

$$m_i \ddot{x}_i = \vec{F}_i$$

$$\int \dot{x}_i dt = x_i \quad \int \ddot{x}_i dt = \dot{x}_i$$

OTTO-VON-GUE-  
 RICKE-UNIVERSITÄT  
 MAGDEBURG

Christian Richter

Gekoppelte Diskrete Elemente  
 und Mehrkörpersimulation  
 am Beispiel von Becherförderern



Institut für  
 Logistik und Materialflusstechnik



# **Gekoppelte Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation am Beispiel von Becherförderern**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Christian Richter  
geb. am 25.07.1983 in Lutherstadt-Wittenberg  
genehmigt durch die Fakultät Maschinenbau  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. André Katterfeld  
Prof. Dr.-Ing. Frank Will

Promotionskolloquium am 17. April 2020



## Kurzfassung

Der Schöpfwiderstand ist bei der Schüttgutförderung mit Becherwerken neben dem Hubwiderstand des Schüttguts eine für den Energiebedarf der Gesamtanlage entscheidende Größe. Der Schöpfwiderstand wird von der Becherform und Becherteilung, der Beschickungsart, der Zugmittelgeschwindigkeit sowie der Kohäsivität des Schüttguts beeinflusst. Eine Ursache für die Abhängigkeit des Schöpfwiderstandes von der Zugmittelgeschwindigkeit und der Kohäsivität des Schüttgutes liegt im Effekt des sogenannten Bechernickens.

Als Bechernicken wird die Drehbewegung der Becher um ihren Befestigungspunkt am Zugmittel definiert. Das Bechernicken tritt beim Übergang der Becher von der kreisförmigen in die geradlinige Bewegung aufgrund der ruckartigen Verringerung der Becheraußenkantengeschwindigkeit auf. Bei hohen Becherfüllungsgraden kann aufgrund dessen bereits gefördertes Gut aus dem Becher geschleudert werden. Zum Erreichen des notwendigen Massenstroms muss mehr Gut geschöpft und gehoben werden. Dies hat einen schlechteren Wirkungsgrad der Förderanlage zur Folge.

Eine weitere Einflussgröße auf die Effektivität des Fördervorgangs schnelllaufender Becherwerke ist das laterale Schwingen der Becher im freien Becherstrang. Beim Auflaufen der Becher auf die Umlenktrommeln erfahren die Becher und das Schüttgut aufgrund dynamischer Kräfte eine theoretisch unendlich große Beschleunigung auf die Bahnkurve der Antriebs- bzw. Spanntrommel. Dies ist jedoch physikalisch unmöglich. Der Becher führt daher zunächst eine Drehbewegung entgegen der Bahnkurve durch, um anschließend auf den Umlenkradius der Trommel einzuschwenken. Dieses Pendeln der Becher überträgt sich im nachfolgenden Becherstrang in Form einer gedämpften Schwingung. Bereits gefördertes Gut kann bei hohen Becherfüllungsgraden aus den Bechern in Richtung des Becherwerkfußes zurückfallen. Dieses Gut muss anschließend erneut geschöpft und gehoben werden. Weiterhin wird die Becher-Gurt-Verbindung, der Becherrücken und der Gurt durch die Biegewechsel belastet.

Zur Analyse des Bewegungsverhaltens schnelllaufender Becherwerke wird in dieser Arbeit eine Simulationsmethode zur Berechnung des Bewegungsverhaltens von Maschinenmodellen im Kontakt mit Schüttgütern implementiert. Dabei werden die bekannten Methoden der Diskrete Elemente (DEM) Simulation und der Mehrkörpersimulation (MKS) auf Programmebene gekoppelt.

Die Simulationsergebnisse der gekoppelten DEM-MK-Simulation werden anhand eines analytisch lösbaren Beispiels verifiziert. Zum Nachweis, dass die entwickelte Methode geeignet

ist, das Bewegungsverhalten realer Förderanlagen und Maschinen im Kontakt mit Schüttgut abzubilden, wird ein vereinfachtes Mehrkörpersimulationsmodell des Versuchsbecherwerkes verwendet. Die Simulationsergebnisse des vereinfachten Versuchsstandes werden mit den experimentell ermittelten Ergebnissen verglichen.

Die gekoppelte DEM-MK-Simulationsmethode wird in dieser Arbeit zur Ermittlung des Schöpfwiderstandes und der Schöpfarbeit eines Senkrechtbecherwerkes angewendet. Es wird der Einfluss der Beschickungsrichtung und der Kohäsivität des Schüttguts analysiert. Der Einfluss der Bechernickens auf das Entleerungsverhalten des Versuchsbecherwerkes wird für unterschiedliche Vorspannungen experimentell untersucht und den Simulationsergebnissen gekoppelter DEM-MK-Simulationen gegenüber gestellt.

Abschließend wird die Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation für die Entwicklung einer neuen Umlenkgeometrie am Becherwerkfuß angewendet, welche den negativen Einfluss des Bechernickens auf den Schöpfwiderstand reduzieren kann.

## Ehrenerklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters habe ich nicht in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Verwendete fremde und eigene Quellen sind als solche kenntlich gemacht.

Ich habe insbesondere nicht wissentlich:

- Ergebnisse erfunden oder widersprüchliche Ergebnisse verschwiegen,
- statistische Verfahren absichtlich missbraucht, um Daten in ungerechtfertigter Weise zu interpretieren
- fremde Ergebnisse oder Veröffentlichungen plagiiert
- fremde Forschungsergebnisse verzerrt wiedergegeben

Mir ist bekannt, dass Verstöße gegen das Urheberrecht Unterlassungs- und Schadensersatzansprüche des Urhebers sowie eine strafrechtliche Ahndung durch die Strafverfolgungsbehörden begründen kann.

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die Dissertation ggf. mit Mitteln der elektronischen Datenverarbeitung auf Plagiate überprüft werden kann.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes auch noch nicht veröffentlicht.

Dannigkow, 05.02.2020





# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b> .....	<b>I</b>
<b>Ehrenerklärung</b> .....	<b>III</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>V</b>
<b>Formelzeichenverzeichnis</b> .....	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Motivation</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Stand der Wissenschaft und Technik</b> .....	<b>3</b>
1.2.1 Themengebiet Becherwerke .....	3
1.2.2 Themengebiet gekoppelte Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation .....	5
<b>1.3 Zielstellung</b> .....	<b>9</b>
<b>1.4 Vorgehensweise</b> .....	<b>10</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 Schüttgutmechanik</b> .....	<b>11</b>
<b>2.2 Becherwerke</b> .....	<b>16</b>
2.2.1 Einteilung von Becherwerken .....	16
2.2.2 Aufbau und Funktionsprinzip von Becherwerken .....	17
2.2.3 Berechnungsgrundlagen für Becherwerke .....	20
2.2.3.1 Massenstrom und Becherfüllungsgrad .....	20
2.2.3.2 Bewegungswiderstände von Senkrechtbecherwerken .....	21
2.2.3.3 Bestimmung der notwendigen Antriebsleistung .....	26
2.2.3.4 Einflussfaktoren des Schöpfwiderstandes .....	27
<b>3 Simulationsmethoden</b> .....	<b>36</b>
<b>3.1 Methode der Mehrkörpersimulation</b> .....	<b>36</b>
3.1.1 Dynamik des starren Körpers .....	37
3.1.1.1 Lagebeschreibung .....	37
3.1.1.2 Beschreibung der Relativbewegung .....	38
3.1.2 Bewegungsgleichungen .....	39
3.1.2.1 Impulssatz .....	39
3.1.2.2 Drallsatz .....	39
3.1.2.3 Zustandsgleichung .....	41
3.1.2.4 Newton-Euler-Gleichungen .....	41
3.1.3 Lösung der Bewegungsgleichungen .....	45
3.1.3.1 Explizite Verfahren .....	45
3.1.3.2 Implizite Verfahren .....	46
3.1.4 Anwendungsbeispiel ebenes Pendel .....	47
<b>3.2 Diskrete Elemente Methode</b> .....	<b>50</b>
3.2.1 Integrationsverfahren .....	51
3.2.1.1 Velocity Verlet Algorithmus .....	51
3.2.1.2 Diskussion des kritischen Zeitschritts .....	52
3.2.2 Kontakterkennung .....	54
3.2.3 Kontaktkraftgesetze in der DEM-Simulation .....	55
3.2.3.1 Normal- und Tangentialkraftmodell .....	56
3.2.3.2 Rollreibungsmodelle .....	58
3.2.4 Simulation komplexer Körper in der DEM .....	60

3.2.4.1	Superquadrics .....	60
3.2.4.2	Multispheres .....	61
<b>4</b>	<b>Methode der gekoppelten Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation .....</b>	<b>62</b>
<b>4.1</b>	<b>Modellierung von Partikelsystemen mit LIGGGHTS® .....</b>	<b>62</b>
<b>4.2</b>	<b>Modellierung von Mehrkörpersystemen .....</b>	<b>63</b>
<b>4.3</b>	<b>Konzept der Kopplungsschnittstelle .....</b>	<b>65</b>
4.3.1	Konzept der FMU zum Modellaustausch .....	66
4.3.2	Konzept der FMU zur wechselseitigen Simulation .....	67
<b>4.4</b>	<b>Gekoppelte DEM – MK – Simulation .....</b>	<b>68</b>
4.4.1	Implementierung .....	68
4.4.2	Verifizierung .....	70
4.4.2.1	Nachweis des Energieerhaltungssatzes .....	70
4.4.2.2	Einfluss der Kontaktsteifigkeit und der Zeitschrittweite .....	72
4.4.3	Validierung .....	74
4.4.3.1	Kalibrierung des Schüttgutes .....	74
4.4.3.2	Beschreibung des vereinfachten Versuchsstandes .....	80
4.4.3.3	Beschreibung und Durchführung der Validierungsversuche .....	81
4.4.3.4	Parametrierung des Mehrkörpermodells .....	84
4.4.3.5	Durchführung und Vergleich der Validierungsexperimente .....	90
<b>4.5</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>95</b>
<b>5</b>	<b>Beitrag zur Analyse des Bewegungsverhaltens von Becherwerken.....</b>	<b>96</b>
<b>5.1</b>	<b>Vorstellung des Versuchsbecherwerks.....</b>	<b>96</b>
<b>5.2</b>	<b>Gekoppelte DEM-MK-Simulation von Senkrechtbecherwerken.....</b>	<b>98</b>
5.2.1	Simulationsmodell des Versuchsbecherwerks.....	98
5.2.2	Analyse des Bewegungsverhaltens der Becher .....	102
5.2.2.1	Messtechnische Erfassung des Bechernickens.....	102
5.2.2.2	Parametrierung des Mehrkörpersimulationsmodells .....	107
5.2.2.3	Mehrkörpersimulation des Bechernickens .....	109
5.2.3	Analyse des Schöpfwiderstands mittels gekoppelter DEM-MK-Simulation .....	114
5.2.4	Analyse zum Entleerungsverhalten von Becherwerken.....	125
5.2.4.1	Einfluss der Vorspannung .....	125
5.2.4.2	Einfluss der Becherfüllung.....	129
<b>6</b>	<b>Becherförderer mit Übergangsbogen zur Umlenkung des Zugmittels am Becherwerkfuß als innovativer Ansatz zur Reduzierung des Bechernickens .....</b>	<b>131</b>
<b>6.1</b>	<b>Mathematische Beschreibung.....</b>	<b>131</b>
<b>6.2</b>	<b>Simulationsstudie .....</b>	<b>132</b>
6.2.1	Variante I: Beibehaltung des Umlenkradius .....	132
6.2.2	Variante II: Verringerung des Zielradius des Übergangsbogens.....	134
6.2.3	Vergleich der neu entwickelten Lösung mit der konventionellen Lösung.....	135
6.2.3.1	Vergleich der Variante I mit der konventionellen Umlenkung .....	135
6.2.3.2	Vergleich der Variante II mit der konventionellen Umlenkung .....	138
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>141</b>
<b>7.1</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>141</b>
<b>7.2</b>	<b>Ausblick .....</b>	<b>147</b>
<b>Literatur</b>	<b>.....</b>	<b>149</b>

## Formelzeichenverzeichnis

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$a$	$m/s^2$	Beschleunigung
$a^2$		charakteristischer Klothoidenparameter
$A_{0K}$		Rotationsmatrix
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$		innere Kräfte des Systems
$d_{max}$	mm	maximale Korngröße
$d_{min}$	mm	minimale Korngröße
$D_T$	m	Durchmesser der Trommel
$E_{kin}$	J	kinetische Energie
$E_{pot}$	J	potentialle Energie
$e_0, e_1$	m	Becherausladung
$f$	Hz	Frequenz
$ff_c$	-	Fließgrenze
$Fr^2$	-	Froude-Zahl
$\mathbf{F}$	N	Kraft
$F_1^{max}$	N	maximale Gurtzugkraft
$F_B$	N	Beschleunigungskräfte
$F_F$	N	Bewegungswiderstand aus dem Fördergut
$F_H$	N	Gewichtskraft des Schüttguts in einem Becher
$\mathbf{F}_n$	N	Normalkraftvektor
$F_R$	N	Reibung in Normalenrichtung der Bewegung
$F_{Sp}$	N	Spannkraft
$\mathbf{F}_{tan}$	N	Tangentialkraftvektor
$F_T$	N	Bewegungswiderstand aus dem Tragmittel
$F_U$	N	Umfangskraft an der Antriebsstation
$F_{Wf}$	N	Kettenknickwiderstände und Lagerreibung der Kettenräder
$F_{Wst}$	N	Steigungswiderstand
$F_{WS}$	N	Schöpfwiderstand
$F_{WU}$	N	Umlenkwiderstand des Gurtes
$F_Z$	N	Bewegungswiderstand aus dem Zugmittel
$g$	$m/s^2$	Erdbeschleunigung
$h$	m	Höhe des Förderers
$h_p$	m	Polhöhe

## Formelzeichenverzeichnis

---

$H(\mathbf{q})$ generalisierte Massenträgheitsmatrix		
<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$i$	-	Zählvariable
$I$	A	Stromstärke
$I_m$	kg/s	Massenstrom
$J$		Trägheitstensor der Rotation
$K$	-	Abminderungsfaktor der Funktion der spez. Schöpfarbeit
$k$	Pa	Steifigkeit
$k_r$	Pa	Federsteifigkeit in Rotationsrichtung
$k_S$	Pa	Federsteifigkeit in Scherrichtung
$l_T$	m	Becherteilung
$l$	m	Pendellänge
$L$	m	Bahnlänge Übergangsbogen
$\dot{m}$	kg/s	Massenstrom
$m$	kg	Masse
$m_0$	kg	Masse der Becherfüllung
$m_B$	kg	Masse eines Bechers
$m_d$	g	Masse der trockenen Probe
$m_G$	Kg	Masse des Schüttgutes
$m_K$	kg	Masse einer Kugel
$m_W$	g	verdunstete Masse des Wassers einer Probe
$m'_Z$	kg	Masse des Zugmittels auf einen Meter bezogen
$M$	Nm	Moment
$M_A$	Nm	Anlaufmoment
$M_k$	Nm	Kippmoment
$M_{Nenn}$	Nm	Nennmoment
$M_S$	Nm	Schöpfmoment
$N$	-	Anzahl der Körper im System
$N$	min <sup>-1</sup>	Drehzahl
$N_{Nenn}$	min <sup>-1</sup>	Nenndrehzahl
$p$	-	Polpaarzahl
$P$	W	Leistung
$\mathbf{q}$		generalisierter Zustandsvektor
$q_F$	kg/m	Metergewichtslast des Fördergutes
$q_T$	kg/m	Metergewichtslast des Tragmittels
$q_Z$	kg/m	Metergewichtslast des Zugmittels

$r_a$	m	Radius der Becherspitze an den Umlenktrommeln
<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$r_T$	m	Trommelradius
$\mathbf{r}_{0S}$		Ortsvektor im Inertialsystem
$r_{SP,K}$		Ortsvektor in körperfesten Koordinaten
$R$	m	Radius
$R_i, R_j$	m	Partikelradius der Partikel i und Partikel j
$R_\infty$		Einlaufradius Übergangsbogen
$\Delta R$	m	Kreisabweichung Übergangsbogen
$s$	-	Schlupf
$s'$	-	Schöpfweg
$s_k$	-	Kippschlupf
$t$	s	Zeit
$t_f$	s	relative Becherfolgezeit
$\Delta t$	s	Zeitschrittvariable
$\mathbf{T}$		Trägheitstensor bzgl. Massenmittelpunkt
$T$	s	Periodendauer
$U$	V	Spannung
$v_Z$	m/s	Zugmittelgeschwindigkeit
$\mathbf{v}_{0S}$		Geschwindigkeitsvektor
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen
$V_G$	m <sup>3</sup>	Volumen des Schüttguts in einem Becher
$V_B$	m <sup>3</sup>	Bechervolumen
$w$	%	Wassergehalt einer Schüttgutprobe
$W_S$	Nm	Schöpfarbeit
$W_{SS}$	Nm/kg	spezifische Schöpfarbeit
$\mathbf{x}_i$	m	Position Körper i
$\dot{\mathbf{x}}_i$	m/s	Geschwindigkeit Körper i
$\ddot{\mathbf{x}}_i$	m/s <sup>2</sup>	Beschleunigung Körper i
$X, Y, Z$		kartesische Koordinaten
$X_M, Z_M$		Mittelpunkt Übergangsbogen

<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$\beta_{DD}$	°	Böschungswinkel DrawDown Test
$\varepsilon$	-	Porosität
$\eta_F$	-	Becherfüllungsgrad
$\eta_{ges}$	-	Wirkungsgrad
$\vartheta$	rad	Winkel des Kreissegments zw. zwei Bechern
$\kappa$	-	Krümmung einer Funktion
$\lambda$	-	Vektor unbekannter Kräfte
$\mu$	-	Reibungsbeiwert
$\mu_W$	-	Wandreibwert
$\rho_b$	kg/m <sup>3</sup>	Schüttdichte
$\rho_s$	kg/m <sup>3</sup>	Feststoffdichte
$\sigma_1$	Pa	Verfestigungsspannung
$\sigma_c$	Pa	Druckfestigkeit
$\sigma_h$	Pa	horizontale Druckspannung
$\sigma_v$	Pa	vertikale Druckspannung
$\tau$	rad	Tangentenwinkel d. Klothoide
$\boldsymbol{\tau}$	-	generalisierte äußere Kräfte
$\boldsymbol{\tau}_c$	-	Kraftkopplungsvektor
$\varphi_i$	rad	Orientierung, Körper i
$\varphi_{DD}$	°	Scherwinkel DrawDown Test
$\varphi_x$	rad	Steigungswinkel des Wandfließortes
$\Delta\phi$	°	Winkelabweichung
$\omega$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit
$\boldsymbol{\omega}_i$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit Körper i
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$	rad/s <sup>2</sup>	Winkelbeschleunigung Körper i
$\omega_{ref}$	rad/s	Solldrehzahl Asynchronmaschine
$\omega_{rel}$	rad/s	Ist-Drehzahl Asynchronmaschine

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Der Entwicklungsprozess moderner Maschinen und Anlagen ist geprägt von zahlreichen Risiken. Kürzer werdende Entwicklungszyklen und erhöhter Kostendruck führen zu einer umgangssprachlich als „Bananen-Entwicklung“ bezeichneten Strategie. Dies bedeutet, dass das Produkt beim Kunden reift und erst durch zahlreiche Modifikationen nach der eigentlichen Inbetriebnahme seine volle Leistungsfähigkeit erreicht. Dem kann und muss durch einen schlanken, computerunterstützten Entwicklungsprozess entgegen gewirkt werden. Gerade im Bereich der Förder- und Materialflusstechnik, in der viele Anlagen in einer Ausführung nur einmal gebaut werden, ist es notwendig, die Funktionalität bereits in der Design- und Auslegungsphase nachzuweisen. Die Diskrete Elemente Methode (DEM) hat sich in den vergangenen 20 Jahren dabei zu einem unerlässlichen Standardwerkzeug entwickelt.

Für die komplexe Interaktion von Förderanlagen, Baumaschinen, Gewinnungsmaschinen und Anlagen zur Schüttgutaufbereitung ist die Rückwirkung des Schüttgutes, und die daraus resultierende maschinendynamische Reaktion auf den Prozess, von besonderer Bedeutung. Dies kann die DEM Simulation jedoch nicht ohne externe Berechnungsmethoden leisten. Eine Kopplung mit der etablierten Methode der Maschinendynamiksimulation, welche wiederum alle Zusammenhänge der Domänen Mehrkörpermodellierung, Elektronik, Hydraulik und Regelungstechnik abbildet, ist daher notwendig.

Als Anwendungsbeispiel für die zuvor genannte Methodik wird das Bewegungsverhalten von Becherwerken analysiert. In einer klassischen, d.h. ungekoppelten, DEM Simulation bewegen sich die modellierten Becher auf einer idealen Bahnkurve entsprechend der angenommenen Zugmittelgeschwindigkeit. Es ist bekannt, dass jeder Becher beim Übergang von der kreisförmigen in die geradlinige Bewegung aufgrund der ruckartigen Änderung der Geschwindigkeit eine Bewegung entgegen der angestrebten Richtung durchführt. Dieses Pendeln der Becher kann zu einem Herausschleudern des bereits geförderten Gutes aus dem Becher führen. Für das erneute Schöpfen und Heben wird zusätzlich Energie benötigt, um den erforderlichen Massenstrom zu erreichen.

Ausgehend von den beiden zuvor genannten Problemstellungen ergeben sich die folgenden Forschungslücken:

1. Wie kann die Rückwirkung des Schüttgutes auf den Förderprozess bzw. den Arbeitsprozess einer Maschine modelliert werden ?
2. Welche wechselseitige Beeinflussung besteht zwischen dem Schüttgut und dem Maschinenverhalten ?
3. Welchen Einfluss hat das Bechernicken auf das Schöpf- und Entleerungsverhalten von Becherwerken ?

Zur Beantwortung dieser Fragen wird die Kopplung zwischen der Diskrete Elemente Methode (DEM) und der Mehrkörpersimulation (MKS) verwendet. Dieser Ansatz vereinigt die Stärken beider Methoden in einer in sich geschlossenen Vorgehensweise. Die Stärken und Schwächen beider Simulationsmethoden sind in Tabelle 1-1 zusammengefasst.

**Tabelle 1-1: Stärken und Schwächen der Mehrkörpersimulation und der Diskrete Elemente Simulation**

	<b>Mehrkörpersimulation (MKS)</b>	<b>Diskrete Elemente Methode (DEM)</b>
<b>Stärke</b>	Integration von Elektrotechnik, Hydraulik, Regelungstechnik, Mehrkörpermechanik	realitätsnahe Abbildung von Schüttgütern und deren makroskopischen Eigenschaften
	Berechnung von Lagerreaktionen, Systemdrücken, elektrischer Leistung u.a.	Lösung einer großen Anzahl von Bewegungsgleichungen
<b>Schwäche</b>	aufwändige Modellierung einfacher Kontakte zw. einzelnen Körpern	keine lastabhängigen Wandgeschwindigkeiten
	Lösung einer großen Anzahl von Bewegungsgleichungen	keine Berechnungsmöglichkeiten für Lagerreaktionen und resultierende Leistung

Die Idee einer gekoppelten DEM-MK-Simulation ist dabei nicht neu, in den zurückliegenden 10 Jahren wurden zahlreiche Implementierungen realisiert (vergl. Kap. 1.2.2). Jedoch basiert ein überwiegender Teil dieser Arbeiten auf einer netzwerkbasierter Kopplung zweier Softwareprogramme. Dies hat immer den Nachteil einer langsamen Ausführungsgeschwindigkeit aufgrund des Datentransports sowie der Synchronisierung beider Programme, und bedeutet nicht zuletzt Lizenz-, Wartungs- und Schulungskosten für zwei Simulationsumgebungen. Daher widmet sich diese Arbeit der programm-basierten Kopplung zweier opensource Simulationsprogramme, bei der die Mehrkörpersimulation in die DEM Simulationsumgebung eingebettet wird.



## 1.2 Stand der Wissenschaft und Technik

Diese Arbeit teilt sich in zwei Themenkomplexe. Zum einen der detaillierten Untersuchung des Bewegungsverhaltens von Becherwerken und zum anderen der Vorstellung einer neuartigen Simulationsmethode, um dieses Verhalten anhand eines Simulationsmodells abzubilden. Daher wird in den folgenden Unterkapiteln zunächst der aktuelle Wissensstand auf dem Gebiet der Fördertechnik zum Thema Becherwerke, und anschließend auf dem Gebiet der gekoppelten Diskrete Elemente- und Mehrkörpersimulation (DEM-MK) vorgestellt. Die theoretischen Grundlagen beider Themengebiete werden in den Kapiteln zwei und drei erörtert.

### 1.2.1 Themengebiet Becherwerke

Das Förderprinzip von Becherwerken ist Jahrtausende alt. Bereits im alten Ägypten wurden Elevatoren zur Förderung von Wasser in Krügen genutzt [1]. Zur Förderung von Schüttgut werden Becherwerke jedoch erst seit Mitte des letzten Jahrtausends verwendet. Kupferstiche aus dem 16. Jahrhundert zeigen Becherwerke mit umlaufender Kette als Zugmittel für den Schüttguttransport (vergl. Abbildung 1-1).

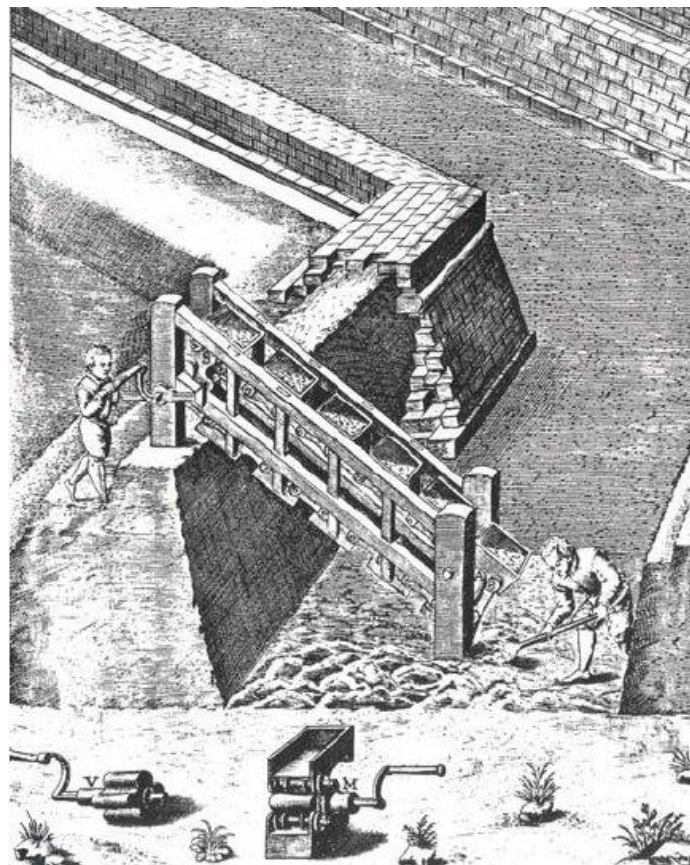
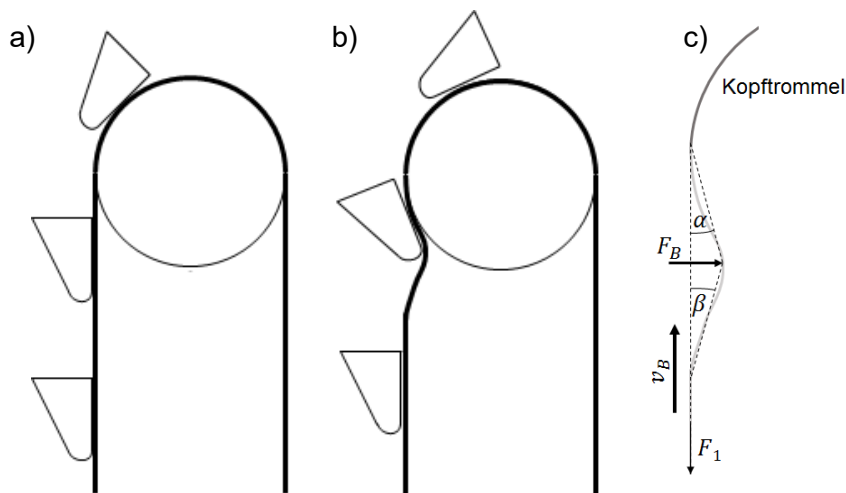


Abbildung 1-1: Darstellung eines Becherwerkes mit endloser Kette als Zugmittel aus dem Jahre 1581 [1]

Im 20. Jahrhundert widmen sich allein im deutschsprachigen Raum unter anderem KRAUSE [2], DILEFELD [3], HELLMUTH [4], HANFFSTENGEL [5], [6] ELLWANGER [7], BEUMER UND WEHMEIER [8], MÜLLER [9], BRAUN [10] sowie WEH KING UND HÜNING [11] der wissenschaftlichen Untersuchung des Schöpf- und Entleerungsverhaltens von Becherwerken.

Jüngste Forschungsarbeiten von GRÖGER UND KATTERFELD [12], [13], MCBRIDE [14], GELNAR UND ZEGZULKA [15], [16] nutzen die Möglichkeiten der Computersimulation mittels Diskrete Elemente Methode, um ein besseres Systemverständnis für das Bewegungsverhalten des Schüttguts beim Schöpfen und Entleeren zu erlangen.

Das Phänomen des sogenannten Bechernickens ist jedoch weitestgehend unerforscht. Als Bechernicken wird der Bewegungsvorgang eines einzelnen Bechers beim Ein- und Auslaufen der Becher an den Umlenktrommeln am Becherwerkkopf bzw. Becherwerkfuß bezeichnet [3], [14]. Da der Becher dabei aus einer translatorischen in eine rotierende Bewegung (und vice versa) übergeht, erfährt er eine theoretisch unendliche Beschleunigung auf die Bahnkurve der Trommel. Dies ist jedoch physikalisch unmöglich. Aufgrund der dynamischen Kräfte führt der Becher zunächst ein Nicken entgegen der Bahnkurve durch, um anschließend auf den Umlenkradius der Trommel einzuschwenken [14]. Abbildung 1-2 stellt diesen physikalischen Zusammenhang für die Antriebstrommel am Becherwerkkopf geometrisch dar.



**Abbildung 1-2: Gurtverformung aufgrund der Richtungsänderung der Bechergeschwindigkeit, a) in Ruhe, b) in Bewegung, c) Einfluss der dynamischen Kraft  $F_B$  auf die Gurtverformung beim Auflaufen des Becherstrangs auf die Kopftrommel (nach [14])**

MCBRIDE formuliert die These, dass bei hohen Becherfüllungsgraden bereits gehobenes Gut wieder in den Becherwerkfuß zurück fällt, da es vor der eigentlichen Entleerung aus dem Becher geschleudert wird. Er stellt weiterhin dar, dass das Nicken des Bechers zu einer erhöhten Belastung der Becher-Gurt-Verbindung und der Becherrückwand führt [14].

DILEFELD berichtet in seiner Dissertation bezüglich des Schöpfverhaltens von kohäsionslosen Schüttgütern: *„Beim Übergang vom III. in den IV. Quadranten tritt durch das schlagartige Abbremsen der Bechervorderkante beim Übergang von der Kreis- in die geradlinige Bewegung eine vorzeitige Entleerung im Zusammenhang mit einem Schwingen der Becher auf. [...] Infolge des Schwingens der Becher wird ein Teil der Becherfüllung aus dem Becher geschleudert. Der im Becher verbleibende Rest des Schüttgutes rutscht, bedingt durch die Schwerkraft, in den Boden des Bechers und wird zur Gutabgabestelle gefördert. [...] In dieser Teilentleerung der Becher liegt der Grund für die höheren Gutaufnahmewiderstände bei der leertrumseitigen Gutaufgabe für Schüttgüter ohne Kohäsion. Um den gewünschten Becherfüllungsgrad einzustellen, muß mehr Gut bewegt werden als schließlich gefördert wird.“* [3] Dem gegenüber stellt Dilefeld für kohäsive Güter fest *„Der durch das Abbremsen der Bechervorderkante und das Schwingen des Bechers im IV. Quadranten ausgelöste vorzeitigen Entleerungsvorgang kann nur in einem wesentlich geringeren Maße als bei Gütern ohne Kohäsion beobachtet werden, da zum Herausschleudern von Gutpartikeln neben der Gewichtskraft der Partikel auch die Kohäsionskräfte überwunden werden müssen.“* [3]

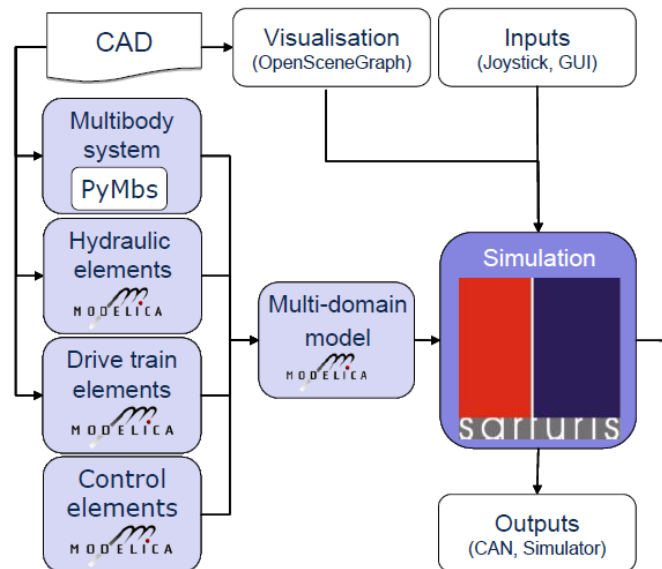
Aus diesen Beobachtungen und den umfangreichen Messungen zum Schöpfwiderstand verschiedener Güter und Aufgabearten leitet Dilefeld ab, *„daß für die Förderung von nicht kohäsiven Schüttgütern die lasttrumseitige Gutzuführung zu bevorzugen ist“* und *„Zur Förderung von kohäsiven Schüttgütern ist die leertrumseitige Gutaufgabe zu bevorzugen, da bei Gütern mit Neigung zur Kohäsion kaum eine vorzeitige Entleerung der Becher beim Übergang vom III. in den IV. Quadranten auftritt, kann der Vorteil der Gutaufgabe in Förderrichtung genutzt werden.“* [3]

Die Annahmen von MCBRIDE und DILEFELD werden in Kapitel 5.2 mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation untersucht.

### **1.2.2 Themengebiet gekoppelte Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation**

Die DEM stellt einen Spezialfall der allgemeinen Maschinendynamik dar, da sie zwar in der Lage ist, die Bewegungsgleichungen von einfachen, diskreten Körpern im direkten Kontakt zu lösen, jedoch nicht geeignet ist für Körper, welche durch Zwangsbedingungen (Stäbe, Gelenke, Kraftelemente) miteinander in Verbindung stehen oder aufgrund ihrer Geometrie komplexe Trägheitseigenschaften besitzen. Die Diskrete Elemente Methode wurde erstmals 1979 von CUNDALL und STRACK [17] zur Lösung geomechanischer Problemstellungen vorgestellt. In der Verfahrenstechnik hielt die DEM Anfang der 1990er Jahre Einzug, bis sie schließlich Anfang des 20. Jahrhunderts von GRÖGER und KATTERFELD erstmals im deutschsprachigen Raum auf Problemstellungen der Fördertechnik angewendet wurde [12, 13, 18–22].

Mit zunehmender Leistungsfähigkeit der Computertechnik entstand das Bestreben, die Domäne der granularen Medien (DEM) mit der Funktionalität der allgemeineren Mehrkörpersimulationsmethode (MKS) zu erweitern. KATTERFELD formulierte bereits 2009 die Idee „Zur Steigerung des Realitätsgrades der Simulationen [...] auch die Abbildung realer lastabhängiger Schaufelbewegungen“ [23] zu ermöglichen.



**Abbildung 1-3: Modellierung des Maschinenmodells in der gekoppelten Methode zur Simulation maschineller Erdbauprozesse (entnommen aus [24])**

GRÜNING, KUNZE und KATTERFELD veröffentlichen 2010 erstmals eine Methode zur Simulation maschineller Erdbauprozesse, in der ein kommerzielles DEM Programm mit Hilfe einer Netzwerkkommunikationsschnittstelle Daten mit einem komplexen Maschinenmodell eines Radladers austauschen konnte [25], [24]. Das Maschinenmodell wurde dabei vollständig, d.h. inklusive Maschinendynamik, Hydraulik, Antriebsstrang und Regelungstechnik, in einem Modelica Modell abgebildet (vergl. Abbildung 1-3). Dieser Ansatz wurde in den folgenden Jahren intensiv weiter entwickelt [26–33]. Die ursprünglich netzwerkbasierende Kopplung wurde durch die Implementierung spezieller Schnittstellen in eine programm-basierte Kopplung überführt. Die Modellierung des Maschinenmodells in Modelica Sprache wurde beibehalten.

COETZE et al. stellten ebenfalls 2009 einen Ansatz zur Berechnung der Position und Orientierung der Schaufel eines Seilbaggers, abhängig von den durch das Schüttgut hervorgerufenen Wandkräften, vor [34], [35]. Durch Erweiterung des kommerziellen DEM Programms PFC3D, um die Berechnungsvorschriften des maschinendynamischen Bewegungsverhaltens der Baggerschaufel in FISH Code, konnten die Wandgeschwindigkeiten zu jedem Integrationsschritt anhand der wirkenden Kräfte neu bestimmt werden. Aus heutiger Sicht ist dies die erste veröffentlichte Integration der allgemeinen Mehrkörpermethode, im maschinenbaulichen Sinne, in die Diskrete Elemente Methode. Später wurde eine ähnliche

Funktionalität auch in der DEM Simulationssoftware LIGGGHTS<sup>1</sup> implementiert und gegen Entgelt zur Verfügung gestellt [36].

Im Jahr 2007 stellten ANDERSON ET AL. ein Softwarepaket namens POEMS [37] vor, mit welchem es innerhalb des frei verfügbaren Molekulardynamik Simulationsprogramms LAMMPS<sup>2</sup> möglich ist, Zwangsbedingungen zwischen einfachen Körpern zu formulieren und zu lösen. Die Lösungsalgorithmen sind dazu direkt im Simulationsprogramm integriert [38]. Als Körper können jedoch nur massebehaftete Kugeln bzw. Atome genutzt werden. Dies stellt somit eine spezielle Erweiterung der Molekulardynamik Simulation zur Vereinfachung der Berechnung großer Moleküle dar.

Die Kopplung eines komplexen Mehrkörpersystems mit 17 Freiheitsgraden und der Diskrete Elemente Methode wurde 2009 von FLEISSNER et al. auf Basis eines selbst entwickelten DEM Codes (PASIMODO<sup>®</sup>) und eines Matlab/Simulink Plug-Ins am Beispiel einer sogenannten „Sloshing Tank“ Problemstellung veröffentlicht [39]. Im Beitrag wird ein Silofahrzeug inklusive Fahrwerk modelliert und die Beladung durch DEM Partikel abgebildet. Das Bewegungsverhalten des Schüttgutes beeinflusste direkt das Maschinenmodell des Fahrzeugs. Mittlerweile ist PASIMODO<sup>®</sup> in ein kommerzielles DEM-MKS Werkzeug übergegangen [40].

Im Jahr 2012 entwickelte SCHÖRGENHUMER ebenfalls ein netzwerkbasierendes Kopplungsinterface auf Basis der beiden quelloffenen Simulationsprogramme LIGGGHTS<sup>®</sup> und HOTINT [41], [42]. Dabei verwendete SCHÖRGENHUMER aufgrund der ihm gegebenen Problemstellung jedoch nicht die in LIGGGHTS<sup>®</sup> enthaltenen Algorithmen zur Lösung partikelmechanischer Problemstellungen, sondern die ebenfalls enthaltene Methode zur Berechnung von Flüssigkeiten auf Basis der Smoothed Particle Hydrodynamics Methode.

---

<sup>1</sup> LIGGGHTS (LAMMPS improved for **g**eneral **g**ranular and **g**ranular **h**eat transfer **s**imulations)

<sup>2</sup> LAMMPS (**L**arge-scale **A**tomic/**M**olecular **M**assively **P**arallel **S**imulator)

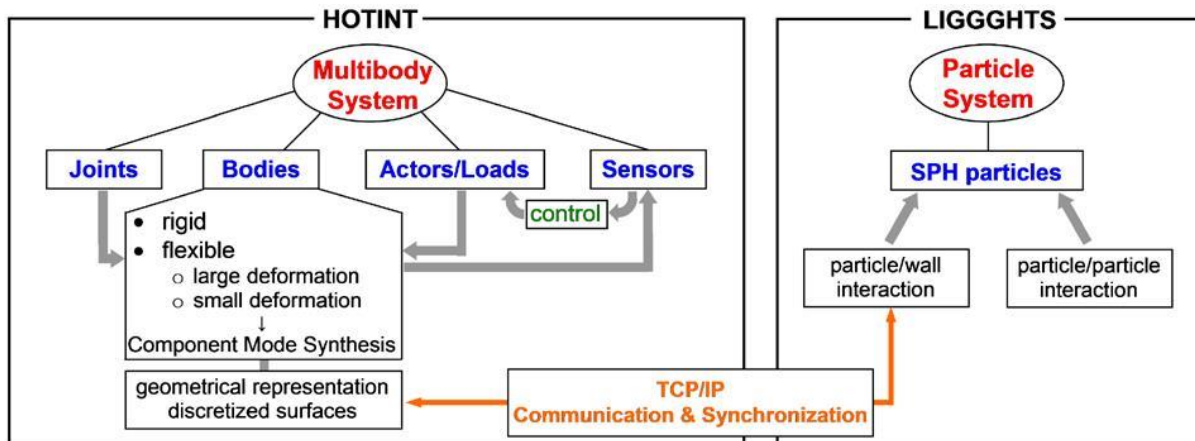


Abbildung 1-4: TCP/IP Kommunikationsinterface zwischen HOTINT und LIGGGHTS [42]

In den letzten Jahren sind zahlreiche weitere Vertreter der netzwerkbasierter Kopplung entwickelt worden, darunter die EASY5 (=Adams/EDEM) Co-Simulation [43], [44], [45], RecurDyn/EDEM Co-Simulation [46], Adams/GRAPe Co-Simulation [47] und die im ZIM Projekt DEM4X entwickelte Kopplung von SimulationX mit LIGGGHTS® [30].

Dies zeigt die Notwendigkeit einer gekoppelten DEM-MK-Simulationsmethode. Jedoch hat die netzwerkbasierter Kopplung einen entscheidenden Nachteil in Bezug auf die Berechnungsgeschwindigkeit. Alle Ergebnisse müssen zunächst in Datenpakete gepackt, übertragen und anschließend wieder entpackt werden. Vorteilhafter ist es, die Ergebnisse direkt im Arbeitsspeicher des jeweils zugrunde liegenden Simulationsprogramms zu halten, und ausschließlich Zeiger auf die entsprechenden Speicherbereiche auszutauschen. Dies erfordert es jedoch, das Maschinenmodell innerhalb der Simulationsumgebung der Diskrete Elemente Methode zu berechnen. Daher wird dieser Ansatz im Folgenden als programmbasierter Kopplung bezeichnet.

Alle bisher betrachteten Lösungsansätze lassen sich allgemein in drei Gruppen einteilen:

1. Integrierte Kopplung,
2. netzwerkbasierter Kopplung,
3. programmbasierter Kopplung.

Die entsprechende Zuordnung der zuvor genannten Vertreter ist in Tabelle 1-2 zusammengefasst. Diese Aufzählung hat nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, es werden permanent neue, problemorientierte Lösungen entwickelt und publiziert.

Tabelle 1-2: Gegenüberstellung der Kopplungsstrategien

integrierte Kopplung	netzwerkbasierte Kopplung	programmbasierte Kopplung
POEMS	PASIMODO	Modelica/LIGGGHTS
PFC3D FISH	SARTURIS	DEM4X (SimulationX/LIGGGHTS)
LIGGGHTS (fix mesh/6dof)	HOTINT/LIGGGHTS	
	Easy5 (ADAMS/EDEM)	
	ADAMS/GRAPE	
	RecurDyn/EDEM	
	RecurDyn/SAMADII	

### 1.3 Zielstellung

Aus den im vorangegangenen Kapitel dargestellten Themengebieten lassen sich die Ziele dieser Arbeit ableiten:

1. Analyse experimenteller Untersuchungen zum Bewegungsverhalten von Becherwerken, im Speziellen zu den Auswirkungen des Bechernickens, auf:
  - das Entleerungsverhalten am Becherwerkkopf,
  - das Schöpfverhalten im Becherwerkfuß.
2. Implementierung einer leistungsfähigen DEM-MK Kopplung zur allgemeinen Anwendung im Maschinenbau auf Programmebene.
3. Verifizierung und Validierung der entwickelten Kopplungsstrategie an einfachen, analytisch und experimentell erfassbaren Problemstellungen.
4. Anwendung der gekoppelten DEM-MK-Simulation zur computerunterstützten Modellierung des Bewegungsverhalten von Becherwerken.

Neben dem speziellen Anwendungsfall des Bechernickens sollen weitere Anwendungen aus dem Gebiet der Förder- und Materialflusstechnik mit der entwickelten Methode untersucht werden können.

## 1.4 Vorgehensweise

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in 6 Arbeitspakete. Diese sind in Tabelle 1-3 zusammen gestellt.

Tabelle 1-3: Gliederung der Arbeitspakete

AP	Inhalt	Kapitel
I	<b>Motivation und Aufgabenstellung</b>	1
II	<b>Theoretische Grundlagen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• der Schüttgutmechanik</li> <li>• zur Systematik der Fördertechnik: Becherwerke</li> </ul>	2
III	<b>Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundlagen der DEM Simulation</li> <li>• Grundlagen der Maschinendynamik</li> <li>• Modellierungsansätze und Paradigmen der verwendeten Simulationsumgebungen</li> <li>• Erarbeitung einer Kopplungsstrategie</li> <li>• Implementierung der Kopplung</li> <li>• Verifizierung und Validierung</li> </ul>	3,4
IV	<b>Beitrag zur Analyse des Bewegungsverhaltens von Becherwerken</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Einfluss auf das Entleerungsverhalten</li> <li>• Einfluss auf das Schöpfverhalten</li> <li>• Analyse des Bechernickens</li> </ul>	5
V	<b>Anwendung der entwickelten Simulationsmethode auf die Problemstellung des Bechernickens</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Erarbeitung einer verbesserten Lösung zur Umlenkung der Becher</li> <li>• Simulation einer prototypischen Realisierung</li> <li>• Vergleich der neu entwickelten Lösung mit der konventionellen Lösung</li> </ul>	6
VI	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	7



## 2 Theoretische Grundlagen

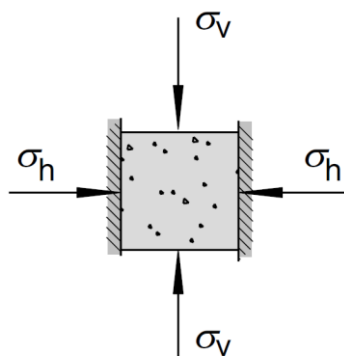
Zum Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen der in dieser Arbeit vorgestellten Methode der gekoppelten Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation wird im folgenden Kapitel die Theorie der Schüttgutmechanik und die Systematik der Fördertechnik kurz zusammengefasst. Für weitergehende Informationen wird auf die Fachliteratur z.B. PÖSCHEL/SCHWAGER [48], SCHULZE [49] und JENIKE & JOHANSON [50] verwiesen.

### 2.1 Schüttgutmechanik

Schüttgüter können als Ansammlung einzelner Festkörper betrachtet werden. Allerdings verhalten sie sich, abhängig von den äußeren Einflüssen, nicht so, wie es von Flüssigkeiten oder frei beweglichen Körpern aus der technischen Mechanik, bekannt ist. Nach SCHULZE verhalten sich Schüttgüter bei den meisten fördertechnischen Problemstellungen mechanisch betrachtet im Bereich zwischen fluidisiert und kompaktiert [49].

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten ist das Spannungsverhalten in Schüttgütern richtungsabhängig. Im Kontakt mit einer Fläche überträgt das Schüttgut im ruhenden Zustand Normalspannungen  $\sigma_h > 0$  in horizontaler Richtung, wenn in vertikaler Richtung eine Druckspannung  $\sigma_v > 0$  wirkt (vergl. Abbildung 2-1). Im Gegensatz zu den Spannungsverhältnissen in Flüssigkeiten ist die Spannung in Schüttgütern in horizontaler Richtung kleiner, als die in vertikaler Richtung wirkende Spannung. Das Verhältnis der vertikalen und horizontalen Spannungen wird als Horizontallastverhältnis  $\lambda$  oder Horizontalspannungsverhältnis bezeichnet.

$$\lambda = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} \quad (1)$$



**Abbildung 2-1: Vertikal- und Horizontalspannung an einem Schüttgutelement, unendliche Ausdehnung in die Zeichenebene hinein, Wände reibungsfrei angenommen [49]**

Nach SCHULZE [49] kann das Horizontalspannungsverhältnis für Schüttgüter typische Werte zwischen 0,3 bis 0,6 einnehmen, während es für Flüssigkeiten eins und für Festkörper null ist.

Die Fließfähigkeit eines Schüttgutes wird anhand der Fließgrenze ermittelt. Sie wird als Quotient aus Verfestigungsspannung  $\sigma_1$  und Druckfestigkeit  $\sigma_c$  ausgedrückt (Gl. (2)).

$$ff_c = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \quad (2)$$

Die Fließfähigkeit kann nach SCHULZE in 5 Bereiche, abhängig von der Höhe des Quotienten, von nicht fließfähig bis frei fließend eingeteilt werden (vergl. Abbildung 2-2).

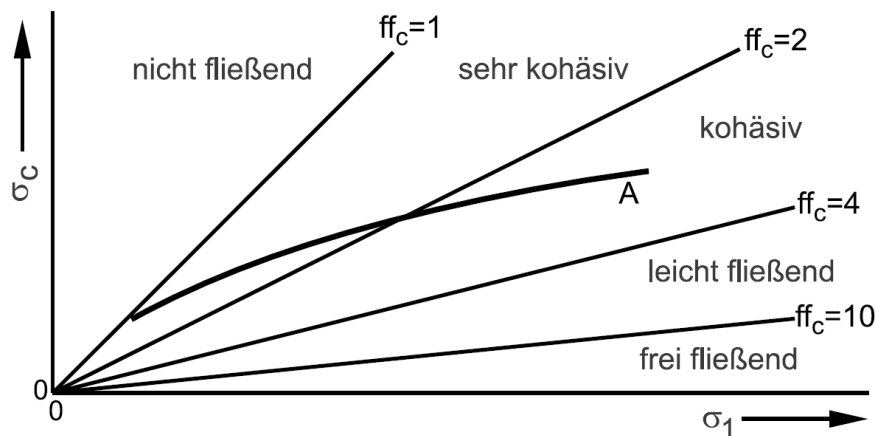


Abbildung 2-2: Bereiche unterschiedlicher Fließfähigkeit (entnommen aus [49])

Die Fließfähigkeit wird maßgeblich durch die schüttgutmechanischen Eigenschaften Schüttdichte, Korngrößenverteilung, Partikelform, Feuchtigkeit, Wandreibung und innere Reibung beeinflusst. Diese Größen werden standardmäßig im Schüttgutlabor mit geeigneten Messgeräten ermittelt.

Zur Bestimmung der Schüttdichte wird ein Behälter bekannten Volumens vollständig mit dem zu untersuchenden Schüttgut gefüllt ohne es zu verdichten. Anschließend wird die Masse des Schüttgutes bestimmt. Aus Gl. (3) ergibt sich die Schüttdichte  $\rho_b$ .

$$\rho_b = \frac{m_G}{V}. \quad (3)$$

Im Förderprozess bleibt die Dichte des Schüttgutes nicht konstant, sondern variiert abhängig von der Verdichtung. Es befinden sich immer Hohlräume zwischen den Partikeln, welche sich mit Luft oder Flüssigkeit füllen können. Die Porosität  $\varepsilon$  gibt das Verhältnis zwischen Hohlraumvolumen und dem vom Schüttgut eingenommenen Gesamtvolumen an.

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{Hohlraum}}}{V}. \quad (4)$$

Die Schüttdichte steht damit über die Porosität mit der Feststoffdichte in folgendem Verhältnis:

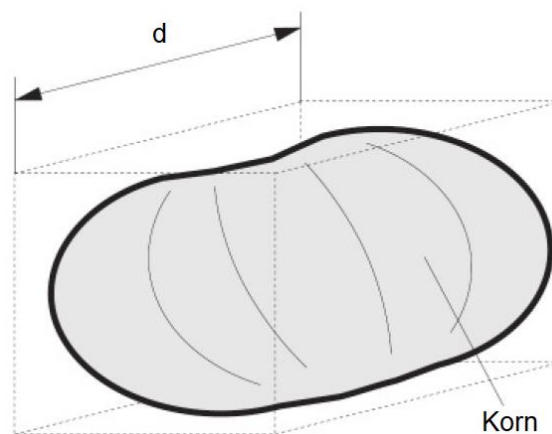
$$\rho_b = (1 - \varepsilon)\rho_s. \quad (5)$$

Die Kornbeschaffenheit ist ein wichtiger Einflussfaktor für das Fließverhalten, da sich kantige Partikel untereinander verklemmen und somit beispielsweise bei der Siloentleerung zur Brückenbildung neigen. Nach DIN ISO 3435 werden sechs unterschiedliche Kornformen unterschieden (vergl. Tabelle 2-1).

**Tabelle 2-1: Einteilung der Kornform nach DIN ISO 3435**

<b>I</b>	Scharfe Kanten mit ungefähr gleichen Ausmaßen in drei Dimensionen (Beispiel: Würfel)
<b>II</b>	Scharfe Kanten, unter denen eine deutlich länger ist als die beiden anderen (Beispiel: Prisma, Klinge)
<b>III</b>	Scharfe Kanten, unter denen eine deutlich kleiner ist als die andere (Beispiel: Platte, Schuppen)
<b>IV</b>	Runde Kanten mit ungefähr gleichen Ausmaßen in drei Dimensionen (Beispiel: Kugel)
<b>V</b>	Runde Kanten, in einer Richtung deutlich größer als in die beiden anderen Richtungen (Beispiel: Zylinder, Stange)
<b>VI</b>	Faserig, fadenförmig, lockenförmig, verschlungen

Die Korngröße wird durch die größte Kante  $d$  des Quaders, in den es sich einzeichnen lässt, bestimmt.



**Abbildung 2-3: Bestimmung der Korngröße eines Einzelkorns**

Es werden klassierte und unklassierte Schüttgüter unterschieden. Für klassierte Schüttgüter beträgt das Verhältnis von maximaler zu minimaler Korngröße  $\frac{d_{max}}{d_{min}} \leq 2,5$ . Sie werden ausreichend durch Angabe der Grenzwerte  $d_{max}$  und  $d_{min}$  beschrieben. Für unklassierte Schüttgüter wird die Korngrößenverteilung im Labor entweder mit Hilfe eines Camsizers [51] oder mittels Siebturmanalyse [52] bestimmt. Abbildung 2-4 stellt die durchschnittliche Korngrößenverteilung für das in dieser Arbeit verwendete Schüttgut Kunststoffgranulat dar. Zur Ermittlung der Korngrößenverteilung wurden drei Siebturmanalysen mit Maschenweiten von 5,00 mm, 4,55 mm, 4,00 mm, 3,55 mm, 3,15 mm und 2,5 mm durchgeführt.

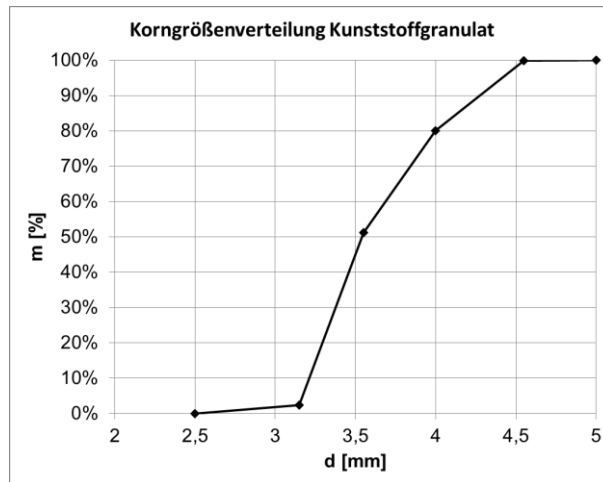


Abbildung 2-4: Durchschnittliche Korngrößenverteilung für Kunststoffgranulat

Kohäsionskräfte spielen bei feuchtem Schüttgut eine große Rolle bei der Ausprägung des Fließverhaltens. Zur Bestimmung des Flüssigkeitsanteils einer Schüttgutprobe wird dieses bei 105°C getrocknet, bis der Wasseranteil verdunstet ist. Eine hochpräzise Waage ermittelt den Masseverlust zwischen Beginn und Ende der Messung und gibt den Wassergehalt  $w$  bezogen zur Masse der trockenen Probe an (Gl. (6)).

$$w = \frac{m_W}{m_d} \quad (6)$$

Der Böschungswinkel kohäsionsloser Schüttgüter beim freien Aufschütten eines Schüttgutkegels wird in der Praxis genutzt, um den inneren Reibwert zu charakterisieren. Bei kohäsionslosem, frei rieselfähigem Schüttgut kann in den meisten Fällen der statische Böschungswinkel  $\varphi_{b,stat}$  dem Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  gleichgesetzt werden [53]. Für kohäsives Schüttgut ist dies nicht möglich, da es in der Regel keinen reproduzierbaren, eindeutigen Böschungswinkel ausbildet [54]. Abbildung 2-5 stellt den Einfluss des Wassergehalts auf den Böschungswinkel für das Schüttgut Kalisalz mit einem Feuchtigkeitsunterschied von 8,5 % dar.



Abbildung 2-5: Einfluss des Wassergehalts auf den Böschungswinkel, Feuchtigkeitsunterschied 8,5 %

Zur Bestimmung der Wandreibung eines Schüttgutes wird im Labor eine Translationsscherzelle verwendet (vergl. Abbildung 2-6). Dabei wird eine Schüttgutprobe unter variierenden Normalkräften  $F_N$  gegen eine Wandprobe geschert und die dazu notwendige Scherkraft  $F_S$  aufgezeichnet. Durch Division der Kräfte durch die bekannte Scherfläche ergeben sich Normal- und Scherspannung, welche im  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm aufgezeichnet werden.

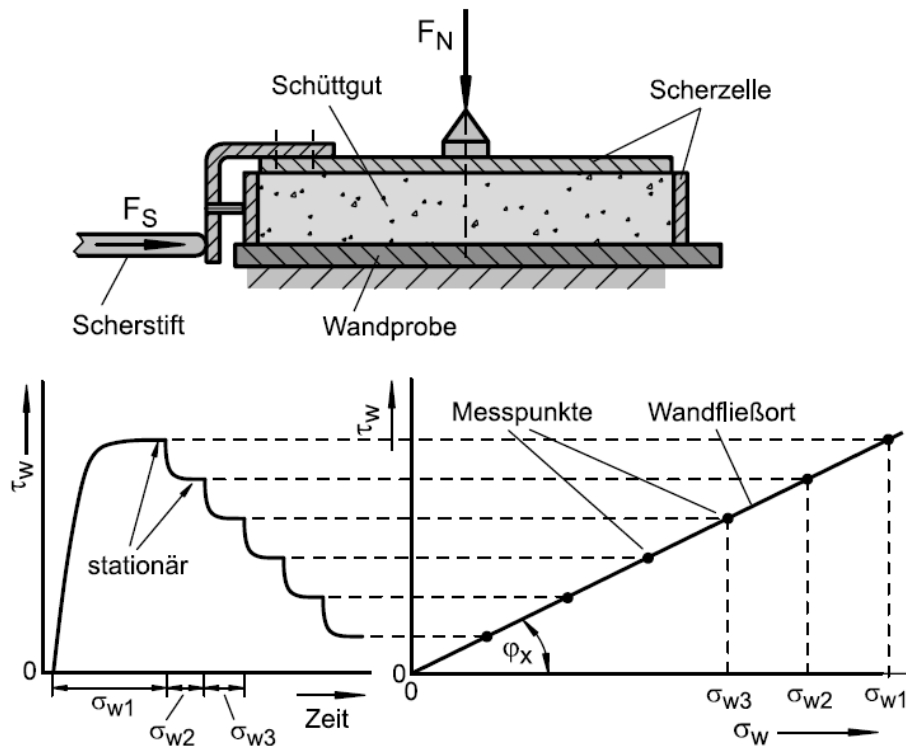


Abbildung 2-6: Aufbau des Jenike Schergerät und Darstellung des  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm zur Ermittlung des Wandfließortes (entnommen aus [49])

Aus dem Steigungswinkel des so ermittelten Wandfließortes lässt sich über die Beziehung:

$$\varphi_w = \arctan(\mu_w), \quad (7)$$

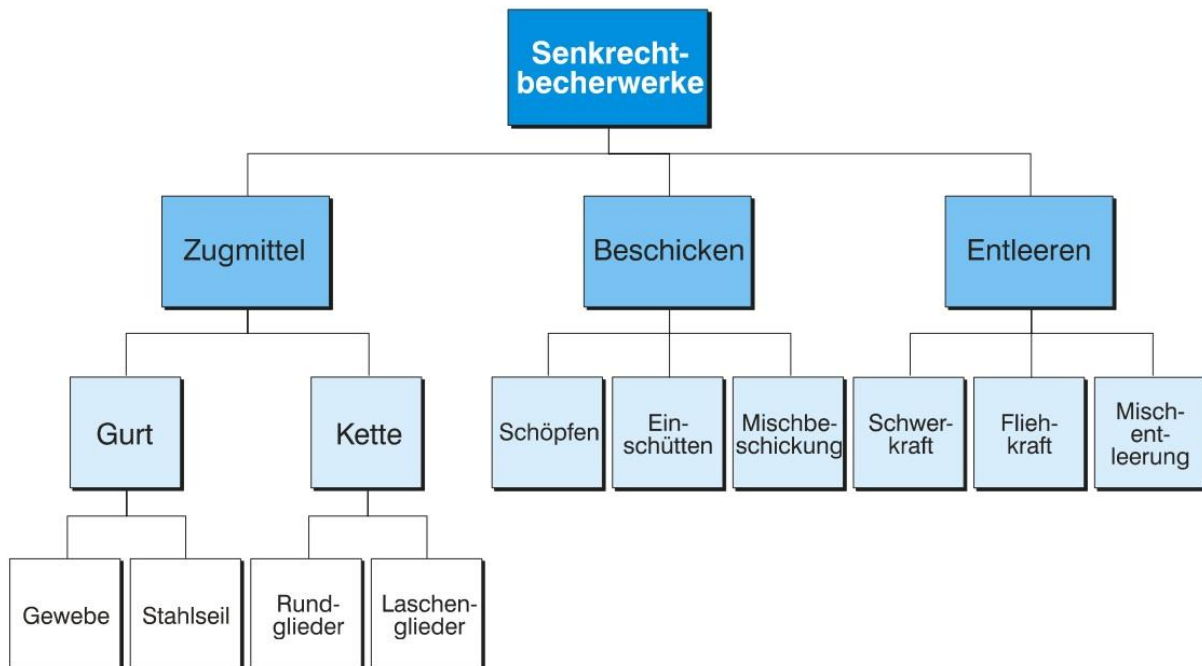
direkt der Wandreibwert  $\mu_w$  ermitteln.

Die mit diesen Verfahren ermittelten Schüttguteigenschaften werden für die Kalibrierungsuntersuchungen in der DEM Simulation verwendet.

## 2.2 Becherwerke

### 2.2.1 Einteilung von Becherwerken

Becherwerke gehören zur Gruppe der Stetigförderer. Sie werden nach der Art des Zugmittels, der Beschickungsart oder nach der Entleerungsart eingeordnet. Abbildung 2-7 gibt einen Überblick über die Einteilung von Becherwerken.



**Abbildung 2-7: Einteilung von Becherwerken (nach [55])**

Je nach Befestigung der Becher am umlaufenden Zugmittel wird zwischen gelenkiger Verbindung (Pendelbecherwerk) und starrer Verbindung (Normalausführung) unterschieden.

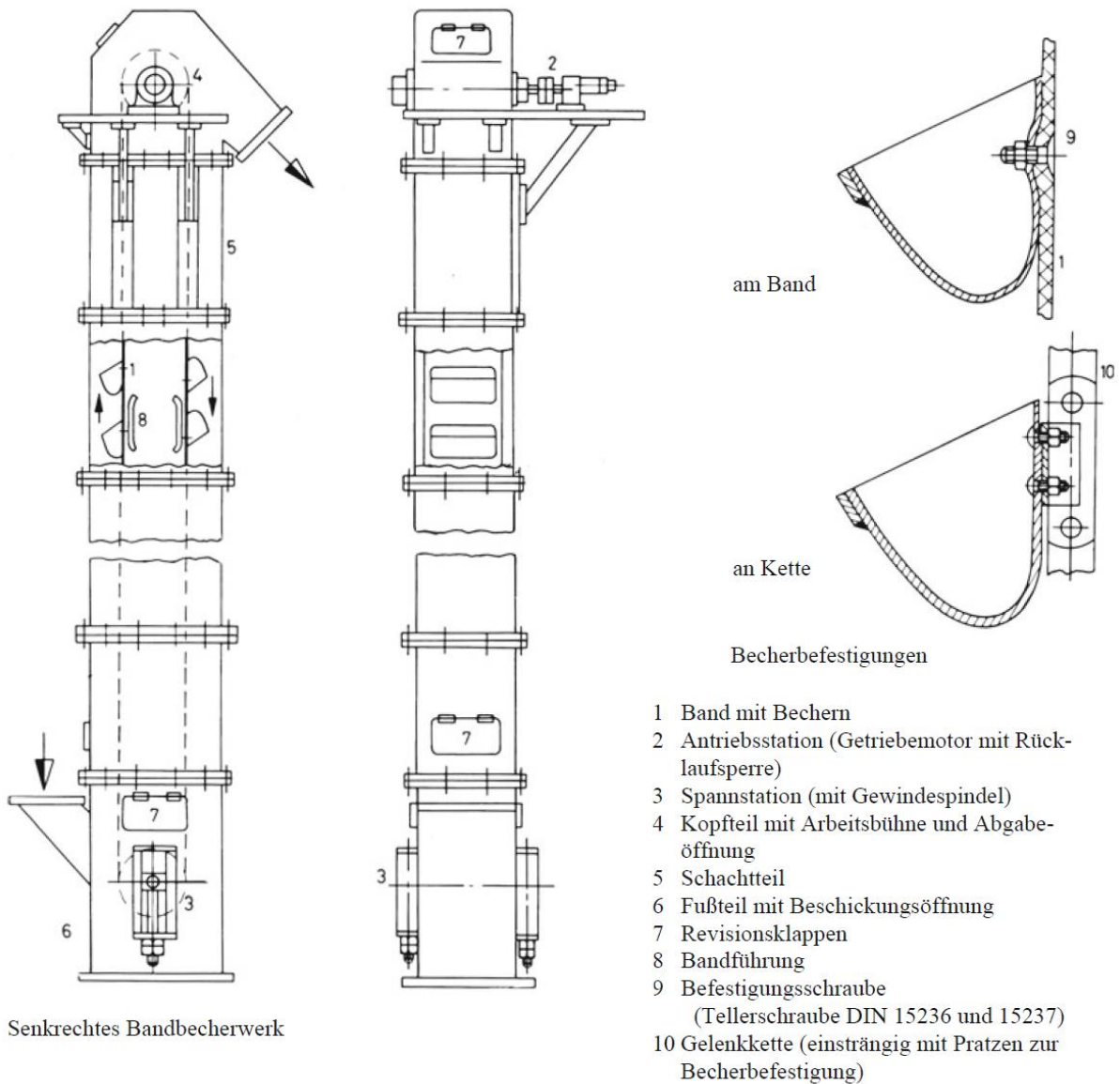
Bei Kettenbecherwerken kommen Rundstahlglieder-, oder Stahlgelenkketten zum Einsatz. Bei Gurtbecherwerken werden Stahlseil-, Textil- oder PVC-Gurte verwendet.

Die Einteilung nach der Art der Beschickung erfolgt bei Schöpfbecherwerken in die lasttrumseitige und leertrumseitige Gutaufgabe. Einschüttbecherwerke bezeichnet eine Bauform, bei der die Gutaufgabe so gestaltet ist, dass das Schüttgut von der Einfüllschurre direkt in die Becher fließt.

Des Weiteren wird die Art der Entleerung zur Kategorisierung genutzt. Bei hohen Zugmittelgeschwindigkeiten führt die Fliehkraft zu einer Entleerung des Schüttguts über die äußere Becherkante [4]. Bei der Schwerkraftentleerung wird das Gut über die Becherinnenkante abgegeben.

### 2.2.2 Aufbau und Funktionsprinzip von Becherwerken

Der prinzipielle Aufbau eines Senkrechtbecherwerkes ist in Abbildung 2-8 dargestellt. Der Schacht, in dem das Zugmittel durch die Antriebs- und Spannstation geführt wird, ist selbsttragend ausgeführt. Der Kontakt zwischen Schüttgut und Umwelt wird durch die gekapselte Bauweise vermieden. Daher eignen sich Becherwerke auch für stark staubende, pulverförmige Schüttgüter.

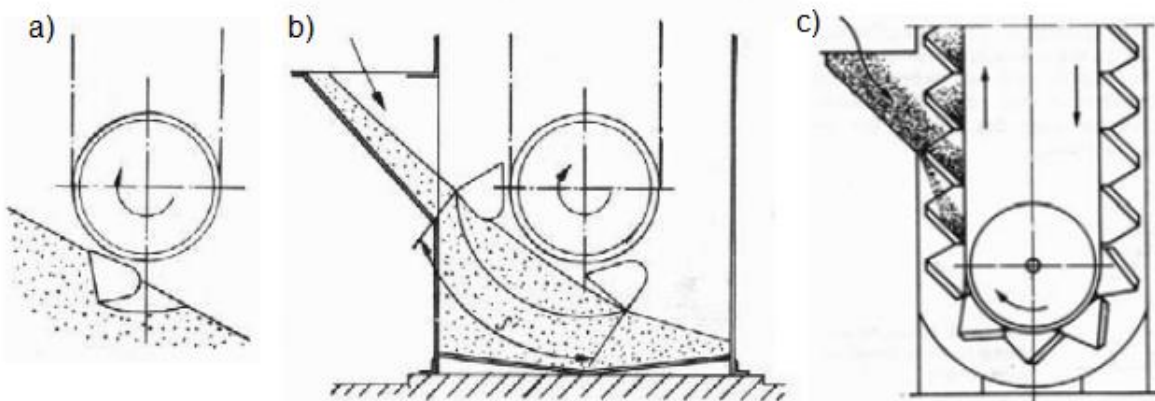


**Abbildung 2-8: Maschinenelemente eines Senkrechtbecherwerkes (entnommen aus [56])**

Das Funktionsprinzip von Becherwerken beruht auf dem formschlüssigen Schüttguttransport durch Becher aus Kunststoff oder Stahlblech, die am Zugmittel befestigt sind. Die Förderbewegung wird durch die im Kopfteil angeordnete Antriebsstation realisiert. Das Zugmittel wird über eine angetriebene Trommel (bei Gurtbecherwerken) oder Antriebskettenräder (bei Kettenbecherwerken) in Bewegung versetzt. Zur Aufrechterhaltung der nötigen Gurt- bzw.

Kettenvorspannung wird das Zugmittel im Fußteil über eine Trommel bzw. ein Kettenrad geführt. Durch Variation des Achsabstandes mit Hilfe einer Spannvorrichtung im Becherwerkfuß wird die notwendige Gurt- bzw. Kettenvorspannung aufgebracht.

Die Gutaufgabe erfolgt im Becherwerkfuß über eine Beschickungsöffnung. Becherwerke werden in Schöpfbecherwerke (Abbildung 2-9a) und Einschüttbecherwerke unterteilt. Bei Vollbecherwerken, welche sich durch eine dichte Becherfolge auszeichnen, wird das Schüttgut direkt aus der Aufgabeschurre in die einzelnen Becher gefüllt (Abbildung 2-9c). Weiterhin existieren Mischformen, bei denen Schöpfen und Einschütten zur Füllung der Becher genutzt wird (Abbildung 2-9b).



**Abbildung 2-9: Unterteilung von Becherwerken nach der Art der Beschickung, a) Schöpfbecherwerk, b) Mischform aus Schöpf- und Einfüllbecherwerk, c) Einschüttbecherwerk (entnommen aus [57])**

Schöpfbecherwerke werden in lasttrumseitige und leertrumseitige Beschickung unterschieden. Die leertrumseitige Beschickung bezeichnet das Einfüllen im abwärts laufenden Trum des Förderers. Die lasttrumseitige Gutaufgabe bezeichnet die Gutaufgabe am Beginn des aufwärts fördernden Trums. Die Beschickungsart hat zusammen mit der Kohäsivität des Schüttgutes großen Einfluss auf den Schöpfwiderstand des Becherwerkes. DILEFELD kam in seiner Dissertation ‚Zum Schöpfverhalten von Becherförderern‘ zu dem Ergebnis, „daß für die Förderung von nicht kohäsiven Schüttgütern die lasttrumseitige Gutzuführung zu bevorzugen ist. Bei der leertrumseitigen Gutaufgabe müssen größere Gutaufnahmewiderstände überwunden werden, da Schüttgut zusätzlich bewegt werden muß, das durch Schwingungen der Becher beim Übergang von der Kreisbahn in die geradlinige Bewegung die Becher wieder verläßt. [...] Zur Förderung von kohäsiven Schüttgütern ist die leertrumseitige Gutaufgabe zu bevorzugen, da bei Gütern mit Neigung zur Kohäsion kaum eine vorzeitige Entleerung der Becher beim Übergang vom III. in den IV. Quadranten auftritt, kann der Vorteil der Gutaufgabe in Förderrichtung genutzt werden.“ [3]



Die Gutabgabe von Becherwerken erfolgt im Becherwerkkopf in die Abgabeschurre. Die Form der bei der Entleerung entstehenden Wurfparabel des Schüttgutes hängt direkt vom Verhältnis der Zugmittelgeschwindigkeit und des Trommeldurchmessers ab. Dieser Zusammenhang wird mit Hilfe der Polhöhe oder der Froude-Zahl ausgedrückt [4], [9], [58].

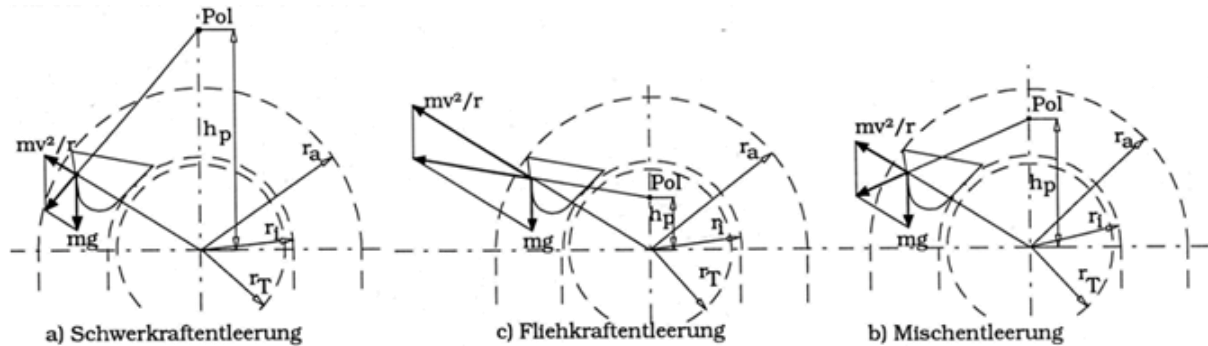


Abbildung 2-10: Bestimmung der Entleerungsart mit Hilfe der Polhöhe nach [4]

Mathematisch lassen sich die Polhöhe und Froude-Zahl wie folgt ausdrücken:

$$h_p = \frac{g}{\omega^2}, \quad (8)$$

$$Fr^2 = \frac{\omega^2 \cdot r_T}{g} = \frac{v_z^2}{g \cdot r_T}. \quad (9)$$

Anhand der Berechnungsergebnisse von Gl. (8) oder Gl. (9) wird die Entleerungsart in Schwerkraft-, Misch- oder Fliehkraftentleerung eingeteilt (vergl. Tabelle 2-2).

Tabelle 2-2: Entleerungsarten von Becherwerken nach [4]

Entleerungsart	Polhöhe	Froude-Zahl
Schwerkraftentleerung	$h_p > r_a$	$Fr^2 < \frac{r_T}{r_a}$
Mischentleerung	$r_a \geq h_p \geq r_i$	$\frac{r_T}{r_a} \leq Fr^2 \leq 1$
Fliehkraftentleerung	$h_p < r_i$	$Fr^2 > 1$

Abbildung 2-11 stellt die Schwerkraftentleerung und die Fliehkraftentleerung grafisch dar. Die Schwerkraftentleerung ist durch langsame Zugmittelgeschwindigkeiten gekennzeichnet. Das Schüttgut fließt über die Becherinnenkante aus dem Becher. Bei geringem Becherabstand fließt das Schüttgut nach dem Verlassen des Bechers über die Becherrückwand des vorrauslaufenden Bechers in die Abgabeschurre. Die Fliehkraftentleerung tritt für schnelllaufende Becherwerke auf. Das Schüttgut verlässt den Becher über die

Becheraußenkante. Die Haube des Becherwerkkopfes lenkt die entstehende Gutwolke in die Abgabeschurre. Der Beginn der Entleerung wird von der Becherform und den Schüttguteigenschaften beeinflusst.

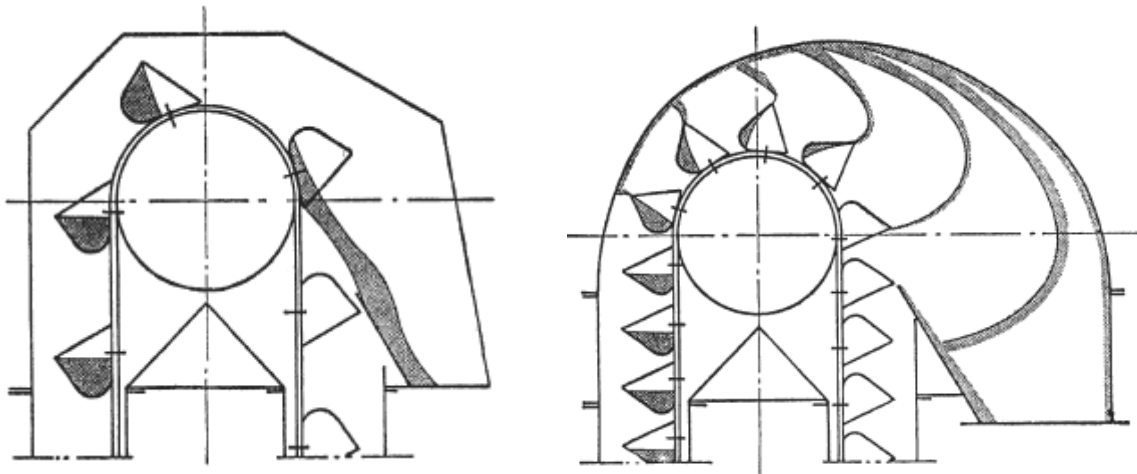


Abbildung 2-11: Entleerungsarten von Becherwerken, links Schwerkraftentleerung, rechts Fliehkraftentleerung (entnommen aus [58])

### 2.2.3 Berechnungsgrundlagen für Becherwerke

#### 2.2.3.1 Massenstrom und Becherfüllungsgrad

Der Nennmassenstrom von Becherwerken berechnet sich aus dem Bechervolumen, der Schüttdichte, der Becherteilung, des Becherfüllungsgrades und der Zugmittelgeschwindigkeit nach Gl. (10).

$$\dot{m} = \frac{v_Z}{l_t} V_B \rho \eta_F. \quad (10)$$

In Tabelle 2-3 werden technisch realisierbare Becherfüllungsgrade für unterschiedliche Schüttgüter zusammengefasst. Der Becherfüllungsgrad wird für größer werdende Zugmittelgeschwindigkeiten kleiner [58], da mit zunehmender Geschwindigkeit die Zeit, in der das Schüttgut im Becherwerkfuß in den Bereich vor die einzelnen Becher strömen kann, abnimmt.

Tabelle 2-3: erreichbare Becherfüllungsgrade unterschiedlicher Güter (nach [59])

Schüttgut	Becherfüllungsgrad $\eta_F$
Mahlprodukte	0,8 bis 1,0
Getreide (bei mittlerer Geschwindigkeit)	0,75 bis 0,9
für Kohle geringer Stückgröße	0,6 bis 0,7
für großstückige Kohle	0,4 bis 0,5
feuchter Sand	0,6
Zement / Kalk	0,8

## 2.2.3.2 Bewegungswiderstände von Senkrechtbecherwerken

Die für die Auslegung des Zugmittels maßgebliche Kraft  $F_1^{max}$  tritt am Auflaufpunkt des Zugmittels auf die Antriebstrommel bzw. das Antriebskettenrad auf. Sie setzt sich aus dem Steigungswiderstand, dem Schöpfwiderstand und der Spannkraft zusammen (Gl. (11)). Ein zusätzlicher Bewegungswiderstand resultiert bei Kettenbecherwerken aus der Reibung in den Kettengelenken (Kettenknickwiderstände) und der Lagerreibung der Kettenräder. Für Gurtbecherwerke wird ein zusätzlicher Umlenkswiderstand für den Gurt berücksichtigt. Bei geneigten Becherförderern kommen Reibkräfte zwischen dem Zugmittel und den notwendigen Führungsschienen im Lasttrum hinzu.

$$F_1^{max} = F_{WSt} + F_{WS} + F_{Wf} + F_{WU} + F_{Sp} + F_R. \quad (11)$$

Aufgrund des periodischen Schöpfens der Becher im Becherwerkfuß schwankt der Schöpfwiderstand zwischen 0 und  $2 \cdot F_{WS}$ . Dabei belastet die Hälfte der aus der Schöpfarbeit resultierenden Kraft den Fördertrum und die andere Hälfte entlastet den Leertrum. In Gl. (11) wird daher mit dem einfachen Schöpfwiderstand  $F_{WS}$  gerechnet [58].

Abbildung 2-12 fasst die im Folgenden diskutierten Bewegungswiderstände für Senkrechtbecherwerke grafisch zusammen.

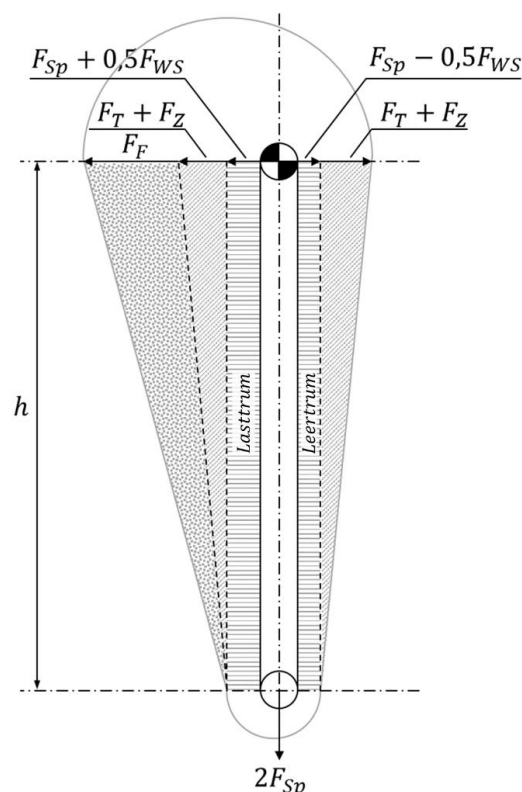


Abbildung 2-12: Bewegungswiderstände an Senkrechtbecherwerken (ohne Kettenknickwiderstände bzw. Gurtbiegungswiderstände), mit  $h$ =Achsabstand (entspricht der beim Heben zu überwindenden Höhe),  $F_{Sp}$ =Spannkraft je Spannspindel,  $F_{WS}$ =Schöpfwiderstand,  $F_T$ =Hubwiderstand resultierend aus der Bechermasse,  $F_Z$ =Hubwiderstand resultierend aus der Metergewichtskraft des Zugmittels (Gurt oder Kette), (nach [58])

Der für Senkrechtbecherwerke maßgebliche Bewegungswiderstand ist der aus der Hubarbeit resultierende Steigungswiderstand  $F_{WSt}$  im Lasttrum. Die Einzelbewegungswiderstände teilen sich wie folgt auf:

$$F_{W(Leer.)} = -(F_T + F_Z + F_{Sp} - 0,5F_{WS}), \quad (12)$$

$$F_{W(Last.)} = F_F + F_T + F_Z + F_{Sp} + 0,5F_{WS}, \quad (13)$$

$$F_{WSt(Leertrum)} = -(F_T + F_Z), \quad (14)$$

$$F_{WSt(Lasttrum)} = F_F + F_T + F_Z. \quad (15)$$

Die Einzelbewegungswiderstände des Fördergutes, der Tragmittel und des Zugmittels berechnen sich nach Gl. (16) bis Gl. (18) aus den längenbezogenen Gewichtskräften und der Höhe des Becherwerkes.

$$F_F = q_F h = \frac{m_0 g h}{l_T}, \quad \text{mit } m_0 = V_B \rho \eta_F. \quad (16)$$

$$F_T = q_T h = \frac{m_B g h}{l_T}. \quad (17)$$

$$F_Z = q_Z h = m'_Z g h. \quad (18)$$

Der für Kettenbecherwerke zu berücksichtigende zusätzliche Bewegungswiderstand wird dem Fördertrum zugeordnet und berechnet sich nach Gl. (19).

$$F_{Wf} = f(h(q_F + 2q_Z + 2q_T) + 2F_{Sp}). \quad (19)$$

Der Bewegungswiderstandsbeiwert beträgt für kleine Becherbreiten und geringe Höhen  $f \approx 0,0035$  und für große Becherbreiten und Förderhöhen  $f \approx 0,01$  [58].

Der für Gurtbecherwerke zu berücksichtigende Umlenkwidestand an der An- und Ablaufstelle der Trommeln beträgt für Textilgurte das Vierfache und für Stahlseilgurte das Dreifache des Biege widerstands [57].

$$F_{WU} = 3 \cdot 4 \cdot F_{Bi}. \quad (20)$$

Der Biege widerstand ist abhängig von der Gurtbreite, dem Verhältnis der Gurtdicke und der Trommeldurchmesser sowie der Gurtzugkraft. Er wird nach Gl. (21) berechnet.

$$F_{Bi} = 0,12 \cdot B \cdot \left( \xi + \frac{0,5 \cdot (F_{W(Leer.)} + F_{W(Last.)})}{B} \right) \cdot \frac{s_G}{d_T}. \quad (21)$$

Für Textilgurte ist  $\xi = 1,2 \cdot 10^4$  N/m und für Stahlseilgurte ist  $\xi = 2 \cdot 10^4$  N/m [57].

Der bei geneigten Förderern zusätzlich auftretende Reibungswiderstand hängt von der Neigung des Förderers sowie der aus den längenbezogenen Gewichtskräften resultierenden Normalkraft zur Gleitebene ab.

$$F_R = \mu \cos(\delta) F_N = \mu \cos(\delta) l_t(q_F + q_T + q_Z). \quad (22)$$

Der Schöpfwiderstand  $F_{WS}$  im Becherwerkfuß ist abhängig von der Art der Beschickung, der Neigung des Gutes zur Kohäsion, der Fördergeschwindigkeit sowie der Becherform und Becherteilung [58]. Nach BEUMER UND WEHMEIER setzt sich der Schöpfwiderstand aus den Einzelbewegungswiderständen der:

- 1) Stoßkräfte beim Aufprallen der Becherkante bzw. des Becherbodens auf das Schüttgutbett,
- 2) Reibkräfte  $F_{R1}$ , welche aus der Relativbewegung zwischen Becher und Gut resultieren,
- 3) Reibkräfte  $F_{R2}$ , welche in Ketten und Lagern während des Schöpfens auftreten,
- 4) Beschleunigungskräfte  $F_B$  zur Beschleunigung der vom Becher beeinflussten Schüttgutteilchen,
- 5) Hubkräfte  $F_H$  für das im Becher befindliche Schüttgut

zusammen [3]. Der Schöpfwiderstand wird als Erhöhung der Umfangskraft an der Antriebstrommel bzw. dem Antriebskettenrad berechnet. Aus der messtechnischen Erfassung des Moments an der Antriebswelle wird durch Subtraktion des zuvor bestimmten Leerlaufmoments und des analytisch bestimmbar Hubmoments das Schöpfmoment berechnet. Die Widerstandskraft lässt sich mit Hilfe des Trommeldurchmessers aus dem Schöpfmoment umrechnen (Gl. (23)).

$$F_S = \frac{M_S}{0,5 \cdot D_t}. \quad (23)$$

Durch Integration der Summe der Einzelbewegungswiderstände des Schöpfvorgangs (1-5) über den Schöpfweg wird die Schöpfarbeit  $W_S$  mit Gl. (24) theoretisch bestimmt.

$$W_S = \int_{s_1}^{s_2} F_S ds = \int_{s_1}^{s_2} (F_{R1} + F_{R2}) ds + \int_{s_1}^{s_2} F_B ds + \int_{s_1}^{s_2} F_H ds + \text{Stoßverluste}. \quad (24)$$

Der Stoß des Bechers auf das ruhende Schüttgut wird als inelastischer Stoß definiert. Der Stoßverlust lässt sich als

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 v^2}{m_1 + m_2}, \quad (25)$$

ausdrücken. Dabei entspricht  $m_1$  der Masse der in Bewegung befindlichen Teile (z.B. Becher, Kette oder Gurt) und  $m_2$  der Masse der in Ruhe befindlichen Schüttgutteilchen. Es wird angenommen, dass die in Ruhe befindliche Masse dem 1,5-fachen der im Becher geförderten Masse entspricht [3].

Die in Ruhe befindliche Masse  $m_2$  wird in die Teilmassen der tatsächlich vom Becher geförderten Masse  $m_{21}$  und der beim Schöpfen verdrängten Masse  $m_{22}$  aufgeteilt. Damit ergibt sich die Schöpfarbeit aus Gl. (24) und Gl. (25) zu:

$$W_S = \int_{s_1}^{s_2} (F_{R1} + F_{R2}) ds + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + m_{21} \Delta h_{21} g + m_{22} \Delta h_{22} g + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 v^2}{m_1 + m_2}. \quad (26)$$

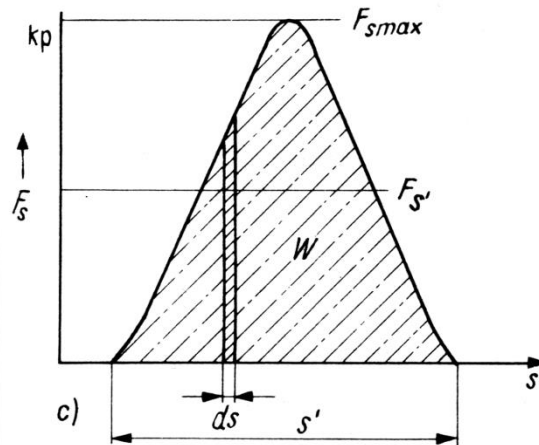


Abbildung 2-13: Verlauf des Schöpfwiderstandes über den Schöpfweg (entnommen aus [57])

Die Fläche unter der Kurve des Schöpfwiderstandes ergibt näherungsweise ein Dreieck (vergl. Abbildung 2-13). Die Schöpfarbeit lässt sich daher auch als Produkt des maximalen Schöpfwiderstandes und des Schöpfweges ausdrücken (Gl.(27)).

$$W_S = \int F_S ds = F_{S'} s' = \frac{1}{2} F_{Smax} s'. \quad (27)$$

Mit der auf ein Kilogramm geförderten Schüttguts bezogenen spezifischen Schöpfarbeit  $W_{SS}$  und der aus dem Fördergut resultierenden Meterlast  $q_F$  (Gl. (16)) wird der spezifische Schöpfwiderstand  $F_{WS}$  nach Gl.(28)) berechnet.

$$F_{WS} = K W_{SS} q_F. \quad (28)$$

Die zur Berechnung des Schöpfwiderstandes benötigte spezifische Schöpfarbeit  $W_{SS}$  wird von BEUMER UND WEHMEIER in ihrer gemeinsamen Veröffentlichung „Zur Frage des Schöpfwiderstandes und der Abwurfverhältnisse bei Becherwerken“ [8] als Funktion der Fördergeschwindigkeit für einige charakteristische Schüttgüter angegeben. Das Diagramm zum Ablesen der spezifischen Schöpfarbeit ist in der folgenden Abbildung 2-14 wiedergegeben.

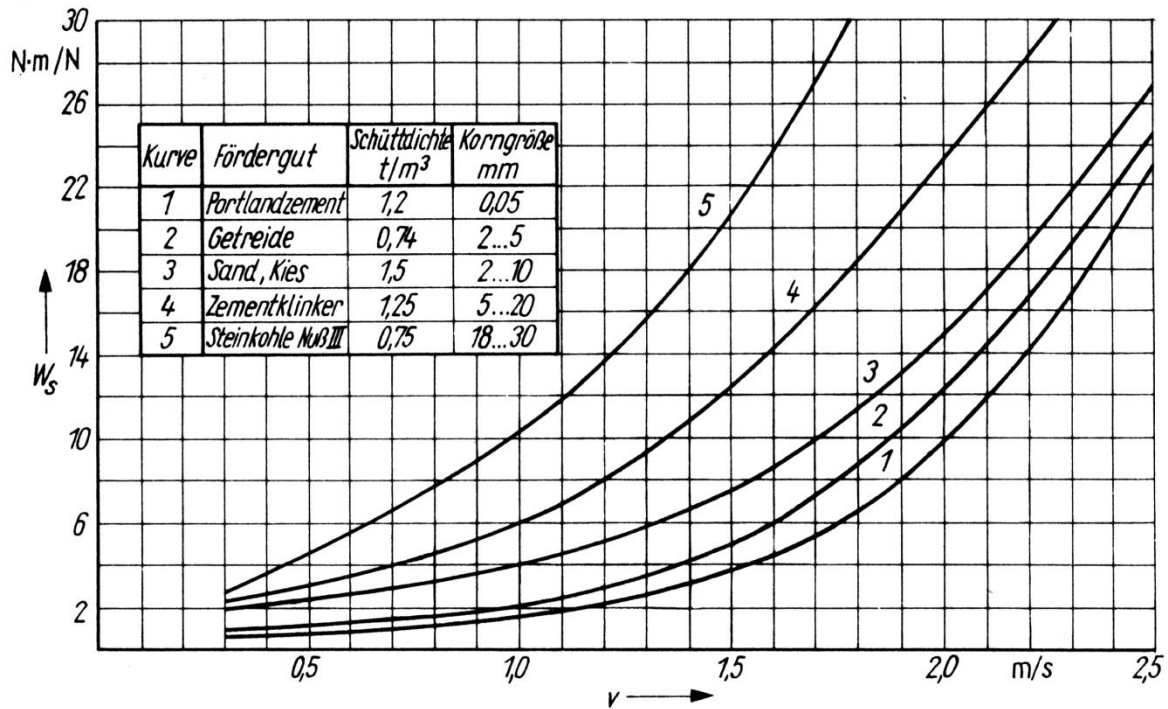


Abbildung 2-14: Spezifische Schöpfarbeit  $W_{ss}$  als Funktion der Fördergeschwindigkeit für verschiedene Schüttgüter an einem Versuchsbecherförderer mit 0,4 m Becherbreite und 0,224 m Becherausladung (entnommen aus [57])

Die Ergebnisse gelten für den von BEUMER UND WEHMEIER verwendeten Versuchsbecherförderer mit einer Becherbreite von 0,4 m und einer Becherausladung von 0,224 m.

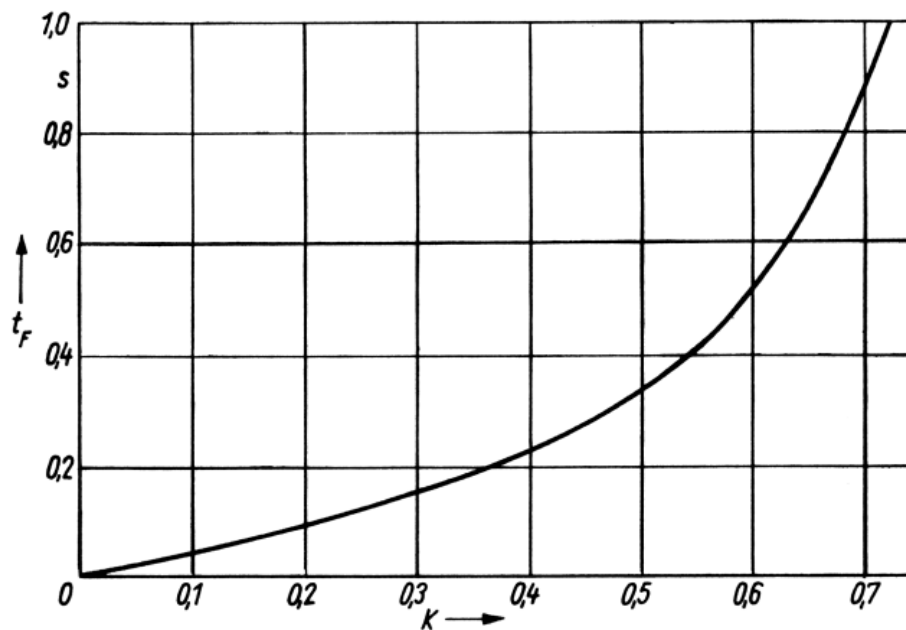


Abbildung 2-15: Abminderungsfaktor  $K$  in Abhängigkeit von der zeitlichen Becherfolge  $t_F$  nach Wehmeier (entnommen aus [57])

Mit Hilfe des Abminderungsfaktors  $K$  in Gl. (28) wird die empirisch ermittelte spezifische Schöpfarbeit auf andere, vom Versuchsbecherwerk abweichende Becherwerke, umgerechnet. Der Abminderungsfaktor  $K = f(t_F)$  wird mit Hilfe der relativen Becherfolgezeit

$$t_F = \frac{e_0 l_T}{e_1 v_Z}, \quad (29)$$

aus dem in Abbildung 2-15 dargestellten Diagramm abgelesen. Das Verhältnis der Becherausladung  $e_0 = 0,224 m$ , aus den Untersuchungen von BEUMER UND WEHMEIER, zu  $e_1$ , für vom Versuchsbecherwerk abweichende Bechergrößen, skaliert die Bechertiefe auf die von BEUMER UND WEHMEIER verwendeten Schöpfbecher. Der Quotient aus Becherteilung  $l_T$  und der Zugmittelgeschwindigkeit  $v_Z$  erfasst den Einfluss der zeitlichen Becherfolge auf den Schöpfwiderstand.

### 2.2.3.3 Bestimmung der notwendigen Antriebsleistung

Die an der Antriebstrommel zu übertragende Umfangskraft  $F_U$  berechnet sich aus der Summe der Einzelbewegungswiderstände im Leertrum und im Lasttrum nach Gl. (30). Die Bewegungswiderstände in Förderrichtung sind per Definition positiv, daher ist der Gesamtbewegungswiderstand im Leertrum aus Gl (12) negativ definiert.

$$F_U = F_{W(Leer.)} + F_{W(Last.)} = F_F + F_{Wf} + F_{WU} + F_{WS}. \quad (30)$$

Mit Hilfe der so ermittelten Umfangskraft  $F_U$ , dem Wirkungsgrad  $\eta_{ges}$  des Antriebssystems und der Fördergeschwindigkeit  $v_Z$  lässt sich die notwendige Antriebsleistung nach Gl. (31) berechnen.

$$P_{M_{erf}} = \frac{F_U \cdot v}{\eta_{ges}}. \quad (31)$$

Das in diesem Kapitel zur Bestimmung der Einzelbewegungswiderstände von Senkrechtbecherwerken nach den Untersuchungen von BEUMER UND WEHMEIER durchgeführte Verfahren wird analog in der VDI 2324 „Senkrecht-Becherwerke“ angewendet.



### 2.2.3.4 Einflussfaktoren des Schöpfwiderstandes

#### 2.2.3.4.1 Einfluss des Abminderungsfaktors auf die Berechnung des Schöpfwiderstandes

Im Folgenden soll der Gültigkeitsbereich des zur Berechnung des Schöpfwiderstandes verwendeten Abminderungsfaktors diskutiert werden. Der Abminderungsfaktor wird als Funktion der Becherfolgezeit  $K = f(t_F)$  definiert. Die Becherfolgezeit  $t_F$  führt mit Gl. (29) zwei geometrische Beziehungen zur Übertragung der experimentellen Ergebnisse für den Schöpfwiderstand eines bestimmten Becherwerkes auf Becherförderer mit anderen geometrischen Abmessungen der Becher ein:

- a) die Becherausladung  $e_1$  der verwendeten Becher des anderen Becherförderers im Verhältnis zur Becherausladung des Versuchsbecherwerkes  $e_0$  an dem die Funktion empirisch ermittelt wurde,
- b) das Verhältnis der Becherteilung  $l_T$  zur Zugmittelgeschwindigkeit  $v_Z$

DILEFELD stellt in seiner Dissertation dar, dass sich mit der Änderung der Becherausladung in vielen Fällen ebenso die Durchmesser der Antriebs- und Spanntrommeln ändern. Er stellt fest: „Das Verhältnis  $e_0/e_1$  kann nur für Becher verschiedener Ausladungen bei konstanten Trommelradien zur Bewertung herangezogen werden, bei veränderten Trommelradien führt das alleinige Betrachten der Becherausladung zu keinem befriedigenden Ergebnis.“ [3] Daher schlägt DILEFELD vor, das Verhältnis der Schöpfkantengeschwindigkeit  $v_a$  zur Zugmittelgeschwindigkeit  $v_Z$  an den Umlenktrommeln zu verwenden, um die Becherausladung in die Bestimmung des Schöpfwiderstandes einfließen zu lassen. Dieses Verhältnis entspricht dem Verhältnis des Radius der Becherspitze  $r_a$  zum Trommelradius  $r_T$  (vergl. Abbildung 2-16 links). Der Quotient

$$\frac{r_T}{r_a} = \frac{r_T}{r_T + e_1} \quad (32)$$

wird zur Bewertung des Verhältnisses der Zugmittelgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der Becherspitze von DILEFELD eingeführt.

Der Einfluss der Becherteilung und der Zugmittelgeschwindigkeit auf die Bestimmung des Schöpfwiderstandes wird durch den Quotienten  $\frac{l_T}{v_Z}$  in Gl. (29) berücksichtigt. Die spezifische Schöpfarbeit  $W_{SS}$  ist für die gewählte Zugmittelgeschwindigkeit bereits empirisch ermittelt. Der Becherabstand geht über die Metergewichtskraft  $q_F = \frac{m_0 g}{l_T}$  des Fördergutes in die Berechnung des Schöpfwiderstands (Gl. (26)) ein. DILEFELD führt daher den Winkel  $\vartheta$  des Kreissegments zwischen zwei Bechern beim Umlaufen der Becher um die Trommeln als Einflussgröße des Schöpfwiderstandes ein (vergl. Abbildung 2-16 rechts).

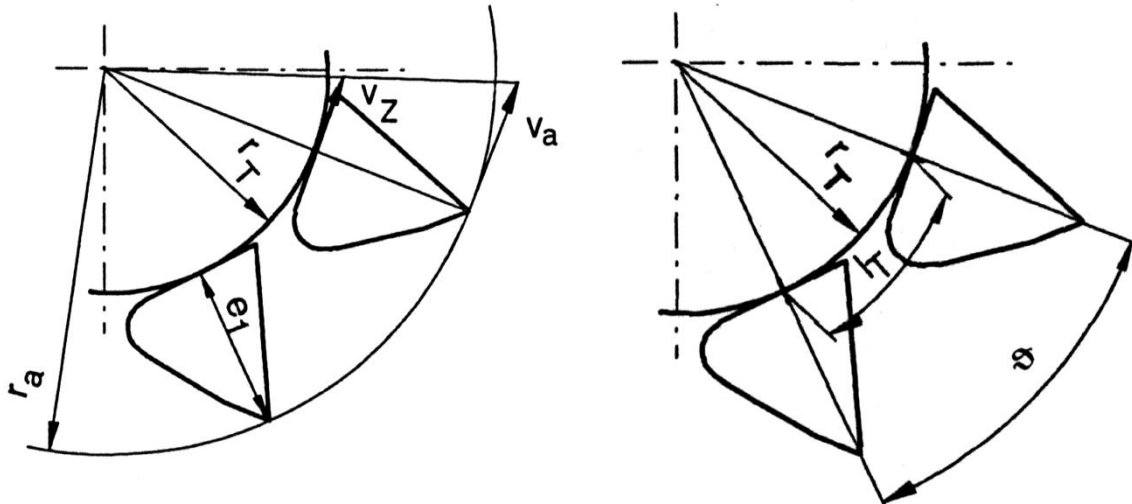


Abbildung 2-16: Geometrische Verhältnisse der Geschwindigkeiten, Radien und Teilkreiswinkel bei der Umlenkung der Becher (entnommen aus [3])

Zur Berechnung des Winkels  $\vartheta$  gilt nach der Formel für die Berechnung von Kreissegmenten mit der Bogenlänge  $l_T$  und dem Radius  $r_T$ :

$$\vartheta = \frac{l_T}{r_T}. \quad (33)$$

DILEFELD untersucht die Größenordnungen der von ihm definierten Quotienten Gl. (32) und Gl. (33) an Becherreihen nach DIN 15324, welche für Schwerkraftentleerung oder die Misch- und Fliehkraftentleerung verwendet werden. Dabei legt er die von vier unterschiedlichen Herstellern von Bechern für Gurtbecherwerke in Werksnormen festgelegte Zuordnung von Becherteilung und Trommeldurchmesser zu den Becherabmessungen zugrunde. Die von DILEFELD untersuchten technischen Daten von Bechern für Gurtbecherwerke, welche im Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung verwendet werden, sind in Tabelle 2-4 und Tabelle 2-5 wiedergegeben.

Tabelle 2-4: technischen Daten von Bechern nach DIN 15234 für Gurtbecherwerke, welche im Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung eingesetzt werden für Hersteller 1 (entnommen aus [3])

Schwerkraftbecher Hersteller 1					
Becherabmessung $b[\text{mm}] \times e_1[\text{mm}]$	$V_b [\text{dm}^3]$	$D_T [\text{m}]$	$l_T [\text{m}]$	$\frac{r_T}{r_a}$	$\vartheta = \frac{l_T}{r_T}$
200×160	2,360	0,50	0,325	0,610	1,300
250×180	3,750	0,63	0,375	0,636	1,190
315×200	6,000	0,63	0,400	0,612	1,270
400×224	9,400	0,71	0,425	0,613	1,197
500×250	14,900	0,80	0,450	0,615	1,125
630×280	23,500	0,90	0,500	0,616	1,111
800×315	37,300	1,00	0,600	0,613	1,200
1000×355	58,300	1,25	0,650	0,638	1,040
1250×400	92,000	1,25	0,700	0,610	1,120

**Tabelle 2-5: technischen Daten von Bechern nach DIN 15234 für Gurtbecherwerke, welche im Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung eingesetzt werden für Hersteller 2 (entnommen aus [3])**

Schwerkraftbecher Hersteller 2					
Becherabmessung b[mm] × e <sub>1</sub> [mm]	V <sub>b</sub> [dm <sup>3</sup> ]	D <sub>T</sub> [m]	l <sub>T</sub> [m]	$\frac{r_T}{r_a}$	$\vartheta = \frac{l_T}{r_T}$
160×160	1,90	0,50	0,335	0,610	1,340
200×160	2,40	0,50	0,335	0,610	1,340
250×200	4,60	0,63	0,375	0,612	1,190
315×200	5,80	0,63	0,375	0,612	1,190
400×224	9,40	0,71	0,425	0,613	1,197
500×250	14,90	0,80	0,475	0,615	1,188
630×280	23,50	0,90	0,530	0,616	1,178
800×315	37,30	1,00	0,600	0,613	1,200
1000×355	58,30	1,25	0,670	0,638	1,072
1250×400	92,00	1,25	0,750	0,610	1,200

Die technischen Daten für die von DILEFELD untersuchten Becherreihen für Becher, die im Bereich der Misch- und Fliehkraftentleerung verwendet werden, sind in Tabelle 2-6 und Tabelle 2-7 wiedergegeben.

**Tabelle 2-6: technischen Daten von Bechern nach Werksnorm C der Firma Wutra für Gurtbecherwerke, welche im Geschwindigkeitsbereich der Misch- und Fliehkraftentleerung eingesetzt werden für Hersteller 3 (entnommen aus [3])**

Fliehkraftbecher, Hersteller 3					
Becherabmessung b[mm] × e <sub>1</sub> [mm]	V <sub>b</sub> [dm <sup>3</sup> ]	D <sub>T</sub> [m]	l <sub>T</sub> [m]	$\frac{r_T}{r_a}$	$\vartheta = \frac{l_T}{r_T}$
125×106	0,56	0,40	0,130	0,654	0,650
200×140	1,48	0,40	0,160	0,588	0,800
250×200	3,56	0,63	0,196	0,612	0,622
315×200	4,49	0,63	0,196	0,612	0,622
400×200	5,70	0,63	0,196	0,612	0,622

**Tabelle 2-7: technischen Daten von Bechern nach DIN 15234 für Gurtbecherwerke, welche im Geschwindigkeitsbereich der Misch- und Schwerkraftentleerung eingesetzt werden für Hersteller 4 (entnommen aus [3])**

Fliehkraftbecher, Hersteller 4					
Becherabmessung b[mm] × e <sub>1</sub> [mm]	V <sub>b</sub> [dm <sup>3</sup> ]	D <sub>T</sub> [m]	l <sub>T</sub> [m]	$\frac{r_T}{r_a}$	$\vartheta = \frac{l_T}{r_T}$
80×75	0,17	0,315	0,112	0,677	0,711
100×90	0,30	0,400	0,125	0,690	0,625
125×106	0,52	0,450	0,142	0,680	0,631
160×125	0,90	0,500	0,168	0,667	0,672
200×140	1,40	0,630	0,200	0,692	0,635
250×160	2,20	0,710	0,250	0,689	0,704
315×180	3,60	0,800	0,275	0,690	0,688
80×75	0,17	0,315	0,112	0,677	0,711

DILEFELD stellt fest, dass „*der Quotient aus dem Trommelradius und dem Schöpfkantenradius ( $r_T/r_A$ ) und der Winkel zwischen den Bechern beim Umlaufen der Trommel ( $\vartheta$ ) annähernd konstant sind.*“ [3] Daher soll für die Umrechnung der von ihm empirisch ermittelten Werte für den Schöpfwiderstand aus den Ergebnissen seiner Arbeit nicht der Abminderungsfaktor  $K$  berücksichtigt werden, da die geometrischen Größen, welche Einfluss auf diesen Faktor haben, für verschiedene Becherdimensionen nahezu identisch sind. Die Gleichung zur Berechnung des Schöpfwiderstandes reduziert sich damit auf:

$$F_{WS} = W_{SS}q_F = W_{SS} \frac{V_B \eta_F \rho}{l_t}. \quad (34)$$

Für Becherförderer mit anderen geometrischen Abmessungen als denen des Versuchsbecherwerkes kann der Schöpfwiderstand aus der spezifischen Schöpfarbeit bestimmt werden, wenn die geometrischen Verhältnisse des Radius der Becherspitze  $r_a$  zum Trommelradius  $r_T$  sowie der Winkel  $\vartheta$  des Kreissegmentes zwischen den Bechern bei der Umlenkung an den Trommeln für das betrachtete Becherwerk mit dem von DILEFELD verwendeten Versuchsbecherwerk annähernd überein stimmen. Die am Versuchsbecherwerk von DILEFELD empirisch ermittelte spezifische Schöpfarbeit  $W_{SS}$  ist im folgende Unterkapitel für charakteristische Schüttgüter wiedergegeben.

In dieser Arbeit wird die gekoppelte DEM-MK-Simulationsmethode zur Analyse des Schöpfverhaltens des von DILEFELD verwendeten Versuchsbecherwerkes angewendet und eine Möglichkeit aufgezeigt, den Schöpfwiderstand und die Schöpfarbeit direkt aus den Ergebnissen der Simulation abzuleiten.

### 2.2.3.4.2 Einfluss der Beschickungsart und der Neigung zur Kohäsion des Schüttgutes

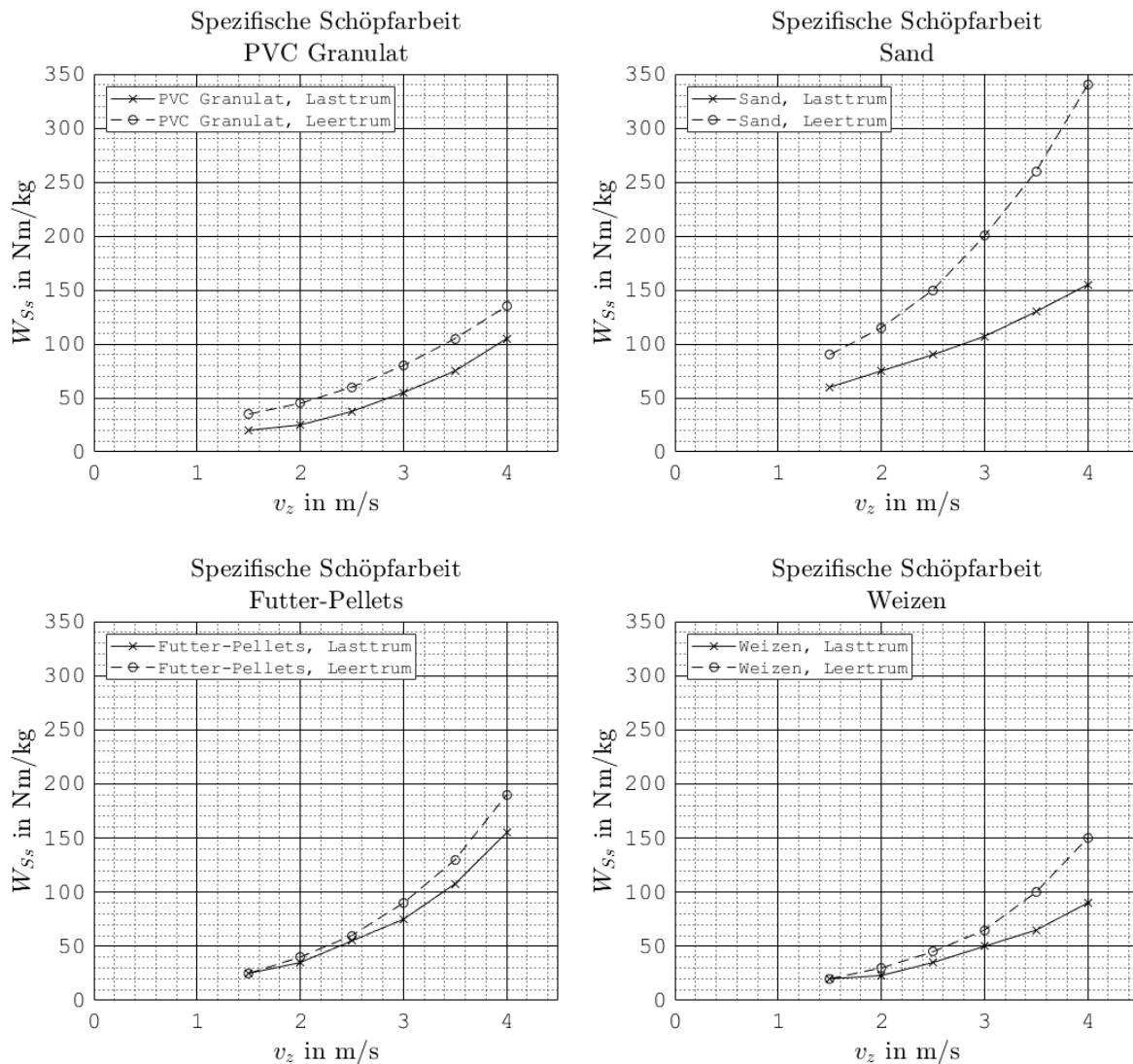
Bereits DILEFELD beschreibt 1993 in seiner Dissertationsschrift „Zum Schöpfverhalten von Becherförderern“ die Abhängigkeit der Kohäsion eines Schüttgutes zur gewählten Aufgabart:

*„Wie die meßtechnische Erfassung des Schöpfwiderstandes belegt, kann die energetisch günstigere Aufgabart (last- oder leertrumseitige Gutaufgabe) nicht pauschal und unabhängig vom zu fördernden Gut festgelegt werden. Güter mit unterschiedlichen Schüttguteigenschaften besitzen auch ein differenziertes Schöpfverhalten. Eine besondere Schüttguteigenschaft, die Auswirkung auf die Schöpfeigenschaften hat, ist die Neigung zur Kohäsion.*

*Während bei den Gütern, deren Partikel nicht die Eigenschaft haben, aneinander zu haften (sogenannte körnige Güter), die lasttrumseitige Gutaufgabe niedrigere Schöpfwiderstände hervorruft, wurden bei kohäsiven Gütern und leertrumseitiger Gutzuführung geringere Widerstände gemessen.“ [3]*

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf eine erneute experimentelle Erfassung der spezifischen Schöpfarbeit verzichtet und auf die Ergebnisse von DILEFELD für den Vergleich des

Schöpfwiderstandes zurückgegriffen. Die Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation wird genutzt, um die komplexen Bewegungsvorgänge des Schüttguts beim Schöpfen im Becherwerkfuß zu analysieren. Die in Abbildung 2-17 dargestellten Diagramme der spezifischen Schöpfarbeit für die Güter PVC-Granulat, Sand, Futter-Pellets und Weizen fassen die Messungen von DILEFELD [3] für den Geschwindigkeitsbereich der Misch- und Fliehkraftentleerung zusammen.



**Abbildung 2-17: Zusammenfassung der spezifischen Schöpfarbeit bei hohen Fördergeschwindigkeiten unterschiedlicher Güter (nach [3])**

Es ist zu erkennen, dass die spezifische Schöpfarbeit bei der lasttrumseitigen Gutaufgabe in diesem Geschwindigkeitsbereich generell geringer ist, als bei der leertrumseitigen Gutaufgabe. DILEFELD erklärt die erhöhte spezifische Schöpfarbeit bei der leertrumseitigen Gutaufgabe für Fördergeschwindigkeiten im Bereich der Misch- und Fliehkraftentleerung durch das Bechernicken beim Übergang von der kreisförmigen Bewegung entlang der Umlenktrummel auf die vertikale Bewegungsrichtung im Fördertrum. Das Bechernicken hat bei der leertrumseitigen Befüllung eine höhere vorzeitige Entleerung des bereits aus dem Becherwerkfuß geschöpften

Schüttguts zur Folge. Diese vorzeitige Teilentleerung der Becher ist nach DILEFELD der Grund für die höheren Bewegungswiderstände bei der leertrumseitigen Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter. Lediglich der im Becher verbleibende Rest des Schüttgutes kann zur Gutabgabestelle gefördert werden. Es muss mehr Gut aus dem Becherwerkfuß geschöpft werden, um den erforderlichen Massenstrom zu erreichen. Die Menge des aus den Bechern geschleuderten Schüttgutes steigt bei hohen Zugmittelgeschwindigkeiten an. Dies hat eine größere Füllhöhe des Becherwerkfußes zur Folge und erhöht zusätzlich den Bewegungswiderstand der Becher durch das Schüttgut. Hinsichtlich Anbackungen und der Hygiene ist ein Ansammeln von Schüttgut im Becherwerkfuß seitens der Betreiber fördertechnischer Anlagen unerwünscht und daher zu vermeiden.

Abbildung 2-18 stellt die Ergebnisse aus der Arbeit von DILEFELD für langsame Fördergeschwindigkeiten und die leer- sowie lasttrumseitige Gutaufgabe gegenüber.

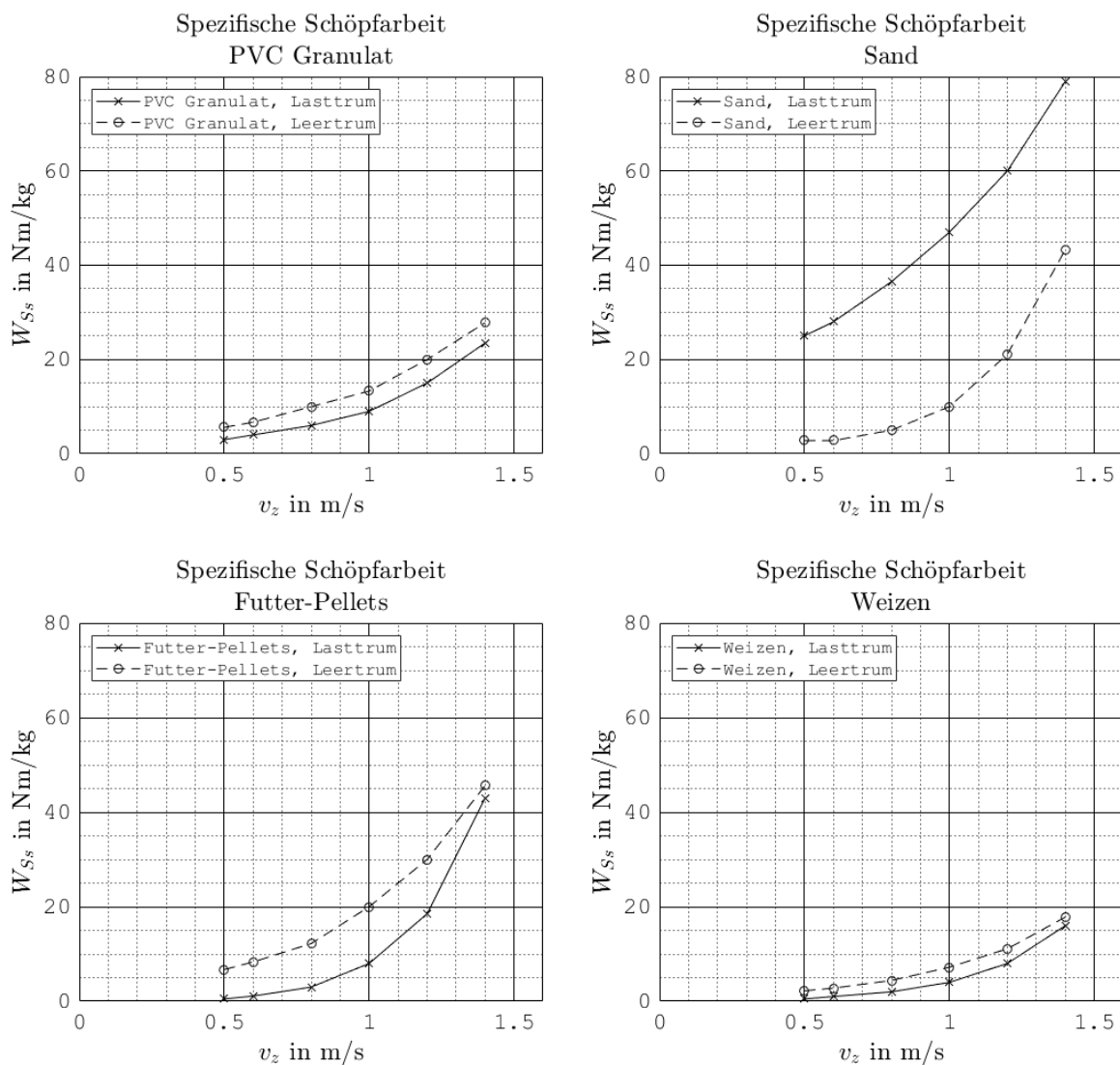


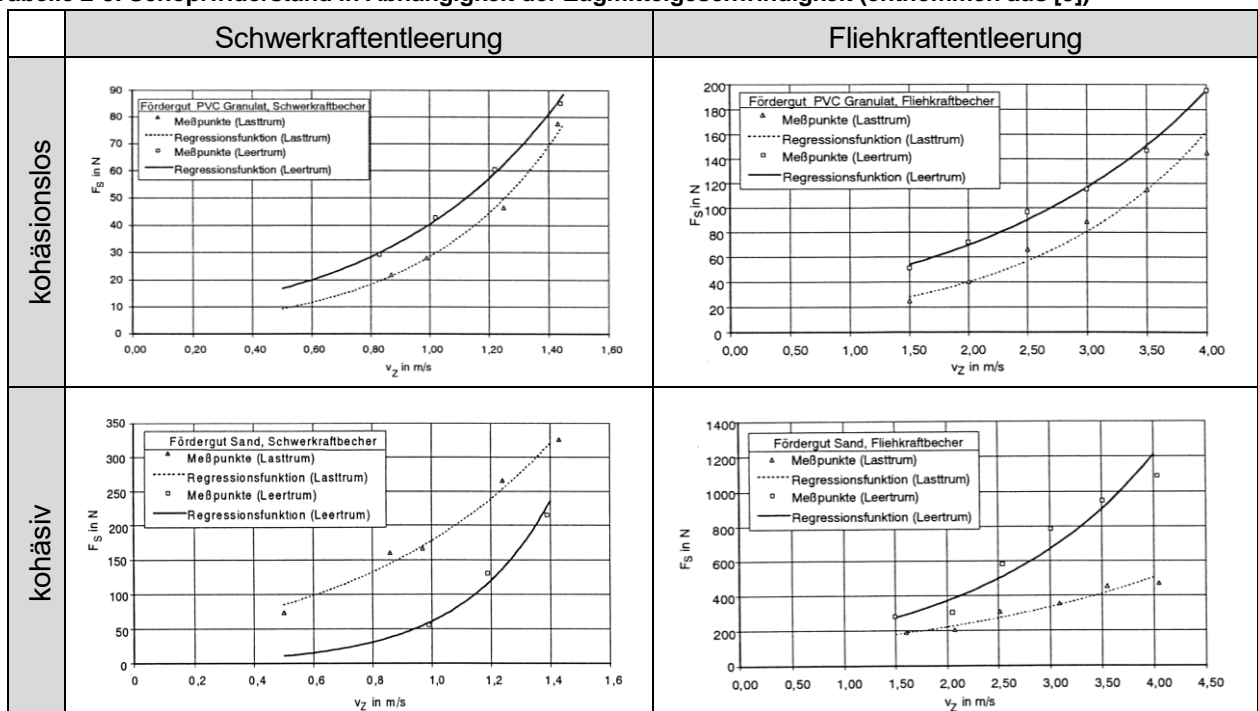
Abbildung 2-18: Zusammenfassung der spezifischen Schöpfarbeit bei niedrigen Fördergeschwindigkeiten unterschiedlicher Güter (nach [3])

Für den Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung und die Schüttgüter PVC-Granulat, Sand, Futter-Pellets und Weizen kommt DILEFELD zu dem Ergebnis, dass die lasttrumseitige Gutaufgabe für kohäsionslose Schüttgüter eine niedrigere spezifische Schöpfarbeit erfordert. Für leicht kohäsive Schüttgüter, beispielsweise feuchten Sand, ist die leertrumseitige Beschickung energetisch günstiger. DILEFELD erklärt die geringeren Bewegungswiderstände kohäsiver Schüttgüter bei der leertrumseitigen Beschickung mit den wirkenden Anziehungskräften zwischen den Gutteilchen und dem Becher, die ein Herausschleudern von Schüttgutpartikeln beim bereits beschriebenen Effekt des Bechernickens reduzieren. Der Vorteil der Geschwindigkeitskomponente in Förderrichtung bei der leertrumseitigen Gutaufgabe wird genutzt. Die Füllung des Becherwerkfußes ist bei der leertrumseitigen Gutaufgabe kohäsiver Güter wesentlich kleiner [3]. Dies reduziert zusätzlich den Bewegungswiderstand im Vergleich zur lasttrumseitigen Gutaufgabe und ist insbesondere bei Schüttgütern der lebensmittelverarbeitenden Industrie hinsichtlich der Hygiene ein Vorteil.

#### 2.2.3.4.3 Einfluss der Zugmittelgeschwindigkeit auf den Schöpfwiderstand

Zur Untersuchung des Einflusses der Zugmittelgeschwindigkeit auf den Schöpfwiderstand verschiedener Güter hat DILEFELD umfangreiche Messungen durchgeführt. Tabelle 2-8 zeigt eine Auswahl der Ergebnisse kategorisiert nach Entleerungsart und der Neigung des Schüttgutes zur Kohäsion. Die Diagramme zeigen für alle Schüttgüter einen progressiven Anstieg des Schöpfwiderstandes als Funktion der Zugmittelgeschwindigkeit. Dieser Anstieg lässt sich mit dem quadratischen Einfluss der Zugmittelgeschwindigkeit auf die Schöpfarbeit erklären (vergl. Gl. (26)).

**Tabelle 2-8: Schöpfwiderstand in Abhängigkeit der Zugmittelgeschwindigkeit (entnommen aus [3])**



### 2.2.3.4.4 Einfluss des Becherfüllungsgrades

Der Becherfüllungsgrad ist definiert als Quotient der tatsächlichen Füllung eines Bechers dividiert durch die Wasserfüllung<sup>3</sup>. Bei Überfüllung der Becher kann er Werte > 1 annehmen.

$$\eta_F = \frac{V_G}{V_B}. \quad (35)$$

Für große Fördergeschwindigkeiten sinkt der Becherfüllungsgrad, da durch den Zusammenprall des Fördergutes mit dem Becher ein großer Teil des Gutes wieder aus dem Becher geschleudert wird [3]. Tabelle 2-9 stellt technisch mögliche Becherfüllungsgrade für ausgewählte Schüttgüter gegenüber.

**Tabelle 2-9: erreichbare Becherfüllungsgrade unterschiedlicher Güter (nach [59])**

Schüttgut	Becherfüllungsgrad $\eta_F$
Mahlprodukte	0,8 bis 1,0
Getreide (bei mittlerer Geschwindigkeit)	0,75 bis 0,9
für Kohle geringer Stückgröße	0,6 bis 0,7
für großstückige Kohle	0,4 bis 0,5

DILEFELD gibt den Schöpfwiderstand in Abhängigkeit des Becherfüllungsgrades für unterschiedliche Umfangsgeschwindigkeiten und Schüttgüter an. Für das in dieser Arbeit verwendete Schüttgut PVC-Granulat sind die Funktionen des Schöpfwiderstandes in Abhängigkeit des Becherfüllungsgrades für Zugmittelgeschwindigkeiten von 0,8 m/s bis 3 m/s in Abbildung 2-19 und Abbildung 2-20 dargestellt. Der Verlauf des Schöpfwiderstandes in Abhängigkeit des Becherfüllungsgrades ist für den Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung und für den Bereich der Fliehkraftentleerung annähernd parallel. Dies bedeutet, dass die Fördergeschwindigkeit die Steigung der Funktion des Schöpfwiderstandes nur in geringem Ausmaß beeinflusst. Mit zunehmender Zugmittelgeschwindigkeit vergrößert sich der Abstand zwischen den Graphen. Dies führt DILEFELD auf den überproportionalen Anstieg der Schöpfarbeit bei Erhöhung der Umlaufgeschwindigkeit zurück [3].

Der Becherfüllungsgrad geht über den Massenstrom linear in die Berechnung des Schöpfwiderstandes ein (Gl. (34)). Der Schöpfwiderstand kann daher für unterschiedliche Becherfüllungsgrade aus dem einmal in der Simulation oder einer Messung ermittelten Bewegungswiderstand berechnet werden.

---

<sup>3</sup> Wasserinhalt bei senkrechter Becherlage



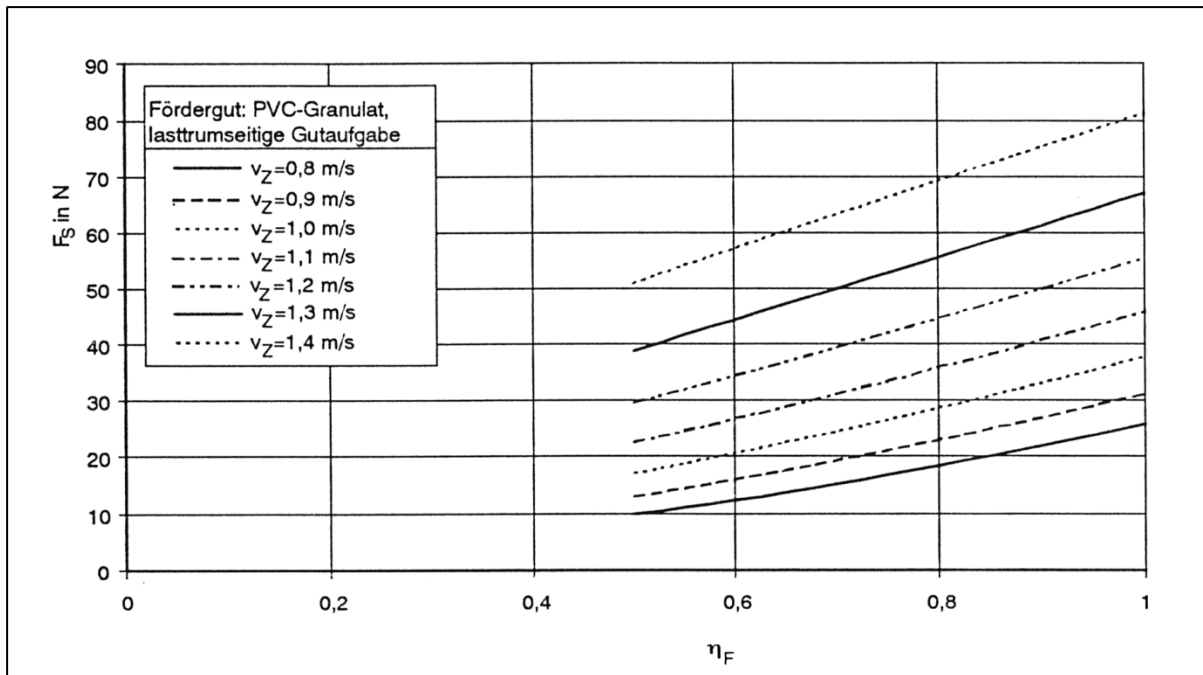


Abbildung 2-19: Schöpfwiderstand in Abhängigkeit des Becherfüllungsgrades für verschiedene Zugmittelgeschwindigkeiten für den Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung (entnommen aus [3])

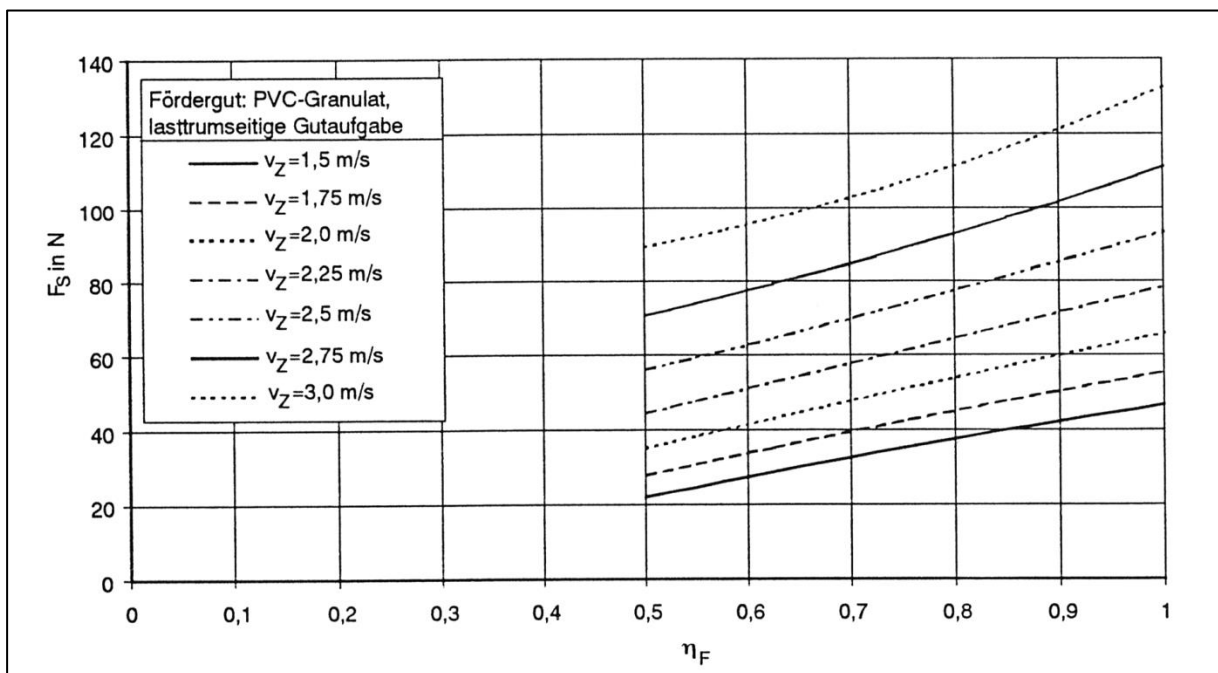


Abbildung 2-20: Schöpfwiderstand in Abhängigkeit des Becherfüllungsgrades für verschiedene Zugmittelgeschwindigkeiten, für den Geschwindigkeitsbereich der Misch- und Fliehkraftentleerung (entnommen aus [3])

## 3 Simulationsmethoden

### 3.1 Methode der Mehrkörpersimulation

Die Methode der Mehrkörpersimulation beschreibt die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen interagierender, massebehafteter Körper. Die mathematischen Grundlagen wurden von NEWTON, EULER, d'ALEMBERT, LAGRANGE und HAMILTON beschrieben [60]. Die ersten Mehrkörpersimulationsprogramme wurden zwischen 1970 und 1980 entwickelt [61].

Die einfachste Art eines mechanischen Systems besteht aus starren Körpern. Diese sind durch ihre Massenträgheit, welche sich aus dem Volumen und der Dichte ergibt, gekennzeichnet [62]. Weitere Bestandteile mechanischer Systeme sind Federn, Dämpfer und Kräfte. Kräfte können aufgrund von Kraftfeldern (z.B. Gravitationskraft), Kraftstellgliedern (z.B. Antriebe) sowie aufgrund von Lagerreaktionen Einfluss auf das System nehmen. Abbildung 3-1 stellt eine Übersicht zur Einteilung der Bauteile mechanischer Systeme dar.

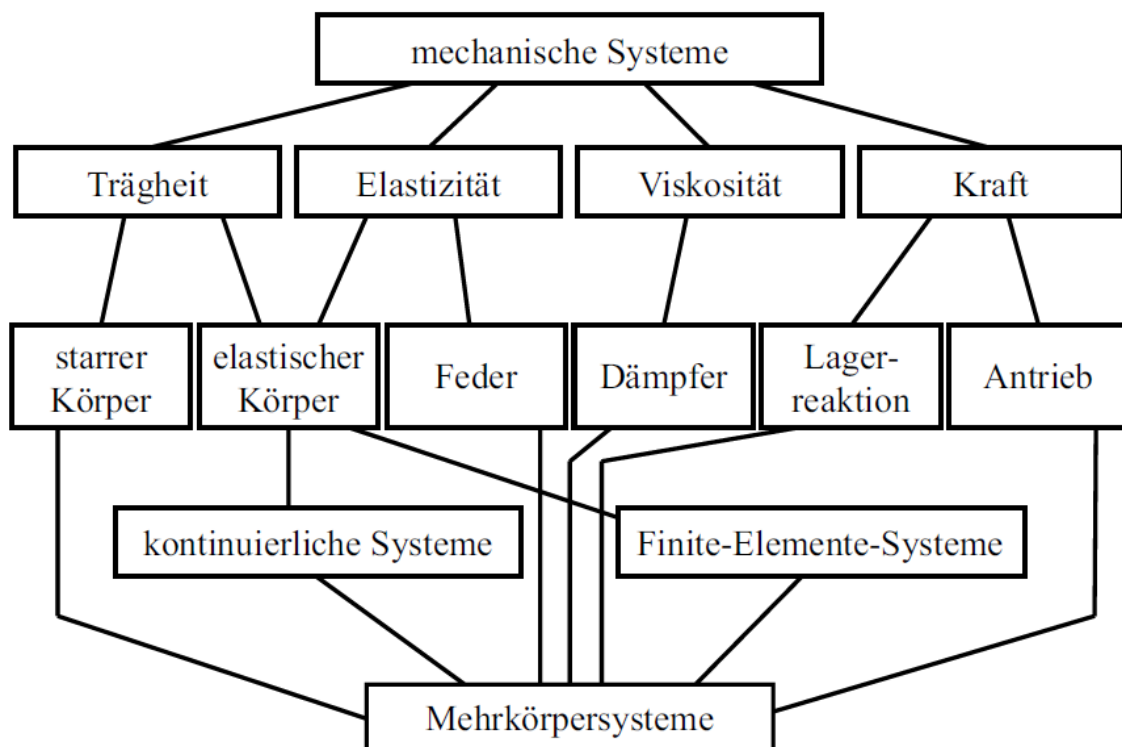


Abbildung 3-1: Einteilung mechanischer Systeme (entnommen aus [62])

Einzelne Bauteile können durch masselose Gelenke und Verbindungselemente gekoppelt werden. Dies reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Diese Systeme werden in der Literatur als „starre Maschine“ bezeichnet.

Das Berechnungsmodell lässt sich nach DRESIG und HOLZWEIßIG als „*zwangsläufiges System starrer Körper, dessen Bewegung bei gegebener Antriebsbewegung aufgrund holonomer Zwangsbedingungen eindeutig bestimmt ist*“ [63] definieren. Es lässt sich anwenden, wenn die Deformationen gering sind und so das Bewegungsverhalten nicht beeinflussen. Eine Voraussetzung zur Einhaltung dieser Bedingung ist, dass die Gelenke und Lager ideal spielfrei sind [63].

Kontakte zwischen den Körpern oder einem Körper und der Umgebung erfordern zunächst die Implementierung einer geeigneten Kollisionserkennung und anschließend eine möglichst genaue, mathematische Beschreibung des Stoßvorgangs [60].

### 3.1.1 Dynamik des starren Körpers

#### 3.1.1.1 Lagebeschreibung

Für die Beschreibung der Lage und Orientierung eines Körpers wird ein Koordinatensystem definiert. Dieses stellt mit dem Ursprung  $\mathbf{0}$  und den Achsen  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  einen Referenzpunkt und eine Referenzrichtung zur Verfügung. In der Mehrkörpersimulation werden stets orthogonale und rechtshändige Koordinatensysteme verwendet [60]. Die Richtungen der Koordinatenachsen werden dabei durch die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{x_0}$ ,  $\mathbf{e}_{y_0}$ ,  $\mathbf{e}_{z_0}$  mit  $|\mathbf{e}_{x_0}| = 1$ ,  $|\mathbf{e}_{y_0}| = 1$ ,  $|\mathbf{e}_{z_0}| = 1$  festgelegt [60].

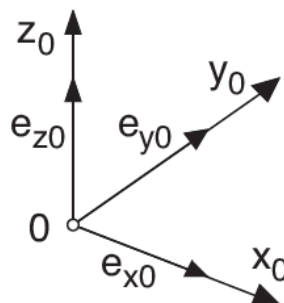


Abbildung 3-2: Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{x_0}$ ,  $\mathbf{e}_{y_0}$ ,  $\mathbf{e}_{z_0}$  (entnommen aus [60])

Die Lage und Orientierung eines Körpers wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}_{0S}$  und drei Richtungen in Form einer Drehmatrix  $A_{0K}$  gegenüber dem Koordinatensystem  $\mathbf{0}$  definiert. Für die Beschreibung der Richtungen werden Kardanwinkel, Eulerwinkel, Eulerparameter oder Quaternionen verwendet.

Jeder Punkt  $P$  auf dem Körper ist dadurch mit der Vektorkette

$$\mathbf{r}_{0P,0} = \mathbf{r}_{0S,0} + \mathbf{A}_{0K} \mathbf{r}_{SP,K} . \quad (36)$$

definiert. Dabei repräsentiert der Vektor  $\mathbf{r}_{SP,K}$  im körperfesten Koordinatensystem die Lage des Punktes  $P$  gegenüber dem Punkt  $S$ . Da es nicht zu Verformungen innerhalb des Körpers kommt, ist dieser Vektor für starre Körper konstant.

#### 3.1.1.2 Beschreibung der Relativbewegung

Die zeitliche Ableitung der Gl. (36) liefert die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  gegenüber dem Inertialsystem:

$$\dot{\mathbf{r}}_{0P,0} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,0} + \dot{\mathbf{A}}_{0K} \mathbf{r}_{SP,K} + \mathbf{A}_{0K} \dot{\mathbf{r}}_{SP,K} . \quad (37)$$

Da die Berechnung der Ableitung der Drehmatrix nach der Zeit in der Regel sehr aufwändig ist, überführt man die Gl. (37) mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{A}_{0K}^T \mathbf{A}_{0K} = \mathbf{E}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{0K,0}$  in die Eulersche Geschwindigkeitsgleichung:

aus (37) 
$$\dot{\mathbf{r}}_{0P,0} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,0} + \dot{\mathbf{A}}_{0K} \mathbf{A}_{0K}^T \mathbf{A}_{0K} \mathbf{r}_{SP,K} + \mathbf{A}_{0K} \dot{\mathbf{r}}_{SP,K} , \quad (38)$$

mit 
$$\dot{\mathbf{A}}_{0K} \mathbf{A}_{0K}^T = \tilde{\omega}_{0K,0} , \quad (39)$$

wobei 
$$\tilde{\omega}_{0K,0} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{0K,0}^z & \omega_{0K,0}^y \\ \omega_{0K,0}^z & 0 & -\omega_{0K,0}^x \\ -\omega_{0K,0}^y & \omega_{0K,0}^x & 0 \end{bmatrix} , \quad \omega_{0K,0} = \begin{bmatrix} \omega_{0K,0}^x \\ \omega_{0K,0}^y \\ \omega_{0K,0}^z \end{bmatrix} , \quad (40)$$

und 
$$\tilde{\omega} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (41)$$

Es ergibt sich: 
$$\dot{\mathbf{r}}_{0P,0} = \dot{\mathbf{r}}_{0S,0} + \boldsymbol{\omega}_{0K,0} \times \mathbf{r}_{SP,K} + \mathbf{A}_{0K} \dot{\mathbf{r}}_{SP,K} . \quad (42)$$

Für starre Körper entfällt der letzte Term, da es zu keiner Rotation innerhalb des Körpers kommt.

Gl. (42) lässt sich auch ausdrücken als:

$$\mathbf{v}_{0P,0} = \mathbf{v}_{0S,0} + \boldsymbol{\omega}_{0K,0} \times \mathbf{r}_{SP,0} . \quad (43)$$

Damit sind die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit eines starren Körpers durch Angabe der geradlinigen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{0S}$ , eines körperfesten Punktes und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{0K}$  eindeutig definiert, da mit Gl. (43) die Geschwindigkeit jedes weiteren, körperfesten Punktes angegeben werden kann [60].

### 3.1.2 Bewegungsgleichungen

#### 3.1.2.1 Impulssatz

Der Impuls für Starrkörper lautet:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{0S} . \quad (44)$$

Dabei bezeichnet  $m$  die Masse des Körpers und  $\mathbf{v}_{0S}$  die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes  $\mathbf{S}$  gegenüber dem Inertialsystem. Drehbewegungen haben keinen Einfluss auf den Impuls eines starren Körpers [60]. Entsprechend der Newton'schen Grundgesetze rufen Kräfte eine Impulsänderung hervor. Mathematisch lässt sich dies durch die zeitliche Ableitung (Gl. (45)) ausdrücken.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F} . \quad (45)$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\mathbf{v}_{0S,0} = m\dot{\mathbf{v}}_{0S,0} = m\mathbf{a}_{0S,0} . \quad (46)$$

wobei  $\mathbf{a}_{0S,0}$  die Beschleunigung des Massenmittelpunktes  $\mathbf{S}$  bezeichnet.

Durch Einsetzen von Gl. (45) in Gl. (46) ergibt sich der Impulssatz zu:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} . \quad (47)$$

Der Impulssatz beschreibt die Bewegung des Massenmittelpunktes  $\mathbf{S}$  beeinflusst durch die resultierenden äußeren Kräfte [60].

#### 3.1.2.2 Drallsatz

Der auf den Massenmittelpunkt  $\mathbf{S}$  eines Körpers wirkende Drall

$$\mathbf{d}_S = \mathbf{T}_S\boldsymbol{\omega}_{0K} , \quad (48)$$

wird durch den Drallsatz

$$\frac{d}{dt}\mathbf{d}_{S,0} = \mathbf{M}_{S,0} , \quad (49)$$

beschrieben. Dabei gibt  $\boldsymbol{\omega}_{0K}$  die Winkelgeschwindigkeit des körperfesten Koordinatensystems  $\mathbf{K}$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathbf{0}$  an. Das resultierende Moment aus den äußeren Belastungen wird durch  $\mathbf{M}_S$  beschrieben [60].

Der Trägheitstensor  $\mathbf{T}_S$  bezüglich des Massenmittelpunktes  $\mathbf{S}$  ergibt sich durch Integration über infinitesimal kleine Masseteilchen  $dm$ :

$$\mathbf{T}_S = \int \tilde{\mathbf{r}}_{SM}^T \tilde{\mathbf{r}}_{SM} dm, \quad (50)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{r}}_{SM} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Der schiefsymmetrische Tensor  $\tilde{\mathbf{r}}_{SM}$  enthält die Komponenten des Lagevektors zwischen dem Massenmittelpunkt  $\mathbf{S}$  und den Masseteilchen  $dm$ . Damit lässt sich der Drallsatz durch

$$\frac{d}{dt} [T_{S,0} \omega_{0K,0}] = M_{S,0}. \quad (52)$$

formulieren.

Da sich die Lage der Masseteilchen  $dm$  bei einer Rotation des Körpers ändert, ist der im Koordinatensystem  $\mathbf{0}$  angegebene Trägheitstensor  $\mathbf{T}_{S,0}$  veränderlich. Die zeitliche Ableitung  $\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{S,0}$  ist in diesem Fall mathematisch sehr aufwändig. Im körperfesten Referenzsystem  $\mathbf{R}$  ist der rotationssymmetrische Trägheitstensor jedoch konstant. Durch Koordinatentransformation mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{A}_{0R}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{0K}$  lässt sich der Drallsatz durch

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}_{0R} (\mathbf{T}_{S,R} \omega_{0K,R})] = \mathbf{M}_{S,0}, \quad (53)$$

ausdrücken.

Im Referenzsystem  $\mathbf{R}$  ausgedrückt lautet der Drallsatz somit:

$$\mathbf{T}_{S,R} \dot{\omega}_{0K,R} + \omega_{0R,R} \times \mathbf{T}_{S,R} \omega_{0K,R} = \mathbf{M}_{S,R}, \quad (54)$$

wobei  $\omega_{0R,R}$  und  $\omega_{0K,R}$  die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit des Referenzsystems  $\mathbf{R}$  sowie des körperfesten Koordinatensystems  $\mathbf{K}$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathbf{0}$  ausdrücken. Der Term  $\omega_{0R} \times \mathbf{T}_S \omega_{0K}$  bezeichnet das Kreiselmoment [60].

Durch Rücktransformation der Gl. (54) in das globale Koordinatensystem  $\mathbf{0}$  ergibt sich der Drallsatz zu

$$\mathbf{T}_{S,0} \dot{\omega}_{0K,0} + \tilde{\omega}_{0K,0} \mathbf{T}_{S,0} \omega_{0K,0} = \mathbf{M}_{S,0}. \quad (55)$$

Die Tensortransformation  $\tilde{\omega}_{0K,0} \mathbf{T}_{S,0} \omega_{0K,0}$  überführt den Trägheitstensor  $\mathbf{T}_{S,0}$  mit Hilfe des Tensors der Winkelgeschwindigkeiten (vergl. Gl. (40)) in die aktuelle Orientierung des Körpers.

## 3.1.2.3 Zustandsgleichung

Der Impuls- und Drallsatz beschreibt zusammen mit den kinematischen Differentialgleichungen der translatorischen (56) und rotatorischen (58) Bewegung die Dynamik starrer Körper.

$$\dot{\mathbf{r}}_{0S,0} = \mathbf{v}_{0S,0}, \quad (56)$$

und 
$$\dot{\Phi} = \mathbf{K}_K \boldsymbol{\omega}_{0K,K}, \quad (57)$$

$$\mathbf{r}_{0S,0}(t) = \begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_S(t) \\ z_S(t) \end{bmatrix}; \mathbf{v}_{0S,0}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\omega}_{0K,K}(t) = \begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$

mit

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \text{ bzw. } \Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \text{ oder } \Phi(t) = \mathbf{p}_E(t) = \begin{bmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}.$$

Der Zustand eines Körpers lässt sich durch den Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  darstellen. Es gilt:

$$\mathbf{x} = [x_S \ y_S \ z_S \ \alpha \ \beta \ \gamma \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T, \text{ für Kardanwinkel,}$$

oder 
$$\mathbf{x} = [x_S \ y_S \ z_S \ \varphi \ \psi \ \theta \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T, \text{ für Euler-Winkel,} \quad (59)$$

oder 
$$\mathbf{x} = [x_S \ y_S \ z_S \ e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T, \text{ für Eulerparameter,}$$

bzw. 
$$\mathbf{x} = [x_S \ y_S \ z_S \ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T, \text{ für Quaternionen.}$$

Die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (60)$$

fasst die 12 bzw. 13 gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung aus Gl. (56) bis Gl. (59) zusammen.

## 3.1.2.4 Newton-Euler-Gleichungen

Die Bewegung eines starren Körpers im Raum wird durch die Newton-Euler-Gleichungen ausgedrückt. Diese basieren auf den im vorigen Kapitel vorgestellten Differentialgleichungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung sowie den wirkenden Kräften und Momenten [64]. Durch Aufteilung der auf einen Körper wirkenden Kräfte  $\mathbf{F}_{Sk}$  und Momente  $\mathbf{M}_{Sk}$  in Zwangskräfte und -momente sowie in eingeprägte Kräfte und Momente, kann der Impulssatz und der Drallsatz nach den Zwangskräften und Zwangsmomenten aufgelöst werden [60]. Die eingeprägten Kräfte und Momente werden auf eine minimale Anzahl generalisierter Zwangskräfte reduziert.

Mit den Elementen des generalisierten Zustandsvektors  $\mathbf{q}$ , der generalisierten Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{q}}$  ergibt sich die allgemeine Bewegungsgleichung nach FEATHERSTONE [65] zu:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (61)$$

Die Matrix  $\mathbf{H}$  auf der linken Seite der Gleichung stellt die generalisierte Massenträgheitsmatrix dar, und hängt wie in Kapitel 3.1.2.2 beschrieben von der Lage des Körpers ab. Die Matrix  $\mathbf{C}$  beinhaltet die innerhalb des Systems wirkenden Kräfte. Diese können die Gravitations-, Coriolis- und Zentrifugalkraft sein. Die generalisierten äußeren Kräfte sind auf der rechten Seite im Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  zusammengefasst.

Um ein System mehrerer Körper zu beschreiben, werden die Bewegungsgleichungen aus Gl. (61) jedes Körpers zu einem unabhängigen System (62) angeordnet.

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Die Bewegungsgleichungen der Körper werden mathematisch mit Zwangsgleichungen gekoppelt. Dabei wird zwischen der expliziten und der impliziten Formulierung der Gleichungen unterschieden.

	Position	Geschwindigkeit	Beschleunigung	
explizit	$q = g(u),$	$\dot{q} = G\dot{u},$	$\ddot{q} = G\ddot{u} + \dot{G}\dot{u}.$	(63)
implizit	$\phi(q) = 0,$	$K\dot{q} = 0,$	$K\ddot{q} + \dot{K}\dot{q} = 0.$	

Die Bewegungsgleichung (Gl. (61)) für Mehrkörpersysteme wird um den Kraftkopplungsvektor  $\boldsymbol{\tau}_c$  erweitert.

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_c. \quad (64)$$

Da die Kraft  $\boldsymbol{\tau}_c$  unbekannt ist, ist es das Ziel diese zu berechnen oder aus der Gleichung zu eliminieren. Das Jourdain'sche Prinzip sagt aus, dass die virtuelle Leistung aller Zwangskräfte und -momente, die in einem System auftreten, verschwindet [60]. Nach FEATHERSTONE [65] muss daher für alle generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  gelten:

$$\boldsymbol{\tau}_c \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (65)$$

Die Formulierung der Koppelkräfte zwischen den einzelnen Körpern kann entweder durch die explizite Angabe der Zwangsbedingung, oder impliziert durch Angabe der Zwangsbedingung für die Beschleunigungen erfolgen.



## 3.1.2.4.1 Explizite Formulierung

Für eine explizite Beschreibung der Bewegungsbeschränkung nimmt der Vektor der Koppelkräfte  $\tau_c$  nach [65] die Form

$$G^T \tau_c = 0, \quad (66)$$

an.

Das Einsetzen der Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichung kann durch Ersetzen der abhängigen Koordinaten durch Zwangsbedingungen erfolgen. Die explizite Zwangsbedingung der Position (Gl. (63)) wird zweimal abgeleitet.

$$\begin{aligned} q &= g(u), \\ \dot{q} &= \frac{\partial g(u)}{\partial u} = G\dot{u}, \\ \ddot{q} &= G\ddot{u} + \dot{G}\dot{u}. \end{aligned} \quad (67)$$

Durch Substitution von  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  mit den abgeleiteten Zwangsbedingungen ergibt sich ein System, in dem nur noch unabhängige Koordinaten  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  vorkommen.

$$HG\ddot{u} + H\dot{G}\dot{u} + C = \tau + \tau_c. \quad (68)$$

Durch Erweitern der Gl. (68) mit  $G^T$  aus Gl. (66) und Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens entfallen die Kopplungskräfte in dem Gleichungssystem.

$$G^T HG\ddot{u} + G^T (H\dot{G}\dot{u} + C) = G^T \tau. \quad (69)$$

Die Terme werden zusammengefasst und können anschließend mit einem numerischen Solver gelöst werden.

$$\tilde{H}\ddot{u} + \tilde{C} = \tilde{\tau}. \quad (70)$$

Eine weitere Möglichkeit, die explizit formulierten Zwangsbedingungen aufzulösen, besteht darin, die Differentialgleichungen (63), (64) und (66) zu einem Differentialgleichungssystem zu kombinieren ([65], S.45).

$$\begin{aligned} H\ddot{q} + C &= \tau + \tau_c, \\ \ddot{q} &= G\ddot{u} + \dot{G}\dot{u}, \\ G^T \tau_c &= 0, \end{aligned} \quad (71)$$

umgeformt

$$\begin{aligned} H\ddot{q} - \tau_c &= \tau - C, \\ -\ddot{q} + G\ddot{u} &= -\dot{G}\dot{u}, \end{aligned} \quad (72)$$

in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} H & -1 & 0 \\ -1 & 0 & G \\ 0 & G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \tau_c \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - C \\ -\dot{G}\dot{u} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahren ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} H & -1 & 0 \\ 0 & H^{-1} & G \\ 0 & G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \tau_c \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - C \\ H^{-1}(\tau - C) - \dot{G}\dot{u} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Für die zwei letzten Zeilen des Gleichungssystems wird ein weiterer Eliminationsschritt durchgeführt

$$\begin{bmatrix} H^{-1} & G \\ 0 & -G^T H G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_c \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{-1}(\tau - C) - \dot{G}\dot{u} \\ -G^T(\tau - C - H\dot{G}\dot{u}) \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Invertiert man das Vorzeichen der letzten Zeile des Gleichungssystems erhält man

$$G^T H G \ddot{u} = G^T (\tau - C - H\dot{G}\dot{u}). \quad (76)$$

Durch Substitution  $\boldsymbol{v} = G^T \boldsymbol{\tau}$ , bei dem der Vektor  $\boldsymbol{v}$  einen neuen Satz generalisierter Kräfte repräsentiert, erhält man die Bewegungsgleichung in der gewünschten Form.

$$\boldsymbol{H}_G \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}_G = \boldsymbol{v}. \quad (77)$$

mit

$$\boldsymbol{H}_G = G^T H G \text{ und } \boldsymbol{C}_G = G^T (C + H\dot{G}\dot{u}).$$

#### 3.1.2.4.2 Implizite Formulierung

Für eine implizite Beschreibung der Koppelkräfte lassen sich diese durch

$$\boldsymbol{\tau}_c = \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (78)$$

ausdrücken. Dabei stellt  $\boldsymbol{\lambda}$  den Vektor der unbekannt Kräfte dar. Die Elemente von  $\boldsymbol{\lambda}$  können als eine Menge von Lagrange-Multiplikatoren angesehen werden.

Durch Einsetzen von Gl. (78) in Gl. (64) und Anwendung der implizit formulierten Einschränkung für die Beschleunigung aus Gl. (63) erhält man in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} H & \boldsymbol{K}^T \\ \boldsymbol{K} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} - C \\ -\dot{K}\dot{q} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Es ergibt sich ein einfaches Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung (ODE). Die Zwangsbedingungen werden nicht direkt in das Gleichungssystem eingesetzt. Es besteht eine Zwangsbedingung für die Beschleunigungen. Da bei der numerischen Lösung des Differenzialgleichungssystems in jedem Rechenschritt zweifach integriert wird, gehen bei dieser Form der Darstellung von Zwangsbedingungen die numerischen Fehler quadratisch ein.

### 3.1.3 Lösung der Bewegungsgleichungen

Um den Lagevektor und die Geschwindigkeit eines Körpers zu bestimmen, werden einfache Differenzialgleichungen analytisch gelöst. Bei komplexen Gleichungssystemen, wie sie bei der Simulation von Mehrkörpersystemen auftreten, ist dies nicht möglich. Aus diesem Grund werden numerische Lösungsverfahren angewendet.

Sind alle an einem Körper angreifenden Kräfte in Betrag und Richtung bekannt, lässt sich die Beschleunigung des Körpers berechnen. Durch numerisches Integrieren über einen kleinen Zeitschritt wird die Geschwindigkeit des Körpers bestimmt. Durch wiederholtes Integrieren der Geschwindigkeit wird die Position und Orientierung bestimmt.

In Mehrkörpersimulationsprogrammen steht eine große Auswahl numerischer Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen zur Verfügung. Diese werden in explizite und implizite Verfahren unterteilt. Bei der Auswahl eines geeigneten Algorithmus spielen die Anforderungen an die Genauigkeit, der mathematische Aufwand zur Erstellung der Differentialgleichungen und die „Steifheit“<sup>4</sup> des Systems eine Rolle. Gewöhnliche Differentialgleichungen können sehr effizient mit expliziten Einschritt- und Mehrschritt-Verfahren gelöst werden. Bei steifen Differentialgleichungen werden hingegen implizite Verfahren angewendet [60].

#### 3.1.3.1 Explizite Verfahren

Das Euler-Verfahren ist das einfachste und bekannteste explizite Einschritt-Verfahren. Aus dem bekannten Anfangszustand  $x(t = t_0) = x_0$  und der Schrittweite  $h$  ergibt sich der neue Zustand zum Zeitpunkt  $t + h$ .

$$x(t + h) = x(t) + h f(t, x(t)), t_0 \leq t \leq t_E. \quad (80)$$

Die Funktion  $f$  muss dabei im Intervall von  $t_0$  bis  $t_E$  definiert sein. Die erreichbare Genauigkeit ist proportional zur Rechenschrittweite  $h$ , dafür ist pro Integrationsschritt nur eine Funktionsauswertung erforderlich. Aufgrund der Abhängigkeit der Genauigkeit von der Rechenschrittweite wird das Euler-Verfahren als Verfahren 1. Ordnung bezeichnet [60].

Durch Verkleinern der Schrittweite kann der numerische Fehler reduziert werden. Dies führt jedoch zu einer Erhöhung der Rechenzeit, da für das gleiche Zeitintervall mehr Iterationen benötigt werden. Die Schrittweite wird daher variabel an den aktuellen Modellzustand angepasst, sodass in Bereichen, in denen schnelle Bewegungsänderungen auftreten, die

---

<sup>4</sup> „Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist steif, wenn explizite Verfahren aus Stabilitätsgründen extrem kleine Schrittweiten verwenden müssen, implizite Verfahren dagegen mit deutlich größeren Schrittweiten stabile Lösungen erzeugen.“ [60]

Berechnungsgenauigkeit steigt und für Modellzustände mit langsamen Bewegungsänderungen die Berechnungsgeschwindigkeit hoch ist.

Explizite Verfahren höherer Ordnung stellen beispielsweise die Runge-Kutta Verfahren dar. Ein Vertreter dieser Verfahren ist das Heun-Verfahren. Dabei handelt es sich um ein Verfahren 2. Ordnung. Für jeden Integrationsschritt werden zwei Funktionsauswertungen durchgeführt. Das Heun-Verfahren wird auch als Trapezverfahren bezeichnet.

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} f_1 &= f(t, x(t)), \\ f_2 &= f(t+h, x(t) + hf(t, x(t))). \end{aligned} \quad (81)$$

Die erreichte Genauigkeit ist proportional zu  $h^2$ , damit geht der globale Fehler gegen null.

In der Praxis werden häufig die Verfahren höherer Ordnung `ode23` und `ode45` zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen eingesetzt. Bei diesen Verfahren werden gleichzeitig Lösungen unterschiedlicher Ordnung berechnet. Durch Vergleich der Ergebnisse wird auf den lokalen Fehler geschlossen. Die Zeitschrittweite  $h$  wird basierend darauf automatisch an die geforderte Genauigkeit angepasst.

Nachteilig bei den Verfahren höherer Ordnung ist eine höhere Anforderung an die Differenzierbarkeit der Funktion  $f$ . Des Weiteren sind explizite Verfahren grundsätzlich nicht zur Lösung steifer Differentialgleichungssysteme geeignet [60].

#### 3.1.3.2 Implizite Verfahren

Das Einschrittverfahren lässt sich auch in impliziter Form formulieren:

$$x(t+h) = x(t) + h f(t+h, x(t+h)), \quad t_0 \leq t \leq t_E. \quad (82)$$

wobei der Anfangszustand  $x(t=t_0) = x_0$  bekannt sein muss. Weiterhin muss die Funktion  $f$  im Intervall von  $t_0$  bis  $t_E$  bestimmbar sein. Die Gl. (82) kann nicht direkt gelöst werden, da die Funktionsauswertung für  $x(t+h)$  unbekannt ist. Zur Lösung der Gleichung wird die Funktion  $f$  in eine Taylorreihe entwickelt. Die Reihe wird nach den ersten beiden Gliedern abgebrochen (vergl. Gl. (83)).

$$f(t+h, x(t+h)) \approx f(t+h, x(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t+h, x(t)} (x(t+h) - x(t)) + \dots \quad (83)$$

Die Lösung erfordert eine Funktionsauswertung für  $f(t+h, x(t))$  sowie die Berechnung der Elemente der Jacobi Matrix (Gl. (84)), um das lineare Gleichungssystem zu lösen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Der mathematische Aufwand zur Lösung der Gleichung ist sehr hoch. Da die erreichte Genauigkeit nur proportional zu  $h$  ist, zählt das implizite Euler-Verfahren zu den Verfahren 1. Ordnung [60].

Sogenannte BDF-Verfahren (Backward Difference Formula) verwenden zusätzlich zeitlich zurückliegende Lösungen zur Berechnung des nächsten Funktionswertes. Das implizit formulierte Mehrschrittverfahren 3. Ordnung nach GEAR lautet beispielsweise [60]:

$$x(t+h) = \frac{18}{11}x(t) - \frac{9}{11}x(t-h) + \frac{2}{11}x(t-2h) + h\frac{6}{11}f(t+h, x(t+h)). \quad (85)$$

Mit dem Term  $x(t-2h)$  wird ein Ergebnis aus der vorletzten Iteration benötigt. Daher ist die Gleichung nur im Intervall  $t_0 + 2h \leq t \leq t_E$  lösbar. Bei den impliziten Mehrschritt Verfahren müssen pro Integrationsschritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst, oder die Funktion  $f(t+h, x(t+h))$  durch eine abgebrochene Taylor-Reihe angenähert werden. Es wird analog zu den Einschrittverfahren die Jacobi-Matrix (84) benötigt. Da zum Zeitpunkt  $t = t_0$  keine zurückliegenden Zustände oder Funktionswerte vorliegen sind implizite Mehrschrittverfahren nicht selbststartend [60].

### 3.1.4 Anwendungsbeispiel ebenes Pendel

Die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Prinzipien der Maschinendynamik und Numerik sollen an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Es wird ein ebenes Pendel bestehend aus der Punktmasse  $m$ , einem masselosen Stab der Länge  $l$  an einer drehbaren Lagerung mit einem Freiheitsgrad betrachtet (vergl. Abbildung 3-3).

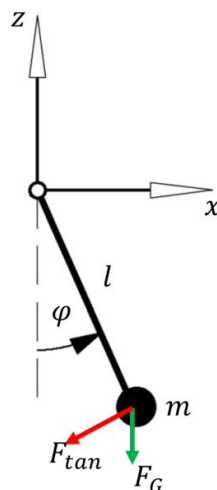


Abbildung 3-3: Modell des ebenen Pendels

Auf den Massepunkt wirkt die Gewichtskraft  $F_G$ . In Abhängigkeit der Auslenkung  $\varphi(t)$  des Pendels ergibt sich die Rückstellkraft  $F_{tan}$  in Richtung der Ruhelage zu

$$F_{tan} = -mg \sin(\varphi(t)). \quad (86)$$

Die Bewegungsgleichung nach dem zweiten Newton'schen Gesetz lautet:

$$\text{allgemein} \quad F(t) = m\ddot{x}(t), \quad (87)$$

$$\text{mit der Tangentialbeschleunigung} \quad \ddot{x}(t) = l\ddot{\varphi}(t). \quad (88)$$

Daraus ergibt sich die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m l \ddot{\varphi}(t) = -m g \sin(\varphi(t)). \quad (89)$$

$$\text{aufgelöst nach der Beschleunigung} \quad \ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t)). \quad (90)$$

Diese wird in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung überführt, in dem die verallgemeinerten Koordinaten  $q = [\varphi \dot{\varphi}]^T$  eingeführt werden. Die zeitliche Ableitung lässt sich durch

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ -\frac{g}{l} \sin(q_1(t)) \end{bmatrix}, \quad (91)$$

ausdrücken.

Mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{2}\pi, \\ \dot{\varphi}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (92)$$

lässt sich das Differenzialgleichungssystem (91) numerisch lösen.

Beispielhaft wird in MATLAB die numerische Lösung des Differenzialgleichungssystems mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens durchgeführt.

```
% Euler Explizit
% Setup
pl = 1;      %Pendellänge
g = 9.81;    %Gravitation
h = 1e-3;    %Schrittweite

t = 0:h:20; %Simulationszeit
phi = zeros(size(t)); %Position
w = zeros(size(t)); %Winkel-Geschwindigkeit

phi(1) = 0.5*pi; % Anfangswert der Lage
w(1) = 0;       % Anfangswert der Geschwindigkeit

n = numel(t); % Anzahl Iterationen=Länge von t
% Euler Explizit: x(t+h)=x(t)+h*f(t,x(t))
for i=1:n-1
    a = -g/pl*sin(phi(i));
    w(i+1) = w(i) + h * a;
    phi(i+1) = phi(i)+h*w(i);
end
```

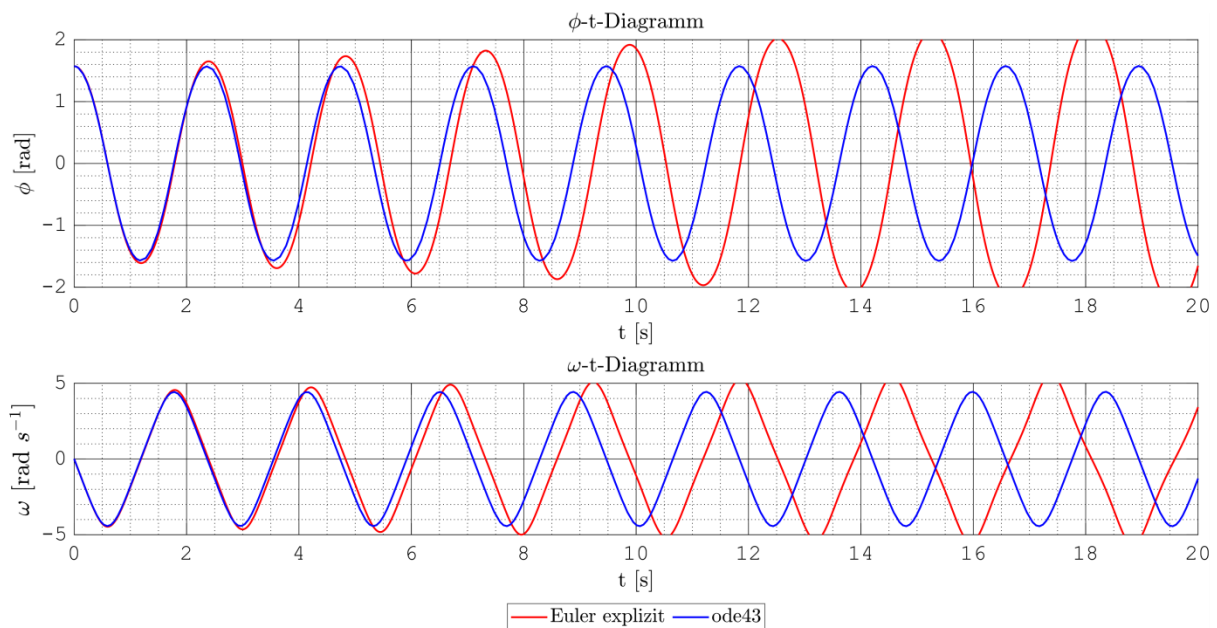
Für große Schrittweiten wird die numerische Lösung mit dem expliziten Euler-Verfahren bereits nach wenigen Iterationen instabil und auch für kleine Schrittweiten nimmt die Amplitude über die

Zeit zu (vergl. Abbildung 3-4). Nach RILL ist „das explizite Euler-Verfahren für ungedämpfte Schwingungen instabil. Da die Energie bei der numerischen Lösung bei jedem Integrationsschritt vergrößert wird, nehmen Amplitude  $\varphi$  und Geschwindigkeit  $\omega$  im Laufe der Zeit exponentiell zu“. [60]

Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass die Mehrschritt-Verfahren `ode23` und `ode45` stabile Lösungen liefern. Das Differentialgleichungssystem aus (91) wird, zusammen mit den Anfangsbedingungen  $q_0 = [\varphi_0, \dot{\varphi}_0]^T$ , an den in `Matlab` implementierten Lösungsalgorithmus übergeben.

```
tspan = [0 20] ;      %Zeitintervall
pl = 1;              %Pendellänge
g = 9.81;            %Gravitation
q0 = [0.5*pi ; 0];   %Anfangswerte [phi_0 ; omega_0]
% Integration des Anfangswertproblems
[t, q] = ode45(@(t,q) [q(2) ; -g/pl*sin(q(1))], tspan , q0);
```

Abbildung 3-4 stellt den Drehwinkel  $\varphi$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$  für das Beispiel des ebenen Pendels, gelöst mit den vorgestellten numerischen Integrationsverfahren Euler explizit und `ode43`, gegenüber.



**Abbildung 3-4: Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit des Fadenpendels für die Integrationsverfahren Euler explizit und `ode43` gelöst in `MATLAB` mit den oben angegebenen Eingabeskripten**

### 3.2 Diskrete Elemente Methode

Die Diskrete Elemente Methode (DEM) wurde erstmals 1979 von CUNDALL und STRACK [17] zur Lösung von geomechanischen Problemstellungen beschrieben. Sie gehört zu den *Lagrange'schen* Lösungsmethoden in der Mechanik. Dies bedeutet, dass der zeitabhängige Ort aller Körper explizit durch die Bewegungsgleichungen beschrieben wird (vergl. 3.1.3.1).

Die folgende Abbildung zeigt den Berechnungszyklus, der kontinuierlich bis zum Erreichen einer Abbruchbedingung (z.B. Simulationszeit oder Systemzustand) durchlaufen wird [66].

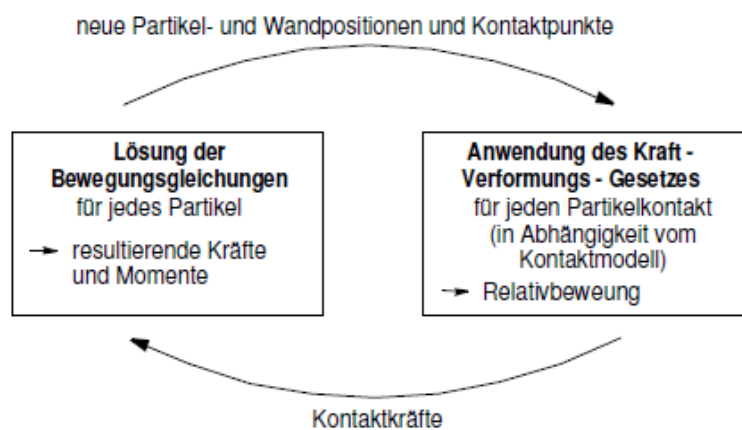


Abbildung 3-5: DEM Berechnungszyklus (nach [66])

Grundlage des Berechnungsverfahrens ist die Wechselwirkung zwischen einzelnen, diskreten Körpern (Diskontinuumsmechanik). Basierend auf einer Kontakterkennung und der darauf folgenden Anwendung der Kontaktkraftgesetze (z.B. Federkraft, Dämpfungskraft, Reibelement, Anziehungskräfte) werden die wirkenden Kräfte und Momente für jeden Körper bestimmt. Diese Kräfte und Momente werden addiert und die daraus resultierende Beschleunigung für jeden Körper berechnet. Durch zweifache Integration der Beschleunigung über einen kurzen Zeitschritt ergeben sich die neuen Position (Gl. (93)) und Orientierungen (Gl. (94)) jedes Körpers.

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \Rightarrow \int \ddot{x}_i dt = \dot{x}_i \Rightarrow \int \dot{x}_i dt = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (93)$$

$$J_i \dot{\omega}_i = M_i \Rightarrow \int \dot{\omega}_i dt = \omega \Rightarrow \int \omega_i dt = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (94)$$

Aus den neuen Positionen resultieren neue Kontakte zwischen den einzelnen Körpern, oder es werden bestehende Kontakte aufgelöst. Der Berechnungszyklus beginnt erneut mit der Kontakterkennung. Die einzelnen Verfahren zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen, der Kontakterkennung und den Kontaktkraftgesetzen in der DEM-Simulation werden im Folgenden dargestellt.



### 3.2.1 Integrationsverfahren

#### 3.2.1.1 Velocity Verlet Algorithmus

Die in dieser Arbeit verwendete DEM-Simulationssoftware LIGGGHTS® nutzt ein explizites Zeitintegrationsverfahren dritter Ordnung (vergl. 3.1.3.1). Das Verfahren erhält seinen Namen nach Loup Verlet, der es erstmals zur Molekulardynamiksimulation von Flüssigkeiten anwendete. Die Bewegungsgleichungen (Gl. (93) und Gl. (94)) werden durch zwei Taylorreihenentwicklungen nach dem Ort formuliert. Dabei wird eine Reihenentwicklung in Richtung des nächsten Iterationsschrittes und eine in Richtung des zurückliegenden Iterationsschrittes aufgestellt.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}b\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (95)$$

$$x(t - \Delta t) = x(t) - v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}b\Delta t^3 + O(\Delta t^4). \quad (96)$$

Durch Addition der Gl. (95) und Gl. (96) lässt sich die neue Position zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  durch Auflösen der Gl. (97):

$$x(t + \Delta t) = 2x(t) - x(t - \Delta t) + a(t)\Delta t^2, \quad (97)$$

mit 
$$x(t - \Delta t) = x(t) - v(t - \Delta t)\Delta t, \quad (98)$$

und 
$$v(t - \Delta t) = v(t) - \frac{1}{2}a(t)\Delta t, \quad (99)$$

eingesetzt in (97) 
$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2, \quad (100)$$

wobei 
$$a(t) = \frac{\mathbf{F}_i}{m}, \quad (101)$$

ausdrücken.

Die aktuelle translatorische Geschwindigkeit  $v(t + \Delta t)$  ergibt sich aus Gl. (102).

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m} \Delta t. \quad (102)$$

Die Drehgeschwindigkeiten und -winkel lassen sich nach einem ähnlichen Verfahren anhand des auf einen Körper wirkenden Moments und dessen Massenträgheit berechnen (Gl. (103) bis Gl. (105)).

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \omega(t)\Delta t, \quad (103)$$

$$\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{M}}{I} \Delta t. \quad (104)$$

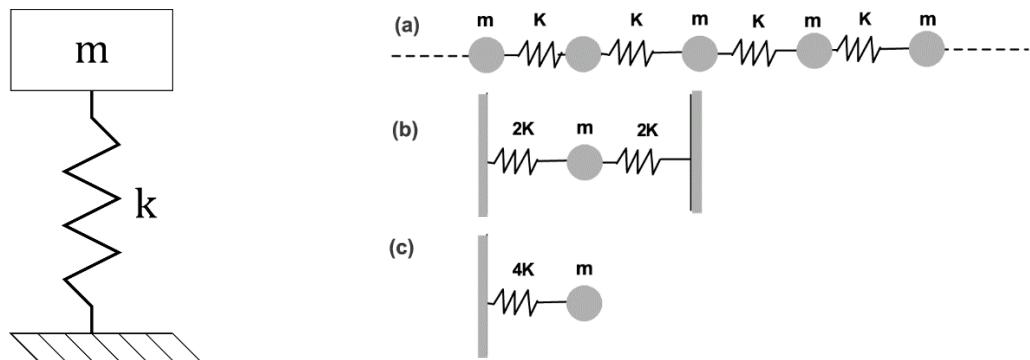
Für Kugeln gilt 
$$I = \frac{2}{5} mr^2. \quad (105)$$

Der schematisch bedingte lokale Fehler des Velocity-Verlet Algorithmus beträgt in jedem Integrationsschritt, ohne die Berücksichtigung numerischer Rundungsfehler,  $O(\Delta t^2)$  für die Geschwindigkeiten und  $O(\Delta t^4)$  für die Position. Da die DEM-Simulation im Allgemeinen eine

große Anzahl an Iterationen benötigt (vergl. 3.2.1.2), ist es nach GIBAUD [67] sinnvoller, den globalen Fehler für eine Bewertung der Stabilität des Integrationsverfahrens zu verwenden. Der globale Fehler wird definiert als die kumulierte Abweichung des Ergebnisses für alle Iterationsschritte von der exakten Lösung. Der globale Fehler des Velocity Verlet Algorithmus beträgt sowohl für die Geschwindigkeit als auch für die Position  $O(\Delta t^2)$  [67].

#### 3.2.1.2 Diskussion des kritischen Zeitschritts

Die Stabilität des in 3.2.1.1 vorgestellten Integrationsverfahrens hängt von der Wahl des kritischen Zeitschrittes  $\Delta t$  ab. Ist die Zeitschrittweite zu groß, können einzelne Körper andere Körper überspringen, ohne dass ein Kontakt zwischen den beiden Körpern aufgetreten wäre [67]. Der kritische Zeitschritt kann basierend auf der ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  eines idealen Feder-Masse-Systems (vergl. Abbildung 3-6 links) abgeschätzt werden.



**Abbildung 3-6:** Links: Einmassenschwinger mit der Masse  $m$  und der Steifigkeit  $k$ , Rechts: Serienschaltung von Punktmassen und Federsteifigkeiten als Modellvorstellung zur Bestimmung des kritischen Zeitschritts (entnommen aus [68])

Die Schwingungsdauer  $T$  eines freien Massenschwingers mit einem Freiheitsgrad und der Masse  $m$  sowie der effektiven Federsteifigkeit  $k_{eff}$ , lässt sich durch Gl. (107) bestimmen [68].

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}, \quad (106)$$

umgestellt nach  $T$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{eff}}}. \quad (107)$$

Typischerweise wird in erster Näherung ein Hundertstel der Eigenkreisperiodendauer als maximale Zeitschrittweite verwendet, da Wechselwirkungen zwischen einzelnen Partikeln gleichzeitig auftreten und das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems durch das Entstehen neuer Kontakte und das Lösen bestehender Kontakte in schneller Folge stark beeinflusst wird [67].

Eine andere Vorgehensweise zur Bestimmung des kritischen Zeitschrittes ist es, alle Kontakte zwischen den massebehafteten Körpern als Serienschaltung von Punktmassen und Federn zu betrachten (vergl. Abbildung 3-6 rechts). Der kritische Zeitschritt ergibt sich nach [68] zu

$$\Delta t_{krit}^{PFC} = 2 \sqrt{\frac{m}{4K}} = \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (108)$$

Der Hersteller Itasca der DEM-Simulationssoftware PFC3D empfiehlt einen Sicherheitsfaktor von 0,8 zu dem so ermittelten kritischen Zeitschritt zu multiplizieren [66].

Ein kleiner kritischer Zeitschritt beeinflusst die Berechnungsdauer der DEM-Simulation negativ, da die Anzahl der Iterationen, die notwendig sind einen bestimmten Systemzustand oder eine bestimmte Gesamtsimulationszeit zu erreichen, umgekehrt proportional zur gewählten Zeitschrittweite ist. Aus diesem Grund werden häufig die Materialeigenschaften angepasst, um einen größeren Zeitschritt zu ermöglichen [69].

Zur Erhöhung des kritischen Zeitschrittes kann einerseits in der Anwendung der DEM-Simulation für quasi-statische Problemstellungen in der Geomechanik die Feststoffdichte oder das Volumen - und damit die Masse - der Einzelpartikel erhöht werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Systemverhalten nicht von den Massenträgheiten und dementsprechend nicht durch die Beschleunigungen der einzelnen Körper beeinflusst wird. Für die Anwendung der DEM-Simulation auf die in dieser Arbeit betrachteten Fragestellungen aus der Schüttgutfördertechnik ist dies nicht empfohlen, da aufgrund der Bewegung des Schüttgutes das dynamische Verhalten beachtet werden muss [68].

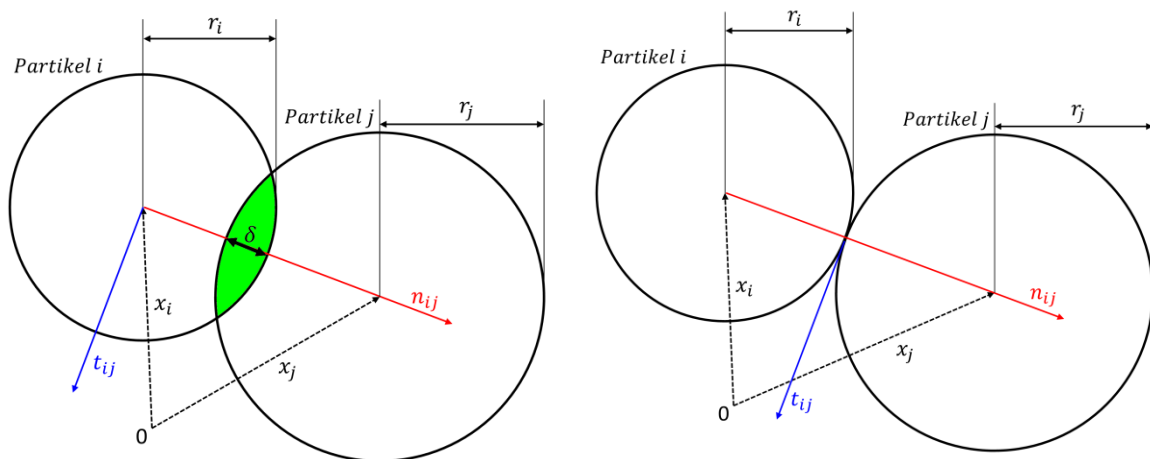
Andererseits lassen sich durch reduzierte Steifigkeiten größere Zeitschrittweiten erreichen. Nach GRÖGER UND KATTERFELD [70] sowie LOMMEN ET AL. [69] können durch eine Reduzierung des Elastizitätsmoduls um den Faktor 100 und mehr auch Systeme mit vielen Einzelpartikeln, die eine geringe Partikelgröße aufweisen, in vertretbarer Simulationszeit berechnet werden [70]. GRÖGER UND KATTERFELD empfehlen die Steifigkeit so hoch zu wählen, wie es die zur Verfügung stehende Berechnungszeit erlaubt [70]. LOMMEN zeigt, dass das Simulationsergebnis eines Böschungswinkel-Versuchs ab einer unteren Grenze des Schermoduls von  $1 \cdot 10^7 N/m^2$  nicht durch eine weitere Erhöhung der Steifigkeit verändert wird [69]. Das Ändern der physikalischen Materialeigenschaften führt per Definition zu einem veränderten Systemverhalten in der Simulation, da die Ähnlichkeit zwischen dem realen System und dem simulierten System von vornherein nicht gegeben ist [67]. Die weiteren materialabhängigen Kontakteigenschaften müssen aus diesem Grund anhand geeigneter Versuche und entsprechenden DEM-Simulationen kalibriert werden, um das reale Fließverhalten des untersuchten Schüttgutes und reale Reaktionskräfte auf das untersuchte System abbilden zu können (vergl. 4.4.3.1).

### 3.2.2 Kontakterkennung

Für kugelförmige Partikel besteht ein Kontakt in der DEM-Simulation, wenn der Betrag des Vektors zwischen den Mittelpunkten der modellierten Partikel kleiner oder gleich der Summe der Radien beider Partikel ist (vergl. Abbildung 3-7 links). Die Überlappung

$$\delta = R_i + R_j - |x_i - x_j|, \quad (109)$$

stellt die mathematische Beschreibung dieser Kontaktbedingung dar. Das in dem in dieser Arbeit verwendeten DEM-Simulationsprogramm LIGGGHTS® implementierte Kontaktmodell wird auch als weicher Kontakt bezeichnet. Demgegenüber wird der Kontakt zweier Partikel im unelastischen, harten Kontakt, so angenommen, dass der aus dem Stoß resultierende Impuls ereignisdiskret, d.h. zu dem Zeitpunkt in dem die Radien der Partikel sich berühren, aufgelöst wird (vergl. Abbildung 3-7 rechts).



**Abbildung 3-7: Modellierung des Partikelkontakts für das elastische Soft-Contact DEM-Modell (links) und das unelastische Hard-Contact-Modell (rechts), mit  $x_{i,j}$ =Ortsvektor der Kugelmittelpunkte,  $r_{i,j}$ =Partikelradius,  $\delta$ =Länge der Überlappung,  $n$ =Normalenrichtung des Kontakts und  $t$ =tangentielle Richtung des Kontakts, zweidimensionale Darstellung (nach [71])**

Die Rechenzeit der DEM-Simulation steigt mit größer werdender Partikelanzahl aufgrund der rechenintensiven Kontakterkennung für jeden Einzelpartikel und der Anzahl der zu lösenden Bewegungsgleichungen an. Üblich sind Simulationslaufzeiten von wenigen Stunden für kleine Partikelsysteme mit wenigen zehntausend Partikeln, bis mehreren Wochen für die Simulation großer Partikelsysteme mit bis zu mehreren Millionen Einzelpartikeln. In einem System mit  $n$  Partikeln würde die Komplexität<sup>5</sup>  $O(n^2)$  betragen, wenn der Kontakterkennungsalgorithmus jedes Partikel auf Kontakte mit allen anderen Partikeln im System prüfen würde [72]. Daher werden in der DEM-Simulation Algorithmen mit geringerer Rechenkomplexität verwendet. Diese Methoden sortieren zunächst die Kontakte aus, welche für den aktuell betrachteten Partikel nicht möglich sind.

<sup>5</sup> Die O-Notation ist ein Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung der Laufzeit eines Algorithmus

Die Vorsortierung erfolgt beispielsweise basierend auf einer maximalen Distanz, in der sich Nachbarschaftspartikel befinden können, wenn sie mit dem betrachteten Partikel physisch in Kontakt stehen sollen. Für die verbleibenden Kontakte zwischen dem betrachteten Partikel und allen möglichen Nachbarpartikeln wird anschließend das Kraft-Verformungs-Gesetz (vergl. Absatz 3.2.3) angewendet. Die Algorithmen zur Vorsortierung der möglichen und nicht möglichen Kontaktpartner basieren auf zellenbasierten Methoden (vergl. Abbildung 3-8 links) und auf Methoden, welche strukturierte Daten (z.B. Verlet-Listen) verwenden (Abbildung 3-8 rechts). Eine Kombination beider Methoden wird in der in dieser Arbeit verwendeten DEM-Simulationssoftware `LIGGGHTS` für die Kontakterkennung eingesetzt.

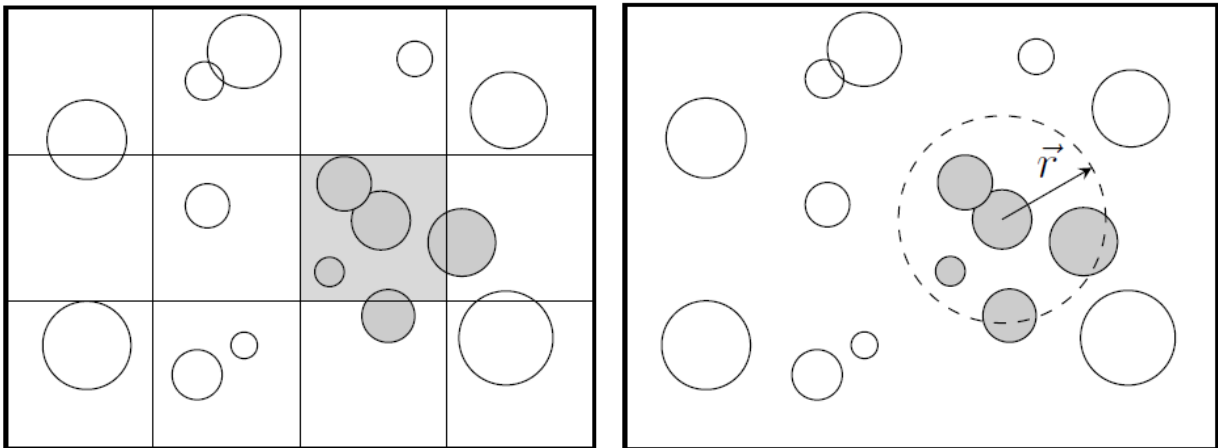


Abbildung 3-8: Zellenbasierte Methode (links) und Verlet-Listen Methode (rechts) zur Vorsortierung der Nachbarpartikel (entnommen aus [73])

### 3.2.3 Kontaktkraftgesetze in der DEM-Simulation

Die DEM stellt zahlreiche Kontaktkraftmodelle zur Berechnung der notwendigen Reaktionskräfte und Momente unterschiedlicher Kontakteigenschaften zur Verfügung. Die Arbeiten von LUDING [74], [75], AI [76] und MORRISSEY [77] geben einen detaillierten Überblick über die zugrunde liegenden Mechanismen. In dieser Arbeit wird das Kontaktkraftmodell nach HERTZ-MINDLIN-DERESIEWICZ [78], [79], [80] verwendet. Dieses Modell berechnet die Reaktionskraft aus der Überlappung zweier Partikel anhand eines nichtlinearen Federkraftgesetzes (vergl. Abbildung 3-9).

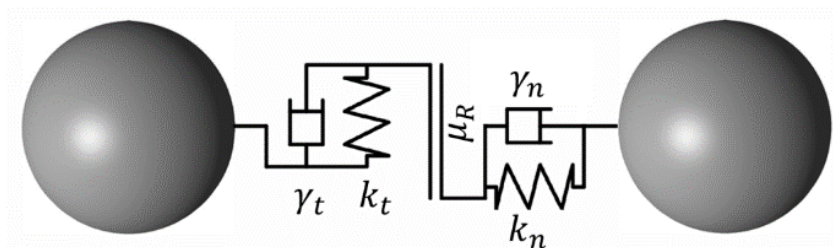


Abbildung 3-9: elastisches Kontaktkraftgesetz zweier Partikel mit viskoser Dämpfung, links Scherkraft in tangentialer Richtung mit Reibelement, rechts Normalkraftanteil (nach [22])

### 3.2.3.1 Normal- und Tangentialkraftmodell

Zur mathematischen Beschreibung der Reaktionskraft aus der Überlappung zweier Partikel im Kontakt werden die resultierenden Kräfte in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung vektoriell addiert (Gl.(110)) [81].

$$F = F_n + F_t. \quad (110)$$

Der elastische Anteil der Normalkraft wird aus der Federsteifigkeit  $k_n$  und der Überlappung  $\delta_n$  in Normalenrichtung zwischen den Mittelpunkten der Einzelpartikel berechnet. Der Anteil der Dämpfungskomponente in Normalenrichtung wird aus dem Produkt der viskoelastischen Dämpfungskonstante  $\gamma_n$  und der Relativgeschwindigkeit  $v_n$  beider Partikel berechnet (Gl. (111)).

$$F_n = k_n \delta_n - \gamma_n v_n. \quad (111)$$

Der elastische Anteil der Kontaktkraft in tangentialer Richtung (auch als Scherkraft bezeichnet) wird inkrementell aus der Änderung des Scherweges  $\Delta\delta_t$  bezüglich des letzten Iterationsschrittes multipliziert mit der Federsteifigkeit  $k_t$  und der aus dem vorherigen Iterationsschritt bekannten Tangentialkraft  $F_t^{hist}$  berechnet (Gl. (112)). Die Scherdämpfung berechnet sich analog aus der Änderung der Geschwindigkeit in tangentialer Richtung  $\Delta v_t$  und der Dämpfungskonstante  $\gamma_t$ .

$$F_t = F_t^{hist} + \Delta F_t, \text{ mit } \Delta F_t = k_t \Delta\delta_t - \gamma_t \Delta v_t. \quad (112)$$

Die maximale Scherkontaktkraft in tangentialer Bewegungsrichtung wird im Fall des Gleitens durch das Verhältnis

$$F_t^{max} \leq \mu |F_n|, \quad (113)$$

limitiert.

Die Steifigkeiten der Federelemente berechnen sich bei dem in dieser Arbeit verwendeten nichtlinearen HERTZ-MINDLIN Kontaktmodell in Abhängigkeit des effektiven Elastizitätsmoduls  $Y^*$ , des effektiven Schubmodules  $G^*$ , des effektiven Radius  $R^*$  der beiden in Kontakt stehenden Partikel  $i$  und  $j$ , sowie der Überlappung  $\delta$  in normalen bzw. tangentialer Richtung.

$$k_n = \frac{4}{3} Y^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad k_t = 8 G^* \sqrt{R^* \delta_t}. \quad (114)$$

mit

$$R^* = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}. \quad (115)$$

Das effektive Elastizitätsmodul  $Y^*$  und das effektive Schubmodul  $G^*$  berechnen sich aus den Materialeigenschaften Elastizitätsmodul  $Y$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  der Partikel zu:

$$\frac{1}{Y^*} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{Y_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{Y_2}, \quad (116)$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2(2 - \nu_1)(1 + \nu_1)}{Y_1} + \frac{2(2 - \nu_2)(1 + \nu_2)}{Y_2}. \quad (117)$$

Die Normal- und Scherdämpfungskoeffizienten berechnen sich aus dem Produkt des kritischen Dämpfungsmaßes  $\gamma^{krit} = 2\sqrt{km}$  und dem vom Restitutionskoeffizienten  $c$  abhängigen Dämpfungsverhältnis  $\beta = f(c)$ .

$$\gamma_n = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_n m^*}, \quad \gamma_t = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_t m^*}. \quad (118)$$

$$S_n = 2Y^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad S_t = k_t = 8G^* \sqrt{R^* \delta_t}. \quad (119)$$

$$m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}. \quad (120)$$

$$\beta = \frac{\ln(c)}{\sqrt{\ln^2(c) + \pi^2}}. \quad (121)$$

$$\text{mit } c = \sqrt{\frac{h'_1}{h_1}} = \sqrt{\frac{\text{Höhe nach dem Stoß}}{\text{Höhe vor dem Stoß}}}. \quad (122)$$

Um Anziehungskräfte zwischen Partikeln in die DEM-Simulation einzubeziehen, können weitere Kontaktkraftelemente verwendet werden. Ein einfaches Kohäsionskraftmodell ist das sogenannte „simplified Johnson-Kendall-Roberts (SJKR)“ Modell. Es stellt ein von den Quelltextverantwortlichen von LIGGGHTS® stark vereinfachtes Modell des von JOHNSON ET AL. in [82] veröffentlichten Modells dar. Die Anziehungskraft  $F_{coh}$  wird proportional zu der Überlappungsfläche  $A_{Kontakt}$  der sich kontaktierenden Partikel nach Gl. (123) berechnet.

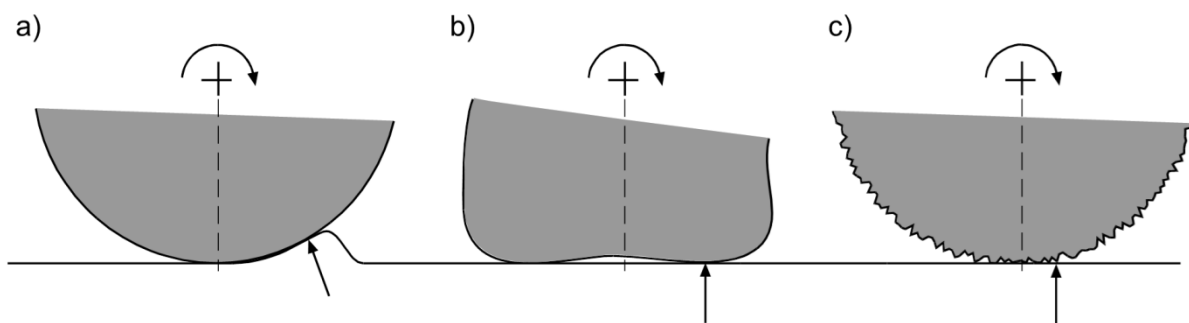
$$F_{Koh} = K \cdot A_{Kontakt}, \quad (123)$$

$$\text{mit } A_{Kontakt} = 2\pi\delta_n(2R^*). \quad (124)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $K$  wird als „Cohesion-Energy-Density“ bezeichnet und muss durch Vergleich des empirisch ermittelten Schüttgutverhaltens eines Kalibrierungsexperimentes mit dem sich in der Simulation für eine analog durchgeführte Kalibrierungssimulationsreihe ergebenden Schüttgutverhaltens ermittelt werden [83].

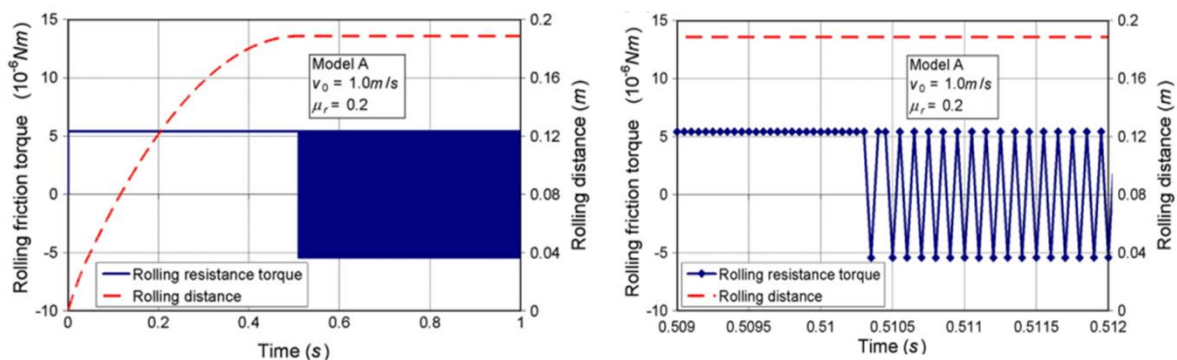
#### 3.2.3.2 Rollreibungsmodelle

In den meisten derzeit durchgeführten DEM-Simulationen werden kugelförmige Partikel verwendet, da diese im Vergleich zu nicht-kugelförmigen Körpern eine sehr einfache und damit im Sinne des Rechenaufwandes günstige Kontaktdetektion und Kontaktkraftberechnung ermöglichen. Für die Anwendung auf das reale Fließverhalten von Schüttgütern ist die Verwendung eines Rollreibmodells notwendig, da die kugelförmigen Partikel sich ansonsten ohne einen entsprechenden Rollwiderstand bewegen würden [84]. Es wird daher ein Rollreibungsmoment eingeführt, welches der Drehbewegung entgegen wirkt. Dieses zusätzliche Moment resultiert aus dem Versatz der Kontaktkraft zum Mittelpunkt des Partikels. Mögliche Ursachen für den Versatz des Kraftangriffspunktes sind in Abbildung 3-10 dargestellt.



**Abbildung 3-10: Beispiele für den Versatz zwischen dem Angriffspunkt der Kontaktkraft und dem Mittelpunkt des Partikels, a) Durch Rollen hervorgerufene Deformation des Kontaktpartners, b) Aufgrund der Partikelform, c) Durch die Oberflächenrauigkeit des Partikels (entnommen aus [84])**

Für die Berechnung der Rollreibung existieren verschiedene Modelle, die nach IWASHITA UND ODA [85] und AI ET AL. [76] nach Typ A,B,C und D unterteilt werden können. Für Schüttgüter hat sich im Allgemeinen das „Typ C“ oder auch „elastic-plastic spring-dashpot (epsd)“ Modell etabliert. In Abbildung 3-11 wird dargestellt, dass „Typ A“ Rollreibungsmodelle nach der Bewegungsphase des Rollens ( $t > 0,072$  s) eine ungedämpfte Schwingung des Moments verursachen. Dieses resultiert in einem unendlich andauernden, infinitesimal kleinen vorwärts und rückwärts Rollen des Partikels und entspricht nicht dem physikalischen Verhalten realer Schüttgüter.



**Abbildung 3-11: Physikalisches Verhalten des Rollreibungsmodell „Typ A“ nach AI et al., linke Achse: Rollreibungmoment in Nm, rechte Achse: zurückgelegte Strecke in m (entnommen aus [76])**



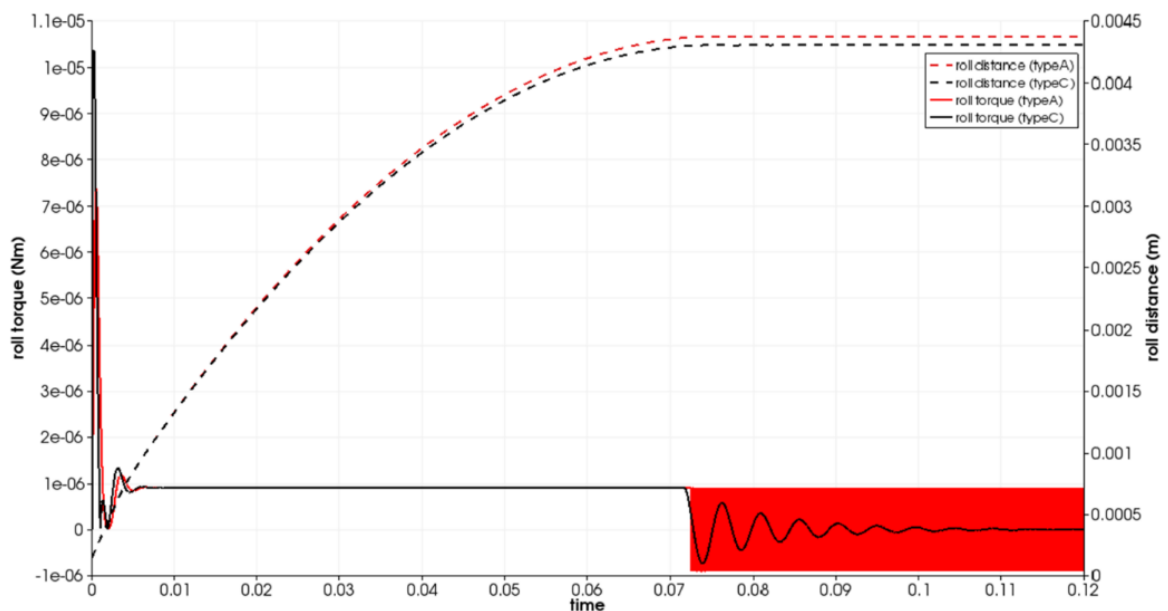
Rollreibmodelle nach „Typ D“ sind nach RAHMAN ET AL. per Definition unphysikalisch, da sie für einen Kontakt zwischen zwei Kontaktpartnern zwei unterschiedliche Rollreibungsmomente berechnen und somit gegen die Grundgesetze der Mechanik verstoßen [84]. Nur mit einem Rollreibmodell „Typ C“ ist ein realistisches Schüttgutverhalten in der Simulation möglich.

Zur Berechnung des „Typ C“ Rollreibungswiderstand-Moments wird nach WENSRICH ET AL. [86] ein der Drehbewegung entgegen gesetztes Moment  $M_r$  inkrementell aus der tangentialen Steifigkeit  $k_t$  multipliziert mit dem Quadrat des effektiven Partikelradius  $R^*$  und der relativen Winkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_{rel}$  in der DEM-Simulation verwendet (Gl. (125) und (126)).

$$M_{r,t+\Delta t} = \begin{cases} M_{r,t} - k_r \tilde{\omega}_{rel} \Delta t & \text{falls } |M_{r,t} - k_r \tilde{\omega}_{rel} \Delta t| < \mu R |F_N|, \\ \mu R |F_N| \frac{M_{r,t} - k_r \tilde{\omega}_{rel} \Delta t}{|M_{r,t} - k_r \tilde{\omega}_{rel} \Delta t|} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (125)$$

$$\text{mit } k_r = R^{*2} k_t. \quad (126)$$

Durch diese Definition der Drehsteifigkeit  $k_r$  in Abhängigkeit der tangentialen Steifigkeit  $k_t$ , welche ihrerseits von der Überlappung  $\delta_t$  abhängt (siehe Gl. (114)), ist eine explizite Einbeziehung einer Dämpfungskonstante in die Berechnung nicht notwendig, da das Rollreibungswiderstandsmoment  $M_r$  für abnehmende tangential Überlappungen gegen Null konvergiert (vergl. Abbildung 3-12).



**Abbildung 3-12:** Vergleich der in LIGGGHTS implementierten Rollreibungsmodelle CDT (entspricht Typ A) (in rot) und EPD2 (entspricht Typ C) (in schwarz) im Einzelpartikelkontakt zwischen einem Partikel und einer Ebene, linke Achse: Rollreibungsmoment in Nm, rechte Achse: zurück gelegte Strecke des Partikels

Das hier vorgestellte „elastic-plastic spring-dashpot“ Rollreibungsmodell wurde für diese Arbeit in das verwendete DEM-Simulationsprogramm LIGGGHTS® implementiert und später von den Quelltextverantwortlichen als sogenanntes epsd2 Rollreibmodell übernommen.

### 3.2.4 Simulation komplexer Körper in der DEM

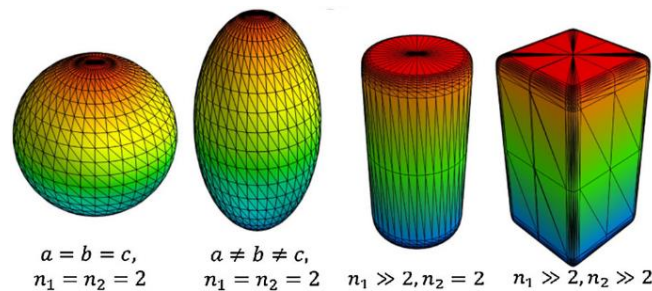
Um unregelmäßige Körperformen in der DEM zu berücksichtigen, können verschiedene nicht kugelförmige Körper verwendet werden. Es ist möglich Ellipsoide oder Superquadrics [87], [88], [89] zu verwenden. Mit diesen einfach geometrisch beschreibbaren Körpern lassen sich jedoch nicht alle gewünschten Formen abbilden. Des Weiteren steigt der Rechenaufwand für die Kontaktdetektion mit steigender Formkomplexität stark an. Aus diesem Grund hat sich die Multisphere-Methode, auch Clumps genannt, etabliert [90–95]. Die beiden Modellierungsansätze werden in den folgenden Unterkapiteln vorgestellt.

#### 3.2.4.1 Superquadrics

Superquadrics (SQ) sind eine Erweiterung der mathematischen Beschreibung von Kugeln und Ellipsoiden [88]. Sie werden erstmals 1981 von Barr analytisch beschrieben [96]. Die Geometrie der Oberfläche eines SQ in kartesischen Koordinaten wird durch Gl. (130) angegeben.

$$f(x, y, z) = \left( \left| \frac{x}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{y}{b} \right|^{n_2} \right)^{\frac{n_1}{n_2}} + \left| \frac{z}{c} \right|^{n_1} - 1 = 0. \quad (127)$$

Die SQ-Parameter  $a, b$  und  $c$  repräsentieren die halbe Länge der beschriebenen Körper entlang ihrer entsprechenden Hauptachsen. Die Exponenten  $n_1$  und  $n_2$  werden als Blockiness-Parameter bezeichnet und beschreiben die Rundheit der Körperkanten. Abbildung 3-13 stellt Superquadrics verschiedener Hauptachsenlängen und Blockiness-Parameter dar.



**Abbildung 3-13: Superquadrics Repräsentation für unterschiedliche Hauptachsenlängen und Blockiness-Parameter (entnommen aus [88])**

Die Beschreibung des Algorithmus zur Detektion des Kontakts zwischen zwei SQ und der entsprechenden Kontaktkraftbehandlung kann [88] entnommen werden. Dieser Algorithmus setzt das Lösen einer nichtlinearen Gleichung mittels Newton-Verfahren zu jedem Iterationsschritt in der DEM-Simulation voraus. Die Konvergenz des Algorithmus ist dabei abhängig von den Blockiness-Parametern und führt für große Blockiness-Werte zu einem hohen Rechenaufwand [97]. Aus diesem Grund konnten Superquadrics nicht wie geplant für die gekoppelte DEM-MK-Simulation des Entleerungsverhaltens von Gurtbecherwerker mit dem

Schüttgut Weizen angewendet werden, obwohl die Partikelform der Weizenkörner mit SQ sehr gut approximiert werden kann.

#### 3.2.4.2 Multispheres

Multispheres (MS) ermöglichen es, Kugeln zu Konglomeraten zusammenzufassen und beliebig geformte Festkörper zu approximieren. Abbildung 3-14 stellt den Aufbau eines MS zur Abbildung eines komplexen Körpers dar.



**Abbildung 3-14: Approximation komplexer Formen durch Multispheres (entnommen aus [93])**

Die Kontakterkennung und Kontaktkraftberechnung erfolgt analog der in Absatz 3.2.1 und 3.2.3 vorgestellten Prinzipien der DEM-Simulation für kugelförmige Körper für jedes Einzelpartikel des entsprechenden MS. Die Summe der Kräfte aus den Einzelpartikelkontakten wird auf den Massenschwerpunkt des MS zusammengefasst (Gl. (131)). Entsprechend der Länge des Vektors zwischen dem Massenmittelpunkt eines MS und den einzelnen Kontaktpunkten der MS untereinander bzw. eines MS zu einem Wandelement ergibt sich ein Moment um den Drehpunkt des MS (Gl. (129)). Durch zweifache numerische Integration der Kräfte und Momente, welche auf den Massenmittelpunkt wirken, ergeben sich für jeden Iterationsschritt in der DEM-Simulation die neuen Geschwindigkeiten, Positionen und Orientierungen der einzelnen MS.

$$F_{COM} = \sum F_{Kontakt,i,j}, \quad (128)$$

$$M_{COM} = \sum F_{Kontakt,i,j} \times r_{COM,X_C}. \quad (129)$$

Die für die Berechnung der Beschleunigung aus der Summe der Kräfte notwendige Masse des MS wird basierend auf dem Volumen der Einzelpartikel, abzüglich des Überlappungsvolumens aller Einzelpartikel des MS, multipliziert mit der Feststoffdichte bestimmt. Für die Berechnung des MS-Volumens wird in der in dieser Arbeit verwendeten DEM-Simulationssoftware LIGGGHTS® der Monte-Carlo Integrationsalgorithmus verwendet. Dabei wird stochastisch für eine hohe Zahl von Versuchen geprüft, ob ein beliebiger Punkt innerhalb oder außerhalb des Gesamtvolumens des MS liegt. Aus dem Verhältnis der Anzahl der Punkte innerhalb des Körpers und außerhalb des Körpers bezogen auf das bekannte umhüllende Volumen wird das Volumen des MS berechnet. Für die in dieser Arbeit durchgeführte Analyse des Entleerungsverhaltens von Senkrechtbecherwerken mit dem Schüttgut Weizen wird die Modellierung mit Hilfe von Multispheres angewendet.

## 4 Methode der gekoppelten Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulation

### 4.1 Modellierung von Partikelsystemen mit LIGGGHTS®

Die Implementierung der gekoppelten Diskrete Elemente und Mehrkörpersimulationsmethode erfolgt in der opensource DEM-Software LIGGGHTS® [98], [99]. Der Name ist ein Akronym für „LAMMPS improved for general granular and granular heat transfer simulations“ und weist auf die durchgeführte Erweiterung des opensource Code LAMMPS<sup>6</sup> zur Anwendung auf partikelmechanische Fragestellungen hin. LIGGGHTS® wird seit 2009 von einer Gruppe von Wissenschaftlern der JKU Linz, der DCS Computing GmbH und der CFDEMResearch GmbH stetig weiter entwickelt und Anwendern kostenfrei als Quelltext zur Verfügung gestellt. Die Software ist in der weit verbreiteten Programmiersprache C++ geschrieben. Sie lässt sich aufgrund der objektorientierten Struktur leicht durch Überladen und Hinzufügen eigener Methoden erweitern.

LIGGGHTS® bietet aktuell in der Standard (auch PUBLIC genannten) Version eine Vielzahl von Basisfunktionen. Es existieren aktuell 9 unterschiedliche Kontaktmodelle, 4 Tangentialkraftmodelle, 5 Kohäsionsmodelle, 6 Rollreibmodelle und 3 Wandkontaktmodelle (Tabelle 4-1). Dies ergibt theoretisch 3240 Kombinationsmöglichkeiten, welche jedoch nicht alle sinnvoll erscheinen. Die Arbeit von MORRISSEY [77] gibt einen sehr guten Überblick, über die Funktionsweise der einzelnen physikalischen Modelle.

Tabelle 4-1: verfügbare Kontaktkraftmodelle in LIGGGHTS® nach [81]

Normalkraftmodelle	Tangentialkraftmodelle	Kohäsionsmodelle	Rollreibmodelle	Wandkontaktmodelle
HOOKE	OFF	OFF	OFF	DEFAULT
HOOKE/HYSTERESIS	HISTORY	SJKR	CDT	SUPERQUADRIC
HOOKE/STIFFNESS	NO_HISTORY	SJKR2	EPSD	MULTICONTACT
HERTZ	LUDING	WASHINO	EPSD2	
HERTZ/STIFFNESS		EASO	EPSD3	
LUDING			LUDING	
EDINBURGH				
EDINBURGH/STIFFNESS				
THORNTON AND NING				

<sup>6</sup> Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator

Das DEM-Programm LIGGGHTS® basiert auf einer Multiprozessor-Implementierung. Die Rechenleistung kann daher passend zur Problemstellung skaliert werden [100]. Systeme mit mehreren Millionen Partikeln konnten mit LIGGGHTS® bereits problemlos realisiert werden. Somit können große Mengen verhältnismäßig feinen Schüttgutes in der Simulation abgebildet werden.

Eine wesentliche Erweiterung der DEM Simulationssoftware LIGGGHTS®, in Bezug zu LAMMPS, ist die Möglichkeit, beliebige Geometrien als Wandkontaktpartner für die Partikel, welche das Schüttgut repräsentieren, zu verwenden. Die Geometrien werden in Form von STL<sup>7</sup> Dateien als tesselierte Dreiecksflächen in den Simulationsraum geladen. Mit Hilfe sogenannter `Fixes` [81] lassen sich die Wände im Simulationsraum manipulieren. Neben translatorischen und drehenden Bewegungen, die auch durch Superposition überlagert werden können, existieren spezielle Bewegungsbefehle für periodische Schwingungen und kraftgeregelte Bewegungen (sog. Servo-Walls) [81]. Durch Erweiterung der vorhandenen Bewegungsbefehle ist es möglich, die Ergebnisse einer externen Lösung von Bewegungsgleichungen eines Starrkörpersystems direkt in der DEM-Simulation zu nutzen. Dies ist notwendig, da die DEM-Simulation mit LIGGGHTS® keine Zwangsbedingungen, welche aus Koppellementen und Lagerungen resultieren, für die verwendeten Geometrien lösen kann.

### 4.2 Modellierung von Mehrkörpersystemen

Zur Modellierung des Bewegungsverhaltens realer Anlagen und Maschinen wird die Methode der Mehrkörpersimulation verwendet. Es existiert eine Vielzahl kommerzieller als auch frei verfügbarer Programme, die diese Aufgabe erfüllen.

Vertreter dieser Art Softwareprogramme sind unter anderem `Matlab Simulink` (Mathworks), `Adams` (MSC Software), `Dymola` (Dassault Systèmes), `SimulationX` (ITI), `LMS AMESim` (Siemens) oder `OpenModelica` (Modelica Association). All diesen Werkzeugen ist gemeinsam, dass sie sich der standardisierten `Modelica`® Sprache zur Beschreibung des modellierten Systems bedienen [101].

Die Modellierung der Mehrkörpersysteme kann dabei auf drei Arten erfolgen. Zum einen ist es möglich, vordefinierte Funktionsblöcke aus einer umfangreichen Bibliothek aus den Domänen Mechanik, Elektrotechnik, Hydraulik, Pneumatik, Regelungstechnik, Wärmeübertragung,

---

<sup>7</sup> *STereoLithography, Standard Tessellation Language*

Magnetismus und Logik miteinander zu verbinden. Die Abbildung 4-1 stellt diese Möglichkeit am Beispiel der Modellierung eines gedämpften, ebenen Pendels in OpenModelica dar.

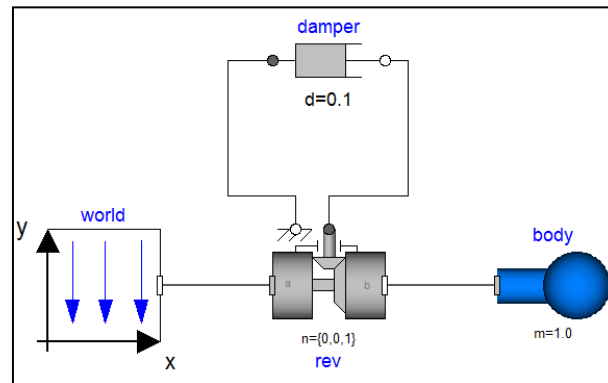


Abbildung 4-1: Modellierung eines ebenen, gedämpften Pendels durch Funktionsblöcke in OpenModelica; links: Bezugssystem mit Gravitationsfeld in negative y-Richtung; mittig: Lagerung mit einem Freiheitsgrad der Rotation um die z-Achse und angekoppeltem Dämpfungselement mit der Dämpfungskonstante  $d=0,1$ ; rechts: massebehafteter Körper, dargestellt als Punktmasse mit  $m=1,0\text{kg}$ , die Pendellänge ist durch eine Verschiebung des Schwerpunkts des Körpers um  $r_{COM} = [1, 0, 0]^T\text{m}$  gegenüber dem Drehgelenk modelliert

Eine weitere Möglichkeit ist die direkte Angabe von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen, die zur Simulationslaufzeit numerisch gelöst werden (Abbildung 4-2). Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, da nur voll bestimmte Systeme numerisch gelöst werden können.

```

model pendel
  Real x(start = -1);
  Real z(start = 0);
  Real dot_x(start = 0);
  Real dot_z(start = 0);
  Real lambda;
  Real ex;
  Real ez;
  Real hz;
  parameter Real m = 1;
  parameter Real g = -9.81;
  parameter Real r = 1;
  parameter Real d = 0.2;
  parameter Real fz = 0;
  parameter Real fx = 0;
equation
  hz = g * m;
  ex = x / r;
  ez = z / r;
  der(dot_x) * m = lambda * ex + fx - d * dot_x;
  der(dot_z) * m = lambda * ez + m * g + fz - d * dot_z;
  der(x) = dot_x;
  der(z) = dot_z;
  x ^ 2 + z ^ 2 = r ^ 2;
end pendel;

```

Abbildung 4-2: Modellierung durch Angabe von Differentialgleichungssystemen in OpenModelica

Die Dritte Art der Modellierung ist die Angabe von diskreten Algorithmen, beispielsweise von Zustandsänderungen zu festgelegten, diskreten Ereignissen oder Zeitpunkten in Form von Bedingungen (vergl. Abbildung 4-3). In der Praxis kommt meist eine Kombination aller drei Modellierungsmöglichkeiten zum Einsatz.

```

model bouncing_ball
parameter Real e=0.8; //Restitutionskoeffizient
parameter Real h0=1.0; //Anfangshöhe
Real h; //aktuelle Höhe
Real v; //aktuelle Geschwindigkeit
initial equation
  h = h0;
equation
  v = der(h); //v=dx/dt
  der(v) = -9.81; //Gravitation, v=Integral(a)dt
algorithm
  when h<=0 then //Ereignis: Partikel trifft Boden
    reinit(v, -e*pre(v)); //Harter Kontakt: v_neu=-1*e*v_vorher
  end when;
end bouncing_ball;

```

Abbildung 4-3: Modellierung eines Bouncing-Ball Beispiels durch Angabe von diskreten Algorithmen

### 4.3 Konzept der Kopplungsschnittstelle

Für die programm-basierte Kopplung der DEM und der Mehrkörpersimulation wird in dieser Arbeit das standardisierte *Functional Mockup Interface* (FMI) verwendet. Dieser Standard wurde auf Bestreben der Daimler AG im Rahmen des MODELISAR<sup>8</sup> Projektes (2008-2011) in Zusammenarbeit von 29 Partnern entwickelt. Ziel war es, eine Plattform- und Simulationsprogramm unabhängige Methode zum Modellaustausch der Hersteller und ihren verschiedenen Lieferanten zu entwickeln [102].

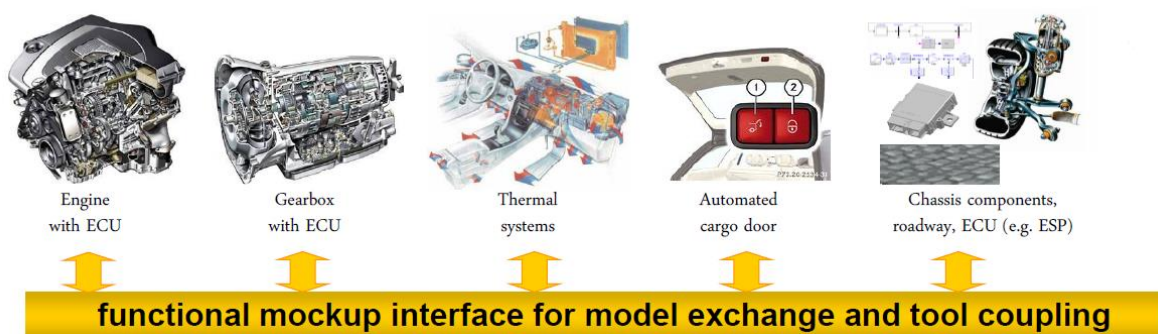
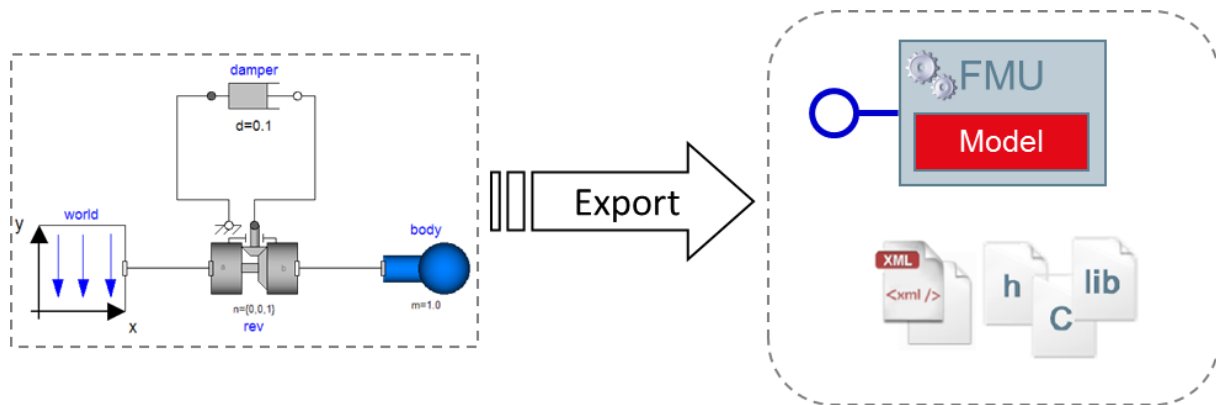


Abbildung 4-4: Verbesserung des Modellaustausch zwischen Hersteller und Lieferanten mit FMI (entnommen aus [102])

Für den Export der sogenannten *Functional Mockup Unit* (FMU) aus dem Modellierungsprogramm wird das zuvor erstellte Mehrkörpermodell kompiliert und als

<sup>8</sup> <http://www.functional-mockup-interface.org>

dynamische Bibliothek zusammen mit einer XML-Modellbeschreibung in einem Archivformat verpackt (vergl. Abbildung 4-5).



**Abbildung 4-5: Modellexport aus der Modellierung in eine FMU; der blaue Kreis im rechten Teil des Bildes repräsentiert das FMI**

Die FMU verfügt über eine standardisierte Schnittstelle zur Kommunikation mit anderen Simulationsprogrammen, das Functional Mockup Interface (FMI). Die FMI-Schnittstelle enthält nach NOLL, BLOCHWITZ ET AL. [103]:

- Funktionen zur Instanziierung, Initialisierung, Beendigung und der Speicherfreigabe,
- Schnittstellen für Modelleingänge, -ausgänge und -parameter für die Datentypen `Real`, `Integer`, `Boolean` und `String`,
- Set- und Get-Funktionen für jeden dieser Datentypen z.B. `fmiSetReal`,
- Funktionen zum Austausch von Simulationsergebnissen, z.B. `fmiGetDerivatives`.

Es gibt keinen expliziten Funktionsaufruf für die eigentliche Berechnung des Modellalgorithmus. Die FMU entscheidet selbständig, je nachdem welche Daten gegeben sind und welche Daten gesucht werden, welche Berechnungen durchgeführt werden müssen [103].

In den folgenden Unterkapiteln werden die verschiedenen Möglichkeiten der Kopplung vorgestellt. Es wird zwischen der Kopplungsmethode zum Modellaustausch (*FMU for Modelexchange*) und der Kopplungsmethode zur wechselseitigen Simulation (*FMU for Co-Simulation*) unterschieden.

### 4.3.1 Konzept der FMU zum Modellaustausch

Beim Konzept der FMU zum Modellaustausch enthält die FMU den Programmcode der Bewegungsgleichungen des Systems sowie der FMI Schnittstelle, eine kompilierte Bibliothek des Programmcodes und die XML-Modellbeschreibung, welche die Bezeichnungen und Speicherreferenzen der Ein- und Ausgänge des Modells angibt. Das Lösen der Bewegungsgleichungen wird dem importierenden Programm überlassen (vergl. Abbildung 4-6). Dies hat den Vorteil, dass die Art des numerischen Lösungsalgorithmus vom Endanwender



selbst bestimmt werden kann. Dadurch erhöht sich jedoch der Implementierungsaufwand seitens des importierenden Programms signifikant, da zumindest ein numerischer Lösungsalgorithmus für die Integration der Bewegungsgleichungen zur Verfügung gestellt werden muss. Wie der Vergleich der Lösungsalgorithmen in Kapitel 3.1.3 und 3.1.4 zeigt, ist die Auswahl des numerischen Algorithmus für die Güte der Simulationsergebnisse entscheidend.

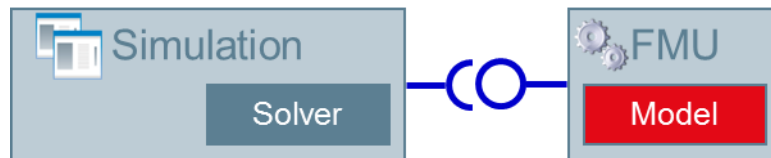


Abbildung 4-6: Spezifikation der Schnittstelle FMI für Modellaustausch (entnommen aus [103])

#### 4.3.2 Konzept der FMU zur wechselseitigen Simulation

Im Gegensatz zur FMU zum Modellaustausch ist beim Konzept der FMU für die wechselseitige Simulation der Algorithmus zur numerischen Lösung der Gleichungssysteme bereits in der FMU implementiert. Standardmäßig kommt ein Algorithmus mit variabler Schrittweite zum Einsatz, um die Berechnungszeiten - bei gleichzeitig guter Genauigkeit der Ergebnisse - möglichst gering zu halten. Je nach Komplexitätsgrad des Modelles sind somit selbst MK-Simulationen in Echtzeit problemlos möglich.

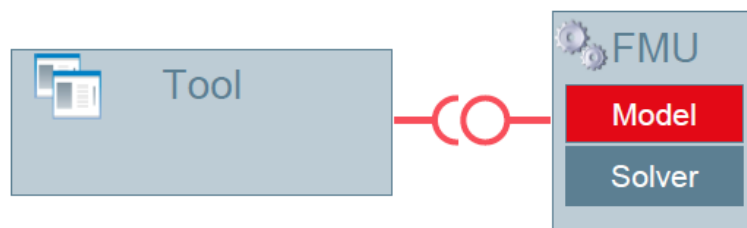


Abbildung 4-7: Spezifikation der Schnittstelle FMI für wechselseitige Simulation (entnommen aus [103])

Die wechselseitige Simulation eignet sich zur Lösung zeitabhängiger, gekoppelter Systeme. Diese können aus zeitkontinuierlichen Teilsystemen, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, oder zeitdiskreten Teilsystemen (bspw. Zustandsautomaten) bestehen. Der Standard für die wechselseitige Simulation definiert die Schnittstellen für die Kommunikation zwischen einem Hauptprozess (Master) und den einzelnen Teilsystemen (Slaves) in der Simulationsumgebung. Der Datenaustausch ist auf diskrete Kommunikationszeitpunkte beschränkt und die Teilsysteme werden unabhängig voneinander zwischen diesen Kommunikationszeitpunkten numerisch gelöst [103].

Für die im Folgenden beschriebene gekoppelte DEM-MK-Simulation sind beide Konzepte implementiert. Für FMUs, welche nach dem Standard des Modellaustausches mit der DEM-Simulation gekoppelt werden sollen, steht im entwickelten Zusatzmodul `fix_fm` das explizite Euler Verfahren (vergl. Kapitel 3.1.3.1) zur Verfügung. Die Schrittweite  $h$  wird in diesem

Fall explizit bei der Definition des Moduls im Eingabeskript angegeben. Sie sollte nicht größer als die Zeitschrittweite in der DEM-Simulation sein und muss ein Teiler der DEM-Zeitschrittweite sein, um die Kopplungszeitpunkte ganzzahlig zu erreichen.

Da FMUs zur wechselseitigen Simulation bereits den Lösungsalgorithmus für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen enthalten, werden innerhalb des Zusatzmoduls `fix_fmu` lediglich die Modellzustände für den jeweiligen Iterationsschritt ausgetauscht. Die FMU entscheidet intern, welche Integrationsschrittweite benötigt wird. Damit lassen sich auch Verfahren höherer Ordnung (z.B. ODE45 oder BDF), welche direkt in der FMU enthalten sind, einsetzen.

### 4.4 Gekoppelte DEM – MK – Simulation

Das Ziel dieser wissenschaftlichen Arbeit besteht in der Kopplung und Anwendung der in den beiden vorangegangenen Unterkapiteln vorgestellten Simulationismethoden. In diesem Kapitel werden die durchgeführten Arbeiten zur Implementierung, Kalibrierung, Validierung und Verifizierung der entwickelten gekoppelten DEM–MK-Simulationismethode detailliert dargestellt.

#### 4.4.1 Implementierung

In dieser Arbeit wird eine programm-basierte Kopplung auf Integratorebene [104] implementiert. Das bedeutet, dass beide Simulationseinheiten ihren eigenen Integrationsalgorithmus anwenden und in bestimmten Intervallen Zustände miteinander austauschen<sup>9</sup>.

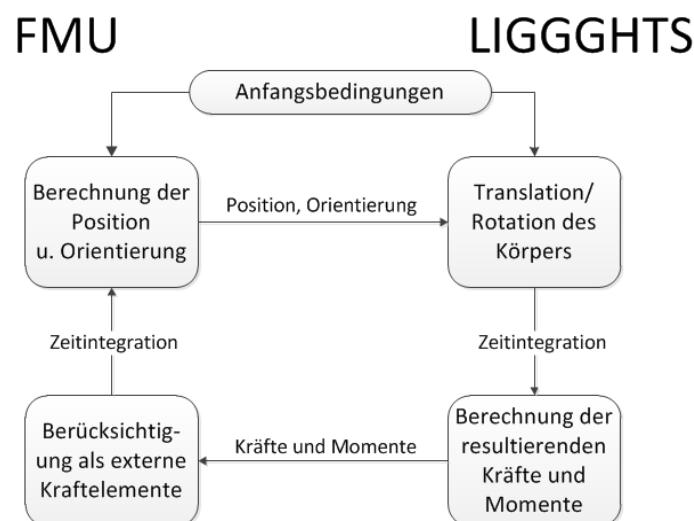


Abbildung 4-8: Berechnungszyklus der gekoppelten DEM - MK Simulation

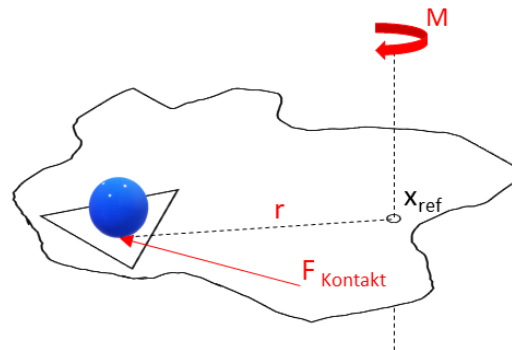
---

<sup>9</sup> Simulationseinheit bezeichnet hier die DEM-Simulation und die Mehrkörpersimulation

Abbildung 4-8 stellt den Berechnungszyklus und den Datenfluss der gekoppelten DEM-MK-Simulation dar. Die FMU wird dynamisch als Bibliothek in LIGGGHTS® geladen und anschließend von der Partikelsimulation durch Aufruf der FMI-Methoden gesteuert. Durch die standardisierte Schnittstelle wird eine Kommunikation der Mehrkörpersimulation mit der DEM-Software ermöglicht. Die Gleichungssysteme werden nicht in der MKS Software berechnet, sondern in der exportierten FMU. Die Programmbibliothek enthält dazu neben dem Quellcode der Bewegungsgleichungen des Modells auch den numerischen Lösungsalgorithmus (*FMU zur wechselseitigen Simulation*, vergl. Kapitel 4.3.2) beziehungsweise verwendet den im Zusatzmodul `fix_fm` implementierten Algorithmus. Die Programmbibliothek verhält sich analog eines Unterprogramms, welches für einen Anfangswert und einen Zeitschritt eine Lösung ausgibt. Die Simulation ist somit unabhängig von der verwendeten MKS-Software, welche lediglich für die Erzeugung der Gleichungssysteme der FMU notwendig ist.

Die softwaretechnische Implementierung erfolgt durch das Einbinden der von der Modelon AB [105] frei zur Verfügung gestellten `FMIlibrary` in das opensource DEM Simulationsprogramm LIGGGHTS®. In Zusammenarbeit mit dem Institut für Verarbeitungsmaschinen und Mobile Arbeitsmaschinen, Professur für Baumaschinen und Fördertechnik, an der Technischen Universität Dresden wurden Algorithmen in LIGGGHTS® implementiert, die die Ausführung und die Kommunikation mit der FMU realisieren. Weiterhin wurde ein neues Zusatzmodul zur dynamischen Positionierung von Geometrien, basierend auf den Ergebnissen der FMU zum jeweiligen Berechnungsschritt, in LIGGGHTS® implementiert (der sogenannte `fix move/mesh`). Für die Rückkopplung der aus dem modellierten Schüttgut wirkenden Kräfte und Momente auf die im Mehrkörpermodell modellierten Körper wird das in LIGGGHTS® bereits vorhandene Modul `fix mesh/surface/stress` verwendet. Die Partikelkräfte und die daraus resultierenden Momente aller mit dem Körper in Kontakt stehender Schüttgutteilchen werden vektoriell addiert und zum Mehrkörpermodell mit Hilfe der FMI-Schnittstelle übertragen. Problematisch ist dabei die korrekte Definition des jeweiligen Angriffspunktes des Moments für die modellierten Geometrielemente, welcher in beiden beteiligten Simulationsumgebungen zu jedem Kopplungsschritt identisch sein muss. Dies begründet sich aus der in der DEM implementierten Methode zur Berechnung des Gesamtmoments auf einen Körper basierend auf den Einzelpartikelkontakten und den tesselierten Flächen der verwendeten Geometrien.

Abbildung 4-9 stellt die geometrischen Beziehungen beispielhaft für einen Kontakt zwischen einem Partikel und einem Dreieckelement der Fläche dar.



**Abbildung 4-9: geometrische Beschreibung der Berechnung des Moments auf einen Körper für einen Einzelpartikelkontakt in der gekoppelten DEM-MK-Simulation**

Die aus der Überlappung des Partikels mit dem Wandelement resultierende Kraft  $\mathbf{F}_{\text{Kontakt}}$  wirkt durch den Hebelarm  $\mathbf{r}$  zwischen Kontaktpunkt und definiertem Referenzpunkt  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  als Drehmoment um diesen Punkt. Für bewegte Geometrien muss der Referenzpunkt entsprechend der translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten des Körpers in jedem Iterationsschritt mitbewegt werden.

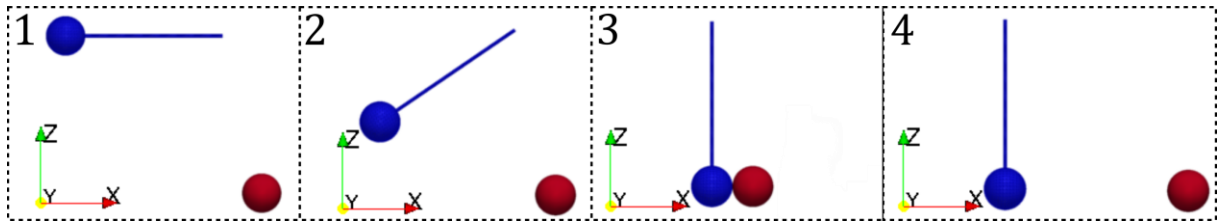
### 4.4.2 Verifizierung

Zur Verifizierung der physikalischen Korrektheit der gekoppelten DEM-MK-Simulation wird die Einhaltung des Energieerhaltungssatzes anhand zahlreicher gekoppelter DEM-MK-Simulationen untersucht. Es werden die Steifigkeit der Kontaktpartner und der Zeitschritt in der DEM-Simulation variiert, um den Einfluss dieser Parameter auf das Simulationsergebnis und die Stabilität der Gesamtsimulation zu bestimmen.

#### 4.4.2.1 Nachweis des Energieerhaltungssatzes

Für den Nachweis, dass die entwickelte Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation den Energieerhaltungssatz einhält, wird das Modell eines ebenen Pendels verwendet. Das Mehrkörpermodell entspricht dem in Abbildung 4-1 dargestellten Beispiel. Dieses wird um eine globale Kraft, welche auf den massebehafteten Körper wirkt, für die Kopplung mit der DEM erweitert. Die Länge des Pendels beträgt  $L = 1 \text{ m}$ . Der Ursprung des Pendels, um den die Bewegung ausgeführt wird, liegt in  $\mathbf{o} = [0,0,0]^T$ . Am Endpunkt des Pendels wird in LIGGGHTS® eine Kugel mit dem Radius  $r_k = 0,125 \text{ m}$  und der Dichte  $\rho_k = 7850 \text{ kg/m}^3$  als Kontaktpartner eingesetzt. Die sich ergebende Masse von  $m_k = 64,23 \text{ kg}$  wird dem Mehrkörpersystem als Konstante für die modellierte Punktmasse übergeben. Abbildung 4-10 stellt den Bewegungsablauf des Systems „Pendelstoß“ grafisch dar. Die Anfangsposition des Pendels befindet sich im oberen Umkehrpunkt (1). Durch das Gravitationsfeld wird das Pendel auf eine

Kreisbahn um den Ursprung beschleunigt (2). In der Ruhelage des Pendels trifft es auf die eine zweite Kugel mit der gleichen Masse (3) und stößt diese an.



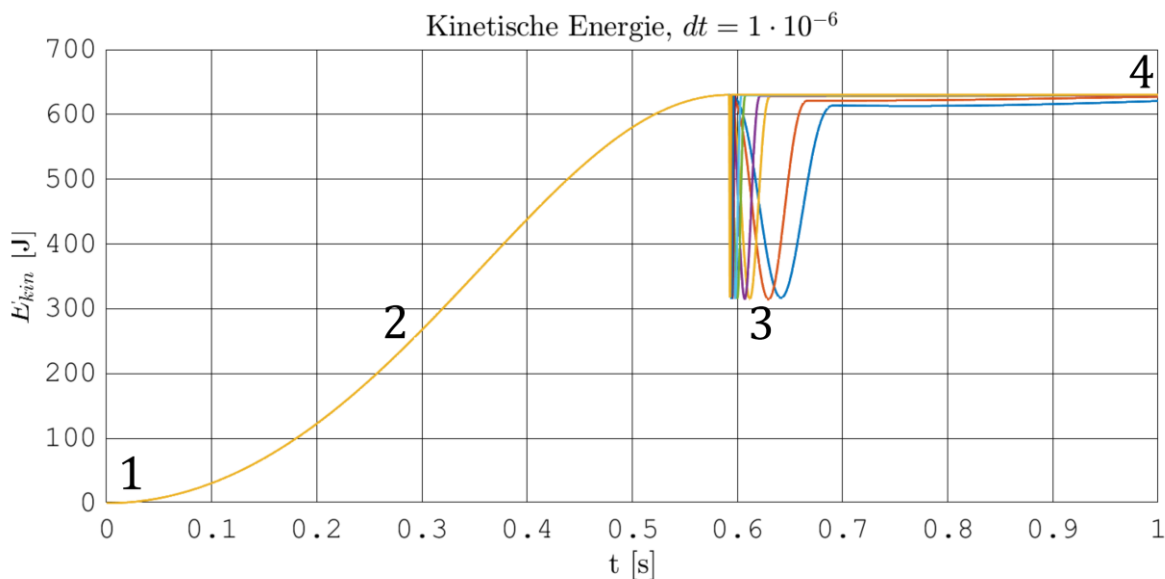
**Abbildung 4-10: Bewegungsablauf des Systems "Pendelstoß"; zur besseren Darstellung wird statt der Pendelkugel eine Oberflächengeometrie des Pendels in der Animation verwendet**

Bei einem ideal elastischen Stoß wird eine vollständige Energieübertragung des Pendels auf die ruhende Kugel erwartet (4). Zum Abgleich und zur Verifikation der Simulationsergebnisse kann die kinetische Energie des Systems sowie die Geschwindigkeiten der beiden Kontaktpartner vor und nach dem Stoß herangezogen werden. Die kinetische Energie des Gesamtsystems muss vor und nach dem Stoß identisch sein, wenn Dämpfungs- und Reibungsverluste modellseitig ausgeschlossen sind. Die Geschwindigkeit der angestoßenen Kugel muss nach dem Stoß der Geschwindigkeit des Pendels vor dem Stoß entsprechen. Das Maximum der kinetischen Energie im System „Pendelstoß“ soll der potentiellen Lageenergie des Pendels zu Beginn der Simulation mit:

$$E_{kin}^{max} = E_{pot} = m_K g L = 630,1 J, \quad (130)$$

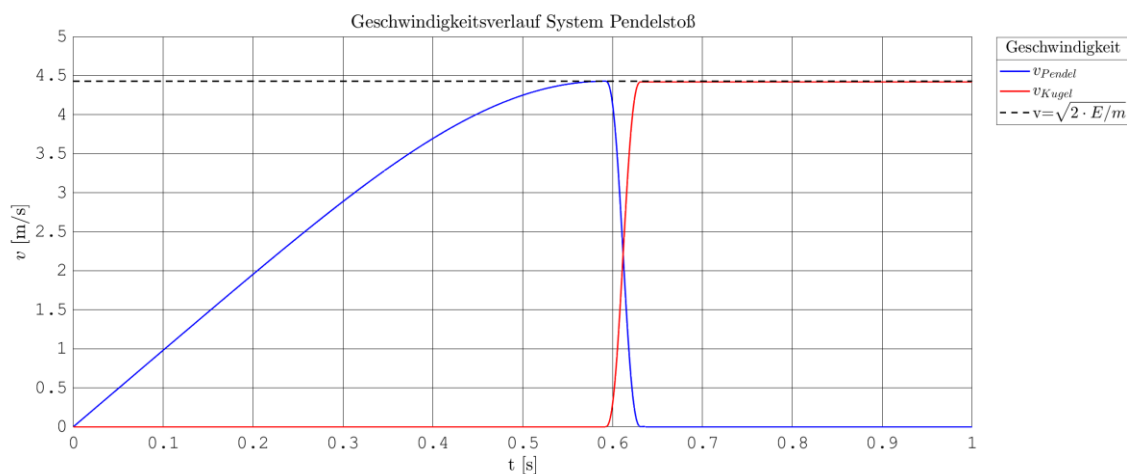
entsprechen.

Der Verlauf der gesamten kinetischen Energie des Systems „Pendelstoß“ ist in Abbildung 4-11 für unterschiedliche Steifigkeiten der Kontaktpartner dargestellt.



**Abbildung 4-11: Verlauf der kinetischen Energie des Systems „Pendelstoß“, die Energie des Pendels wird vollständig durch das DEM-Kontaktkraftgesetz auf die ruhende Kugel übertragen, mit zunehmender Steifigkeit wird die Kontaktdauer kürzer (4)**

Es ist zu erkennen, dass mit steigender Simulationszeit die kinetische Energie des Systems zunimmt (2). Bei  $t = t_s \approx 0,6 \text{ s}$  kommt es zum Stoß zwischen den Kugeln (3). Die kinetische Energie vor dem Stoß entspricht der potentiellen Energie in Gl. (130). Der Rückgang und erneute Anstieg der kinetischen Energie bei (3) wird durch das Spannen und Entspannen des nichtlinearen Federkraftelements in dem in der DEM-Simulation verwendeten Kontaktkraftmodell verursacht. Die Kontaktdauer ist von der Steifigkeit der Kontaktpartner abhängig. Mit zunehmendem Elastizitätsmodul wird die Kontaktdauer kürzer. Nach dem Stoß hat die Energie im System die gleiche Größe wie vor dem Stoß, wobei sich das Pendel in Ruhe befindet, und sich die angestoßene Kugel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (4).



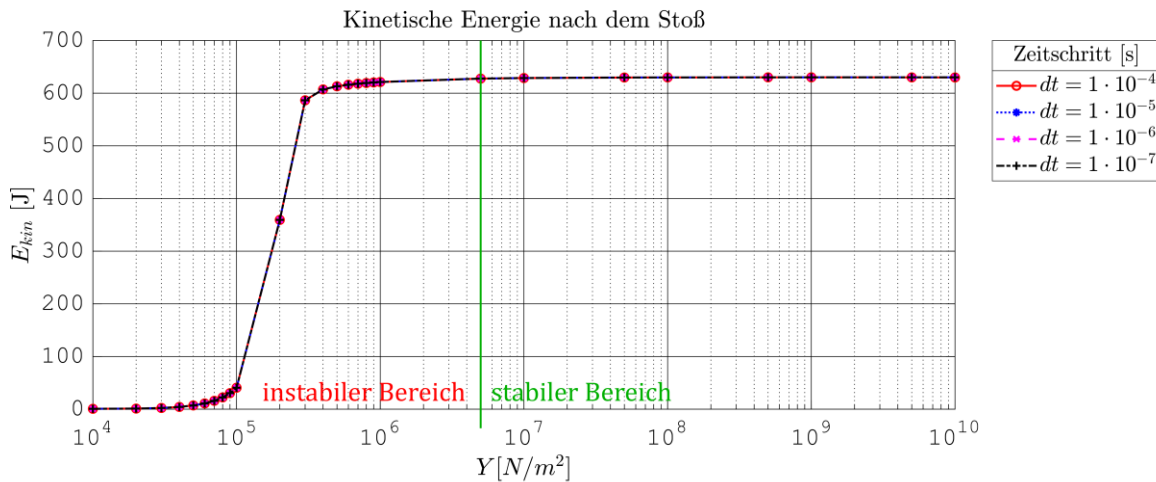
**Abbildung 4-12: Geschwindigkeitsverlauf des Pendels und der angestoßenen Kugel; die gestrichelte Linie entspricht der maximalen Geschwindigkeit basierend auf der Energie des Pendels zu Beginn der Simulation**

Die Energie des in der Mehrkörpersimulation modellierten Pendels ist vollständig durch das DEM-Kontaktkraftgesetz auf das DEM-Partikel übertragen wurden. Die Geschwindigkeit der angestoßenen Kugel entspricht der Geschwindigkeit des Pendels vor dem Stoß und stimmt mit der analytisch berechneten Geschwindigkeit  $v'_2 = \sqrt{2 \cdot E / m} = 4,43 \text{ m/s}$  überein (vergl. Abbildung 4-12). Die Forderung der Energieerhaltung wird von der gekoppelten DEM-MK-Simulation erfüllt.

### 4.4.2.2 Einfluss der Kontaktsteifigkeit und der Zeitschrittweite

In Kapitel 3.2.1.2 dieser Arbeit wird dargestellt, dass der kritische Zeitschritt der DEM-Simulation von der Steifigkeit und der Masse der Kontaktpartner abhängt. Massenskalierung ist jedoch für die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen nicht möglich, da die dynamischen Eigenschaften der Kontaktpartner beachtet werden müssen. Die MK-Simulation verwendet ein Integrationsverfahren höherer Ordnung mit automatischer Anpassung der Zeitschrittweite. Daher ist die DEM-Zeitschrittweite für die Stabilität der gekoppelten DEM-MK-Simulation maßgebend. Zur Analyse des Einflusses der Steifigkeit und des Zeitschrittes auf das Simulationsergebnis der gekoppelten DEM-MK-Simulation werden in einer Parametervariation

das Elastizitätsmodul der Kontaktpartner von  $1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$  bis  $1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  und Zeitschrittweiten von  $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  bis  $1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  für das System „Pendelstoß“ untersucht. Die Wahl dieser Bereiche entspricht typischen Größenordnungen der DEM. Das Kopplungsintervall entspricht dem jeweiligen gewählten Zeitschritt, da die DEM-Simulation in jeder Iteration die aktuelle Position und Geschwindigkeit des Pendels für die Berechnung des Kraft-Verformungsgesetzes benötigt. Als Stabilitätskriterium wird die kinetische Energie der angestoßenen Kugel zum Ende der Simulation verwendet.



**Abbildung 4-13: Kinetische Energie der angestoßenen Kugel nach dem Stoß aufgetragen über das Elastizitätsmodul der Kontaktpartner; die DEM-MK-Simulation liefert für Elastizitätsmodule größer  $5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  stabile Simulationsergebnisse**

In Abbildung 4-13 ist die kinetische Energie der angestoßenen Kugel zum Ende der gekoppelten Simulation über die als DEM-Materialparameter gewählten Elastizitätsmodule für unterschiedliche Zeitschrittweiten aufgetragen. Für die modellierte Partikelmasse von  $m = 64,23 \text{ kg}$  ist ersichtlich, dass die gekoppelte DEM-MK-Simulation für Elastizitätsmodule größer oder gleich  $5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  stabile Simulationsergebnisse liefert. Ein Einfluss des Zeitschrittes auf das Simulationsergebnis ist für den gewählten Bereich der Zeitschrittweiten nicht erkennbar.

Basierend auf diesen Ergebnissen wird für die in dieser Arbeit durchgeführten gekoppelten DEM-MK-Simulationen ein Elastizitätsmodul von  $1 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$  und eine Zeitschrittweite von  $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  gewählt. Für das gewählte Elastizitätsmodul und den gewählten Zeitschritt ergibt die in dieser Arbeit entwickelte und in LIGGGHTS® implementierte Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation physikalisch richtige und stabile Simulationsergebnisse. Durch die nachfolgende Kalibrierung der Reibungskoeffizienten wird der durch die Reduktion der Steifigkeit eintretende Einfluss auf das Fließverhalten der modellierten Schüttgüter ausgeglichen.

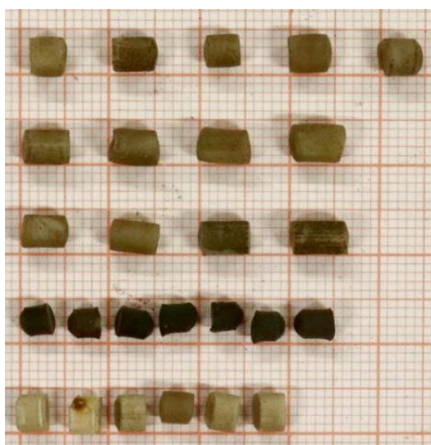
### 4.4.3 Validierung

Für den Nachweis, dass die entwickelte gekoppelte DEM-MK-Simulationsmethode geeignet ist, reale Förderanlagen und Maschinen im Kontakt mit Schüttgut in der Simulation abzubilden, wird ein stark vereinfachtes Modell eines Becherwerks und das Schüttgut PVC-Granulat verwendet. Im Folgenden wird die Kalibrierung des Schüttguts und die Parametrierung des vereinfachten Versuchsstands vorgestellt.

#### 4.4.3.1 Kalibrierung des Schüttgutes

Für die Validierung der gekoppelten DEM-MK-Simulationsmethode wird das Schüttgut PVC-Granulat verwendet, da es ebenso für die spätere Analyse des Schöpf- und Entleerungsverhaltens von Senkrechtbecherwerken für den Vergleich der durchgeführten DEM-MK-Simulationen mit den Ergebnissen am Versuchsbecherförderer eingesetzt wird. Bereits in den Arbeiten von DILEFELD [3] und HELLMUTH [4] wurde dieses Schüttgut eingesetzt, sodass eine umfangreiche Datenbasis für das später in dieser Arbeit untersuchte Schöpf- und Entleerungsverhalten von Becherwerken zur Verfügung steht.

In Abbildung 4-14 ist eine repräsentative Auswahl der Einzelpartikel des verwendeten Schüttgutes PVC-Granulat zur Abschätzung der Kornform dargestellt. Es handelt sich um meist zylinderförmige Körper mit einem Durchmesser unter 5 mm und einer Länge zwischen 2,5 mm und 6 mm. Anhand der in Kapitel 2.1 vorgestellten Verfahren zur Bestimmung der Schüttguteigenschaften werden die in Abbildung 4-14 aufgeführten Materialeigenschaften für das Schüttgut PVC-Granulat bestimmt. Der durchschnittliche Böschungswinkel beim freien Aufschütten eines Schüttgutkegels beträgt  $\varphi_{b,stat} = 31,18^\circ$ . Dies entspricht einem Reibungskoeffizienten  $\mu_p = \tan(31,18^\circ) = 0,605$ .



Parameter	Wert
Schüttdichte	675 kg/m <sup>3</sup>
Wandreibwert gegen Baustahl	0,377
innerer Reibwert	0,605
Kornform	Zylinder
d <sub>min</sub>	2,5 mm
d <sub>max</sub>	6 mm
Feuchte	0 %

Abbildung 4-14: Schüttgut PVC-Granulat, Kornform und Schüttguteigenschaften



Zur Kalibrierung des Schüttgutverhaltens bei reduzierten Kontaktsteifigkeiten wird eine Parametervariation zur Ermittlung des Böschungswinkels in Abhängigkeit der Partikel- und Rollreibungskoeffizienten mit einem einfachen Zylinder-Versuch durchgeführt. Ein Zylinder wird mit dem Schüttgut gefüllt und mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 mm/s angehoben. Der Winkel des ergebenden Schüttkegels wird entlang des Umkreises 32-mal gemessen und der mittlere Böschungswinkel für die jeweilige Parameterpaarung ermittelt. In der Simulation wird ein nichtlineares Kontaktmodell nach HERTZ-MINDLIN mit einem modifizierten Rollreibmodell „Typ C“ nach WENSRICH UND KATTERFELD [86] (*epsd2*) verwendet. Tabelle 4-2 stellt die in der Simulation verwendeten konstanten DEM-Parameter dar.

Tabelle 4-2: Simulationsparameter für die Kalibrierung

Parameter	Wert
Partikeldurchmesser	2,5-6 mm
Schermodul	1e7 N/m <sup>2</sup>
Querkontraktionszahl	0,30
Feststoffdichte	1350 kg/m <sup>3</sup>
Stoßzahl	0,20
Wandreibwert	0,377
Zeitschritt	0,00005 s

Die Simulationsergebnisse des Zylinder-Versuchs sind der Übersichtlichkeit halber zusammen mit den Ergebnissen des nachfolgenden Kalibrierungsschrittes in Abbildung 4-16 zusammengefasst. Die dargestellten Höhenliniendiagramme zeigen alle Parameterkombinationen, welche den gleichen Böschungswinkel in der Simulation ergeben. Die farbig hinterlegten Flächen kennzeichnen den Bereich des in den Experimenten ermittelten, realen Böschungswinkels. Dieser variiert im Bereich von  $\pm 2^\circ$ . Da eine unendliche Anzahl von Kombinationen der Reibungskoeffizienten existiert, die den gleichen Böschungswinkel erzeugen, wird eine zweite Versuchsreihe mit einem Versuchsstand zur Ermittlung des Scherwinkels und des Böschungswinkels sowie der Fließfähigkeit des Schüttgutes durchgeführt. Der Versuchsstand wird als Draw-Down-Versuchsstand bezeichnet [106–109].

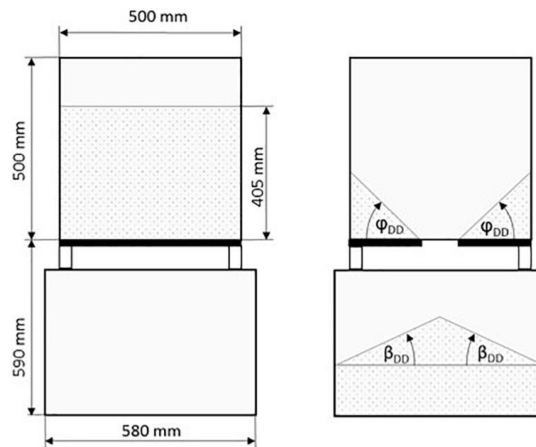


Abbildung 4-15: Draw-Down-Versuchsstand zur Ermittlung des Böschungswinkels, des Scherwinkels und der Fließeigenschaften des Schüttgutes (entnommen aus [109])

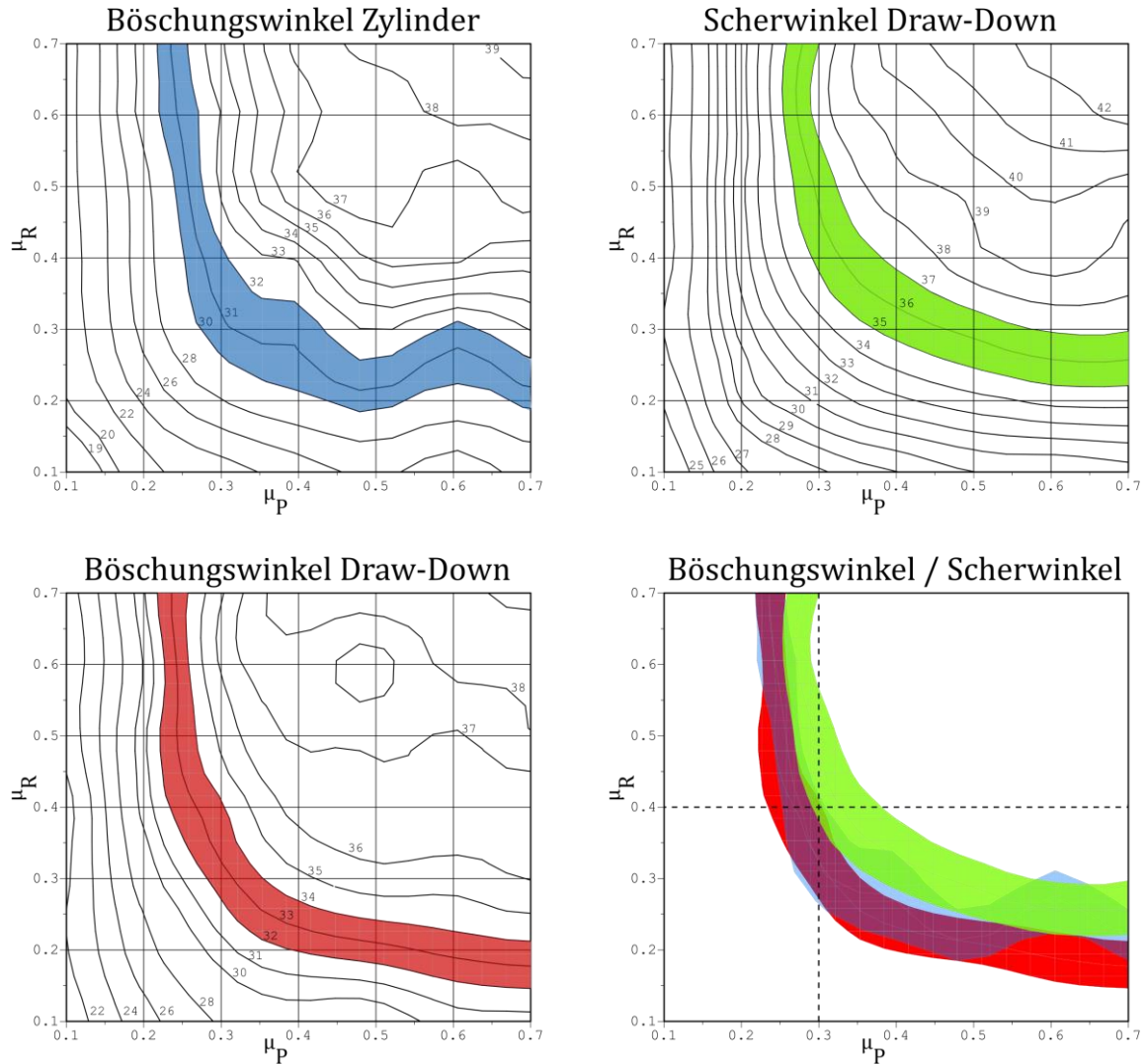
Der Draw-Down-Versuchsstand besteht aus zwei übereinander angeordneten Behältern (Abbildung 4-15, links). Zwischen den Behältern sind eine verstellbare Ausflussöffnung und ein Verschlussmechanismus angebracht. Nach der Befüllung der oberen Kammer mit dem Versuchsgut und dem Glätten der Gutoberfläche wird der Verschlussmechanismus geöffnet und das Schüttgut fließt durch die Ausflussöffnung vom oberen in den unteren Behälter. Mittels Kraftmessdosen wird während der Versuchsdurchführung der obere Behälter gewogen und der resultierende Massenstrom ermittelt. Nachdem kein Gut mehr aus dem oberen Behälter in den unteren fließt, werden die sich einstellenden Böschungswinkel  $\varphi_{DD}$  und  $\beta_{DD}$  in den beiden Behältern ermittelt.

Die Draw-Down-Experimente mit dem Schüttgut PVC-Granulat werden dreimal durchgeführt. Es werden die in Tabelle 4-3 angegebenen, durchschnittlichen Parameter für den Scherwinkel im oberen Schüttgutkasten, den Böschungswinkel im unteren Schüttgutkasten sowie den Massenstrom ermittelt.

**Tabelle 4-3: Zusammenfassung der ermittelten Parameter für das Versuchsgut PVC-Granulat**

		Experiment	Simulation	Abweichung
Böschungswinkel, Zylinder AOR	$\varphi_{b,stat}$	31,19 °	32,25 °	+3,4 %
Scherwinkel, Draw-Down	$\varphi_{DD}$	36,3 °	37,25 °	+2,6 %
Böschungswinkel, Draw-Down	$\beta_{DD}$	32,8 °	33,85 °	+3,2 %
Massenstrom, Draw-Down	$\dot{m}_{DD}$	4,5 kg/s	4,48 kg/s	-0,4 %
Masse unterer Behälter, Draw-Down	$m_{DD}$	10,83 kg	10,98 kg	+1,4 %

Zur weiteren Kalibrierung der DEM-Parameter werden analog zu den Experimenten Simulationen durchgeführt. Dabei wird der innere Reibwert  $\mu_P$  und der Rollreibungskoeffizient  $\mu_R$  systematisch im Bereich von 0,1 bis 0,7 mit einer festen Schrittweite von 0,1 variiert. In der DEM-Simulation ergeben sich die in den Diagrammen in Abbildung 4-16 dargestellten Scher- und Böschungswinkel für die Parametervariation der Reibungskoeffizienten. Durch Überlagerung der Diagramme ergibt sich eine Schnittmenge von Reibungskoeffizienten, welche für alle Kalibrierungsuntersuchungen einen nahezu eindeutigen Parametersatz liefert. Für diesen Parametersatz stimmt die jeweilige Referenzgröße (Scherwinkel, Böschungswinkel und Massenstrom) in der DEM-Simulation für reduzierte Kontaktsteifigkeiten mit den durchgeführten Kalibrierungsexperimenten überein (vergl. Abbildung 4-16 unten). Die Isolinien gleicher Höhe in den Diagrammen stellen die Parametersätze dar, welche das gleiche Ergebnis in der DEM-Simulation ergeben. Die farblich hinterlegten Flächen kennzeichnen den Zielbereich des in den Experimenten ermittelten, realen Fließverhaltens des Schüttguts. Die sich ergebenden Böschungswinkel in den Experimenten und den DEM-Simulationen des Draw-Down-Versuches streuen jeweils im Bereich von  $\pm 1,5^\circ$ .



**Abbildung 4-16: Simulationsergebnisse der Parametervariation des Zylinder-Versuchszustandes und des Draw-Down-Versuchszustandes für PVC-Granulat für Reibungskoeffizienten im Bereich von 0,1 bis 0,7; oben links: Ergebnisse des Zylinder-Versuches, oben rechts: Scherwinkel im oberen Schüttgutkasten, unten links: Böschungswinkel im unteren Schüttgutkasten, unten rechts: Überlagerung der Diagramme der sich ergebenden Scherwinkel und Böschungswinkel für die Kalibrierungssimulationen**

Aus der Schnittmenge der sich ergebenden Böschungswinkel wird der Partikelreibwert  $\mu_p = 0,3$  und der Rollreibungskoeffizient  $\mu_R = 0,4$  für die in dieser Arbeit durchgeführten DEM-MK-Simulationen gewählt. Die kalibrierten DEM-Materialparameter für das Schüttgut PVC-Granulat sind in Tabelle 4-4 zusammengefasst.

**Tabelle 4-4: Kalibrierte DEM-Materialparameter für das Schüttgut PVC-Granulat**

Schüttdichte [kg/m <sup>3</sup> ]:	675
stat. Böschungswinkel [°]:	32,25
Partikelgrößenverteilung [mm]:	2,5...6,0
Porosität [-]:	0,46
Wandreibwert [-]:	0,377
Partikelreibwert [-]:	0,3
Rollreibwert [-]:	0,4

Abbildung 4-17 zeigt die Gegenüberstellung der Ergebnisse des Zylinder-Versuches und des Draw-Down-Versuches mit dem Ergebnis einer DEM-Simulation mit den kalibrierten Materialparametern.

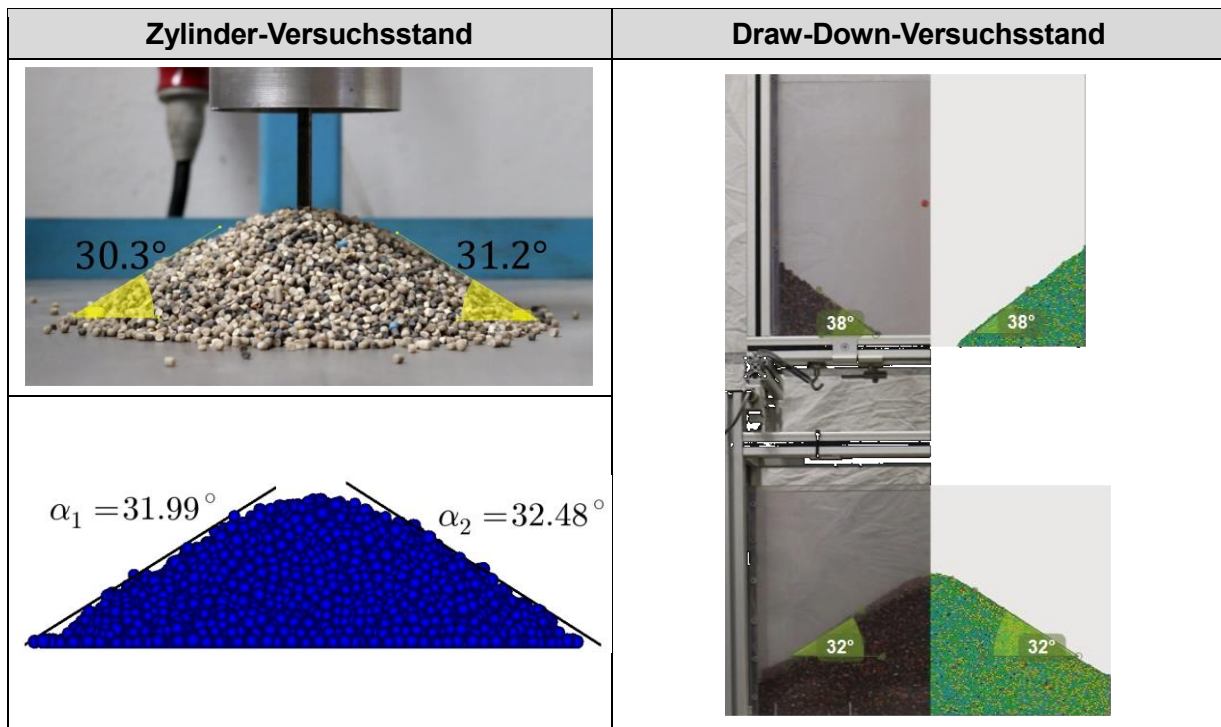
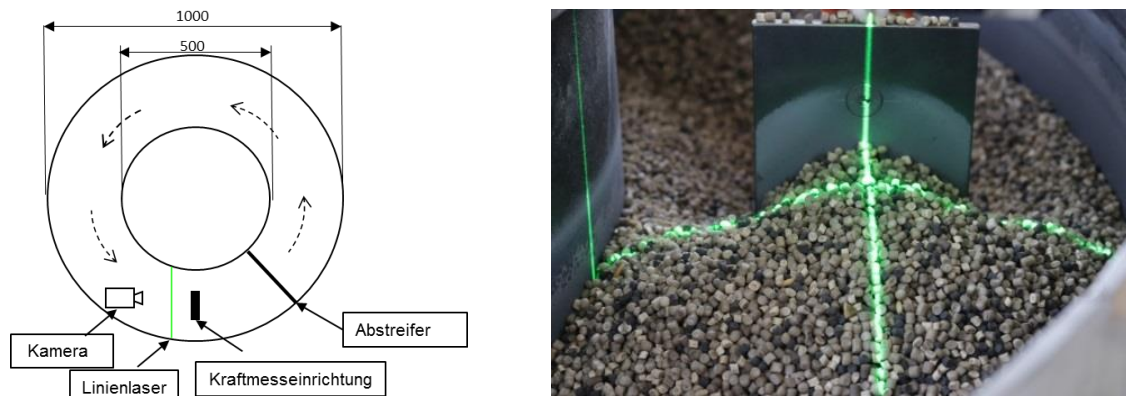


Abbildung 4-17: Links: Gegenüberstellung des realen Böschungswinkels und des in der DEM-Simulation ermittelten Böschungswinkels im Zylinder-Versuch; Rechts: Überlagerung der Draw-Down-Experimente mit den Ergebnissen der DEM-Simulation

Der Vergleich der Simulationsergebnisse zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der sich ergebenden Böschungswinkel mit den durchgeführten Experimenten. Die DEM-Materialparameter konnten für das Versuchsgut PVC-Granulat erfolgreich bestimmt werden. Das hier angewendete Verfahren zur Ermittlung der DEM Parameter ist nach KATTERFELD ET. AL. und RÖBLER ET. AL. der derzeitige Standardprozess zur Kalibrierung der Schüttguteigenschaften kohäsionsloser, frei rieselfähiger Schüttgüter [106 - 109, 110]. Aktuelle Forschungsarbeiten, beispielsweise von RICHTER [107] und RACKL [111] verwenden zusätzlich Optimierungsalgorithmen, um das Parameterfeld einzugrenzen, und so die Anzahl notwendiger Kalibrierungssimulationen zu reduzieren.

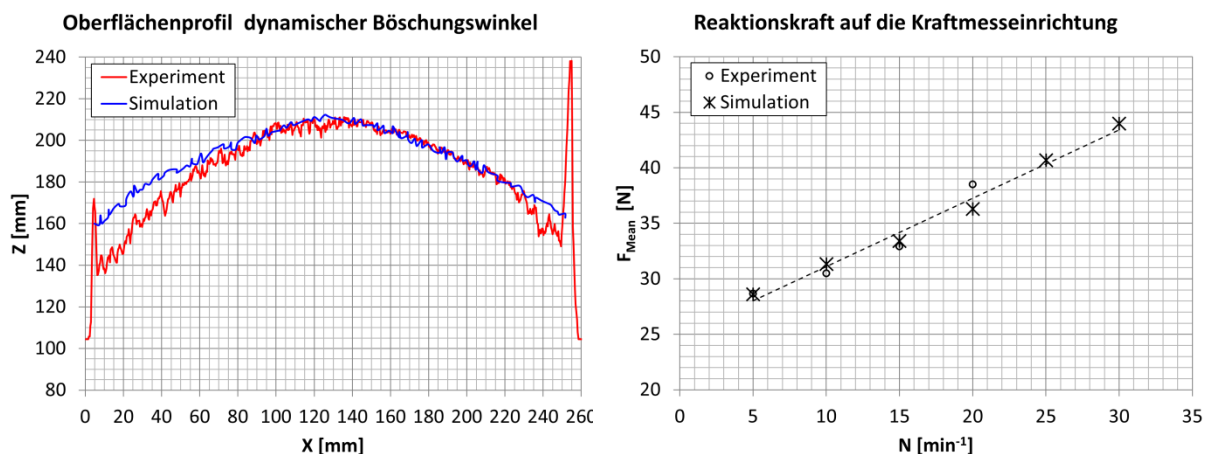
Für den Nachweis, dass die kalibrierten DEM-Simulationsparameter neben einem realistischen Fließverhalten auch realistische Reaktionskräfte bewirken, wird ein weiterer Versuch durchgeführt und mit DEM-Simulationsergebnissen verglichen. Ein Versuchsstand, der ursprünglich zur experimentellen Bestimmung von Gleitverschleiß entwickelt wurde [112], ermöglicht die exakte Messung des dynamischen Böschungswinkels und die auf eine Messeinrichtung wirkenden Kräfte für frei fließende Güter. Ein rotierender Trog mit einem Durchmesser von 1000 mm bewegt das Schüttgut auf einer Kreisbahn. In diesem

Schüttgutstrom befindet sich ein sogenanntes Schwert als Staustelle. Das Schwert verfügt über eine Kraftmeseinrichtung und einen 2D-Laserscanner zur Erfassung der Gutoberfläche vor dem Schwert (vergl. Abbildung 4-18).



**Abbildung 4-18: Versuchsstand zur Ermittlung des dynamischen Böschungswinkels und der aus dem Schüttgut resultierenden Reaktionskraft, links: Abmessungen und Anordnung der Messgeräte in der Draufsicht, rechts Blick auf die Kraftmeseinrichtung und 2D-Oberflächenscan mittels Linienlaser [110]**

Durch Vergleich des Oberflächenprofils des dynamischen Böschungswinkels (Abbildung 4-19 links) und der auf die Messeinrichtung wirkenden Kraft (Abbildung 4-19 rechts) mit den Simulationsergebnissen äquivalenter DEM-Simulationen wird nachgewiesen, dass die kalibrierten DEM-Materialparameter realistische Simulationsergebnisse hinsichtlich des Fließverhaltens und der resultierenden Kräfte ergeben.

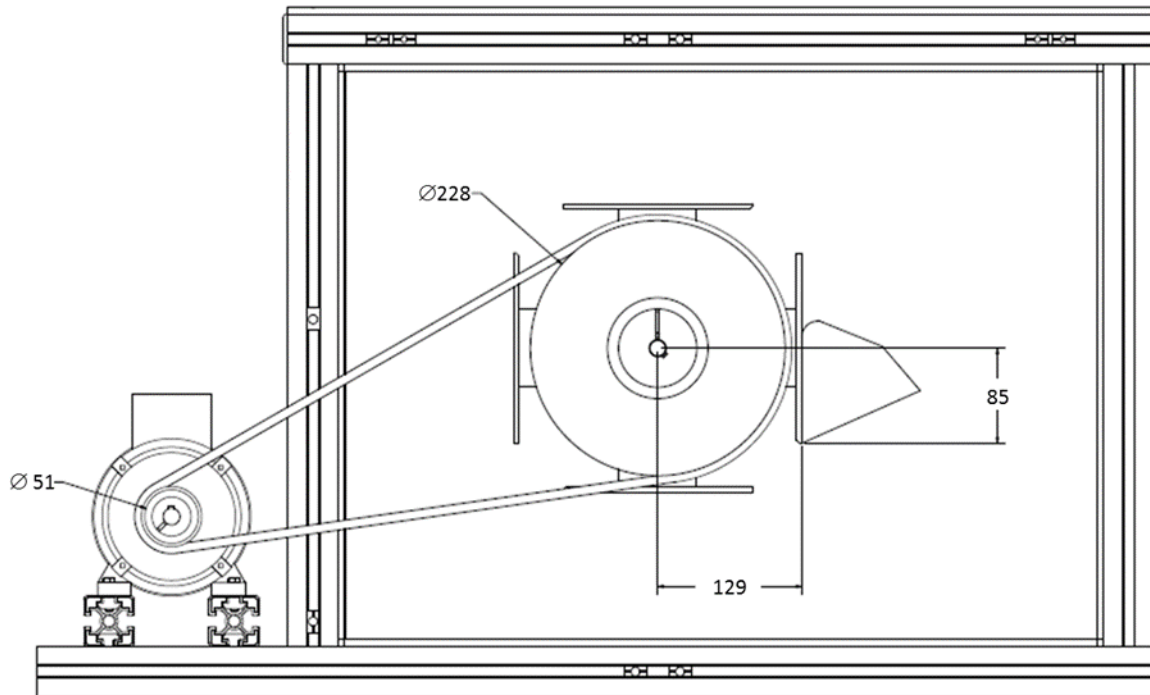


**Abbildung 4-19: Vergleich der Ergebnisse für Experiment und Simulation für das Versuchsgut PVC-Granulat, links: Oberflächenprofil des dynamischen Böschungswinkel, rechts Reaktionskraft der Kraftmeseinrichtung für variierende Drehgeschwindigkeiten des Troges**

Der in der Simulation ermittelte dynamische Böschungswinkel und die für unterschiedliche Umfangsgeschwindigkeiten aufgezeichnete Reaktionskraft der Kraftmeseinrichtung stimmen in Experiment und Simulation gut überein. Die kalibrierten DEM-Materialparameter bewirken realistische Reaktionskräfte in der DEM-Simulation. Im Experiment können nur Drehgeschwindigkeiten bis  $20 \text{ min}^{-1}$  durchgeführt werden, die DEM-Simulationen für  $25 \text{ min}^{-1}$  und  $30 \text{ min}^{-1}$  bestätigen den linearen Verlauf der ermittelten Reaktionskräfte auf das Schwert.

### 4.4.3.2 Beschreibung des vereinfachten Versuchsstandes

Der Versuchsstand zur Ermittlung des Schöpfwiderstandes ist ein vereinfachtes Modell des realen Versuchsbecherwerkes, bei dem die Achsen von Antriebs- und Spanntrommel ineinander gelegt sind (vergl. Abbildung 4-20). Dadurch entsteht ein einfaches, um eine Achse rotierendes Mehrkörpersystem.



**Abbildung 4-20: Abmessungen des vereinfachten Modells des Versuchsbecherwerkes, bestehend aus Asynchronmotor (links), Riemengetriebe zur Übersetzung, Fördersystem bestehend aus drehbar gelagertem Kreuz und Schöpfbecher sowie dem Schüttgutbehälter**

Anhand der modellierten Teilsysteme:

- Antrieb, bestehend aus einem Umrichter und einer Asynchronmaschine mit  $P_N=380$  W,
- Riemengetriebe mit dem Übersetzungsverhältnis  $i=1:4,8$ ,
- Fördersystem, bestehend aus einem drehbar gelagerten Kreuz mit vier Armen an denen sich jeweils eine Anschraubplatte für Becher befindet, sowie einem Schöpfbecher des Versuchsbecherwerkes,
- Schüttgutbehälter mit den Innenabmessungen Breite: 720 mm, Höhe: 580 mm und Tiefe: 310 mm

wird der Versuchsstand in der gekoppelten DEM-MK-Simulation abgebildet. Durch den Vergleich der am vereinfachten Versuchsstand experimentell ermittelten Größen elektrische Leistung des Antriebssystems, Drehzahlverlauf des Drehkreuzes und des Förderverhaltens des Schüttguts mit den Ergebnissen äquivalenter gekoppelter DEM-MK-Simulationen erfolgt der Nachweis, dass die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Simulationsmethode der gekoppelten DEM-MK-Simulation für die Anwendung auf Fragestellungen auf dem Gebiet von Förderanlagen und Baumaschinen in Interaktion mit Schüttgut geeignet ist.

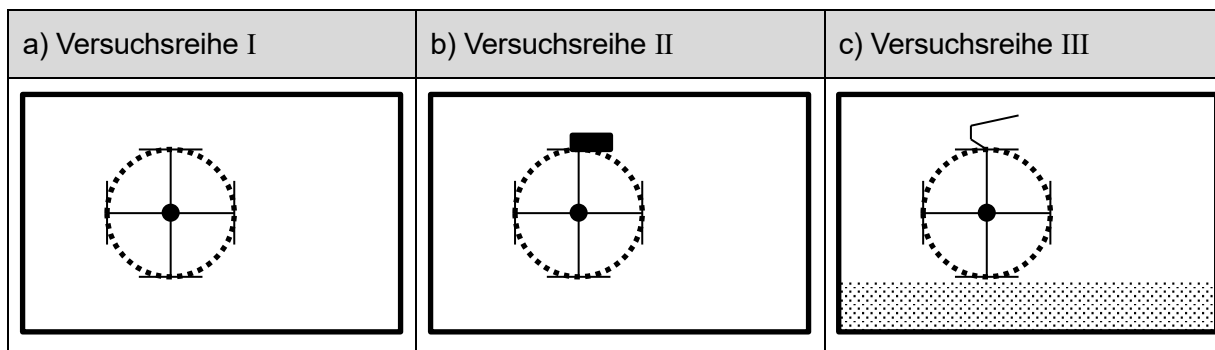
## 4.4.3.3 Beschreibung und Durchführung der Validierungsversuche

Insgesamt werden zur Validierung der gekoppelten DEM-MK-Simulationsmethode drei Versuchsreihen mit unterschiedlichen statischen und dynamischen Belastungen des Fördersystems durchgeführt. Die dabei variierten Parameter der im Folgenden durchgeführten Versuchsreihen sind in Tabelle 4-5 zusammengefasst.

**Tabelle 4-5: Versuchsreihen zur Parametrierung und Validierung der gekoppelten DEM-MK-Simulation**

	Lastfall	Frequenz
Versuchsreihe I	0 kg	5 Hz – 50 Hz
Versuchsreihe II	4 kg, exzentrische Masse	5 Hz – 35 Hz
Versuchsreihe III	mit Schüttgut PVC-Granulat	5 Hz, 10 Hz, 15 Hz

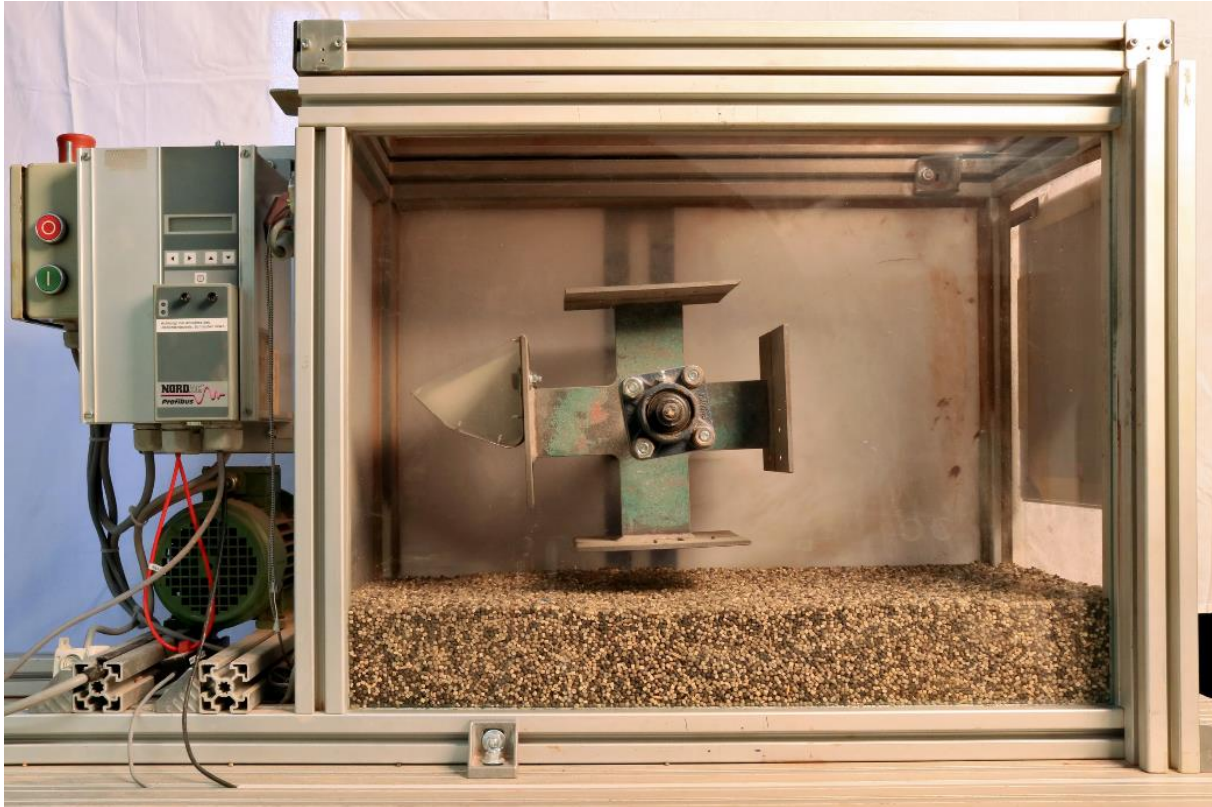
Zur Bestimmung der Maschinenparameter werden zunächst Experimente ohne Schüttgut und ohne zusätzliche Last am Drehkreuz durchgeführt und mit nicht gekoppelten Mehrkörpersimulationen verglichen (vergl. Abbildung 4-21a). Es wirken nur die Massenträgheiten und Reibungswiderstände des Motors, der Riemenscheiben, der Lager und des Drehkreuzes. Die Frequenz des Erregerfeldes der Asynchronmaschine wird im Bereich von 5 Hz bis 50 Hz in 5 Hz Schritten variiert. Die vom Motor aufgenommene elektrische Leistung wird durch Messung der Stromstärke und der Spannung, die der Umrichter bei der gewählten Frequenz zur Verfügung stellt, ermittelt. Der elektrische Antrieb des modellierten Maschinenmodells wird mit den Ergebnissen dieser Leerlaufmessung parametrisiert.



**Abbildung 4-21: Schematische Darstellung der Versuchsreihen I,II und III**

Um eine exzentrische Belastung des Versuchszustandes für die Versuchsreihe II zu erzielen, wird an eine der Flanschplatten ein Gewicht mit einer Masse von 4 kg angebracht (vergl. Abbildung 4-21b). Die exzentrische Masse repräsentiert annähernd den Bewegungswiderstand des später zu untersuchenden Schöpfvorgangs eines Bechers im Schüttgutbett anhand eines einfach zu beschreibenden Modells. Anschließend werden Experimente und Simulationen mit dieser exzentrischen Last durchgeführt und miteinander verglichen. Die Dynamik des Maschinenmodells wird mit den Ergebnissen des exzentrischen Lastfalls parametrisiert.

In der dritten Versuchsreihe wird ein einzelner Schöpfbecher des realen Versuchsbecherwerkes am Drehkreuz des vereinfachten Versuchsstands verwendet und der Schüttgutbehälter mit dem Schüttgut PVC-Granulat bis zu einer Füllhöhe von 115 mm befüllt (vergl. Abbildung 4-21c und Abbildung 4-22).



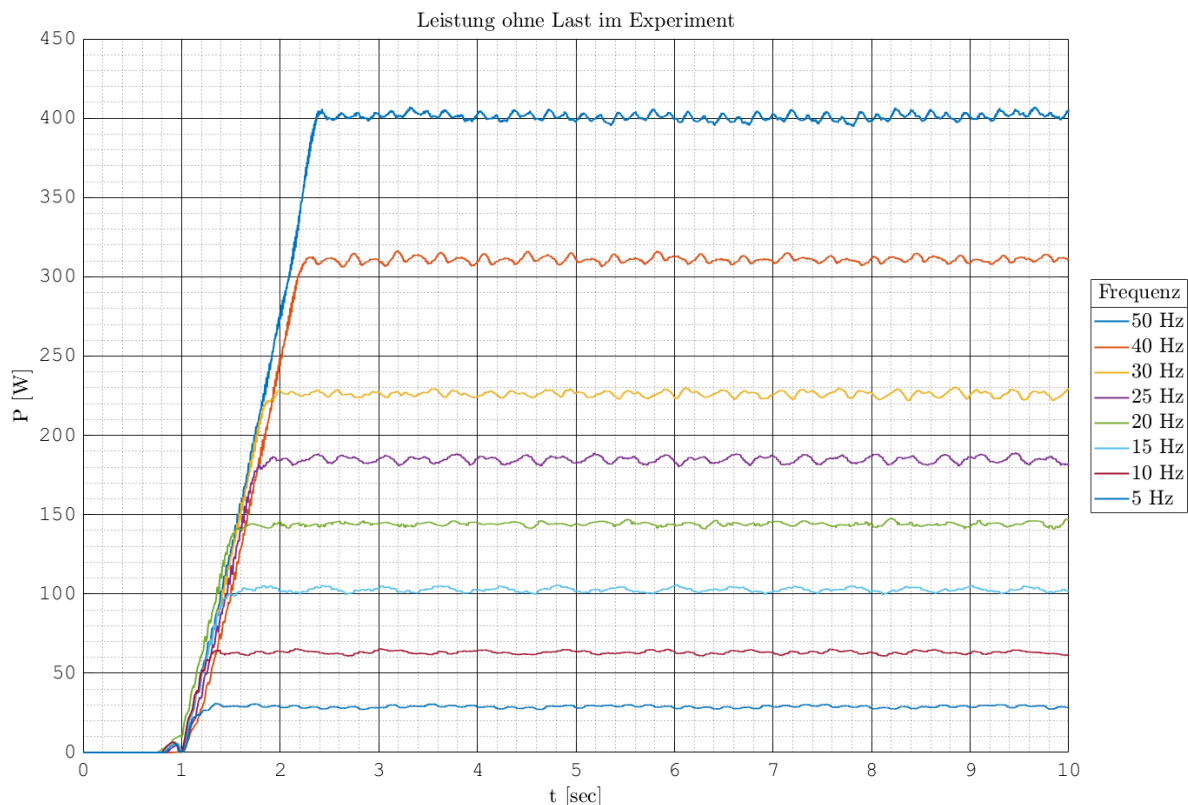
**Abbildung 4-22: Vereinfachter Versuchsstand zur Analyse des Schöpfvorgangs in den experimentellen Untersuchungen, gefüllt mit dem exemplarischen Schüttgut PVC-Granulat, es wird ein Schöpfbecher, der für die Misch- und Fliehkraftentleerung geeignet ist, verwendet; dieser ist identisch mit den Bechern des realen Versuchsbecherwerkes**

Der Schöpfvorgang wird bei Anregungsfrequenzen von 5 Hz, 10 Hz und 15 Hz in Experimenten und in äquivalenten, gekoppelten DEM-MK-Simulationen analysiert. Zum Vergleich der Experimente und der Simulationen werden die elektrische Leistung, die Drehzahl des Drehkreuzes und das Schöpfverhalten verglichen.

Zunächst werden im Folgenden die in den Experimenten für die Versuchsreihe I und II ermittelten Leistungsparameter des Versuchsstandes vorgestellt. Anschließend erfolgt die Übertragung dieser Parameter auf das modellierte Mehrkörpersystem. Abschließend wird der Vergleich der in der Versuchsreihe III empirisch ermittelten Leistungsdaten und der Vergleich des Förderverhaltens der durchgeführten Experimente mit den Simulationsergebnissen der gekoppelten DEM-MK-Simulation durchgeführt.



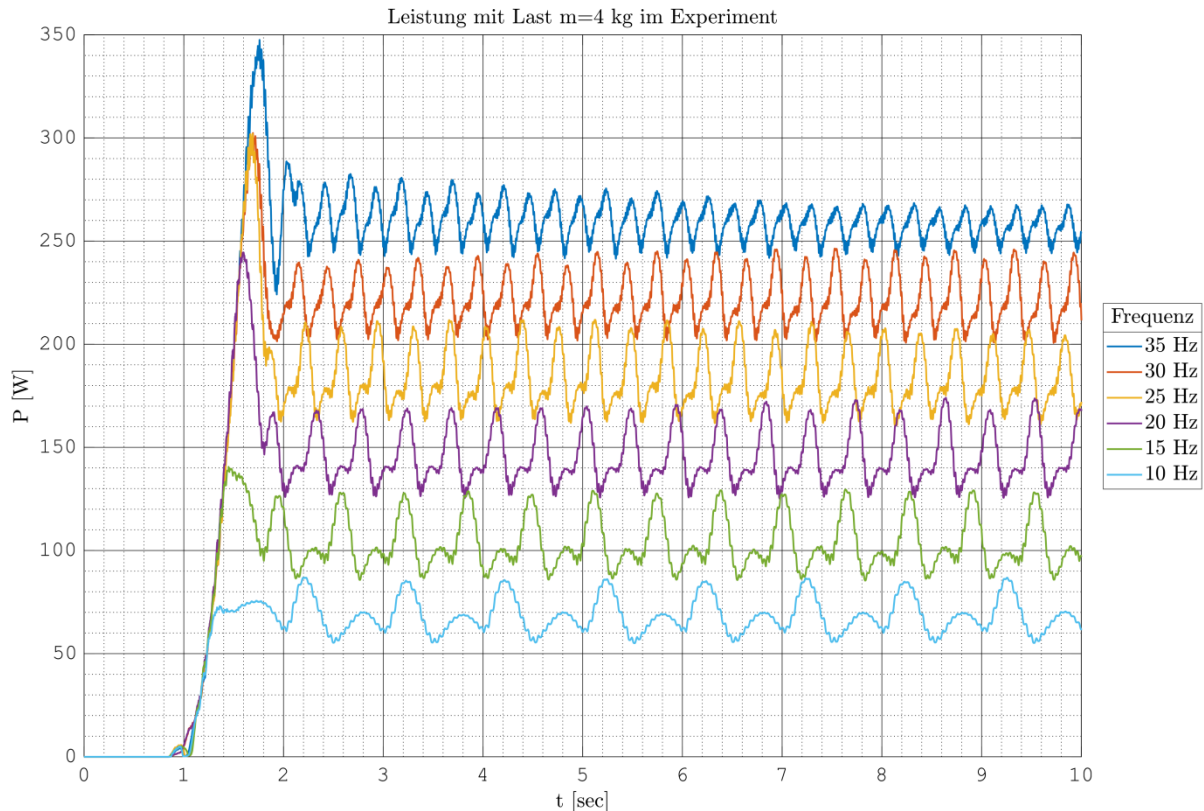
Abbildung 4-23 stellt die im Experiment ermittelte elektrische Leistung für die Versuchsreihe I für Erregerfrequenzen von 5 bis 50 Hz in einem Diagramm dar. Es ist der erwartete lineare Zusammenhang zwischen Anregungsfrequenz und aufgenommener Leistung zu erkennen. Die Steigung zu Beginn der Messungen resultiert aus der im Umrichter eingestellten Anlauframpe und der Beschleunigungsarbeit zur Überwindung der Bewegungswiderstände des Motors, des Riemengetriebes und der Lagerung des Drehkreuzes. Der Maximalwert der gemessenen elektrischen Leistung bei  $f=50$  Hz entspricht mit 400 W der Nennleistung des Motors. Im stationären Zustand treten drehzahlabhängige periodische Schwingungen aufgrund der fertigungsbedingten Unwucht des Drehkreuzes auf.



**Abbildung 4-23: Gemessene Leistung des Asynchronmotors ohne zusätzliche Last für Erregerfrequenzen von 5 bis 50 Hz in 5Hz Schritten, die periodischen Schwingungen in den Messsignalen resultieren aus einer fertigungsbedingten Unwucht des Drehkreuzes**

In der zweiten Versuchsreihe werden die in Abbildung 4-24 dargestellten Leistungsbedarfe für eine exzentrische Belastung am Drehkreuz von  $m = 4$  kg ermittelt. Der erste Peak entspricht der Überlagerung der aus der Beschleunigungsarbeit des Gesamtsystems und der Hubarbeit zum Anheben der exzentrischen Masse resultierenden Leistung. Die frequenzabhängige Schwingung im stationären Zustand entspricht der Überlagerung der im Leerlauf beobachteten Schwingung aufgrund der fertigungsbedingten Unwucht des Drehkreuzes und dem periodischen Heben und Senken der zusätzlichen Last am Drehkreuz. Der Maximalwert der Amplitude dieser Schwingung entspricht der Leistung, die zur Überwindung der Reibungswiderstände und dem Heben der Masse von 4 kg notwendig ist. Die Periodendauer ist proportional zu der am

Umrichter eingestellten Anregungsfrequenz des Asynchronmotors und der konstanten Übersetzung des Riemengetriebes. Für Frequenzen größer als 35 Hz können keine Messergebnisse in den Experimenten für die Versuchsreihe II ermittelt werden, da der Versuchsstand aufgrund der exzentrischen Masse in so starke Schwingungen versetzt wird, dass kein stationärer Zustand erreicht werden kann.



**Abbildung 4-24: Gemessene elektrische Leistung des Motors bei einer exzentrischen Last von  $m=4$  kg und Erregerfrequenzen von 10 Hz bis 35 Hz, die periodischen Schwingungen in den Messsignalen resultieren aus der Überlagerung der fertigungsbedingten Unwucht des Drehkreuzes und dem periodischen Heben und Senken der zusätzlichen Masse am Drehkreuz**

### 4.4.3.4 Parametrierung des Mehrkörpermodells

Zur Parametrierung des Mehrkörpermodells wird das in den Versuchsreihen I und II ermittelte elektrische und dynamische Verhalten des vereinfachten Versuchsstandes im Folgenden in ein Mehrkörpermodell überführt. Durch inverse Parameterfindung werden die unbekannt Parameter der Asynchronmaschine und die Massenträgheiten der bewegten Baugruppen (Riemengetriebe und Fördersystem) auf die Modellkomponenten der MK-Simulation übertragen.

Das elektrische Antriebssystem, in Form eines mit einem Frequenzumrichter gesteuerten Asynchronmotors, hat nach Herstellerangaben die in Tabelle 4-6 zusammengefassten technischen Daten.

Tabelle 4-6: Technische Daten des verwendeten Asynchronmotors nach Datenblatt

Spannung U	400 V
Nennleistung $P_{\text{Nenn}}$	380 W
Nennstrom $I_{\text{Nenn}}$	1,09 A
$\cos(\varphi)_{\text{Nenn}}$	0,77
Polpaarzahl p	2
Nenndrehzahl $N_{\text{Nenn}}$	1430 $\text{min}^{-1}$
Nennmoment $M_{\text{Nenn}}$	2,54 Nm
Kippmomentfaktor $M_k/M_{\text{nenn}}$	2,2
Anlaufmomentfaktor $M_A/M_{\text{nenn}}$	2,1
Trägheitsmoment	0,00075 $\text{kgm}^2$

MKS Programme bieten vielfältige Möglichkeiten elektrische Maschinen abzubilden, allerdings setzen diese in der Regel Kenntnisse über die inneren elektrischen Widerstände der Wicklungen und die Induktivitäten voraus. Diese lassen sich am verwendeten Versuchsstand nicht zerstörungsfrei ermitteln. Aus diesem Grund wird auf eine vereinfachte, mathematische Modellierung der Asynchronmaschine zurückgegriffen. Dieses Vorgehen hat gegenüber der detaillierten Modellierung des elektrischen Verhaltens einer Asynchronmaschine mit der zugehörigen elektronischen Modellierung des Frequenzumrichters einen großen Geschwindigkeitsvorteil in der numerischen Lösung der Berechnungsvorschriften. Für eine spätere gekoppelte DEM-MK-Simulation soll das Maschinenmodell nicht der limitierende Faktor hinsichtlich der Berechnungsgeschwindigkeit sein. Die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des Asynchronmotors wird durch die Kloss'sche Formel (Gl. (131)) nach FISCHER analytisch angenähert [113].

$$M(s) = \frac{2 * M_K}{\frac{s_K}{s} + \frac{s}{s_K}}, \quad (131)$$

$$\text{mit } s = \frac{\omega_{ref} - \omega_{rel}}{\omega_{ref}}, \quad (132)$$

$$\text{und } \omega_{ref} = \frac{2\pi f}{p}. \quad (133)$$

Aus der Drehzahldifferenz zwischen der Referenzdrehzahl  $\omega_{ref}$  des elektrischen Drehfeldes und der Drehzahl am Abtrieb  $\omega_{rel}$  bezogen auf die Referenzdrehzahl wird der Schlupf  $s$  berechnet. In Abhängigkeit der bekannten Größe des Kippmoments  $M_K$  und des aktuellen Schlupfs werden das Drehmoment und die Drehzahl für unterschiedliche Erregerfrequenzen berechnet. Die in Abbildung 4-25 abgedruckte `Matlab` Funktion zeigt die in dieser Arbeit verwendete Implementierung der mathematischen Beschreibung nach Gl. (131) und Gl. (132). Zur Überprüfung der `Matlab` Funktion wird diese in einer Schleife über den Frequenzbereich von

1 Hz bis 50 Hz in 1 Hz Schritten und dem der gewählten maximalen Frequenz entsprechenden Drehzahlband von 0 bis  $\omega_{ref}^{max}$  ausgeführt.

```
function [M_ist,N,P]= ASM(P_Nenn,f,w_ist)
    p=2; %Polpaarzahl
    N_Nenn=1428.6; %Nennzahl [1/min] bei 50Hz
    M_Nenn=P_Nenn/(2*pi*N_Nenn/60); %Nennmoment [Nm]
    Mk=2.2*M_Nenn; %Kippmoment [Nm]
    sk=0.2; %Kippschlupf [-]

    w_ref=2*pi*f/p; %w=2pi*f/p [rad/sec]
    s=(w_ref-w_ist)/w_ref; %Schlupf [-]
    M_ist = 2*Mk/((sk/s) + (s/sk)); %Kloßsche Formel

    N=w_ist*60/(2*pi); %Drehzahl, Welle [1/min]
    P=M_ist*w_ist; %Leistung [W]
end
```

Abbildung 4-25: Matlab Code zur analytischen Beschreibung des Verhaltens eines Asynchronmotors

Für die in Tabelle 4-6 angegebenen technischen Daten des für die Validierungsversuche verwendeten Asynchronmotors ist die in Matlab formulierte Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie in Abbildung 4-26 für Anregungsfrequenzen von 1 bis 50 Hz in 1 Hz Schritten dargestellt. Das Kippmoment ist bei  $M_K = 5,588$  Nm mit einer horizontalen Linie gekennzeichnet. Die Implementierung entspricht dem erwarteten Verhalten des Asynchronmotors im Leerlauf für Anregungsfrequenzen kleiner oder gleich der Nennfrequenz.

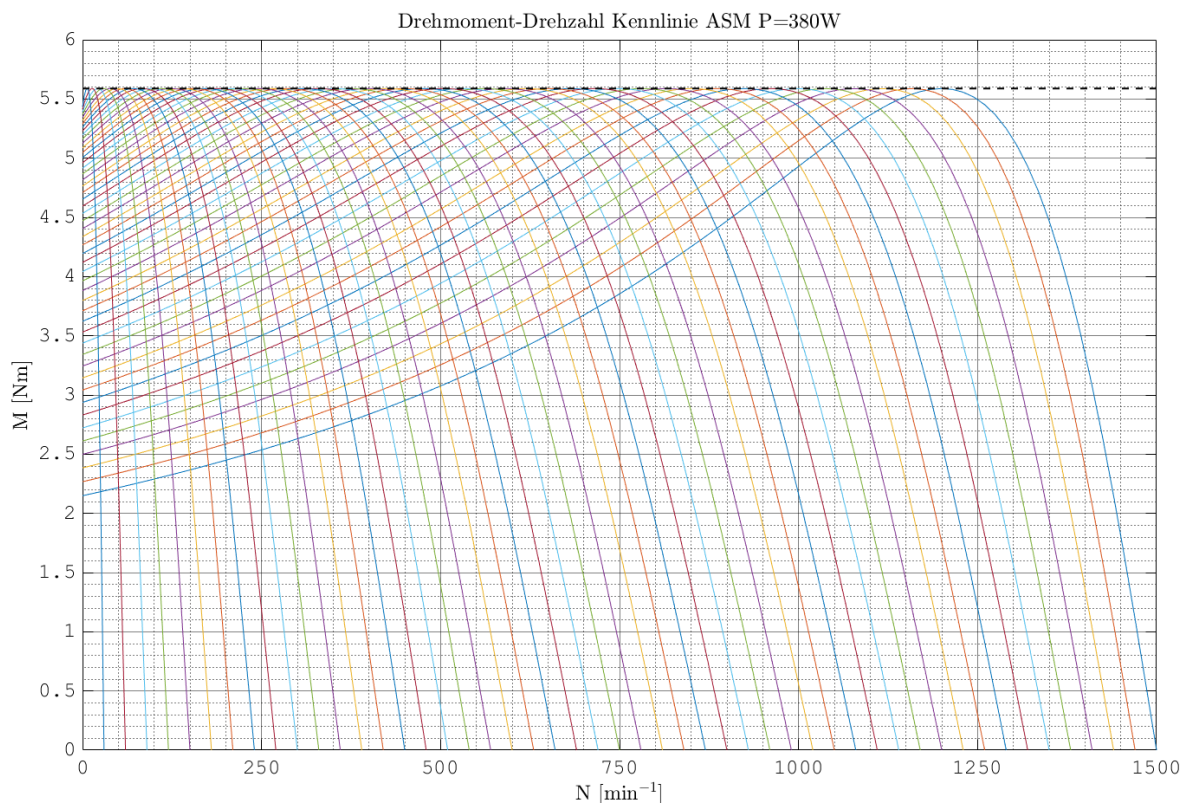


Abbildung 4-26: Drehmoment-Drehzahl Kennlinie der modellierten Asynchronmaschine für Frequenzen zwischen 1 Hz und 50 Hz in 1 Hz Schritten, die horizontale, gestrichelte Linie kennzeichnet das Kippmoment

Abbildung 4-27 stellt das in dieser Arbeit entwickelte MKS-Modell des vereinfachten Versuchsstands in Matlab Simulink dar.

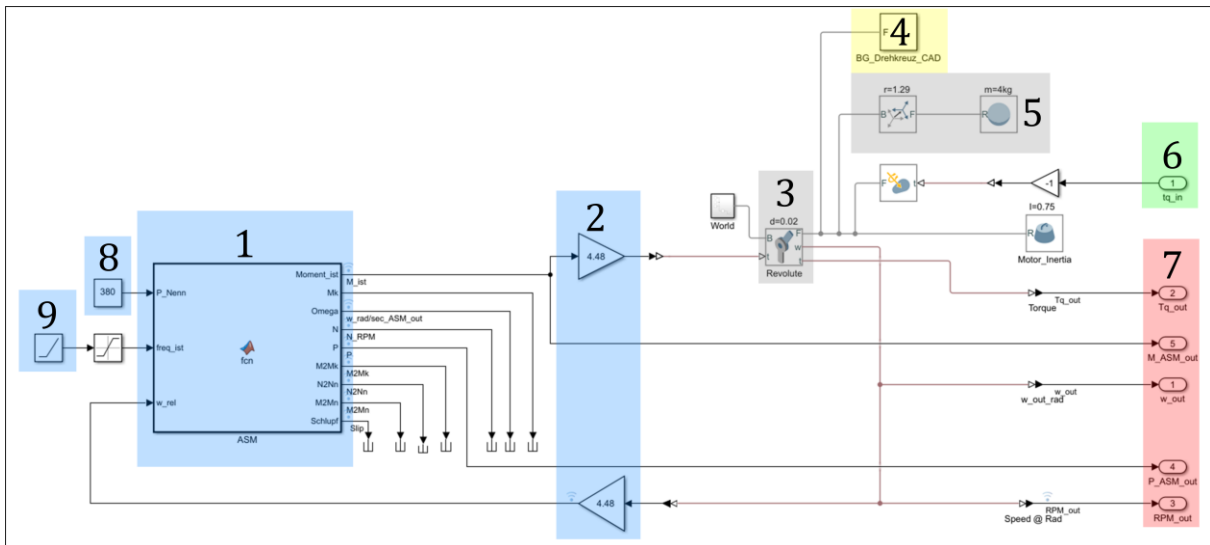


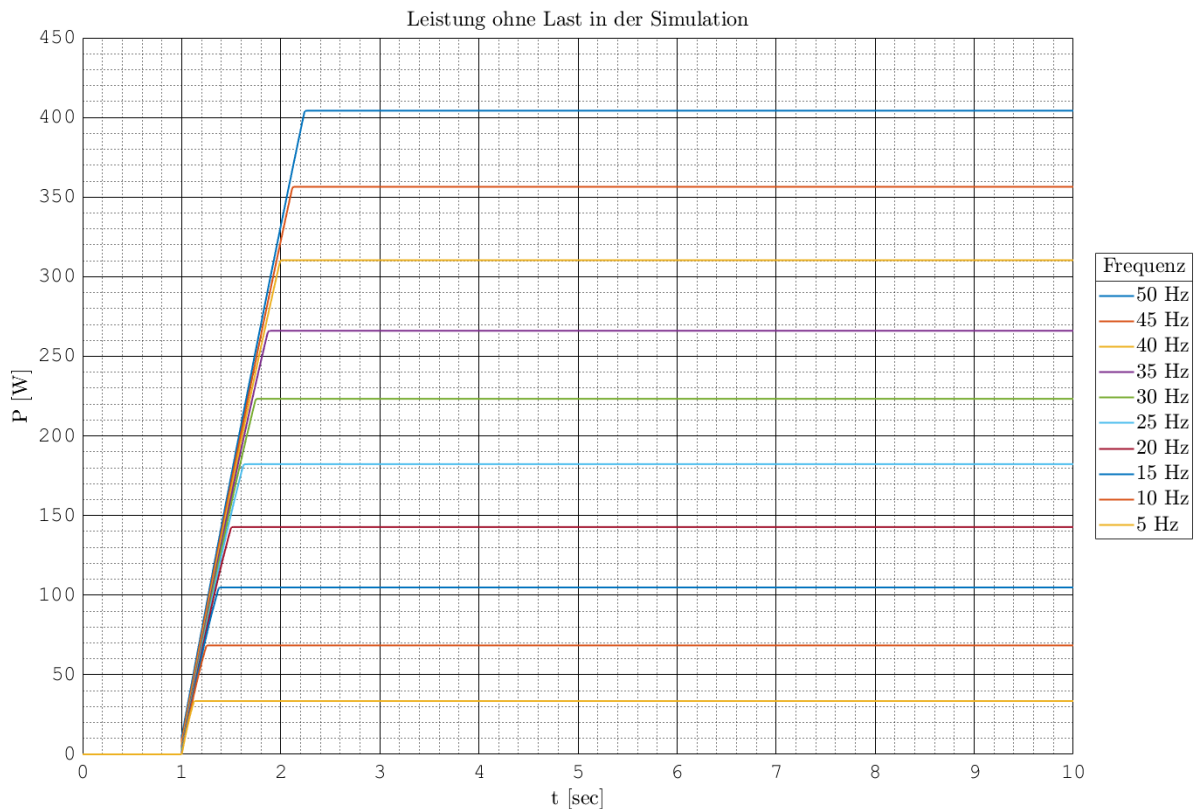
Abbildung 4-27: Matlab Simulink Modell des vereinfachten Versuchsstands mit Momenten Rückkopplung, links: Matlab-Funktionsblock zur Beschreibung des elektrischen Verhaltens des Asynchronmotors, rechts: Funktionsbausteine der Matlab Simulink Multibody Bibliothek zur Abbildung des dynamischen Verhaltens der Mechanik des Fördersystems, bestehend aus einem Drehgelenk mit einem Freiheitsgrad, der Massenträgheit des Motors, der Baugruppe des Drehkreuzes und der zusätzlichen Masse an einer translatorischen Verschiebung mit der Länge des Hebelarms zwischen der Anschraubplatte und der Lagerung des Drehkreuzes

Durch Verbinden des analytisch formulierten Motormodells (1) mit einem Drehgelenk (3) aus der *Multibody* Bibliothek und der aus dem CAD-Modell abgeleiteten Baugruppe des Drehkreuzes (4) im Hauptmodell wird das Gesamtsystem abgebildet. Die Übersetzung des Riementriebes wird durch die Verstärkungsblöcke (2) mit dem Übersetzungsverhältnis der Riemenscheiben von  $i=1:4,48$  realisiert. In Vorbereitung auf die später durchgeführten gekoppelten DEM-MK-Simulationen mit diesem Modell verfügt es über Ausgänge (7) für den Datenaustausch mit dem DEM-Simulationsprogramm zur Übertragung der Drehzahl und des an der Lagerung wirkenden Moments aus der MK-Simulation in die DEM-Simulation. Der Eingang (6) ist für die Momenten-Rückkopplung aus der DEM-Simulation in die MK-Simulation vorgesehen. Die elektrischen Parameter des Asynchronmotors werden mit den Konstanten für die Nennleistung (8) und der gewählten Frequenz (9) an die im jeweiligen Experiment verwendeten Parameter angepasst.

Für den Vergleich der in der Mehrkörpersimulation ermittelten Drehzahl und Leistung mit der im entsprechenden Experiment gemessenen Drehzahl und Leistung, wird das Mehrkörpermodell zunächst ohne zusätzliche Masse am Drehgelenk für die in den Experimenten am Umrichter eingestellten Frequenzen von 5 Hz bis 50 Hz in 5 Hz Schritten simuliert. Es wirken dabei nur die Massenträgheiten des Motors und des aus dem CAD-Modell importierten Drehkreuzes, sowie die Reibungswiderstände der Lagerung und des Riementriebes der Übersetzung. Diese Massenträgheiten sind rotationssymmetrisch zur Drehachse. Es wird erwartet, dass keine

periodischen Schwingungen in den Simulationsergebnissen für die Leistung des Asynchronmotors auftreten.

In der zunächst nicht gekoppelten Mehrkörpersimulation ergibt sich die im Diagramm in Abbildung 4-28 dargestellte Leistungsaufnahme des Asynchronmotors für die Versuchsreihe I ohne zusätzliche Last am Drehkreuz. Die in den Experimenten beobachtete Schwingung aufgrund der fertigungsbedingten Unwucht des Drehkreuzes wird in der MK-Simulation vernachlässigt.

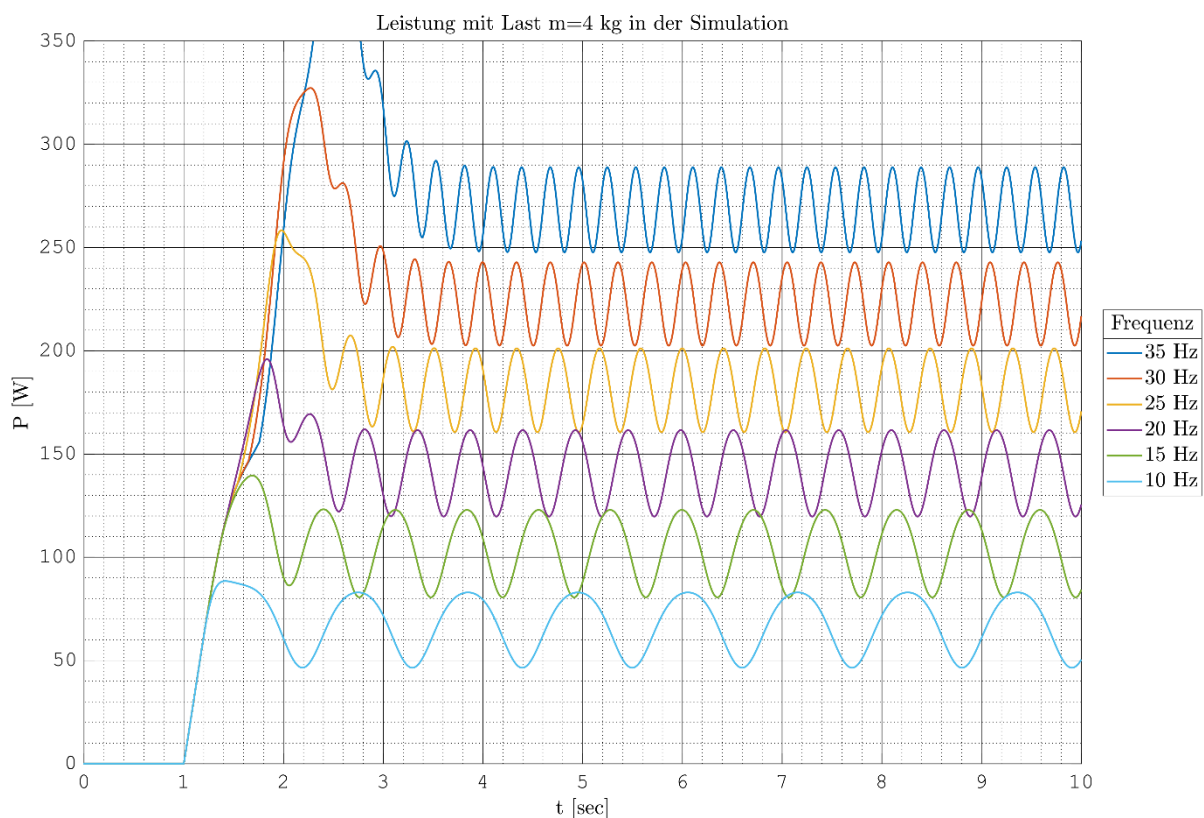


**Abbildung 4-28:** In der MK-Simulation ermittelte Leistung der Asynchronmaschine ohne zusätzliche Last für den Frequenzbereich von 5 bis 50 Hz

Die für jede Frequenz ermittelte maximale Leistung entspricht den in den Experimenten ermittelten maximalen Leistungen (vergl. Abbildung 4-23). Das Maschinenmodell bildet das Leerlaufverhalten des vereinfachten Versuchsstandes gut ab. Es treten keine periodischen Schwingungen im Verlauf der in der MK-Simulation ermittelten Leistung auf. Das Beschleunigungsverhalten des Gesamtsystems entspricht dem im Experiment beobachteten Verhalten. Die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie des Asynchronmotors und die Bewegungswiderstände und Massenträgheiten des vereinfachten Versuchsstandes ohne zusätzliche Last wurden erfolgreich aus den Experimenten in das Modell übertragen.

Im Folgenden wird das anhand des Leerlaufverhaltens parametrisierte Maschinenmodell mit Hilfe des vereinfacht angenommenen Schöpfvorgangs gemäß Versuchsreihe II durch aufbringen einer exzentrisch angebrachten Last überprüft. Im Simulationsmodell wird eine zusätzliche Masse von 4 kg mit einem Hebelarm von 0,129 m mit dem Lagerungselement des Drehkreuzes verbunden (Nr. (5) in Abbildung 4-27). Dies bewirkt ein vom Drehwinkel abhängiges, zusätzliches Moment, welches durch die Übersetzung des Riemengetriebes auf den Antrieb wirkt. Es wird erwartet, dass sich ein zu den Experimenten der zweiten Versuchsreihe analoger Verlauf der Leistungsdiagramme ergibt.

Für die Mehrkörpersimulation der zweiten Versuchsreihe ergeben sich für die Anregungsfrequenzen von 10 Hz bis 35 Hz die in Abbildung 4-29 dargestellten Verläufe der Leistungskurven.



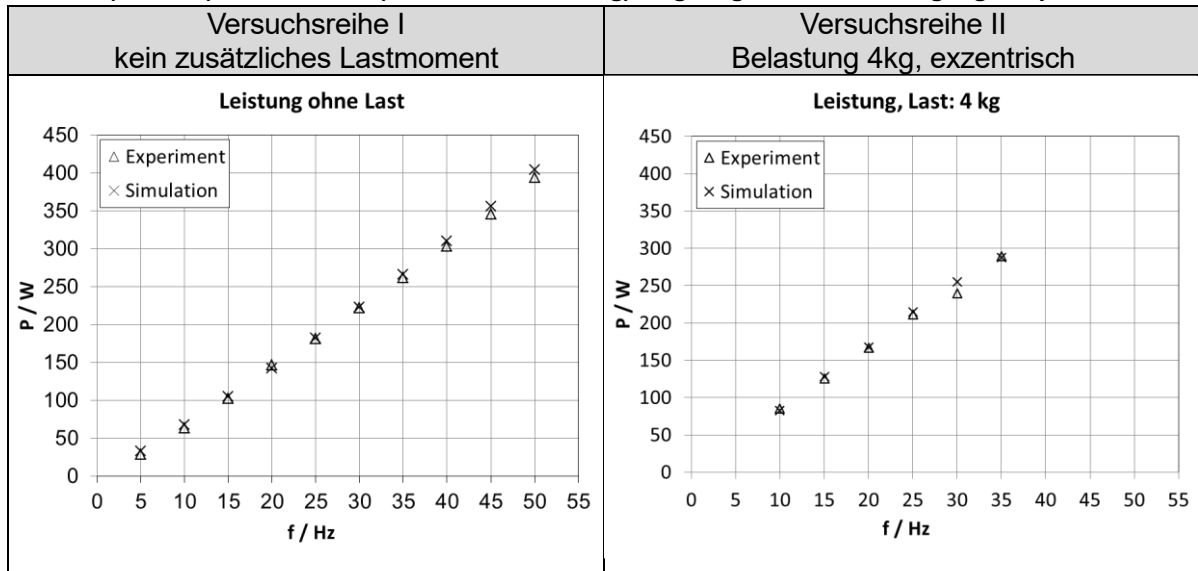
**Abbildung 4-29: Ermittelte Leistung des Asynchronmotors in der ungekoppelten MK-Simulation mit einer exzentrischen Last von  $m=4$  kg und Erregerfrequenzen von 10 Hz, 15 Hz, 20 Hz, 25 Hz und 30 Hz**

Analog den durchgeführten Experimenten entspricht der erste Peak der aus der Beschleunigungsarbeit des Gesamtsystems und der Hubarbeit zum Anheben der zusätzlichen Masse resultierenden Leistung. Die frequenzabhängige Schwingung im stationären Zustand entspricht dem Bewegungsverhalten der zusätzlichen Last am Drehkreuz für das periodische Heben und Senken. Der Betrag der Amplitude dieser Schwingung entspricht dem Betrag der Amplitude der im Experiment für das Heben der Masse von 4 kg ermittelt wurde. Die Periodendauer ist proportional zu der vorgegebenen Frequenz des modellierten

Asynchronmotors und der konstanten Übersetzung des Riemengetriebes. Sie stimmt mit der Periodendauer in den Experimenten überein.

Tabelle 4-7 fasst die Ergebnisse der Experimente und der MK-Simulation für die Versuchsreihen I und II für die untersuchten Anregungsfrequenzen zusammen.

**Tabelle 4-7: Gegenüberstellung der maximal benötigten Leistung in Experiment und Simulation für den Lastfälle I (Leerlauf) und Lastfall II (statische Last  $m=4\text{kg}$ ) aufgetragen über die Anregungsfrequenz**

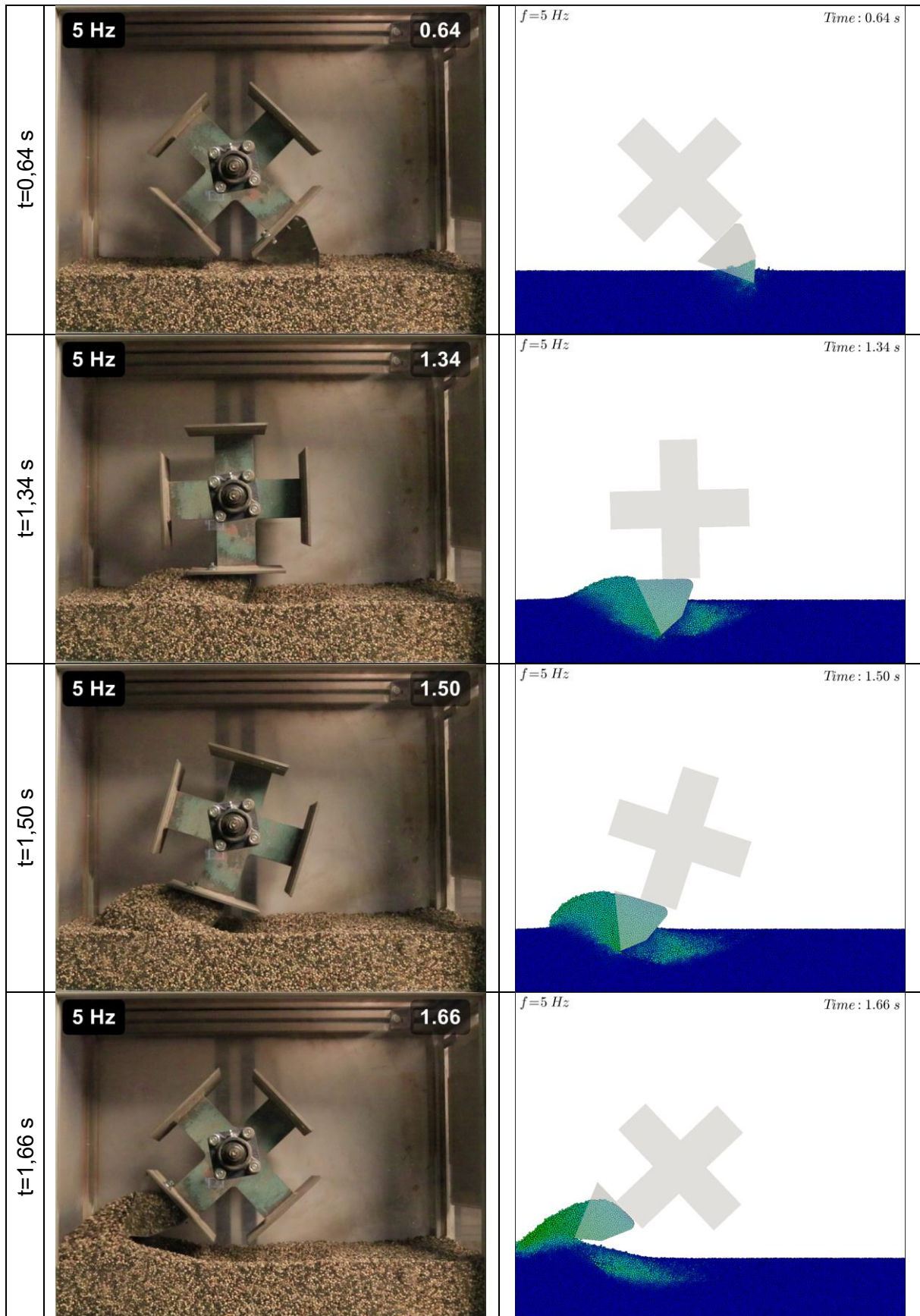


Für eine Anregungsfrequenz von 5 Hz ist das Anlaufmoment des Motors zu gering, um das Drehkreuz mit der zusätzlichen Masse zu beschleunigen. Das MKS Modell zeigt ebenfalls dieses Verhalten für eine zusätzliche Masse von 4 kg und einer Anregungsfrequenz von 5 Hz. Der Vergleich der maximalen Leistung im Experiment und in der nicht gekoppelten Mehrkörpersimulation zeigt, dass die Simulation geringfügig höhere Leistungen berechnet, als im Experiment ermittelt. Diese Abweichung ist auf die getroffenen Vereinfachungen in der Modellierung des Antriebssystems zurück zu führen.

#### 4.4.3.5 Durchführung und Vergleich der Validierungsexperimente

Das Verbinden des Mehrkörpermodells in die gekoppelte DEM-MK-Simulation erfolgt durch den Export des Modells in eine Functional Mockup Unit (FMU) aus Matlab Simulink und Einbindung in die DEM-Software LIGGGHTS®. Die mit dieser FMU durchgeführte gekoppelte DEM-MK-Simulation teilt sich in zwei Phasen. Phase 1 ist die Partikelgenerierungsphase. Diese wird dahingehend realisiert, dass zunächst die gewünschte Anzahl Partikel im oberen Bereich des Simulationsraums generiert werden und aufgrund des Schwerkrafteinflusses zu Boden sinken. Der Antrieb ist in dieser Phase abgeschaltet. Die Schüttgutoberfläche wird nach der Generierungsphase auf der gewünschten Höhe von 115 mm abgeschnitten. In der zweiten Phase wird der Antrieb aktiviert und läuft auf die gewählte Nenndrehzahl an. Abbildung 4-30 stellt ausgewählte Bewegungszustände für den ersten Schöpfvorgang in Experiment und Simulation gegenüber.





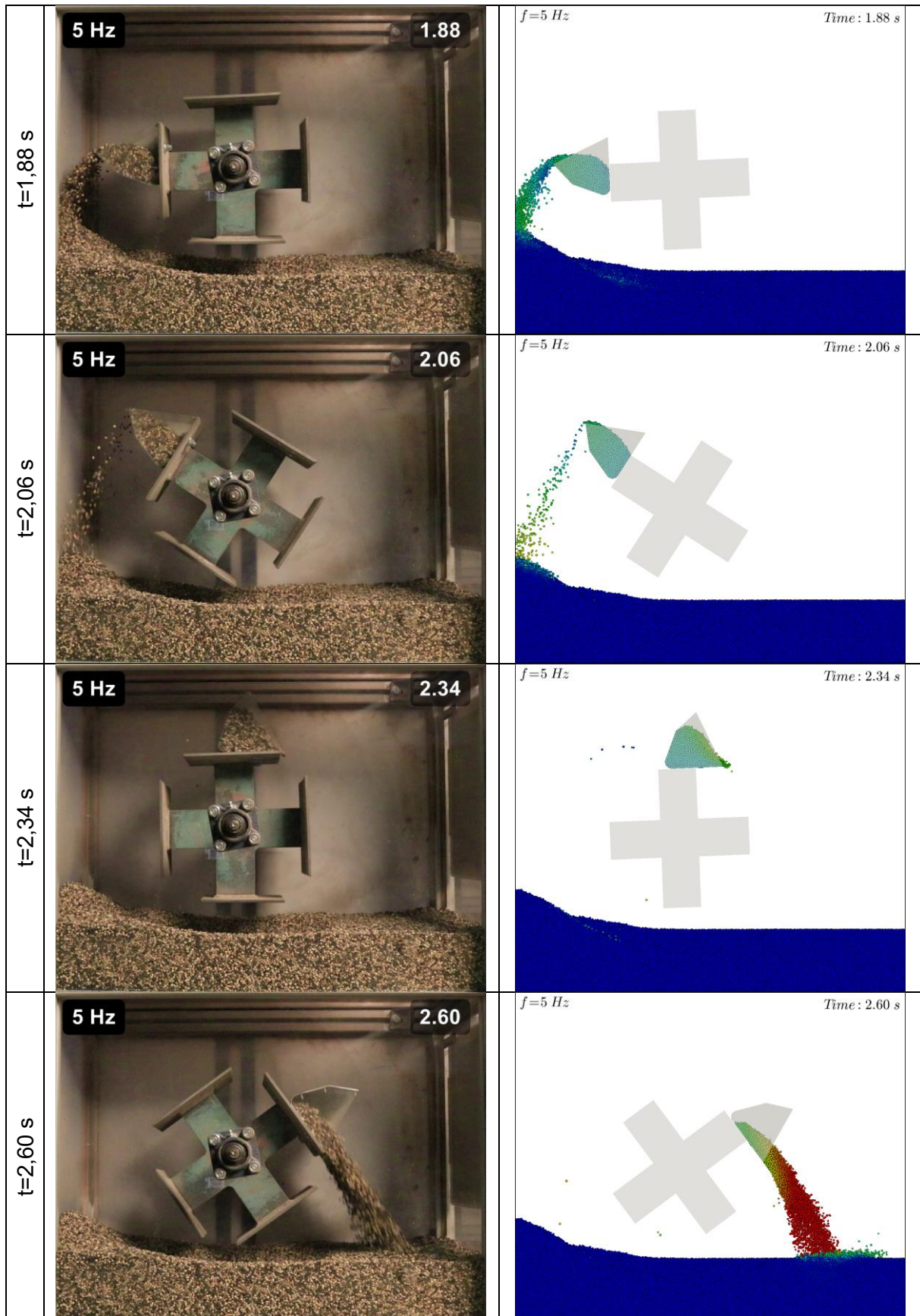


Abbildung 4-30: Ausgewählte Bewegungszustände des Förderverhaltens des vereinfachten Versuchszustandes im Experiment und in der Simulation für den ersten Schöpfvorgang,  $f=5$  Hz, Schüttgut: PVC-Granulat, Simulationsansicht in der Mitte des Behälters geschnitten, Einfärbung  $0 < v_{\text{Partikel}} < 2$  m/s

Der qualitative Vergleich des Förderverhaltens des vereinfachten Versuchstandes zeigt, dass der Schöpfvorgang in der gekoppelten DEM-MK-Simulation mit dem kalibrierten Schüttgut PVC-Granulat und dem parametrisierten Mehrkörpermodell sehr gut abgebildet wird.

Für den quantitativen Vergleich des Schöpfprozesses werden in der gekoppelten DEM-MK-Simulation die Drehzahl und das Moment der modellierten Asynchronmaschine aufgezeichnet und die benötigte Leistung berechnet. Die Drehzahl- und Leistungs-Zeit Diagramme zeigen das typische, periodische Lastkollektiv beim Schöpfen der Becher im unteren Bereich des Schüttgutkastens (vergl. Abbildung 4-31 und Abbildung 4-32).

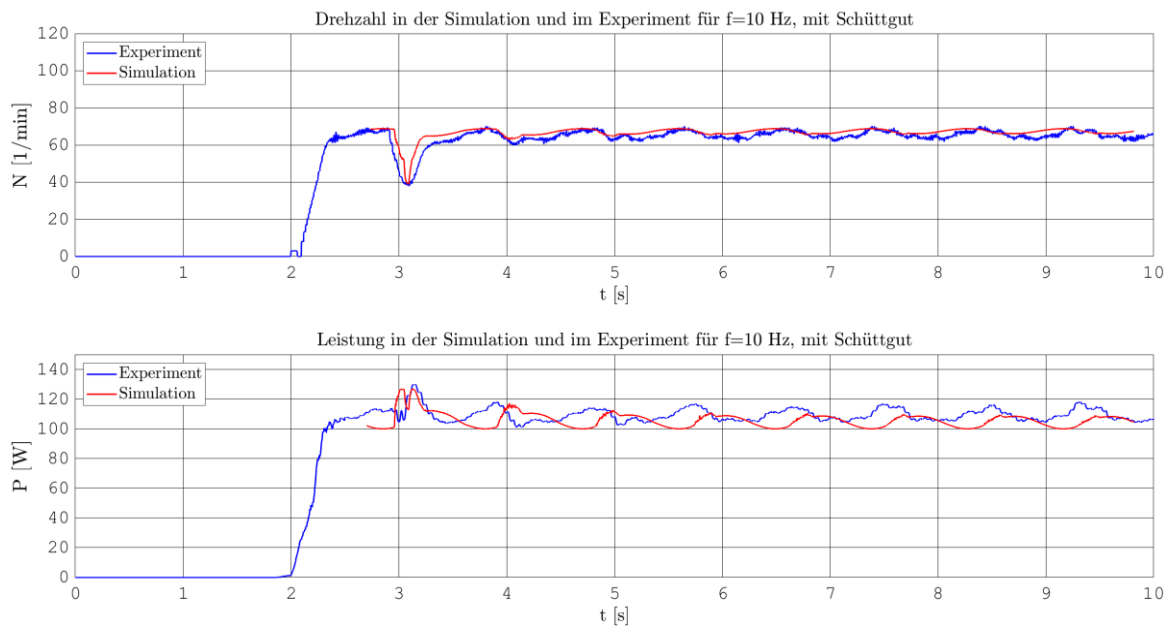


Abbildung 4-31: Ermittelte Drehzahl und Leistung in der Simulation und im Experiment für f=10 Hz

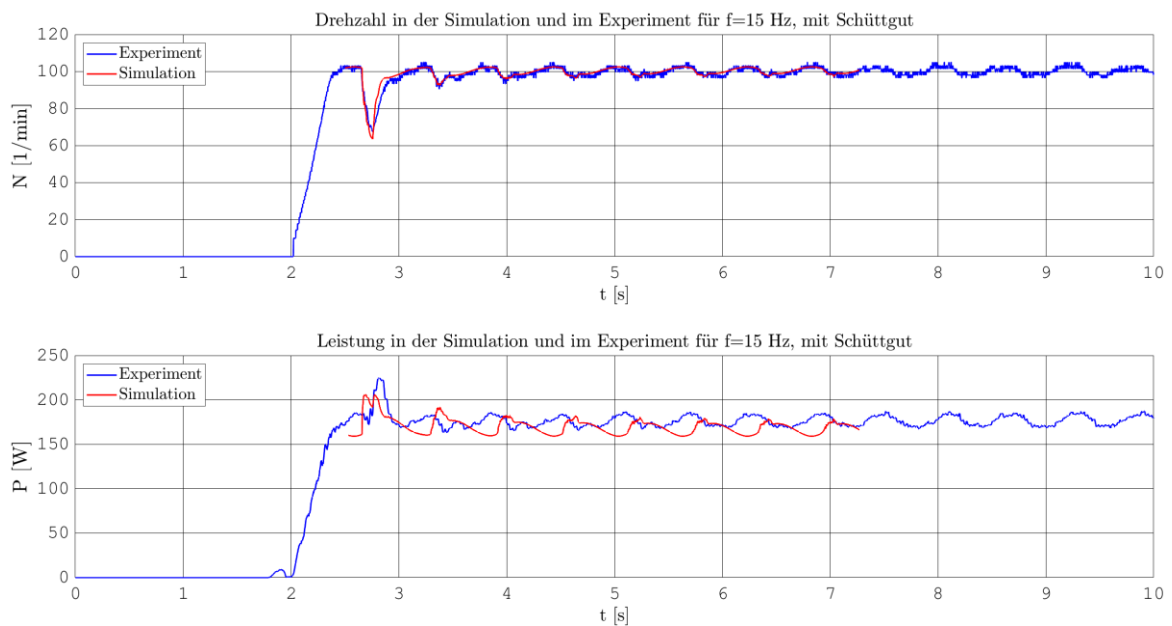


Abbildung 4-32: Ermittelte Drehzahl und Leistung in der Simulation und im Experiment für f=15 Hz

Die durchgeführten Messreihen am vereinfachten Versuchsstand des Versuchsbecherwerkes mit Hilfe eines Drehzahlsensors, welcher vom Riemen des Riemengetriebes angetrieben wird und einem Wirkleistungsmessgerätes, welches zwischen Frequenzumrichter und Asynchronmaschine eingebaut ist, zeigen den gleichen Drehzahlverlauf und die gleiche, um den Wirkungsgrad bereinigte, Leistungsaufnahme des Motors, wie die Simulationsergebnisse der gekoppelten DEM-MK-Simulationen.

Die Reduzierung der Drehzahl aufgrund der parametrisierten Drehmoment-Drehzahlkennlinie im Mehrkörpermodell wird in der Simulation gut abgebildet. Die benötigte maximale Leistung für den ersten Schöpfvorgang wird vom Simulationsmodell gut dargestellt. Der Verlauf der Leistung weicht von dem im Experiment ermittelten Verlauf geringfügig ab, da die Einflüsse des Regelkreises des realen Frequenzumrichters nicht im Simulationsmodell enthalten sind. In zukünftigen Anwendungen muss daher der Frequenzumrichter als Komponente in der Simulation, entgegen der Vereinfachung in dieser Arbeit, berücksichtigt werden.

Für den Vergleich des Schöpfvorgangs sind die Diagramme der Simulation zeitlich verschoben, da der Becher sich in der Simulation in der oberen Stellung befindet, um einen initialen Kontakt der Bechergeometrie mit den Partikeln im Anschluss an die Partikelgenerierungsphase zu vermeiden. In den Experimenten beginnt der Bewegungsvorgang hingegen, während der Becher auf dem Schüttgutbett auf der linken Seite aufliegt.

In der Simulation nimmt die benötigte Leistung für den zweiten und die folgenden Schöpfvorgänge stärker ab als in den Experimenten. Dies ist auf die verbleibende Abweichung in der durchgeführten Kalibrierung des Schüttguts zurückzuführen. Durch Erhöhung der Rollreibung in der Simulation wird versucht, die zylindrische Form der realen Partikel in der Kalibrierung abzubilden. Die erhöhte Rollreibung führt dazu, dass das Schüttgut in der Simulation schlechter fließt. Der Becher hinterlässt in der Simulation daher einen geringfügig größeren Graben im Schüttgutbett, sodass für den nächsten Schöpfvorgang weniger Schüttgut zur Verfügung steht. Der Verlauf des Schöpfwiderstands nimmt daher in der Simulation stärker ab.

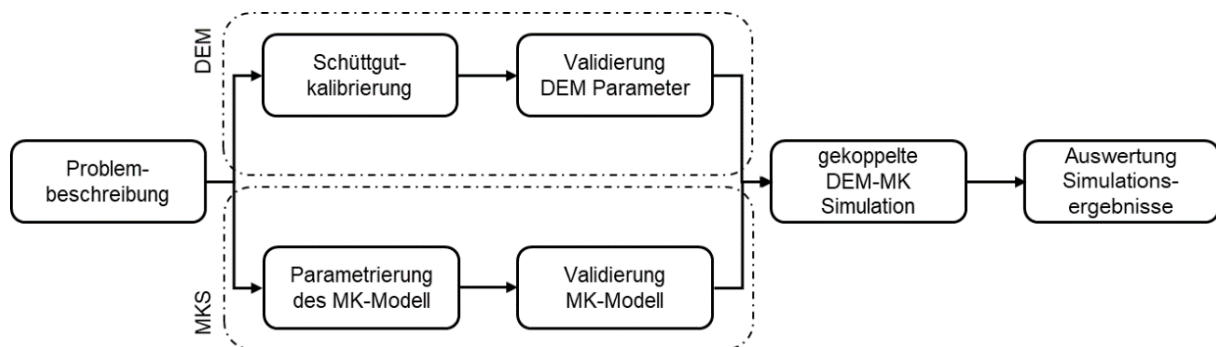
Der Vergleich der durchgeführten Experimente mit den Ergebnissen der äquivalenten DEM-MK-Simulationen zeigt, dass die in dieser Arbeit entwickelte und implementierte Simulationsmethode geeignet ist, reale Förderanlagen unter Einbeziehung des Schüttguteinflusses abzubilden, wenn die Simulationsparameter des Schüttguts sehr genau kalibriert sind.

## 4.5 Zusammenfassung

Der generelle Ablauf zur Durchführung einer gekoppelten DEM-MK-Simulation lässt sich in vier Arbeitsschritte einteilen:

1. Simulationsaufgabe und Problembeschreibung formulieren
2. Parametrierung, Kalibrierung und Validierung der Maschinen- und Materialmodelle
3. Durchführung der gekoppelten Simulation
4. Auswertung und Analyse der Simulationsergebnisse

Abbildung 4-33 stellt den Ablauf der einzelnen Phasen dar. Aufgrund der notwendigen Berechnungsdauern der notwendigen Simulationen können und sollten die Teilarbeitsschritte des zweiten Arbeitsschrittes zeitlich parallel erfolgen.



**Abbildung 4-33: Generellerer Ablauf zur Durchführung von gekoppelten DEM-MK-Simulationen**

Der Arbeitsschritt eins umfasst die Definition von Systemgrenzen, notwendigen Vereinfachungen, das Erstellen eines Versuchsplans und die Generierung von CAD Modellen des betrachteten Systems für die folgende Arbeitsschritte. Der zweite Arbeitsschritt gliedert sich in je zwei Teilarbeitsschritte. Dem Parametrieren des Maschinenmodelles und dessen Validierung, sowie der Kalibrierung der Materialparameter für die DEM-Simulation des verwendeten Schüttguts. Dabei ist darauf zu achten, bereits in dieser Phase das Schüttgut hinsichtlich der Korngrößenverteilung so genau wie möglich aber nur so feinkörnig wie nötig abzubilden. Im Anschluss an die zweite Phase wird die gekoppelte DEM-MK-Simulation mit dem validierten Maschinenmodell und dem kalibrierten Schüttgut durchgeführt. Für die Auswertung der Simulationsergebnisse bieten sich die Erfassung von Leistungsparametern des Maschinenmodells sowie die Analyse des Schüttgutverhaltens in Interaktion mit der modellierten Förderanlage anhand von Visualisierungsergebnissen an.

## 5 Beitrag zur Analyse des Bewegungsverhaltens von Becherwerken

### 5.1 Vorstellung des Versuchsbecherwerks

In dieser Arbeit wird ein Versuchsbecherförderer mit einem Achsabstand von 5,5 m und einer Becherteilung  $l_T = 138$  mm verwendet. Die Durchmesser der Antriebs- und Spanntrommel betragen jeweils  $d_T = 400$  mm. Der Becherstrang besteht aus 89 Bechern vom Typ 125 x 106 - C nach HELLMUTH [4].

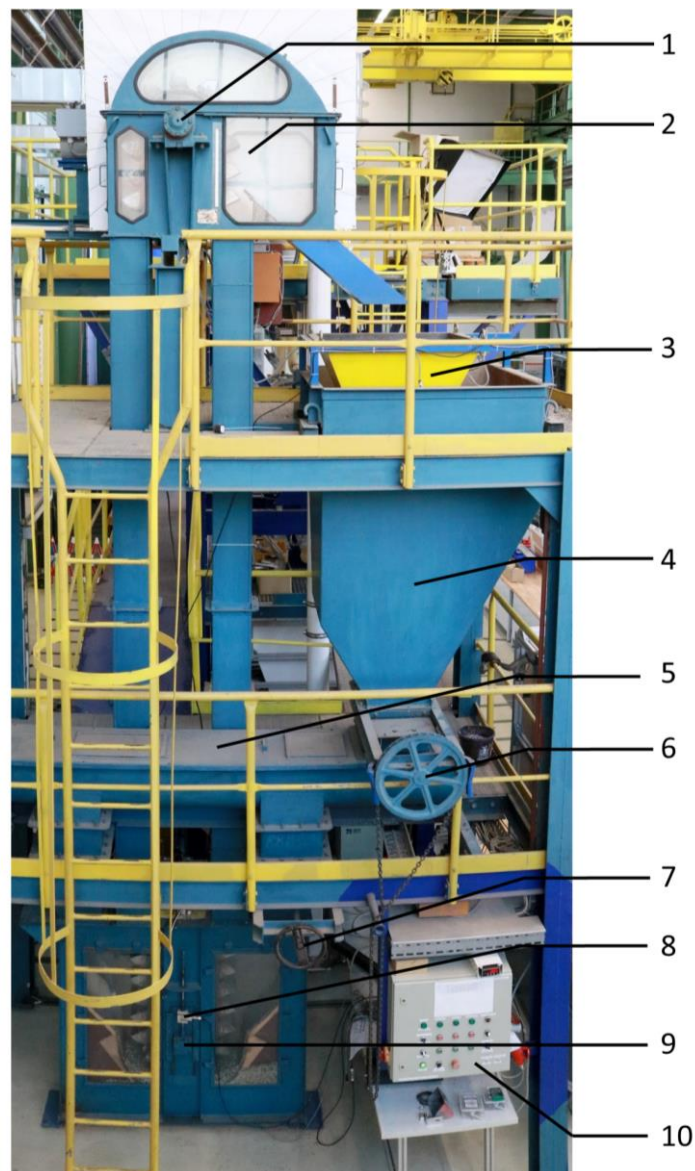
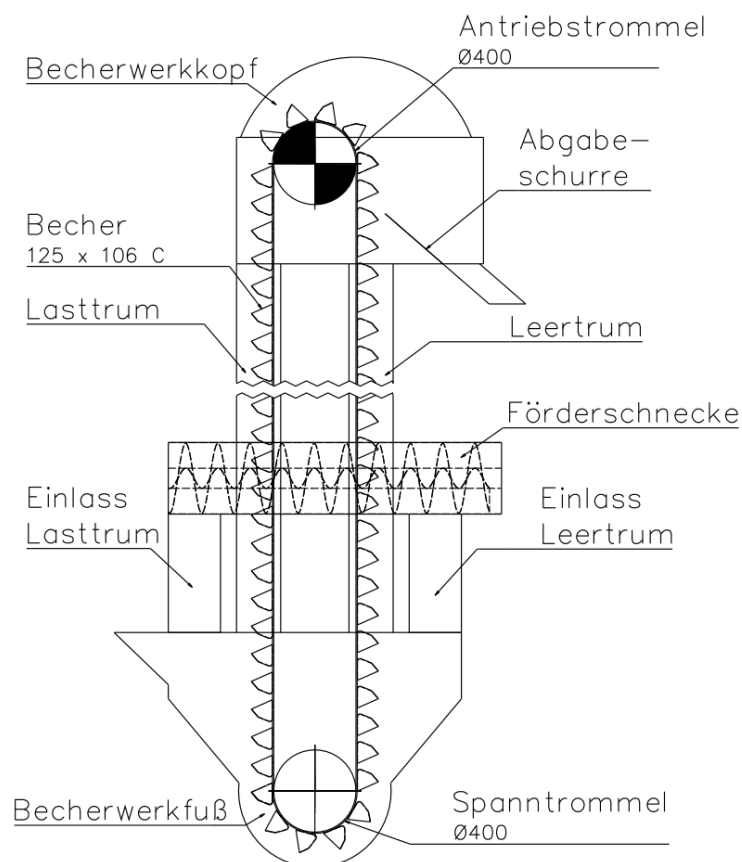


Abbildung 5-1: Versuchsbecherwerk am Institut für Logistik und Materialflusstechnik

Das Versuchsbecherwerk ist in einen Schüttgutkreislauf integriert. Ein Vorratsbunker (4) beschickt durch einen verstellbaren Schieber (6) einen waagerechten Schneckenförderer (5).

Durch Öffnen oder Schließen eines weiteren Schiebers (7) unterhalb des Schneckenförderers, lässt sich die Beschickungsart des Becherförderers auf der Leer- oder Lastrumseite einstellen. Das Fördergut kann wahlweise in einen Messbunker (3), der sich im Vorratsbunker befindet und auf drei Kraftmessdosen gelagert ist, oder direkt in den Vorratsbunker (4) entleeren. Durch Aufzeichnen der Gewichtskraft des Schüttgutes im Messbunker wird der Massenstrom bestimmt. Die Spannvorrichtung (9) am Becherwerkfuß ist mit zwei Kraftmessdosen (8) ausgestattet. Dies ermöglicht die Messung der Vorspannung des Zugmittels. Die Fördergeschwindigkeit wird mit einem Frequenzumrichter (10), der den Asynchronmotor der Antriebstrommel speist, gesteuert. Die Antriebstrommel verfügt über eine Rücklaufsperre (1) als Sicherheitseinrichtung. Zur Dokumentation des Schöpf- und Entleerungsverhalten mit Hochgeschwindigkeits-Videoaufnahmen sind der Becherwerkkopf einseitig und der Becherwerkfuß beidseitig mit Sichtfenstern (2) ausgestattet. Die elektrische Leistung des Antriebs wird durch ein Wirkleistungsmessgerät, welches zwischen der Netzeinspeisung und dem Frequenzumrichter eingesetzt ist, erfasst. Die Drehzahl des Motors stellt der Frequenzumrichter über eine analoge Schnittstelle zur Verfügung. Abbildung 5-2 stellt die technischen Daten und das Anlagenschema des Materialkreislaufs des Versuchsbecherförderers grafisch dar.



**Abbildung 5-2: Anlagenschema des Materialkreislaufs des ILM-Versuchsbecherwerks, zur besseren Übersichtlichkeit ist der Vorratsbunker nicht eingezeichnet**

## 5.2 Gekoppelte DEM-MK-Simulation von Senkrechtbecherwerken

Im Folgenden wird die in dieser Arbeit entwickelte Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation zur Analyse des Einflusses des Bechernickens auf das Schöpf- und Entleerungsverhalten von Senkrechtbecherwerken angewendet.

### 5.2.1 Simulationsmodell des Versuchsbecherwerks

Das elastische Verhalten des Becher-Gurt-Systems wird in den folgenden Unterkapiteln durch ein Mehrkörper-Simulationsmodell des realen Versuchsbecherwerks des ILM abgebildet. Analog zu der Modellierung von MCBRIDE [14] wird die Verbindung der Becher und des Zugmittels als eindimensionales Gelenk mit angekoppelten Feder-Dämpfer System dargestellt (vergl. Abbildung 5-3).

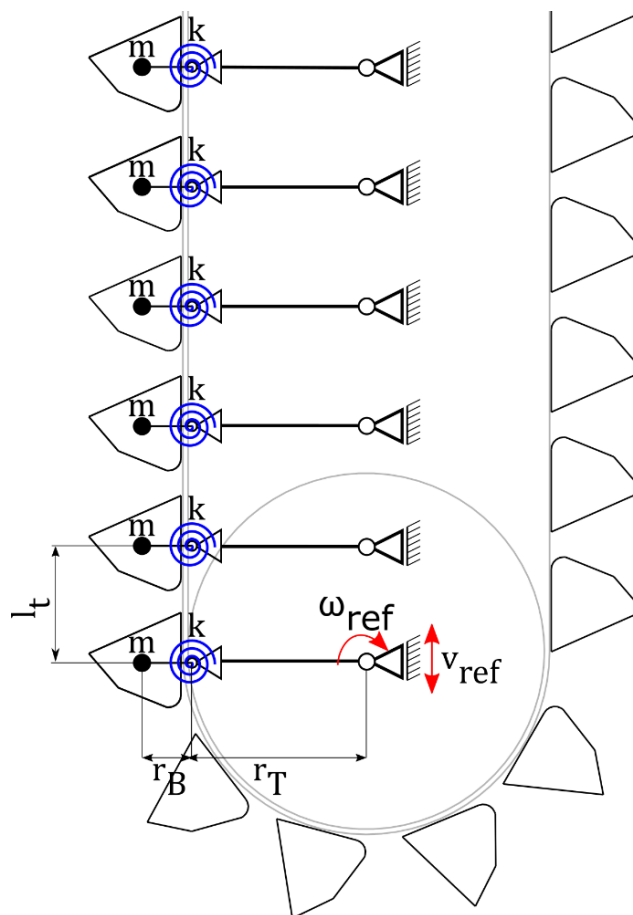


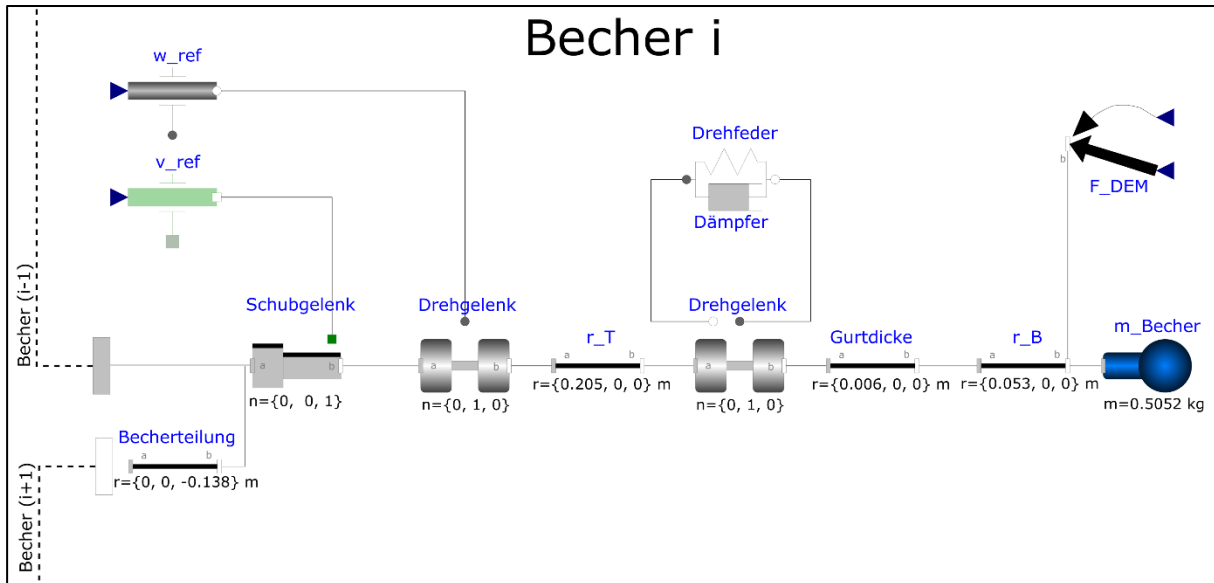
Abbildung 5-3: Mechanisches Ersatzmodell des Becher-Gurt-Systems, bestehend aus Ortsvorgabe der virtuellen Gurtrajektorie, einer elastischen Ankopplung des Bechers an den Gurt und der als Punktmasse angenommenen Masse eines Bechers

Die Bechermasse wird als Punktmasse modelliert. Das elastische Verhalten wird durch eine Drehfeder und einen Dämpfer abgebildet. Das Becher-Gurt-System ist an einem weiteren Drehgelenk und einem Schubgelenk gelagert. Die Geschwindigkeitsvorgabe der einzelnen Becher erfolgt durch Aufprägen einer translatorischen bzw. rotatorischen Geschwindigkeit in den



Schub- bzw. Drehgelenken der jeweiligen Becher. Der Freiheitsgrad dieser Gelenke ist gesperrt, wenn die Geschwindigkeitsvorgabe Null ist. Der Hebelarm zwischen dem Schwerpunkt des Bechers und dem ersten Drehgelenk beträgt  $r_B = 0,053$  m. Der Trommelradius zuzüglich der Gurtstärke wird als konstante Verschiebung  $r_T = 0,205$  m in X-Richtung zwischen den beiden Drehgelenken modelliert. Die Becherteilung  $l_t = 0,138$  m ist als konstante Verschiebung in Z-Richtung dargestellt.

Abbildung 5-4 stellt das dem mechanischen Ersatzmodell eines Bechers entsprechende Modelica-Modell grafisch dar.



**Abbildung 5-4: Modelica-Modell des mechanischen Ersatzschaltbildes zur Modellierung der elastischen Verbindung zwischen Gurt und Becher; Rechts: kinematische Schnittstelle zum vorherigen bzw. nächsten Becher; Mitte: Antrieb und vereinfachtes Becher-Gurtmodell; Rechts: Schnittstelle zur DEM-Simulation und Bechermasse modelliert als Punktmasse im Becherschwerpunkt  $r_B$**

Da in dieser Arbeit auf die Berechnung der Verformung des Gurtes verzichtet wird, ist das Simulationsmodell des Versuchsbecherwerks in 89 identische Untermodelle vom Typ `Becher` aufgeteilt. Im Hauptmodell werden die Bechermodelle durch eine offene kinematische Kette miteinander verbunden. Die äußeren Kräfte, welche aus der DEM-Simulation übergeben werden, greifen im Schwerpunkt des Bechers an. Die Steuerung der aktuellen Geschwindigkeit der Becher erfolgt durch Aufprägen einer translatorischen ( $v_{ref}$ ) beziehungsweise rotatorischen ( $\omega_{ref}$ ) Geschwindigkeit im Schub- bzw. Drehgelenk. Die Geschwindigkeitsvorgabe der Stellglieder wird mit Hilfe eines Zustandsautomaten (vergl. Abbildung 5-5), in Abhängigkeit der aktuellen Becherposition, berechnet. Daraus ergibt sich eine Zwangsführung des Becher-Gurt-Systems an dessen Lagerposition entlang der virtuellen Trajektorie des Zugmittels.

```

%Zustandsautomat Modell Becher.mo
algorithm
%Anfangsposition: Kreisbahn oder Gerade
  when initial() then
    if translate.frame_b.r_0[3]<=0.0 then %x(t0)=f(x(t0))
      vbelt:=0;
      wbelt:=w;
    else
      vbelt:=-v;
      wbelt:=0;
    end if;
  end when;
%Umschaltbedingung 1: Kreisbahn Spanntrommel->Gerade aufwärts
When revolute.angle>=Modelica.Constants.pi then
  wbelt:=0; %setze w=0
  vbelt:=v; %v positiv
end when;

%Umschaltbedingung 2: Gerade->Kreisbahn Kopftrommel
When translate.frame_b.r_0[3]>=h then
  wbelt:=w;
  vbelt:=0;
end when;
%Umschaltbedingung 3: Kreisbahn Kopftrommel->Gerade abwärts
When revolute.phi>=2*Modelica.Constants.pi then
  wbelt:=0;
  vbelt:=-v;
end when;
%Umschaltbedingung 4: Gerade abwärts->Kreisbahn Spanntrommel
When translate.frame_b.r_0[3]<=0 then
  wbelt:=w;
  vbelt:=0;
end when;
v_ref.v_ref:=vbelt;
w_ref.w_ref:=wbelt;

```

**Abbildung 5-5:** Zustandsautomat zur Vorgabe der translatorischen Geschwindigkeit  $v_{ref}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{ref}$  im Bereich der Umlenktrömmeln für die virtuelle Lagerposition des Becher-Gurt-Systems

Abbildung 5-6 zeigt die Visualisierung des Simulationsergebnisses des modellierten Versuchsbecherwerks. Durch die Elastizität der modellierten Becher-Gurt-Verbindung kann die Punktmasse (blaue Kugel) von der Trajektorie der zwangsgeführten Lagerung (schwarzes Rechteck) abweichen. Die modellierte Steifigkeit ist im Vergleich zur Realität gering, das Modell zeigt daher ein deutlich überzeichnetes Bewegungsverhalten. Aufgrund der Massenträgheit der Punktmasse kommt es an der Antriebstrommel und an der Spanntrommel beim Übergang von der Kreisbahn auf die Gerade zu einem deutlichen Übersteuern der Becher (vergl. (2) und (4)). Beim Einlaufen der Becher von der vertikalen Bewegung in die Kreisbahn der Antriebs- bzw. Spanntrommel tritt ein deutliches Untersteuern der Becher auf (vergl. (1) und (3)).

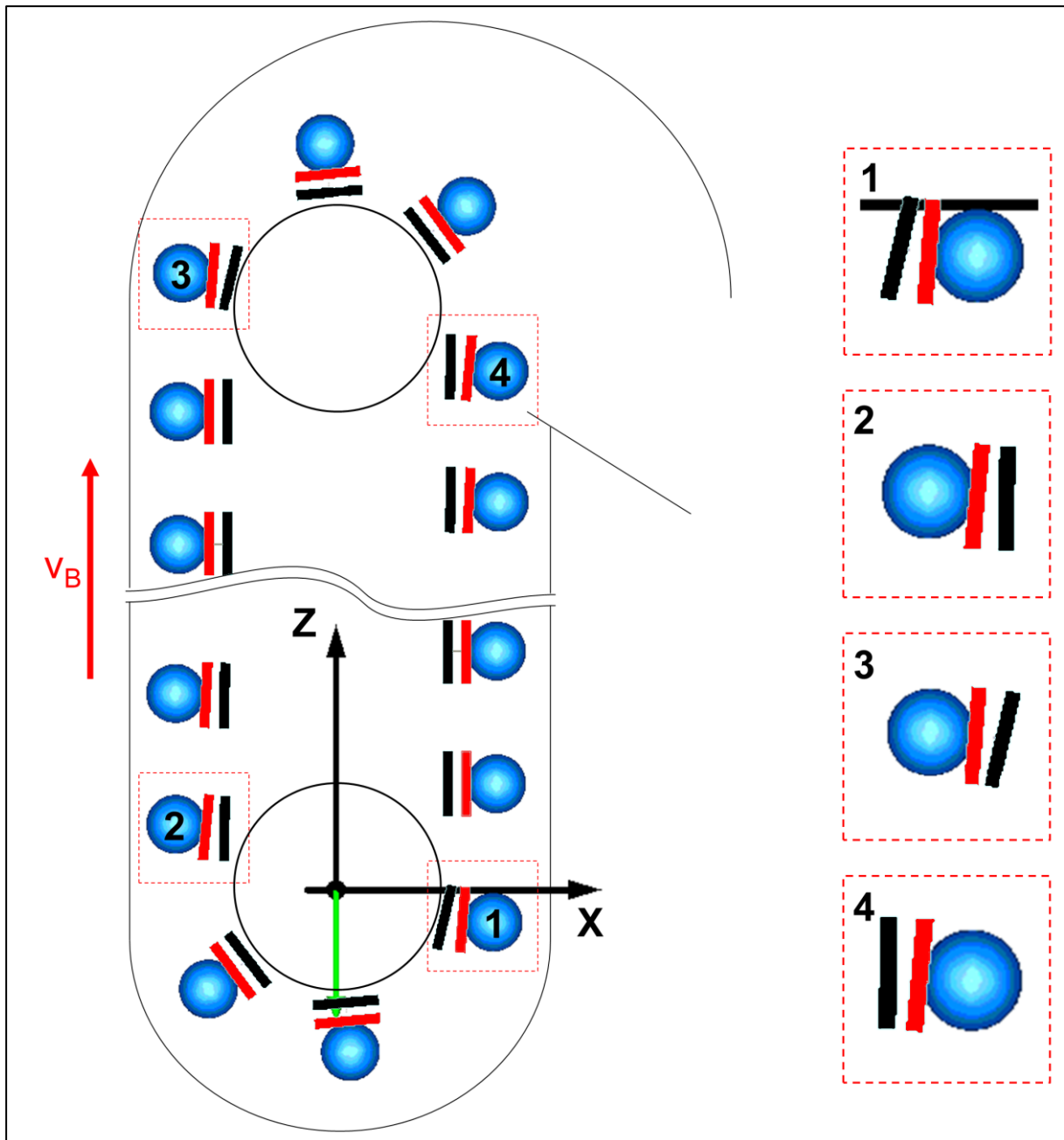


Abbildung 5-6: Visualisierung des Simulationsergebnisses der Mehrkörpersimulation des Becherwerks

Das modellierte Mehrkörpersystem bildet die Trajektorien der Becher und das Bechernicken beim Übergang von einer kreisförmigen in eine geradlinige Bewegung und vice versa gut ab. Die Steifigkeit und Dämpfung der Becher-Gurt-Verbindung muss im Folgenden entsprechend dem realen Bewegungsverhalten der Becher des Versuchsbecherwerks parametrisiert werden.

## 5.2.2 Analyse des Bewegungsverhaltens der Becher

### 5.2.2.1 Messtechnische Erfassung des Bechernickens

Für die Analyse des Bechernickens wird ein Becher des Versuchsbecherwerkes mit einem miniaturisierten Datenlogger mit integriertem Dreiachsigen-Beschleunigungssensor ausgestattet (vergl. Abbildung 5-7). Dies ermöglicht es, die Orientierung des Bechers in Bezug zur Erdbeschleunigung zu ermitteln. Weiterhin wird die Geschwindigkeitsänderung beim Übergang des Bechers von der vertikalen Bewegung in die kreisförmige Bewegung aufgezeichnet. Die Y-Achse des Beschleunigungssensors zeigt in Richtung der Erdbeschleunigung, die Z-Achse orthogonal vom Becherrücken nach außen. Basierend auf diesen Messwerten wird das dynamische Verhalten des Becher-Gurt-Systems analysiert und mit gekoppelten DEM-MK-Simulationen verglichen.

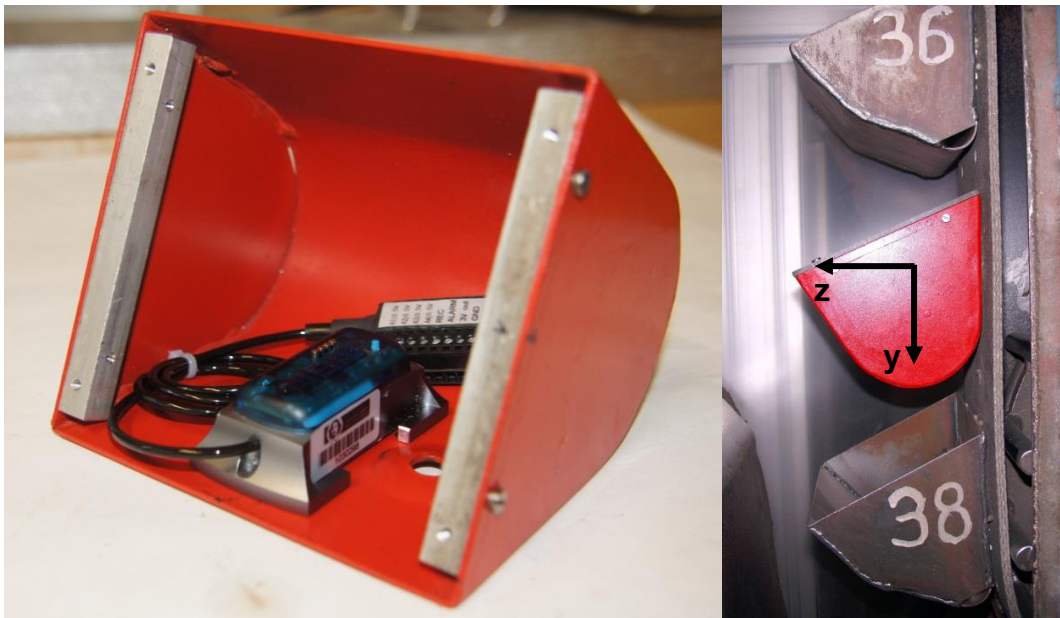


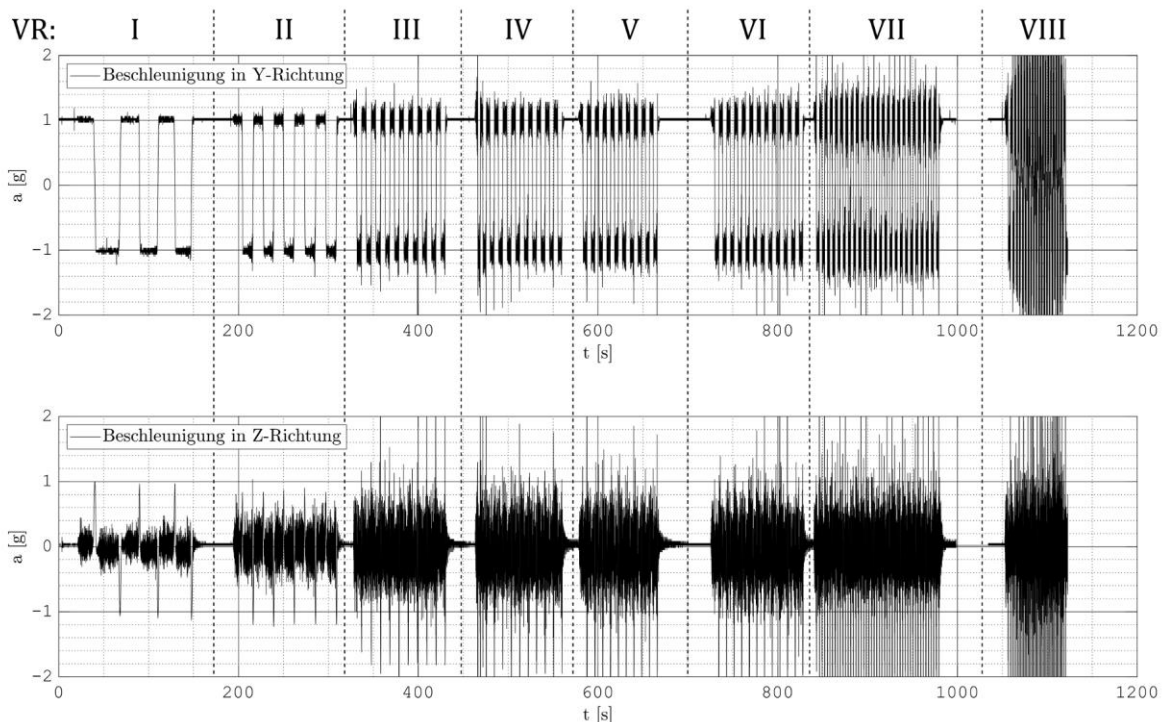
Abbildung 5-7: Messbecher mit Datenlogger mit integriertem Beschleunigungssensor

Die Messung der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen wird ohne den Einfluss von Schüttgut durchgeführt, da eine Datenauswertung durch die chaotisch auftretenden Stöße beim Schöpfen und Einfüllen nicht möglich ist. Die experimentellen Untersuchungen werden für Zugmittelgeschwindigkeiten zwischen 0,27 m/s und 4,22 m/s durchgeführt. Die Parameter der einzelnen Versuchsreihe sind in Tabelle 5-1 zusammengefasst.

**Tabelle 5-1: Drehzahl, Froude-Zahl und zugehörige Entleerungsart unterschiedlicher Zugmittelgeschwindigkeiten in den experimentellen Untersuchungen**

	<b>N [min<sup>-1</sup>]</b>	<b>v<sub>z</sub> [m/s]</b>	<b>Fr<sup>2</sup></b>	<b>Entleerungsart</b>
<b>Versuchsreihe I</b>	<b>12</b>	0,27	0,038	Schwerkraftentleerung
<b>Versuchsreihe II</b>	<b>24</b>	0,53	0,153	Schwerkraftentleerung
<b>Versuchsreihe III</b>	<b>54</b>	1,19	0,775	Mischentleerung
<b>Versuchsreihe IV</b>	<b>59</b>	1,30	0,926	Mischentleerung
<b>Versuchsreihe V</b>	<b>65</b>	1,44	1,124	Fliehkraftentleerung
<b>Versuchsreihe VI</b>	<b>67</b>	1,48	1,194	Fliehkraftentleerung
<b>Versuchsreihe VII</b>	<b>96</b>	2,12	2,451	Fliehkraftentleerung
<b>Versuchsreihe VIII</b>	<b>191</b>	4,22	9,701	Fliehkraftentleerung

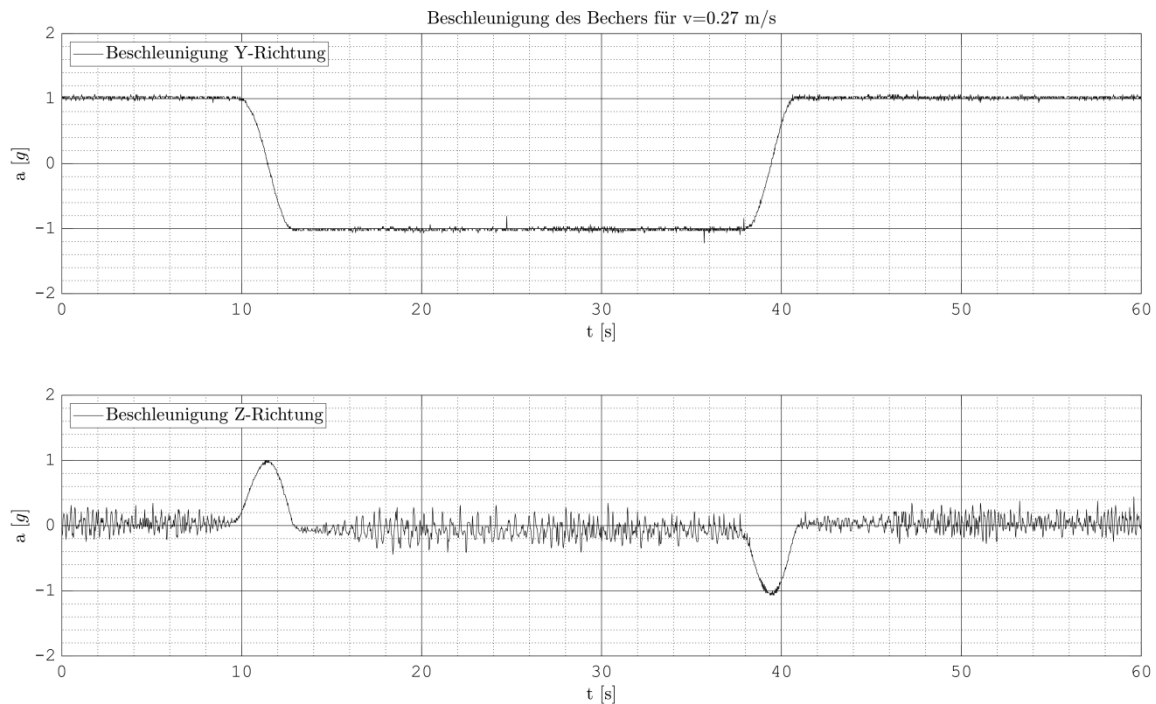
Die Ergebnisse der Messungen der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen sind in Abbildung 5-8 zusammengefasst. Im oberen Diagramm ist die Lageänderung des Bechers bezogen auf die Erdbeschleunigung im Förder- und Rücktrum sichtbar. Im unteren Diagramm ist die Geschwindigkeitsänderung beim Durchfahren des un stetigen Übergangs von der kreisförmigen in die geradlinige Bewegung in Form von Peaks zu erkennen.



**Abbildung 5-8: Messergebnisse der auf einen Becher wirkenden Beschleunigung für Fördergeschwindigkeiten von 0,27 m/s bis 4,22 m/s, an der Spanneinrichtung ist eine hohe Vorspannung (1,8 kN) eingestellt**

Im Folgenden werden die einzelnen Geschwindigkeitsbereiche und die resultierenden Beschleunigungen auf die Becher bei der Umlenkung diskutiert.

Für langsame Fördergeschwindigkeiten im Bereich von  $v = 0,27 \text{ m/s}$  ist kein Überschwingen der Becher beim Auf- und Ablaufen auf die Trommeln in den Beschleunigungsmessungen zu erkennen (vergl. Abbildung 5-9).

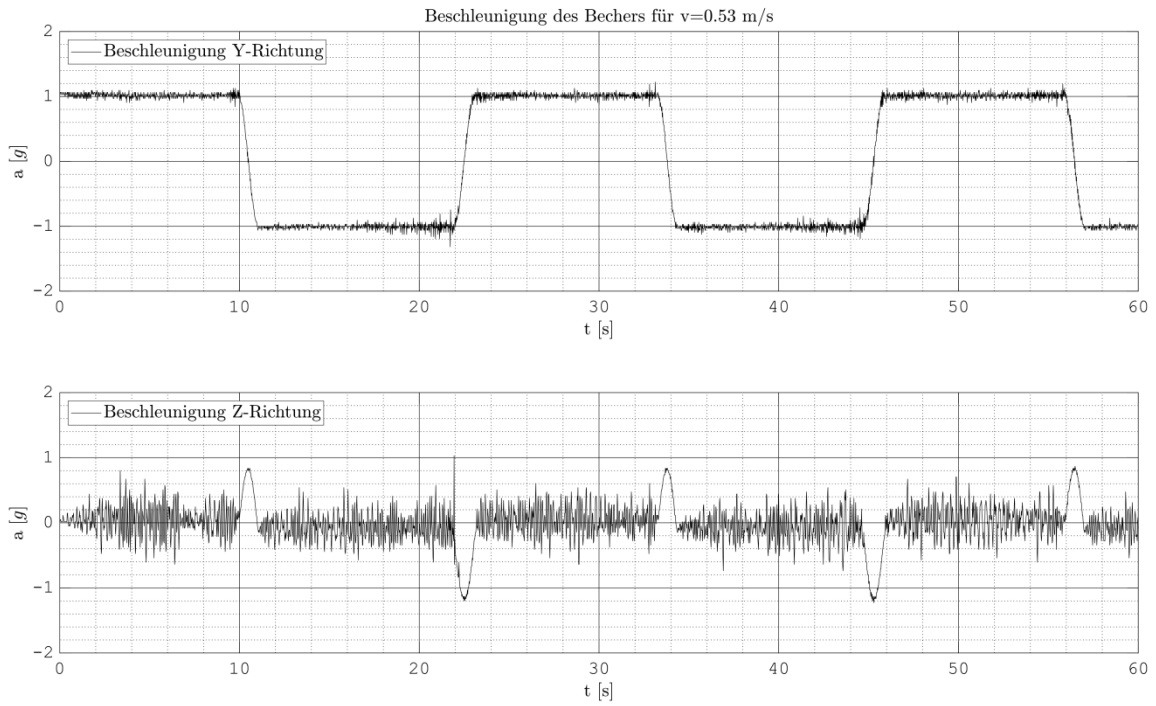


**Abbildung 5-9: auf einen Becher wirkende Beschleunigung bei  $v_z=0,27 \text{ m/s}$**

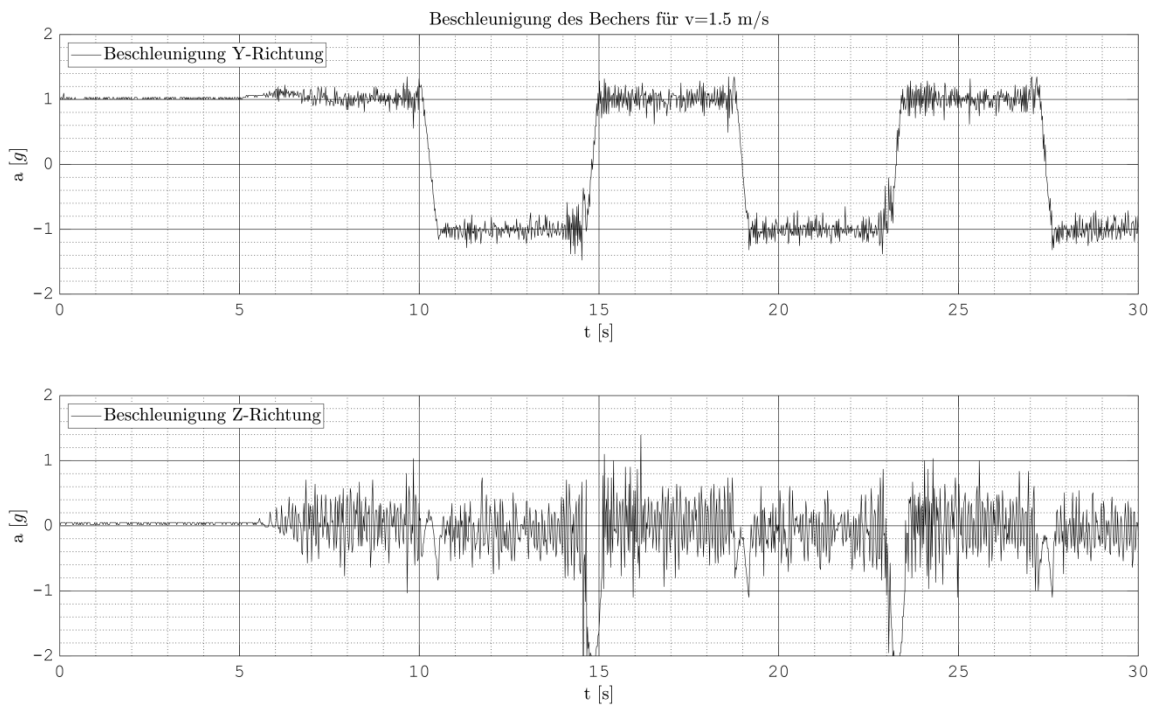
Im oberen Diagramm (Y-Richtung) sind nur geringe Schwingungen im Messsignal der Beschleunigung zu erkennen. Der Verlauf spiegelt den Bewegungsablauf des Bechers entlang der Förderstrecke wieder. Nach dem Heben ( $t < 10 \text{ s}$ ) erfolgt die Umlenkung des Bechers an der Kopftrommel. Die Komponente der Y-Beschleunigung wechselt das Vorzeichen. Es folgt der Rücktrum (bis  $t = 38 \text{ s}$ ) und das Umlenken des Becherstrangs im Becherwerkfuß. Die Schwingungen zwischen den Umlenkungen im Messsignal der Beschleunigung in Z-Richtung werden durch das laterale Schwingen des Gurtes über die Förderlänge von  $5,5 \text{ m}$  verursacht. Im Bereich der Umlenkungen wird der Fördergurt durch die Vorspannung auf die Trommeln gezwungen, sodass keine Schwingungen auftreten.

Für Fördergeschwindigkeiten im Bereich von  $0,53 \text{ m/s}$  bis  $4,22 \text{ m/s}$  sind in den Messsignalen beider Achsen starke Schwingungen zu erkennen (vergl. Abbildung 5-10 bis Abbildung 5-13). Das Bechernicken ist beim Auflaufen der Becher auf die Umlenktrommeln am Messsignal der Beschleunigung in Y-Richtung zu erkennen. Die Schwingungsamplitude wird größer, je geringer der Abstand zur Umlenkung ist. Dies ist damit zu begründen, dass die vorauslaufenden Becher ebenfalls eine Bewegung orthogonal zum Gurt ausführen und diese Schwingung sich in Form einer gedämpften Schwingung vom Auflaufpunkt in Richtung der freien Becher ausbreitet.

Die mit dem Beschleunigungssensor aufgezeichneten Messreihen werden im folgenden Kapitel zur Parametrierung des Mehrkörpermodells verwendet. Sie bilden die Grundlage für die sich anschließenden Analysen zum Bewegungsverhalten von Senkrechtbecherwerken, insbesondere dem Bechernicken.



**Abbildung 5-10: auf einen Becher wirkende Beschleunigung bei  $v_z=0,53 \text{ m/s}$**



**Abbildung 5-11: auf einen Becher wirkende Beschleunigung bei  $v_z=1,5 \text{ m/s}$**

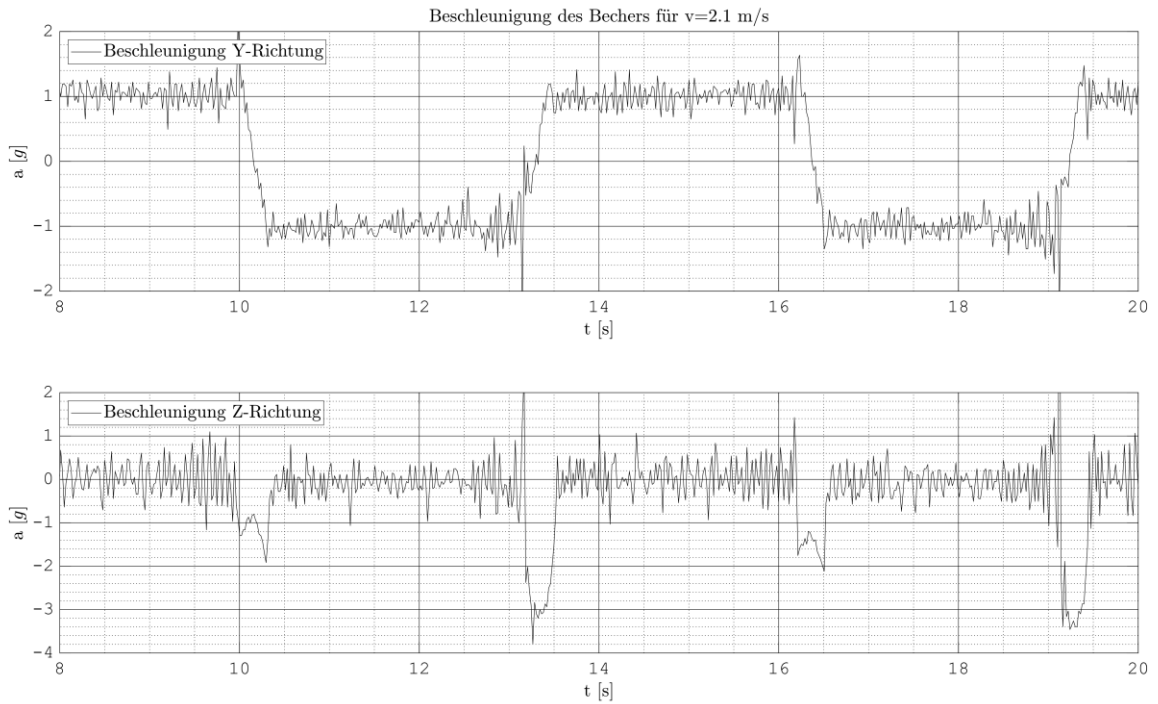


Abbildung 5-12: auf einen Becher wirkende Beschleunigung bei  $v_z=2,1$  m/s

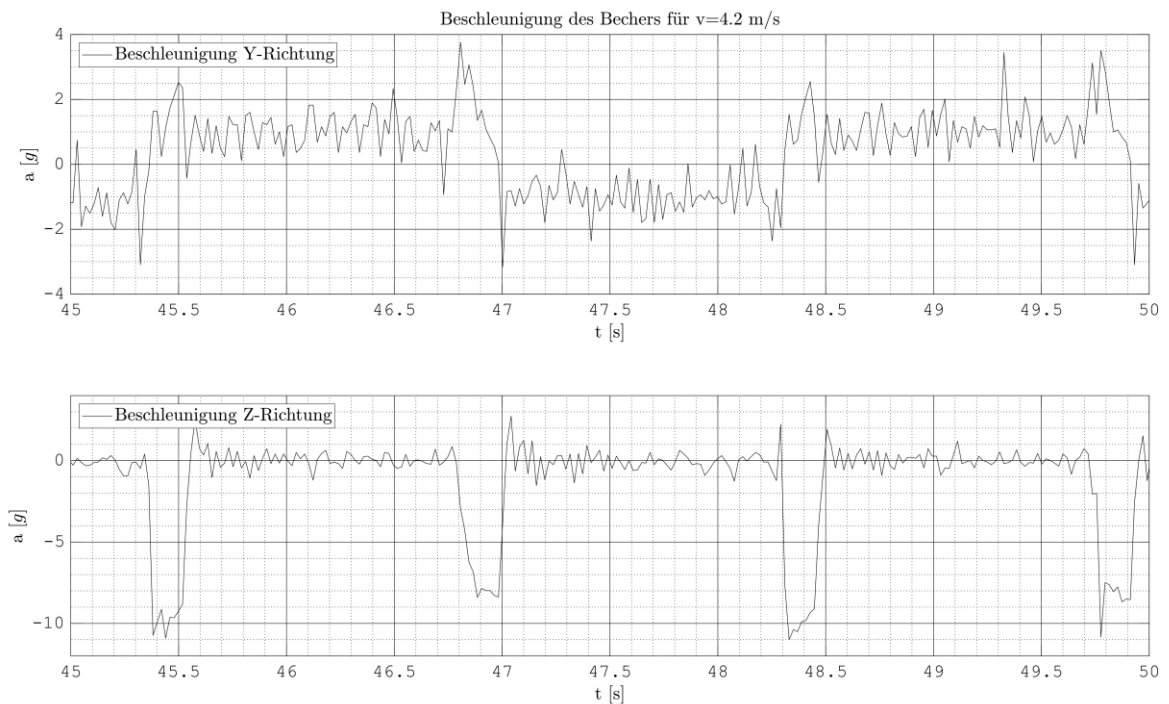


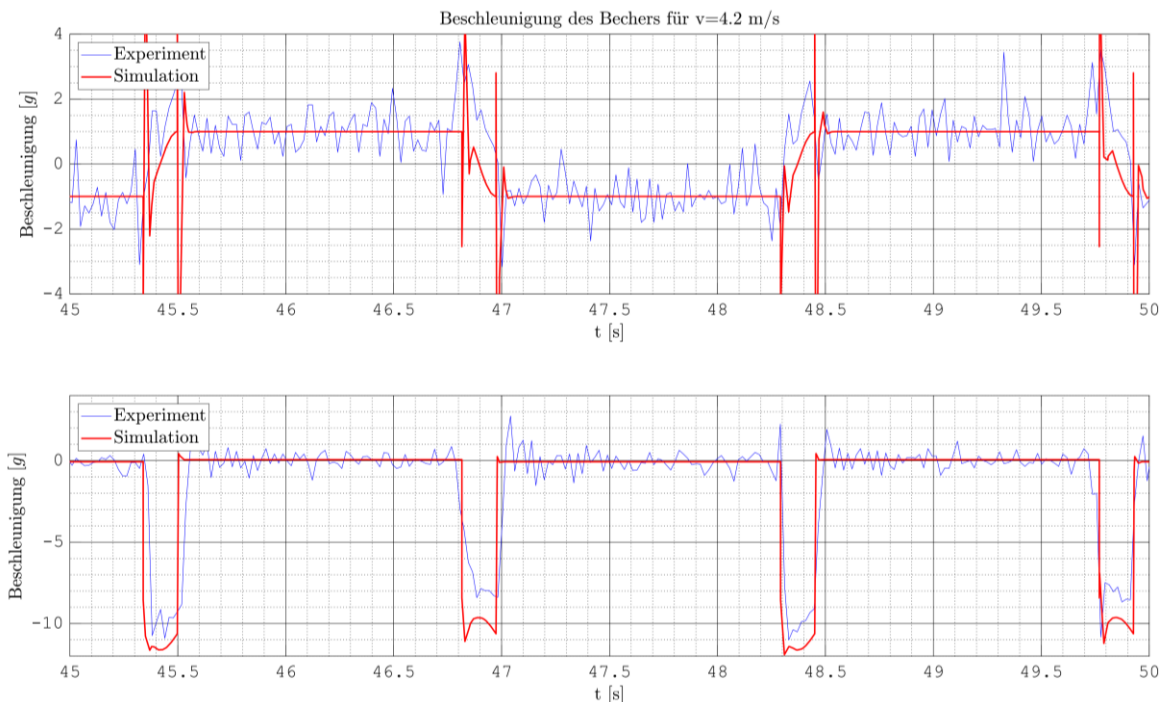
Abbildung 5-13: auf einen Becher wirkende Beschleunigung bei  $v_z=4,2$  m/s



## 5.2.2.2 Parametrierung des Mehrkörpersimulationsmodells

Zur Parametrierung des Mehrkörpermodells des Versuchsbecherwerkes werden die auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen im Experiment und in der Mehrkörpersimulation gegenübergestellt. Die Parameter des modellierten Becher-Gurt-Systems werden so angepasst, dass der Verlauf der Beschleunigungen in den Simulationen mit den in den Experimenten ermittelten Verläufen für alle untersuchten Fördergeschwindigkeiten übereinstimmt.

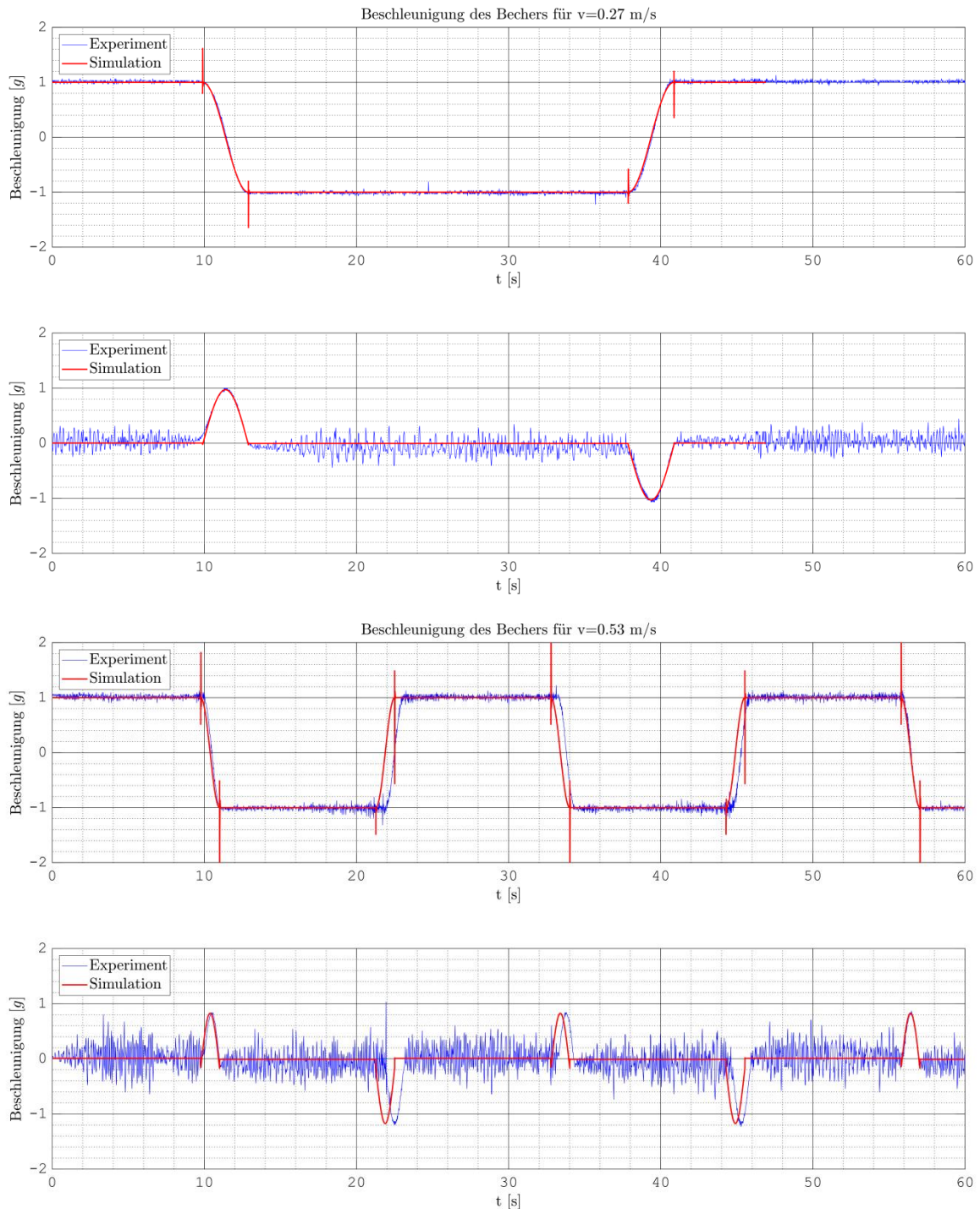
Abbildung 5-14 zeigt den Verlauf der Messwerte des Beschleunigungssensors und die Simulationsergebnisse der Mehrkörpersimulation für eine Fördergeschwindigkeit von 4,2 m/s.



**Abbildung 5-14:** Vergleich der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen im Experiment und in der Simulation für den Geschwindigkeitsbereich der Fliehkraftentleerung,  $v_z=4,2$  m/s

Der zeitliche Verlauf und die Maxima der Kurven stimmen sehr gut überein. Das laterale Schwingen des Bechers in Y-Richtung kann vom Simulationsmodell bisher noch nicht abgebildet werden und kann in zukünftigen Forschungsarbeiten durch ein detaillierteres Gurtmodell, welches auch flexible Körper als Verbindungselement der einzelnen Becher abbilden kann, implementiert werden [114]. Im Simulationsmodell treten beim Übergang von der Kreisbahn in die geradlinige Bewegung Unstetigkeiten in der Beschleunigung in Z-Richtung auf. Diese werden durch die Umschaltbedingung des Zustandsautomaten verursacht. Da das Modell auf einer Geschwindigkeitsvorgabe der Lagerung des Becher-Gurt-Systems basiert, und die Richtung der Geschwindigkeit sich beim Eintreten des Umschaltereignisses abrupt ändert, ergibt sich eine unendlich große Beschleunigung. In zukünftigen Arbeiten muss daher die Geschwindigkeitsänderung durch eine Begrenzung des sich ergebenden Rucks berücksichtigt werden.

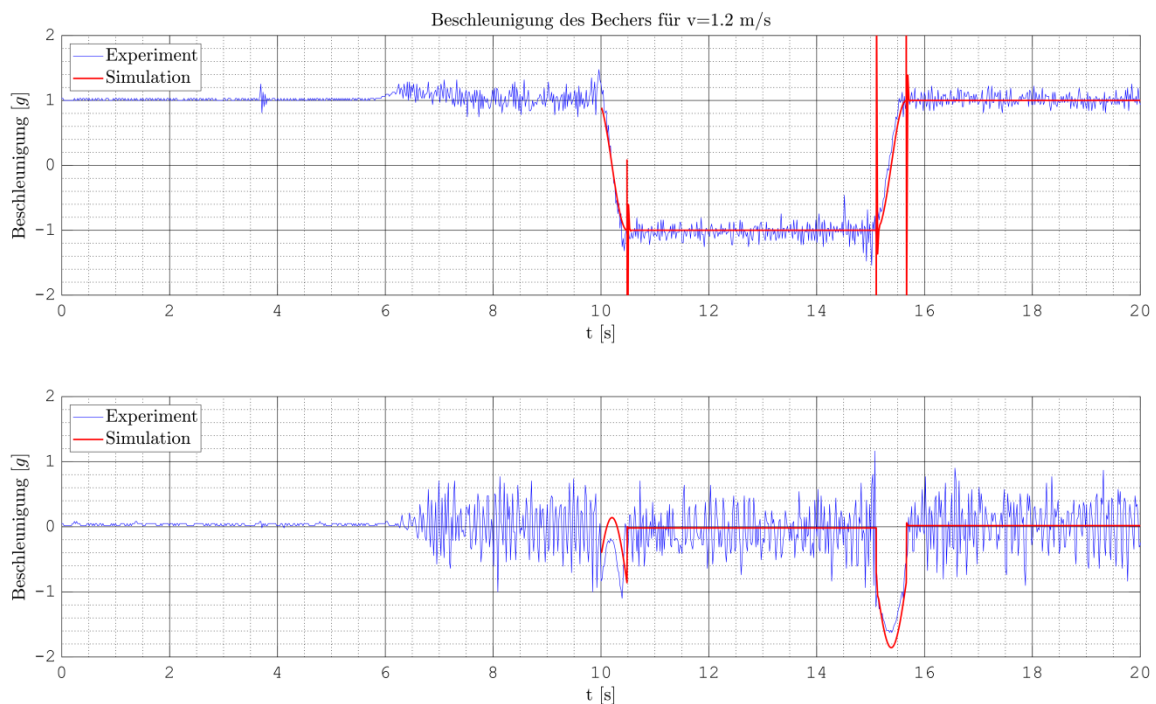
Für den in Abbildung 5-15 dargestellten Verlauf der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen im Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung stimmen die Ergebnisse aus der gekoppelten DEM-MK-Simulation mit den in 5.2.2.1 dargestellten Ergebnissen der Experimente sehr gut überein.



**Abbildung 5-15: Vergleich der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen in Experiment und Simulation für den Geschwindigkeitsbereich der Schwerkraftentleerung**

Der geringe zeitliche Versatz der Kurven ist durch die Abweichung der Zugmittelgeschwindigkeit vom eingestellten Sollwert während des Umlaufs des Messbechers im Experiment zu begründen. Der Mittelwert über mehrere Umläufe entspricht der eingestellten Geschwindigkeit.

Abbildung 5-16 stellt die Ergebnisse der Beschleunigungsmessung und der MKS-Simulation für den Geschwindigkeitsbereich der Mischentleerung gegenüber. In den experimentellen Daten zeigt sich eine starke Schwingungsanregung, welche in der Simulation jedoch nicht abgebildet wird. Dies ist mit den getroffenen Vereinfachungen bei der Modellierung des Becherstranges zu begründen.

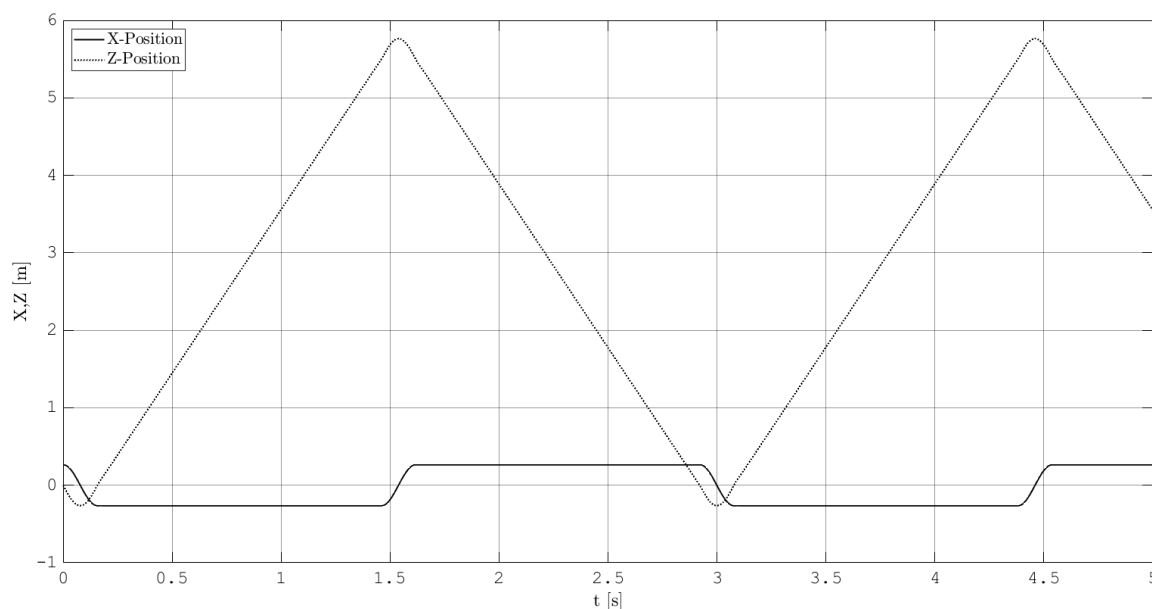


**Abbildung 5-16: Vergleich der auf einen Becher wirkenden Beschleunigungen in Experiment und Simulation für den Geschwindigkeitsbereich der Mischentleerung**

Zur Modellierung des Bewegungsverhaltens von Becherwerken wird das parametrisierte Mehrkörpermodell des Versuchsbecherwerkes verwendet. Das Becher-Gurt-System wird mit einer Steifigkeit von  $k = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  und einer Dämpfungskonstanten von  $d = 2 \cdot 10^2 \frac{\text{Nm s}}{\text{rad}}$  modelliert. Dies entspricht einer hohen Vorspannung in Realität. Die Parameter wurden durch Vergleich der Beschleunigungsmessungen mit den Simulationsergebnissen einer nicht gekoppelten Mehrkörpersimulation bestimmt. In zukünftigen Arbeiten können die für das Becher-Gurt-System notwendigen Simulationsparameter auch durch andere Messverfahren, beispielsweise aus der Auslenkung der Becherspitze bei Belastung mit einer definierten Kraft, bestimmt und in das Simulationsmodell übertragen werden.

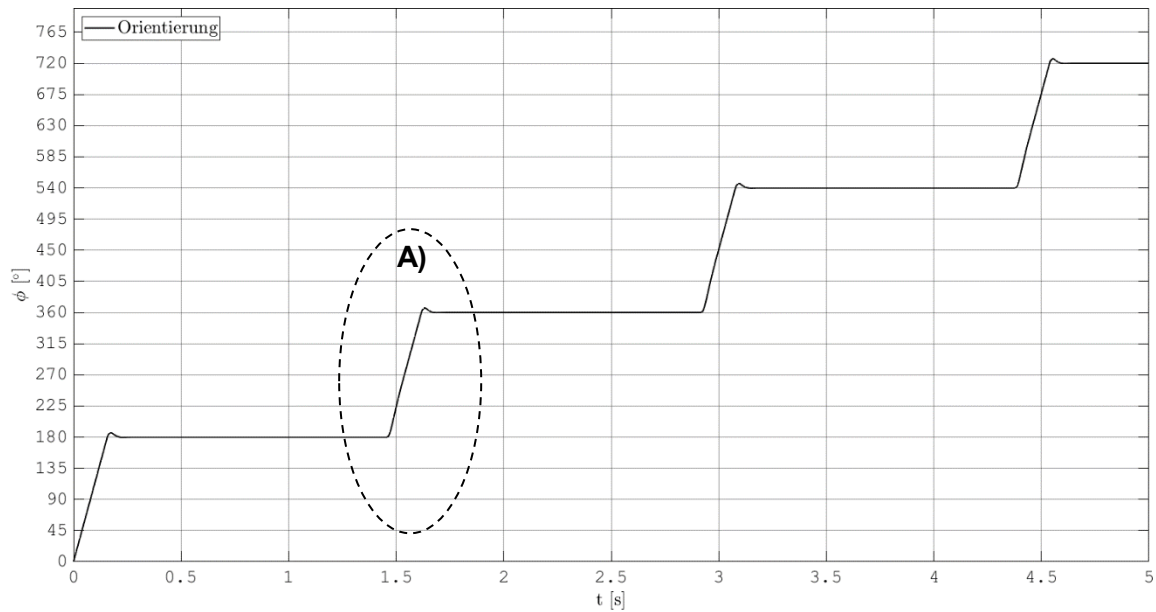
### 5.2.2.3 Mehrkörpersimulation des Bechernickens

Die idealisierten Simulationsergebnisse bieten im Gegensatz zu den durch die Messgenauigkeit, Abtastrate und Auflösung beschränkten Messergebnissen des Beschleunigungssensors die Möglichkeit, einzelne Bewegungsphasen des modellierten Versuchsbecherwerkes detaillierter zu betrachten. Durch numerische Integration und Differentiation lassen sich Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Orientierung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung aus den Simulationsergebnissen berechnen. Die Simulationsergebnisse der Lage und Orientierung eines Bechers in der Mehrkörpersimulation sind in Abbildung 5-17 und Abbildung 5-18 für eine Zugmittelgeschwindigkeit von 4,2 m/s dargestellt. Die Positionsänderung in X-Richtung entspricht dem Durchmesser der Antriebs- bzw. Spanntrommel. Die Extremwerte der Lage des Bechers in Z-Richtung entsprechen dem Achsabstand von 5,5 m zuzüglich der Radien der Antriebs- und Spanntrommel.



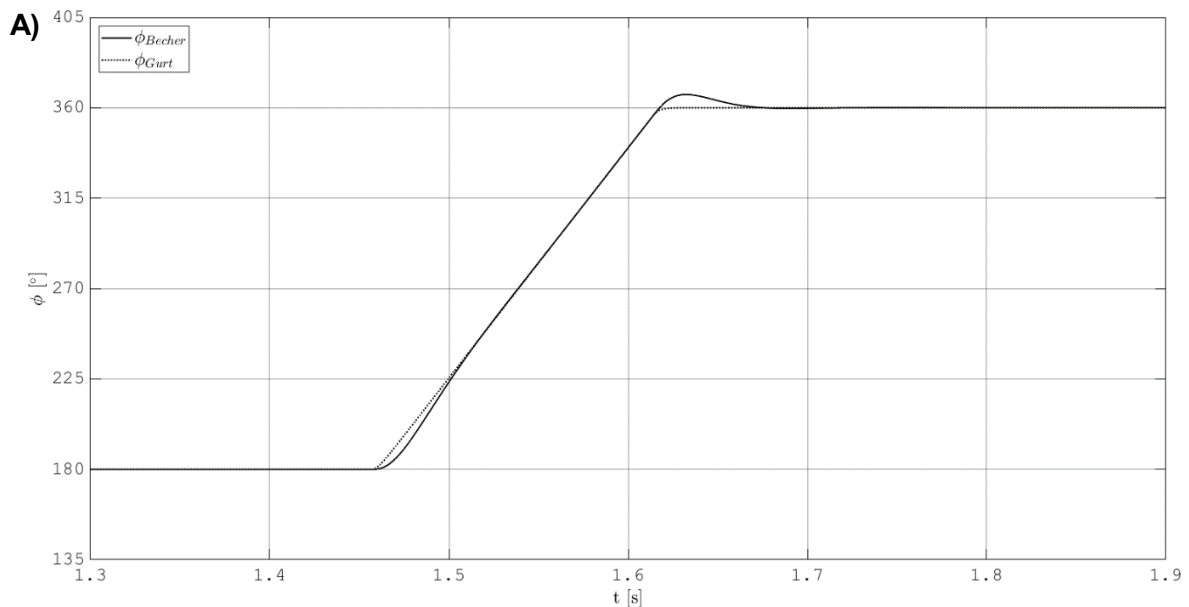
**Abbildung 5-17: Simulationsergebnis der Lage eines Bechers, hohe Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems**

Der in Abbildung 5-18 aufgetragene resultierende Winkel des modellierten Bechers, in Bezug zum globalen Koordinatensystem, zeigt ein Nacheilen des Bechers beim Einlaufen in die Trommeln, sowie ein Überschwingen beim Ablaufen von den Umlenktrommeln.

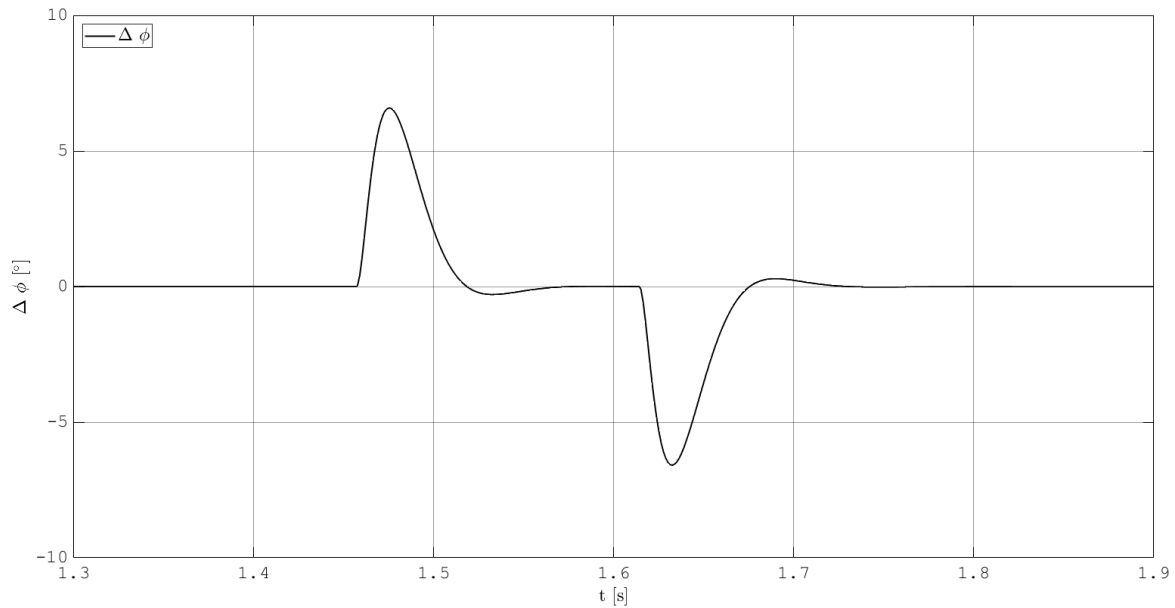


**Abbildung 5-18: Simulationsergebnis der Orientierung eines Bechers in Bezug zum globalen Koordinatensystem (Winkel kumuliert); hohe Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems**

Die detaillierte Betrachtung eines Umlaufs (A) um die Umlenktrommel in der folgenden Abbildung 5-19 und die Winkeldifferenz zwischen der Gurttrajektorie und dem Becherschwerpunkt in Abbildung 5-20 zeigt eine maximale Winkelabweichung von  $\Delta\phi = \pm 6,6^\circ$ . Dieses Überschwingen entspricht dem in 5.2.1 erläuterten Unter- bzw. Übersteuern der Becher beim Übergang von der geradlinigen in die kreisförmige Bewegung und umgekehrt.

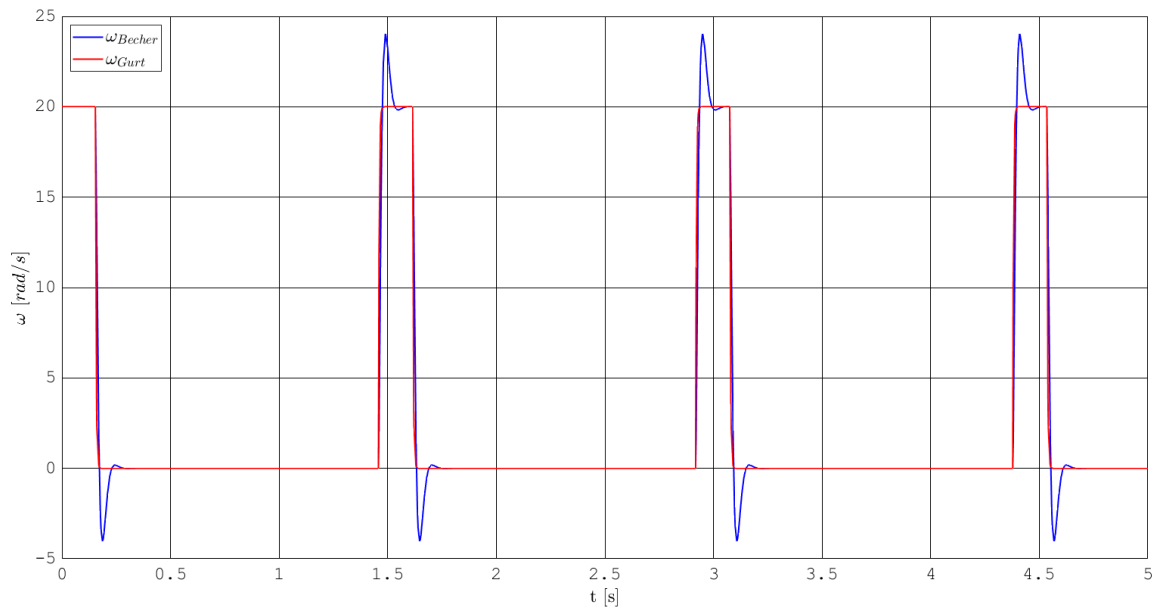


**Abbildung 5-19: Vergleich der resultierenden Winkel für die Orientierung des Bechers mit der Ortsvorgabe des Gurtes für einen Umlauf um die Umlenktrommel, hohe Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems**



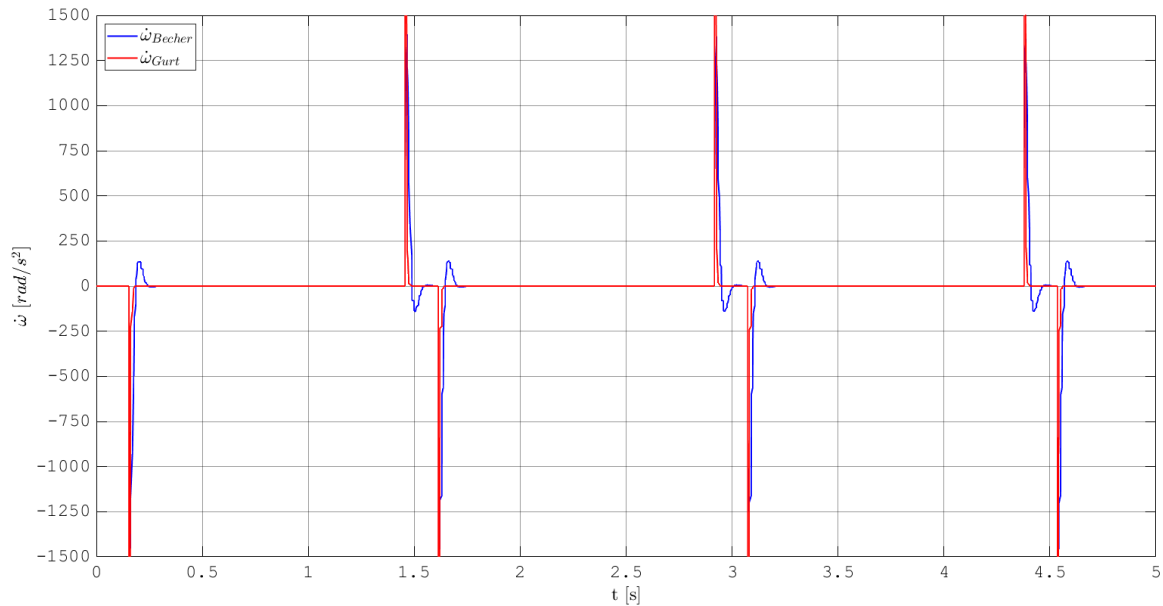
**Abbildung 5-20: Winkelabweichung zwischen Becherschwerpunkt und Gurttrajektorie, hohe Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems**

Die Winkelgeschwindigkeit des Becherschwerpunktes zeigt eine unstetige Abweichung von der Winkelgeschwindigkeit des Gurtes im Bereich des Einlaufens und Auslaufens des Gurtes auf die Umlenktrommeln (vergl. Abbildung 5-21).



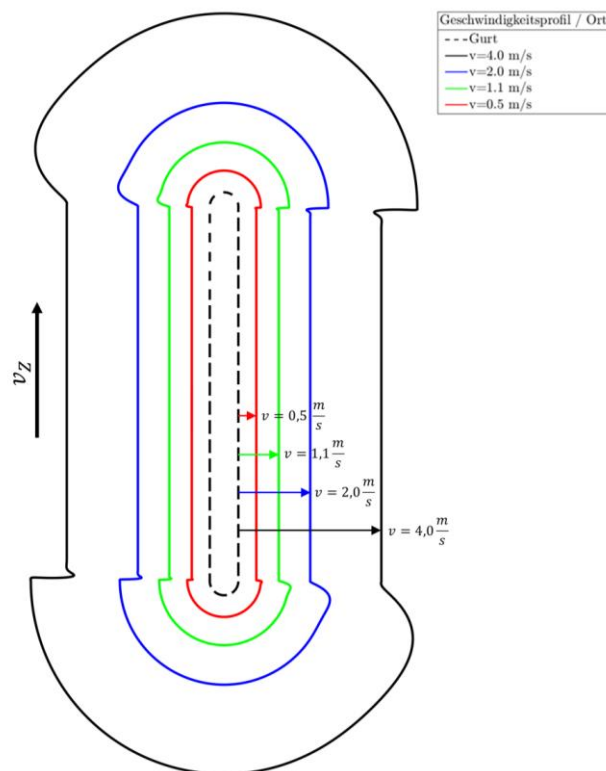
**Abbildung 5-21: Winkelgeschwindigkeit eines Bechers und der Ortskurve des Gurtes**

Abbildung 5-22 zeigt die zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit. Für die Gurttrajektorie ist die Beschleunigung an den Ein- und Auslaufpunkten unendlich groß. Die Beschleunigung des modellierten Becherschwerpunktes auf die Kreisbahn erfolgt stetig. Weiterhin ist das Untersteuern vor dem Auflaufen auf die Trommel und das Übersteuern beim Ablauen von der Trommel durch Winkelbeschleunigungen mit entgegengesetztem Vorzeichen gekennzeichnet.



**Abbildung 5-22: Winkelbeschleunigung des Becherschwerpunktes und der Gurtrajektorie**

Durch Auftragen der Geschwindigkeit des Becherschwerpunktes über die aktuelle Position der gelenkigen Lagerung des Becher-Gurt-Systems (dies entspricht dem ersten Drehgelenk im Ersatzmodell) lassen sich die kritischen Positionen entlang der Gurtrajektorie in der Simulation identifizieren (vergl. Abbildung 5-23). An den Auf- und Ablaufpunkten der Becher auf bzw. von den Umlenktrummeln ist die Unstetigkeit der Bechergeschwindigkeit für alle untersuchten Zugmittelgeschwindigkeiten zu erkennen.



**Abbildung 5-23: Geschwindigkeitsprofil des modellierten Becherschwerpunktes für Zugmittelgeschwindigkeiten von 4 m/s; 2 m/s; 1,1 m/s und 0,5 m/s**

### 5.2.3 Analyse des Schöpfwiderstands mittels gekoppelter DEM-MK-Simulation

Das in dieser Arbeit entwickelte und parametrisierte Mehrkörpermodell des Versuchsbecherwerks wird zusammen mit dem kalibrierten Schüttgut PVC-Granulat im Folgenden zur Analyse des Schöpfwiderstands angewendet. Die Steifigkeit der Becher-Gurt-Verbindung beträgt in allen Simulationen  $k = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  und entspricht einer hohen Vorspannung in der Realität.

Zur Analyse des Einflusses der Beschickungsart und der Neigung des Schüttguts zur Kohäsion auf den Schöpfwiderstand werden mit der in dieser Arbeit entwickelten gekoppelten DEM-MK-Simulation insgesamt 16 Simulationen mit Zugmittelgeschwindigkeiten von 0,53 m/s; 1,2 m/s; 2,12 m/s und 4,22 m/s für kohäsionsloses und kohäsives Schüttgut bei last- und leertrumseitiger Beschickung durchgeführt und analysiert. Tabelle 5-2 fasst die Parameter der durchgeführten gekoppelten DEM-MK-Simulationen zusammen.

**Tabelle 5-2: Parametervariationen der in dieser Arbeit zur Analyse des Einflusses der Beschickungsart und Kohäsion auf den Schöpfwiderstand durchgeführten gekoppelten DEM-MK-Simulationen**

	<b>N</b> [1/min]	<b>I<sub>m</sub></b> [kg/s]	<b>v</b> [m/s]	<b>Fr<sup>2</sup></b>	<b>Entleerungsart</b>	<b>Kohäsion</b>	<b>Beschickung</b>
1	<b>24</b>	1,15	0,53	0,15	Schwerkraftentleerung	keine	Leertrum
2							Lasttrum
3						mit	Leertrum
4							Lasttrum
5	<b>54</b>	2,59	1,19	0,78	Mischentleerung	keine	Leertrum
6							Lasttrum
7						mit	Leertrum
8							Lasttrum
9	<b>96</b>	4,6	2,12	2,45	Fliehkraftentleerung	keine	Leertrum
10							Lasttrum
11						mit	Leertrum
12							Lasttrum
13	<b>191</b>	9,15	4,22	9,70	Fliehkraftentleerung	keine	Leertrum
14							Lasttrum
15						mit	Leertrum
16							Lasttrum

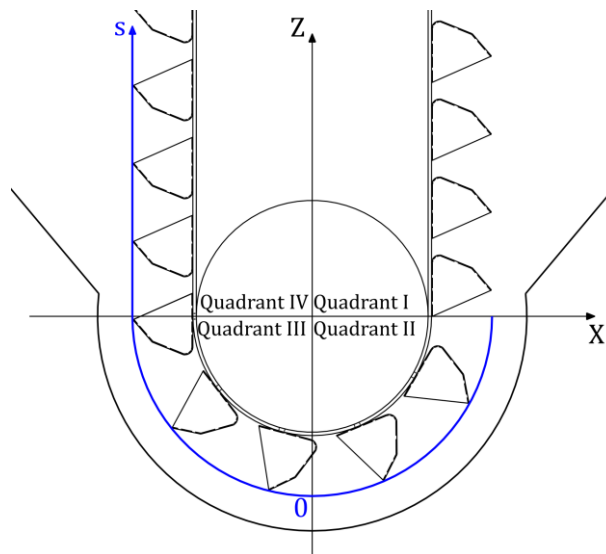
Das kohäsionslose Schüttgut entspricht dem kalibrierten Schüttgut PVC-Granulat. Das kohäsive Schüttgut hat die gleichen Materialeigenschaften in der DEM-Simulation, erhält jedoch zusätzlich eine Cohesion-Energy-Density von 150.000 um die Adhäsionskräfte, welche aus den Flüssigkeitsbrücken realer Schüttgüter resultieren, mit dem vereinfachten Johnson-Kendall-Roberts Modell abzubilden (vergl. 3.2.3.1). Das kohäsive Schüttgut entspricht damit keinem realen Schüttgut, stellt jedoch das Fließverhalten eines kohäsiven Schüttgutes qualitativ dar.



Zur weiteren Analyse des auf einen Becher wirkenden Bewegungswiderstands im Becherwerkfuß wird die in der gekoppelten DEM-MK-Simulation ermittelte tangentielle Kraft  $F_{tan}$  entgegen der Bewegungsrichtung des Bechers nach Gl. (134) berechnet. Diese Kraft entspricht dem durch das Schüttgut hervorgerufenen Schöpfwiderstand  $F_S$  eines Bechers. Da der Bewegungswiderstand positiv definiert ist, wird das Vorzeichen der in der Simulation ermittelten Kräfte in den folgenden Untersuchungen entsprechend invertiert. Es gilt:

$$\mathbf{F}_S = -\mathbf{F}_{tan} = -\mathbf{F}_{B_{ges}} \cdot \frac{\mathbf{v}_{tan}}{|\mathbf{v}_{tan}|}. \quad (134)$$

Negative Schöpfwiderstände verringern dementsprechend die notwendige Schöpfarbeit. Die Schöpfarbeit wird durch numerische Integration des Schöpfwiderstands über den Schöpfweg berechnet (vergl. Kapitel 2.2.3.2). Im Folgenden werden der Schöpfwiderstand und die Schöpfarbeit für ausgewählte DEM-MK-Simulationen für den Geschwindigkeitsbereich der Fliehkraftentleerung diskutiert. Zum Vergleich der in dieser Arbeit durchgeführten DEM-MK-Simulationen wird der ermittelte Bewegungswiderstand über den Schöpfweg  $s$ , ausgehend von  $s = -0,5 \text{ m}$  bis  $s = 1,5 \text{ m}$ , für jeweils einen ausgewählten Becher aufgetragen. Abbildung 5-24 kennzeichnet den Schöpfweg und die Einteilung des Becherwerkfußes in vier Quadranten.



**Abbildung 5-24: Einteilung des Schöpfbereichs anhand der zurückgelegte Strecke eines Bechers im Becherwerkfuß ausgehend von  $s_0(X,Z)=[0,-r_i]^T$**

Die folgende Abbildung 5-25 und Abbildung 5-26 stellen die Visualisierung der Simulationsergebnisse für eine Fördergeschwindigkeit von 4,22 m/s für kohäsionsloses Schüttgut für die lasttrumseitige und die leertrumseitige Gutaufgabe dar. Die geförderten Schüttgutteilchen sind in der Nachbearbeitung zur besseren Darstellung nach dem Betrag der Geschwindigkeit eingefärbt. Der betrachtete Becher ist grau-transparent gekennzeichnet.

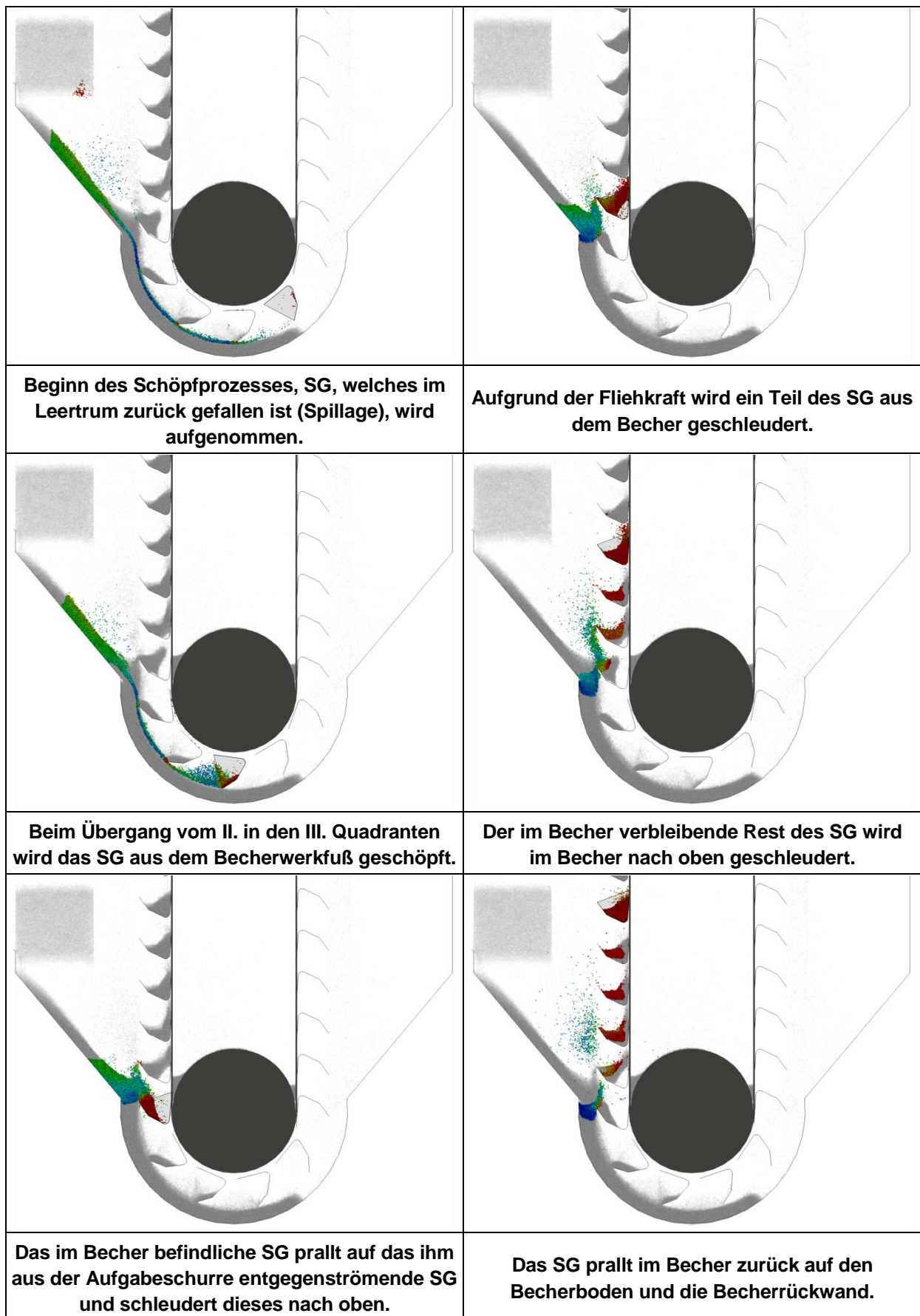


Abbildung 5-25: Schöpfvorgang für die lasttrumseitige Gutaufgabe, Einfärbung der gefördert Partikel nach dem Betrag der Geschwindigkeit  $0 < v_p < 4$  m/s

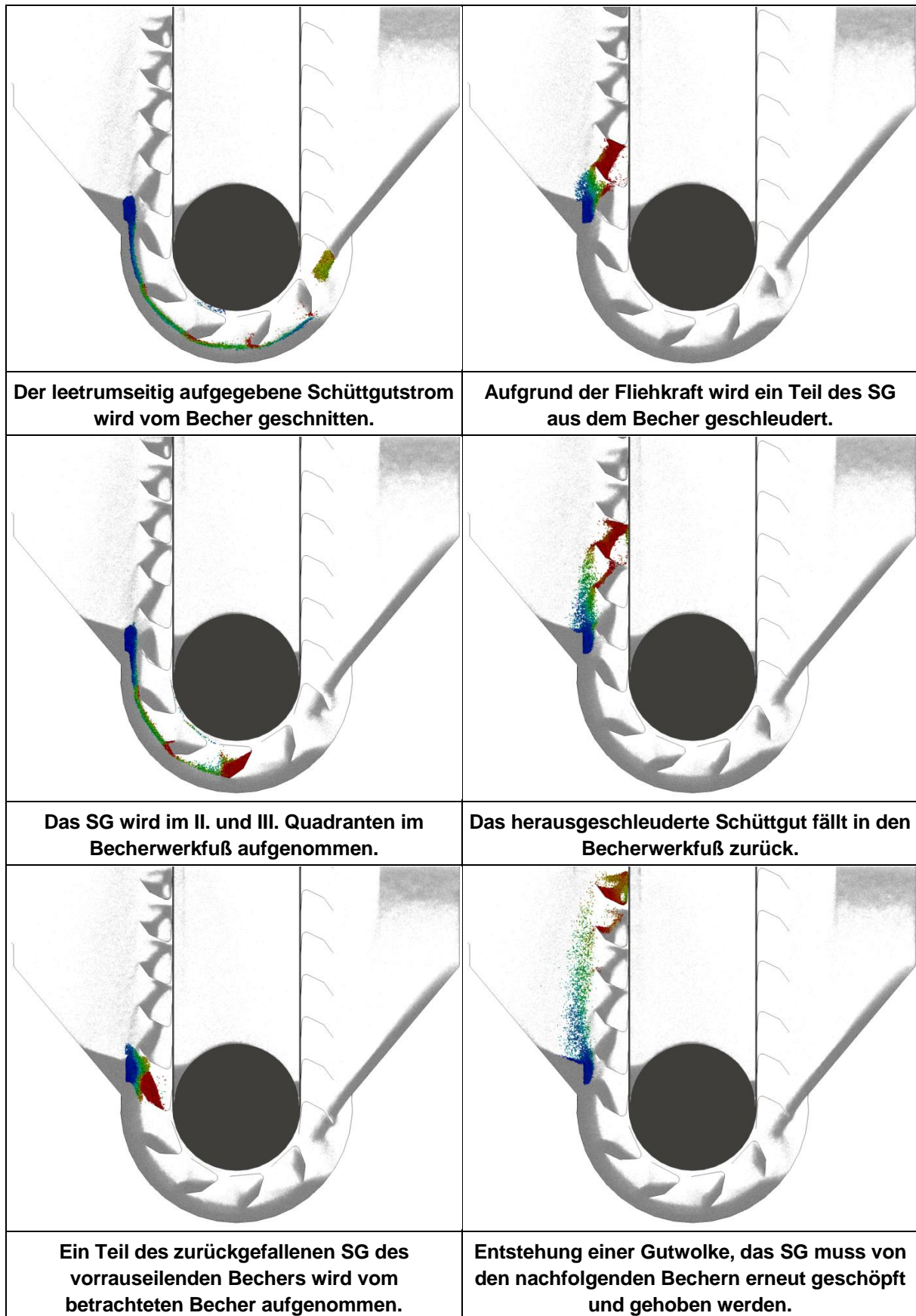
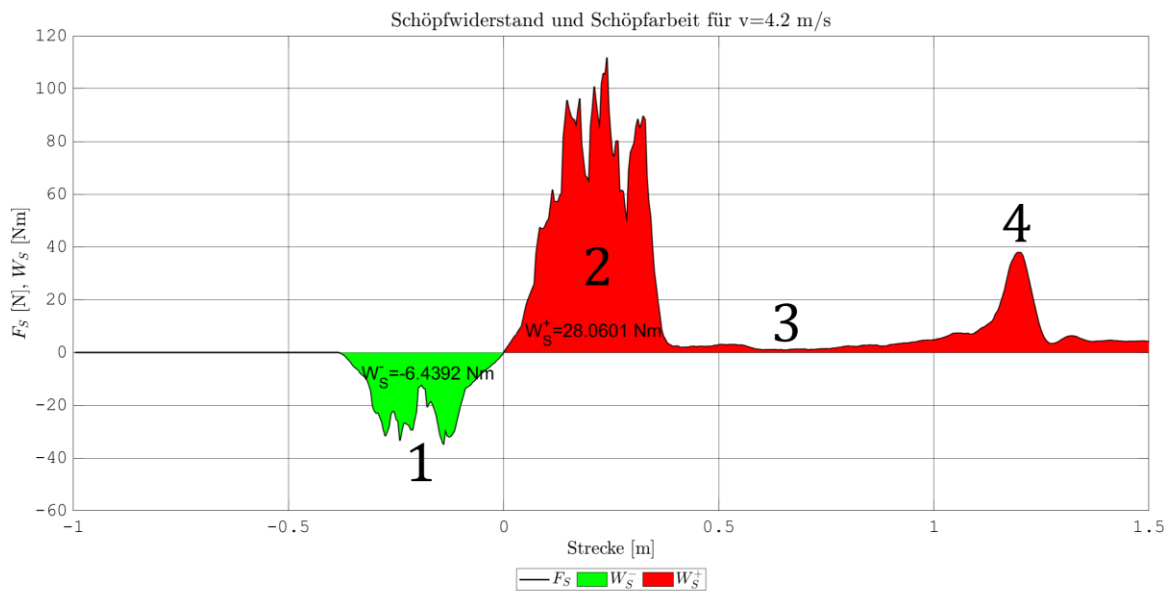


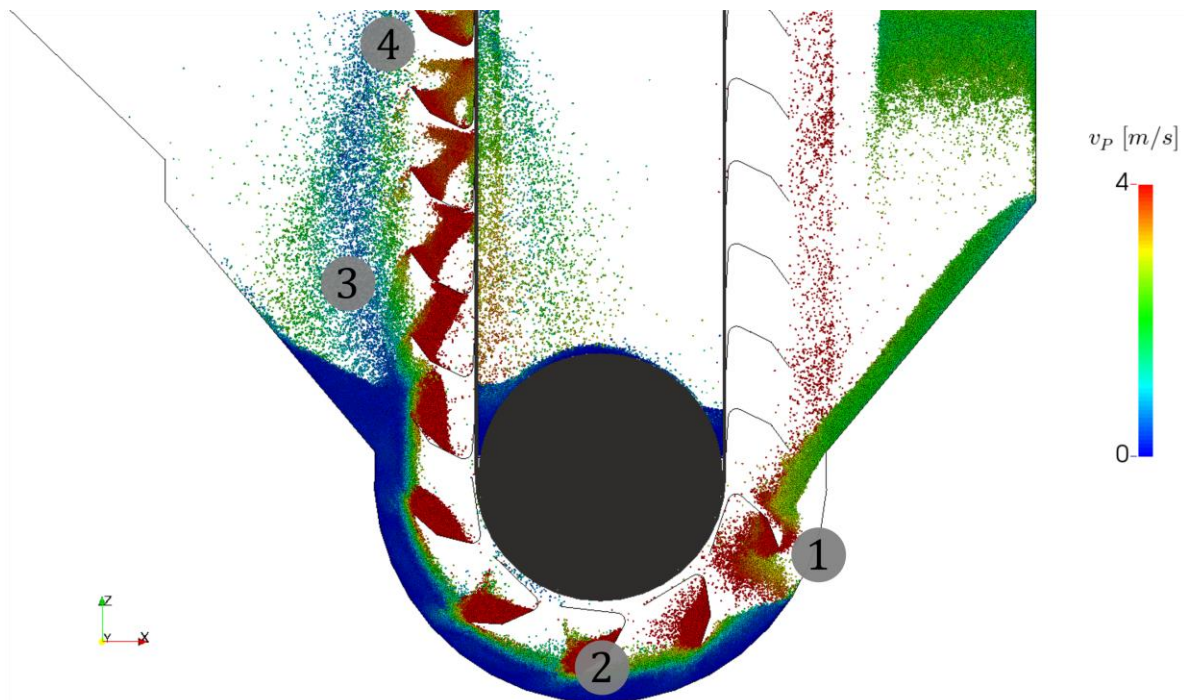
Abbildung 5-26: Schöpfvorgang für die leertrumseitige Gutaufgabe, Einfärbung der geförderten Partikel nach dem Betrag der Geschwindigkeit  $0 < v_p < 4$  m/s

Abbildung 5-27 zeigt den Schöpfwiderstand und die Schöpfarbeit für die Simulation der leertrumseitigen Beschickung kohäsionsloser Schüttgüter und 4,2 m/s Fördergeschwindigkeit.



**Abbildung 5-27: Schöpfwiderstand und Schöpfarbeit eines Bechers aufgetragen über die zurückgelegte Strecke; leertrumseitige Gutaufgabe; kohäsionsloses Schüttgut,  $v_z=4,2$  m/s**

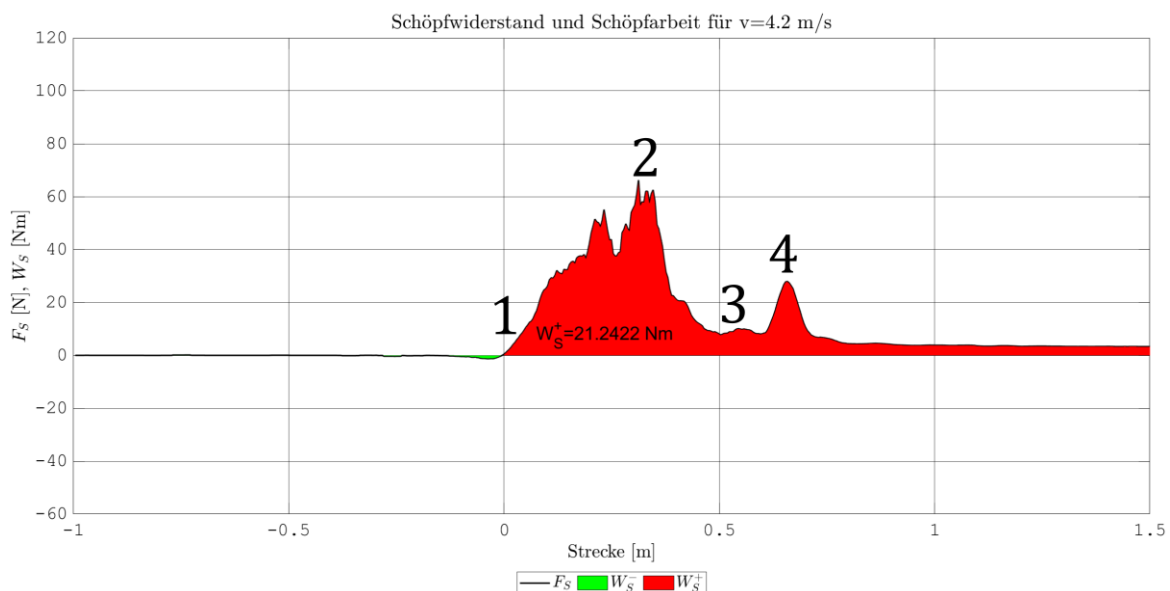
Zur besseren Darstellung der aus den Diagrammen geschlossenen Beobachtungen ist der Schöpfprozess für die leertrumseitige Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter in Abbildung 5-28 visualisiert. Die Ziffern in den folgenden Analysen beziehen sich auf die Visualisierung, die Streckenangaben auf die Diagramme.



**Abbildung 5-28: Visualisierung des Simulationsergebnisses für die leertrumseitige Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter für die Zugmittelgeschwindigkeit  $v_z=4,2$  m/s im stationären Zustand; Ansicht entlang der Becherwände geschnitten**

Im Diagramm ist ersichtlich, dass der Schöpfwiderstand im Bereich  $-0,5 < s < 0$  m zunächst negativ ist, da das Schüttgut in Bewegungsrichtung aufgegeben wird und im Bereich der Gutaufgabe auf den Becherrücken prallt (1). Nach dem Schöpfen aus dem Becherwerkfuß (2) tritt eine Teilentleerung aufgrund der Fliehkräfte auf (3). Die auf den Becher wirkende Kraft reduziert sich daher im Bereich  $0,5 < s < 0,75$  m auf ein lokales Minimum. Ein Teil des herausgeschleuderten Schüttguts prallt bei (4) erneut auf die Becher und bewirkt einen zusätzlichen Bewegungswiderstand von 38 N. Das Schüttgut muss erneut auf die Zugmittelgeschwindigkeit beschleunigt werden. Der Vorteil der Gutaufgabe in Bewegungsrichtung lässt sich daher nicht vollständig nutzen. Die resultierende Schöpfarbeit beträgt 21,62 Nm. Der Hubwiderstand im Bereich  $s > 1,5$  m beträgt 4,05 N und entspricht einem Becherfüllungsgrad von  $\eta = 0,68$ .

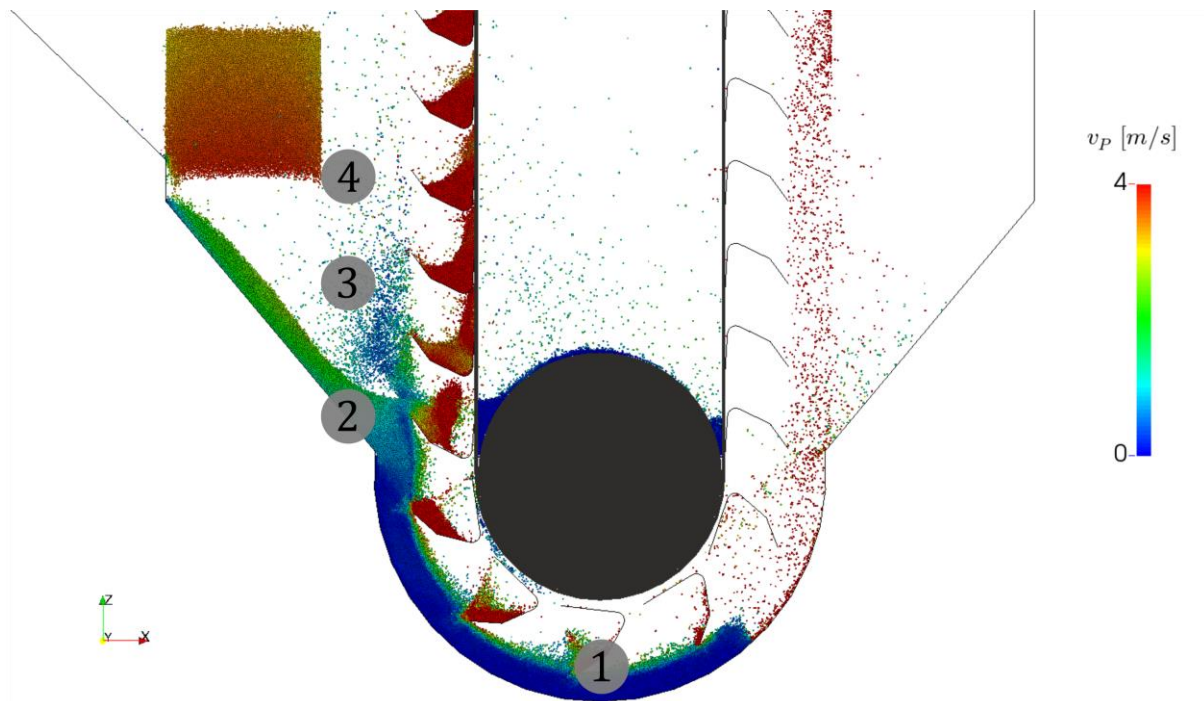
Abbildung 5-29 stellt den Schöpfwiderstand und die Schöpfarbeit für die lasttrumseitige Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter und einer Zugmittelgeschwindigkeit von 4,2 m/s dar.



**Abbildung 5-29: Schöpfwiderstand und Schöpfarbeit eines Bechers aufgetragen über die zurückgelegte Strecke; lasttrumseitige Gutaufgabe; kohäsionsloses Schüttgut,  $v_z=4,2$  m/s**

Das Schüttgut wird hauptsächlich im zweiten und dritten Quadranten von den Bechern aufgenommen (1). Der größte Schöpfwiderstand tritt an der Stelle der Aufgabeschurre auf (2), da das Gut entgegen der aufgegebenen Geschwindigkeit beschleunigt werden muss. Aufgrund der Fliehkräfte beim Auslaufen des Bechers aus der Spanntrommel wird ein Teil des Gutes aus dem Becher geworfen (3) und prallt aufgrund der Schwerkraft bei (4) zurück in den Becher. Dies verursacht einen zusätzlichen Bewegungswiderstand in Höhe von 30 N. Bei der lasttrumseitigen Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter wird weniger Gut aus den Bechern geschleudert als bei der leertrumseitigen Gutaufgabe, da das Schüttgut aus der Aufgabeschurre den in den Bechern

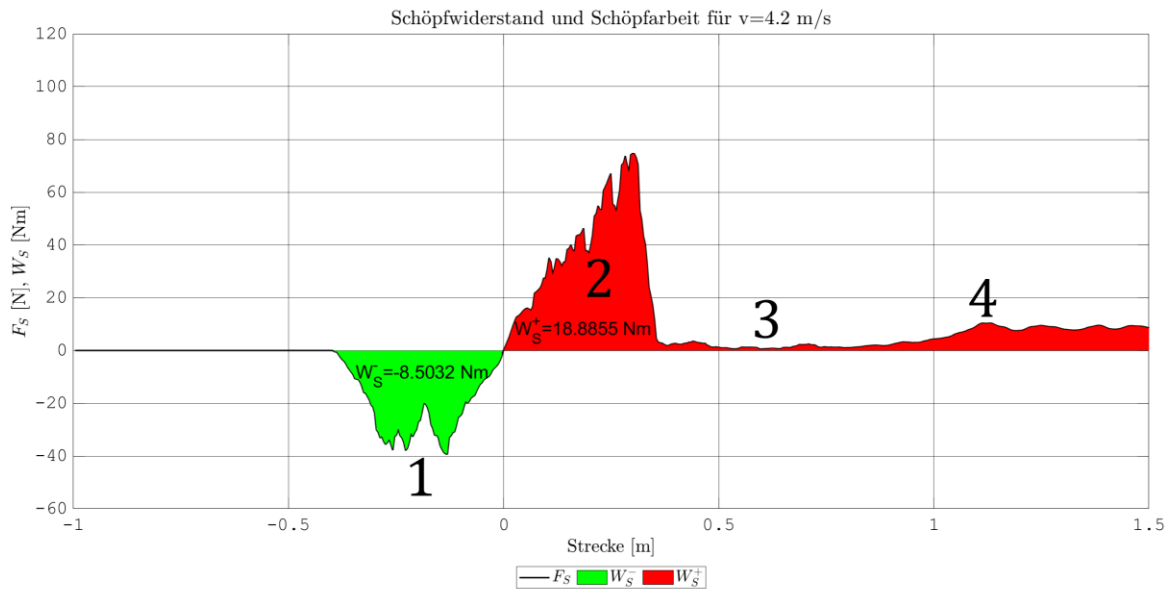
befindlichen Schüttgutteilchen entgegen strömt und diese daran hindert, den Becher zu verlassen.



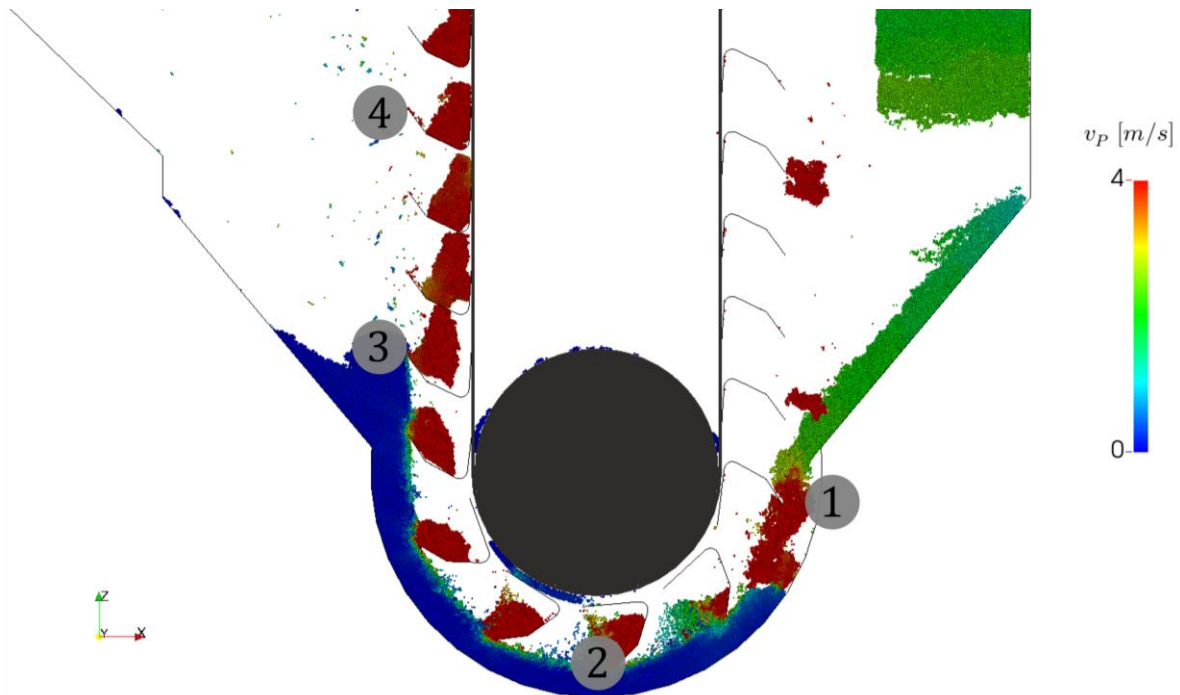
**Abbildung 5-30: Visualisierung des Simulationsergebnisses für die lasttrumseitige Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter für die Zugmittelgeschwindigkeit  $v_z=4,2$  m/s im stationären Zustand; Ansicht entlang der Becherwände geschnitten**

Es sammelt sich daher weniger Gut im Becherwerkfuß, sodass der Betrag des Schöpfwiderstandes geringer ist. Die Schöpfarbeit ist mit der leertrumseitigen Gutaufgabe kohäsionsloser Schüttgüter vergleichbar und beträgt 21,24 Nm. Der Hubwiderstand im Bereich  $0,75 < s < 5,75$  m beträgt 3,28 N und entspricht einer Becherfüllung von  $\eta = 0,55$ .

Der Bewegungswiderstand und die Schöpfarbeit eines Bechers für die leertrumseitige Gutaufgabe kohäsiver Schüttgüter ist in der folgenden Abbildung 5-31 dargestellt. Der Schöpfwiderstand ist zunächst negativ, da das Gut in Bewegungsrichtung aufgegeben wird und auf die Becherrückwand prallt (1). Im zweiten und dritten Quadranten wird das Schüttgut von den Bechern aufgenommen (2). Analog zu den in Ergebnissen von DILEFELD (vergl. 2.2.3.4.2) ist ein Herauswerfen des Schüttgutes (3) bei  $0,25 < s < 0,75$  m und ein erneutes Beschleunigen der Schüttgutmasse bei  $0,75 < s < 1,5$  m zu beobachten (4). Die Schöpfarbeit ist im Vergleich zu kohäsionslosen Schüttgütern deutlich geringer. Dies ist mit dem Fließverhalten des kohäsiven Schüttgutes zu begründen. Das Schüttgut ordnet sich im Becherwerkfuß weniger um. Es entsteht ein Graben, verursacht durch die vorhergehenden Becher, sodass für die folgenden Becher weniger Reibung im Schüttgutbett entsteht. Der Hubwiderstand beträgt 5,33 N, dies entspricht einem Becherfüllungsgrad von  $\eta = 0,89$ .



**Abbildung 5-31:** Schöpfungswiderstand und Schöpfungsfarbeit eines Bechers aufgetragen über die zurückgelegte Strecke; leertrumseitige Gutaufgabe; kohäsives Schüttgut,  $v_z=4,2$  m/s



**Abbildung 5-32:** Visualisierung des Simulationsergebnisses für die leertrumseitige Gutaufgabe kohäsiver Schüttgüter für die Zugmittelgeschwindigkeit  $v_z=4,2$  m/s im stationären Zustand; Ansicht entlang der Becherwände geschnitten

Abbildung 5-33 stellt den Schöpfwiderstand und die Schöpfarbeit für die lasttrumseitige Gutaufgabe kohäsiver Schüttgüter und einer Zugmittelgeschwindigkeit von 4,2 m/s dar.

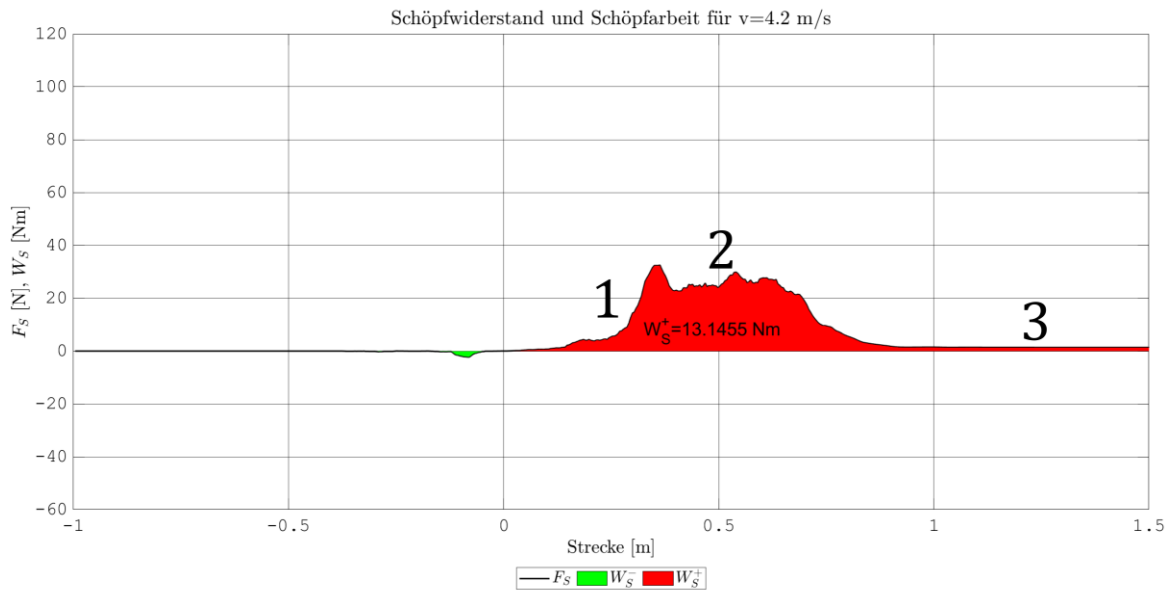


Abbildung 5-33: Schöpfwiderstand und Schöpfarbeit eines Bechers aufgetragen über die zurückgelegte Strecke; lasttrumseitige Gutaufgabe; kohäsives Schüttgut,  $v_z=4,2$  m/s

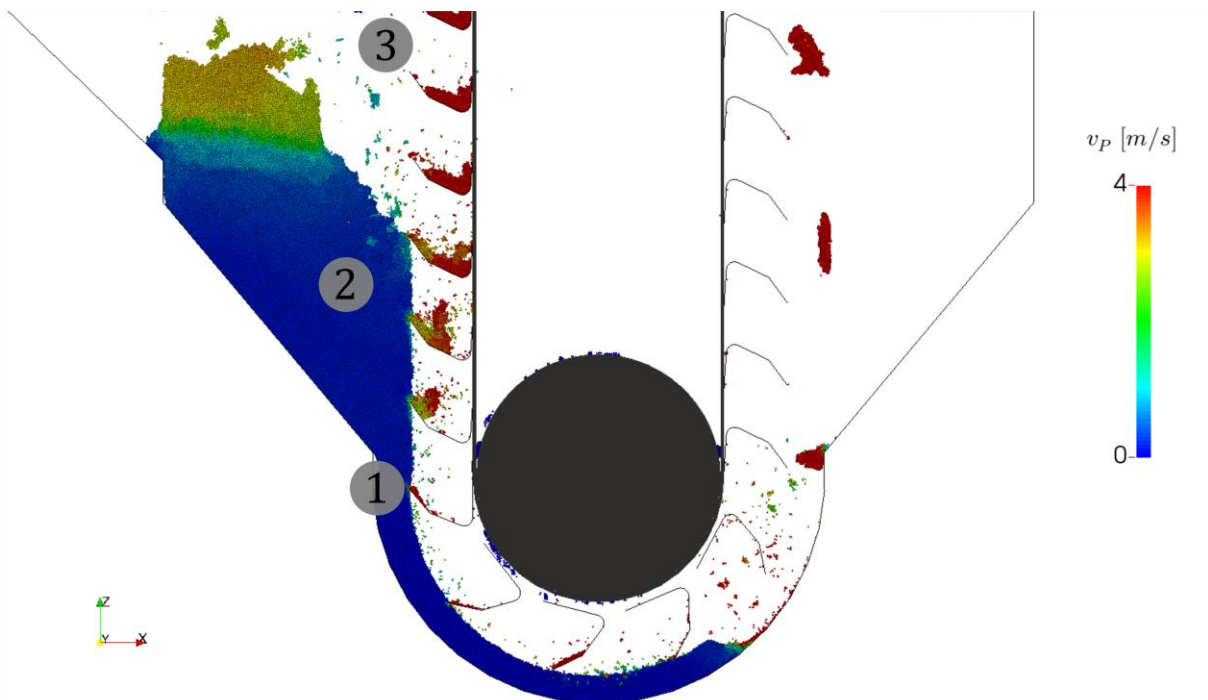


Abbildung 5-34: Visualisierung des Simulationsergebnisses für die lasttrumseitige Gutaufgabe kohäsiver Schüttgüter für die Zugmittelgeschwindigkeit  $v_z=4,2$  m/s im stationären Zustand; Ansicht entlang der Becherwände geschnitten



Der Becherfüllungsgrad (3) ist gering, da das kohäsive Schüttgut von den Bechern nicht aufgenommen wird. Nur ein kleiner Teil des Schüttgutes wird von der Becherspitze gelöst (1) und zur Gutabgabe gefördert. Der Becherwerkfuß ist nach einer relativ kurzen Simulationszeit von 6 Sekunden bereits überfüllt (2). Das in der Aufgabeschurre verbleibende Schüttgut lässt den in den Bechern befindlichen Schüttgutteilchen keinen Raum (vergl. Abbildung 5-34). Daher ist ein erneutes Herausschleudern des Schüttgutes nicht zu beobachten. Becherwerke sind typischerweise nicht für stark kohäsive Schüttgüter geeignet. Die hier diskutierten Ergebnisse der lasttrumseitigen Beschickung kohäsiver Schüttgüter zeigen, dass eine lasttrumseitige Gutaufnahme bei hohen Fördergeschwindigkeiten nicht möglich ist.

Abbildung 5-35 fasst die Schöpfarbeit bezogen auf ein Kilogramm geförderttes Schüttgut (dies entspricht der spezifischen Schöpfarbeit in Nm/kg für einen Becher) der in diesem Kapitel diskutieren Simulationsergebnisse für alle untersuchten Becher im stationären Zustand der Simulation zusammen.

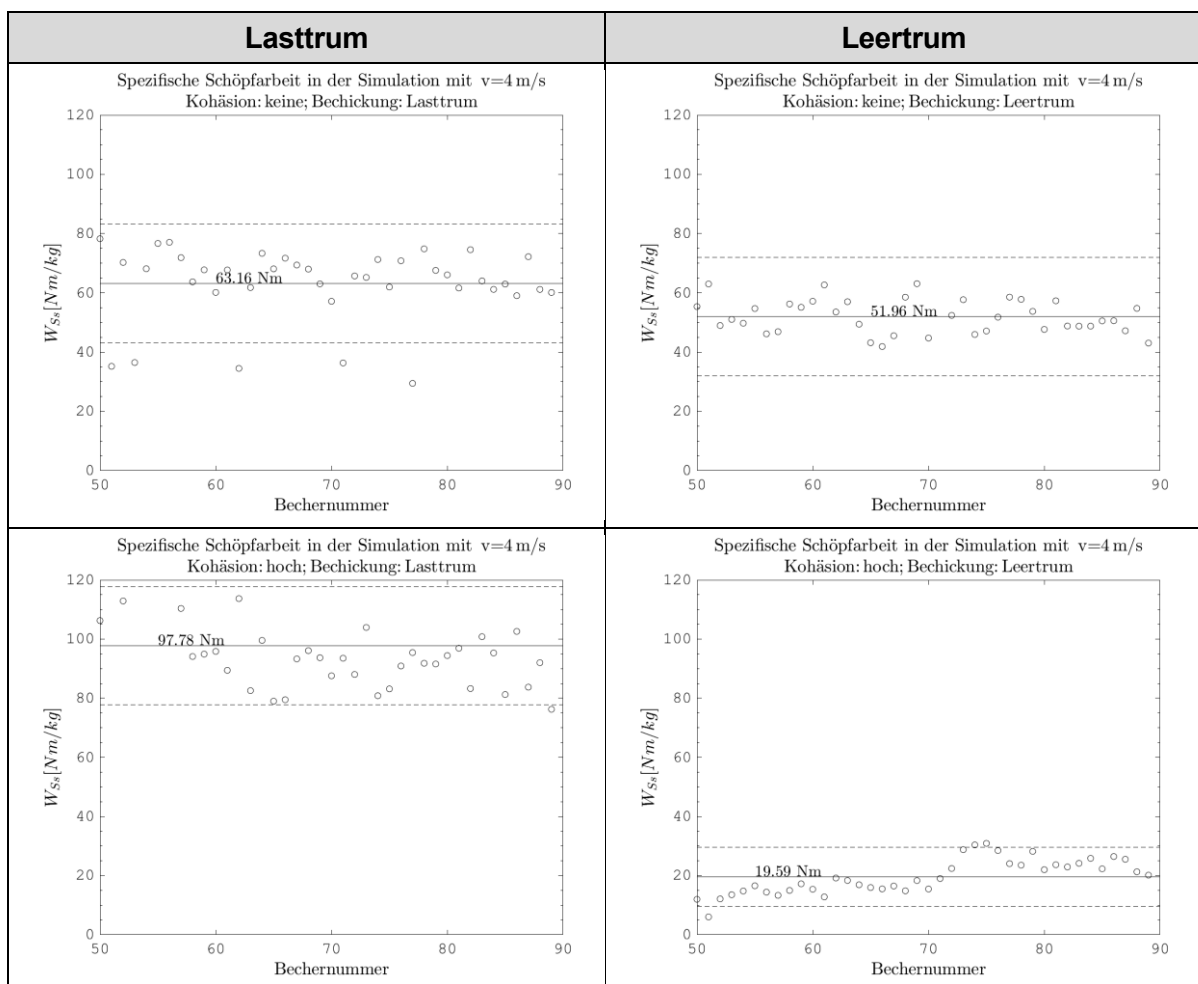


Abbildung 5-35: Gegenüberstellung der spezifischen Schöpfarbeit im stationären Zustand der Simulation für last- und leertrumseitige Gutaufgabe kohäsionsloser und kohäsiver Schüttgüter

Die durchschnittliche spezifische Schöpfarbeit der lasttrumseitigen Gutaufgabe ist höher, als die der leertrumseitigen Gutaufgabe, obwohl die reine Schöpfarbeit entlang des Schöpfweges vergleichbar ist. Dies ist mit dem deutlich größeren Becherfüllungsgrad in der Simulation für den Fall der leertrumseitigen Gutaufgabe zu begründen. Eine Reduzierung der Fördergeschwindigkeit würde in der Realität vergleichbare Becherfüllungsgrade ermöglichen.

Die spezifische Schöpfarbeit für kohäsive Güter ist für die lasttrumseitige Befüllung aufgrund des geringen Becherfüllungsgrad sehr hoch, da das Schüttgut von den Bechern nicht aufgenommen werden kann. Das Schöpfen kohäsiver Güter bei der leertrumseitigen Beschickung erfordert die niedrigste spezifische Schöpfarbeit. Dies ist mit dem hohen Becherfüllungsgrad in der Simulation und der geringen Schöpfarbeit zu begründen.

Tabelle 5-3 fasst die in diesem Kapitel ermittelte Schöpfarbeit für einen Becher und die Mittelwerte der spezifischen Schöpfarbeit für alle untersuchten Becher des Versuchsbecherwerks zusammen.

**Tabelle 5-3: Zusammenfassung der Schöpfarbeit für den in diesem Kapitel betrachteten Becher und der durchschnittlichen spezifischen Schöpfarbeit aller Becher in der gekoppelten DEM-MK-Simulation**

Beschickung	Kohäsion	$W_{S,Becher}$ [Nm]	$F_H$ [N]	$m_0$ [kg]	$W_{SS,Becher}$ [Nm/kg]	$W_{S,mittel}$ [Nm]	$W_{SS,mittel}$ [Nm/kg]
Lasttrum	keine	21,24	3,28	0,34	62,47	22,84	63,16
Leertrum	keine	21,62	4,05	0,41	52,73	18,19	51,96
Lasttrum	hoch	13,02	1,35	0,14	93,00	12,46	97,78
Leertrum	hoch	10,38	5,33	0,57	18,21	15,42	19,59

Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse lassen sich nicht direkt mit den empirischen Ergebnissen in der Literatur vergleichen, da die Simulationsergebnisse sich jeweils nur auf den Schöpfwiderstand und den Becherfüllungsgrad eines Bechers beziehen. Zum Vergleich mit den von DILEFELD, BEUMER UND WEHMEIER und HANFFSTENGEL ermittelten Funktionen der spezifischen Schöpfarbeit muss die hier angegebene spezifische Schöpfarbeit mit der Anzahl der Becher die am Schöpfprozess beteiligt sind multipliziert werden.

Die gekoppelten DEM-MK-Simulationen mit geringerer Fördergeschwindigkeit können in dieser Arbeit nicht analysiert werden, da diese in der zur Verfügung stehenden Berechnungszeit auf dem Universitäts-Cluster von maximal 116 Stunden keinen stationären Zustand erreicht haben.

## 5.2.4 Analyse zum Entleerungsverhalten von Becherwerken

### 5.2.4.1 Einfluss der Vorspannung

In der Literatur wird ein Zusammenhang zwischen der Gesamtsteifigkeit des Becher-Gurt-Systems und dem Entleerungsverhalten des Becherwerks vermutet (vergl. MCBRIDE [14]).

Zur Analyse des Einflusses der Gesamtsteifigkeit des Becher-Gurt-Systems auf das Entleerungsverhalten werden experimentelle Untersuchungen am Versuchsförderer mit dem Schüttgut PVC-Granulat durchgeführt. Es werden Becher vom Typ 125 x 106 - C, welche für den Geschwindigkeitsbereich der Misch- und Fliehkraftentleerung optimiert sind, eingesetzt (vergl. Abbildung 5-36 links). Die Vorspannung des Becherstranges wird an der Spanntrommel mit zwei Kraftmessdosen gemessen (vergl. Abbildung 5-36, rechts). Durch Variation des Achsabstandes werden unterschiedliche Vorspannungen von 0,2 kN und 1,8 kN eingestellt. Es werden Zugmittelgeschwindigkeiten von 1 m/s, 2m/s und 4m/s und der jeweils maximal mögliche Becherfüllungsgrad untersucht.

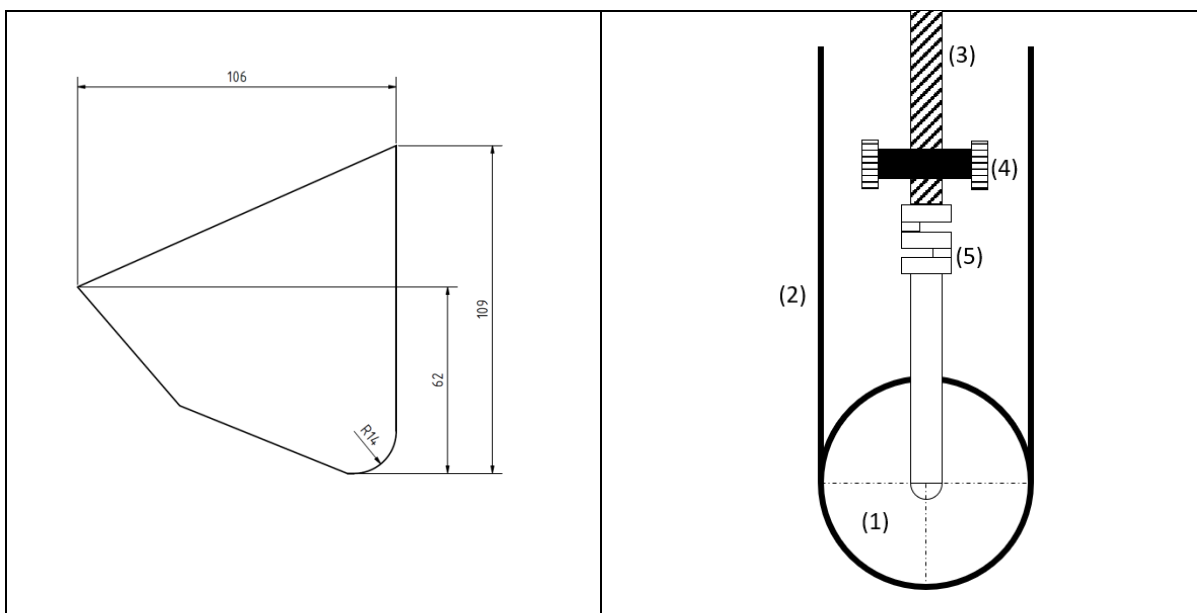


Abbildung 5-36: links: Fliehkraftbecher 125 x 106 - C, rechts: Vorrichtung zur Messung der Gurtspannung (1: Spanntrommel, 2: Becherstrang, 3: Gewindestange, 4: Gegenlager mit Einschweißmutter, 5: Kraftsensor)

Die Analyse von Hochgeschwindigkeitsvideoaufnahmen am Becherwerkkopf bei unterschiedlichen Vorspannungen und Zugmittelgeschwindigkeiten zeigt eine Veränderung des Entleerungsverhaltens zwischen der minimalen und der maximalen eingestellten Vorspannung des Becherstranges (vergl. Abbildung 5-37).

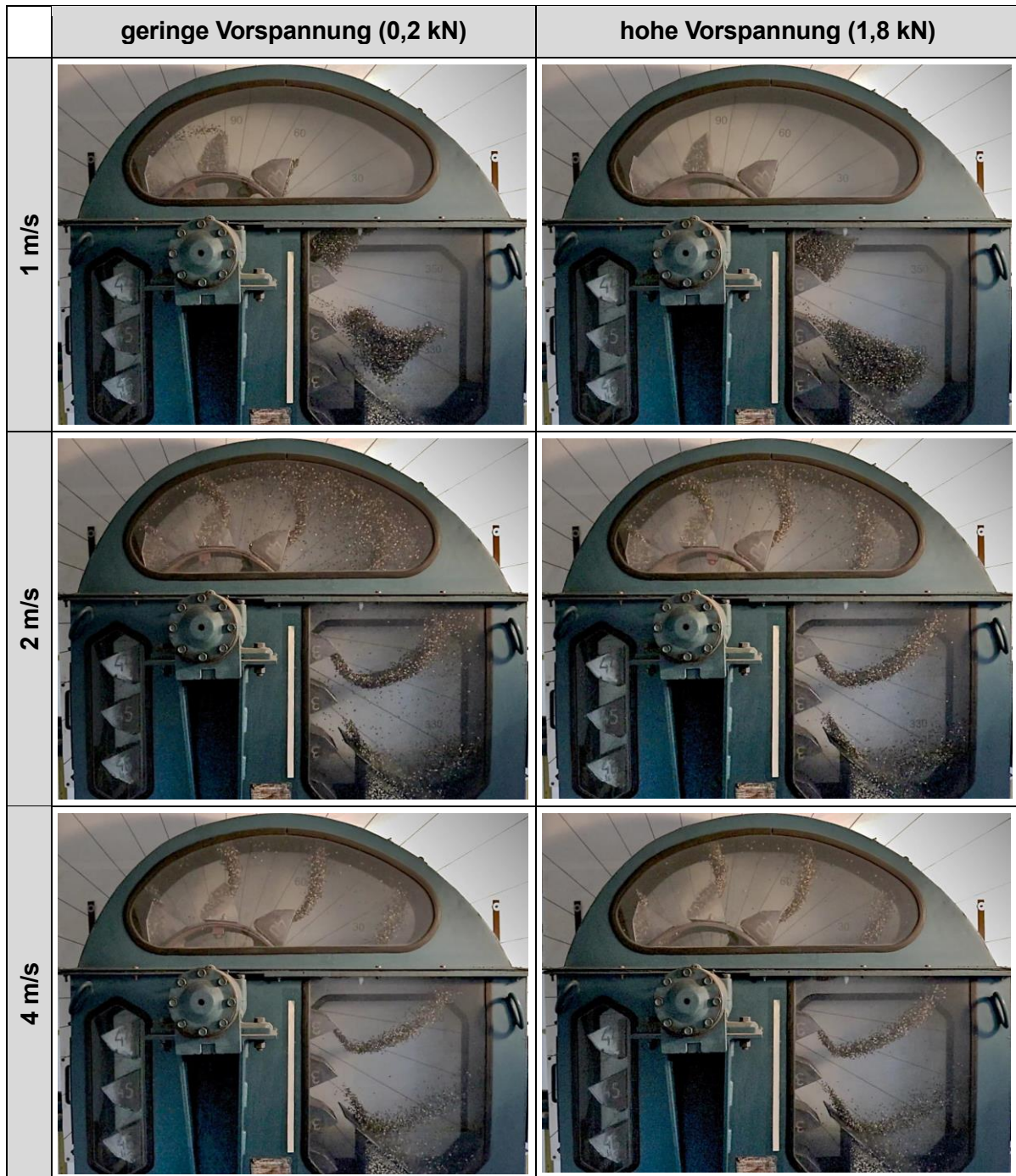
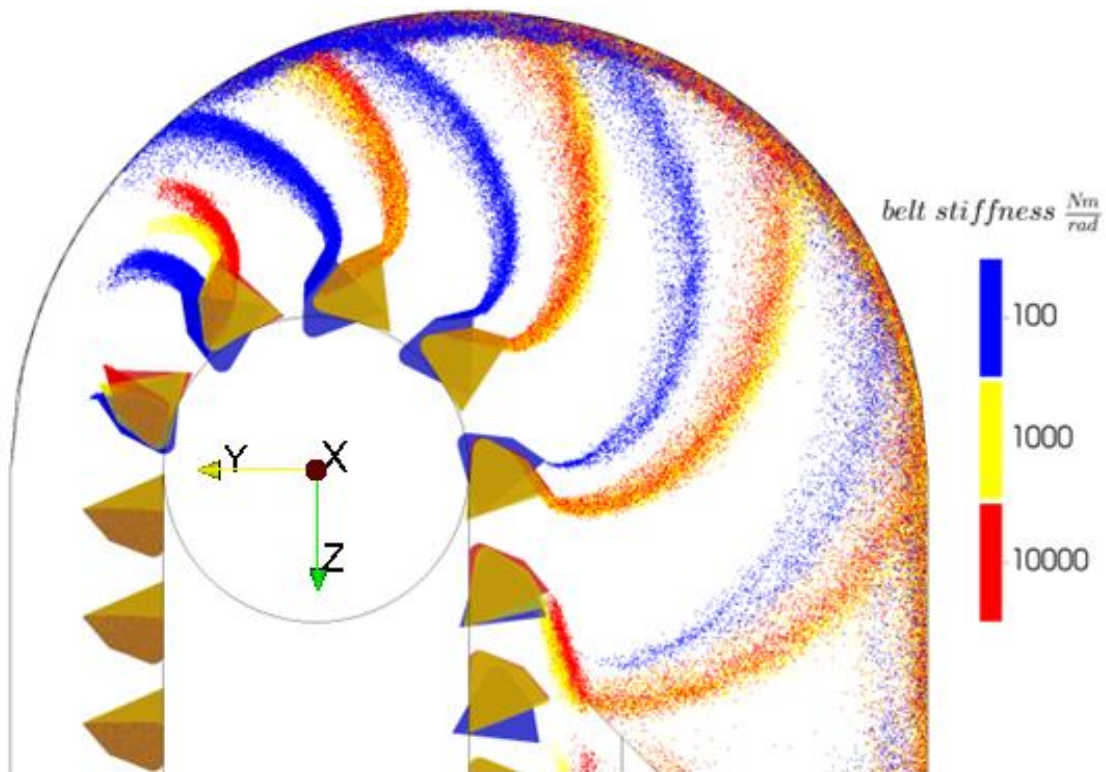


Abbildung 5-37: Einfluss der Vorspannung auf das Entleerungsverhalten am Becherwerkkopf

Insbesondere bei langsamen Fördergeschwindigkeiten und einer geringen Vorspannung tritt der Beginn der Becherentleerung zeitlich früher ein (vergl. Abbildung 5-37 oben). Die Becher können sich um einen geringen Winkel entgegen der Förderrichtung verdrehen. Dies führt zu einer Verschiebung der Becherspitze gegen den Uhrzeigersinn im Vergleich zu den Analysen mit einer hohen Vorspannung. Das im Becher befindliche Schüttgut entleert eher über die Becheraußenkante und bildet im Anschluss eine breiter aufgefächerte Gutwolke. Die Entleerung beginnt jedoch nicht so zeitig, dass das Gut in Richtung des Fördertrums zurück fällt. Dies widerspricht der in [14] aufgestellten These von MCBRIDE.

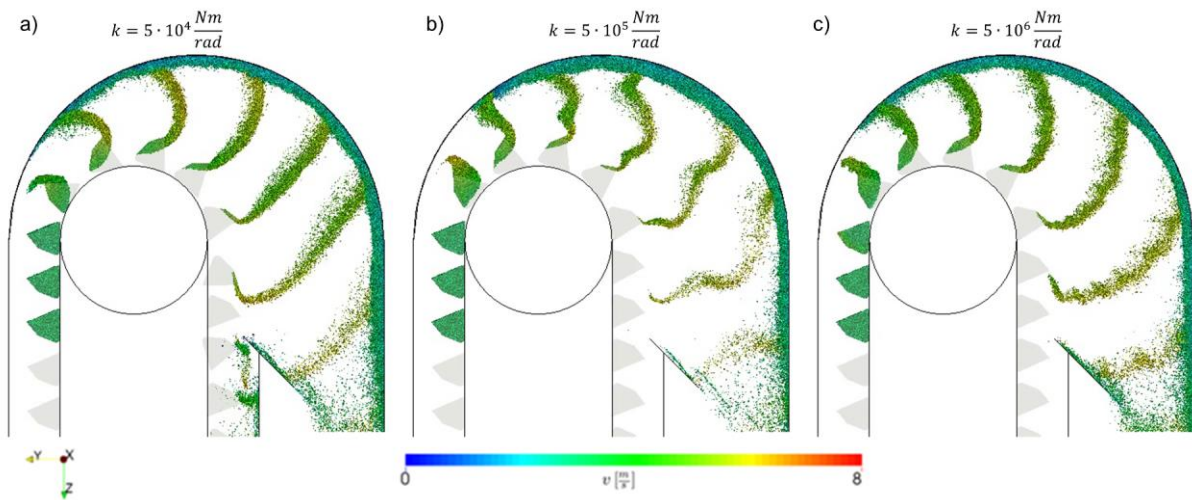
Zur Untersuchung des Einflusses des Bechernickens auf das Abwurfverhalten schnelllaufender Becherwerke werden gekoppelte DEM-MK-Simulationen durchgeführt. Die Simulationsparameter für das Versuchsgut PVC-Granulat werden aus der zuvor durchgeführten Kalibrierung (vergl. Kapitel 4.4.3.1) übernommen. Es wird das in 5.2.1 vorgestellte Mehrkörpersimulationsmodell des Versuchsbecherwerks verwendet. Durch Variation der Federsteifigkeit und Dämpfung des modellierten Becher-Gurt-Systems werden die Effekte des Über- und Untersteuerns in der Simulation sichtbar gemacht. Durch Überlagerung der Simulationsergebnisse von drei gekoppelten DEM-MK-Simulationen mit sehr geringen Steifigkeiten der Becher-Gurt-Verbindung im Vergleich zu den in Kapitel 5.2.2.2 parametrisierten Steifigkeiten, lässt sich der Einfluss des Über- bzw. Untersteuerns der Becher am Becherwerkkopf qualitativ darstellen (vergl. Abbildung 5-38). Für geringe Steifigkeiten beginnt der Entleerungsvorgang früher und die Abwurfparabel ist gegen die Förderrichtung verschoben. Entgegen der Annahme von MCBRIDE fällt das Schüttgut jedoch nicht in Richtung des Fördertrums zurück und in den Becherwerkfuß. Die tangentielle Geschwindigkeit in Förderrichtung ist ausreichend, um das Gut in Richtung der Abgabeschurre zu transportieren.



**Abbildung 5-38: Simulation des Entleerungsverhaltens für unterschiedliche Steifigkeiten der Becher-Gurt-Verbindung (überzeichnete Darstellung)**

Es ist anzumerken, dass die Becher sich in der Realität am Zugmittel und an der Antriebstrommel abstützen können und somit nicht so weit auslenken können wie in Abbildung 5-38 überzeichnet dargestellt. Der Effekt der Verschiebung der Becherspitze entgegen der Förderrichtung ist dementsprechend in der Realität geringer.

Zur weiteren Analyse des Einflusses des Bechernickens auf das Entleerungsverhalten schnelllaufender Becherwerke werden Simulationen mit Steifigkeiten des Becher-Gurt-Systems durchgeführt, die deutlich größer als die zuvor verwendeten Steifigkeiten sind.



**Abbildung 5-39: Einfluss der Steifigkeit der Becher-Gurt-Verbindung auf das Entleerungsverhalten schnelllaufender Becherwerke**

Für Steifigkeiten von  $k = 5 \cdot 10^4 \frac{Nm}{rad}$  (Abbildung 5-39 a) führt das Übersteuern der Becher im Bereich des Ablaufens des Gurtes von der Antriebstrommel zu einer erhöhten Spillage des geförderten Schüttgutes, sodass dieses im Leertrum zurück fällt. Für mittlere Steifigkeiten ist zu erkennen, dass die Schwingungsanregung beim Einlaufen der Becher aus dem Fördertrum in die Antriebstrommel für den gesamten Umlauf auf das Fördergut übertragen wird (Abbildung 5-39 b). Für hohe Steifigkeiten des modellierten Becher-Gurt-Systems ergibt sich ein geringes Bechernicken, wie es auch in den zuvor vorgestellten Versuchen beobachtet wurde (Abbildung 5-39 c). Es ist anzunehmen, dass das Versuchsbecherwerk auch beim vollständigen Lösen der Spannschrauben aufgrund der Eigenmasse des Becherstrangs und der Spanntrommel immer so weit gespannt ist, dass die Effekte des Bechernickens in der Realität nur in geringerem Ausmaß auftreten. Die Becher werden durch die verbleibende Gurtspannkraft auf die Trajektorie der Umlenktrommel gezwungen und können sich in Realität nicht so frei bewegen, wie in der Simulation dargestellt. Das Verdrehen der Becheraußenkante entgegen der Förderrichtung und der damit verbundene zeitlich frühere Entleerungsbeginn ist im Vergleich der Simulationsergebnisse gut zu erkennen.

5.2.4.2 Einfluss der Becherfüllung

Zur Untersuchung des Einflusses des Becherfüllungsgrades auf das Bewegungsverhalten von Becherwerken und dessen Einfluss auf das Entleerungsverhalten am Becherwerkkopf werden gekoppelte DEM-MK-Simulationen mit den Schüttgütern PVC-Granulat und Weizen durchgeführt. Die Schüttgüter werden gewählt, da bereits HELLMUTH [4] in seiner Dissertationsschrift 1993 umfangreiche experimentelle Untersuchungen mit diesen Schüttgütern durchgeführt hat.

Die DEM-Simulationsparameter für das Schüttgut PVC-Granulat werden aus der Kalibrierung in Kapitel 4.4.3.1 übernommen (vergl. Tabelle 5-4).

**Tabelle 5-4: kalibrierte Materialparameter für das Schüttgut PVC-Granulat**



Schüttdichte [kg/m³]:	675
stat. Böschungswinkel [°]:	32,25
Partikelgrößenverteilung [mm]:	2,5...6,0
Porosität [-]:	0,46
Wandreibung, Baustahl [-]:	0,377
Partikelreibung [-]:	0,3
Rollreibung [-]:	0,4

Die Simulationsparameter für das Schüttgut Weizen werden analog der Vorgehensweise in Kapitel 4.4.3.1 kalibriert (vergl. Tabelle 5-5). Um eine realistische Darstellung der Kornform zu erreichen, und ein Verklemmen der Partikel untereinander zu ermöglichen, werden die Weizenpartikel in Form von Multispheres modelliert (vergl. Kapitel 3.2.4.2).

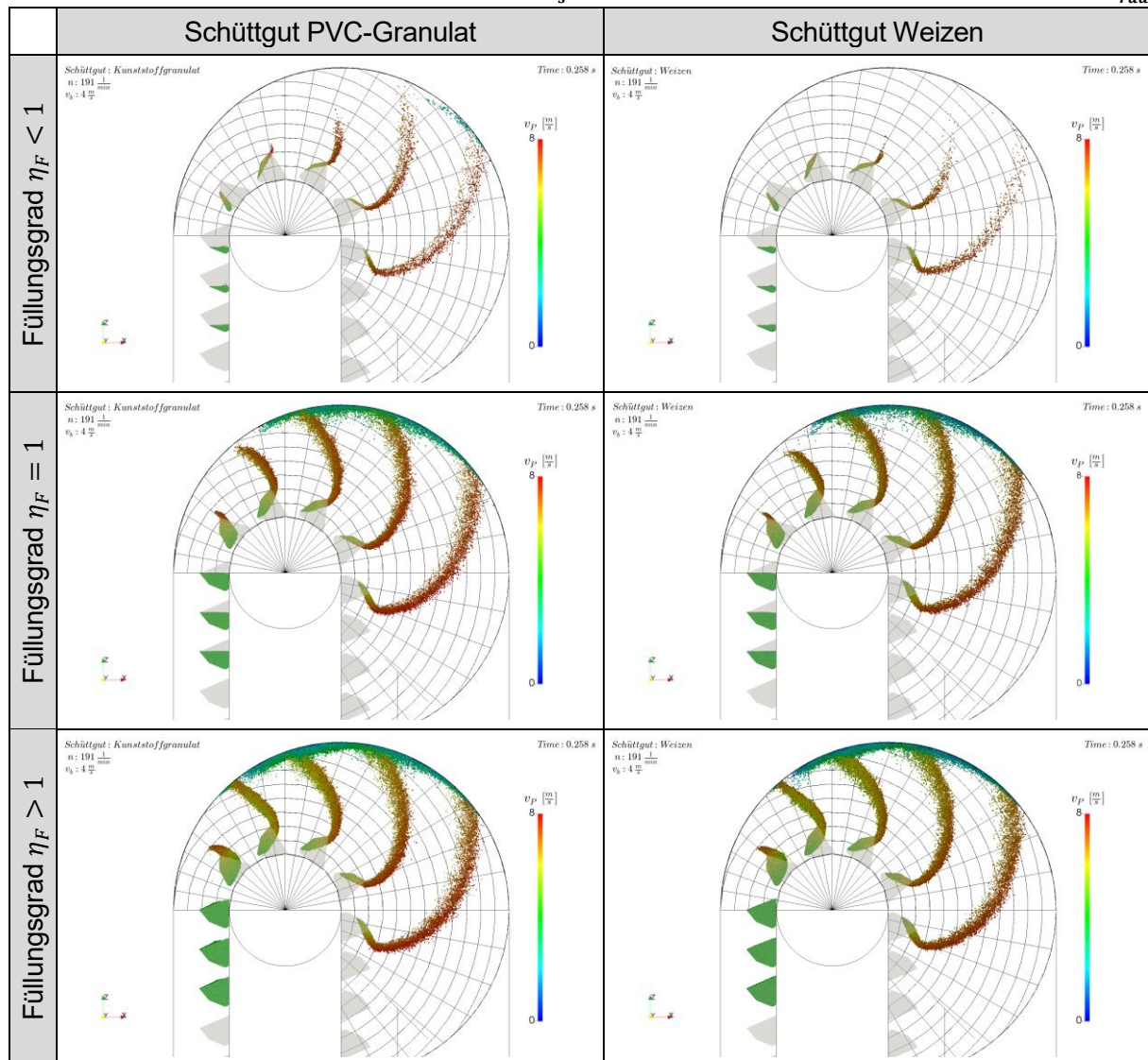
**Tabelle 5-5: kalibrierte Materialparameter für das Schüttgut Weizen**



Schüttdichte [kg/m³]:	743
stat. Böschungswinkel [°]:	26
Partikelgrößenverteilung [mm]:	5,0...7,0
Porosität [-]:	0,402
Wandreibung, Baustahl [-]:	0,47
Partikelreibung [-]:	0,5
Rollreibung [-]:	0,3

In Tabelle 5-6 werden die Simulationsergebnisse kategorisiert nach Becherfüllungsgrad und Schüttgut für die Fördergeschwindigkeit von 4 m/s gegenüber gestellt. Es wird das in Kapitel 5.2.1 vorgestellte Mehrkörpermodell des Versuchsbecherwerks mit der parametrisierten Steifigkeit der Becher-Gurt-Verbindung von  $k = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$  in der Simulation verwendet.

**Tabelle 5-6: Qualitativer Vergleich des Förderverhaltens für PVC-Granulat und Weizen bei variierendem Becherfüllungsgrad, Fördergeschwindigkeit  $v_z = 4 \frac{m}{s}$ , Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems  $k_{belt} = 4 \cdot 10^5 \frac{Nm}{rad}$**



In der gekoppelten DEM-MK-Simulation konnte für keines der beiden untersuchten Schüttgüter PVC-Granulat und Weizen eine Abhängigkeit zwischen dem Becherfüllungsgrad und dem Entleerungsverhalten beobachtet werden. Der Entleerungszeitpunkt und der Winkel, in dem das Gut den Becher verlässt, sind für alle untersuchten Becherfüllungsgrade für das jeweilige Schüttgut identisch.

Der Einfluss des Schüttgutes auf das Entleerungsverhalten, insbesondere der Kornform, ist in den Simulationsergebnissen zu erkennen. Der Entleerungszeitpunkt beginnt für das als Multispheres modellierte Schüttgut Weizen für alle Becherfüllungsgrade zeitlich später im Vergleich zu PVC-Granulat, obwohl die kalibrierten Materialparameter sehr ähnlich sind.



## 6 Becherförderer mit Übergangsbogen zur Umlenkung des Zugmittels am Becherwerkfuß als innovativer Ansatz zur Reduzierung des Bechernickens

Aus der vorangegangenen Analyse zum Bewegungsverhalten von Becherwerken lässt sich schlussfolgern, dass das Bechernicken auf das Entleerungsverhalten von Becherwerken in der Realität nur einen sehr geringen Einfluss hat.

Auf das Schöpfverhalten hat das stoßhafte Abbremsen der Bechervorderkante beim Übergang von der kreisförmigen in die geradlinige Bewegung einen erheblichen Einfluss. Um diesen Effekt des Bechernickens zu reduzieren, wird vorgeschlagen, dessen Ursache entgegen zu wirken. Der unetstetige Übergang von einer Geraden auf eine Kreisbahn wird im Eisenbahn- und Straßenbau mit Hilfe von Übergangsbögen, sogenannte Klothoiden, vermieden [115]. Im Gegensatz zu einem plötzlichen Richtungswechsel nimmt der Krümmungsverlauf der Bahnkurve stetig mit ihrer Länge zu. Dies ermöglicht im Straßenverkehr eine ruckfreie Fahrdynamik. Das Prinzip des Übergangsbogens als Verbindungskurve zwischen einer Geraden und einer Kreisbahn wird im Folgenden auf die Umlenkung der Becher am Becherwerkfuß übertragen und in einer gekoppelten DEM-MK-Simulationen untersucht.

### 6.1 Mathematische Beschreibung

Im Startpunkt des Übergangs von der Geraden auf den Bogen ist der Radius der Übergangskurve unendlich. Bezogen auf die Kurvenlänge  $L$  wird jedem Punkt der Radius  $R$  zugeordnet. Die Kurvenlänge  $L$  multipliziert mit dem Radius  $R$  ist für jeden Punkt der Klothoide konstant. Dieser Zusammenhang wird durch den Parameter

$$a^2 = L R, \quad (135)$$

charakterisiert. Die Funktion der Übergangskurve wird für jeden Punkt entlang der Strecke  $L$  mit Gl. (137) und Gl. (136) bestimmt.

$$X = \int_0^L \sin \frac{L^2}{2a^2} dL, \quad (136)$$

$$Z = \int_0^L \cos \frac{L^2}{2a^2} dL, \quad (137)$$

$$\tau = \frac{L}{2R}. \quad (138)$$

Abbildung 6-1 stellt die geometrischen Zusammenhänge zwischen dem Einlaufradius  $R_\infty$ , der Kurvenlänge  $L$ , dem Tangentenwinkel  $\tau$  und der Kreisabweichung  $\Delta R$  dar.

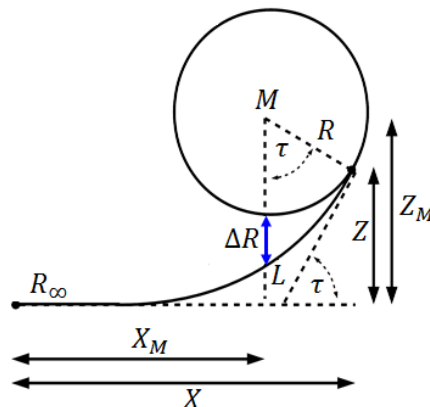


Abbildung 6-1: Klothoide als Übergangsbogen von der Geraden auf eine Kreisbahn (nach [115], S. 136)

## 6.2 Simulationsstudie

### 6.2.1 Variante I: Beibehaltung des Umlenkradius

Aus Abbildung 6-1 ist ersichtlich, dass mit zunehmendem Tangentenwinkel  $\tau$  (Gl. (138)) die Kreisabweichung  $\Delta R$  des Übergangsbogens steigt. Dies zieht eine Vergrößerung der weiterhin zylindrisch ausgeführten Antriebstrommel und eine Vergrößerung des Abstandes zwischen Fördertrum und Leertrum nach sich. Es wird daher eine Kombination aus zwei Übergangsbögen als Ein- und Auslaufkurve der Becher in die Umlenkung am Becherwerkfuß vorgeschlagen, welche mit einem Kreissegment miteinander verbunden sind. Die tangentielle Beschleunigung entlang der Trajektorie steigt linear im Bereich der Übergangskurve, ist im Bereich des Kreissegments konstant und sinkt anschließend linear.

In einer Vorstudie werden unterschiedliche Tangentenwinkel untersucht. Die Integrale (136) und (137) werden mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Winkelfunktionen integriert und ergeben so die kartesischen Koordinaten für die Teilstücke der Übergangsbögen.

$$X = L \cdot \left( \frac{t}{3} - \frac{t^3}{3! \cdot 7} + \frac{t^5}{5! \cdot 11} - \frac{t^7}{7! \cdot 15} \pm \dots \right), \quad (139)$$

$$Z = L \cdot \left( 1 - \frac{t^2}{2! \cdot 5} + \frac{t^4}{4! \cdot 9} - \frac{t^6}{6! \cdot 14} \pm \dots \right). \quad (140)$$

Mit 
$$t = \frac{L^2}{2a^2} = \frac{L}{2R}. \quad (141)$$

In Abbildung 6-2 ist die Vergrößerung der Kreisabweichung bei zunehmendem Tangentenwinkel dargestellt. Für die weiterführenden Simulationen wird ein Tangentenwinkel von  $60^\circ$  gewählt, da dieser eine noch vertretbare Vergrößerung der Breite des Becherwerkes, und damit des Durchmessers der Antriebstrommel, aufweist.

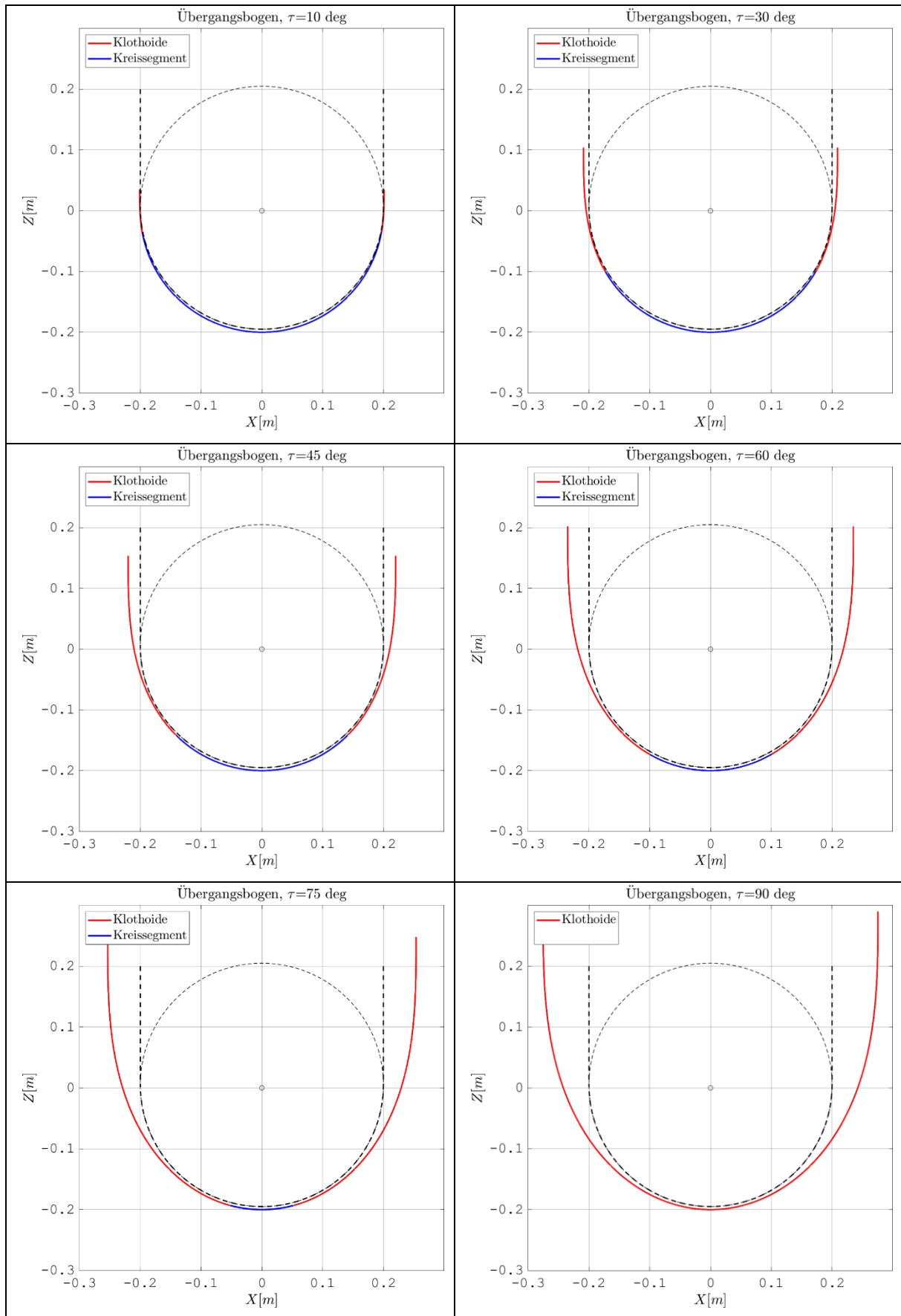


Abbildung 6-2: Kreisabweichung der Übergangsbögen mit zunehmendem Tangentenwinkel

### 6.2.2 Variante II: Verringerung des Zielradius des Übergangsbogens

Eine weitere Möglichkeit der Realisierung besteht darin, den Durchmesser der Antriebstrommel im Vergleich zur konventionellen Umlenkung konstant zu halten, und den Zielradius der Übergangsbögen zu verkleinern. So wird der Abstand zwischen Förder- und Leertrum im Vergleich zu dem in dieser Arbeit betrachteten Versuchsbecherwerk nicht verändert.

Auf den Kreisbogen als Verbindungselement der beiden Teilstücke wird verzichtet, sodass der Tangentenwinkel im Scheitelpunkt der Umlenkung  $\tau = 90^\circ$  beträgt. Der maximale Krümmungsradius der Übergangsbögen für den festgelegten Startpunkt  $P_0 = [0,2 \ 0,2]^T$  berechnet sich aus

$$\text{Gleichung (138)} \quad L = 2\tau R, \quad (142)$$

$$\text{mit (141) eingesetzt in (139)} \quad X_S = L \cdot \left( \frac{L}{3} - \frac{\left(\frac{L}{2R}\right)^3}{3! \cdot 7} + \frac{\left(\frac{L}{2R}\right)^5}{5! \cdot 11} \right), \quad (143)$$

$$\text{und gekürzt} \quad X_S = 2\tau R * \left( \frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{3! \cdot 7} + \frac{\tau^5}{5! \cdot 11} \right), \quad (144)$$

$$\text{umgestellt nach R} \quad R = \frac{X_S}{\left( \frac{2R\tau^2}{3} - \frac{2R\tau^4}{3! \cdot 7} + \frac{2R\tau^6}{5! \cdot 11} \right)}, \quad (145)$$

zu  $R_{\ddot{u}max} = 0,145 \text{ m}$ . Abbildung 6-3 stellt die projizierte Umlenkung im Vergleich zur konventionellen Kreisbahn dar. Die Kurve startet in  $P_0 = [0,2 \ 0,2]^T$  mit einer Krümmung von  $\kappa = \frac{1}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0$ . Im Scheitelpunkt  $P = [0 \ -0,2]^T$  beträgt der Radius  $R = 0,145 \text{ m}$  zum Mittelpunkt der Klothoide. Mit diesen Parametern wird die Funktion der Bahnkurve der Becher in der Umlenkung am Becherwerkfuß als Ortsvorgabe im Mehrkörpermodell implementiert.

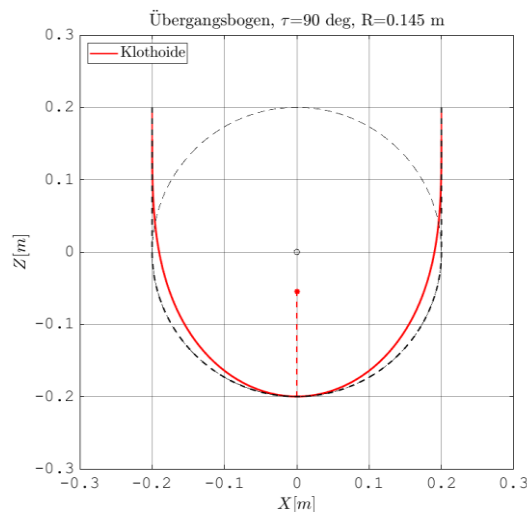


Abbildung 6-3: Übergangsbogen zur Umlenkung der Becher mit  $\tau=90^\circ$  und  $R=0,145 \text{ m}$

### 6.2.3 Vergleich der neu entwickelten Lösung mit der konventionellen Lösung

Aus den Untersuchungen von DILEFELD ist bekannt, dass die leertrumseitige Beschickung schnelllaufender Becherwerke mit kohäsionslosem Schüttgut eine größere spezifische Schöpfarbeit erfordert, als die lasttrumseitige Gutaufgabe. Aufgrund der Verringerung der Becheraußenkantengeschwindigkeit beim Übergang der Becher vom III. in den IV. Quadranten wird eine vorzeitige Entleerung der Becher eingeleitet [3]. Daher wird für einen direkten Vergleich der konventionellen Umlenkung mit den hier vorgeschlagenen Umlenkungen mittels Übergangsbögen die Beschickung im Leertrum bei einer Zugmittelgeschwindigkeit von  $v_z = 4 \text{ m/s}$  und das kalibrierte Schüttgut PVC-Granulat verwendet. Die zeitliche Ableitung Funktionen der Übergangskurven für die Konstruktionsvarianten I und II werden als Geschwindigkeitsvorgabe der Stellglieder in das in Kapitel 5.2.1 vorgestellte Mehrkörpersimulationsmodell des Versuchsbecherwerks implementiert. Der Zustandsautomat wird um zwei weitere Zustände für den Übergang von der Übergangskurve auf das Kreissegment und vom Kreissegment auf die zweite Übergangskurve erweitert. Die Steifigkeit des Becher-Gurt-Systems entspricht der in 5.2.2.2 parametrisierten Steifigkeit. Das Gehäuse und die Gurtrajektorie werden in ein CAD Modell überführt und als Kontaktfläche für das simulierte Schüttgut in die gekoppelte DEM-MK-Simulation importiert.

#### 6.2.3.1 Vergleich der Variante I mit der konventionellen Umlenkung

Das Geschwindigkeitsprofil für die Umlenkung mittels Übergangsbögen zeigt im Vergleich zu den Bereits in 5.2.2.3 analysierten Geschwindigkeitsprofilen mit kreisförmiger Umlenkung keine Unstetigkeit beim Übergang von der kreisförmigen Bewegungsrichtung in die vertikale Bewegung und umgekehrt (vergl. Abbildung 6-4).

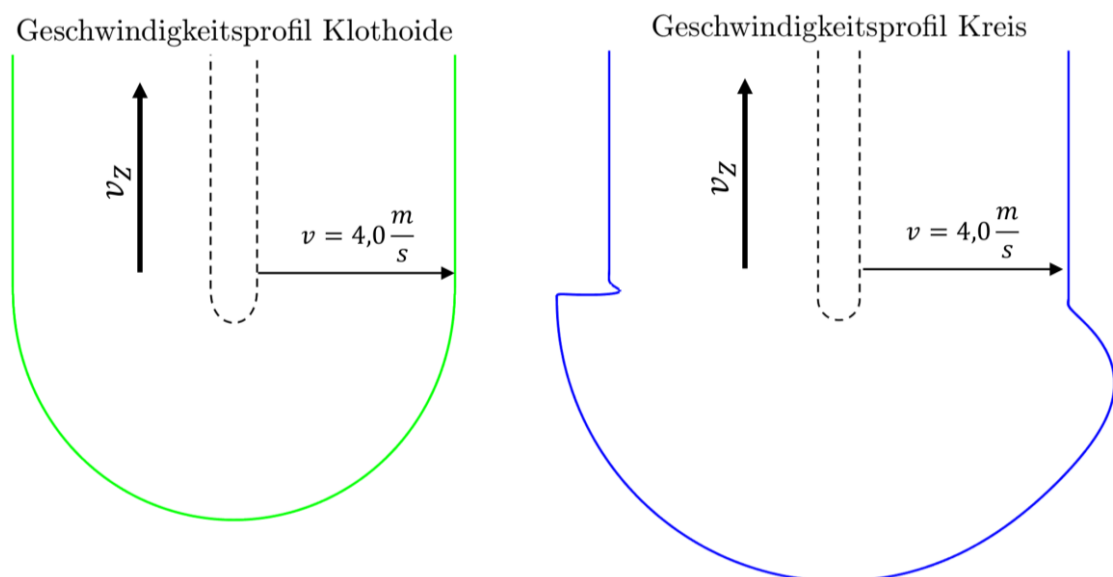
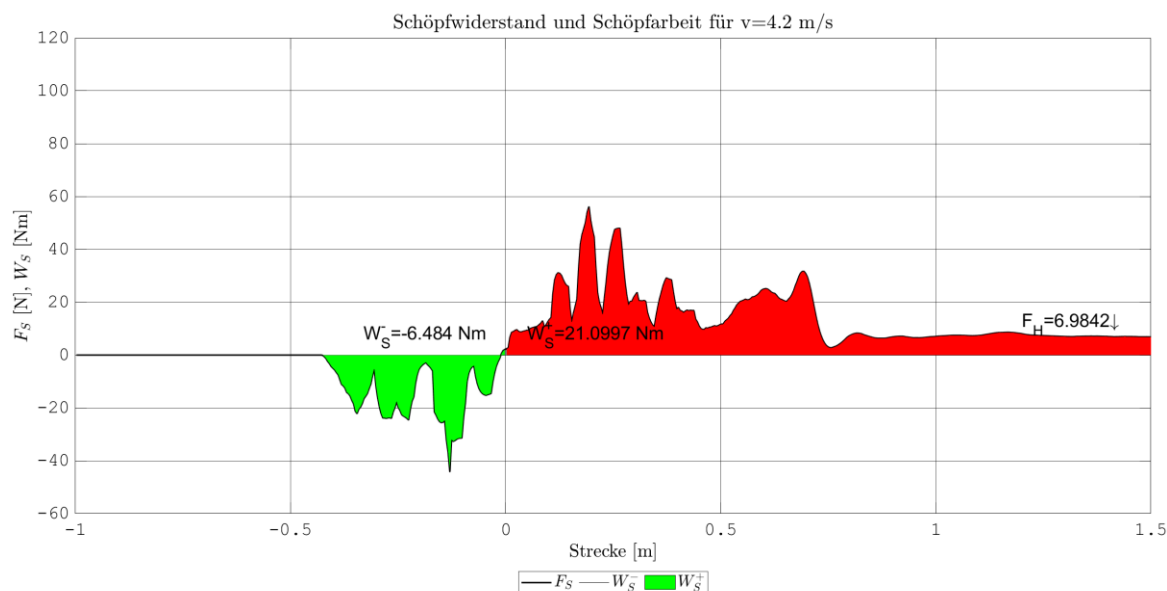
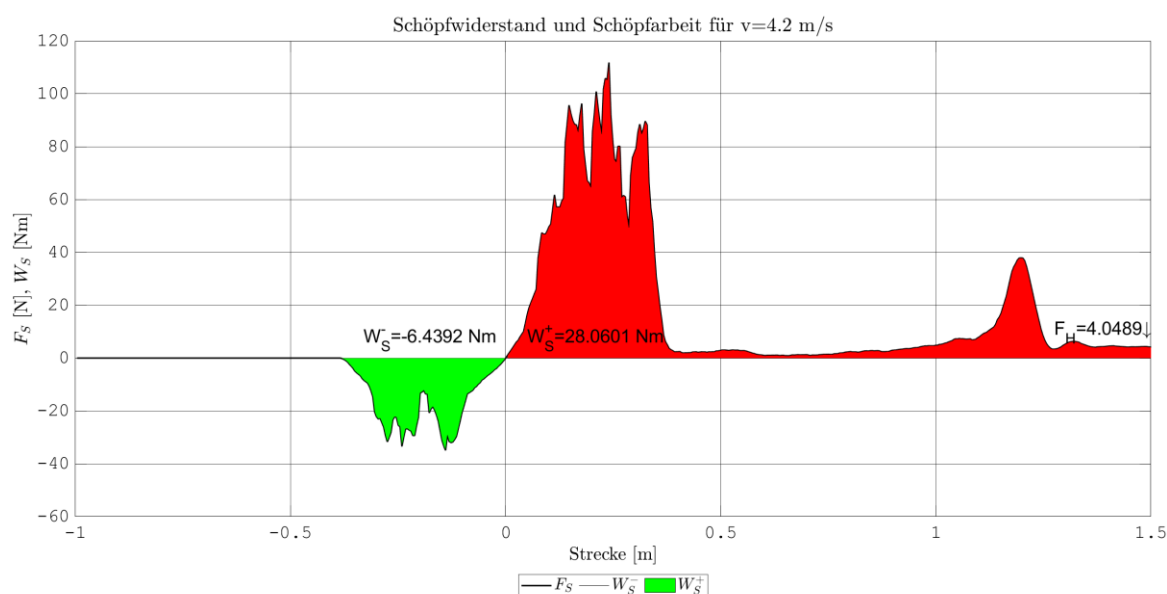


Abbildung 6-4: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile des Becherschwerpunkts für die Umlenkung mit Übergangsbogen (links) und Halbkreis (rechts) bei einer Zugmittelgeschwindigkeit von jeweils 4 m/s

Der Bewegungswiderstand, aufgetragen über die zurückgelegte Strecke des Bechers, zeigt für die Umlenkung des Becherstranges mit Übergangsbögen nicht das in 5.2.2.3 beobachtete, erneute Abheben und Zurückfallen des Schüttgutes nach dem Schöpfen im Becherwerkfuß (vergl. Abbildung 6-5 und Abbildung 6-6). Die Schöpfarbeit für die Umlenkung der Becher mit Übergangsbögen reduziert sich um 32,4 Prozent. Der Becherfüllungsgrad erhöht sich um 72 Prozent.



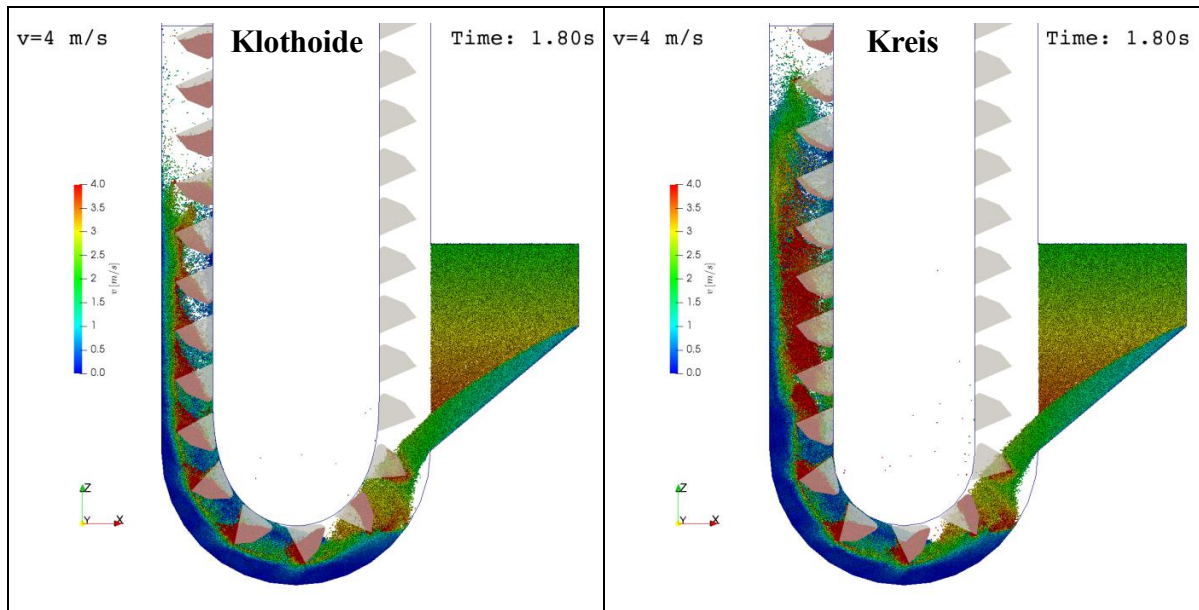
**Abbildung 6-5: Schöpfwiderstand und Schöpfarbeit für die Umlenkung am Becherwerkfuß mit Übergangsbögen, leertrumseitige Gutaufgabe, kohäsionsloses Schüttgut**



**Abbildung 6-6: Schöpfwiderstand und Schöpfarbeit für die kreisförmige Umlenkung am Becherwerkfuß; leertrumseitige Gutaufgabe, kohäsionsloses Schüttgut**

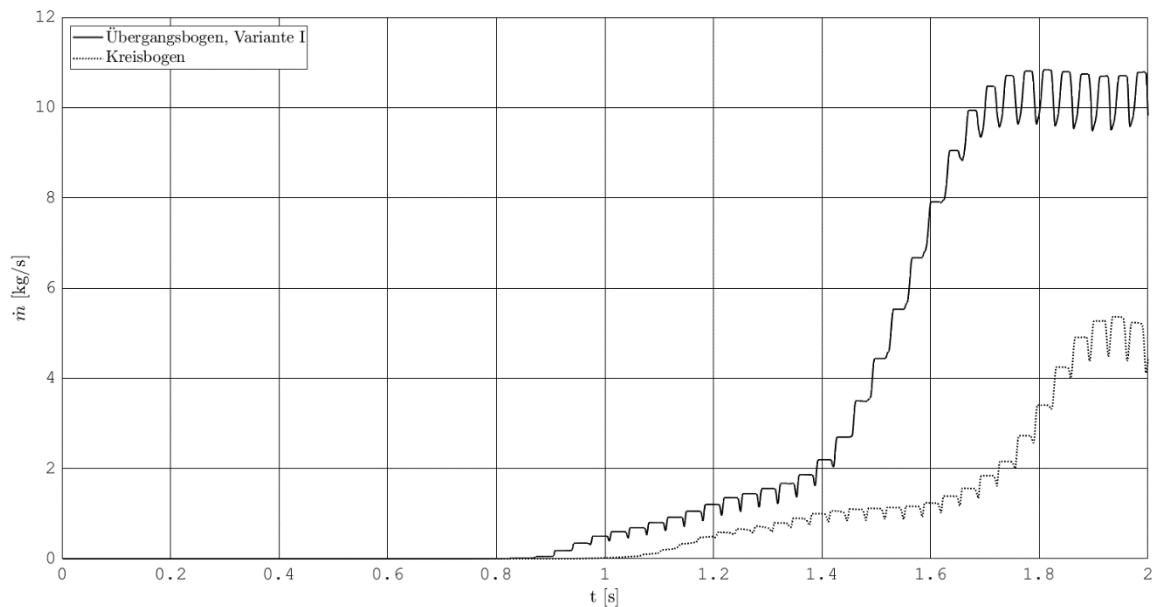
Die gekoppelte DEM-MK-Simulation zeigt für die untersuchten Parameter bei gleichem Füllungs-Massenstrom, gleicher Zugmittelgeschwindigkeit und gleicher Becherteilung eine deutlich kleinere Gutwolke für die vorgeschlagene Umlenkung mittels Übergangsbögen

(vergl. Abbildung 6-7). Weiterhin ist die Becherfüllung am Ende des Simulationsraumes im stationären Zustand der Simulation deutlich größer.

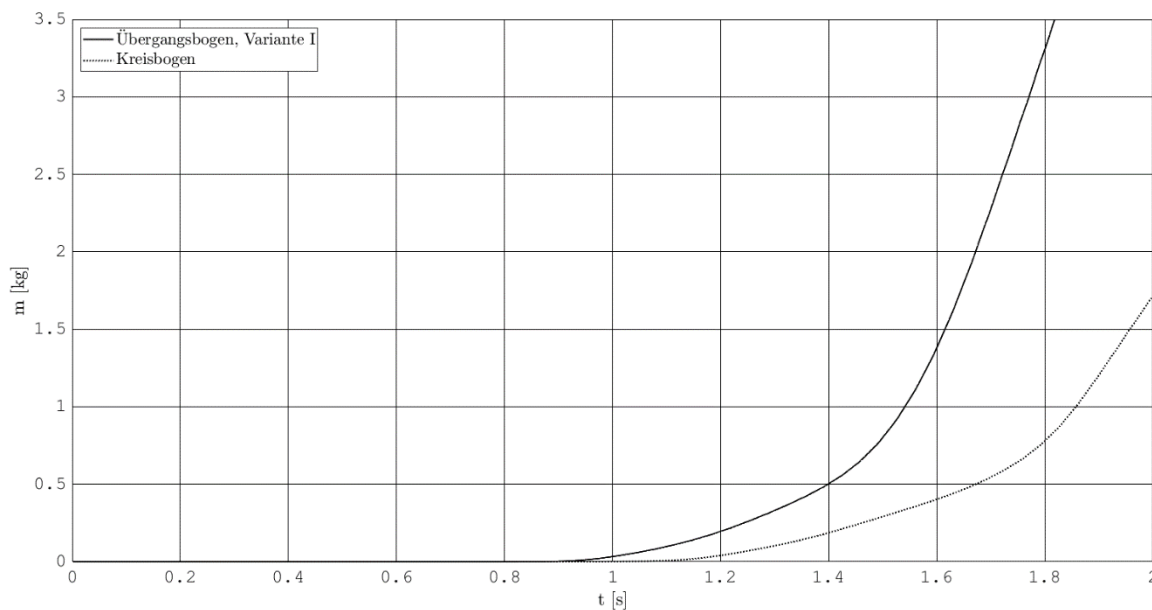


**Abbildung 6-7: Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse der Umlenkung mittels Übergangskurve (links) und der konventionellen Umlenkung (rechts), leertrumseitige Gutaufgabe, kohäsionsloses Schüttgut,  $v_z=4$  m/s, der lasttrumseitige Einlass wurde in der Simulation mit einer Wand verschlossen, um dem Schüttgut weniger Raum zum Ausbreiten zu geben**

Der Vergleich des geförderten Massenstroms (Abbildung 6-8) und der geförderten Masse (Abbildung 6-9) in der gekoppelten DEM-MK-Simulation bestätigt diese Ergebnisse.



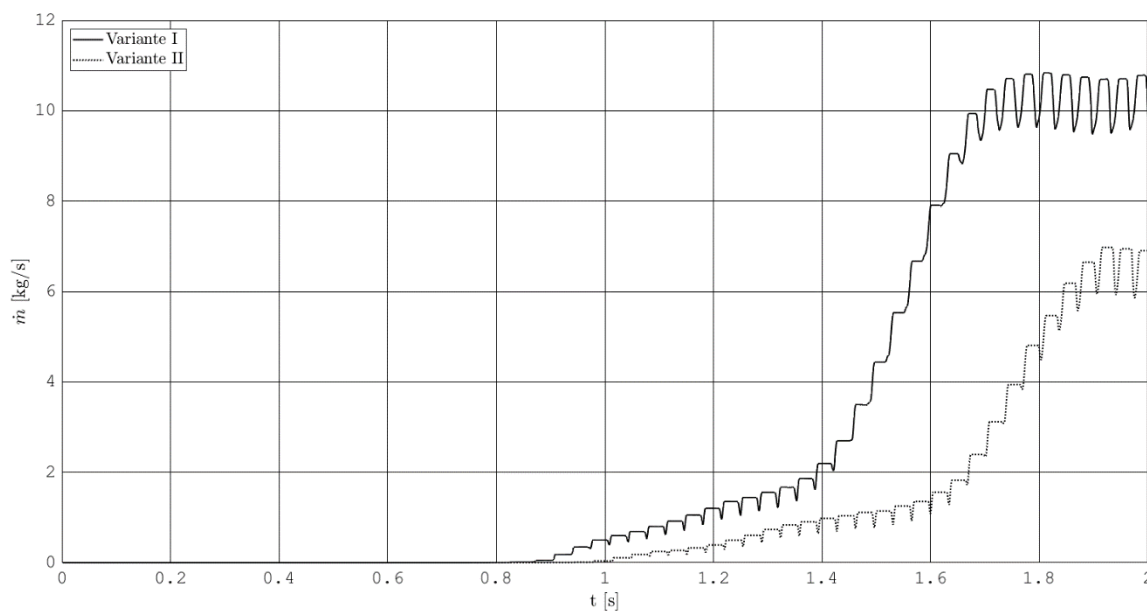
**Abbildung 6-8: Vergleich des Massenstroms für Übergangsbogen Variante I und Kreisbogen**



**Abbildung 6-9: Vergleich der geförderten Masse für Übergangsbogen und Kreisbogen**

### 6.2.3.2 Vergleich der Variante II mit der konventionellen Umlenkung

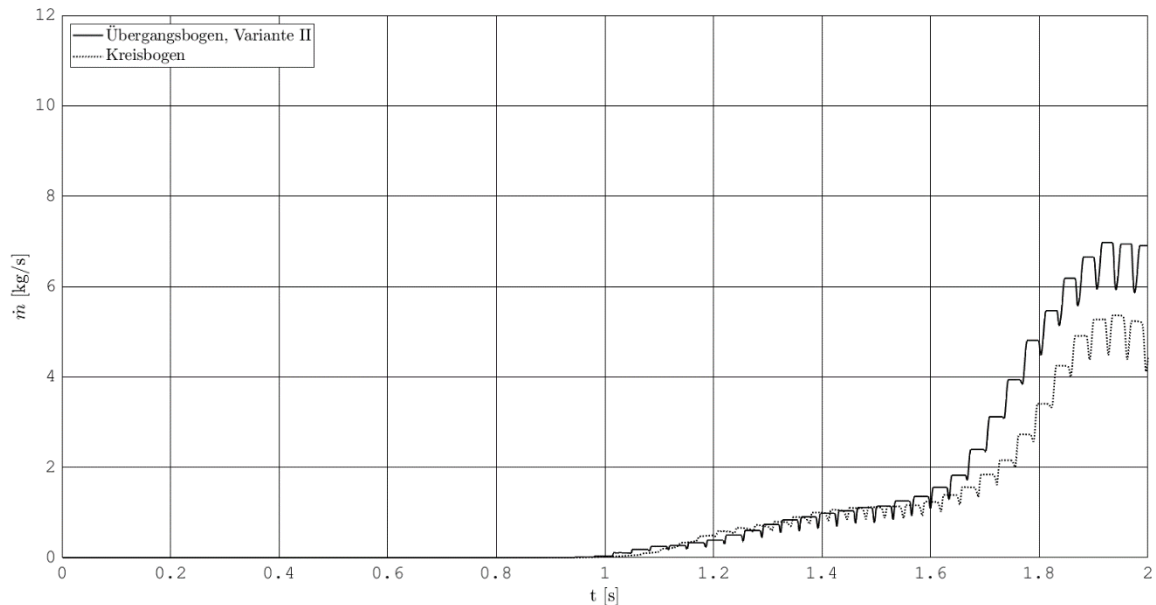
Die zweite Geometrievariante zeigt, verglichen mit der ersten Variante, einen schlechteren Massenstrom im stationären Zustand (vergl. Abbildung 6-10).



**Abbildung 6-10: Vergleich des Massenstroms der Konstruktionsvarianten I und II für die Umlenkung der Becher mittels Übergangsbögen**

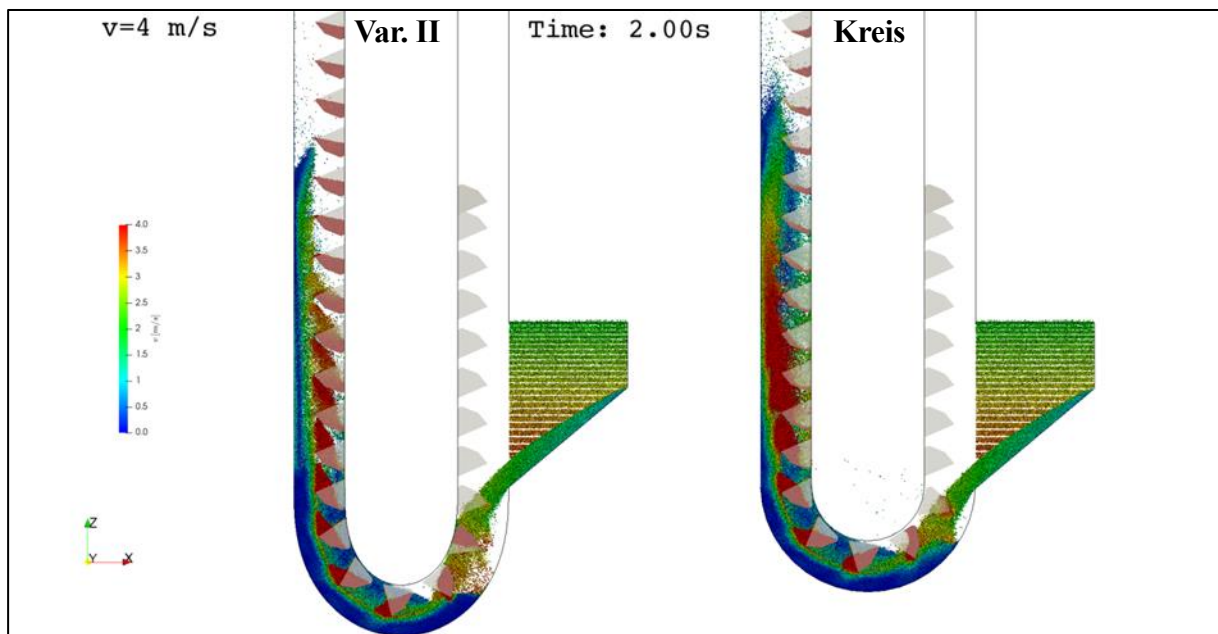


Im Vergleich mit der kreisförmigen Umlenkung ist der erzielbare Massenstrom im stationären Zustand geringfügig höher (Abbildung 6-11).



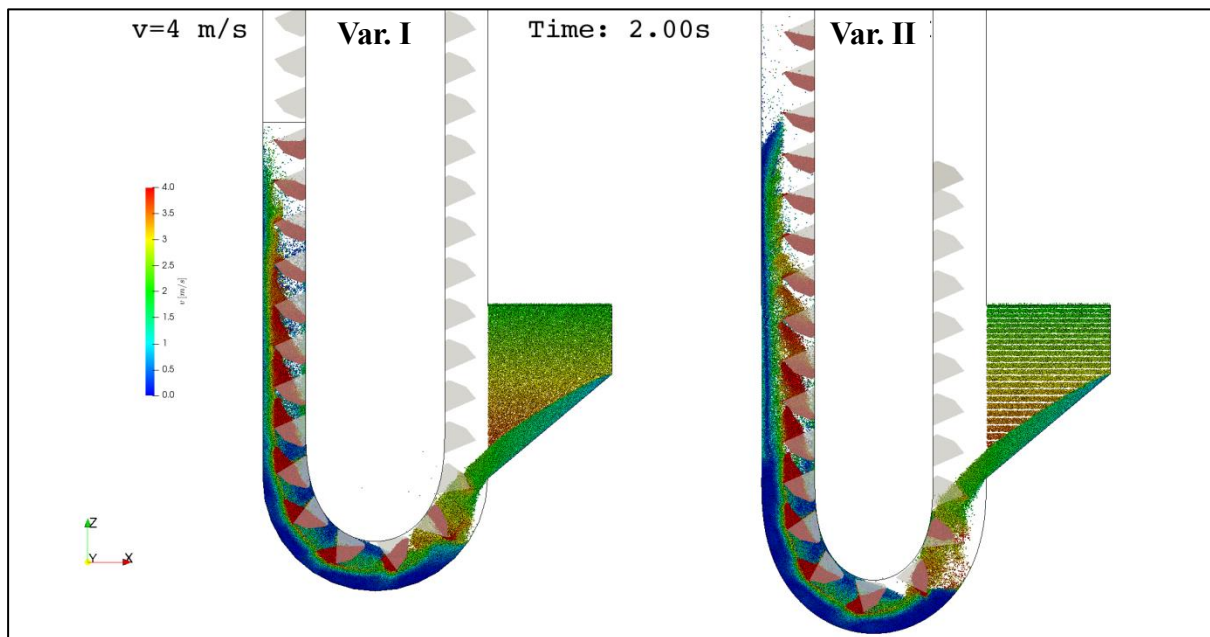
**Abbildung 6-11: Vergleich des Massenstroms für Übergangsbogen Variante II und Kreisbogen**

Die Analyse der Simulationsergebnisse zeigt, dass die Becherfüllung der zweiten Geometrievariante, bei der der Abstand zwischen Fördertrum und Leertrum dem der kreisförmigen Umlenkung entspricht, im Vergleich mit der konventionellen Umlenkung höher ist. Die durch das herausgecleuderte Gut entstehende Schüttgutwolke ist weniger stark ausgeprägt (vergl. Abbildung 6-12).



**Abbildung 6-12: Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse der Umlenkungsvariante II (links) und der konventionellen Umlenkung (rechts) der Becher am Becherwerkfuß, Ansicht in der Bechermitte geschnitten**

Abbildung 6-13 stellt die Simulationsergebnisse der ersten und zweiten Konstruktionsvariante gegenüber.



**Abbildung 6-13: Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse der Umlenkungsvariante I (links) und Umlenkungsvariante II (rechts), Ansicht in der Bechermitte geschnitten**

Die entstehende Gutwolke ist in der zweiten Konstruktionsvariante größer. Ein Grund ist, dass das Gehäuse des Becherwerkes in der Simulation nicht verändert wurde. Daher bleibt dem Schüttgut bei einem schmalen Becherstrang mehr Raum, um aufgrund der Fliehkräfte den Becher wieder zu verlassen. Bei der ersten Geometrievariante hindern die in den Becherwerkfuß zurück fallenden, vormals herausgeschleuderten Schüttgutteilchen, das Schüttgut im Becher daran, diesen zu verlassen. In zukünftigen Untersuchungen muss der Einfluss des Abstands zwischen der Becherspitze und des Gehäuses näher betrachtet werden.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird festgestellt, dass das durch dynamische Kräfte verursachte Bechernicken den Leistungsbedarf schnelllaufender Becherwerke erhöht. Insbesondere bei der leertrumseitigen Beschickung geht der Vorteil der Gutaufgabe in Bewegungsrichtung verloren, da das Schüttgut nach dem Durchfahren der Umlenkung im Becherwerkfuß aus dem Becher geschleudert wird. Das herausgeschleuderte Schüttgut muss erneut geschöpft und auf die Zugmittelgeschwindigkeit beschleunigt werden.

Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens von Förderanlagen im Kontakt mit Schüttgut ist in dieser Arbeit die Simulationsmethode der gekoppelten Diskrete Elemente (DEM) und Mehrkörpersimulation (MK) in Form einer programm-basierten Kopplung für das opensource DEM-Programm LIGGGHTS® entwickelt wurden. Durch Verwendung des Konzeptes des Functional Mockup Interface (FMI) ist die Kopplung unabhängig vom Modellierungswerkzeug des Maschinenmodells und der Plattform der Simulationsumgebung. Die Kopplung wurde erfolgreich auf dem Hochleistungs-Cluster der Universität Magdeburg auf umfangreiche gekoppelte Partikel- und Mehrkörpersimulationen des Bewegungsverhaltens eines Versuchsbecherwerks angewendet.

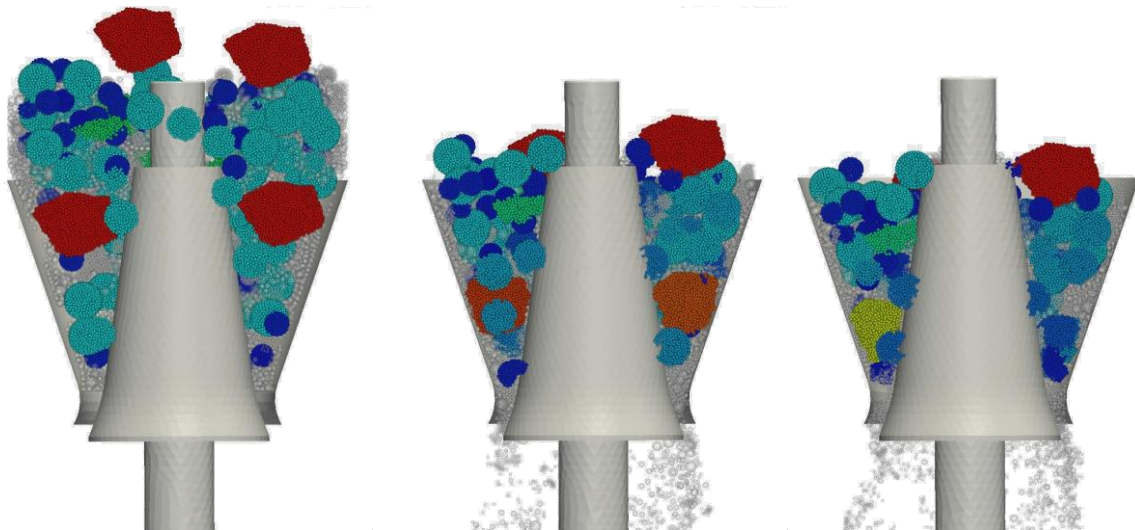
Für die Validierung der entwickelten Simulationsmethode wurden umfangreiche Untersuchungen an einem vereinfachten Modell des Versuchsbecherwerks durchgeführt. Es kann gezeigt werden, dass das Simulationsmodell in der gekoppelten DEM-MK-Simulation realistische Ergebnisse liefert, wenn die charakteristischen Schüttguteigenschaften hinreichend genau kalibriert sind.

Zur Analyse des Bewegungsverhaltens von Becherwerken wurden eigene Untersuchungen bezüglich des Einflusses des Bechernickens auf das Entleerungsverhalten mit entsprechenden DEM-MK-Simulationen verglichen. Dabei konnte in den Experimenten und den Simulationen ein Zusammenhang zwischen der Vorspannung des Zugmittels und der Bahnkurve des Schüttgutes ermittelt werden. Die Bechervorderkante bewegt sich entgegen der Bewegungsrichtung des Zugmittels nach außen. Dies führt zu einem zeitlich früheren Beginn der Entleerung. Ein Zurückfallen des Schüttguts im Fördertrum, wie es MCBRIDE annimmt, kann jedoch nicht beobachtet werden. Die Umfangsgeschwindigkeit der Schüttguteilchen entlang der Antriebstrommel ist ausreichend groß, diese in den Bereich der Abgabeschurre zu fördern.

Der Einfluss des Bechernickens auf die spezifische Schöpferarbeit wurde bereits 1993 von DILEFELD in seiner Dissertation „*Zum Schöpferverhalten von Becherförderern*“ beschrieben. Zur weiteren Analyse der Untersuchungen von DILEFELD wurden zahlreiche gekoppelte DEM-MK-Simulationen durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen. Die Simulationsergebnisse bestätigen seine Schlussfolgerungen und liefern eine Erklärung für die erhöhte Schöpferarbeit kohäsionsloser Schüttgüter bei der leertrumseitigen Beschickung.

Um der Ursache des Bechernickens entgegen zu wirken, wird eine neuartige Geometrie für die Umlenkung der Becher im Becherwerkfuß vorgeschlagen. Mit Hilfe der gekoppelten DEM-MK-Simulation werden zwei mögliche geometrische Varianten anhand von Simulationsmodellen untersucht und mit dem derzeitigen Stand der Technik verglichen. Die Umlenkung der Becher durch Übergangsbögen und Kreissegmente im Becherwerkfuß erweist sich dabei als vorteilhafter als eine kreisförmige Umlenkung.

Neben der Anwendung der entwickelten DEM-MK-Simulationsmethode für die Analyse des Bewegungsverhaltens von Becherwerken, wird die Methode bereits in zahlreichen Forschungs- und Entwicklungsprojekten, hauptsächlich mit Partnern aus der Industrie, erfolgreich eingesetzt. Eine Auswahl der durchgeführten Projekte wird im Folgenden kurz vorgestellt.



**Abbildung 7-1: Schnittansicht Kreiselbrecher mit gebondeten Partikeln zur Analyse des Bruchprozesses**

Im Bereich der Aufbereitungstechnik ist mit einem Hersteller von Kreiselbrechern zur Optimierung der Brechergeometrie ein umfangreiches, gekoppeltes DEM-MK-Simulationsmodell unter Einbeziehung von parallel-Bonds [116] zur Abbildung realistischer Bruchkräfte von Partikelkonglomeraten implementiert wurden (vergl. Abbildung 7-1). Das Mehrkörpermodell bietet dabei die Möglichkeit des Freidrehens des Brecherkonus,

und liefert die für den Prozess benötigten Leistungsdaten, basierend auf kalibrierten Schüttgutparametern und einem realistischen Modell des Antriebsstrangs. Über dieses Forschungs- und Entwicklungsprojekt wird in [31] und [117] berichtet.

In Zusammenarbeit mit dem Institut für Verarbeitungsmaschinen und Mobile Arbeitsmaschinen, Professur für Baumaschinen und Fördertechnik, an der Technischen Universität Dresden wurde ein detailliertes Maschinenmodell eines Radladers als Anwendungsbeispiel der gekoppelten DEM-MK-Simulation im Bereich der Baumaschinen realisiert. Das Maschinenmodell beinhaltet dabei neben den mechanischen Komponenten die vollständige Beschreibung der Hydraulik, Elektronik, Antriebstechnik und ein vereinfachtes Rad-Boden-Modell für eine realistische Fahrdynamik (vergl. Abbildung 7-2). Über die Ergebnisse dieser Kooperation wird in [32] berichtet.

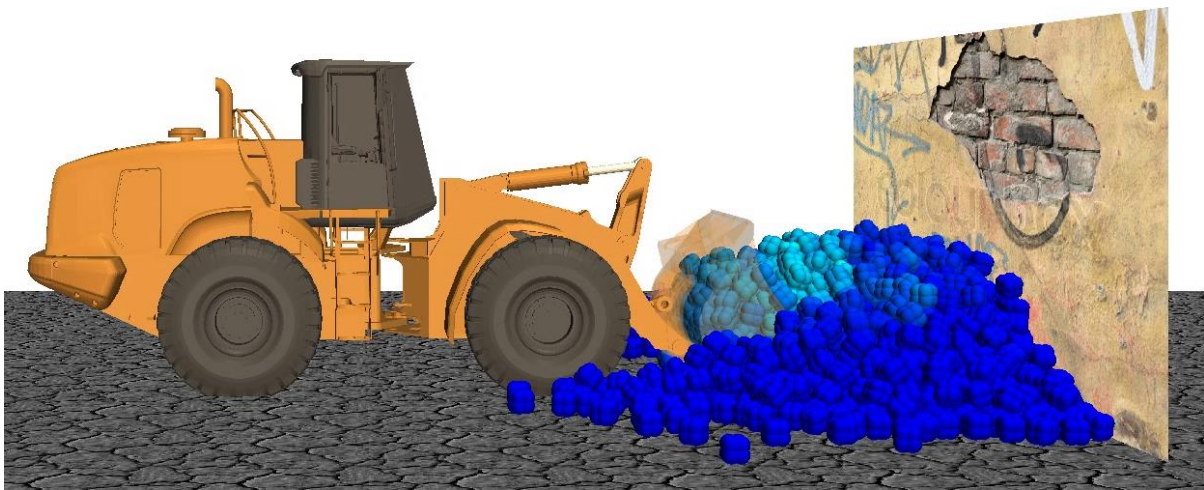


Abbildung 7-2: Visualisierung der gekoppelten DEM-MK-Simulation eines Radladers

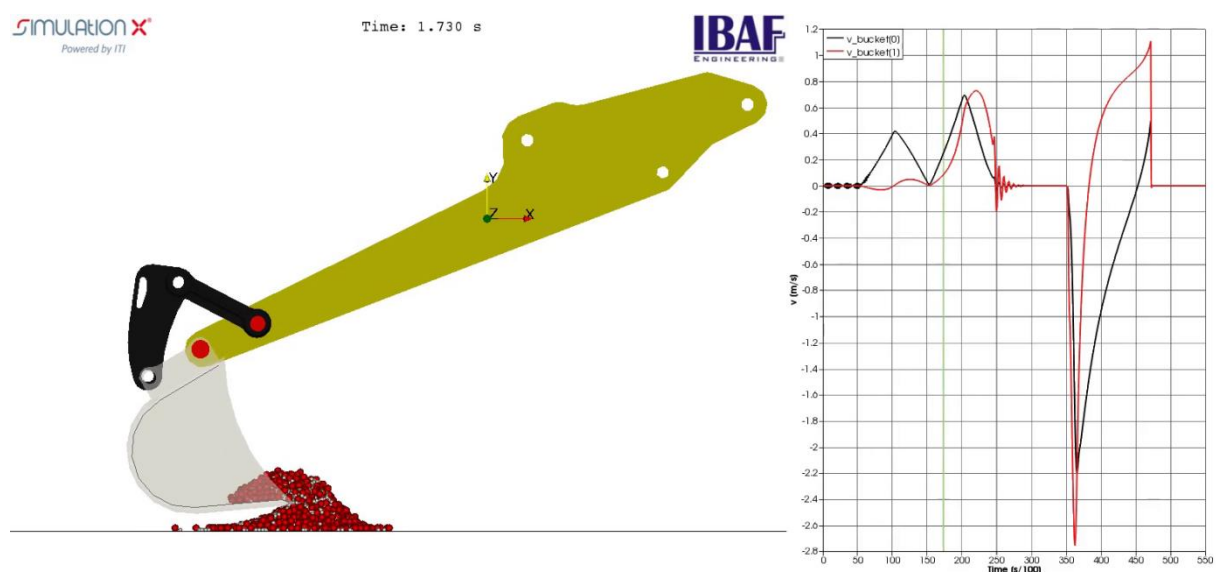
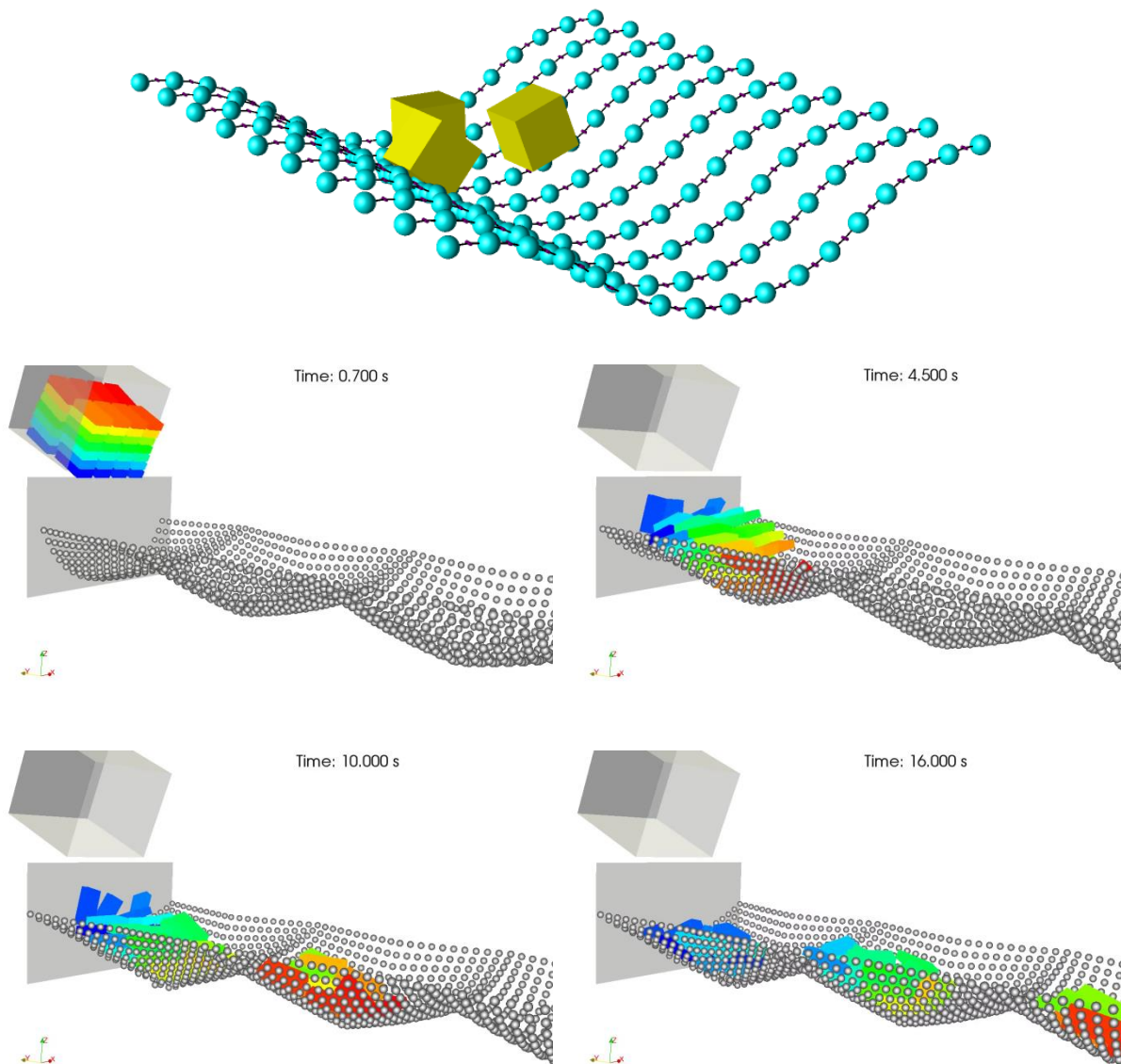


Abbildung 7-3: Simulationsergebnis des Grabvorgangs einer Baggerschaufel mit SimulationX

In weiterführenden Arbeiten ist dieser Modellierungsansatz im Forschungsprojekt DEM4X weiterentwickelt wurden. Die zugrundeliegenden Prinzipien der in dieser Arbeit entwickelten DEM-MK-Simulationsmethode sind dabei so angepasst wurden, dass die DEM ein Programmbestandteil des kommerziellen Mehrkörpersimulationsprogramms SimulationX ist [30]. Abbildung 7-3 stellt das Simulationsergebnis einer gekoppelten DEM-MK-Simulation mit der Software *SimulationX* des Grabvorgangs eines Löffelbaggers und die in der Simulation aufgezeichneten Geschwindigkeiten der Grabschaufel dar.



**Abbildung 7-4: Simulation einer peristaltischen Förderanlage für Stückgut als Schüttgut**

Durch Anwendung des Funktionsprinzips der Kontaktbehandlung in der DEM und dem Lösen der Bewegungsgleichung zwangsgeführter Maschinenmodelle in der Mehrkörpersimulation lässt sich die Methode der gekoppelten DEM-MK-Simulation ebenso auf Problemstellungen bei

der Neuentwicklung von Stückgutförderanlagen anwenden. Bei der sogenannten „peristaltischen Förderung“ soll das als Schüttgut vorliegende Stückgut gefördert und dabei gleichzeitig vereinzelt werden [118], [119]. Der flexible „Teppich“, auf dem das Fördergut liegt, wird dabei durch das MK-System gesteuert und die berechneten Positionen auf Kugeln in der DEM-MK-Simulation übergeben. Das Stückgut wird durch zu Quadern verbundene Multispheres repräsentiert, und bewegt sich als freier Körper im Simulationsraum (vergl. Abbildung 7-4). Weiterführende Informationen zu dieser Anwendung der gekoppelten DEM-MK-Simulation sind in [118] und [120] veröffentlicht.

Diese ausgewählten Beispiele zeigen, dass das zweite Ziel dieser Arbeit, die Implementierung einer leistungsfähigen DEM-MK-Kopplung zur allgemeinen Anwendung im Maschinenbau, erreicht wurde.

Die Weiterentwicklung der gekoppelten DEM-MK-Simulation ist die Multilevel-DEM-Simulation [121], [122]. Die Verbindung zweier DEM-Berechnungslevel ist in Abbildung 7-5 dargestellt. Da die Maschinendynamiksimulation schlecht geeignet ist, Systeme mit einer hohen Anzahl weicher Kontakte zu berechnen [123] wird die DEM zur Kontakterkennung und Behandlung verwendet. Geometrische Körper, beispielsweise Kettenglieder, Schubelemente oder Kratzerschaufeln, werden in der Multilevel-DEM-Simulation durch Multispheres approximiert (Level 2=Bauteillevel).

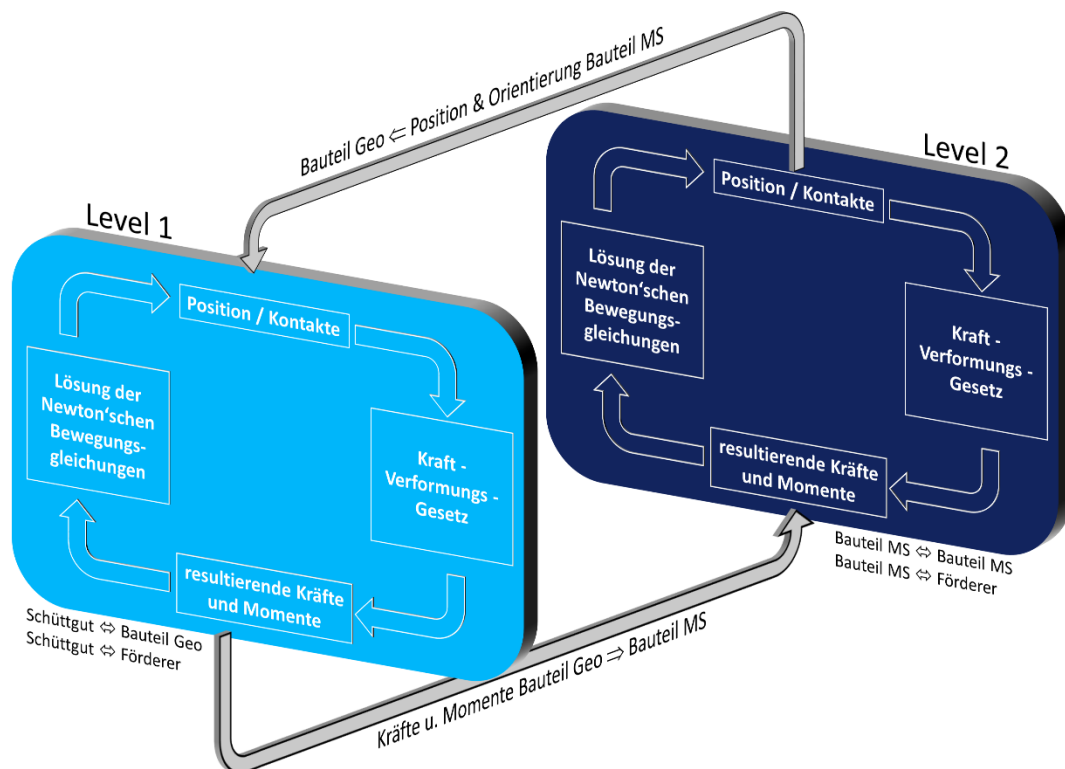
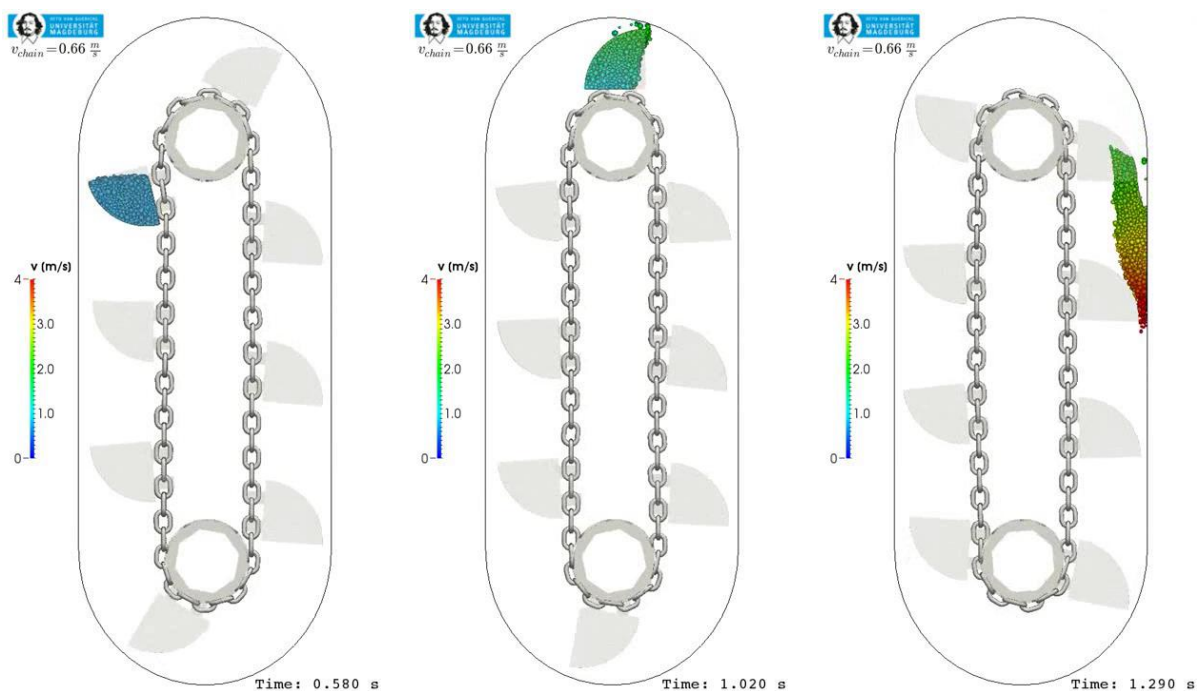


Abbildung 7-5: Konzept der Multilevel-DEM-Simulation, Level 1=Schüttgutlevel, Level 2=Bauteillevel

Die Multispheres können die Kontakte untereinander und zu den Wänden des umgebenden Förderers erkennen und die Reaktionskräfte aufgrund des Kraft-Verformungsgesetzes berechnen. Anschließend wird die reale Geometrie des Maschinenelements in Form einer CAD-Datei im Simulationsraum an die Stelle transformiert, an der sich der zugehörige Multisphäre befindet. Das Geometrieelement kann, basierend auf den in Kapitel 3.2 vorgestellten Prinzipien der DEM, Kontakte mit dem Schüttgut auflösen (Level 1=Schüttgutlevel). Die so ermittelte Summe der Kontaktkräfte aus dem Bauteil-Level und dem Schüttgut-Level führt zu einer resultierenden Beschleunigung des Maschinenelements. Diese Beschleunigung wird an den Multisphäre übergeben und innerhalb des DEM-Berechnungszyklus zweifach nach der Zeit integriert. Es ergeben sich die die neuen Lagen und Geschwindigkeiten der Maschinenelemente, abhängig vom Kontakt mit dem Schüttgut und den Kontakten untereinander. Die Multilevel-DEM Simulationemethode ist von der in dieser Arbeit vorgestellten DEM-MK-Simulationemethode abgeleitet. Abbildung 7-6 zeigt die Anwendung der Multilevel-DEM-Simulation exemplarisch am Beispiel eines vereinfachten Kettenbecherwerks mit zwei Kettensträngen.



**Abbildung 7-6: Bildsequenz der Multilevel-DEM-Simulation eines Kettenbecherwerks, Fördergeschwindigkeit  $v_z=0,66$  m/s, links: deutliches Nicken des mit Schüttgut gefüllten Bechers entgegen der Bewegungsrichtung des Kettenstrangs, Mitte: Beginn des Entleerungsvorganges, rechts: Ende des Entleerungsvorgangs; es ist ein geringes Übersteuern des Bechers beim Ablafen vom Antriebskettenrad zu erkennen**

Die Kettenglieder der Rundstahlgliederkette sind durch einzelne Multispheres modelliert. Die reale Geometrie der Kettenglieder wird an die Stelle der Multispheres gesetzt. Die Schöpfbecher sind aus einem CAD-Modell abgeleitet und kraftschlüssig mit jeweils vier Kettengliedern verbunden. Das Bewegungsverhalten der Schöpfbecher wird in der Simulation mit Hilfe eines speziellen Lösungsalgorithmus für frei bewegliche Wandelemente (`fix move/mesh/6dof`)



basierend auf den resultierenden Kräften aus dem Kontakt mit den Kettengliedern berechnet. Das Nicken des Bechers beim Auflaufen der Kette auf das Antriebskettenrad wird vom Simulationsmodell gut abgebildet. Weiterhin ist der Polygoneffekt beim Umlenken der Kette um die Kettenräder anhand einer lateralen Schwingung des Kettenstranges sichtbar. Die Steifigkeit der modellierten Kontaktkraftelemente ist aufgrund des kritischen Zeitschrittes in dieser prototypisch umgesetzten Simulation geringer als in der Realität. Das Simulationsmodell zeigt daher ein sehr weiches Bewegungsverhalten.

## 7.2 Ausblick

Die Berechnungsmethode des Schöpfwiderstands von Senkrechtbecherwerken nach BEUMER UND WEHMEIER, welche auch analog in VDI 2324 angewendet wird, bedarf einer Überprüfung hinsichtlich des Gültigkeitsbereichs des Abminderungsfaktors. Bereits DILEFELD stellt fest, dass das Verhältnis der Schöpfkantengeschwindigkeit zur Zugmittelgeschwindigkeit und die Länge des Kreissegments zwischen zwei Bechern beim Umlaufen der Becher um die Trommeln die Berechnung des Schöpfwiderstands beeinflussen. Der von BEUMER UND WEHMEIER eingeführte Abminderungsfaktor berücksichtigt jedoch nur das Verhältnis der Becherausladung des verwendeten Versuchsbecherwerks zur Becherausladung eines anderen Becherwerks und die Unterschiede in der Becherteilung. Eine Simulationsstudie mit Hilfe der gekoppelten DEM-MK-Simulation unter Verwendung unterschiedlicher Becherausladungen, Trommeldurchmesser und Becherteilungen und die Auswertung der spezifischen Schöpfarbeit kann die von DILEFELD getroffenen Annahmen in Zukunft bestätigen.

Die gekoppelte DEM-MK-Simulation kann für die in dieser Arbeit betrachteten Gurtbecherwerke die Schwingungsausbreitung, welche durch das Bechernicken in den Becherstrang eingebracht wird, noch nicht abbilden. Dazu bedarf es einer geeigneten Modellierung des flexiblen Zugmittels in Kontakt mit den Umlenktrommeln und der exakten Modellierung der Becheranbindung an den Gurt. Dies wird zukünftig durch Einbeziehungen der Arbeiten von DRATT [53] und OTTO [114] in einer gekoppelten DEM-MK-FEM Simulation möglich sein. Erste Ergebnisse wurden im Forschungsprojekt „*SimBa - Softwaresystem zur ganzheitlichen Simulation der Bauteilbelastung und -beanspruchung von Baumaschinen und Förderanlagen*“ [26] bereits erzielt.

Die konstruktive Umsetzung und Erprobung der vorgeschlagenen Umlenkung am Becherwerkfuß in Form von Übergangsbögen und Kreissegmenten wird in weiterführenden Forschungsarbeiten erfolgen.

Im Rahmen dieser Arbeit blieb der Einfluss der Luftströmung auf den Entleerungsvorgang schelllaufender Becherwerke unberücksichtigt. SINNOTT ET AL. postulieren jedoch einen

entsprechenden Einfluss [124]. Dieser kann durch die Kopplung der DEM-MK-Simulationsmethode mit der CFD-Simulationsmethode zukünftig näher untersucht werden.

Die Anwendung der aus der gekoppelten DEM-MK-Simulationsmethode abgeleiteten Multilevel-DEM-Simulationsmethode für Untersuchungen an völlig neuartigen Förderern, wie dem Schubelementeförderer [125], der Simulation des Bewegungsverhaltens gefüllter Pakete und Ladungsträger im Pulk [126] und der Simulation des Bewegungsverhaltens von Getränkeflaschen im Pulk [121] sind aktuelle Forschungsthemen am Institut für Logistik und Materialflusstechnik, für die diese Arbeit den Grundstein gelegt hat.

## Literatur

- [1] Dartnall, W.: A General Approach for Introducing Materials Handling Topics in a Mechanical Engineering Degree Course. In: *Manufacturing Engineering and Materials Handling, Parts A and B* : ASME, 2005, S. 1455–1463
- [2] Krause, F.; Eckardt, G. (Mitarb.); Uhlmann, D. (Mitarb.) : *Zur mechanischen Senkrechtförderung von Schüttgütern*. Magdeburg, 1983
- [3] Dilefeld, M.: *Zum Schöpfverhalten von Becherförderern*. Magdeburg, Technische Hochschule Magdeburg. Dissertation. 1993-04-20
- [4] Hellmuth, T.: *Einfluß des Entleerungsverhaltens auf Becherform und Becherteilung zur Erhöhung der Leistungsfähigkeit von Becherförderern*. Magdeburg, Technische Hochschule Magdeburg. Dissertation. 1993-04-19
- [5] Hanffstengel, G.: *Kraftverbrauch von Fördermitteln*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1913 (Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 145)
- [6] Hanffstengel, G.: *Die Förderung von Massengütern : II. Band: Förderer für Einzellasten*. Zweite, vermehrte Auflage. Berlin, Heidelberg, s.l. : Springer Berlin Heidelberg, 1915
- [7] Ellwanger, K. D.: *Einflussgrößen auf den Schöpfvorgang bei schnelllaufenden Becherwerken*. Hannover, Technische Universität Hannover. Dissertation. 1987
- [8] Beumer, B. ; Wehmeier, K.-H.: *Zur Frage des Schöpfwiderstandes und der Abwurfverhältnisse bei Becherwerken*. In: *Fördern und Heben* (1960)
- [9] Müller, C. A. E.: *Beitrag zur Klärung des Entleerungsvorganges bei schnelllaufenden Becherwerken Teil I, II und III*. In: *Der Mühlen und Speicherbau* (1918), 9,12,13 und 14, 97 - 103, 105 - 113, 115-120
- [10] Braun, H.: *Untersuchungen zur Beanspruchung von Becherwerksgurten beim Umlauf um die Trommel*. Leoben, Montanuniversität Leoben. Dissertation. 1979
- [11] Wehking, K.-H. ; Hüning, R.: *Untersuchungen zur Verbesserung des Befüllungsvorgangs von Gurtbecherwerken*. In: *Fördern und Heben* 1988 (1988), Nr. 38, S. 583–586
- [12] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: *Einsatz der Diskrete Elemente Methode in der Schüttguttechnik: Becher- und Kratzerförderer*. In: *Schüttgut* 13 (2007), Nr. 3, S. 276–282
- [13] Katterfeld, A. ; Gröger, T.: *Application of the discrete element method - Part 4: Bucket elevators and scraper conveyors*, 2007 (27)
- [14] McBride, W. ; Sinnott, M. ; Cleary, P.: *Discrete element modelling of a bucket elevator head pulley transition zone*. In: *Granular Matter* 13 (2011), Nr. 2, S. 169–174
- [15] Gelnar, D.: *Verifikace a validace DEM modelů sypkých hmot v aplikaci na korečkové elevátory a možnosti řešení reálné aplikace v praxi : The verification and validation of DEM models of the bulk materials in the application for the bucket elevators and the possible practical solutions*. Ostrava, Technická univerzita Ostrava. Dissertation. 2015
- [16] Gelnar, D. ; Zegzulka, J.: *Discrete Element Method in the Design of Transport Systems : Verification and Validation of 3D Models*. Cham : Springer International Publishing, 2019

- [17] Cundall, P. ; Strack, O.: *A discrete numerical model for granular assemblies*. In: *Géotechnique* 29 (1979), Nr. 1, S. 47–65
- [18] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: *Application of the discrete element method in materials handling, part 1: basics and calibration*. In: *Bulk Solids Handling* 27 (2007)
- [19] Minkin, A. ; Katterfeld, A. ; Gröger, T.: *Application of the discrete element method in materials handling - Part 2: Screw and shaftless screw conveyors* 27 (2007), S. 92–93
- [20] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: *Application of the discrete element method in materials handling - Part 3: Transfer stations* 27 (2007), S. 158–166
- [21] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: *Einsatz der Diskrete Elemente Methode in der Schüttguttechnik: Gutübergabestellen*. In: *Schüttgut* 13 (2007), Nr. 3, S. 202–213
- [22] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: *Einsatz der Diskrete Elemente Methode in der Schüttguttechnik: Grundlagen der Kalibrierung*. In: *Schüttgut* 12 (2006), Nr. 7, S. 480–486
- [23] Katterfeld, A. ; Mothes, M. ; Deimel, T.: DEM-Simulation von Grabprozessen. In: Benckert, H. (Hrsg.): *Fachtagung Baumaschinentechnik 2009: Energie, Ressourcen, Umwelt ; [14.-15. Mai 2009, Dresden] ; Tagungsband* : FVB, 2009 (Schriftenreihe der Forschungsvereinigung Bau- und Baustoffmaschinen: Forschungsvereinigung Bau- und Baustoffmaschinen).
- [24] Grüning, T. ; Kunze, G. ; Katterfeld, A.: Simulating the working process of construction machines. In: *Bulk Solids Europe 2010*.
- [25] Kunze, G. ; Katterfeld, A. ; Grüning, T.: Simulation maschineller Erdbauprozesse. In: Günthner, W.; Krause, F. (Hrsg.): *Fachtagung Schüttgutfördertechnik 2010 : Aktuelle Fragestellungen und Lösungen : am 7. und 8. Oktober 2010 in Garching, Technische Universität München ; [Berichtsband]*. Garching, 2010
- [26] Katterfeld, A. ; Richter, C.: *Softwaresystem zur ganzheitlichen Simulation der Bauteilbelastung und -beanspruchung von Baumaschinen und Förderanlagen : Schlussbericht des im Rahmen der Fördermaßnahme KMU-innovativ: IKT geförderten Verbundprojekts SimBa der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Logistik und Materialflusstechnik : (Projektlaufzeit: 01.09.2013-31.08.2015)*
- [27] Otto, H. ; Richter, C. ; Katterfeld, A.: Validation of Coupled Discrete Element and Multi Body Simulations in Material Handling. In: *Conference: CFDEM®conference 2017*.
- [28] Chen, W. ; van Etten, M. ; Donohue, T. ; Williams, K.: Application of the Coupled Discrete Element Modelling and Modelica Based Multi-body Dynamics in System-Level Modelling. In: Li, X.; Feng, Y.; Mustoe, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods*. Singapore : Springer Singapore, 2017 (Springer Proceedings in Physics), S. 571–578
- [29] Richter, C. ; Rößler, T. ; Katterfeld, A.: Dem Bechernicken auf der Spur. In: *Logistics Journal : Proceedings, Vol. 2017*.
- [30] Kunze, G. ; Katterfeld, A. ; Richter, C. ; Otto, H. ; Schreiber, U. ; Ohser, F. ; Arloth, J.: DEM4X - Bibliothek für den Aufbau und die Berechnung von DEM-Modellen in SimulationX. In: *Fachtagung Baumaschinentechnik 2015*, S. 135–148

- [31] Katterfeld, A. ; Otto, H. ; Richter, C. ; Rossiter, E. ; Szczelina, P.: Gekoppelte Diskrete Elemente Simulation und Maschinensimulation zur Ermittlung von auslegungsrelevanten Lastannahmen für Schwerlastantriebe am Beispiel von Primärbrechern, Bd. 16. In: *Antriebstechnisches Kolloquium ATK 2015*, S. 551–564
- [32] Kunze, G. ; Katterfeld, A. ; Richter, C. ; Otto, H. ; Schubert, C.: Plattform- und softwareunabhängige Simulation der Erdstoff-Maschine Interaktion. In: *Fachtagung Baumaschinentechnik 2012*, S. 251–262
- [33] Katterfeld, A. ; Richter, C.: Kopplung von Maschinen- und Partikelsimulation zur Analyse der lastabhängigen Interaktion von Baustoffen und Transportgeräten. In: *IAB-Wissenschaftstage*, S. 120–122
- [34] Coetzee, C. ; Els, D.: *Calibration of discrete element parameters and the modelling of silo discharge and bucket filling*. In: *Computers and electronics in agriculture* 65 (2009), Nr. 2, S. 198–212
- [35] Coetzee, C. ; Els, D.N.J. ; Dymond, G.: *Discrete element parameter calibration and the modelling of dragline bucket filling*. In: *Journal of Terramechanics* 47 (2010), Nr. 1, S. 33–44
- [36] DCS Computing GmbH: *Rigid body dynamics - 6 degrees of freedom*. URL <https://www.cfdem.com/rigid-body-dynamics-6-degrees-freedom> – Überprüfungsdatum 2018-03-12
- [37] Anderson, K. ; Mukherjee, R. ; Critchley, J. ; Ziegler, J. ; Lipton, S.: *POEMS: parallelizable open-source efficient multibody software*. In: *Engineering with Computers* 23 (2007), Nr. 1, S. 11–23
- [38] DCS Computing GmbH: *fix poems command*. URL [https://www.cfdem.com/media/DEM/docu/fix\\_poems.html](https://www.cfdem.com/media/DEM/docu/fix_poems.html). – Aktualisierungsdatum: 2018-03-12
- [39] Fleissner, F. ; D’Alessandro, V. ; Schiehlen, W. ; Eberhard, P.: *Sloshing cargo in silo vehicles*. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 23 (2009), Nr. 4, S. 968–973
- [40] inpartik: *Pasimodo: Simulationsplattform zur partikelorientierten Simulation dynamischer Prozesse*. URL <http://www.inpartik.de/produkte.html>
- [41] Schörgenhumer, M.: *Fluid-Structure Interaction – Coupling of flexible multibody dynamics with particle-based fluid mechanics*. Linz, Johannes Kepler Universität Linz. URL [https://www.cfdem.com/media/DEM/featured/schoergenheimer/master\\_thesis\\_m\\_schoergenheimer\\_17\\_07\\_final.pdf](https://www.cfdem.com/media/DEM/featured/schoergenheimer/master_thesis_m_schoergenheimer_17_07_final.pdf) – Überprüfungsdatum 2018-03-12
- [42] Schörgenhumer, M. ; Gruber, P. ; Gerstmayr, J.: *Interaction of flexible multibody systems with fluids analyzed by means of smoothed particle hydrodynamics*. In: *Multibody System Dynamics* 30 (2013), Nr. 1, S. 53–76
- [43] Lommen, S. W. ; Schott, D. ; Lodewijks, G.: *Multibody dynamics model of a scissors grab for co-simulation with discrete element method*. In: *FME Transactions* 40 (2012), S. 177–180

- [44] Curry, D. ; Deng, Y.: Optimizing Heavy Equipment for Handling Bulk Materials with Adams-EDEM Co-simulation, Bd. 188. In: Li, X.; Feng, Y.; Mustoe, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods*. Singapore : Springer Singapore, 2017 (Springer Proceedings in Physics), S. 1219–1224
- [45] Lommen, S.: *Virtual Prototyping of Grabs: Co-simulations of discrete element and rigid body models*. Delft, Delft University of Technology. Dissertation. 2016
- [46] Sprang, R.: *EDEM Announces Bulk Material Co-Simulation With Multi-Body Dynamics Package RecurDyn*. URL <https://www.engineering.com/DesignSoftware/DesignSoftwareArticles/ArticleID/15937/categoryId/37/EDEM-Announces-Bulk-Material-Co-Simulation-With-Multi-Body-Dynamics-Package-RecurDyn.aspx>
- [47] Henriksson, F. ; Minta, J.: *Bucket-soil interaction for wheel loaders : An application of the Discrete Element Method*. Linnaeus University, Department of Mechanical Engineering,
- [48] Pöschel, T. ; Schwager, T.: *Computational granular dynamics : Models and algorithms*. Berlin : Springer, 2005
- [49] Schulze, D.: *Pulver und Schüttgüter : Fließeigenschaften und Handhabung*. 2., bearb. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009 (VDI-Buch)
- [50] Jenike, A. ; Norske sivilingeniørs forening: *Load Assumptions and Distributions in Silo Design* : Jenike & Johanson Incorporated, 1977
- [51] Horiba: *Particle Size and Shape Analysis with the CAMSIZER P4*. URL <http://www.horiba.com/scientific/products/particle-characterization/particle-size-analysis/details/camsizer-602/> – Überprüfungsdatum 2018-03-09
- [52] Norm DIN 66165-1. *Partikelgrößenanalyse - Siebanalyse*
- [53] Dratt, M.: *Kopplung von FEM- und DEM-Simulationen zur Analyse der Gut-Bauteil-Interaktionen in der Fördertechnik*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Maschinenbau; LOGISCH - Gesellschaft für Logistik und innovative Schüttgutfördertechnik mbh; Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Dissertation. 2016-02-11
- [54] Carr, M. ; Wheeler, C. ; Williams, K. ; Katterfeld, A. ; Elphick, G. ; Nettleton, K. ; Chen, W.: Discrete Element Modelling of Problematic Bulk Materials onto Impact Plates. In: *CHoPS 2018: 9th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids*.
- [55] VDI 2324:2001-12. *Senkrecht-Becherwerke*
- [56] Römisch, P.: *Materialflusstechnik : Auswahl und Berechnung von Elementen und Baugruppen der Fördertechnik*. 10., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2012 (Studium)
- [57] Pajer, J. (Hrsg.); Kuhnt, H. (Hrsg.); Kurth, F. (Hrsg.): *Stetigförderer*. 5., stark bearb. Aufl. Berlin : Verl. Technik, 1988 (Fördertechnik)
- [58] Grote, K.-H. (Hrsg.); Feldhusen, J. (Hrsg.): *Dubbel : Taschenbuch für den Maschinenbau*. 24., aktualisierte Aufl. Berlin : Springer Vieweg, 2014
- [59] Freiherr von Röhl: Fördermittel, Bd. 5. In: Freiherr von Röhl (Hrsg.): *Enzyklopädie des Eisenbahnwesens*. Berlin, Wien, 1914 (5), S. 106–114

- [60] Rill, G. ; Schaeffer, T.: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2010
- [61] Kreuzer, E.: *Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen*. In: *Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften* 1979, Nr. 11
- [62] Schiehlen, W. ; Eberhard, P.: *Technische Dynamik*. 5., überarbeitete und aktualisierte Auflage. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2017 (Lehrbuch)
- [63] Dresig, H. ; Holzweißig, F. ; Rockhausen, L.: *Maschinendynamik*. 7., bearb. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [64] Schiehlen, W.: *Computational dynamics: theory and applications of multibody systems*. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 25 (2006), Nr. 4, S. 566–594
- [65] Featherstone, R.: *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Boston, MA : Springer Science+Business Media LLC, 2008
- [66] Itasca, C.: *Manuals of PFC3D v.4.0 : theory and background*. In: *Itasca Consulting Group, Minneapolis* (2008)
- [67] Gibaud, R.: *Application of the Discrete Element Method to Finite Inelastic Strain in Multi-Materials*. Université Grenoble Alpes, Mechanics of materials. Dissertation. 2017. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01761756>
- [68] O'Sullivan, C. ; Bray, J.: *Selecting a suitable time step for discrete element simulations that use the central difference time integration scheme*. In: *Engineering Computations* 21 (2004), 2/3/4, S. 278–303
- [69] Lommen, S. ; Schott, D. ; Lodewijks, G.: *DEM speedup: Stiffness effects on behavior of bulk material* 12 (2014), S. 107–112
- [70] Gröger, T. ; Katterfeld, A.: On the numerical calibration of discrete element models for the simulation of bulk solids, Bd. 21. In: *16th European Symposium on Computer Aided Process Engineering and 9th International Symposium on Process Systems Engineering* : Elsevier, 2006 (Computer Aided Chemical Engineering), S. 533–538
- [71] Börner, M.: *Einführung in die Diskrete Elemente Methode*. URL <https://www.yumpu.com/de/document/read/3359678/einfuehrung-was-ist-dem-diskrete-elemente-methode> – Überprüfungsdatum 2020-01-10
- [72] Vedachalam, V.: *Discrete element modelling of granular snow particles using LIGGGHTS*. Edinburgh, The University of Edinburgh UK. Masterarbeit. 2011. URL <https://static.epcc.ed.ac.uk/dissertations/hpc-msc/2010-2011/VinodhVedachalam.pdf>
- [73] Jakob, C. ; Konietzky, H.: *Partikelmethode : Eine Übersicht*. URL [https://tu-freiberg.de/fakult3/gt/feme/studium/Handbuch\\_Partikelmethode.pdf](https://tu-freiberg.de/fakult3/gt/feme/studium/Handbuch_Partikelmethode.pdf) – Überprüfungsdatum 2020-01-09
- [74] Luding, S.: *Introduction to discrete element methods : Basic of contact force models and how to perform the micro-macro transition to continuum theory*. In: *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 12 (2008), 7-8, S. 785–826
- [75] Luding, S.: *Cohesive, frictional powders: contact models for tension*. In: *Granular Matter* 10 (2008), Nr. 4, S. 235–246

- [76] Ai, J. ; Chen, J.-F. ; Rotter, J. ; Ooi, J.: *Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations*. In: *Powder Technology* 206 (2011), Nr. 3, S. 269–282
- [77] Morrissey, J.: *Discrete Element Modelling of Iron Ore Pellets to Include the Effects of Moisture and Fines*. Edinburgh, University of Edinburgh. Dissertation. 2013. URL <https://books.google.de/books?id=NtvFoAEACAAJ>
- [78] Hertz, H.: *Ueber die beruehrung elastischer koerper*. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* 92 (1881), S. 156–717
- [79] Cleary, P.: *DEM prediction of industrial and geophysical particle flows*. In: *Particuology* 8 (2010), Nr. 2, S. 106–118
- [80] Deresiewicz, H. ; Mindlin, R. ; Columbia University. Department of Civil Engineering: *Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces*, 1952
- [81] DCS Computing GmbH: *LIGGGHTS(R)-PUBLIC Documentation, Version 3.X*. URL <https://www.cfdem.com/media/DEM/docu/Manual.html> – Überprüfungsdatum 2017-03-07
- [82] Johnson, K. ; Kendall, K. ; Roberts, A.: *Surface Energy and the Contact of Elastic Solids*. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 324 (1971), Nr. 1558, S. 301–313
- [83] Ajmal, M. ; Rößler, T. ; Carr, M. ; Katterfeld, A.: *Calibration of cohesive DEM parameters under rapid flow conditions and low consolidation stresses*. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Discrete Element Methods DEM 8* (2019). URL <https://mercurylab.co.uk/dem8/wp-content/uploads/sites/4/2019/07/133.pdf>
- [84] Rahman, M. ; Schott, D. ; Katterfeld, A. ; Wensrich, C.: *Influence of the software on the calibration parameters for DEM simulations* 31 (2011), S. 396–400
- [85] Iwashita, K. ; Oda, M.: *Rolling Resistance at Contacts in Simulation of Shear Band Development by DEM*. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124 (1998), Nr. 3, S. 285–292
- [86] Wensrich, C. ; Katterfeld, A.: *Rolling friction as a technique for modelling particle shape in DEM*. In: *Powder Technology* 217 (2012), S. 409–417
- [87] Cleary, P.: *Large scale industrial DEM modelling*. In: *Engineering Computations* 21 (2004), 2/3/4, S. 169–204
- [88] Podlozhnyuk, A. ; Pirker, S. ; Kloss, C.: *Efficient implementation of superquadric particles in Discrete Element Method within an open-source framework*. In: *Computational Particle Mechanics* 4 (2017), Nr. 1, S. 101–118
- [89] Lu, G. ; Third, J. ; Müller, C.: *Critical assessment of two approaches for evaluating contacts between super-quadric shaped particles in DEM simulations*. In: *Chemical Engineering Science* 78 (2012), S. 226–235
- [90] Kruggel-Emden, H. ; Rickelt, S. ; Wirtz, S. ; Scherer, V.: *A study on the validity of the multi-sphere Discrete Element Method*. In: *Powder Technology* 188 (2008), Nr. 2, S. 153–165
- [91] Markauskas, D. ; Kačianauskas, R. ; Džiugys, A. ; Navakas, R.: *Investigation of adequacy of multi-sphere approximation of elliptical particles for DEM simulations*. In: *Granular Matter* 12 (2010), Nr. 1, S. 107–123



- [92] Vu-Quoc, L. ; Zhang, X. ; Walton, O.R.: *A 3-D discrete-element method for dry granular flows of ellipsoidal particles*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 187 (2000), 3-4, S. 483–528
- [93] Amberger, S. ; Friedl, M. ; Goniva, C. ; Pirker, S. ; Kloss, C.: *Approximation of objects by spheres for multisphere simulations in DEM*. In: *ECCOMAS-2012* (2012)
- [94] Favier, J. ; Abbaspour-Fard, M. ; Kremmer, M. ; Raji, A.: *Shape representation of axisymmetrical, non-spherical particles in discrete element simulation using multi-element model particles*. In: *Engineering Computations* 16 (1999), Nr. 4, S. 467–480
- [95] Kremmer, M. ; Favier, J.: *A method for representing boundaries in discrete element modelling—part I: Geometry and contact detection*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), Nr. 12, S. 1407–1421
- [96] Barr, A.: *Superquadrics and Angle-Preserving Transformation*. In: *IEEE Computer Graphics and Applications* 1981 (1981), Nr. 1, S. 11–22
- [97] Gerpott, F.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen des Ausflussverhaltens von Schüttgütern unter Berücksichtigung der Partikelgeometrie*. Magdeburg, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg. Bachelorarbeit. 2018
- [98] Kloss, C. ; Goniva, C.: *LIGGGHTS - Open Source Discrete Element Simulations of Granular Materials Based on Lammmps*, Bd. 117. In: *Supplemental Proceedings*. Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Inc, 2011, S. 781–788
- [99] Kloss, C. ; Goniva, C. ; Hager, A. ; Amberger, S. ; Pirker, S.: *Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD-DEM*. In: *Progress in Computational Fluid Dynamics, An International Journal* 12 (2012), 2/3, S. 140
- [100] Berger, R. ; Kloss, C. ; Kohlmeyer, A. ; Pirker, S.: *Hybrid parallelization of the LIGGGHTS open-source DEM code 278* (2015), S. 234–247
- [101] Fritzson, P.: *Principles of object-oriented modeling and simulation with Modelica 3.3 : A cyber-physical approach*. 2nd edition. Hoboken : Wiley IEEE Press, 2014
- [102] Blochwitz, T. ; Otter, M. ; Arnold, M. ; Bausch, C. ; Clauss, C. ; Elmqvist, H. ; Junghanns, A. ; Mauss, J. ; Monteiro, M. ; Neidhold, T. ; Neumerkel, D. ; Olsson, H. ; Peetz, J.-V. ; Wolf, S.: *The Functional Mockup Interface for Tool independent Exchange of Simulation Models*. In: *The 8th International Modelica Conference : Linköping University Electronic Press, 2011 (Linköping Electronic Conference Proceedings)*, S. 105–114
- [103] Noll, C. ; Blochwitz, T. ; Neidhold, T. ; Kehler, C.: *Implementation of Modelisar Functional Mock-up Interfaces in SimulationX*. In: Technical Univeristy, D. (Hrsg.): *The 8th International Modelica Conference : Linköping University Electronic Press, 2011 (Linköping Electronic Conference Proceedings)*, S. 339–343
- [104] Dronka, S.: *Die Simulation gekoppelter Mehrkörper- und Hydraulik-Modelle mit Erweiterung für Echtzeitsimulation*. Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2004. Aachen : Shaker, 2004 (Berichte aus der Fahrzeugtechnik)
- [105] Modelon: *FMILibrary*. URL <http://www.jmodelica.org/FMILibrary> – Überprüfungsdatum 2018-03-07

- [106] Katterfeld, A. ; Coetzee, C. ; Donohue, T. ; Fottner, J. ; Grima, A. ; Gomez, A. ; Ilic, D. ; Kačianauskas, R. ; Necas, J. ; Schott, D. ; Williams, K. ; Zegzulka, J.: *Calibration of DEM Parameters for Cohesionless Bulk Materials under Rapid Flow Conditions and Low Consolidation*
- [107] Richter, C. ; Rößler, T. ; Kunze, G. ; Katterfeld, A. ; Will, F.: *Development of a standard calibration procedure for the DEM parameters of cohesionless bulk materials – Part II: Efficient optimization-based calibration*. In: *Powder Technology* (2019)
- [108] Roessler, T. ; Katterfeld, A.: Scalability of angle of repose tests for the calibration of DEM parameters. In: , 2016
- [109] Roessler, T. ; Richter, C. ; Katterfeld, A. ; Will, F.: *Development of a standard calibration procedure for the DEM parameters of cohesionless bulk materials – part I: Solving the problem of ambiguous parameter combinations*. In: *Powder Technology* 343 (2019), S. 803–812
- [110] Katterfeld, A. ; Roessler, T.: Standard procedure for the calibration of dem parameters of cohesionless bulk materials. In: *Proceedings of the 8th international conference on discrete element methods (dem8)*. Twente, 2019
- [111] Rackl, M. ; Hanley, K.: *A methodical calibration procedure for discrete element models*. In: *Powder Technology* 307 (2017), S. 73–83
- [112] Roessler, T. ; Katterfeld, A.: Development of a standardized procedure for the calibration of dem abrasive wear simulations. In: *CHoPS 2018 - 9th International Conference on Conveying and Handling of Particulate Solids*. Greenwich, London, UK, 2018 (9).
- [113] Fischer, R.: *Elektrische Maschinen*. 14., aktualisierte und erw. Aufl. München : Hanser, 2009
- [114] Otto, H.: *Analyse und Simulation von Gurtschieflauf an Gurtförderanlagen*. Magdeburg, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, ILM. Dissertation. 2019-12-09
- [115] Bachmann, E.: *Die Klothoide als Übergangskurve im Strassenbau* : Buchdruckerei Winterthur AG, 1951
- [116] Potyondy, D. ; Cundall, P.: *A bonded-particle model for rock*. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 41 (2004), Nr. 8, S. 1329–1364
- [117] Katterfeld, A. ; Otto, H. ; Richter, C. ; Rossiter, E. ; Szczelina, P.: Coupled discrete element and multi-body system simulation for determination of the performance of primary crushers. In: *CFDEM®project user meeting & workshop*.
- [118] Cao, L. ; Richter, K. ; Richter, C. ; Katterfeld, A.: *Simulation der peristaltischen Förderung von Stückgütern als Schüttgut* (2014)
- [119] Westbrink, F. ; Sivanandan, R. ; Schutte, T. ; Schwung, A.: Design approach and simulation of a peristaltic sortation machine. In: *2019 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)* : IEEE, uuuu-uuuu, S. 1127–1132
- [120] Cao, L. ; Richter, K. ; Richter, C. ; Katterfeld, A.: *Simulation of the Peristaltic Conveying of Parcels as Bulk* 2014 (2014)

- 
- [121] Richter, C. ; Katterfeld, A. ; Pusch, M.: *Multilevel DEM-Simulation des Bewegungsverhaltens von Getränkeflaschen im Pulk*. In: *Logistics Journal nicht-referierte Veröffentlichungen 2018* (2018)
- [122] Katterfeld, A. ; Richter, C. ; Pusch, M. ; Kamps, R.: *Tubular Push Conveyor - Functional Analysis and Simulation*. In: , 2019
- [123] Fritz, M. ; Wolfschluckner, A. ; Jodin, D.: *Simulation von Paketen im Pulk*. In: *Logistics Journal 2013* (2013), Nr. 11. URL <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0009-14-38137>
- [124] Sinnott, M. ; Hilton, J. ; McBride, W. ; Cleary, P.: *Coupled gas-particulate discharge from a bucket elevator*. In: *Powder Technology 314* (2017), S. 203–217
- [125] Kamps, R.: *Konzept und Realisierung eines Rohrfördersystems mit Schubelementen*. Wuppertal, Universität Wuppertal. Dissertation. 2015
- [126] Prims, D. ; Katterfeld, A.: *Anwendung der Diskrete Elemente Methode zur Senkung der Beschädigungsrate von Maschinen für den Umschlag von Paketen im Pulk*. In: *Logistics Journal : Proceedings 2017* (2017), Nr. 10. URL <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0009-14-45824>



## Abstract

Der Schöpfwiderstand ist bei der Schüttgutförderung mit Becherwerken neben dem Hubwiderstand des Schüttguts eine für den Energiebedarf der Gesamtanlage entscheidende Größe. Der Schöpfwiderstand wird von der Becherform und Becherteilung, der Beschickungsart, der Zugmittelgeschwindigkeit sowie der Kohäsivität des Schüttguts beeinflusst. Eine Ursache für die Abhängigkeit des Schöpfwiderstandes von der Zugmittelgeschwindigkeit und der Kohäsivität des Schüttgutes liegt im Effekt des sogenannten Bechernickens.

Eine weitere Einflussgröße auf die Effektivität des Fördervorgangs schnelllaufender Becherwerke ist das laterale Schwingen der Becher im freien Becherstrang. Beim Auflaufen der Becher auf die Umlenkrollen erfahren die Becher und das Schüttgut aufgrund dynamischer Kräfte eine theoretisch unendlich große Beschleunigung auf die Bahnkurve der Antriebs- bzw. Spanntrommel. Dies ist jedoch physikalisch unmöglich. Der Becher führt daher zunächst eine Drehbewegung entgegen der Bahnkurve durch, um anschließend auf den Umlenkradius der Trommel einzuschwenken. Dieses Pendeln der Becher überträgt sich im nachfolgenden Becherstrang in Form einer gedämpften Schwingung. Bereits gefördertes Gut kann bei hohen Becherfüllungsgraden aus den Bechern in Richtung des Becherwerkfußes zurückfallen. Dieses Gut muss anschließend erneut geschöpft und gehoben werden. Weiterhin wird die Becher-Gurt Verbindung, der Becherrücken und der Gurt durch die Biegebelastung belastet.

Zur Analyse des Bewegungsverhaltens schnelllaufender Becherwerke wird in dieser Arbeit eine Simulationsmethode zur Berechnung des Bewegungsverhaltens von Maschinenmodellen im Kontakt mit Schüttgütern implementiert. Dabei werden die bekannten Methoden der Diskrete Elemente (DEM) Simulation und der Mehrkörpersimulation (MKS) auf programmebene gekoppelt.

[www.ilm.ovgu.de](http://www.ilm.ovgu.de)

Institut für Logistik und Materialflusstechnik  
Fakultät für Maschinenbau  
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

39106 Magdeburg  
Universitätsplatz 2  
Gruson Gebäude (Geb. 10)