} \leq O_p(\widetilde{C} \cap H) \leq Q$.

Ist $K \ncong L_n(p^e)$, so ist $Q/Z(Q)$ ein irreduzibler L-Modul. Da $\widetilde{Q}$ groß ist, ist $Z(Q) < \widetilde{Q} \leq Q$. Nun ist $\widetilde{Q} = Q$ und $\mathbb{N}_H(Q) \leq \widetilde{C}$.

Sei $K \cong L_n(p^e)$ und $Z(Q) < \widetilde{Q} < Q$. Für $n = 3$ ist $K \cap \widetilde{C}$ eine maximal parabolische Untergruppe von K, und die Aussage folgt. Ist $n \geq 4$, so ist $L \neq 1$, und $Q/Z(Q)$ zerfällt mit (2.13) in zwei natürliche L-Moduln. Da $L \leq \widetilde{C}$ ist, ist $\widetilde{Q}$ eine maximal elementar abelsche L-invariante Untergruppe von Q. Davon gibt es in Q genau 2. Beide sind p-Radikal einer maximal parabolischen Untergruppe von K. Dann ist $\widetilde{C} \cap H$ eine dieser beiden. Es ist ebenso $\mathbb{N}_H(Z(Q)) \leq \widetilde{C} \cap H \leq \widetilde{C}$, und das Lemma folgt. □

Also ist, bis auf eine Ausnahme, $\widetilde{C} \cap H = \mathbb{N}_H(Q)$.

Mit (2.13) bekommen wir nun eine Liste für die Gruppen K. Diese umfasst alle Gruppen vom Lie Typ in ungerader Charakteristik und vom Lie Rang mindestens zwei außer

$$L_3(3), U_4(3), S_4(3), \Omega_7(3), \Omega_8^+(3), G_2(p^e), {}^3D_4(p^e)$$

und einen Fall für $L_4(3)$. Da für $G_2(p^e)$ und ${}^3D_4(p^e)$ ohnehin die Bedingung $Y_M \nleq \widetilde{Q}$ verletzt ist, betrachten wir also lediglich fünf Gruppen nicht.

Mit (1.9) folgen die möglichen Strukturen von M^0. Für die Struktur von $O_p(M)/Y_M$ siehe z.B. [ms1]. Im Prinzip ist die Struktur von M^0 eine Folgerung aus [mss1] und [ms1], die wir auch in unsere Voraussetzungen hätten aufnehmen können, aber so behalten wir einen allgemeineren Kontext.

Wir fassen also zusammen.

Bemerkung 3.5. Sei $X = M^0/\mathbb{C}_{M^0}(Y_M)$. Dann gelten für K, X und $O_p(M)$:

K	$\overline{X}$	$O_p(M)/Y_M$	Y_M		$K \not\cong$
$L_{n+m}(p^e)$	$L_n(p^e) \times L_m(p^e)$		$V_n^{nat} \otimes V_m^{nat}$	$n, m \geq 2$	$L_4(3)$
$L_n(p^e)$	$L_{n-1}(p^e)$		V_{n-1}^{nat}	$n \geq 3$	$L_3(3)$
$U_{2n}(p^e)$	$L_n(p^{2e})$	V_n^{nat}	$V_n^{nat} \otimes (V_n^{nat})^{p^e}$	$n \geq 4$	$U_4(3)$
$S_{2n}(p^e)$	$L_n(p^e)$		$S^2(V_n^{nat})$	$n \geq 2$	$S_4(3)$
$\Omega_{2n}^{\pm}(p^e)$	$\Omega_{2(n-1)}^{\pm}(p^e)$		$V_{2(n-1)}^{nat}$	$n \geq 8$	$\Omega_8^+(3)$
$\Omega_{2n+1}(p^e)$	$\Omega_{2(n-1)+1}(p^e)$		$V_{2(n-1)+1}^{nat}$	$n \geq 7$	$\Omega_7(3)$
$\Omega_{2n}^+(p^e)$	$L_n(p^e)$		$\Lambda^2(V_n^{nat})$	$n \geq 8$	$\Omega_8^+(3)$
$\Omega_{2n}^-(p^e)$	$L_{n-1}(p^e)$	$V_{n-1}^{nat} \oplus V_{n-1}^{nat}$	$\Lambda^2(V_{n-1}^{nat})$	$n \geq 8$	
$\Omega_{2n+1}(p^e)$	$L_n(p^e)$	V_n^{nat}	$\Lambda^2(V_n^{nat})$	$n \geq 7$	$\Omega_7(3)$
$E_6(p^e)$	$\Omega_{10}^+(p^e)$		$Halbspin$		
${}^2E_6(p^e)$	$\Omega_8^-(p^e)$	$Spin$	V_8^{nat}		
$E_7(p^e)$	$E_6(p^e)$		$(p^e)^{27}$		
$E_8(p^e)$	$\Omega_{14}^+(p^e)$	$Halbspin$	V_{14}^{nat}		
$F_4(p^e)$	$\Omega_7(p^e)$	$Spin$	V_7^{nat}		

Lemma 3.6. *$\widetilde{C}/\widetilde{Q}$ operiert treu auf $\widetilde{Q}$.*

Beweis: Da $\widetilde{Q}$ groß ist, ist $\mathbb{C}_{\widetilde{C}}(\widetilde{Q}) \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q}) \leq O_p(\widetilde{C})$ und die Behauptung folgt. □

Lemma 3.7. *$O_p(M) = O_p(M_0) \leq K$. Insbesondere ist $Y_M = Y_{M_0}$.*

Beweis: K ist eine der Gruppen aus (3.5). Sei $u \in O_p(M) \setminus K$. Dann induziert u einen äußeren Automorphismus auf K. Mit (3.2) induziert u einen Körperautomorphismus. Mit (2.15) operiert u nichttrivial auf $M^0/O_p(M^0) \neq 1$. Aber $u \in O_p(M)$, also ist $[u, M^0] \leq O_p(M)$, Widerspruch. Also ist $O_p(M) = O_p(M_0) = O_p(M^0) \leq K$ und $Y_M = Y_{M_0}$. □

Kennen wir $\widetilde{C}$, so kennen wir auch einen großen Teil einer beliebigen parabolischen $P \in \mathcal{L}(S)$.

Lemma 3.8. *[mss1, 2.5] Sei $P \in \mathcal{L}(S)$. Dann ist $P = P^0(P \cap \widetilde{C})$.*

Beweis: Sei $S_1 \in \mathrm{Syl}_p(P^0)$. Dann folgt $P = \mathbb{N}_P(S_1)P^0$ mit dem Frattini-Argument. Da $\widetilde{Q} \leq S_1$ ist, ist $Z(S_1) \leq Z(\widetilde{Q})$. Da $\widetilde{Q}$ groß ist, folgt $\mathbb{N}_P(Z(S_1)) \leq \widetilde{C}$, und die Aussage folgt. □

3.2 Minimale Quadratische Operation

Um $\widetilde{C}$ zu bestimmen werden wir die Sätze (2.4) und (2.6) anwenden. Das setzt auf $\widetilde{Q}$ quadratisch operierende Gruppen voraus. (3.11) wird uns die Gruppen liefern, in denen auf $Q/Z(Q)$ quadratisch operierende Untergruppen in L existieren. Mit (2.4) und (2.6) erhalten wir dann, dass alle auf $Q/Z(Q)$ quadratisch operierenden Gruppen die Ordnung 3 haben, was eine sehr starke Einschränkung für L ist, wie wir in (3.12) sehen werden.

Wir werden uns mit folgender Situation konfrontiert sehen, auf die wir auch in folgenden Abschnitten noch zurückgreifen werden. Die Ausnahme $\widetilde{Q} < Q$ werden wir gesondert betrachten. Für diesen Paragraphen gilt:

Setup 3.9. *Es gelte (1.15). Sei $\widetilde{Q} = Q$. Für das Levikomplement L von $\mathbb{N}_H(Q)$ setze $L = L_1L_2$, $[L_1, L_2] = 1$, wobei gilt: Es ist $L_1 = 1$, $L = L_2$, falls $K \not\cong \Omega_n^{\pm}(p^e)$, $n \geq 7$; falls $K \cong \Omega_n^{\pm}(p^e)$, $n \geq 7$, ist, ist $L_1 \cong SL_2(p^e)$ und $L_2 \cong \Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$. Setze $V = Q/Z(Q)$. Ist V kein irreduzibler L_2-Modul, so ist $V = V_1V_2$ mit V_i irreduzible L_2-Moduln.*

Sei zusätzlich $\Gamma = \{a_1, a_2, ...\}$ ein Fundamentalwurzelsystem zur ungetwisteten Gruppe zu K korrespondierend zu S. Wir werden die Bezeichnung aus (2.11) verwenden.

Die Liste aus (3.5) gibt nicht nur die möglichen Kombinationen für M und K an, sondern ist zugleich auch eine Liste von ausgewählten parabolischen Untergruppen, die in K vorkommen. Mit dem nächsten Lemma werden wir im Folgenden große, quadratisch operierende Gruppen produzieren.

Lemma 3.10. *Sei $P \leq K$ eine parabolische Untergruppe von K wie in (3.5) (nicht notwendigerweise M^0). Sei $X = P \cap \mathbb{N}_K(Q)$. Dann ist $Z(O_p(X/Q)) = Y_PQ/Q$.*

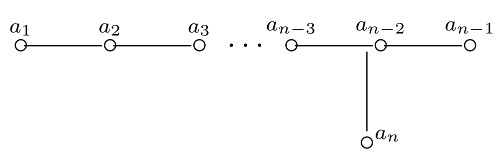
Beweis: Es ist $O_p(X) = O_p(P)Q$. Ist $O_p(P) = Y_P$, so folgt die Aussage. Sonst ist mit (2.25) $O_p(P)' = Z(O_p(P)) = Y_P$. Dann ist $Z(O_p(X/Q)) = (O_p(P)Q/Q)' = Y_PQ/Q$. □

Das folgende Lemma liefert uns, wie eingangs gesagt, die Voraussetzung für (2.4) und (2.6).

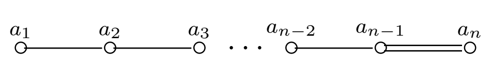
Lemma 3.11. *Es gibt ein $1 \neq A \leq L_2$ mit $[V, A, A] = 1$ oder $F^*(H) \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$ und es gibt ein $1 \neq A \leq L_1$ mit $[V, A, A] = 1$.*

Beweis: Ist $L = L_2$, so ist $1 \neq Y_MQ/Q \leq LQ/Q$ und $[Q, Y_M, Y_M] \leq [Q \cap Y_M, Y_M] = 1$.

Sei also $F^*(H) \cong \Omega_n^{\pm}(p^e)$, $n \geq 8$. Die parabolischen von H korrespondieren zu



für gerades n und zu



für ungerades n. Beachte, dass im Fall $\Omega_n^-(p^e)$ die parabolischen unter einer Symmetrie des Dynkindiagramms invariant sein müssen.

Ist $K \ncong \Omega_n^-(p^e)$, so gibt es eine parabolische P von H mit $E(P/O_p(P)) \cong SL_{[n/2]}(p^e)$ und $O_p(P) = Y_P \cong \Lambda^2(V_{[n/2]}^{nat})$ (vgl (3.5); P korrespondiert zu Γ_n). Dann ist $P \cap L_2$ eine $SL_{[n-4/2]}(p^e)$ parabolische in $\Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$, korrespondierend zu $\Gamma_{1,2,n}$. Mit (3.10) ist $Y_P Q/Q = Z(O_p(P \cap L/Q))$, also der $\Lambda^2(V_{[n-4/2]}^{nat})$-Modul der Ordnung $\binom{[n-4/2]}{2}e$. Da $Y_P \trianglelefteq S$ abelsch ist, ist $[Q, Y_P, Y_p] \leq [Q \cap Y_P, Y_P] = 1$.

Ist $K \cong \Omega_n^-(p^e)$, $n \geq 10$, so gibt es eine parabolische P von H mit $E(P/O_p(P)) \cong SL_{[n-2/2]}(p^e)$ und $Z(O_p(P)) = Y_P \cong \Lambda^2(V_{[n-2/2]}^{nat})$ (vgl (3.5); P korrespondiert zu $\Gamma_{n-1,n}$). Dann ist $P \cap L_2$ eine $SL_{[n-6/2]}(p^e)$ parabolische in $\Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$, korrespondierend zu $\Gamma_{1,2,n-1,n}$. Mit (3.10) ist $Y_P Q/Q = Z(O_p(P \cap L/Q))$, also der $\Lambda^2(V_{[n-6/2]}^{nat})$-Modul der Ordnung $\binom{[n-6/2]}{2}e$. Da $Y_P \trianglelefteq S$ abelsch ist, ist $[Q, Y_P, Y_p] \leq [Q \cap Y_P, Y_P] = 1$.

Für $\Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$ ist V ein Produkt natürlicher L_1-Moduln, also operiert $S \cap L_1$ quadratisch. □

Ist $K \cong \Omega_7(p^e)$, so ist V_i der $S^2(V_2^{nat})$ für $L_2 \cong L_2(p^e)$, also nicht quadratisch. Es ist somit der einzige Fall, in dem wir in einer Komponente von L keine quadratisch operierende Untergruppe finden. Diesen Fall werden wir deswegen später gesondert betrachten müssen.

Das letzte Lemma dieses Abschnitts liefert uns die in Frage kommenden Gruppen K, in denen es in L nur eine quadratisch operierende Gruppe der Ordnung 3 gibt. Dazu setze zunächst

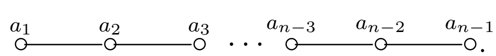
$$\mathcal{Q} := \{U_5(3), \Omega_9(3), \Omega_{10}^-(3), F_4(3), {}^2E_6(3), E_8(3)\}.$$

Dann gilt:

Lemma 3.12. *Sei $p = 3$. Für $K \ncong \Omega_7(3^e)$ oder $\Omega_8^-(3^e)$ habe jede auf V quadratisch operierende Untergruppe von L_2 die Ordnung 3. Dann ist $K \in \mathcal{Q}$. Für $K \cong \Omega_7(3^e)$ oder $\Omega_8^-(3)$ habe jede auf V quadratisch operierende Untergruppe von L_1 die Ordnung 3. Dann ist $K \cong \Omega_8^-(3)$.*

Beweis: Sei $A \trianglelefteq S$ abelsch. Dann ist $[Q, A, A] \leq [Q \cap A, A] = 1$. Also ist $|A \cap L_2| \leq 3$ für alle solche A.

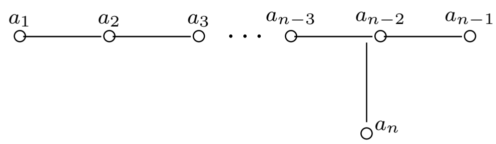
Sei $K \cong L_n(3^e)$. Die parabolischen korrespondieren zu



Da $\widetilde{Q} = Q$ ist, ist $n \geq 4$. Sei $P \leq K$ eine maximal parabolische mit $P/O_3(P) \cong SL_{m_1}(3^e) * SL_{m_2}(3^e)$, so dass $m_1 = m_2 = n/2$, falls n gerade ist und $m_1 = n - 1/2$ sowie $m_2 = n + 1/2$, falls n ungerade ist, d.h. P korrespondiert zu $\Gamma_{[\frac{n}{2}]}$. $O_3(P) =$

Y_P ist der Tensorproduktmodul, vgl. (3.5). Dann ist Y_P eine maximal elementar abelsche Untergruppe von S und vom 3-Rang $m_1m_2 = [(n/2)^2]e$. Es ist $P \cap L$ die entsprechende parabolische in L, also $P \cap L/O_p(P \cap L) \cong SL_{m_1-1}(3^e) * SL_{m_2-1}(3^e)$ und $O_p(P \cap L)$ der Tensorproduktmodul. Mit (3.10) ist $Z(O_3(P \cap LQ/Q)) = Y_PQ/Q$ und, als $P \cap L$-Modul, vom 3-Rang $[(n-2/2)^2]e$. Da $|Y_PQ/Q| \leq 3$ ist, folgt $e = 1$ und $n \leq 4$. Dann ist aber $\mathbb{N}_H(Q)$ auflösbar, Widerspruch.

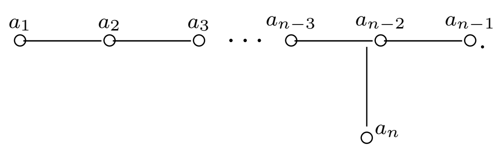
Sei $K \cong \Omega_n^+(3^e)$, $n \geq 8$. Die parabolischen korrespondieren zu



für gerades n und zu

für ungerades n. Es gibt in H eine parabolische P mit $E(P/O_p(P)) \cong SL_{[n/2]}(3^e)$ und $Y_P \cong \Lambda^2(V_{[n/2]}^{nat})$ (vgl (3.5)), d.h. P korrespondiert zu Γ_n. Es korrespondiert $L_2 \cong \Omega_{n-4}^{\pm}(3^e)$ zu $\Gamma_{1,2}$. Also ist $P^0 \cap L_2/O_p(P \cap L_2) \cong SL_{[n-4/2]}(3^e)$. Mit (3.10) ist $Y_PQ/Q = Z(O_p(P \cap L/Q))$, also der $\Lambda^2(V_{[n-4/2]}^{nat})$-Modul vom p-Rang $\binom{[n-4/2]}{2}e$. Da $|Y_PQ/Q| \leq 3$ ist, folgt $e = 1$ und $n = 8$ oder 9. Aber dann ist $\widetilde{C} \cap H$ auflösbar, Widerspruch.

Sei $K \cong \Omega_n^-(3^e)$, $n \geq 10$. Die parabolischen korrespondieren zu



Beachte, dass die parabolischen unter einer Symmetrie des Dynkindiagramms invariant sein müssen. Es gibt in H eine parabolische P mit $E(P/O_p(P)) \cong SL_{[n-2/2]}(3^e)$ und $Y_P \cong \Lambda^2(V_{[n-2/2]}^{nat})$ (vgl (3.5)), d.h. P korrespondiert zu $\Gamma_{n-1,n}$. Es korrespondiert $L_2 \cong \Omega_{n-4}^{\pm}(3^e)$ zu $\Gamma \setminus \{a_1, a_2\}$. Also ist $P^0 \cap L_2/O_p(P \cap L_2) \cong SL_{[n-6/2]}(3^e)$. Mit (3.10) ist $Y_PQ/Q = Z(O_p(P \cap L/Q))$, also der $\Lambda^2(V_{[n-6/2]}^{nat})$-Modul vom p-Rang $\binom{[n-6/2]}{2}e$. Da $|Y_PQ/Q| \leq 3$ ist, folgt $e = 1$ und $n = 10$, d.h. $K \cong \Omega_{10}^-(3)$.

Sei $K \cong \Omega_7(3^e)$ oder $\Omega_8^-(3)$. Es ist V eine Summe natürlicher L_1-Moduln und $S \cap L_1$ operiert quadratisch auf V, d.h. $e = 1$. Da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist, folgt $K \cong \Omega_8^-(3)$.

In allen anderen Fällen ist $L = L_2$ quasieinfach. Sei P wie in (3.5). Seien $E = P^0/O_3(P^0)$, $X = P^0 \cap \mathbb{N}_K(Q)$ und $Y = Y_PQ/Q$. Mit (3.10) ist $Y = Z(O_p(X/Q))$. Entsprechend der Diagramme in Paragraph 2.2 betrachten wir insgesamt also folgende Konstellationen:

K	$U_n(3^e)$	$S_{2n}(3^e)$	$F_4(3^e)$	$E_6(3^e)$	${}^2E_6(3^e)$	$E_7(3^e)$	$E_8(3^e)$
E	$SL_{[n/2]}(3^{2e})$	$SL_n(3^e)$	$\Omega_7(3^e)$	$\Omega_{10}^+(3^e)$	$\Omega_8^-(3^e)$	$E_6(3^e)$	$\Omega_{14}^+(3^e)$
L	$U_{n-2}(3^e)$	$S_{2(n-1)}(3^e)$	$S_6(3^e)$	$L_6(3^e)$	$U_6(3^e)$	$\Omega_{12}(3^e)$	$E_7(3^e)$
$X/O_p(X)$	$SL_{[n-2/2]}(3^{2e})$	$SL_{n-1}(3^e)$	$S_4(3^e)$	$L_5(3^e)$	$U_4(3^e)$	$\Omega_{10}^+(3^e)$	$\Omega_{12}^+(3^e)$
Y	$V_{[n/2]}^{nat} \otimes V_{[n/2]}^{nat}$	$S^2(V_{n-1}^{nat})$	$trivial$	V_5^{nat}	$trivial$	V_{10}^{nat}	$trivial$
$m_3(Y)$	$[n-2/2]^2e$	$(n-1)e$	e	$5e$	e	$16e$	e

Da $|Y_M Q/Q| \leq 3$ gelten muss, folgt $m_3(Y) \leq 1$. Das ist nur erfüllt für $U_n(3)$, $n \leq 5$, $S_4(3)$, $F_4(3)$, ${}^2E_6(3)$ und $E_8(3)$. Da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist, ist $K \ncong S_4(3)$ oder $U_4(3)$. □

3.3 Gruppen vom Lie Typ in gleicher Charakteristik

Wenden wir später (2.4) und (2.6) an, so erhalten wir, dass das Levikomplement L von $\mathbb{N}_H(Q)$ in einer womöglich größeren Gruppe vom Lie Typ N der selben Charakteristik wie L enthalten ist. In diesem Pragraphen geht es darum, dies auszuschließen.

Das Setup spiegelt gerade die Situation in der Gruppe H wieder. Für diesen Paragraphen gilt:,

Setup 3.13. *Sei p eine ungerade Primzahl. Sei $L = L_1...L_l$ mit $[L_i, L_j] = 1$, $i \neq j$, so dass gelten:*

(i) L_i sind klassische Gruppen vom Lie Typ über $GF(p^e)$ oder $E_7(p^e)$.

(ii) L ist nicht auflösbar und $p \nmid |Z(L)|$.

Sei N eine beliebige Gruppe vom Lie Typ über $GF(p^f)$ und $S \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Sei $S \leq M \leq N$ mit $L = F^*(M)$. Setze $S_0 = S \cap L$. Sei $A := S/S_0$ eine Gruppe von Körperautomorphismen der L_i mit $\mathbb{C}_A(L_i) = 1$, $i = 1, ..., l$ (insbesondere ist A zyklisch).

L erfüllt die Rolle des Levikomplementes aus $\mathbb{N}_H(Q)$. (ii) sagt, dass mindestens ein L_i quasieinfach ist; die übrigen können auch z.B. zentrale Erweiterungen von $L_2(3)$ sein.

In mehreren Schritten wollen wir $L = N$ beweisen.

Lemma 3.14. *L ist quasieinfach.*

Beweis: Angenommen falsch. Dann ist $l \geq 2$. Wähle $1 \neq r \in \mathbb{C}_{Z(S \cap L_1)}(A)$, d.h. $r \in Z(S)^\sharp$. Dann ist $L_2...L_l \leq \mathbb{C}_N(r) = C_N$. Setze $Q_N = O_p(C_N)$. Damit ist $Q_N \leq L_1$ (ist $1 \neq A$, so operiert A treu auf den L_i). N ist eine Gruppe vom Lie Typ, d.h. $\mathbb{C}_N(Q_N) \leq Q_N$. Aber dann wäre $Q_N \geq \mathbb{C}_N(Q_N) \geq L_2$, Widerspruch. □

Das nächste Lemma wird uns für den weiteren Verlauf die Anwendbarkeit von (2.25) sichern. Bemerke, da p ungerade ist, dass eine spezielle p-Gruppe keine (nicht-trivialen) Kranzprodukte enthalten kann.

Lemma 3.15. $N \not\cong G_2(3^f)$.

Beweis: Angenommen falsch. Dann ist insbesondere $p = 3$. Mit (3.14) ist L quasieinfach. Sei $r \in Z(S)^\sharp$. Seien $C_M = \mathbb{C}_M(r)$ und $C_N = \mathbb{C}_N(r)$ sowie $Q_M = O_p(C_M)$ und $Q_N = O_p(C_N)$. Dann ist $Q_N \cong (3^f)^2 \times (3^f)^{1+2}$ und $O^{p'}(C_N/Q_N) \cong SL_2(p^e)$. mit (2.14).

Mit (2.13) ist $Q_M \leq S_0 \leq L$ speziell oder $\overline{L} \cong L_2(p^e)$, $L_3(p^e)$ oder $U_3(p^e)$ und $Q_M = S$. Dann ist $Q_M \cap S_0$ speziell oder $\overline{L} \cong L_2(p^e)$ und $Q_M \cap S_0$ ist abelsch. In jedem Fall ist $Q_M \cap S_0$ speziell oder $\overline{L} \cong L_2(p^e)$ und $Q_M \cap S_0$ ist abelsch.

Ist $\overline{L} \cong L_2(p^e)$, so ist, da S nicht abelsch ist $S_0 < S$. Aber dann ist S ein Kranzprodukt, Widerspruch. Also ist $Q_M \cap S_0$ speziell und $Q_N \geq [Q_N, Q_M \cap S_0] \geq Z(Q_M \cap S_0) = Z(S_0)$.

Sei $a \in Q_N \setminus S_0$, also insbesondere $\overline{L} \cong L_3(p^e)$ oder $U_3(p^e)$. Dann induziert a einen Körperautomorphismus auf L, also mit (2.15) auch auf $Z(S_0)$. Aber dann enthält Q_N ein Kranzprodukt, Widerspruch.

Also ist $Q_N \leq S_0$. Es sind $Q_N/Z(Q_N)$ und $Z(Q_N)/\phi(Q_N)$ natürliche C_N/Q_N-Moduln und $\phi(Q_N)$ ein trivialer C_N/Q_N-Modul.

Sei $a \in S \setminus S_0$. Da $Q_N \leq S_0$ ist, ist $a \notin Q_N$, d.h. a bewirkt eine Transvektion auf $Q_N/Z(Q_N)$ und $Z(Q_N)/\phi(Q_N)$ und ist trivial auf $\phi(Q_N)$, ein Widerspruch, da a einen Körperautomorphismus auf S_0 bewirkt. Also ist $S = S_0$ und insbesondere $e = f$, da $GF(p^f) \cong Z(S_0) \cong GF(p^e)$ ist.

Es ist $S \leq N$ nicht von Nilpotenzklasse 2, also ist $Q_M \neq S_0 = S$. Da $C_M \leq C_N$ ist, ist $Q_N/\phi(Q_M)$ eine Summe zweier nichttrivialer C_M-Moduln. Dann ist L eine lineare Gruppe und insbesondere $Q_N = Q_M$, aber Q_N ist nicht speziell, Widerspruch. □

Lemma 3.16. *Es sind $S \leq L$ und $e = f$, d.h. L und N sind Gruppen vom Lie Typ über dem selben Körper. Weiter ist $O_p(\mathbb{C}_N(Z(S))) = O_p(\mathbb{C}_M(Z(S)))$.*

Beweis: Nach (3.14) ist L quasieinfach. L ist eine Gruppe vom Lie Typ über dem Körper $GF(p^e)$ und N über $GF(p^f)$. Mit (3.15) ist $N \not\cong G_2(3^f)$.

Es ist $S \leq M \leq N$. Seien $C_N = \mathbb{C}_N(Z(S))$ und $C_M = \mathbb{C}_M(Z(S))$. Dann sind C_N und C_M parabolische Untergruppen von N. Setze $Q_N = O_p(C_N)$ und $Q_M = O_p(C_M)$. Da $S \leq C_M \leq C_N$ ist, ist $Q_N \leq Q_M$. Es ist $Q_M \leq S_0$ speziell oder $Q_M = S$ und $S_0 \leq Q_M$ ist speziell oder $\overline{L} \cong L_2(p^e)$ und S_0 ist abelsch, vgl. (2.13).

Sei $\overline{L} \cong L_2(p^e)$. Dann ist S_0 abelsch. Mit (2.13) ist Q_N speziell oder abelsch. Ist $S = S_0$, so ist Q_N abelsch. Ist $S > S_0$, so ist S ein Kranzprodukt einer abelschen mit einer zyklischen Gruppe. In beiden Fällen kann S keine speziellen Untergruppen enthalten (p ist ungerade). Dann ist Q_N abelsch und $S = S_0$. Nun folgt $N = L$. Also können wir ab jetzt $\overline{L} \not\cong L_2(p^e)$ annehmen. Insbesondere ist $N \not\cong L_2(p^f)$. Da $N \not\cong G_2(3^f)$ ist, ist Q_N speziell.

$Q_M \cap S_0$ ist speziell und $Q_M \not\leq Z(Q_N)$. Dann ist $Q_N \geq [Q_N, Q_M \cap S_0] \geq Z(S_0)$, da S_0 nicht abelsch ist (in Q_N ist $[v, Q_N] = Z(Q_N) = Z(S_0)$ für alle $v \in Q_N \setminus Z(Q_N)$).

Sei $a \in Q_N \setminus S_0$. Dann induziert a einen Körperautomorphismus auf L und damit auch auf $Z(S_0)$ nach (2.15). Aber dann enthält Q_N ein Kranzprodukt, Widerspruch.

Also ist $Q_N \leq Q_M \cap S_0 =: Q_0$, d.h. Q_N liegt in einer speziellen Gruppe. Da $N \not\cong G_2(3^e)$ ist, ist Q_N speziell. Es ist $Z(Q_0) \leq \mathbb{C}_N(Q_N) \leq Z(Q_N)$ und $Z(Q_0) = Q_0' \geq Q_N' = Z(Q_N)$, d.h. $Z(S_0) = Z(Q_0) = Z(Q_N)$. Es ist $|Z(Q_0)| = p^e$ und $|Z(Q_N)| = p^f$, also ist $e = f$.

Sei $\langle a \rangle = S/S_0 \neq 1$. Es operiert $\langle a \rangle$ auf $Z(S_0)$, vgl. (2.15). $|S|$ ist eine Potenz von $p^f = p^e$, also ist auch $|\langle a \rangle|$ eine Potenz von p^e. Dann ist $p^e|e$, Widerspruch. Also ist $S = S_0$.

Ist $Q_M = S$, so ist $\overline{L} \cong L_3(p^e)$ oder $U_3(p^e)$ und $|S| = (p^e)^3$, vgl (2.13). Dann war auch $N \cong L_3(p^e)$ oder $U_3(p^e)$ und es folgt $Q_M = Q_N$. Also sei von nun an $Q_M < S$, d.h. $Q_M \leq S_0$ ist speziell mit $Z(Q_M) = Z(S_0)$.

Ist $\overline{L} \not\cong L_n(p^e)$, so ist mit (2.13) $Q_M/Z(Q_M)$ ein irreduzibler C_M-Modul. Da $C_M \leq C_N$ ist, folgt $Q_M = Q_N$. Sei $\overline{L} \cong L_n(p^e)$. Angenommen, $Q_N < Q_M$. Dann sind Q_M/Q_N und $Q_N/Z(Q_M)$ natürliche C_M/Q_M-Moduln. Dann müsste Q_M/Q_N trivial auf Q_M operieren, Widerspruch, da $\mathbb{C}_N(Q_N) \leq Q_N$ ist. Also folgt $Q_M = Q_N$. □

Proposition 3.17. *$L = N$.*

Beweis: Mit (3.14) ist L quasieinfach. Mit (3.16) ist $S \leq L$ und L und N sind Gruppen vom Lie Typ über $GF(p^e)$. Setze $C_N = \mathbb{C}_N(Z(S))$, $C_M = \mathbb{C}_M(Z(S))$ und $Q_N = O_p(C_N)$, $Q_M = O_p(C_M)$. Mit (3.16) folgt $Q_N = Q_M$.

Angenommen $L \neq N$. Dann sind L und N Gruppen verschiedenen Lie Typs. Sind $|L|_p = (p^e)^r$ und $|N|_p = (p^e)^s$, so ist $r = s$. r und s sind mit (2.17) gegeben.

Seien L und N beides klassische Gruppen vom Lie Typ.

Ist $\{\overline{N}, \overline{L}\} = \{S_{2n}(p^e), \Omega_{2n+1}(p^e)\}$, so ist $|\overline{L}| = |\overline{N}|$ aber $N \not\cong L$, Widerspruch.

Ist $\{\overline{N}, \overline{L}\} \neq \{S_{2n}(p^e), \Omega_{2m}^{\pm}(p^e)\}$ oder $\{\Omega_{2n+1}(p^e), \Omega_{2m}^{\pm}(p^e)\}$, so ist mit (2.17) $\{r, s\} = \{n^2, m(m-1)\}$, aber $m(m-1)$ ist kein Quadrat.. Angenommen $\{\overline{N}, \overline{L}\} = \{S_{2n}(p^e), L_m(p^e)\}$ oder $\{S_{2n}(p^e), U_n(p^e)\}$. Da $Q_N = Q_M$ ist, folgt mit (2.13) $2(n-1) = 2(m-2)$, d.h. $m = n+1$. Das hieße aber mit (2.17) $\{r, s\} = \{n^2, \frac{1}{2}n(n+1)\}$ bzw. $n^2 = n$. Dann ist $n = 1$ und $N = L$.

Sei $\{\overline{N}, \overline{L}\} = \{L_n(p^e), U_m(p^e)\}$. Mit (2.17) folgt $n = m$. Da $U_n(p^e)$ und $L_n(p^e)$ die Lieränge $[n/2]$ bzw $n-1$ haben, müsste für $n \geq 3$ nach (2.26) $\overline{L} \cong U_n(p^e)$ und $\overline{N} \cong L_n(p^e)$ sein, aber $|U_n(p^e)| > |L_n(p^e)|$. Für $n = 2$ sind die Gruppen isomorph, Widerspruch.

Sei $\{\overline{N}, \overline{L}\} = \{\Omega_{2n}^{+}(p^e), \Omega_{2m}^{-}(p^e)\}$. Mit (2.17) folgt $n = m$. Die Lieränge von $\Omega_{2n}^{+}(p^e)$ und $\Omega_{2n}^{-}(p^e)$ sind n bzw $n-1$, aber $\Omega_{2n}^{-}(p^e)$ ist nicht in $\Omega_{2n}^{+}(p^e)$ involviert, Widerspruch.

Sei nun $\{\overline{N}, \overline{L}\} = \{L_n(p^e), \Omega_{2m}^{\pm}(p^e)\}$ oder $\{U_n(p^e), \Omega_{2m}^{\pm}(p^e)\}$, $m \geq 4$. Da $Q_N = Q_M$ ist, folgt mit (2.13) $1 + 2(n-2) = 1 + 4(m-2)$, womit $n = 2m-2$ folgt. Nun ist mit (2.17) $m(m-1) = n(n-1)/2 = (2m-2)(2m-3)/2$. Dann ist $0 = m^2 - 4m + 3$, also $m = 1$ oder 3, Widerspruch.

Also sind L und N nicht beide klassisch. Sei L eine klassische Gruppe vom Lie Typ und N eine Ausnahmegruppe vom Lie Typ. Da $r = s$ ist, ergeben sich mit (2.17) folgende Paarungen für L und N:

	$\overline{L}$	$\overline{N}$	$m_p(Q_M/Z(Q_M))$	$m_p(Q_N/Z(Q_N))$
(1)	$L_4(p^e), U_4(p^e)$	$G_2(p^e)$	$4e$	$2e$
(2)	$L_9(p^e), U_9(p^e)$	$E_6(p^e), {}^2E_6(p^e)$	$14e$	$20e$
(3)	$L_{15}(p^e), U_{15}(p^e)$	$E_8(p^e)$	$26e$	$56e$
(4)	$L_3(p^e), U_3(p^e)$	${}^2G_2(p^e)$	$2e$	$2e$
(5)	$S_{12}(p^e)$	$E_6(p^e), {}^2E_6(p^e)$	$10e$	$20e$
(6)	$\Omega_{13}(p^e)$	$E_6(p^e), {}^2E_6(p^e)$	$18e$	$20e$
(7)	$\Omega_8^{\pm}(p^e)$	${}^3D_4(p^e)$	$8e$	$8e$

Da $Q_M = Q_N$ ist, müssen auch $m_p(Q_M/Z(Q_M))$ und $m_p(Q_N/Z(Q_N))$ übereinstimmen. Mit (2.13) und (2.14) erhält man die in den Spalten 3 und 4 angegebenen Werte. Dann sind L und N wie in (4) oder (7). Mit (2.26) muss der Lierang von L kleiner gleich dem Lierang von N sein. Also bleibt $\overline{L} \cong U_3(p^e)$ und $\overline{N} \cong {}^2G_2(p^e)$; insbesondere $p = 3$. Es sind $|\overline{L}| = 3^{3e}(3^{3e}+1)(3^{2e}-1)$ und $|\overline{N}| = 3^{3e}(3^{3e}+1)(3^e-1)$, d.h. $|L| > |N|$, Widerspruch.

Sei nun $L \cong E_7(p^e)$. Dann ist $r = 63$. Ist N eine Ausnahmegruppe vom Lie Typ, so ist $s \neq 63$ mit (2.17). Ist N eine klassische Gruppe, so hätte ein Beispiel bereits in obiger Tabelle erscheinen müssen mit vertauschten Rollen für N und L, da bei der Bestimmung der Paarungen nur r und s berücksichtigt wurden, Widerspruch.

Also sind N und L Gruppen des selben Lie Typs, d.h. $L = N$. $\square$

Kapitel 4

Der Normalisator einer großen Untergruppe

Wir betrachten Gruppen in der Liste aus (3.5). Im Folgenden nutzen wir die (bekannte) Struktur von $M^0 \leq K$ aus, aber vor allen Dingen die Nichtauflösbarkeit von $\widetilde{C} \cap H$. In den meisten Fällen ist dies $\mathbb{N}_H(Q)$, bis auf

4.1 Eine Ausnahme

Im Fall Linearer Gruppen ist nicht notwendigerweise $\widetilde{Q} = Q$. Dann gilt aber:

Lemma 4.1. *Es gelte (1.15). Sei $K \cong L_n(p^e)$, $n \geq 3$, und $O_p(\widetilde{C} \cap H) \neq Q$. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

Beweis: Nach Lemma (3.4) ist $\widetilde{Q} \leq Q$ und $\widetilde{C} \cap K$ eine maximal parabolische Untergruppe von K. Da $\widetilde{C} \cap K$ nicht auflösbar ist, ist $L_{\widetilde{C}} := E(\widetilde{C} \cap K/\widetilde{Q})$ eine quasieinfache Gruppe mit $\overline{L}_{\widetilde{C}} \cong L_{n-1}(p^e)$ und $\widetilde{Q}$ ein natürlicher, irreduzibler Modul für $L_{\widetilde{C}}$. Es ist $[\widetilde{Q}, Q, Q] \leq [Z(Q), Q] = 1$, also operiert $A = Q/\widetilde{Q}$ quadratisch auf $\widetilde{Q}$. Es ist $A \leq L_{\widetilde{C}}$.

Sei $F = F(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$. Angenommen $[F, L_{\widetilde{C}}] \neq 1$. Sei o.E. $F = [F, L_{\widetilde{C}}]$. Setze $X = \langle F, L_{\widetilde{C}} \rangle$. Da $L_{\widetilde{C}}$ quasieinfach ist, ist $X = \langle A^X \rangle$. Mit (2.4) folgt $|A| = p = 3$. Dann ist $|Q| = 3^3$, also $F^*(H) \cong L_3(3)$, und $\overline{L_{\widetilde{C}}} \cong L_2(3)$ ist auflösbar, Widerspruch. Also ist $[L_{\widetilde{C}}, F] = 1$. Insbesondere hat $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$ eine Komponente.

Sei N eine Komponente von $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$. Setze $X = \langle N, L_{\widetilde{C}} \rangle$. Nach (2.1) ist $[N, L_{\widetilde{C}}] \neq 1$. Dann ist $L_{\widetilde{C}} \leq N$ oder $[N, L_{\widetilde{C}}]$ ist ein Produkt von Komponenten, die $L_{\widetilde{C}}$ transitiv permutiert. In jedem Fall ist $X = [N, L_{\widetilde{C}}]L_{\widetilde{C}} = \langle A^X \rangle$. Mit (2.5) folgt zunächst $N \trianglelefteq \widetilde{C}$, also $L_{\widetilde{C}} \leq N$. Mit (2.6) ist dann N eine Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik p oder $|A| = p = 3$. Im ersten Fall folgt $N = L_{\widetilde{C}}$ mit (3.17). Im zweiten Fall ist wieder $F^*(H) \cong L_3(3)$, Widerspruch.

Also ist $L_{\widetilde{C}}$ die einzige Komponente von $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$, d.h. $L_{\widetilde{C}} \trianglelefteq \widetilde{C}/\widetilde{Q}$. Sei $u \in \widetilde{C} \setminus H$. Dann wird $L_{\widetilde{C}}$ von u normalisiert. Induziert u einen inneren Automorphismus auf

$L_{\widetilde{C}}$, so gibt es bereits ein $g \in L_{\widetilde{C}}$, das denselben bewirkt. Dann ist ug^{-1} trivial auf $L_{\widetilde{C}}$ und $ug^{-1} \notin L_{\widetilde{C}}$. Also können wir annehmen, dass u einen äußeren oder trivialen Automorphismus induziert. u induziert keinen Graphautomorphismus, da u auch auf $\widetilde{Q}$ operieren muss, d.h. $\widetilde{C} \cap M$ ist u-invariant.

Die parabolischen von H korrespondieren zu

mit Fundamentalsystem $\Gamma = \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Nach (3.5) ist $E(M/O_p(M)) \cong SL_m(p^e) * SL_{n-m}(p^e)$, d.h. M_0 korrespondiert zu $\Gamma \setminus \{a_m\}$. Seien zuerst m, $n - m \geq 2$. Dann ist $n \geq 4$. Es ist $Y_M = O_p(M)$ der Tensorproduktmodul. Sei $N = N_1 * N_2$ ein Levikomplement von M mit $N_1 \cong SL_m(p^e)$, $N_2 \cong SL_{n-m}(p^e)$ und $S \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Dann ist $N_1 \leq \widetilde{C} \cap N$. Da Y_M und $\widetilde{Q}$ abelsch sind, ist $Y_M \cap \widetilde{Q} \leq Z(O_p(\widetilde{C} \cap M))$. Weiter ist $O_p(\widetilde{C} \cap M)' = [\widetilde{Q}Y_M, \widetilde{Q}Y_M] \leq \widetilde{Q} \cap Y_M$. Also ist $\widetilde{Q} \cap Y_M = Z(O_p(\widetilde{C} \cap M))$ nach (2.25) und damit u-invariant. Setze $V := O_p(\widetilde{C} \cap M)/(\widetilde{Q} \cap Y_M)$. Insbesondere ist V ein N_1-Modul.

Es ist Y_M eine Summe natürlicher Moduln für N_1, einer davon ist $\widetilde{Q} \cap Y_M$. Also ist auch $V_1 := Y_M/(\widetilde{Q} \cap Y_M)$ eine Summe natürlicher Moduln für N_1. Da $\widetilde{Q}$ natürlicher Modul für $L_{\widetilde{C}}$ ist und $N_1 \leq \widetilde{C}$, ist N_1 trivial auf $V_2 := \widetilde{Q}/(\widetilde{Q} \cap Y_M)$. Es ist $V = V_1 V_2$. Weiter ist $N_1 S \leq \widetilde{C}$ u-invariant, da u keinen Graphautomorphismus induziert, und $N_1 S$ eine parabolische Untergruppe von $\widetilde{C}$ ist. Nun ist $V_1^u = [N_1 S, V]^u = [(N_1 S)^u, V^u] = [N_1 S, V] = V_1$. Aber $V_1 = Y_M/(Y_M \cap \widetilde{Q})$, also ist Y_M u-invariant und damit auch M und M^0. Nun ist $\langle LQ, M^0 \rangle = K$ auch u-invariant und damit $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$.

Sei $E(M_0/O_p(M_0)) \cong SL_{n-1}(p^e)$, $n \geq 3$. Es sind $Q = Y_M \widetilde{Q}$ und $M_0 \cap \widetilde{C} = \mathbb{N}_{F^*(H)}(Q)$.

Für $n \geq 4$ existiert ein Levikomplement $L \cong SL_{n-2}(p^e)$ von $\mathbb{N}_K(Q)$. Es ist $Q/Z(Q) = V_1 \oplus V_2$ mit V_1 und V_2 irreduzible L-Moduln. Es ist V_2 der duale Modul zu V_1 für L. O.E. ist $V_1 = Y_M/Z(Q)$ und $V_2 = \widetilde{Q}/Z(Q)$. Es wird $\widetilde{C} \cap M_0$ von u normalisiert, also auch Q und LQ/Q.

Angenommen, V_1 wird nicht von u normalisiert. Wir haben $V_1^u \leq Q/Z(Q)$. Seien $x, y \in Z_2(S_0) \setminus Z(Q)$ mit $xZ(Q) \in V_1$ und $yZ(Q) \in V_2$. Seien $L_x = \mathbb{C}_L(x)$ und $L_y = \mathbb{C}_L(y)$ also Punktstabilisatoren in L. Da V_1 und V_2 duale Moduln sind, sind $[xZ(Q), L_Y] = X$ und $[yZ(Q), L_X] = Y$ Hyperebenen in V_1 bzw V_2. Angenommen $V_1 \neq V_1^u \neq V_2$. Dann ist o.E. $xyZ(Q) \in V_1^u$. Also ist, da $yZ(Q) \in Y, xZ(Q) \in X$,

$$V_1^u \geq \left\langle (xyZ(Q))^{L_x}, (xyZ(Q))^{L_y} \right\rangle \geq \left\langle xY^\sharp, yX^\sharp \right\rangle \geq \langle X, Y \rangle ,$$

d.h. $xZ(Q), yZ(Q) \in V_1^u$. Aber V_1^u ist L-invariant, d.h.

$$V_1^u \geq \left\langle x^L Z(Q), y^L Z(Q) \right\rangle = \langle V_1, V_2 \rangle = Q/Z(Q),$$

Widerspruch. Also folgt $V_1^u = V_1$ oder V_2. Es ist $\widetilde{Q}$ das Urbild von V_2, also u-invariant. Dann ist $V_1^u \neq V_2$, d.h. $V_1^u = V_1$ und Y_M ist u-invariant. Damit ist $\left\langle M^0, K \cap \widetilde{C} \right\rangle$ u-invariant und $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$.

Sei nun $n = 3$. Es ist $Q = S \cap F^*(H)$ und Q wird von u normalisiert. Sei $z \in Z(L_{\widetilde{C}})$ von der Ordnung 2. Dann ist $[u, z] = 1$ und $\mathbb{C}_Q(z)$ ist u-invariant. $Z(Q)$ ist u-invariant, also auch $\langle Z(Q), \mathbb{C}_Q(z)\rangle = Y_M$. Wieder ist K u-invariant, und damit $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$. □

Mit (4.1) und (3.4) können wir uns im Weiteren stets auf den Fall $\widetilde{Q} = O_p(\widetilde{C}) = Q$ beschränken. Insbesondere operiert nach unserer Annahme mit (3.6) dann $\widetilde{C}$ treu auf Q.

4.2 Nilpotente Normalteiler

In diesem Paragraphen wollen wir die Beziehung zwischen $F(\widetilde{C}/Q)$ und den Komponenten von L untersuchen. Am Ende werden wir sehen, dass $\widetilde{C}/Q$ Komponenten besitzt. Für diesen Paragraphen gilt:

Setup 4.2. *Es gelten die Voraussetzungen aus (3.9). Setze*

$$N = F(\widetilde{C}/Q).$$

Lemma 4.3. *Sei $F^*(H) \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$. Dann ist $[N, E(L)] = 1$.*

Beweis: Angenommen, die Aussage ist falsch.

Sei $K \cong \Omega_8^-(3)$. Dann ist $E(L) = L_2 \cong L_2(9)$, also $[N, L_2] \neq 1$. Es ist $Q \cong 3^{1+8}$, also ist $\mathrm{Aut}(Q) \cong Sp_8(3)$, $|Sp_8(3)| = 2^{15} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41$.

Ist $[N, L_1] = 1$, so ist mit (2.1) $NL_2 \lesssim GL_4(3)$. Mit [ccnpw] folgt ein Widerspruch. Also ist $[N, L_1] \neq 1 \neq [N, L_2]$. Insbesondere ist für $F \leq N$ mit $[F, N_i] \neq 1$ auch $[F, N_j] \neq 1$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Da $N \lesssim Sp_8(3)$ ist, ist dann N eine 2-Gruppe.

Sei $F \leq N$ abelsch mit $[F, L] \neq 1$, also $[F, L_1] \neq 1 \neq [F, L_2]$. O.E. operiert L irreduzibel auf F. Die kleinste Darstellung von A_6 über $GF(2^f)$ ist 4-dimensional für $f = 1$ und mindestens 8-dimensional für $f > 1$, siehe [wil]. F ist eine Summe von r vielen L_2-Moduln Da $L_1 \leq \mathbb{C}_L(L_2)$ folgt mit (2.1) $L_1 \lesssim GL_r(2^f)$. Da L_1 nicht in $GL_2(2)$ involviert ist, ist $r \geq 3$ oder $f \geq 2$. In jedem Fall folgt $|F| > 2^8$. Aber F operiert auf V, also $F \lesssim GL_8(3)$. Mit (2.19) folgt $m_p(F) \leq 8$, Widerspruch.

Also zentralisiert L jede charakteristische, abelsche Untergruppe von N. Dann ist N speziell nach (2.8). Sei $W \leq V$ irreduzibler N-Modul. Dann ist $Z(N/\mathbb{C}_N(W))$ zyklisch. Also ist $N/\mathbb{C}_N(W)$ extraspeziell von der Ordnung 2^{1+2n}. Eine treue irreduzible Darstellung von N hat dann mindestens den Grad 2^n nach (2.9). Aber $N \lesssim GL_8(3)$, also $2^n \leq 8$ mit (2.19). Dann ist $n \leq 3$ und $L \lesssim O_6^{\pm}(2)$. Mit [ccnpw] folgt ein Widerspruch.

Also sei ab jetzt $K \not\cong \Omega_8^-(3)$. Es ist $K \not\cong \Omega_7(3)$, da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist. Da $K \not\cong \Omega_8^-(3)$ ist $L = E(L)$. Ist $K \cong \Omega_7(p^e)$, so ist $L_2 \cong L_2(p^e)$, ist $K \cong \Omega_8^-(p^e)$, so ist $L_2 \cong L_2(p^{2e})$. Weiter ist N eine p'-Gruppe, da $S \leq H$ ist. Angenommen $[N, L] \neq 1$. Dann ist $N \not\leq LQ/Q$.

Angenommen, $F = [N, L_1] \neq 1$. Seien $X = \langle F, L_1Q/Q\rangle$ und $A = (S \cap L_1)Q/Q$. Dann ist $\langle A^X \rangle = X$. Es operiert A quadratisch auf V, also auch auf einem irreduziblen X-invarianten Untermodul von V. Nach (2.4) ist $|A| = 3$. Dann ist $F^*(H) \cong \Omega_7(3)$ oder $\Omega_8^-(3)$, Widerspruch. Also ist $[N, L_1] = 1$.

Mit (2.1) folgt $N \lesssim GL_4(p^e)$.

Angenommen L_2 operiert treu auf einer abelschen q-Untergruppe E von N. Mit (2.19) folgt $m_q(E) \leq 4$. Dann ist $l(L_2) \leq 4$. Mit (2.21) folgt p^e bzw $p^{2e} \leq 9$. Da $K \not\cong \Omega_8^-(3)$ ist, ist $K \cong \Omega_7(p^e)$ mit $p^e \leq 9$. Dann ist mit (2.1) sogar $N \lesssim GL_3(p^e)$, $p^e \leq 9$. Mit [ccnpw] folgt ein Widerspruch.

Also zentralisiert L_2 jede charakteristische, abelsche Untergruppe von N. Dann ist N speziell nach (2.8). Sei $W \leq V_1$ irreduzibler N-Modul. Dann ist $Z(N/\mathbb{C}_N(W))$ zyklisch. Also ist $N/\mathbb{C}_N(W)$ extraspeziell von der Ordnung q^{1+2n}. Eine treue irreduzible Darstellung von N hat dann mindestens den Grad q^n nach (2.9). Aber $N \lesssim GL_4(p^e)$, also $q^n \leq 4$, $p \neq q$. Dann sind $q = 2$ und $n \leq 2$. Es operiert L_2 treu auf $N/Z(N)$, d.h. $L_2 \lesssim GL_4(2) \cong A_8$. Da $K \not\cong \Omega_8^-(3)$ ist, folgt $K \cong \Omega_7(p^e)$. Dann ist aber mit (2.1) sogar $N \lesssim GL_3(p^e)$ und somit $q^n \leq 3$, d.h. $q^n = 2$. Dann ist aber $L_2 \lesssim GL_2(2)$, Widerspruch. □

Lemma 4.4. $[N, E(L)] = 1$.

Beweis: Angenommen falsch. Sei zunächst $[L_2, N] = 1$. Dann ist $L_1 \neq 1$ quasieinfach und K eine orthogonale Gruppe. Mit (2.1) folgt $\langle [N, L_1], L_1\rangle \lesssim GL_2(p^e)$. Es ist schon $L_1 \cong SL_2(p^e)$, also ist $1 \neq [N, L_1] \leq L_1$, Widerspruch.

Dann ist $F = [L_2, N] \neq 1$. Setze $X = \langle F, L_2Q/Q\rangle$. Mit (4.3) ist $K \not\cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$. Nach (3.11) gibt es eine Untergruppe $1 \neq A \leq L_2Q/Q$, die quadratisch auf V operiert. Da L_2 quasieinfach ist, ist $X = \langle A^X \rangle$. Mit (2.4) folgt $|A| = p = 3$, $F(X) = O_2(X) = Z(X)E$ mit E einer extraspeziellen Gruppe der Weite n und $X/O_2(X) \cong A_{2n+1}$, A_{2n+2}, $GU_n(2)$, $\Omega_{2n}^{\pm}(2)$ oder $Sp_{2n}(2)$. Weiter ist $F(X)/Z(X)$ ein natürlicher Modul für $X/F(X)$ und $F(X) = Z(X)E$ mit einer extraspeziellen Gruppe E der Ordnung 2^{1+2n}.

Da $|A| = p = 3$ für jeden Offender A von L_2Q/Q ist, ist mit (3.12) $K \in \mathcal{Q}$ und daraufhin $L_2 \cong U_3(3)$, $U_4(3)$, $S_4(3)$, $S_6(3)$, $U_6(3)$ oder $E_7(3)$. Aber es ist $X/F(X) \cong L_2$ eine alternierende Gruppe oder eine Gruppe vom Lie Typ in Charakteristik 2. Mit (2.27) geht das nur für $S_4(3) \cong U_4(2)$, d.h. $K \cong \Omega_9(3)$.

Da $L_2 \cong U_4(2)$ auf $E/Z(E)$ operiert, folgt mit (2.21) $2n \geq 10$. Mit (2.9) hat die kleinste treue, irreduzible Darstellung von E den Grad 25. Aber $|V| = 3^{10}$, Widerspruch. □

4.3 Komponenten

In diesem Kapitel wollen wir die Komponenten von $\widetilde{C}/Q$ genauer untersuchen. Am Ende werden wir einen einen geeigneten Normalteiler von $\widetilde{C}/Q$ finden, der uns im letzten Abschnitt dieses Kapitels $\widetilde{C}$ genau bestimmen lässt. Für diesen Paragraphen gilt:

Setup 4.5. *Es gelten die Bezeichnungen aus (3.9). Sei*

$$N \in E(\widetilde{C}/Q) \text{ mit } [N, L] \neq 1.$$

Lemma 4.6. *Ist $N \not\leq L$, so ist $[N, L_2] \neq 1$.*

Beweis: Angenommen falsch. Dann ist $[N, L_2] = 1$. Da $[N, L] \neq 1$ ist, ist $1 \neq L_1$ und K eine orthogonale Gruppe. Mit (2.1) ist $N \lesssim GL_2(p^e)$. Es ist $L_1 \cong SL_2(p^e)$, also $N \leq L_1$, Widerspruch. □

Lemma 4.7. *Sei $F^*(H) \cong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$. Dann ist $E(\widetilde{C}/Q) = E(LQ/Q)$.*

Beweis: Angenommen falsch. Mit (4.6) ist $[N, L_2] \neq 1$. Da $\widetilde{C} \cap H$ nicht auflösbar ist, ist $K \ncong \Omega_7(3)$.

Sei $K \cong \Omega_8^-(3)$. Ist $[N, L_1] = 1$, so ist $N \lesssim GL_4(3)$ mit (2.1), also auch $\langle N, L_2 \rangle \lesssim GL_4(3)$. Mit [ccnpw] folgt ein Widerspruch. Also ist $[N, L_1] \neq 1 \neq [N, L_2]$. Angenommen L_2 oder $L \leq N$. Mit (3.17) ist N keine Gruppe vom Lietyp. Da N auf V operiert ist $R(N) \leq 8$. Ist N eine sporadische Gruppe, so folgt mit (2.23) $N \cong M_{11}$, M_{12}, M_{22}, J_1 oder J_2. Mit [ccnpw] folgt $N \cong M_{11}$ oder M_{22} und $(L_1Q/Q) \cap N \leq Z(N)$. Dann ist mit (2.1) aber sogar $N \lesssim GL_4(3)$, aber $R(N) \geq 5$ mit (2.23), Widerspruch. Also kann $N \cong A_l$ nur eine alternierende Gruppe sein. Da $|L|_3 = 3^3$ ist, folgt $l \leq 8$. Insbesondere ist $(L_1Q/Q) \cap N \leq Z(N)$, also mit (2.1) wieder $N \lesssim GL_4(3)$. Mit [ccnpw] folgt ein Widerspruch.

Also ist $L_2 \not\leq N$. Da L_2 quasieinfach ist, ist N nicht L_2 invariant, d.h. N^{L_2} ist eine Bahn von Komponenten von $\widetilde{C}/Q$. Mit (2.24) haben wir mindestens 6 Komponenten. Aber dann kann $\left\langle N^{L_2} \right\rangle$ nicht auf V operieren, Widerspruch.

Also ist $K \ncong \Omega_8^-(3)$. Sei zunächst $[N, L_1] \neq 1$. Setze $X = \langle N, L_1Q/Q \rangle$. Da $K \ncong \Omega_7(3)$ oder $\Omega_8^-(3)$ ist, ist L_1 quasieinfach. $A = (S \cap L_1)Q/Q$ operiert quadratisch auf V. Da L_1 quasieinfach ist, ist entweder $L_1 \leq N$ oder $[N, L_1]$ ist ein Produkt von Komponenten, die L_1 transitiv permutiert. In jedem Fall ist $X = [N, L_1]L_1 = \left\langle A^X \right\rangle$. Mit (2.5) ist $N \trianglelefteq X$. Da L_1 qusieinfach ist, folgt $L_1 \leq N$. Mit (2.6) ist X eine Gruppe vom Lietyp in Charakteristik p oder $|A| = p = 3$. Im ersten Fall folgt $L_1 = N$ mit (3.17). Im zweiten Fall wäre $K \cong \Omega_7(3)$ oder $\Omega_8^-(3)$, Widerspruch.

Also ist $[N, L_1] = 1$ und es folgt $X = \langle N, L_2 \rangle \lesssim GL_4(p^e)$ mit (2.1). Mit (2.26) hat X höchstens drei Komponenten.

Angenommen $L_2 \not\leq N$. Da L_2 quasieinfach ist, permutiert L_2 die Komponenten von $\widetilde{C}/Q$. Nach (2.24) ist N^{L_2} eine Bahn von mindestens 5 Komponenten. Aber $\langle N, L_2 \rangle$ operiert auf den V_i, $\dim V_i = 4$, Widerspruch.

Also ist $L_2 < N$. Mit (3.17) ist N keine Gruppe vom Lie Typ. Mit (2.23) ist N keine sporadische Gruppe, da $R(N) \leq 4$ ist. Dann ist $N \cong A_l$ eine alternierende Gruppe. Mit (2.22) folgt $l \leq 7$. Dann sind $(L_2, N) = (L_2(5), A_6)$, $(L_2(5), A_7)$, $(L_2(9), A_7)$, $(L_2(7), A_7)$. Da $K \ncong \Omega_8^-(3)$ ist, sind diese Paarungen nur für $K \cong \Omega_7(p^e)$ möglich. Dann ist insbesondere $N \lesssim GL_3(p^e)$, da $|V_i| = (3^e)^3$ ist.

Es ist $5, 7 | |A_7|$ aber $5 \nmid |GL_3(7)|$ und $7 \nmid |GL_3(5)|$, also ist $N \ncong A_7$. Es ist A_6 nicht in $GL_3(5)$ involviert, vgl. [ccnpw], d.h. $N \ncong A_6$. Damit folgt die Aussage. □

Lemma 4.8. $E(\widetilde{C}/Q) = E(LQ/Q)$.

Beweis: Angenommen falsch. Mit (4.7) ist $K \ncong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$. Mit (4.6) ist $[N, L_2] \neq 1$. Setze $X = \langle N, L_2Q/Q \rangle$. Da $K \ncong \Omega_7(p^e)$ oder $\Omega_8^-(p^e)$ ist, gibt es mit (3.11) eine Untergruppe $1 \neq A \leq L_2Q/Q$, die quadratisch auf V operiert. Da L_2 quasieinfach ist, ist entweder $L_2 \leq N$ oder $[N, L_2]$ ist ein Produkt von Komponenten, die L_2 transitiv permutiert. In jedem Fall ist $X = [N, L_2]L_2 = \left\langle A^X \right\rangle$. Mit (2.5) folgt $N \trianglelefteq X$, also $N = X \geq L_2$. Mit (2.6) ist X entweder eine Gruppe vom Lietyp in Charakteristik p, oder $|A| = p = 3$ und $N = X$ ist isomorph zu einer der Gruppen aus (2.6)(a)-(c). Im ersten Fall folgt $X = L_2$ mit (3.17).

Also ist $|A| = p = 3$ für jeden Offender A von L_2Q/Q. Mit (3.12) ist dann $K \in \mathcal{Q}$ und somit $L_2 \cong U_3(3)$, $S_4(3)$, $U_4(3)$, $S_6(3)$, $U_6(3)$ oder $E_7(3)$. Insbesondere besitzt L keine äußeren Automorphismen der Ordnung 3, d.h. $|(LQ/Q) \cap X|_3 = |X|_3$.

Sei X eine der Gruppen aus (2.6)(c), d.h. $X \cong \Omega_8^+(2)$, $G_2(4)$, $S_6(2)$, Co_1, Suz oder J_2. Mit [ccnpw] erhält man $U_3(3) \leq J_2 \leq G_2(4)$ und $S_4(3) \leq S_6(2)$.

Ist $K \cong U_5(3)$ und $L_2 \cong U_3(3)$, so operiert X auf der extraspeziellen Gruppe Q der Ordnung 3^{1+6}, also $X \leq \mathrm{Aut}(Q) \cong Sp_6(3)$. Aber $5^2 | |J_2|$ und $5^2 \nmid |Sp_6(3)|$, Widerspruch.

Sei also $K \cong \Omega_9(3)$ und $L_2 \cong S_4(3) \cong L_2Q/Q \leq X \cong S_6(2)$. Ist $[X, L_1] \neq 1$, dann ist wegen $|S_6(2)|_3 = 3^4$, dass $3 | |L_1Q/Q : L_1Q/Q \cap X|$. Aber $S_6(2)$ hat keinen äußeren Automorphismus der Ordnung 3. Also ist $[L_1, X] = 1$. Somit operiert wegen (2.1) X auf V_1 und V_2, d.h. $X \lesssim GL_5(3)$. Es ist $7 | |S_6(2)|$ aber $7 \nmid |GL_5(3)|$, Widerspruch.

Sei X wie in (2.6)(b), d.h. $X/Z(X) \cong A_n$, $n \geq 5$, $n \neq 6$, und $|Z(X)| = 2$.

Seien $K \cong E_8(3)$ und $L_2 \cong E_7(3)$. Dann involviert L_2 eine $L_7(3)$. Also ist $P(L_2) \geq P(L_7(3)) = \frac{1}{2}(3^7 - 1)$ nach (2.24). Mit (2.22) folgt $R_p(X) \geq \frac{1}{2}(3^7 - 1) - 2$, aber X operiert auf V, d.h. $R_p(X) \leq 56$ mit (2.13), Widerspruch.

Ist $K \cong \Omega_{10}^-(3)$, $F_4(3)$ oder ${}^2E_6(3)$, so ist $L_2 \cong U_4(3)$, $S_6(3)$ oder $U_6(3)$ entsprechend und $|V| \leq 3^{20}$. Mit (2.24) folgt $n \geq P(L_2) \geq 328$, d.h. $R_p(X) \geq 328-2 = 326$ mit (2.22). Aber X operiert auf V, also $R_p(X) \leq 20$, Widerspruch.

Also ist $K \cong U_5(3)$ oder $\Omega_9(3)$, d.h. $L_2 \cong U_3(3)$ oder $S_4(3)$ und $|V| \leq 3^{10}$. Mit (2.22) folgt $n \leq 12$. Nach (2.24) haben $S_4(3)$ und $U_3(3)$ keine Permutationsdarstellung vom Grad ≤ 12, Widerspruch.

Also bleibt mit (2.6)(a) $X \cong PGU_n(2)$, $n \geq 5$. Ist $K \cong F_4(3)$, ${}^2E_6(3)$ oder $E_8(3)$ und $L_2 \cong U_6(3)$, $S_6(3)$ oder $E_7(3)$ entsprechend, so folgt mit (2.21) $l(L_2) \geq 13$, d.h. $n \geq 13$. Dann ist wieder mit (2.21) $l(X) \geq 2^n - 1/3 \geq 2^{12} - 1/3$. Aber X operiert auf V, $|V| \leq 3^{56}$, d.h. $l(X) \leq 56$, Widerspruch.

Dann ist $K \cong \Omega_9(3)$, $\Omega_{10}^-(3)$ oder $U_5(3)$ und $L_2 \cong S_4(3)$, $U_4(3)$ oder $U_3(3)$ entsprechend. Insbesondere ist $|\widetilde{C}/Q|_3 \leq 3^7$. Es ist $|PGU_6(2)|_3 = 3^7$ und $|PGU_7(2)|_3 = 3^8$. Da $PGU_k(2) \lesssim PGU_n(2)$ für $k \leq n$, folgt $n = 5, 6$ oder 7. Mit [ccnpw] und [wil] folgt ein Widerspruch. $\square$

Proposition 4.9. *$LQ/Q \trianglelefteq \widetilde{C}/Q$.*

Beweis: Es ist $[F(\widetilde{C}/Q), E(LQ/Q)] = 1$ mit (4.4). Dann ist $\mathbb{C}_{\widetilde{C}/Q}(F(\widetilde{C}/Q)) \not\leq F(\widetilde{C}/Q)$, d.h. $F(\widetilde{C}/Q) \neq F^*(\widetilde{C}/Q)$. Also hat $\widetilde{C}/Q$ Komponenten. Mit (4.8) folgt $E(\widetilde{C}/Q) = E(LQ/Q) \trianglelefteq \widetilde{C}/Q$.

Sei $E(LQ/Q) \neq LQ/Q$. Dann ist L kein Produkt quasieinfacher Gruppen. Somit ist K eine orthogonale Gruppe mit $L_1 \cong SL_2(3)$ und $L_2 = E(\widetilde{C}/Q)$ ist quasieinfach. Sei $u \in \widetilde{C}/Q$. Dann ist $1 = [L_1Q/Q, L_2Q/Q]^u = [L_1^uQ/Q, L_2^uQ/Q] = [L_1^uQ/Q, L_2Q/Q]$. Also ist mit (2.1) $L_1^uQ/Q \leq L_1Q/Q$, d.h. $L_1Q/Q \trianglelefteq \widetilde{C}/Q$ und damit $LQ/Q \trianglelefteq \widetilde{C}/Q$. $\square$

4.4 $\widetilde{C} \leq H$

Wir wissen, $LQ/Q \trianglelefteq \widetilde{C}/Q$. Wir wollen zeigen, dass jedes $u \in \widetilde{C}$, dass LQ normalisiert, schon in H liegt.

Lemma 4.10. *Es gelte (1.15). Sei N eine parabolische von K mit $Y_N = O_p(N)$. Sei $Y_NQ = O_p(\mathbb{N}_K(Y_NQ))$. Dann ist $(Y_NQ)' = Z_2(Y_NQ) = Y_N \cap Q$.*

Beweis: Sei $D = Y_NQ$. Dann ist

$$D' = [Y_NQ, Y_NQ] \leq (Y_N \cap Q)Z(Q) \leq Y_N \cap Q$$

und

$$[D, D, D] \leq [Y_N \cap Q, Y_NQ] \leq [Y_N \cap Q, Q] \leq Z(Q).$$

Da $Z(Q) \leq Y_N \cap Q$ ist, folgt $Z(Q) = Z(D)$. Da $Y_N/Z(Q)$ und $Q/Z(Q)$ abelsch sind, ist $Y_N \cap Q/Z(Q) \leq Z(D/Z(Q))$, d.h. $Z_2(D) \geq Y_N \cap Q$.

Nun ist $D' \leq Y_N \cap Q \leq Z_2(D)$. Nach (2.25) ist aber $D' = Z_2(D)$. Nun folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 4.11. *Es gelte (1.15). Sei N eine parabolische von K mit $Y_N = Z(O_p(N)) = O_p(N)'$. Es sei $O_p(N)Q = O_p(\mathbb{N}_K(O_p(N)Q))$. Dann ist $Z_2(O_p(N)Q) = Y_N \cap Q$.*

Beweis: Sei $D = O_p(N)Q$. Dann ist

$$D' = [O_p(N)Q, O_p(N)Q] \leq Y_N(O_p(N) \cap Q)Z(Q) \leq Y_N(O_p(N) \cap Q).$$

Es sind

$$[Y_N(O_p(N) \cap Q), O_p(N)] \leq [O_p(N) \cap Q, O_p(N)] \leq Y_N \cap Q$$

und

$$[Y_N(O_p(N) \cap Q), Q] \leq (Y_N Z(Q)) \cap Q = Y_N \cap Q.$$

Damit folgt

$$[D, D, D] \leq [Y_N(O_p(N) \cap Q), O_p(N)Q] \leq Y_N \cap Q.$$

Weiter ist

$$[D, D, D, D] \leq [Y_N \cap Q, O_p(N)Q] \leq [Y_N \cap Q, Q] \leq Z(Q).$$

Da $Z(Q) = Z(S \cap K)$ und $Q \leq O_p(N)Q$ sind, ist auch $Z(Q) = Z(O_p(N)Q)$. Es sind $Y_N/Z(Q) \leq O_p(N)/Z(Q)$ und $Q/Z(Q)$ abelsch, also ist $Z(D/Z(Q)) \geq (Y_N \cap Q)/Z(Q)$. Damit ist $Z_2(D) \geq Y_N \cap Q$. Nun ist $[D, D, D] \leq Y_N \cap Q \leq Z_2(D)$. Mit (2.25) folgt jetzt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.12. Nach (3.5) kennen wir die Struktur von M^0. Es ist $O_p(M) = Y_M$ oder $O_p(M)' = Y_M = Z(O_p(M))$. Weiter ist $O_p(LQ \cap M) = O_p(M)Q$, also ist nach den beiden vorangegangen Lemmatas $Y_M \cap Q = Z_2(O_p(M)Q)$ eine charakteristische Untergruppe von $LQ \cap M^0$.

Setup 4.13. *Es gelte (1.15). Sei $Q = \widetilde{Q} = O_p(\widetilde{C})$. Für eine parabolische Untergruppe X setze $Q_X = O_p(X)$ und $L_X = E(X/O_p(X))$. Sei $u \in \widetilde{C} \setminus QL$. Mit (4.9) können wir annehmen, dass u einen äußeren oder trivialen Automorphismus auf LQ/Q induziert. Seien $S_0 = S \cap K$ und $N = LQ \cap M$.*

Ist K eine Gruppe vom Lie Typ, so besitz K (ein zu S_0 korrespondierendes) Fundamentalsystem $\{a_1, ..., a_n\} = \Gamma$, vgl. Abschnitt 2.2. Die parabolischen von K korrespondieren zu Teilmengen J von Γ. Wir werden die Bezeichnung aus (2.11) benutzen. Angegebene Diagramme sind immer welche der entsprechenden ungetwisteten Gruppe.

Zur besseren Übersicht fügen wir folgende Tabelle an. Sie gilt mit (2.13) und (3.5) sowie den Aussagen aus dem Paragraphen über Gruppen vom Lie Typ.

Bemerkung 4.14. Es gelte (4.13). Dann sind L, L_M, L_N und Q_N/Q_M wie folgt:

K	$\overline{L}$	$\overline{L}_M$	$\overline{L}_N$	Q_N/Q_M
$L_n(p^e)$	$L_{n-2}(p^e)$	$L_{n-r}(p^e) \times L_r(p^e)$	X_1	$V_{n-r-1}^{nat} \otimes V_{r-1}^{nat}$
$L_n(p^e)$	$L_{n-2}(p^e)$	$L_{n-1}(p^e)$	$L_{n-2}(p^e)$	V_{n-2}^{nat}
$U_{2n}(p^e)$	$U_{2n-2}(p^e)$	$L_n(p^{2e})$	$L_{n-1}(p^{2e})$	V_{n-1}^{nat}
$S_{2n}(p^e)$	$S_{2(n-1)}(p^e)$	$L_n(p^e)$	$L_{n-1}(p^e)$	V_{n-1}^{nat}
$\Omega_n^{\pm}(p^e)$	$L_2(p^e) \times \Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$	$\Omega_{n-2}^{\pm}(p^e)$	$\Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$	$p^e(trivial)$
$\Omega_n^{+}(p^e)$	$L_2(p^e) \times \Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$	$L_{[n/2]}(p^e)$	X_2	$V_2^{nat} \otimes V_{[n-4/2]}^{nat}$
$\Omega_n^{-}(p^e)$	$L_2(p^e) \times \Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$	$L_{n-2/2}(p^e)$	X_3	$V_2^{nat} \otimes V_{n-6/2}^{nat}$
$E_6(p^e)$	$L_6(p^e)$	$\Omega_{10}^{+}(p^e)$	$L_5(p^e)$	$\Lambda^2(V_5^{nat})$
${}^2E_6(p^e)$	$U_6(p^e)$	$\Omega_8^{-}(p^e)$	$U_4(p^e)$	$\Lambda^2(V_4^{nat})$
$E_7(p^e)$	$\Omega_{12}^{+}(p^e)$	$E_6(p^e)$	$\Omega_{10}^{+}(p^e)$	$Halbspin$
$E_8(p^e)$	$E_7(p^e)$	$\Omega_{14}^{+}(p^e)$	$\Omega_{12}^{+}(p^e)$	V_{12}^{nat}
$F_4(p^e)$	$S_6(p^e)$	$\Omega_7(p^e)$	$\Omega_5(p^e)$	V_5^{nat}

wobei $X_1 = L_{n-r-1}(p^e) \times L_{r-1}(p^e)$, $X_2 = L_2(p^e) \times L_{[n-4/2]}(p^e)$ und $X_3 = L_2(p^e) \times L_{n-6/2}(p^e)$ sind.

Lemma 4.15. *Es gelte (4.13). Sei N u-invariant und Q_N/Q_M ein irreduzibler L_N-Modul. Dann ist $u \in H$.*

Beweis: Es ist $Q_N = Q_M Q$. Da N eine parabolische von K ist, ist Q_N u-invariant. Dann ist $D = Y_M \cap Q$ u-invariant nach (4.12). Es operiert $1 \neq Y_M Q/Q$ nichttrivial auf $Q/Z(Q)$. Dann ist $D > Z(Q)$. Da $Q \leq Q_N$ ist, folgt $Z(Q) = Z(Q_N)$. Da $D = Q \cap Y_M > Z(Q_N)$, ist $Q_N > \mathbb{C}_{Q_N}(D)$. Es ist $D = Y_M \cap Q \leq Z(Q_M)$, also folgt $Q_M \leq \mathbb{C}_{Q_N}(D)$. Da L_N auf D operiert, operiert L_N auch auf $Q_N/\mathbb{C}_{Q_N}(D)$. Aber Q_N/Q_M war bereits irreduzibler L_N-Modul, also folgt $Q_M = \mathbb{C}_{Q_N}(D)$; somit sind auch Q_M und $Y_M = Z(Q_M)$ u-invariant. Dann ist zunächst $M = \mathbb{N}_G(Y_M)$ u-invariant und damit auch M^0. Nach (4.9) ist LQ ebenfalls u-invariant. Dann ist auch $K = \langle LQ, M^0 \rangle$ u-invariant. Aber $H = \mathbb{N}_G(K)$, und damit ist $u \in H$. □

Lemma 4.16. *Es gelte (4.13). Seien $M^0 = M_1$, M_2,...,M_t, $t \geq 2$, isomorphe Untergruppen von K, die K erzeugen. Setze $N_i = M_i \cap QL$, $i = 1, ..., t$. Es operiere $\langle u \rangle$ transitiv auf den N_i. Seien weiter Q_{N_i}/Q_{M_i} irreduzible L_{N_i}-Moduln für $i = 1, ..., t$. Dann ist $u \in H$.*

Beweis: Da Q u-invariant ist, sind die Q_{N_i} alle unter u konjugiert. Es ist $Y_{M_i}Q/Q = Z(Q_{N_i}/Q)$, womit auch alle $Y_{M_i}Q$ unter u konjugiert sind. Nach (4.12) sind dann auch $Y_{M_i} \cap Q$ alle konjugiert. Da $1 \neq Y_{M_i}Q/Q$ nichttrivial auf Q operiert, ist $Z(Q) < Y_{M_i} \cap Q$ für alle i. Da $Z(Q) = Z(Q_{N_i})$ ist für $i = 1, ..., t$, ist $Q_{N_i} > \mathbb{C}_{Q_{N_i}}(Y_{M_i} \cap Q) \geq Q_{M_i}$. Es operiert L_{N_i} auf $\mathbb{C}_{Q_{N_i}}(Y_{M_i} \cap Q)$, und Q_{N_i}/Q_{M_i} ist ein irreduzibler L_{N_i}-Modul, also folgt $\mathbb{C}_{Q_{N_i}}(Y_{M_i} \cap Q) = Q_{M_i}$. Damit sind auch die Q_{M_i} und dann auch die $Y_{M_i} = Z(Q_{M_i})$ alle unter u konjugiert. Dann sind auch $\widetilde{M_i} = \mathbb{N}_G(Y_{M_i})$ alle unter u konjugiert.

Da $M_1 = M$ ist, ist $M^0 = \mathbb{N}_G(Y_{M_1})^0 = \widetilde{M}_1^0$. Also ist $M_i \cong M^0 \cong \widetilde{M}_i^0$, $i = 2, ..., t$. Da $M_i \leq \widetilde{M}_i^0$ für alle i ist, folgt $\widetilde{M}_i^0 = M_i \leq K$. Somit bilden die M_i, $i = 1, ..., t$ eine Bahn von Untergruppen von K unter u. Dann ist $K = \langle M_1, ..., M_t \rangle$ u-invariant. Aber $H = \mathbb{N}_G(K)$, und damit ist $u \in H$. $\square$

Lemma 4.17. *Es gelte (4.13). Sei $K \cong L_n(p^e)$, $n \geq 4$. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

Beweis: Nach (3.5) ist $M \leq H$ mit $M^0/O_p(M) \cong SL_r(p^e) * SL_{n-r}(p^e)$, $1 \leq r \leq n-1$. Die parabolischen korrespondieren zu

$$\overset{a_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_3}{\circ}\ \cdots\ \overset{a_{n-3}}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_{n-2}}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_{n-1}}{\circ}.$$

Angenommen, $M^0/Q_M \cong SL_{n-1}(p^e)$. Dann ist $Q_M = Y_M$ der natürliche Modul und $Y_M \leq Q = \widetilde{Q}$, Widerspruch.

Also sind $r, n-r \geq 2$ und $Q_M = Y_M$ ist der Tensorproduktmodul. M^0 korrespondiert zu Γ_r und N zu $\Gamma_{1,r,n-1}$, d.h. wir haben die Situation wie in (4.14). Es ist $Q_N = Y_M Q$.

Es induziere zuerst u keinen Graphautomorphismus von LQ. Ist $n \geq 5$, so bleibt auch N u-invariant und $N/Q_N \cong SL_{n-r-1}(p^e) * SL_{r-1}(p^e)$ operiert irreduzibel auf Q_N/Q_M. Es folgt $u \in H$ mit (4.15). Also sei $n = 4$. Dann ist $Y_M Q = S_0$ und $Y_M \cap Q$ ist eine maximal elementar abelsche Untergruppe von Q. Dann ist $\mathbb{C}_{S_0}(Y_M) = \mathbb{C}_{S_0}(Y_M) = Y_M$. Also ist Y_M u-invariant und dann auch $M = \mathbb{N}_G(Y_M)$ und M^0, d.h. $K = \langle M^0, LQ \rangle$ ist u-invariant und somit $u \in H$.

Es induziere u einen nichttrivialen Graphautomorphismus von LQ/Q. Dann ist $n \geq 5$. Es korrespondiert N zu $\Gamma_{1,r,n-1}$, N^u korrespondiert zu $\Gamma_{1,n-1-r,n-1}$. Dann ist $N^u \leq M_2$, wobei M_2 zu Γ_{n-1-r} korrespondiert. Weiter ist $M^0 \cong M_2^0$ und $N^u = LQ \cap M_2^0$. Mit (4.16) folgt $u \in H$. $\square$

Lemma 4.18. *Es gelte (4.13). Sei $K \cong U_n(p^e)$, $n \geq 4$. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

Beweis: Nach (3.5) ist $M \leq H$ mit $M^0/Q_M \cong SL_{[n/2]}(p^{2e})$. Es ist $Q_M = Y_M$, falls n gerade ist. Ist n ungerade, so ist $Y_M = Z(Q_M)$. In jedem Fall ist N u-invariant.

Sei $n = 4$. Dann ist $Q_N = S$. Es ist $S_0 \in \mathrm{Syl}_p(LQ)$. Mit dem Frattiniargument ist S_0 u-invariant. $Y_M Q/Q = Z(S_0/Q)$ ist eine Wurzeluntergruppe von LQ/Q. Also ist $|Y_M Q/Q| = p^e$. Da $|Y_M| = p^{4e}$ ist, ist $|Y_M \cap Q| = p^{3e}$. Da $Q \cong (p^e)^{1+4}$ ist, ist $Y_M \cap Q$ eine elementar abelsche Untergruppe von Q von maximalem Rang. Dann ist $\mathbb{C}_Q(Y_M \cap Q) = Y_M \cap Q$ und damit $\mathbb{C}_{S_0}(Y_M \cap Q) = Y_M$ und u-invariant. Also ist M u-invariant und somit auch $K = \langle M^0, LQ \rangle$. Aber dann ist $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$.

Sei $n = 5$. Wieder ist N auflösbar und $S_0 = Q_M Q$ u-invariant. Es ist mit (4.11) $Z_2(S_0) = Y_M \cap Q$ u-invariant. Es ist $Q_M \leq \mathbb{C}_{S_0}(Y_M \cap Q)$. Es sind wie eben $|Y_M| = p^{4e}$ und $|Y_M \cap Q| = p^{3e}$. Sei $x \in S_0 \setminus Q_M$. Es ist $xQ_M \in M^0/Q_M \cong SL_2(p^{2e})$. Da Y_M der natürliche Modul für M^0/Q_M ist, ist x eine Transvektion auf Y_M. Also ist $|\mathbb{C}_{Y_M}(x)| = p^{2e}$, d.h. $[Y_M \cap Q, x] \neq 1$. Dann ist aber $Q_M = \mathbb{C}_{S_0}(Y_M \cap Q)$ und u-invariant und somit auch M. Folglich ist $K = \langle M^0, LQ \rangle$ u-invariant, und $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$.

Sei nun $n \geq 6$. Somit ist N/Q_M eine maximal parabolische Untergruppe von M^0/Q_M. Es ist $N/Q_N \cong SL_{[n-2/2]}(p^{2e})$ und Q_N/Q_M ist der natürliche Modul für N/Q_N, also irreduzibel. Nun folgt die Behauptung mit (4.15). $\square$

Lemma 4.19. *Es gelte (4.13). Sei $K \cong S_{2n}(p^e)$, $n \geq 2$. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

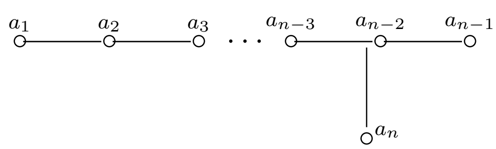
Beweis: Da p ungerade ist, besitzt $\overline{L} \cong S_{2(n-1)}(p^e)$ keinen Graphautomorphismus. Also induziert u Körper- oder Diagonalautomorphismen von L oder $[L, u] = 1$, d.h. N ist u-invariant nach (2.15). Nach (3.5) ist $M^0/O_p(M) \cong L_n(p^e)$ und $Q_M = Y_M$.

Sei $n = 2$. Dann ist $Q_N = S$. Es ist $S_0 \in \mathrm{Syl}_p(LQ)$. Mit dem Frattiniargument ist $S_0 = Y_M Q$ u-invariant. Es ist $(S_0)' = Y_M \cap Q$ nach (4.10). $Y_M \cap Q$ ist eine maximal abelsche Untergruppe von Q. Dann ist $\mathbb{C}_S(Y_M \cap Q) = \mathbb{C}_{S_0}(Y_M \cap Q) = Y_M$. Damit ist Y_M u-invariant und somit auch M. Dann ist $\langle M^0, LQ\rangle = K$ u-invariant und $u \in \mathbb{N}_G(K) = H$.

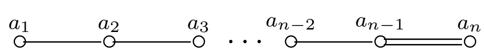
Sei nun $n \geq 3$. Dann ist $Q_N = Y_M Q$, $\overline{L}_N \cong L_{n-1}(p^e)$. Weiter ist N/Y_M eine maximal parabolische Untergruppe von M^0/Y_M und Q_N/Y_M ist eine natürlicher L_N-Modul, also irreduzibel. Mit (4.15) folgt $u \in H$. $\square$

Lemma 4.20. *Es gelte (4.13). Sei $K \cong \Omega^{\pm}_m(p^e)$, $m \geq 7$. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

Beweis: Es ist $m = 2n$ oder $m = 2n+1$. Es ist $L = L_1 * L_2$, wobei $L_1 \cong SL_2(p^e)$ und $\overline{L}_2 \cong \Omega^{\pm}_{m-4}(p^e)$ sind. Die parabolischen von H korrespondieren zu



für $K \cong \Omega^{\pm}_{2n}(p^e)$ bzw zu



für $K \cong \Omega_{2n+1}$. Beachte, dass für $K \cong \Omega^{-}_{2n}(p^e)$ die parabolischen Untergruppen von K unter einer Symmetrie des Dynkindiagramms invariant sein müssen.

Entweder ist $\overline{M^0/Q_M} \cong \Omega^{\pm}_{m-2}(p^e)$. Oder wir haben $K \ncong \Omega^{-}_{2n}(p^e)$ und $M^0/Q_M \cong SL_n(p^e)$ bzw $K \cong \Omega^{-}_{2n}(p^e)$ und $M^0/Q_M \cong SL_{n-1}(p^e)$.

Sei L_2Q u-invariant. Dann ist auch L_1Q u-invariant. Sei zunächst $\overline{M^0/Q_M} \cong \Omega^{\pm}_{m-2}(p^e)$, d.h. M^0 korrespondiert zu Γ_1. Es ist $Y_M = Q_M$ der natürliche Modul für M^0/Q_M. L_2Q/Q operiert trivial auf Y_MQ/Q, wobei $|Y_MQ/Q| = p^e$ ist. Weiter ist $Y_MQ = O_p(M^0 \cap LQ)$ u-invariant. Es ist $Y_M \cap Q$ u-invariant mit (4.12). Es sind $m_p(Y_M) = (m-2)e$, $m_p(Y_MQ/Q) = e$ und $m_p(Q) = ((m-4)+1)\,e = (m-3)e$, also ist $Y_M \cap Q$ eine maximal elementar abelsche Untergruppe von Q. Dann ist $\mathbb{C}_{Y_MQ}(Y_M \cap Q) = Y_M$ und somit u-invariant. Jetzt sind $\mathbb{N}_G(Y_M) = M$ und $\langle M^0, LQ\rangle = K$ u-invariant, d.h. $u \in H$.

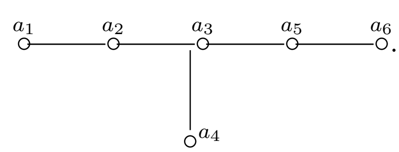
Sei $K \not\cong \Omega_{2n}^-(p^e)$ und $\overline{M^0/Q_M} \cong L_n(p^e)$, d.h. M^0 korrespondiert zu Γ_n. Dann ist $Z(Q_M) = Y_M \cong \Lambda^2(V_n^{nat})$. Es korrespondiert N zu $\Gamma_{2,n}$. Ist m gerade, so ist $Q_M = Y_M$; ist m ungerade, so ist $Q_M/Y_M \cong V_n^{nat}$. Für $n \geq 4$ ist $\overline{N/Q_N} \cong L_2(p^e) \times L_{n-2}(p^e)$ und Q_N/Q_M ist der Tensorproduktmodul, also irreduzibel. Für $n = 3$ ist $\overline{N/Q_N} \cong L_2(p^e)$ und Q_N/Q_M ein natürlicher, irreduzibler Modul. Induziert u keinen Graphautomorphismus auf L_2Q/Q, so ist N ebenfalls u-invariant. Dann ist $u \in H$ mit (4.15). Induziere u nun einen Graphautomorphismus auf L_2Q/Q. Dann ist insbesondere $K \cong \Omega_{2n}^+(p^e)$. Da u auf $Q/Z(Q)$ operiert, induziert u keinen Graphautomorphismus der Ordnung 3. Also induziert u einen Graphautomorphismus von der Ordnung 2. Es korrespondiert N zu $\Gamma_{2,n}$. Dann korrespondiert N^u zu $\Gamma_{2,n-1}$. Dann ist N^u enthalten in einer maximalen p-lokalen Untergruppe M_2 von K, wobei M_2 zu Γ_{n-1} korrespondiert. Insbesondere ist $M_2^0 \cong M^0$ und $M_2^0 \cap LQ = N^u$. Nun folgt $u \in H$ mit (4.16).

Sei $K \cong \Omega_{2n}^-(p^e)$ und $\overline{M^0/Q_M} \cong L_{n-1}(p^e)$, d.h. M^0 korrespondiert zu $\Gamma_{n-1,n}$. Dann ist $Z(Q_M) = Y_M \cong \Lambda^2(V_{n-1}^{nat})$. Es korrespondiert N zu $\Gamma_{2,n-1,n}$. Für $n \geq 5$ ist $\overline{N/Q_N} \cong L_2(p^e) \times L_{n-3}(p^e)$ und Q_N/Q_M ist der Tensorproduktmodul, also irreduzibel. Für $n = 4$ ist $\overline{N/Q_N} \cong L_2(p^e)$ und Q_N/Q_M ein natürlicher, irreduzibler Modul. u induziert nur Körper- oder Diagonalautomorphismen auf LQ/Q, also ist N ebenfalls u-invariant. Dann ist $u \in H$ mit (4.15).

Also ist L_2Q nicht u-invariant, und u permutiert die Komponenten von L. Es ist $K \not\cong \Omega_7(p^e)$, da hier $L_1 \cong SL_2(p^e)$ und $L_2 \cong L_2(p^e)$ sind. Dann ist $K \cong \Omega_8^+(p^e)$, und es ist $L \cong SL_2(p^e) * SL_2(p^e) * SL_2(p^e)$. Sei M_i die parabolische zu Γ_i und N_i die parabolische zu $\Gamma_{2,i}$ jeweils für $i = 1, 3, 4$. Dann ist $M^0 = M_i$ für ein i und N ist das entsprechende N_i^0. Es ist $M^0 \cong M_i^0$ für alle i. Weiter ist $N^u = N_j^0$ für ein geeignetes j. Da $N_j \leq M_j$, ist $N^u = M_j^0 \cap LQ$. Es sind $M_i^0/Q_{M_i} \cong SL_4(p^e)$, $N_i^0/Q_{N_i} \cong SL_2(p^e) * SL_2(p^e)$ und Q_{N_i}/Q_{M_i} der Tensorproduktmodul, also irreduzibel. Für die Bahn $N^{\langle u \rangle}$ und zugehörige M_i folgt mit (4.16) nun $u \in H$. $\square$

Lemma 4.21. *Es gelte (4.13). Sei K eine Ausnahmegruppe vom Lie Typ. Dann ist $\widetilde{C} \leq H$.*

Beweis: Sei $K \cong E_6(p^e)$. Die parabolischen korrespondieren zu



Nach (3.5) ist $\overline{M^0/Q_M} \cong \Omega_{10}^+(p^e)$ und $Q_M = Y_M$, d.h. M^0 korrespondiert zu Γ_1. Weiter ist $\overline{N/Q_N} \cong L_5(p^e)$ und $Q_N/Y_M \cong \Lambda^2(V_5^{nat})$, d.h. N korrespondiert zu $\Gamma_{1,4}$.

Induziert u keinen Graphautomorphismus von L, so ist auch N u-invariant und es folgt $u \in H$ mit (4.15). Induziere nun u einen Graphautomorphismus von $\overline{L} \cong L_6(p^e)$. Dann korrespondiert N^u zu $\Gamma_{4,6}$ und $N \leq M_2$, wobei M_2 zu Γ_6 korrespondiert. Dann ist $M^0 \cong M_2^0$ und $N^u = M_2^0 \cap LQ$. Weiter sind $Q_N/Y_M \cong$

$Q_{N^u}/Y_{M_2} \cong \Lambda^2(V_5^{nat})$ irreduzibel. Jetzt folgt die Aussage mit (4.16).

Sei $K \cong {}^2E_6(p^e)$. Dann ist $\overline{L} \cong U_6(p^e)$ und nach (3.5) ist $M^0/Q_M \cong \Omega_8^-(p^e)$. Es sind Y_M der natürliche Modul und Q_M/Y_M der Spin-Modul. u induziert keinen Graphautomorphismus, also ist N u-invariant. Es ist N/Q_M ein ein natürlicher Modul für $N/Q_N \cong \Omega_6^-(p^e)$, also irreduzibel. Nun folgt die Behauptung mit (4.15).

Sei $K \cong E_7(p^e)$. Nach (3.5) ist $M^0/Q_M \cong E_6(p^e)$ und $Q_M = Y_M$ ist der 27-dimensionale, minimale Modul. Es ist $L \cong \Omega_{12}^+(p^e)$. Dann ist $N/Q_N \cong \Omega_{10}^+(p^e)$ und Q_N/Q_M ist der Halbspin Modul, also irreduzibel. Da $Q/Z(Q)$ der Halbspinmodul für L ist, induziert u keinen Graphautomorphismus. Dann ist N ebenfalls u-invariant. Nun folgt $u \in H$ mit (4.15).

Sei $K \cong E_8(p^e)$. Dann ist $L \cong E_7(p^e)$. Nach (3.5) ist M mit $M^0/Q_M \cong \Omega_{14}^+(p^e)$. Weiter sind Y_M der natürliche Modul und Q_M/Y_M der Halbspin Modul für M/Q_M. Da u keinen Graphautomorphismus induziert, ist auch N u-invariant. Weiter ist N/Q_M ein Punktstabilisator in M/Q_M, d.h. $N/Q_N \cong \Omega_{12}^+(p^e)$ und Q_N/Q_M ein natürlicher Modul, also irreduzibel. Nun folgt $u \in H$ mit (4.15).

Sei $\overline{K} \cong F_4(p^e)$. Dann ist $\overline{L} \cong S_6(p^e)$ und nach (3.5) ist $M^0/Q_M \cong \Omega_7(p^e)$. Es induziert u keinen Graphautomorphismus, also ist N u-invariant. Es ist N/Q_M ein Punktstabilisator in M/Q_M. Also ist $N/Q_N \cong \Omega_5(p^e)$ und Q_N/Q_M ein natürlicher, irreduzibler Modul für N/Q_N. Nun folgt die Behauptung mit (4.15). □

Satz 4.22. *Es gelte (1.15). Dann ist* $\widetilde{C} \leq H$.

Beweis: Sei $\widetilde{Q} \neq Q$. Mit (3.4) folgt $\widetilde{Q} < Q$ und $F^*(H) \cong L_n(p^e)$. Dann folgt die Behauptung mit (4.1). Ist $\widetilde{Q} = Q$, so folgt die Behauptung mit den vorangegangenen Lemmatas. □

Kapitel 5

Parabolische Untergruppen

In diesem Kapitel gelten die Voraussetzungen von (1.15). Setze $S_0 := S \cap K$. Ohne Zitat wollen wir mit (4.22) $\widetilde{C} \leq H$ verwenden.

Zur Erinnerung: $\widetilde{Q}$ ist eine große Untergruppe, d.h. $\mathbb{N}_G(A) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q})$ für alle $1 \neq A \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q})$. Für $P \in \mathcal{L}(S)$ ist $P^0 = \left\langle \widetilde{Q}^g \,\middle|\, g \in G, \widetilde{Q}^g \leq P \right\rangle$ und $P_0 = P^0 S$. Es ist $\mathcal{M}(S)$ die Menge der bezüglich Inklusion maximalen Elemente in $\mathcal{L}(S)$. Für eine Gruppe X ist $\overline{X} = X/Z(X)$.

In diesem Kapitel wollen wir den Hauptsatz beweisen, dass die parabolischen Untergruppen von G die Gruppe H erzeugen. Dazu werden wir uns minimal parabolische anschauen: Für jede parabolische P ist $P_0 = \langle X | X \leq P \text{ minimal parabolisch}\rangle$. Ist nun $P \not\leq H$, gibt es immer eine minimal parabolische X, die nicht in H enthalten ist. Wie wir sehen werden operiert X dann nichttrivial auf Y_X. Nehmen wir $P \in \mathcal{M}(S)$ an, so kennen wir die Struktur von P durch (1.9), also auch die Operation von X auf $Y_X \leq Y_P$.

Generisch werden wir Y_X mit dem zweiten Zentrum von S_0 identifizieren können. Die nächsten beiden Lemmatas liefern uns das Werkzeug, diese Fälle zu behandeln.

Lemma 5.1. *Ist $K \not\cong L_n(p^e)$ oder $U_n(p^e)$, so ist $|Z_2(S_0)| = p^{2e}$. Ist $K \cong L_n(p^e)$ oder $U_n(p^e)$, so ist $|Z_2(S_0)| = p^{3e}$.*

Beweis: $S_0 = S \cap LQ$. Es ist $Q/Z(Q)$ ein treuer Modul für L, also ist $Z_2(S_0) \leq Q$ und $Z_2(S_0)/Z(Q) = \mathbb{C}_{Q/Z(Q)}(S_0 \cap L)$.

Ist $K \cong L_n(p^e)$, so ist $Q/Z(Q)$ eine Summe zweier natürlicher Moduln für L. Ist $\overline{K} \cong U_n(p^e)$, so ist $Q/Z(Q)$ der natürliche Modul für L über $GF(p^{2e})$. Die Aussage folgt mit (2.16).

Sei $K \cong \Omega_n^{\pm}(p^e)$. Dann ist das Levikomplement $L = L_1 * L_2$ mit $L_1 \cong SL_2(p^e)$ und $\overline{L}_2 \cong \Omega_{n-4}^{\pm}(p^e)$. Sei $S_1 = S \cap L$ und $S_2 = S \cap L_2$. Dann ist nach (2.16) $|\mathbb{C}_{Q/Z(Q)}(S_2)| = p^{2e}$, da $Q/Z(Q)$ in zwei natürliche L_2-Moduln zerfält. Diese werden jedoch von L_1 permutiert, weswegen $|\mathbb{C}_{Q/Z(Q)}(S_1)| = p^e$ ist. Also ist $|Z_2(S_0)| = p^{2e}$.

In allen anderen Fällen ist $Q/Z(Q)$ ein irreduzibler Modul für L, und die Aussage ist wieder eine direkte Konsequenz von (2.16). $\square$

Das nächste Lemma wird uns gewährleisten, dass, wann immer eine parabolische P nicht in H enthalten ist, auch eine minimal parabolische von P^0 nicht in H enthalten ist.

Lemma 5.2. *Es gelte (1.15). Seien $P \in \mathcal{L}(S)$. Ist $P^0 \leq H$, so ist schon $P \leq H$.*

Beweis: Es ist $P^0 \leq P^0 S = P_0 \leq H$. Nach (3.8) ist dann auch $P = P^0(P \cap \widetilde{C}) \leq H$. □

Mit (1.9) können wir auf die Struktur minimal parabolischer schließen:

Lemma 5.3. *Sei $P \in \mathcal{M}(S)$ mit $[Y_P, P^0] \not\leq \widetilde{Q}$ und $X \leq P$ eine minimal parabolische mit $X^0 \not\leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) = \widetilde{C}$. Dann ist $Z(Q) = \phi(Q) \leq [Y_X, X^0] \leq O_p(X)$, $[Y_X, X^0] = [Z(S), X^0]$ und es gilt eines der Folgenden:*

(i) $X = P$ ist wie in (1.9)(2);

(ii) $X^0/O_p(X_0) \cong SL_2(p^f)$ und $[Y_X, X^0]$ ist ein 2-dimensionaler $GF(p^f)$-Modul; weiter ist P^0 dabei wie in den Punkten (1), (4), (5), (6)(a) oder (7) von (1.9);

(iii) $X^0/O_p(X_0) \cong SL_2(p^f)$ und $[Y_X, X^0]$ ist ein 3-dimensionaler $GF(p^f)$-Modul; weiter ist P^0 dabei wie im Punkt (6)(b) von (1.9);

(iv) $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^{2f})$ und $[Y_X, X^0]$ ist ein 4-dimensionaler $GF(p^f)$-Modul; weiter ist P^0 dabei wie im Punkt (6)(c) von (1.9).

Beweis: Sei $r \in Z(S)^\sharp$ mit $[X^0, r] = 1$. Da $\widetilde{Q}$ groß ist, folgt $X^0 \leq \mathbb{N}_G(\langle r \rangle) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) = \widetilde{C} \leq H$, Widerspruch. Also ist $Y_X \geq [X^0, r] \neq 1$ für alle $1 \in Z(S)^\sharp$. Setze $C_P = \mathbb{C}_{P^0}(Y_P)$ und $C_X = \mathbb{C}_{X^0}(Y_X) = O_p(X^0)$.

Ist $Y_X \leq Z(Q) \leq Z(\widetilde{Q})$, so ist, da $\widetilde{Q}$ groß ist, $X \leq \mathbb{N}_G(Y_X) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) \leq \widetilde{C} \leq H$, Widerspruch. Also ist $Y_X \not\leq Z(Q)$. Es ist $[x, Q] = Z(Q)$ für alle $x \in Q \setminus Z(Q)$. Ist $Y_X \leq Q$, so ist $Y_X \not\leq Z(Q)$ und $Y_X \geq [Y_X, Q] = Z(Q)$. Ist $Y_X \not\leq Q$, so ist, da $\mathbb{N}_G(Q)$ treu auf $Q/Z(Q)$ operiert, $Z(Q) \not\geq [Y_P, Q]$, d.h. $Y_P \geq [Y_P, Q, Q] = Z(Q)$. Also ist in jedem Fall $Z(Q) = \phi(Q) \leq [Y_X, X^0] \leq O_p(X)$.

Sei P wie in (1.9)(1). Dann ist $P^0/C_P \cong SL_m(p^f)$ oder $Sp_{2m}(p^f)$ und $[P^0, Y_P]$ der natürliche Modul. Dann ist auch $X^0/C_X \cong SL_2(p^e)$ und $[Y_X, X^0]$ der natürliche Modul.

Sei P wie in (1.9)(2). Dann ist P schon minimal.

Sei P wie in (1.9)(4). Dann ist $P^0/C_P \cong \Omega_m^\epsilon(p^e)$ und $[Y_P, P^0]$ ist der natürliche Modul. $X^0 \not\leq \mathbb{N}_G(Z(S))$ und X^0/C_P ist eine minimal parabolische von P^0/C_P. Dann liegt X^0/C_P im Stabilisator eines maximal isotropen Unterraums P_1/C_P von

P^0/C_P. Es ist $P_1/C_P \cong SL_n(p^e)$, wobei $n = [m/2]$ ist für $\epsilon = +$ und $n = [m-2/2]$ für $\epsilon = -$. Dann haben wir eine Reihe der Form

$$1 < V_1 \leq V_2 < V_3 = [Y_P, P^0],$$

wobei V_1 und V_3/V_2 natürliche P_1/C_{P_1} Moduln sind und P_1/C_{P_1} ist trivial auf V_2/V_1. Dabei sind $|V_2/V_1| = 1$ für $\epsilon = +$ und m gerade, $|V_2/V_1| = p^f$ für m ungerade und $|V_2/V_1| = p^{2f}$ sonst. Da $X^0 \leq P_1$ ist, haben wir $X^0/C_X \cong SL_2(p^f)$ und $[Y_X, X^0]$ ist ein natürlicher Modul.

Sei P wie in (1.9)(5). Da $p \neq 2$ ist $P^0/C_P = K_1K_2$ mit $[K_1, K_2] = 1$ und $K_i \cong SL_{m_i}(p^f)$. Weiter ist $[Y_P, P^0]$ der Tensorproduktmodul der natürlichen Moduln für K_1 und K_2. O.E. ist $X^0/C_P \leq K_1$. Dann ist zunächst $X^0/C_X \cong SL_2(p^f)$. Es ist $[Y_P, K_i]$ eine Summe natürlicher $SL_{m_i}(p^e)$-Moduln, also ist $1 \neq [X^0, Z(S)]$ eine Summe natürlicher Moduln für X^0/C_X. Sei $[X^0, Z(S)] \geq V_1 \oplus V_2$, V_i natürliche X^0/C_X-Moduln. Da $V_i \leq Y_X \leq Z(O_p(X))$ ist, sind die $V_i \trianglelefteq X^0$, werden also von Q normalisiert. Da $V_i \not\leq Z(Q)$ sind, folgt $[V_i, Q] \geq Z(Q)$. Aber $V_1 \cap V_2 = 1$, Widerspruch. Also ist $[Y_X, X^0]$ ein natürlicher X^0/C_X-Modul.

Sei P wie in (1.9)(6). Dann ist $\overline{P^0/C_P} \cong L_m(p^f)$ und $[Y_P, P^0]$ ist isomorph zu $\Lambda^2(V_m^{nat})$ im Fall (6)(a) oder $S^2(V_m^{nat})$ im Fall (6)(b); oder $\overline{P^0/C_P} \cong L_m(p^{2f})$ und $[Y_P, P^0] \cong U_m$, wobei U_m ein einfacher Untermodul von $V_m^{nat} \otimes (V_m^{nat})^{p^{2f}}$ ist, im Fall (6)(c). Dann ist $X^0 \leq P_1$, wobei P_1/C_P der Stabilisator eines isotropen Punktes bzw einer isotropen Ebene ist. Also ist $\overline{P_1/C_{P_1}} \cong L_{m-1}(p^f)$ und wir haben eine Reihe

$$1 < V_1 < V_2 \leq V_3 = [Y_P, P^0],$$

wobei gilt:

	$[Y_P, P^0]$	V_1	V_2/V_1	V_3/V_2
$(6)(a)$	$\Lambda^2(V_m^{nat})$	V_{m-1}^{nat}	$\Lambda^2(V_{m-1}^{nat})$	1
$(6)(b)$	$S^2(V_m^{nat})$	$S^2(V_{m-1}^{nat})$	V_{m-1}^{nat}	*trivial*
$(6)(c)$	U_m	U_{m-1}	V_{m-1}^{nat}	*trivial*

(entspricht der Situation wie in einer maximal parabolischen von $\Omega_{2m+1}(p^f)$, $S_{2m}(p^f)$ oder $U_{2m}(p^f)$ entsprechend, vgl. (3.5)). Dann ist $\overline{X^0/C_X} \cong L_2(p^f)$ oder $L_2(p^{2f})$ und $[Y_X, X^0]$ ist (per Induktion) von der Ordnung p^{2f}, p^{3f} oder p^{4f} entsprechend der Punkte (a), (b), (c).

Sei P wie in (1.9)(7)(a). Dann ist $P^0/C_P \cong \mathrm{Spin}_{10}^+(p^f)$ und $[Y_P, P^0]$ ist der Halbspin-Modul. Sei P_1/C_P der Stabilisator eines maximal isotropen Unterraums in P^0/C_P. Dann ist $P_1/C_{P_1} \cong SL_n(p^f)$ und wir haben eine Reihe der Form

$$1 < V_1 < V_2 < V_3 = [Y_P, P^0],$$

wobei V_1 ein natürlicher Modul, V_2/V_1 das äußere Quadrat des natürlichen Moduls und V_3/V_2 ein trivialer Modul für X^0/C_X sind ($P_1 \not\leq \widetilde{C}$, also P_1 die parabolische mit V_1 nichttrivial). Dann ist $X^0/C_X \cong SL_2(p^f)$ und $[Y_X, X^0] \leq V_1$ ist ein natürlicher Modul.

Sei P wie in (1.9)(7)(b). Dann ist $P^0/C_P \cong E_6(p^f)$ und $[Y_P, P^0]$ ist ein 27-dimensionaler minimaler Modul. Es ist $X^0 \leq P_1 \leq P^0$ mit $P_1/C_{P_1} \cong SL_6(p^e)$. Für P_1 haben wir die Reihe

$$1 < V_1 < V_2 < Y_M,$$

wobei V_1 und V_3/V_2 natürliche $SL_6(p^f)$-Moduln sind und V_2/V_1 ist das äußere Quadrat des natürlichen $SL_6(p^f)$-Moduls, vgl. [asc2]. Dann ist $X^0/C_X \cong SL_2(p^f)$ und $[Y_X, X^0] \leq V_1$ ist ein natürlicher Modul.

Sei P wie in (1.9)(8). Dann sind $p = 3$ und $P^0/C_P \cong M_{11}$. Mit [ccnpw] folgt $X^0/C_P \cong A_6$ und X^0/C_P ist ein Punktstabilisator von M_{11}. Aber dann ist $X^0 \leq \mathbb{N}_G(Z(S)) \leq \widetilde{C} \leq H$, Widerspruch.

In jedem Fall sind $[Y_X, X^0]$ irreduzible Moduln und $X^0 \not\leq \mathbb{N}_G(Z(S))$. Dann ist $[Y_X, X^0] = [Z(S), X^0]$. □

Lemma 5.4. *Ist $K \ncong L_n(p^e)$, $U_n(p^e)$ oder $S_{2n}(p^e)$, so gibt es ein $X \cong SL_2(p^e)$ mit $X \leq H$ und $Z_2(S_0)$ ein natürlicher X-Modul.*

Beweis: Mit (3.5) ist M^0 wie in (1.9)(1),(4),(5),(6)(a) oder (7). Mit (5.3) gibt es eine minimal parabolische $X \leq M$ mit $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^e)$ und $V = [Y_X, X^0]$ ist ein natürlicher Modul. Nach (5.1) ist $|Z_2(S_0)| = p^{2e}$. Weiter ist $Y_X = \Omega_1(Z(O_p(X)))$ nach (1.6). Da $|S_0 : O_p(X)| = p^e$ ist, ist $Z_2(S_0) \leq \Omega_1(Z(O_p(X)))$. Aber dann ist $V = Z_2(S_0)$. □

Eine aus der Reihe schlagende parabolische P ist jene aus (1.9)(2), da hier $\widetilde{Q}$ Komponenten von $P/O_p(P)$ permutiert. Aber dieser Fall tritt nicht auf:

Lemma 5.5. *Sei $P \in \mathcal{L}(S)$ eine minimal parabolische, $P \not\leq H$. Dann ist P nicht wie in (1.9)(2).*

Beweis: Angenommen doch. In Q gilt $[v, Q] = Z(Q)$ für alle $v \in Q \setminus Z(Q)$. Da $\widetilde{Q} \leq Q$ ist nach (3.4) ist $Z(Q) \leq Z(\widetilde{Q})$. Nach (5.3) ist $Z(Q) = \phi(Q) \leq Y_P \leq O_p(P)$. Da Q speziell ist, ist $QO_p(P)/O_p(P)$ abelsch.

P^0 enthält eine normale Untergruppe N mit $N/O_p(N) \cong N_1 * ... * N_r$, $N_i \cong SL_2(p^f)$. Sei $S_1 = S \cap N$. Dann ist $[S_1, Q] \leq S_1 \cap Q$ und $[S_1, Q, Q] \leq [S_1 \cap Q, Q] \leq Z(Q) \leq O_p(N)$. Also operiert Q quadratisch auf $S_1/O_p(N)$.

Sei $x \in Q \setminus S_1$. Dann ist $\langle N_1, x\rangle / O_p(N) = (N_1 * ... * N_p) \langle x \rangle$ ein Kranzprodukt von $SL_2(p^f)$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p. Aber da p ungerade ist, operiert dann x nicht quadratisch auf $S_1/O_p(N)$, Widerspruch □

Lemma 5.6. *Es gelte (1.15). Sei $P \in \mathcal{M}(S)$ mit $Y_P \leq \widetilde{Q}$ und $P \not\leq H$. Dann ist $P^0/\mathbb{C}_{P^0}(Y_P) \cong SL_m(p^e)$ oder $Sp_{2m}(p^e)$, $m \geq 2$.*

Ist insbesondere $X \leq P$, $X \not\leq H$, eine minimal parabolische, so ist $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^e)$ und $[Y_X, X]$ ist ein natürlicher $SL_2(p^e)$-Modul mit $Z(Q) \leq [Y_X, X] \leq Z_2(S_0)$.

Beweis: Sei $\widetilde{Q}$ abelsch. Dann ist $Y_P \leq \widetilde{Q} \leq \mathbb{C}_G(Z(\widetilde{Q}))$. Da $\widetilde{Q}$ groß ist, folgt $P = \mathbb{N}_G(Y_P) \leq \mathbb{N}_G(\widetilde{Q}) = \widetilde{C} \leq H$, ein Widerspruch. Also ist $\widetilde{Q}$ nicht abelsch und somit nach (3.4) $\widetilde{Q} = Q$. Es ist $Q = O_p(\mathbb{N}_H(Z(S)))$ in einer Gruppe vom Lietyp. Dann ist $[v, Q] = Z(Q)$ für alle $v \in Q \setminus Z(Q)$. Es ist $P \not\leq H$, also ist nach (5.2) auch $P^0 \not\leq H$.

Es ist $Z(Q) = [Y_P, Q] \leq Y_P$, d.h. $\mathbb{C}_{P^0}(Y_P) \leq \mathbb{C}_G(Z(Q)) \leq \widetilde{C} \leq H$.

Mit (5.5) ist P nicht wie im direkten Produkt Fall von (1.9). Weiter folgt mit (1.9), dass $P^0/\mathbb{C}_{P_0}(Y_P) \cong SL_m(p^f)$ oder $Sp_{2m}(p^f)$ ist, und $[Y_P, P_0]$ ist der natürliche Modul. Es ist $P^0 \not\leq H$. Dann gibt es eine minimal parabolische $X \leq P^0$ mit $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^f)$ und $X \not\leq H$ ($X \not\leq \mathbb{C}_{P^0}(Y_P)$). Es ist dann $V = [X, Z(Q)] \not\leq Z(Q)$, da $X \not\leq \widetilde{C} = \mathbb{N}_G(Z(Q))$. Da $Z(Q) \leq Y_P$ ist, ist $V = [X, Z(Q)] = [X, Y_P]$ ein natürlicher Modul für $X/O_p(X)$.

Angenommen $Q \leq O_p(X)$. Dann ist $Y_P \leq Z(O_p(X)) \leq Z(Q)$. Da Q groß ist, folgt $P_0 \leq \widetilde{C}$, Widerspruch. Also ist $Q \not\leq O_p(X)$. Sei $t \in (X^0 \cap Q) \setminus O_p(X)$. Es induziert t eine Transvektion auf V und V ist ein 2-dimensionaler natürlicher $GF(p^f)$ X-Modul, d.h. $[V, t] = \mathbb{C}_V(t)$ ist eindimensional. Dann haben wir, da $t \in Q$, $Z(Q) = [V, Q] \geq [V, t] = \mathbb{C}_V(t) \geq Z(Q)$. Also gilt überall Gleichheit. Dann ist aber $p^f = |\mathbb{C}_V(t)| = |Z(Q)| = p^e$, d.h. $f = e$.

Es ist $\mathbb{C}_S(V) \leq \mathbb{C}_S(Z(Q)) = S_0$. Also ist $O_p(X) \leq S_0$ und folglich $QO_p(X) = S_0$. Da $|S_0 : \mathbb{C}_{S_0}(V)| = p^e$ ist, ist $V \leq Z_2(S_0)$. □

Lemma 5.7. *Seien $P \in \mathcal{M}(S)$, $Y_P \not\leq \widetilde{Q}$ und $X \leq P$ eine minimal parabolische mit $X \not\leq H$. Dann ist $\overline{X^0/O_p(X^0)} \cong L_2(p^e)$ oder $L_2(p^{2e})$ und $V = [Y_X, X]$ ist ein $GF(p^e)X^0$-Modul der Dimension 2, 3 oder 4. Ist $|V| = p^{2e}$, so ist $V \leq Z_2(S_0)$.*

Beweis: Angenommen falsch. Mit (3.4) ist $\widetilde{Q} \leq Q$. Die Struktur von P ist durch (1.9) gegeben. Mit (5.5) ist P nicht wie im direkten Produkt Fall.

Mit (5.3) ist $\overline{X^0/O_p(X^0)} \cong L_2(p^f)$ oder $L_2(p^{2f})$ und $V = [Y_X, X]$ ist ein irreduzibler $GF(p^f)$ X-Modul.

Angenommen $Y_X \cap Q \leq Z(Q)$. Dann ist $[Y_X, Q] \leq Y_X \cap Q \leq Z(Q)$. Da $Q/Z(Q)$ ein treuer Modul für $\mathbb{N}_G(Q)/Q$ ist, folgt $Y_X \leq Q$. Nun ist $Y_X = Y_X \cap Q \leq Z(Q) \leq \mathbb{C}_G(\widetilde{Q})$, und es folgt, da $\widetilde{Q}$ groß ist, $X \leq \widetilde{C}$, Widerspruch.

Also ist $Y_X \cap Q \not\leq Z(Q)$. Für $x \in Q \setminus Z(Q)$ ist $[x, Q] = Z(Q)$, d.h. $Y_X \geq [Y_X, Q] = Z(Q)$. Insbesondere ist $O_p(X) \leq \mathbb{C}_S(Y_X) \leq \mathbb{C}_S(Z(Q)) = S_0$. Damit haben wir $S_0 = QO_p(X) \in \mathrm{Syl}_p(X^0 O_p(X))$.

Setze $S^0 = S \cap X^0/O_p(X^0)$. Mit (2.16) ist $\mathbb{C}_V(S^0)$ eindimensional, also von der Ordnung p^f. Aber $\mathbb{C}_V(S^0) = \mathbb{C}_V(S_0) = Z(Q)$, d.h. $e = f$.

Ist $|V| = p^{2e}$ ein natürlicher X^0-Modul, so ist zunächst $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^e)$ und es folgt, da $|S_0 : \mathbb{C}_{S_0}(V)| = p^e$ ist, $V \leq Z_2(S_0)$. □

Lemma 5.8. *Es gelte (1.15). Sei $K \cong L_n(p^e)$, $n \geq 4$, $U_n(p^e)$, $n \geq 3$, oder $S_{2n}(p^e)$, $n \geq 2$. Dann ist $\mathbb{N}_G(J(S)) \leq H$.*

Beweis: Sei X_H eine parabolische von H, so dass X_H einen normale Untergruppe N besitzt, für die gilt:

(a) Ist $K \cong L_n(p^e)$, so ist $N/O_p(N) = N_1 * N_2$ mit $N_i \cong SL_{[n/2]}(p^e)$, $i = 1, 2$ und $Y_N = Z(O_p(N))$ ist der Tensorproduktmodul. Ist n gerade, so ist $Y_N = O_p(N)$. Ist n ungerade, so ist $O_p(N) = V_1V_2$ mit V_i natürliche N_i-Moduln.

(b) Ist $K \cong U_n(p^e)$, so ist $N/O_p(N) \cong SL_{[n/2]}(p^{2e})$ und $Z(O_p(N))$ ist isomorph zu einem einfachen Untermodul von $V^{nat}_{[n/2]} \otimes (V^{nat}_{[n/2]})^{p^e}$, wobei $V^{nat}_{[n/2]}$ ein natürlicher $N/O_p(N)$-modul ist. Weiter ist $Y_N = O_p(N)$, falls n gerade ist. Ist n ungerade, so ist $O_p(N)/Y_N$ ein natürlicher $N/O_p(N)$-Modul.

(c) Ist $K \cong S_{2n}(p^e)$, so ist $N/O_p(N) \cong SL_n(p^e)$ und $Y_N = O_p(N) \cong S^2(V^{nat}_n)$.

Ist in (a) oder (b) n gerade, so ist $O_p(N) = Y_N$ eine elementarabelsche Untergruppe maximalen Rangs, genauso für c und beliebiges n, vgl. (2.18). Dann ist $Y_N = O_p(N) = J(S)$.

Nach Thompson-Faktorisation ist entweder $X_H = \mathbb{C}_{X_H}(Y_N)\mathbb{N}_{X_H}(J(S))$ oder Y_N ist ein F-Modul. Ist in (b) n ungerade, so ist nach (2.3) Y_N kein F-Modul, d.h. $J(S) \leq O_p(N)$. Nach (2.18) ist Y_N keine maximal elementarabelsche Untergruppe, d.h. $J(S) > Y_N$. Da $O_p(N)/Y_N$ ein irreduzibler Modul für $N/O_p(N)$ ist, folgt $O_p(N) = J(S)$.

Also sei $K \cong L_n(p^e)$ und n ungerade. Sei $A \leq S$ maximal elementar abelsch. Dann ist $m_p(A) = [(n/2)^2]e = (n^2 - 1/2)e$ nach (2.18) und $A \leq O_p(N)$. Es wird $O_p(N)$ erzeugt von zwei verschiedenen maximal elementar abelschen Untergruppen von S. Also ist $O_p(N) = J(S)$.

Also ist in jedem Fall $O_p(N) = J(S)$. Sei $X = \mathbb{N}_G(J(S))$. Da $X_H \leq X$ ist, ist $O_p(X) = O_p(X_H) = O_p(N) = J(S)$.

Sei $P \in \mathcal{M}(S)$ mit $X \leq P$. Dann ist P^0 gegeben durch (1.9). Mit (5.5) ist P nicht wie im direkten Produkt Fall. Insbesondere ist $P^0/\mathbb{C}_{P^0}(Y_P)$ eine Gruppe vom Lietyp, oder $P^0/\mathbb{C}_{P^0}(Y_P)$ ist ein Produkt zweier linearer Gruppen, und $O_p(P) \leq J(S)$. Es ist $X = \mathbb{N}_P(J(S))$ eine parabolische von P und $X^0/J(S) \geq N/J(S)$. Mit (3.17) folgt $X^0 = X^0_H = N$, also $X = X_H \leq H$. □

Lemma 5.9. *Sei $P \in \mathcal{M}(S)$ und $X \leq P$ eine minimal parabolische mit $X \not\leq H$ und $V = [Y_X, X^0]$. Dann ist $|V| = p^{3e}$ oder p^{4e}. Insbesondere ist $Y_P \not\leq \widetilde{Q}$.*

Beweis: Angenommen falsch. Mit (5.6) und (5.7) ist $X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(p^e)$ und $Z(Q) \leq V \leq Z_2(S_0)$. Sei $K \not\cong L_n(p^e)$, $U_n(p^e)$ oder $S_{2n}(p^e)$. Dann ist mit (5.1) $V = Z_2(S_0)$. Mit (5.4) gibt es dann ein $X_H \leq H$ mit $X_H/O_p(X_H) \cong SL_2(p^e)$, für das V ein natürlicher Modul ist. Dann ist $X \leq \mathbb{N}_G(V) = X_H\mathbb{C}_G(V) \leq X_H\mathbb{C}_G(Z(S)) \leq X_H\widetilde{C} \leq H$, Widerspruch. Also ist $K \cong L_n(p^e)$, $U_n(p^e)$ oder $S_{2n}(p^e)$.

Sei $K \not\cong L_3(p^e)$. Dann ist $Z_2(S_0) \leq Z(J(S))$. Also ist $J(S) \leq \mathbb{C}_S(V) = O_p(X)$. Es ist $J(S)$ charakteristisch in jeder Untegruppe von S, in der $J(S)$ enthalten ist, also auch in $O_p(X)$. Dann ist $X \leq \mathbb{N}_G(J(S))$. Mit (5.8) folgt $X \leq H$, Widerspruch.

Also ist $K \cong L_3(p^e)$. Dann ist $|S_0| = p^{3e}$ und $M^0 \cong QL \cong X^0 \cong p^{2e} : SL_2(p^e)$. Die parabolischen von K korrespondieren zu

$$\overset{a_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_2}{\circ}.$$

Sei T eine Cartanuntergruppe von K in $\mathbb{N}_K(S_0)$, also $TS_0 = \mathbb{N}_K(S_0)$, $T \leq \mathbb{N}_G(S)$. Dann ist $T = \langle r, s\rangle$ abelsch, $o(r) = p^e - 1$, $o(s) = p^e - 1/\mathrm{ggT}(p^e - 1, 3)$. Also gibt es in T eine eindeutig bestimmte Vierergruppe $W = \langle a, b\rangle$. M und $\widetilde{C}$ sind parabolische von H korrespondierend zu $\{a_1\}$ bzw $\{a_2\}$. Also ist $M \cong \widetilde{C}$, und beide sind nach Voraussetzung nicht auflösbar. Sei $L_M \cong SL_2(p^e)$ ein Levikomplement von M. Seien $Z(L) = \langle x\rangle$ und $Z(L_M) = \langle y\rangle$, d.h. x und y sind von der Ordnung 2 und $x \neq y$. Es sind L_MY_M und LQ die Urbilder von $E(M/O_p(M))$ und $E(\widetilde{C}/\widetilde{Q})$, also charakteristisch in M bzw $\widetilde{C}$. Dann zentralisieren x und y jeweils $\widetilde{C}/\widetilde{Q}$ bzw $M/O_p(M)$. Also sind $x, y \in \mathbb{N}_K(S_0)$ und damit auch in W. Dann ist o.E. $x = a$ und $y = b$. Nun invertieren a und b jeweils eine durch sie eindeutig bestimmte Untergruppe von Q der Ordnung p^{2e}. ab invertiert $Q/Z(Q)$ und ist trivial auf $Z(Q)$. Es sind $[Q, a] = \widetilde{Q}$ und $[Q, b] = Y_M$.

Sei $c \in X$ von der Ordnung 2, so dass c ein Element in $\in Z(X^0/O_p(X^0))^\sharp$ induziert. Dann ist $c \in \mathbb{N}_G(S) \leq \widetilde{C} \leq H$ und c invertiert $Y_X \leq Q$. Angenommen $c \notin K$. Dann induziert c einen Körper-, Diagonal- oder Graphautomorphismus auf K oder Produkte davon. c invertiert eine elementar abelsche Untergruppe von Q. Da Graphautomorphismen Wurzelgruppen untereinander abbilden und Körperautomorphismen mit Wurzeluntergruppen Kranzprodukte bilden, kann c nur einen Diagonalautomorphismus induzieren. Dann sind alle Wurzeluntergruppen c-invariant. S_0 wird erzeugt von Wurzeluntergruppen X_{a_1}, X_{a_2} und $X_{a_1+a_2}$. O.E. ist $Z(Q) = X_{a_1}$. Dann sind Y_M und $\widetilde{Q}$ eindeutig durch die Wahl der zweiten Wurzeluntergruppe festgelegt. Da c nun einen Diagonalautomorphismus induziert, ist auch Y_X ein Produkt zweier Wurzeluntergruppen, das $Z(Q)$ enthält. Da $Y_X \neq \widetilde{Q}$ ist, folgt $Y_X = Y_M$ und $X = M \leq H$. Sei nun $c \in K$. Damit ist auch $c \in \mathbb{N}_K(S_0)$. Also ist $c \in W$. Dann ist $c = a$ oder b. Sei $b = c$. Dann ist $Y_X = [Q, c] = [Q, b] = Y_M$, und es folgt $X = \mathbb{N}_G(Y_X) = \mathbb{N}_G(Y_M) = M \leq H$. Analog folgt $X = \widetilde{C}$ für $a = c$.

Dmit haben wir: Ist V mit $|V| = p^{2e}$ ein natürlicher $X^0/O_p(X)$-Modul, $X^0/O_p(X) \cong SL_2(p^e)$, so ist $X^0 \leq H$.

Ist insbesondere $Y_P \leq \widetilde{Q}$, so ist mit (5.6) V ein natürlicher $X^0/O_p(X^0)$-Modul und es folgt $P \leq H$ mit dem eben bewiesenen. □

Lemma 5.10. *Sei $P \in \mathcal{M}(S)$. Dann ist $P \leq H$.*

Beweis: Angenommen falsch. Mit (5.2) ist $P^0 \not\leq H$. Dann gibt es eine minimal parabolische $X \leq P$ mit $X \not\leq H$. Mit (5.6) und (5.7) ist $\overline{X^0/O_p(X^0)} \cong L_2(p^e)$ oder $L_2(p^{2e})$ und $V = [Y_X, X^0]$ ist ein irreduzibler $GF(p^e)X$-Modul. Mit (5.9) haben wir $L_2(p^e)$ und V ist ein 3 dimensionaler Modul, oder wir haben $L_2(p^{2e})$ und V ist ein 4 dimensionaler Modul, jeweils über $GF(p^e)$. Insbesondere ist V kein quadratischer Modul. Dann ist $V \not\leq Q$. Es ist $[Q, V, V] \leq [V \cap Q, V] = 1$ und $[V, Q] \leq |V \cap Q/Z(Q)| \leq p^{2e}$. Ist $|[V, Q]/Z(Q)| = p^e$, so induziert V Transvektionen auf Q. Dann ist das Levikomplement L von $\mathbb{N}_H(Q)$ eine lineare, unitäre oder symplektische Gruppe und $Q/Z(Q)$ ist ein natürlicher L-Modul. Das geht nur für $K \cong U_n(p^e)$ oder $S_{2n}(p^e)$, vgl. (2.13). Ist $|[V, Q]/Z(Q)| > p^e$, so folgt mit (5.1) $K \cong L_n(p^e)$ oder $U_n(p^e)$, da $[V, Q] \leq Z_2(S_0)$ ist. Da V nicht quadratisch ist, folgt $J(S) \leq O_p(X)$. Damit ist $X \leq \mathbb{N}_G(J(S)) \leq H$ mit (5.8), Widerspruch.

□

Hauptsatz. *$H = \langle \mathcal{L}(S) \rangle$.*

Beweis: Sei $P \in \mathcal{L}(S)$. Sei $P \leq \widetilde{P} \in \mathcal{M}(S)$. Mit (5.10) folgt $\widetilde{P} \leq H$. Also ist $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$. Es wird aber H erzeugt von parabolischen Untergruppen. Also gilt Gleichheit. □

Literaturverzeichnis

[asc1] M. Aschbacher, *„Finite group theory"*, Cambride University Press (1993)

[asc2] M. Aschbacher, *„The 27-dimensional Modul for E_6"*, Inv. Math. 89 (1987) 159-195, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988) 275-293, Trans. of the AMS, Vol. 321, No. 1 (1990) 45-84, J. of Algebra 131 (1990) 23-39

[ccnpw] J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson *„Atlas of Finite Groups"*, Clarendon Press, Oxford (1985)

[che1] A. Chermak, *„Quadratic pairs without components"* Journal of Algebra 258 (2002) 442-476

[che2] A. Chermak, *„Quadratic pairs"* Journal of Algebra 277 (2004) 36-72

[glm] R.M. Guralnick, R. Lawther, G. Malle *„The $2F$-modules for nearly simple groups"* J. of Algebra 307 (2007) 643-676

[gls1] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon *„The Classification of the Finite Simple Groups Number 2. Part I. Chapter G. General Group Theory"* American Mathematical Society (1994)

[gls2] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *„The Classification of the Finite Simple Groups Number 3. Part I. Chapter A. Almost Simple K-Groups"* American Mathematical Society (1996)

[gm] R.M. Guralnick, M. Malle *„Classification of $2F$-Modules, II"* Finite groups 2003. Proceedings of the Gainesville conference on finite groups 117-183 (2004)

[gor] D. Gorenstein, *„Finite Groups"*, Harper and Row (1968)

[kl] P. Kleidman, M. Liebeck *„The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups"* Cambridge University Press (1990)

[ms1] U. Meierfrankenfeld, G. Stroth *„Groups of local characteristic p, The H-stucture Theorem"* Preliminary version of November 19, 2002

[ms2] U. Meierfrankenfeld, G. Stroth *„A Characterisation of* $\mathrm{Aut}(G_2(3))$*"* J. of Group Theory Band 11 Nr. 4 (2008) 479-495

[mss1] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, G. Stroth *„Groups of local characteristic p, The structure Theorem“* Preliminary version of June 10, 2009, to appear

[mss3] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, G. Stroth *„Finite groups of local characteristic p - An Overview“* Proceedings of the 2001 Durhum Conference on Groups and Geometry (2003)

[ps] C. Parker, G. Stroth *„Strongly p-embedded Subgroups“* arXiv:0901.0805v1 [math.GR] 7 Jan 2009

[sast] M. Salarian, G. Stroth *„Strongly p-embedded Groups“* Preliminary version of July 22, 2009

[smi] Stephen D. Smith *„Irreduzible Modules and Parabolic Subgroups“* Journal of Algebra 75 (1982) 286-289

[sz] G.Seitz, A. Zalesskii *„On the Minimal Degrees of Projektive Represetations of the Finite Chevalley Groups, II“* Journal of Algebra 158 (1993) 233-243

[wil] R. Wilson et al. *„ATLAS of Finite Group Representations - Version 3“* http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich meine Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die von mir angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle/Saale, 18. August 2009

Curriculum Vitae

Persönliche Angaben

Name	Andreas Seidel
Akademischer Grad	Diplom
Anschrift	Lessingstr. 11 06114 Halle
Geburtstag	16.11.80
Geburtsort	Staßfurt
Fachgebiet der Promotion	Gruppentheorie

Tätigkeiten

10/2005 – 09/2009	Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg wissenschaftlicher Mitarbeiter

Studium

10/2000 – 06/2005	Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg Mathematikstudium, Abschluss: Diplom Diplomarbeit: „Planare Gruppen“

Zivildienst

08/1999 – 06/2000	Berufsförderungswerk gGmbH, Staßfurt

Schulbildung

09/1987 – 08/1991	TOS Ludwig-Uhland, Hohenerxleben
09/1991 – 07/1999	Dr. Frank-Gymnasium, Staßfurt; Abschluss: Abitur