

Res Electricae Magdeburgenses
Magdeburger Forum zur Elektrotechnik

Analytische Beschreibung der Kopplung
elektromagnetischer Felder durch Aperturen in Resonatoren

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

von **Dipl.-Phys. Jörg Petzold**

geb. am 19.11.1981 in Freiberg

genehmigt durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ralf Vick

Univ.-Prof. Dr.-rer.nat. Frank Gronwald

Promotionskolloquium am 27. Januar 2020

MAFO
Band 80

Res Electricae Magdeburgenses

Magdeburger Forum zur Elektrotechnik, Jg. 18, Band 80, 2020

<http://www.mafo.ovgu.de/>

IMPRESSUM

Herausgeber:

- Prof. Dr.-Ing. Andreas Lindemann, Lehrstuhl für Leistungselektronik, Institut für Elektrische Energiesysteme
- Prof. Dr.-Ing. habil. Martin Wolter, Lehrstuhl für Elektrische Netze und Erneuerbare Energie, Institut für Elektrische Energiesysteme
- Prof. Dr. rer. nat. Georg Rose, Lehrstuhl für Medizinische Telematik/Medizintechnik, Institut für Medizintechnik
- Prof. Dr.-Ing. Ralf Vick, Lehrstuhl für Elektromagnetische Verträglichkeit, Institut für Medizintechnik

Gründungsherausgeber:

- Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Nitsch
- Prof. Dr.-Ing. habil. Zbigniew Antoni Styczynski

alle: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120, 39016 Magdeburg

V. i. S. d. P.:

Dr.-Ing. Jörg Petzold

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg

1. Auflage, Magdeburg, Otto-von-Guericke-Universität, 2020

Zugl.: Magdeburg, Univ., Diss., 2020

Auflage: 30

Redaktionsschluss: Februar 2020

ISSN: 1612-2526

ISBN: 978- 3-944722-91-7

© Copyright 2020 Jörg Petzold

Bezug über die Herausgeber

Druck: docupoint GmbH

Otto-von-Guericke-Allee 14, 39179 Barleben

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit baut auf den Grundlagen der elektromagnetischen Feldtheorie eine neue Systematik zur Beschreibung der Kopplung elektromagnetischer Felder zwischen verschiedenen Umgebungen auf. Es wird der Halbraum und der quaderförmige Hohlraumresonator, ein Modell für typische Gerätegehäuse, diskutiert. Dabei wird eine analytische Lösung unter der Einschränkung elektrisch kleiner Aperturen hergeleitet und anhand numerischer Verfahren verifiziert. Anschließend wird das Verfahren für eine einfache elektrisch große Apertur verallgemeinert. Als Ausgangspunkt dient hierbei die Modellierung des eingekoppelten Stromes auf einem elektrisch dünnen, langen und geraden Draht. Die Integralgleichung für das elektrische Feld wird auf eine neuartige Weise durch ein Diskretisierungsverfahren gelöst. Eine der Besonderheiten der sich durch die Diskretisierung ergebenden Matrixgleichung gegenüber üblichen Lösungsverfahren ist die analytische und damit sehr schnelle Bestimmung aller Matrixelemente. Anschließend wird das Verfahren auf einen langen dünnen Schlitz in einem Hohlraumresonator übertragen. Weiterhin wird die Gesamtmatrix in Nah- und Fernwechselwirkungen separiert. Somit können verschiedene Abstrahlungsumgebungen vergleichsweise einfach berücksichtigt werden. Untersuchungen des Fernfeldes des Schlitzes zeigen, dass es möglich ist, den Einfluss der inneren Hohlraumresonanzen auf das äußere Feld effizient zu berechnen.

Abstract

In this thesis a new systematic formalism of the coupling of electromagnetic fields between different radiation environments is derived from the basics of electromagnetic field theory. Here, the case of the coupling between a half space and a rectangular cavity is treated, which is a model for typical housings of electrical devices. An analytical solution is derived under the condition of electrically small apertures and then validated with numerical methods. Then the developed method is generalized for an simple electrical large aperture. It is made use of the duality of the Maxwell equations by the modeling of the generated current in an electrical large, thin, straight and finite wire in free space. The respective integral equation for the electrical field is solved in a new way by a combination of the methods of regularization and discretization. One of the unique properties of the derived matrix equation is the possibility to calculate all matrix elements analytically and therefore quite fast. Subsequently, the method is applied to the electrical large, thin, straight and finite slot in a rectangular cavity. The complete matrix is separated in a near and far interaction part. This way, different radiation conditions can be considered easily. The analysis of the far field of such a slot shows, the influence of the inner cavity resonances on the external fields can be calculated efficiently.

Ehrenerklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters habe ich nicht in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Verwendete fremde und eigene Quellen sind als solche kenntlich gemacht.

Ich habe insbesondere nicht wissentlich:

- Ergebnisse erfunden oder widersprüchliche Ergebnisse verschwiegen,
- statistische Verfahren absichtlich missbraucht, um Daten in ungerechtfertigter Weise zu interpretieren,
- fremde Ergebnisse oder Veröffentlichungen plagiiert,
- fremde Forschungsergebnisse verzerrt wiedergegeben.

Mir ist bekannt, dass Verstöße gegen das Urheberrecht Unterlassungs- und Schadensersatzansprüche des Urhebers sowie eine strafrechtliche Ahndung durch die Strafverfolgungsbehörden begründen kann. Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die Dissertation ggf. mit Mitteln der elektronischen Datenverarbeitung auf Plagiate überprüft werden kann. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes auch noch nicht veröffentlicht.

Magdeburg, 7. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	12
1.1	Problemstellung	12
1.2	Auftreten von Aperturen in Theorie und Praxis	13
1.3	Zielstellung und Gliederung der Arbeit	14
2	Grundlagen	16
2.1	Maxwell-Gleichungen	16
2.1.1	Potentiale	17
2.1.2	Linearität	19
2.1.3	Kontinuitätsgleichung	19
2.2	Verallgemeinerter Strom	19
2.3	Felder an Grenzflächen	22
2.3.1	Ableitung der Randbedingungen	22
2.3.2	Randbedingungen an perfekten leitfähigen Medien	24
2.4	Methoden und Prinzipien	25
2.4.1	Äquivalenz-Prinzip	25
2.4.2	Energieerhaltung	26
2.4.3	Eindeutigkeit	27
2.4.4	Dualität	28
2.4.5	Spiegellandungsmethode	29
2.4.6	Induktionsprinzip	29
2.4.7	Babinet-Prinzip	31
2.5	Greensche Funktionen	32
2.5.1	Anwendung auf die Helmholtzgleichung	33
2.5.2	Assoziierte Greensche Funktionen	34
2.5.3	Dyadische Greensche Funktionen	35
2.6	Multipol-Entwicklung	37
2.7	Abstrahlung im Freiraum	40
2.7.1	Rayleigh-Zone	41
2.7.2	Fresnel-Zone	41
2.7.3	Fraunhofer-Zone	41
2.7.4	Nahfeld und Fernfeld	42
2.7.5	Elementarstrahler	42

2.8	Simulationsverfahren	43
2.8.1	Finiten Differenzen im Zeitbereich	43
2.8.2	Momenten-Methode	44
3	Elektrisch kleine Aperturen	46
3.1	Bethe-Theorie kleiner Aperturen	46
3.1.1	Randbedingungen der Apertur	46
3.1.2	Magnetisches Feld	48
3.1.3	Gestreutes Feld der Apertur	49
3.1.4	Lösen des Integrals	50
3.1.5	Elektrisches Feld	53
3.2	Kleine Apertur in der unendlichen Ebene	54
3.2.1	Regularisierung der Greenschen Funktion	55
3.2.2	Renormalisierte Polarisierbarkeit	56
3.2.3	Energieerhaltung	57
3.3	Kleine Apertur im quaderförmigen Hohlraumresonator	59
3.3.1	Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraumresonators	60
3.3.2	Güte rechteckiger Hohlraumresonatoren	64
3.3.3	Regularisierung im Hohlraumresonator	65
3.3.4	Renormalisierte Polarisierbarkeit	67
3.3.5	Felder im Inneren des Resonators	68
3.3.6	Schirmdämpfung	69
3.3.7	Hohlraumresonanzen im äußeren Feld	69
3.3.8	Untersuchungen im Zeitbereich	73
3.4	Verallgemeinerung des Modells	75
3.4.1	Verallgemeinerung der Einfallrichtung	75
3.4.2	Beladung des Hohlraumresonators	77
3.4.3	Validierung des eingekoppelten Stromes	78
4	Elektrisch große Aperturen	80
4.1	Elektrisch langer dünner Draht	80
4.1.1	Quasi-stationärer Realteil	84
4.1.2	Imaginärteil	86
4.1.3	Regularisierter Realteil	87
4.1.4	Gesamtlösung	88
4.1.5	Validierung für den Strom	89
4.1.6	Konvergenz	90
4.1.7	Gestreute Nahfelder	94
4.1.8	Validierung für die Nahfelder	95
4.1.9	Gestreute Fernfelder	97

4.1.10 Validierung für die Fernfelder	98
4.2 Elektrisch langer Draht im Resonator	100
4.2.1 Validierung des eingekoppelten Stromes und der Felder	102
4.3 Elektrisch langer Schlitz in der Resonatorwand	108
4.3.1 Validierung für die Felder	110
4.4 Elektrisch langer Schlitz mit elektrisch langem Draht im Resonator	117
4.4.1 Validierung und Einfluss der Beladung auf die inneren und äußeren Felder	118
4.5 Vergleich des Berechnungsaufwandes	123
5 Zusammenfassung	125
5.1 Ergebnisse	125
5.2 Ausblick	127
5.3 Thesen	128
Literatur	129

Symbolverzeichnis

f	Skalar, auch komplexwertig
\mathbf{f}, \mathbf{F}	Vektor, auch komplexwertig
\mathbf{F}^T	Transponierte eines Vektors
$\angle(F)$	Phase einer komplexen Größe in Bogenmaß
$ \mathbf{F} , F $	Betrag eines Vektors, Betrag einer komplexen Größe
$\Re\{F\}$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im\{F\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
F^*	komplexe Konjugation von F
$\mathbf{F} \circ \mathbf{K}$	dyadisches Produkt der Vektoren \mathbf{F} und \mathbf{K}
\mathbf{F}_{\parallel}	tangentiale Komponenten von \mathbf{F}
\mathbf{F}_{\perp}	normale Komponenten von \mathbf{F}
F_s	singulärer Anteil von F
F_r	regularisierter Anteil von F
F^r	reflektierter Anteil von F
F^i	einfallender Anteil von F
F^s	gestreuter Anteil von F
\mathbf{e}_i	Einheitsvektor in i -Richtung
F_i	Komponenten des Vektors \mathbf{F} in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_i
$\overline{\overline{F}}$	Dyade; Ergebnis eines dyadischen Produkts zweier Vektoren
$(\overline{\overline{F}})_{ij}$	Komponente einer Dyade in ij -Richtung
\mathbf{F}_o	Oberflächen-Analogon einer Volumengröße \mathbf{F}
e	Eulersche Zahl

d	totales Differential
∂	partiell Differential
∇	Nabla-Operator
j	Basisvektor der imaginären Achse
\mathbf{S}	Poynting-Vektor in W/m^2
\mathbf{E}	Elektrischer Feld-Vektor in V/m
\mathbf{H}	Magnetischer Feld-Vektor in A/m
\mathbf{J}^m	Magnetische Stromdichte in V/m^2 oder V/m oder V
\mathbf{J}^e	Elektrische Stromdichte in A/m^2 oder A/m oder A
μ	Permeabilität in $\text{Vs}/(\text{A m})$
ε	Permittivität in $\text{As}/(\text{V m})$
\mathbf{p}	elektrisches Dipolmoment in Vm^2
\mathbf{m}	magnetischen Dipolmoment in Am^2
α	Polarisierbarkeit
c	Index für den Hohlraumresonator
h	Index für den Halbraum
f	Index für den Freiraum
e	Index für elektrische Quellen
m	Index für magnetische Quellen

Abkürzungsverzeichnis

MSA	Methode der kleinen Antenne (engl. Method of Small Antenna)
MSS	Methode des kleinen Streuers (engl. Method of Small Scatterer)
FDTD	Finite Differenzen im Zeitbereich (engl. Finite Differences in Time Domain)
MoM	Momentenmethode (engl. Method of Moments)
PEC	Perfekter elektrischer Leiter (engl. Perfect Electrical Conductor)
PMC	Perfekter magnetischer Leiter (engl. Perfect Magnetic Conductor)
RCS	Wirkungsquerschnitt (engl. Radar Cross Section)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Der magnetische Oberflächenstrom \mathbf{J}_0^m ist äquivalent zum gleichförmigen elektrischen Strom \mathbf{J}^e	21
2.2	Der elektrische Oberflächenstrom \mathbf{J}_0^e ist äquivalent zu zwei gegensätzlich verlaufenden Schichten des magnetischen Stroms \mathbf{J}^m	22
2.3	Darstellung des Integrationsweges in (2.33) an der Grenze zwischen zwei Gebieten.	23
2.4	Darstellung des Äquivalenzprinzips	25
2.5	Spiegelung elektrischer und magnetischer Momente an einer elektrisch perfekt leitenden Ebene	29
2.6	Darstellung des Induktionsprinzips.	30
2.7	Elektrische Quelle im Freiraum und Äquivalenzen nach dem Babinet-Prinzip.	32
2.8	Richtungsbeziehungen bei der Abstrahlung des Quellvolumens.	42
3.1	Apertur in der unendlichen, perfekt leitfähigen Ebene	47
3.2	Apertur in der unendlichen, perfekt leitfähigen Ebene mit in z -Richtung polarisiertem, einfallenden, magnetischen Feld	56
3.3	Koordinatensystem der Apertur	57
3.4	Verhältnis der abgestrahlten und einfallenden Leistung einer elektrisch kleinen, kreisförmigen Apertur mit dem Durchmesser d ; auf der logarithmischen Skale entspricht ein Wert über 0 einer Verletzung der Energieerhaltung	59
3.5	Elektrisch kleine Apertur zwischen einem rechteckigen Hohlraumresonator und dem Halbraum mit in z -Richtung polarisiertem, einfallenden, magnetischen Feld.	60
3.6	Zweidimensionale Darstellung der Spiegelladungsmethode zur Konstruktion der Greenschen Funktion eines rechteckigen Hohlraumresonators	61
3.7	Frequenzabhängigkeit der Güte eines Hohlquaders mit Kupferwänden und einem Volumen von 1 m^3 für verschiedene Durchmesser kreisförmiger Aperturen	65
3.8	Schematische Darstellung des Resonators mit einer kreisförmigen Apertur	68
3.9	Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse für den Resonator nach Setup II (vgl. Tab. 3.2) an zufällig ausgewählten Orten innerhalb des Resonators.	70

3.10	Betrag der x -Komponente des elektrischen Feldes im Frequenzbereich, abgestrahlt durch die Apertur bei $x = 22,5$ cm, $y = 5$ cm und $z = 10$ cm nach Setup II.	71
3.11	Ortsabhängige Schirmdämpfung bezüglich der y -Komponente des elektrischen Feldes bei $x = 15,25$ cm, $y = 11,75$ cm, $z = 14,75$ cm. Die Näherung einer elektrisch kleinen Apertur kann nur im Frequenzbereich bis 1,5 GHz angenommen werden. Als Referenz dient [Sol11].	72
3.12	Zeitlicher Ausschnitt des gestreutes elektrischen Feldes an einem Hohlraumresonator.	74
3.13	ϕ -Komponente der Amplitudendichte des elektrischen Feldes im Frequenzbereich, abgestrahlt von der Apertur bei $\theta = \pi/2$ und $r_0 = 0,5$ m in Region I.	75
3.14	Amplitudendichte des Stroms I_1 in der Leiterschleife bei $x = 19$ cm, $y = 7$ cm and $z = 31$ cm im Inneren des Resonators aus Abb. 3.8 und Tab. 3.2.	79
4.1	Elektrisch langer, dünner Leiter und elektrisch langer, dünner Schlitz in der unendlichen Ebene.	81
4.2	Verschiedene Anteile der Greenschen Funktion für das Vektorpotential eines langen, dünnen Drahtes und die Approximation durch deren 1. Taylor-Glied \mathfrak{R}_s , sowie der regularisierte Anteil \mathfrak{R}_r	82
4.3	Diskretisierung des Drahtes.	85
4.4	Darstellung der Irregularität des regularisierten Realteils der Greenschen Funktion für das elektrische Feld (b), hervorgerufen durch die zweifache Ableitung des regularisierten Realteils der Greenschen Funktion für das Vektorpotential (a) für kleine Abstände.	87
4.5	Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms in (a) der Mitte und bei (b) $z = 10$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, erzeugt durch eine einfallende ebene Welle, berechnet mit (4.29) (MSS) und FEKO (MoM).	91
4.6	Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms erzeugt durch eine ideale Spannungsquelle bei $z = 72,5$ cm, in (a) der Spannungsquelle und bei (b) $z = 10$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, berechnet mit (4.29) (MSS) und FEKO (MoM).	92
4.7	Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms erzeugt durch eine ideale Spannungsquelle bei $z = 95$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, unter schrittweiser Berücksichtigung der einzelnen Summanden der Gleichung (4.29) und verglichen mit der MoM.	93

4.8	Relativer Fehler der mit der MSS berechneten Ströme bei schrittweiser Erhöhung der Anzahl der Unbekannten durch Verkleinerung der Diskretisierungslänge. Die vertikalen Linien markieren die Erfüllung der Bedingung (4.14).	94
4.9	Nahfelder an beliebigen Punkten im Raum eines elektrisch langen Drahtes, angeregt durch eine ideale Spannungsquelle.	96
4.10	Monostatische RCS des Drahtes für verschiedene Streu- und Einfallswinkel θ	99
4.11	geometrisches Modell eines mit einem elektrisch langen Leiter beladenen Hohlraumresonators.	100
4.12	Geometrie des berechneten Beispiels der Einkopplung des Stroms in einen elektrisch langen Draht im Inneren eines Resonators.	103
4.13	Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators (vgl. Abb. 4.12 und Tab. 4.1) bei einer Anregung mittels elektrisch kleiner Apertur.	104
4.14	Normalisierte Felder im Inneren eines mit einem offenen, elektrisch langen Draht beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf eine elektrisch kleine kreisförmige Apertur einfallende ebene Welle. (a) x -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$	105
4.15	z -Komponente des magnetischen Dipolmoments der Apertur mit und ohne Berücksichtigung des elektrisch langen Leiters im Resonator.	106
4.16	Normalisierte Felder außerhalb des Resonators, erzeugt durch eine auf eine elektrisch kleine Apertur einfallende ebene Welle. (a) x -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{o,2}$ und (b) y -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{o,2}$	107
4.17	Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators (vgl. Abb. 4.12 und Tab. 4.1) bei einer Anregung mittels idealer Spannungsquelle in der Mitte des Drahtes.	108
4.18	Übergang des diskretisierten Modells des dünnen Leiters auf das Modell des dünnen Schlitzes.	109
4.19	Beispielhafte Geometrie eines elektrisch langen Schlitzes in einer Resonatorwand.	109
4.20	Geometrie des Resonatormodells für die MoM-Simulation. Die MSS nimmt einen unendlich ausgedehnten Schirm in der yz -Ebene an. Die Werte der Parameter sind in Tab. 4.2 aufgeführt.	111

4.21	Normalisierte Felder im Inneren des Resonators, erzeugt durch eine auf einen elektrisch langen Schlitz einfallende ebene Welle. (a) y -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$	112
4.22	x -Komponente des normalisierten elektrischen Feldes außerhalb des Resonators, erzeugt durch eine auf einen langen Schlitz in y -Richtung polarisierte einfallende ebene Welle. (a) zeigt das Feld bei $P_{o,1}$ weit entfernt von der geschlitzten Frontseite. (b) zeigt das Feld bei $P_{o,2}$ nahe der Frontseite. .	114
4.23	Fernfelder eines geschlitzten und ungeschlitzten Resonators für verschiedene Streuwinkel, berechnet mit der MoM. Die Differenz beider Felder approximiert das Fernfeld des Schlitzes und dient als Validierung der MSS in Abb. 4.24.	115
4.24	Monostatische RCS des Schlitzes in einem Resonator. Es wurden nur die Streufelder des Schlitzes berücksichtigt und validiert durch die Differenz der in Abb. 4.23 gezeigten Fernfelder für den geschlitzten und ungeschlitzten Fall.	116
4.25	Beispielhafte Geometrie eines elektrisch langen Schlitzes in einem Resonator in dessen Inneren ein elektrisch langer Draht mit offenen Enden vorliegt.	117
4.26	Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators bei einer Anregung mittels eines elektrisch langen Schlitzes in der Resonatorwand (vgl. Abb. 4.25 und Tab. 4.3).	119
4.27	Normalisierte Felder im Inneren eines mit einem elektrisch langen Draht beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf einen elektrisch langen Schlitz einfallende ebene Welle. (a) y -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$	120
4.28	x -Komponente des normalisierten elektrischen Feldes außerhalb eines beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf einen langen Schlitz in y -Richtung polarisierte einfallende ebene Welle.	121
4.29	Monostatische RCS des Schlitzes in einem beladenen Resonator bei verschiedenen Streuwinkeln und verschiedenen Frequenzbereichen. Der Einfluss der Beladung auf die Rückstreuung ist insbesondere nahe 1,2 GHz durch neu auftretende Resonanzen gut zu erkennen.	122
4.30	Der Berechnungsaufwand der MSS gegenüber der MoM-Implementation [Hyp17].	124

Tabellenverzeichnis

2.1	Duale Beziehungen bei Vertauschung der Quellenarten	29
2.2	Überblick der Nomenklatur der Greenschen Funktionen	34
3.1	Parameter des Resonators und der Apertur für Setup I, übernommen aus [Sol11] und auf das Koordinatensystem in Abb. 3.8 angepasst	71
3.2	Beliebig gewählte Parameter des Resonators und der Apertur für Setup II, siehe Abb. 3.8.	73
4.1	Geometrische Parameter des Resonators mit langem Draht in Abb.4.12 . .	102
4.2	Geometrische Parameter des geschlitzten Resonators	111
4.3	Geometrische Parameter des geschlitzten Resonators mit Beladung (vgl. Abb. 4.25).	119
4.4	Vergleich des Berechnungsaufwandes zwischen MoM und MSS für die untersuchten Geometrien	124

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Bestimmung der Schirmdämpfung von Gehäusen mit Öffnungen ist ein Gegenstand jahrzehntelanger Forschung [Bet44; MB77; Sol11]. Die Elektronik in einer breiten Vielfalt industrieller Anwendungen kann gegenüber äußeren Störfeldern sehr anfällig sein. Um die Störfestigkeit der Anlagen zu erhöhen, wird versucht, mit Hilfe gut leitender Gehäuse von äußeren Feldern abzuschirmen. Aus technischen Gründen müssen diese Gehäuse jedoch häufig Aperturen aufweisen, z. B. Lüftungsschlitze für die Kühlung aktiver Bauelemente eines Gerätes. Die Aperturen wirken dann als unerwünschter Koppelpfad zwischen dem äußeren sowie inneren Bereich und können sich nachteilig auf die Schirmdämpfung des Gehäuses auswirken. Die Kenntnis der Schirmdämpfung ist daher entscheidend für die Entwicklung technischer Anwendungen.

Die Nutzung immer höherer Frequenzen in der Elektrotechnik führt auch zu immer höherfrequenten Störfeldern und damit zu einer stärkeren Kopplung äußerer und innerer Felder von Gehäusen mit Aperturen. Bei auftretenden Wellenlängen von einigen Zentimetern kann das äußere Feld nicht nur besser einkoppeln, sondern auch innere Hohlraumresonanzen anregen, die zu hohen Feldstärken und stark inhomogenen Feldverteilungen im Inneren des Resonators führen können. Dies wiederum beeinflusst die Bauelemente im Gehäuse, die dann ihrerseits auf das innere Feld rückwirken. Die Kopplung der Aperturen ist bidirektional, d. h. sie koppeln das äußere in das innere Feld, aber auch das innere in das äußere Feld. Da das innere Feld von der Beladung des Resonators abhängt, hängt damit auch das gesamte äußere Feld, das sich aus dem einfallenden, gestreuten und rückgekoppelten Feld zusammensetzt, ebenfalls von der Beladung des Resonators ab. Das äußere Feld ist dabei durch einen externen Beobachter messbar. Man kann sich also die Fragen stellen:

Wie hängt das gesamte äußere Feld von der Beladung eines Hohlraumresonators ab und ist dieser Einfluss messbar?

Die Arbeit widmet sich dieser Fragestellung durch die analytische Beschreibung der verschiedenen Streuprozesse. Die Ergebnisse werden verglichen mit numerischen Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich.

1.2 Auftreten von Aperturen in Theorie und Praxis

Aperturen sind allgemein Öffnungen in leitfähigen Oberflächen. Sie treten in technischen Anwendungen sehr häufig auf und sind dabei technisch notwendig, aber aus elektrotechnischer Sicht oft ungewollt. Typische Beispiele sind Lüftungsöffnungen in Gehäusen für elektronische Systeme, schlecht leitfähige Übergänge an metallischen Klappen oder Türen und Fenstern oder Triebwerkseinlässen in Schiffs- oder Flugzeugrümpfen. Gezielte Anwendungen erlauben Aperturen dagegen in der Hochfrequenz- und Antennentechnik, z. B. als frequenzselektive Übertrager oder spezielle Antennen.

Da Aperturen im Sinne des Babinet-Prinzips wie Antennen wirken können und so mit elektromagnetischen Feldern wechselwirken, können sie großen Einfluss auf die Funktionsweise und -sicherheit elektronischer Systeme haben. Dies gilt um so mehr, je höher die Taktfrequenzen der elektronischen Systeme ausfallen. Da diese in der Vergangenheit bis heute stetig steigen, nimmt die Bedeutung der Behandlung von Aperturen ebenfalls zu. So begründet sich das rege Forschungsinteresse in diesem Bereich in den vergangenen Jahrzehnten.

Im Bereich der elektromagnetischen Verträglichkeit liegt der Schwerpunkt auf der Bestimmung der Schirmdämpfung, um die Störfestigkeit gegen gestrahlte Emissionen zu ermitteln. Dafür wurden seit 1940 Modelle entwickelt, die die Kopplung eines einfallenden Feldes durch eine Apertur in ein inneres Gebiet betrachten [Bet44; Col81; Cas81; Col82; Lee86; MB77]. In diesen Arbeiten werden elektrisch kleine Aperturen in einem unendlich ausgedehnten Schirm zwischen zwei Halbräumen modelliert, da für solche Geometrien eine approximierbare analytische Lösung gefunden werden kann. Erst [Col82] betrachtet auch den Einfluss von unterschiedlichen Regionen auf die Kopplung der Aperturen. Die Kopplung äußerer Felder in Hohlraumresonatoren durch elektrisch kleine Aperturen wurde z. B. in [Sol11; Rob+98] untersucht. Eine Betrachtung elektrisch großer Aperturen unter Verwendung numerischer Verfahren liefert [Kon+05]. Dabei wurde der Einfluss einer Rückwirkung auf das äußere Feld nicht untersucht.

Parallel dazu stellte sich die Frage zur Modellierung der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit leitenden Strukturen mit Aperturen, um etwa das Eindringen solcher Felder in Gerätegehäuse oder Schiffs- und Flugzeugrümpfe zu berechnen, bereits früh in der Radartechnik [MLC74]. Eine Vielzahl von Veröffentlichungen behandeln die theoretische Beschreibung für elektrisch große Strukturen [MS70; Ana+96; CT 2; OG00; CBS10; CLS75; Coh52a]. Dabei stellte sich die Modellierung der Aperturen, wie zum Beispiel der Triebwerkseinlässe als besondere Herausforderung dar, da die Geometrie dieser Öffnungen aufgrund ihrer elektrischen Größe einen starken Einfluss auf die Einkopplung des Radarsignals ins Innere des Rumpfes und auch auf die Rückstreuung hat [MS70; Ana+96; CT

2; OG00; CBS10]. Die genannten Quellen stellen dabei nur eine Auswahl dar. In [Ana03] findet sich eine umfassende Übersicht.

Analytische Verfahren finden dabei meist Anwendung für kanonische Geometrien, z. B. für Zylinder oder Hohlkugeln und können unter diesen Bedingungen teilweise sogar exakte Lösungen liefern [Pea53; CLS75; HW12]. Ein Vorteil der analytischen Verfahren ist, dass sich die Lösungen, z. B. die Feldverteilung im inneren und äußeren Bereich der streuenden Struktur sehr effizient berechnen lassen. Dem gegenüber steht die Einschränkung auf ideale Geometrien [VNV07] oder eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Auch die geometrische Form und elektrische Größe der Apertur ist bei analytischen Modellen eingeschränkt. Eine Vielzahl der ersten Modelle beschränken sich auf die Beschreibung elektrisch kleiner Aperturen oder gelten nur unter niederfrequenten Bedingungen [Cas81; Sol11]. Um diese Einschränkung zu überwinden und dabei dennoch analytische Lösungen zu finden, wurden auch empirische Modifikationen in Betracht gezogen, die allerdings nur eine sehr eingeschränkte Gültigkeit besitzen [Sol12].

Numerische Verfahren basieren häufig direkt auf den Grundgleichungen der elektromagnetischen Feldtheorie, und erlauben daher die Berechnung von Feldern und Quellen nahezu beliebiger, auch elektrisch großer Geometrien und Anregungen. Dies wird durch verschiedene Diskretisierungsverfahren erreicht, deren Behandlung jedoch numerisch sehr aufwendig werden kann. Insbesondere bei hohen Frequenzen und komplexen Geometrien kann der Berechnungsaufwand durch eine hohe Anzahl Unbekannter übermäßig steigen. Es wurden Modifikationen verschiedener Verfahren, insbesondere solche zur Lösung der Feldintegralgleichungen, vorgestellt, die diese Nachteile reduzieren [HM76; AL09].

Andere Verfahren nutzen statistische Modelle zur Beschreibung der Anregung von Hohlraumresonatoren durch Aperturen [Gra+15; BY04]. Vorteilhaft dabei sind die Aussagen über die statistische Verteilung (Mittelwert, Standardabweichung, Minimal- und Maximalwerte, Perzentile, Verteilungs- und Dichtefunktion) der typischerweise zu erwartenden Störungen. Nachteilig ist das Auftreten statistischer Unschärfen, die eine physikalische Interpretation erschweren.

1.3 Zielstellung und Gliederung der Arbeit

Das erste Ziel dieser Arbeit ist das Auffinden einer kompakten analytischen Beschreibung der deterministischen Aperturkopplung zwischen verschiedenen Umgebungen. Dazu werden in der Literatur bekannte Aperturkopplungsmodelle und Antennenkopplungsmodelle für elektrisch kleine Strukturen verallgemeinert und in einen neuen Formalismus überführt.

Das zweite Ziel ist die Untersuchung des Einflusses von Beladungen eines Hohlraumresonators auf das durch Aperturen zurückgestreute oder abgestrahlte Feld.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel untergliedert. Nach diesen einleitenden Kapitel werden in Kapitel 2 die Grundlagen der elektromagnetischen Feldtheorie behandelt, die für das weitere Verständnis nötig sind. In Kapitel 3 wird auf Basis dieser Grundlagen ein neues verallgemeinertes analytisches Kopplungsmodell für elektrisch kleine Aperturen hergeleitet. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse führen in Kapitel 4 zur Entwicklung eines neuen Modells, zur Beschreibung elektrisch großer Schlitzaperturen und dünner elektrischer Leiter. Die wichtigsten Erkenntnisse werden in Kapitel 5 zusammengefasst.

2 Grundlagen

Sowohl analytische als auch numerische Modelle zur Streuung elektromagnetischer Felder an Aperturen beruhen auf einer Reihe grundlegender Prinzipien und Methoden. Die folgenden Abschnitte gehen kurz auf die für den Kontext der Arbeit benötigten Grundlagen ein, um deren Anwendung im folgenden Kapitel vorzubereiten.

2.1 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen

$$-\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mathbf{B} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^e + j\omega\mathbf{D} \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

beschreiben die Wechselwirkungen und Abhängigkeiten zwischen dem elektrischen Feld \mathbf{E} und der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} , der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} und dem magnetischen Feld \mathbf{H} , ihren Quellen, der elektrischen Stromdichte $\mathbf{J}^e = \sigma_e\mathbf{E}$ und der elektrischen Ladung ρ_e . Die Auswirkungen durch Materie auf die Felder werden durch die Materialparameter μ , ε und σ_e abgebildet. In dieser Arbeit werden ausschließlich isotrope, homogene und lineare Medien betrachtet, deren Wirkung sich durch die einfachen Materialgleichungen

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2.2b)$$

$$(2.2c)$$

beschreiben lässt. Für die Zielstellung dieser Arbeit ist es sinnvoll, die Gleichungen (2.1) durch die magnetische Stromdichte \mathbf{J}^m und die magnetische Ladung ρ_m zu ergänzen. Diese stellen nicht physikalische Hilfsgrößen dar, da magnetische Monopole bisher nicht in der Realität beobachtet werden konnten. Unter der Einbeziehung von (2.2) und der

Einführung der magnetischen Hilfsgrößen weisen die Maxwell-Gleichungen

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J}^m + j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad (2.3b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^e + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (2.3c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \quad (2.3d)$$

eine hohe Symmetrie auf, die sich als sehr vorteilhaft für die Zwecke dieser Arbeit erweist. Im Abschnitt 2.2 wird näher auf das verallgemeinerte Stromkonzept eingegangen. Die Gleichungen (2.3) bilden ein System gekoppelter Differenzialgleichungen. Um die Beziehungen zwischen den Quellen und dazugehörigen Feldern einfacher darzustellen, können die Gleichungen mit Hilfe von Potentialdarstellungen entkoppelt werden. Dazu ist es sinnvoll, die elektrische und magnetische Quelle einzeln zu betrachten. Die folgenden Überlegungen orientieren sich im Wesentlichen an [Har01].

2.1.1 Potentiale

Sei \mathbf{J}^e die Quelle der Felder, dann gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.4)$$

Jedes quellenfreie Feld ist das Wirbelfeld eines anderen Feldes.

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}_e \quad (2.5)$$

Das elektrische Vektorpotential \mathbf{A}_e ist mit der elektrischen Quelle \mathbf{J}^e assoziiert. Diese Nomenklatur weicht vom allgemeinen Standard in der Literatur ab. Setzt man nun (2.5) in (2.3a) ein und berücksichtigt die Bedingung $\mathbf{J}^m = 0$, ergibt sich

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{A}_e) = 0. \quad (2.6)$$

Der Ausdruck in Klammern in (2.6) ist also ein wirbelfreies Feld und damit ein Gradientenfeld eines skalaren Potentials.

$$\mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{A}_e = -\nabla\Phi. \quad (2.7)$$

Setzt man nun (2.5) und (2.7) in (2.3c) ein, ergibt sich ein Ausdruck für das Vektorpotential, der nur noch von der Quelle und einem bisher nicht näher bestimmten Gradientenfeld

abhängt.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_e - k^2 \mathbf{A}_e = \mathbf{J}^e - j\omega\varepsilon \nabla \Phi \quad (2.8)$$

Eine allgemeine Beziehung aus der Vektoranalysis besagt, dass sich die zweimalige Anwendung des Rotations-Operators auch schreiben lässt als

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_e = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_e - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A}_e. \quad (2.9)$$

Die Divergenz des Vektorpotentials ist aufgrund der Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen frei wählbar. Im Rahmen dieser Arbeit ist die Wahl

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_e = -j\omega\varepsilon \Phi \quad (2.10)$$

nützlich, da sich durch Einsetzen von (2.9) und (2.10) in (2.8) ein Ausdruck ergibt, in dem das Vektorpotential nur noch von der Quelle abhängt.

$$\nabla^2 \mathbf{A}_e + k^2 \mathbf{A}_e = -\mathbf{J}^e \quad (2.11)$$

Dabei ist $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ der Laplace-Operator. Die Gleichung (2.11) wird auch komplexe Wellen- oder Helmholtz-Gleichung genannt. Ihre Lösung unter Einhaltung der Randbedingungen beschreibt die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes, hervorgerufen durch die elektrische Quelle \mathbf{J}^e . In (2.12) sind noch einmal die Abhängigkeiten des elektrischen und magnetischen Feldes vom elektrischen Vektorpotential zusammengefasst.

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}_e \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_e - j\omega\mu \mathbf{A}_e \quad (2.12b)$$

Analog lässt sich die Helmholtzgleichung für magnetische Quellen aufstellen, diesmal unter der Bedingung, dass \mathbf{J}^m die einzige Quelle ist.

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\mathbf{J}^m \quad (2.13)$$

Zu beachten ist hier natürlich, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} nun in genau umgekehrter Weise vom magnetischen Vektorpotential \mathbf{A}_m abhängen.

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}_m \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_m - j\omega\varepsilon \mathbf{A}_m \quad (2.14b)$$

Treten sowohl elektrische als auch magnetische Quellen auf, so können diese einzeln betrachtet werden. Die Gesamtfelder sind dann die Summen der Felder die durch beide Quellentypen verursacht werden. Dies gilt, so lange die Maxwell-Gleichungen linear sind.

2.1.2 Linearität

Die Maxwell-Gleichungen (2.3) sind lineare Differenzialgleichungen, solange die Materialeigenschaften μ , ε und σ linear sind, d. h. solange sich die Felder in linearen Medien ausbreiten. Das bedeutet, dass die Summe von Lösungen selbst wieder eine Lösung ist, bzw. dass die Summanden einer Lösung auch selbst immer Lösungen sind. Diese Eigenschaft erlaubt die getrennte Behandlung von Quellen, deren Felder schließlich superpositioniert werden, um die Gesamtlösung zu erhalten. Außerdem ist Linearität eine Bedingung für Betrachtungen im Frequenzbereich, da nur dann berechtigterweise von harmonischen Zeitabhängigkeiten der Felder und Quellen ausgegangen werden kann. Nichtlineare Medien sollen deshalb nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

2.1.3 Kontinuitätsgleichung

Bildet man die Divergenz von (2.3c)

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}^e + j\omega\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (2.15)$$

ergibt sich nach der Divergenzfreiheit jedes Rotationsfeldes und dem Einsetzen von (2.3b)

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J}^e + j\omega\rho_e. \quad (2.16)$$

Diese Gleichung wird Kontinuitätsgleichung genannt und drückt die Erhaltung der Ladung aus.

2.2 Verallgemeinerter Strom

Der elektrische Strom wird in der Elektrotechnik allgemein als die zeitliche Änderung der Ladung aufgefasst. Diese Anschauung ist ein Spezialfall, der sich aus der Anwendung der Maxwell-Gleichungen auf das Leitungsmodell ergibt. Allgemein ist der Strom I das Flächenintegral der Volumenstromdichte \mathbf{J} auf dem Flächenelement ds . In dieser Arbeit soll als Gesamtstrom verstanden werden, was auf der rechten Seite der Gleichungen (2.3a)

und (2.3c) steht. Dabei lässt sich der Gesamtstrom in einzelne Bestandteile unterteilen, die physikalischen Ursachen zugeordnet werden können [Har01].

$$\mathbf{J}_t^e = \mathbf{J}_v^e + \mathbf{J}_l^e + \mathbf{J}_z^e \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{J}_t^m = \mathbf{J}_v^m + \mathbf{J}_z^m + \mathbf{J}_z^m \quad (2.17b)$$

Dabei sind \mathbf{J}_v^e und \mathbf{J}_v^m die elektrischen und magnetischen Verschiebungsströme. Die Variablen \mathbf{J}_z^e und \mathbf{J}_z^m sind aufgerägte oder erzwungene Ströme, z. B. durch Stromquellen. Es können auch repräsentative Ströme im Sinne des Äquivalenz-Prinzips (Abschnitt 2.4.1) sein. Das Konzept des magnetischen Stroms bedarf einer Erläuterung. In einem ersten Schritt, mit dem Ziel eine Beziehung zwischen \mathbf{J}^e und \mathbf{J}^m aufzustellen, betrachte man die Felder, die ausschließlich von der Quelle \mathbf{J}^e erzeugt werden. Die Gleichungen (2.3a) und (2.3c) lauten dann

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}^e + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_e \quad (2.18)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_e = j\omega\mu\mathbf{H}_e. \quad (2.19)$$

In einem zweiten Schritt nehme man an, es existiere nur eine magnetische Quelle \mathbf{J}^m , die die Felder \mathbf{E}_m und \mathbf{H}_m erzeugt.

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_m \quad (2.20)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E}_m = \mathbf{J}^m + j\omega\mu\mathbf{H}_m \quad (2.21)$$

Bildet man nun die Differenz der Gleichungen (2.18) und (2.20), sowie der Gleichungen (2.19) und (2.21), erhält man

$$\nabla \times (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_m) = \mathbf{J}^e + j\omega\varepsilon(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m) \quad (2.22)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m) = \mathbf{J}^m - j\omega\mu(\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_m). \quad (2.23)$$

Bildet man nun die Rotation von (2.22) und setzt dann den Ausdruck für $\nabla \times (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m)$ aus (2.23) ein, ergibt sich

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_m) - k^2(\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_m) = \nabla \times \mathbf{J}^e + j\omega\varepsilon\mathbf{J}^m \quad (2.24)$$

bzw.

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m) - k^2(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m) = \nabla \times \mathbf{J}^m + j\omega\mu\mathbf{J}^e. \quad (2.25)$$

Um eine Beziehung zwischen \mathbf{J}^e und \mathbf{J}^m abzuleiten, ist es sinnvoll, den Fall zu untersuchen, wenn beide Ströme die selben Felder erzeugen. Wenn \mathbf{J}^e und \mathbf{J}^m das selbe Magnetfeld

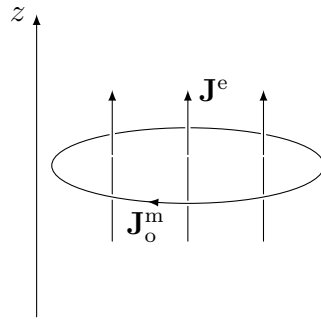


Abbildung 2.1: Der magnetische Oberflächenstrom \mathbf{J}_o^m ist äquivalent zum gleichförmigen elektrischen Strom \mathbf{J}^e .

erzeugen, verschwindet der Term $(\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_m)$ und aus (2.24) wird

$$\mathbf{J}^m = -\frac{\nabla \times \mathbf{J}^e}{j\omega\varepsilon} \quad (2.26)$$

Allerdings ergibt sich aus der Bedingung des verschwindenden Magnetfeldterms und aus (2.25), dass das elektrische Feld nicht gleich sein kann. Mit

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{J}^e}{j\omega\varepsilon} \quad (2.27)$$

wird klar, dass die elektrischen Felder außerhalb des Volumens in dem \mathbf{J}^e existiert ebenfalls gleich sind, innerhalb des Volumens sich jedoch um den zweiten Summanden der Gleichung unterscheiden. Analog lässt sich aus (2.25) unter der Bedingung $(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_m) = 0$ ein Ausdruck ableiten, der den magnetischen Strom mit einem elektrischen Strom ersetzt.

$$\mathbf{J}^e = \frac{\nabla \times \mathbf{J}^m}{j\omega\mu} \quad (2.28)$$

Auch bei (2.28) ergibt sich dann anhand von (2.24), dass die magnetischen Felder innerhalb des Volumens der Quelle \mathbf{J}^m verschieden sind. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass man den magnetischen Strom als Wirbel des elektrischen Stroms auffassen kann, der, bis auf das Innere des Quellvolumens, überall äquivalente Felder erzeugt. Diese Eigenschaft erlaubt eine vereinfachte Betrachtung der Rotation des elektrischen Stroms und dessen Wechselwirkung mit dem magnetischen Feld. Nimmt man eine gleichförmige elektrische Stromdichte \mathbf{J}^e an, die in z -Richtung fließt, dann kann aus (2.26) nach [Bla07] sogar abgeleitet werden, dass die äquivalente magnetische Stromdichte eine Oberflächenstromdichte

$$\mathbf{J}_o^m = \frac{|\mathbf{J}^e|}{j\omega\varepsilon} \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_z \quad (2.29)$$

sein muss (vgl. Abbildung 2.1). Komplizierter wird es, wenn man die äquivalente magnetische Stromdichte einer elektrischen Oberflächenstromdichte \mathbf{J}_o^e bestimmen will. Für den

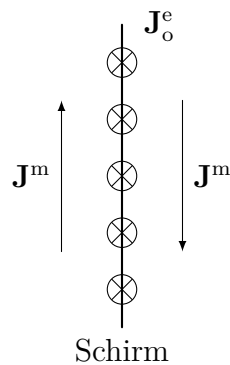


Abbildung 2.2: Der elektrische Oberflächenstrom \mathbf{J}_o^e ist äquivalent zu zwei gegensätzlich verlaufenden Schichten des magnetischen Stroms \mathbf{J}^m .

Fall eines gleichförmigen, ebenen, elektrischen Oberflächenstroms ergibt sich aus (2.26)

$$\mathbf{J}^m = -\frac{\mathbf{e}_n \times \mathbf{J}_o^e}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\delta}{\partial n}. \quad (2.30)$$

Dabei ist $\partial\delta/\partial n$ die Ableitung der Delta-Funktion nach der Flächennormalen. Dies entspricht zweier Schichten magnetischer Ströme, die direkt vor und hinter der Ebene des elektrischen Stromes in entgegengesetzte Richtungen fließen. Die Konfiguration ist zum besseren Verständnis schematisch in Abbildung 2.2 dargestellt.

2.3 Felder an Grenzflächen

Streuprozesse oder auch die Wechselwirkungen von Feldern und Quellen finden immer an Oberflächen verschiedener Medien statt, solange man von perfekten elektrischen Leitern oder Isolatoren spricht. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit weitgehend der Fall. Daher ist es sinnvoll, die Bedingungen, die für die elektrischen und magnetischen Felder an solchen Übergängen gelten, näher zu untersuchen.

2.3.1 Ableitung der Randbedingungen

Man nehme eine Ebene an, die den freien Raum in zwei Gebiete teilt, in denen die magnetischen Felder \mathbf{H}^I und \mathbf{H}^{II} existieren. Man nehme ferner an, dass auf der Ebene eine Oberflächenstromdichte \mathbf{J}_o^e existiert. Dann ergibt sich durch Integration über eine Fläche S aus der Maxwellgleichung (2.3c)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \, dS = \int_S \mathbf{J}^e \, dS + j\omega \int_S \epsilon \mathbf{E} \, dS. \quad (2.31)$$

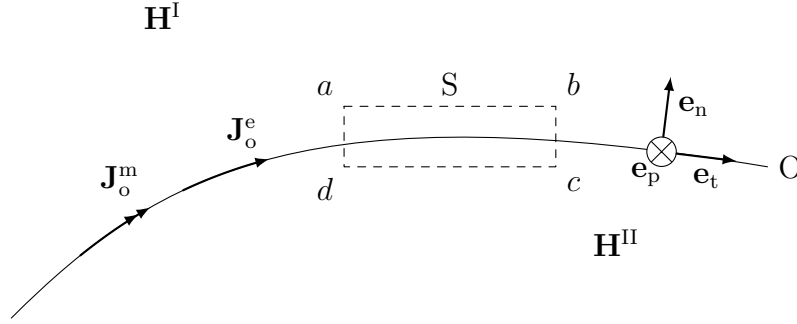


Abbildung 2.3: Darstellung des Integrationsweges in (2.33) an der Grenze zwischen zwei Gebieten.

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes, sowie der Definition für den Strom I und des elektrischen Flusses Ψ_e ergibt sich aus (2.31)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \, dl = I + j\omega\Psi_e, \quad (2.32)$$

wobei I der elektrische Strom ist, der durch S fließt. Das Integral auf der linken Seite von (2.32) ist ein Linienintegral über den Rand von S . Wird S nun so gewählt, wie es in der Darstellung 2.3 zu sehen ist, lässt sich das Integral schreiben als

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \, dl = \int_a^b (\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_t) \, dl + \int_b^c (\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_n) \, dl + \int_c^d (\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_t) \, dl + \int_d^a (\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_n) \, dl. \quad (2.33)$$

Dabei ist \mathbf{e}_n der Normalen-Einheitsvektor der Ebene O und \mathbf{e}_t der entsprechende tangentielle Einheitsvektor. Wählt man S nun so, dass seine Höhe, also die Abstände $b - c$ und $a - d$, infinitesimal klein sind, streben der Fluss Ψ_e und die letzten beiden Integrale auf der rechten Seite von (2.33) gegen Null. Die Auswertung der ersten beiden Integrale ergibt dann

$$- (\mathbf{H}^I \cdot \mathbf{e}_t) l_{ab} + (\mathbf{H}^{II} \cdot \mathbf{e}_t) l_{cd} = I. \quad (2.34)$$

In (2.34) und den folgenden Gleichungen wird davon ausgegangen, dass sich die Größen im Integral entlang der gewählten Grenzen nicht ändern. Der Strom I lässt sich mit Hilfe eines zweiten tangentialen Einheitsvektors \mathbf{e}_p , der senkrecht zu \mathbf{e}_t liegt, auch über die Oberflächenstromdichte ausdrücken.

$$I = \int_a^b (\mathbf{J}_o^e \cdot \mathbf{e}_p) \, dl = (\mathbf{J}_o^e \cdot \mathbf{e}_p) l_{ab} \quad (2.35)$$

Mit (2.34) und (2.35) lässt sich so ein Zusammenhang zwischen den magnetischen Feldern beider Gebiete und der Oberflächen-Stromdichte auf der Fläche O aufschreiben.

$$- (\mathbf{H}^I - \mathbf{H}^{II}) \cdot \mathbf{e}_t = \mathbf{J}_o^e \cdot \mathbf{e}_p \quad (2.36)$$

Auf die selbe Weise kann ein analoger Ausdruck für Diskontinuitäten des elektrischen Feldes an einer Schicht mit magnetischen Strömen gewonnen werden. Mit $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_p$ und der Vektoridentität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ergibt sich aus (2.36)

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}^I - \mathbf{H}^{II}) = \mathbf{J}_o^e \quad (2.37a)$$

und analog für das elektrische Feld

$$-\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}^I - \mathbf{E}^{II}) = \mathbf{J}_o^m. \quad (2.37b)$$

2.3.2 Randbedingungen an perfekten leitfähigen Medien

Die Gleichungen (2.37) stellen die Randbedingungen des elektromagnetischen Feldes an einer Schicht von elektrischen und magnetischen Oberflächenströmen dar. Ist \mathbf{J}_o^e ein reiner Induktions-Strom, d. h. es treten keine erzwungen Ströme in der Fläche O auf, dann liefert eine genauere Betrachtung von (2.37) auch Einsichten über die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen und über die Existenz von Oberflächenströmen. Solange die Materialeigenschaften der Medien in den Regionen 1 und 2 endlich sind, ist das elektromagnetische Feld unter der Bedingung der Quellenfreiheit kontinuierlich. Daraus folgt, dass reine erzeugte Oberflächenströme nur an unendlich leitfähigen Oberflächen existieren können. In einem unendlich leitfähigen Medium ist das elektrische und magnetische Feld gleich Null. Damit lassen sich die Bedingungen am Rand eines solchen Mediums für das äußere Feld nach (2.37) in sehr einfacher Weise aufschreiben.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_o^e \\ -\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right\} \text{ an einem perfekten elektrischen Leiter} \quad (2.38a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} = 0 \\ -\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{J}_o^m \end{array} \right\} \text{ an einem perfekten magnetischen Leiter} \quad (2.38b)$$

Ein perfekter magnetischer Leiter (engl. *perfect magnetic conductor* (PMC)) ist dabei lediglich ein theoretisches Konzept, da dessen physikalische Existenz magnetische Ladungen voraussetzen würde, die im Rahmen dieser Arbeit aus Gründen der Symmetrie der Maxwell-Gleichungen als vorhanden angenommen werden. Für eine nähere Erläuterung sei auf den Abschnitt 2.2 verwiesen. Der Nutzen des Konzepts unendlicher Leitfähigkeit liegt in der Einfachheit der Gleichungen (2.38) begründet. Sie erlauben die Anwendung von Methoden zur Lösung komplexer Probleme über die Konstruktion äquivalenter Probleme (vgl. Abschnitt 2.4.5 und 3.3.1).

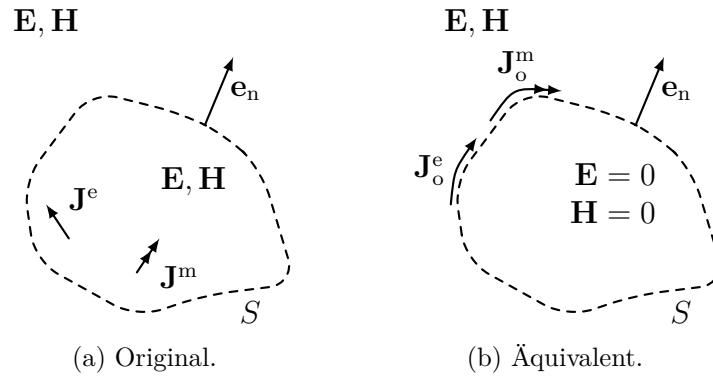


Abbildung 2.4: Darstellung des Äquivalenzprinzips

2.4 Methoden und Prinzipien

2.4.1 Äquivalenz-Prinzip

Das Äquivalenz-Prinzip beschreibt eine Eigenschaft der Beziehungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und dessen Quellen. Es ist insbesondere nützlich bei der Behandlung der Streuung elektromagnetischer Felder an Materie und findet daher auch in dieser Arbeit Anwendung. Es besagt:

Zwei Quellen, die in einer Region des Raumes die selben Felder erzeugen, sind äquivalent innerhalb dieser Region. [Har01]

Dies bedeutet, für die Kenntnis der elektromagnetischen Felder innerhalb eines Volumens muss nicht das gesamte Feld bekannt sein. Statt dessen genügt es, Quellen auf einer gedachten Oberfläche zu betrachten, die das Feld im interessanten Volumen erzeugen. Diese gedachten Quellen bilden das äußere Feld ab und sind daher diesem äquivalent. Das Äquivalenz-Prinzip beruht im Wesentlichen auf den Gesetzmäßigkeiten, die in Abschnitt 2.3.1 und 2.4.3 erläutert werden. Zur Erläuterung soll ein in Abbildung 2.4a dargestelltes Beispiel dienen. In einem homogenen Medium existiere eine Quelle und die dazugehörigen Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} . Nun fügt man eine geschlossene Oberfläche S mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor \mathbf{e}_n hinzu. So lässt sich für den äußeren Bereich von S , mithilfe eines beliebigen inneren Feldes und den zum Einhalten der Randbedingungen Gleichungen (2.37) nötigen Oberflächenströmen \mathbf{J}_o^e und \mathbf{J}_o^m , ein äquivalentes Problem konstruieren. Außerhalb von S sind \mathbf{J}_o^e und \mathbf{J}_o^m die Quellen, die das ursprüngliche Feld erzeugen. Der einfachste Fall ist der Fall des Nullfeldes innerhalb von S . Dann gilt nach (2.37)

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_o^e \quad (2.39)$$

$$-\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{J}_o^m. \quad (2.40)$$

Damit ist das Problem nicht mehr die Bestimmung der Felder der ursprünglichen Quelle \mathbf{J}^e bzw. \mathbf{J}^m , sondern das äquivalente Problem der Bestimmung der Felder anhand deren tangentialer Komponenten auf S .

2.4.2 Energieerhaltung

Die Eigenschaft eines theoretischen Modells, in dem die Energieerhaltung gilt, ist ein wichtiges Merkmal zur Gültigkeit des Modells in der Praxis. Energieerhaltung ist das grundlegende physikalische Prinzip, dass Energie weder erzeugt, noch vernichtet werden kann, sondern nur seine Form verändert. Bezogen auf die elektromagnetische Feldtheorie lässt sich das Gesetz der Energieerhaltung wie folgt formulieren:

Die Summe der in einem Volumen enthaltenen Leistung und der aus dem Volumen abgestrahlten Leistung muss verschwinden.

Diese Aussage lässt sich direkt aus den Maxwell-Gleichungen (2.3a) und (2.3c) ableiten. Multipliziert man (2.3a) mit \mathbf{H}^* und das komplex Konjugierte von (2.3c) mit \mathbf{E} und bildet anschließend die Differenz aus beiden Gleichungen, erhält man

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* - \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_t^{e*} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_t^m. \quad (2.41)$$

Eine allgemeine Beziehung der Vektoranalysis besagt, dass sich der linke Ausdruck von (2.41) auch schreiben lässt als $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$. Damit wird aus (2.41)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_t^{e*} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_t^m = 0. \quad (2.42)$$

Die Gleichung (2.42) ist die differenzielle Form einer Leistungsbilanz. Der erste Term der Summe steht für die abgestrahlte Leistung aus einem Punkt. Genauer gesagt ist er der Leistungsdichtefluss, der den betrachteten Punkt verlässt. Der Ausdruck in den Klammern wird auch Leitungsdichte oder Poynting-Vektor \mathbf{S} genannt.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (2.43)$$

Der zweite Term von (2.42) steht für die Leistung, die im elektrischen Teil der Felder und Ströme gespeichert ist, während der letzte Term für die Leistung steht, die im magnetischen Teil der Felder und Ströme gespeichert ist. Eine anschaulichere Interpretation ergibt sich, wenn man nun (2.42) über ein Volumen integriert und auf den ersten Summanden den Integralsatz von Gauss anwendet.

$$\oint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} + \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_t^{e*} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_t^m) dv = 0 \quad (2.44)$$

Man erhält so eine Leistungsbilanz in Integralform. Das erste Integral ist die Leistung, die durch den Rand des Integrationsgebietes V tritt, d. h. es ist die abgestrahlte komplexe Leistung P_a . Das zweite Integral repräsentiert die Verluste durch den Leitungsstromanteil an \mathbf{J}_t^e und die gespeicherte Leistung durch die Verschiebungsstromanteile an \mathbf{J}_t^e und \mathbf{J}_t^m .

2.4.3 Eindeutigkeit

Der Begriff der Eindeutigkeit im Sinne der elektromagnetischen Feldtheorie bezieht sich auf die Auswahl der *richtigen* Lösung aus der Menge der möglichen Lösungen der Wellengleichung. Zur Verdeutlichung des Konzepts soll der Fall der Punktquelle im Freiraum dienen. In diesem Fall ist sowohl die einlaufende als auch die auslaufende Welle, unterschieden durch das Vorzeichen im Exponenten, eine Lösung der Wellengleichung (vgl. Abschnitt 2.5.1). Man kann mit Hilfe der Kausalität und der Erfahrung in der Praxis eine Lösung wählen, da eine harmonische Punktquelle im Freiraum eine Welle abstrahlt und nicht einfängt. Diese Wahl lässt sich jedoch auch mit Hilfe des Konzepts der Eindeutigkeit treffen, was die Behandlung komplizierter Probleme auf ein sichereres Fundament stellt. Die größte Bedeutung der Eindeutigkeit liegt jedoch in der Herstellung einer eindeutigen Beziehung zwischen dem Feld und der zugehörigen Quelle. Eindeutigkeit liegt nicht in jedem Fall vor und muss häufig durch geschicktes Konstruieren hergestellt werden.

Um einen mathematischen Ausdruck für die Eindeutigkeit zu erhalten, nehme man die Quellen \mathbf{J}^e und \mathbf{J}^m im Inneren einer geschlossenen Oberfläche S an. Ferner nehme man an, dass zwei mögliche Lösungen $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ und $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$ im Inneren von S existieren. In einem linearen Medium gilt dann

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2 \quad (2.45a)$$

und

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}^1 - \mathbf{H}^2. \quad (2.45b)$$

Die Bedingungen für Eindeutigkeit sind nun solche, die zwangsläufig dazu führen, dass $\Delta \mathbf{E}$ und $\Delta \mathbf{H}$ verschwinden. Diese Bedingungen ergeben sich aus der Energieerhaltung der Felder (vgl. Abschnitt 2.4.2) wie im Folgenden gezeigt wird. Beide Lösungen müssen die Maxwell-Gleichungen (2.3a) und (2.3c) erfüllen. Da beide Lösungen durch dieselben Quellen erzeugt werden, ergibt sich dann für die Differenzen-Felder $\Delta \mathbf{E}$ und $\Delta \mathbf{H}$ innerhalb von S

$$-\nabla \times \Delta \mathbf{E} = j\omega\mu\Delta \mathbf{H} \quad (2.46)$$

$$\nabla \times \Delta \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\Delta \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

Die Differenzfelder sind also quellenfrei, das heißt es treten nur die Felder selbst und die Verschiebungsströme auf. In diesem Fall vereinfacht sich (2.44) zu

$$\oint \Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} + \int (-j\omega\varepsilon^*|\Delta \mathbf{E}|^2 + j\omega\mu|\Delta \mathbf{H}|^2) dv = 0. \quad (2.48)$$

Falls das erste Integral in (2.48) verschwindet,

$$\oint \Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.49a)$$

muss das zweite Integral ebenfalls verschwinden.

$$\int (\Re \{j\omega\varepsilon\} |\Delta \mathbf{E}|^2 + \Re \{j\omega\mu\} |\Delta \mathbf{H}|^2) dv = 0 \quad (2.49b)$$

$$\int (-\Im \{j\omega\varepsilon\} |\Delta \mathbf{E}|^2 + \Im \{j\omega\mu\} |\Delta \mathbf{H}|^2) dv = 0 \quad (2.49c)$$

Für dissipative Medien gilt

$$\left. \begin{array}{l} \Re \{j\omega\varepsilon\} \\ \Re \{j\omega\mu\} \end{array} \right\} > 0 \quad , \text{ da } \varepsilon \text{ und } \mu \text{ komplex sind.} \quad (2.50)$$

Damit ist (2.49b) in verlustbehafteten Medien nur erfüllt, wenn $\Delta \mathbf{E}$ und $\Delta \mathbf{H}$ überall in S verschwinden, falls (2.49a) erfüllt ist. Letzteres ist gegeben, wenn die Randbedingungen der Felder erfüllt sind, denn wenn $\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}$ überall auf dem Rand von S festgelegt ist, gilt $\mathbf{e}_n \times \Delta \mathbf{E} = 0$, womit (2.49a) erfüllt ist. Eine analoge Aussage trifft auf das magnetische Feld zu. Streng genommen trifft dieser Nachweis der Eindeutigkeit nur für verlustbehaftete Medien zu. Für verlustlose Medien ist (2.49b) automatisch erfüllt. In diesem Fall sind theoretisch mehrere Lösungen möglich. Man kann das System als *entartet* bezeichnen. Betrachtet man jedoch verlustlose Medien als Medien mit infinitesimal kleinen Verlusten, kann der Begriff der Eindeutigkeit auch auf verlustlose Medien angewandt werden.

2.4.4 Dualität

Wenn sich unterschiedliche physikalische Größen mit den selben mathematischen Gleichungen beschreiben lassen, spricht man von *Dualität*. Betrachtet man die Maxwell-Gleichungen mit der Erweiterung um die magnetische Stromdichte, kann man von einer Dualität zwischen den elektrischen und magnetischen Größen sprechen. Die Tabelle 2.1 fasst die einzelnen dualen Größen zusammen. Nützlich ist diese Eigenschaft im Sinne dieser Arbeit, weil sie es erlaubt die Lösung für magnetische Quellen eines spezifischen Problems direkt in die Lösung für elektrische Quellen des selben Problems zu übertragen.

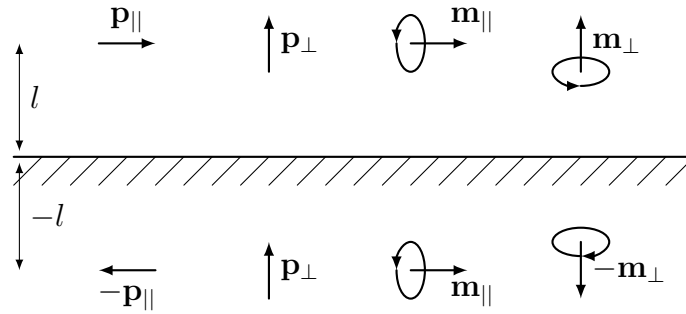


Abbildung 2.5: Spiegelung elektrischer und magnetischer Momente an einer elektrisch perfekt leitenden Ebene

Einfach gesagt, genügt es, sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf einen Quellentyp während der theoretischen Betrachtungen zu beschränken, um alle wesentlichen Eigenschaften des elektromagnetischen Problems zu erfassen.

Tabelle 2.1: Duale Beziehungen bei Vertauschung der Quellenarten

elektrische Quelle	\leftrightarrow	magnetische Quelle
\mathbf{E}		\mathbf{H}
\mathbf{H}		$-\mathbf{E}$
\mathbf{J}^e		\mathbf{J}^m
\mathbf{A}_e		\mathbf{A}_m
ε		μ

2.4.5 Spiegelladungsmethode

Die Spiegelladungsmethode ist ein Hilfsmittel zur Bestimmung von Feldern in Anwesenheit perfekt leitfähiger Ebenen. Sie beruht auf dem Äquivalenzprinzip (vgl. Abschnitt 2.4.1) und der Eindeutigkeit der Feldgleichungen. Ihre Aussage ist, dass das Feld vor der Ebene, das von einer Quelle in Anwesenheit einer perfekt leitenden Ebene erzeugt wird, dem Feld entspricht, das von der Quelle und deren Spiegelung an der Ebene im Freiraum erzeugt werden würde. Entscheidend für die Bestimmung der gespiegelten Quelle ist das Einhalten der Randbedingungen an der Ebene. Je nach Quellentyp und Orientierung ergeben sich dafür verschiedene nötige Spiegelquellen, wie sie in der Abb. 2.5 zusammengefasst dargestellt sind.

2.4.6 Induktionsprinzip

Das Induktionsprinzip ist eng mit dem Äquivalenzprinzip (siehe Abschnitt 2.4.1) verwandt. Es dient insbesondere der formalen Beschreibung von Streuprozessen elektroma-

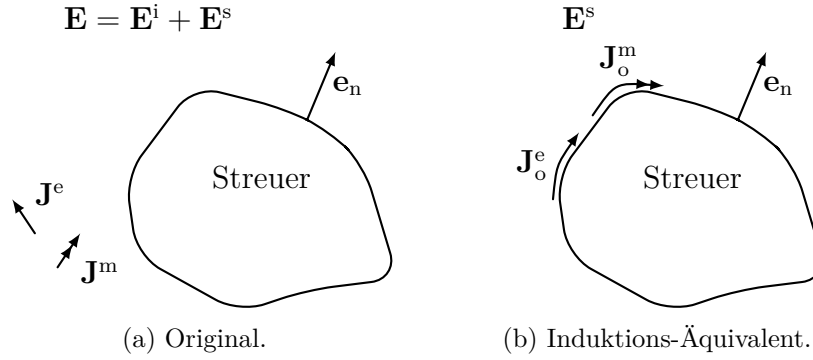


Abbildung 2.6: Darstellung des Induktionsprinzips.

gnetischer Felder an Objekten. Die Abbildung 2.6a zeigt das Originalproblem, während Abb. 2.6b das äquivalente Problem im Sinne des Induktionsprinzips illustriert. Das gesamte Feld im Beisein eines streuenden Objektes kann als Superposition eines einfallenden Feldes \mathbf{E}^i , das existieren würde, wenn das Objekt nicht vorhanden wäre und eines gestreuten Feldes

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{E} - \mathbf{E}^i \quad (2.51a)$$

$$\mathbf{H}^s = \mathbf{H} - \mathbf{H}^i, \quad (2.51b)$$

das die Differenz des tatsächlichen und des einfallenden Feldes darstellt, aufgefasst werden. Das Feld \mathbf{E}^s ist die gesuchte Lösung des Streuproblems. Da das gesamte Feld \mathbf{E} und das einfallende Feld \mathbf{E}^i im Originalproblem außerhalb des Objekts die selben Quellen haben, muss \mathbf{E}^s dort quellenfrei sein. Wie jedes Feld, muss es aber eine Quelle besitzen. Dies sind die von \mathbf{E}^i im Objekt hervorgerufenen Quellen oder Oberflächenstromdichten, die sich aus den geforderten Randbedingungen der Streuung ergeben. Damit diese Quellen jedoch nicht vom unbekanntem Gesamtfeld \mathbf{E} abhängen, wie es bei der Anwendung des Äquivalenzprinzips (vgl. Abschnitt 2.4.1) der Fall wäre, kann das äquivalente Problem aus Abb. 2.6b konstruiert werden. Innerhalb des Objektes müssen die Quellen das Gesamtfeld \mathbf{E} erzeugen. Außerhalb erzeugen sie \mathbf{E}^s . Damit ergibt sich nach (2.37)

$$\mathbf{J}_o^e = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}^s - \mathbf{H}) \quad (2.52a)$$

$$\mathbf{J}_o^m = -\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}^s - \mathbf{E}) \quad (2.52b)$$

und mit (2.51) schließlich

$$\mathbf{J}_o^e = -\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}^i \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{J}_o^m = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}^i. \quad (2.53b)$$

So können die Quellen, die das gesuchte Feld \mathbf{E}^s erzeugen, als bekannt betrachtet werden. Allerdings erzeugen sie \mathbf{E}^s unter den Abstrahlungsbedingungen des Streuers. Dazu ist die Greensche Funktion des spezifischen Streuproblems nötig, die im Allgemeinen nicht als bekannt betrachtet werden kann, sondern auf häufig komplexe Weise konstruiert werden muss.

2.4.7 Babinet-Prinzip

Der französische Physiker Jacques Babinet stellte 1837 folgendes Theorem auf [Bal05, S. 697]:

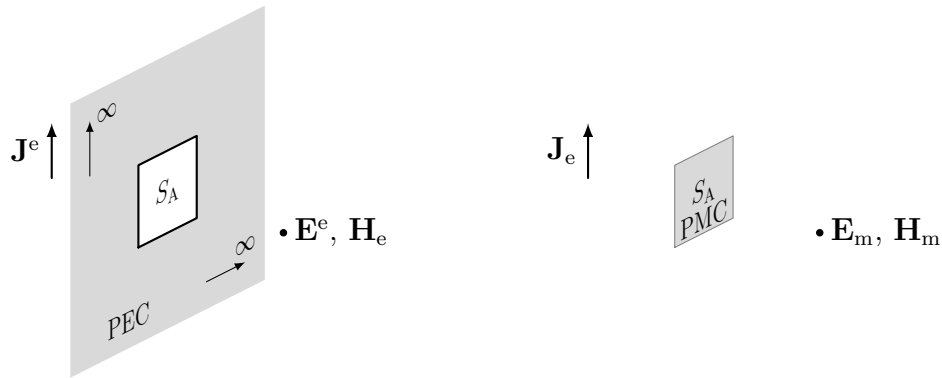
Wenn das Streufeld hinter einem Schirm mit einer Apertur zu dem Feld einer komplementären Struktur addiert wird, ist die Summe äquivalent dem Feld, das sich ohne Schirm ergibt.

Anwendung findet diese Aussage vor allem in der Optik. So ist mit dem Streufeld die ortsabhängige Intensität des Lichtes gemeint. Für die elektromagnetische Streutheorie muss das Theorem um die in der Optik vernachlässigten Polarisationsseigenschaften erweitert werden. Die Bedeutung lässt sich durch das Beispiel einer Apertur in einer unendlichen Ebene verdeutlichen, wie in den Abb. 2.7 dargestellt ist. Nimmt man eine elektrische Quelle \mathbf{J}^e im Freiraum an, ergeben sich an einem Punkt P ein elektrisches Feld \mathbf{E}_0 und ein magnetisches Feld \mathbf{H}_0 . Befindet sich eine unendliche und perfekt leitfähige Ebene mit einer Apertur zwischen dem Ort der Quelle und P , ergeben sich die Felder \mathbf{E}_e und \mathbf{H}_e (vgl. Abb. 2.7a). Werden die Ebene und die Apertur nun durch einen komplementären perfekten magnetischen Leiter ersetzt, werden am Ort P die Felder \mathbf{E}_m und \mathbf{H}_m erzeugt (vgl. Abb. 2.7b). Nach dem Babinet-Prinzip folgt nun

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m \quad (2.54a)$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_m . \quad (2.54b)$$

Geht man davon aus, dass die Felder \mathbf{E}_0 und \mathbf{H}_0 für den Freiraum bekannt sind, können mit (2.54) die Felder für die Apertur durch das Lösen des Problems der magnetisch perfekt leitenden Fläche bestimmt werden, was in vielen Fällen einfacher ist. Das Babinet-Prinzip dient so einer Veranschaulichung der Konsequenzen aus den Randbedingungen der Felder an Ebenen, auf die im Abschnitt 2.3.1 eingegangen wird.



(a) Apertur in elektrisch perfekt leitendem, unendlichen Schirm.

(b) magnetisch perfekt leitende, komplementäre Fläche.

Abbildung 2.7: Elektrische Quelle im Freiraum und Äquivalenzen nach dem Babinet-Prinzip.

2.5 Greensche Funktionen

Wie im Abschnitt 2.1 dargestellt wird, führen die Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich zu einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, auch Helmholtz-Gleichung oder Wellengleichung genannt (vgl. (2.11) und (2.13)). Zur Lösung dieser Differentialgleichung unter verschiedenen Randbedingungen und Anregungen hat sich die allgemeine Methode der Greenschen Funktionen etabliert [TIK97]. Diese stellt ein Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen unter beliebigen Inhomogenitäten dar. Wenn L ein linearer Differentialoperator ist und f und u zwei Funktionen sind für die gilt

$$Lu(x) = f(x'), \quad (2.55)$$

dann kann f als die Anregung oder Inhomogenität und u die Antwort oder Lösung des Systems, das durch L beschrieben wird, aufgefasst werden. In dem Fall ist G die zu L assoziierte Greensche Funktion, wenn die Gleichung

$$LG(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.56)$$

und die jeweiligen Randbedingungen erfüllt sind. Dabei ist δ die Delta-Distribution. Multipliziert man nun Gleichung (2.55) mit G und integriert anschließend über x' , erhält man unter Ausnutzung der Linearität von L und der Eigenschaften der Delta-Distribution einen Integralausdruck für die Lösung u bei der Inhomogenität f .

$$G(x, x')Lu(x) = G(x, x')f(x') \quad (2.57)$$

$$\int \underbrace{LG(x, x')}_{\delta(x-x')} u(x) dx' = \int G(x, x') f(x') dx' \quad (2.58)$$

$$u(x) = \int G(x, x') f(x') dx' \quad (2.59)$$

2.5.1 Anwendung auf die Helmholtzgleichung

Sei $L = (\nabla^2 + k)$ der Helmholtz-Operator, dann ist die Greensche Funktion des Vektorpotentials die Lösung der Helmholtz-Gleichung für eine Punktquelle.

$$(\nabla^2 + k^2) G^{\mathbf{A}_e} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.60a)$$

$$(\nabla^2 + k^2) G^{\mathbf{A}_m} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.60b)$$

Im Freiraum sind $G_f^{\mathbf{A}_e}$ und $G_f^{\mathbf{A}_m}$ dann

$$G_f^{\mathbf{A}_e} = \frac{e^{\pm jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.61a)$$

und

$$G_f^{\mathbf{A}_m} = \frac{e^{\pm jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.61b)$$

Der Exponent in (2.61) kann ein positives oder ein negatives Vorzeichen aufweisen. Sowohl die einlaufende als auch die abgestrahlte Welle sind eine Lösung von (2.60). Man nennt (2.61) mit negativem Exponenten die retardierte Lösung und entsprechend mit positivem Vorzeichen die avanchierte Lösung. Eine Einschränkung auf eine Lösung ist insofern sinnvoll, da dies eine Ursache-Wirkungs-Beziehung zwischen der Quelle und dem Feld herstellt. Wird die Quelle von einer einlaufenden Welle erzeugt, oder erzeugt die Quelle eine auslaufende Welle? Fordert man die Eindeutigkeit der Lösung, ergibt sich aus Überlegungen, die auf den Ausführungen im Abschnitt 2.4.3 beruhen, dass die retardierte Lösung gewählt werden muss. Vergleicht man nun (2.11) und (2.13) mit (2.59) ergeben sich die bekannten Gleichungen für das elektrische und magnetische Vektorpotential

$$\mathbf{A}_e = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}^e(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{A}_m = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}^m(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.62b)$$

für eine beliebige Verteilung der Quellen im Freiraum. Kennt man also die Art der Quelle und findet die Greensche Funktion, die die Randbedingungen der Wellenausbreitung erfüllt, erlaubt einem (2.62), das zugehörige Vektorpotential und damit die abgestrahlten Felder zu bestimmen. Bei Streuproblemen sind jedoch die Quellen häufig nicht a priori bekannt, da sie vom einfallenden Feld und den Randbedingungen abhängen. Außerdem müs-

sen die Greenschen Funktionen erneut bestimmt werden, wenn sich die Randbedingungen ändern, z. B. bei der Abstrahlung in einem Hohlraumresonator. Diese Funktionen können sehr kompliziert werden und auf verschiedene Weisen gefunden und dargestellt werden. Darauf wird im Abschnitt 3.3.1 näher eingegangen. Sobald die Greensche Funktion und die Quellen bestimmt sind, muss das Integral in (2.62) ausgewertet werden, was aufgrund der häufig örtlich singulären Greenschen Funktion nicht trivial ist. Im Abschnitt 3.2.1 wird auf ein analytisches Verfahren zur Lösung dieser Problematik eingegangen.

2.5.2 Assoziierte Greensche Funktionen

In der Literatur wird üblicherweise der Ausdruck (2.61) als Greensche Funktion bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff etwas weiter gefasst. Es erweist sich später als vorteilhaft, neben der Greenschen Funktion für das Vektorpotential auch Greensche Funktionen für das elektrische und magnetische Feld einzuführen. Fasst man (2.61) als das Vektorpotential einer Punktquelle auf, ergeben sich so nach (2.12) und (2.14) die allgemeinen Zusammenhänge

$$G^{\mathbf{H}_e} = \nabla \times G^{\mathbf{A}_e} \quad (2.63a)$$

$$G^{\mathbf{E}_e} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla \cdot G^{\mathbf{A}_e} - j\omega\mu G^{\mathbf{A}_e} \quad (2.63b)$$

und

$$G^{\mathbf{E}_m} = -\nabla \times G^{\mathbf{A}_m} \quad (2.64a)$$

$$G^{\mathbf{H}_m} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot G^{\mathbf{A}_m} - j\omega\epsilon G^{\mathbf{A}_m}. \quad (2.64b)$$

Hier wurde bereits unterschieden, ob das jeweilige Feld mit einer magnetischen oder einer elektrischen Quelle wechselwirkt. Es ist sinnvoll, eine solche Unterscheidung zu treffen, da sich die Randbedingungen und damit die Lösungen der Helmholtz-Gleichung im Allgemeinen für beide Fälle unterscheiden. Dies gilt insbesondere für den Hohlraumresonator. Die Tabelle 2.2 soll einen Überblick geben und die Systematik klarstellen. Ferner werfen

Tabelle 2.2: Überblick der Nomenklatur der Greenschen Funktionen

Greensche Funktion für das	Vektorpotential	elektrische Feld	magnetische Feld
einer magnetische Quelle	$G^{\mathbf{A}_m}$	$G^{\mathbf{E}_m}$	$G^{\mathbf{H}_m}$
einer elektrischen Quelle	$G^{\mathbf{A}_e}$	$G^{\mathbf{E}_e}$	$G^{\mathbf{H}_e}$

(2.63) und (2.64) die Frage auf, was unter der Rotation oder Divergenz einer skalaren Größe zu verstehen ist. Diese Frage wird im Abschnitt 2.5.3 geklärt.

2.5.3 Dyadische Greensche Funktionen

Die Greensche Funktion in (2.62) stellt die Lösung der Helmholtz-Gleichung (2.11) für den Spezialfall des Freiraums dar, was als Ursache für ihre Eigenschaft einer skalaren Größe verstanden werden kann. Allgemein muss die Greensche Funktion in (2.62) jede Komponente des Quellvektors mit jeder Komponente des Vektorpotentials in Beziehung setzen. Nur im Freiraum sind die Randbedingungen für die Greensche Funktion richtungsunabhängig, und selbige als skalare Größe darstellbar. Daher muss für den allgemeinen Fall die Lösung von (2.60) als dyadische Größe verstanden werden. Für ein kartesisches Koordinatensystem ergibt sich so

$$G^{\mathbf{A}} \underset{\text{skalar}}{\implies} \overline{\overline{G}}^{\mathbf{A}} \underset{\text{dyadisch}}{\quad} \quad (2.65)$$

$$\text{mit } \overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Die einzelnen Elemente G_{ij} von $\overline{\overline{G}}$ bilden die Wechselwirkung der Quellkomponente J_j mit der Feldkomponente F_i ab. So kann die Abhängigkeit jeder Feldkomponente von jeder Quellenkomponente dargestellt werden. In den Gleichungen (2.63) und (2.64) werden Differentialoperatoren auf Greensche Funktionen angewandt. Wenn diese Funktionen dyadische statt skalare oder vektorielle Größen sind, muss geklärt werden, wie diese Operatoren auf die Funktionen wirken. Dazu ist es hilfreich, Operationen mit skalaren und vektoriellen Größen auf Operationen mit dyadischen Größen zu verallgemeinern. Damit ist gemeint, dass beispielsweise ein Produkt zwischen einem Skalar S und einer Matrix

$$S \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

auch als Matrixprodukt einer Matrix und einer entsprechenden Diagonalmatrix verstanden werden kann. Auch die Operation einer vektoriellen Größe \mathbf{S} kann mit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_x & S_y & S_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_x G_{xx} + S_y G_{yx} + S_z G_{zx} \\ S_x G_{xy} + S_y G_{yy} + S_z G_{zy} \\ S_x G_{xz} + S_y G_{yz} + S_z G_{zz} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.68)$$

dargestellt werden. Damit ist die Divergenz einer dyadischen Größe

$$\nabla \cdot \overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} G_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} G_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} G_{zx} \\ \frac{\partial}{\partial x} G_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} G_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} G_{zy} \\ \frac{\partial}{\partial x} G_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} G_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} G_{zz} \end{pmatrix}^T = \overline{G} \quad (2.70)$$

ein transponierter Vektor. In (2.63b) und (2.64b) wird erst die Divergenz und anschließend der Gradient der Greenschen Funktion gebildet. Verallgemeinert auf eine dyadische Größe ist also der Gradient auf den sich ergebenden Zeilenvektor in (2.70) anzuwenden. So ergibt sich

$$\nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (\overline{G}_x \quad \overline{G}_y \quad \overline{G}_z). \quad (2.71)$$

In kanonischen Problemen kann die dyadische Greensche Funktion häufig als Diagonal-Matrix aufgeschrieben werden. Für den Fall eines quaderförmigen Hohlraumresonators wird das kartesische Koordinatensystem so festgelegt, dass es mit den räumlichen Dimensionen des Resonators zusammen fällt. Dann vereinfacht sich (2.70) und (2.71) lässt sich explizit schreiben als

$$\nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{xx} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{yy} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} G_{zz} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} G_{xx} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_{yy} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{zz} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} G_{xx} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} G_{yy} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Für die dyadische Verallgemeinerung von (2.64a) und (2.63a) muss die Rotation eines Tensors zweiter Ordnung bestimmt werden. Dies gelingt am einfachsten durch die Erkenntnis, dass sich das Kreuzprodukt zweier Vektoren auch schreiben lässt als

$$\mathbf{F} \times \mathbf{S} = \begin{pmatrix} F_y S_z - F_z S_y \\ F_z S_x - F_x S_z \\ F_x S_y - F_y S_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Wendet man diese Schreibweise des Kreuzprodukts als Tensor auf die Rotation einer Dyade an, ergibt sich

$$\nabla \times \overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

was sich für den Fall eines diagonalen Tensors ($G_{ij} = 0$ für $i \neq j$) vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \nabla \times \overline{\overline{G}} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} G_{yy} & \frac{\partial}{\partial y} G_{zz} \\ \frac{\partial}{\partial z} G_{xx} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} G_{zz} \\ -\frac{\partial}{\partial y} G_{xx} & \frac{\partial}{\partial x} G_{yy} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Mit (2.72) und (2.75) können die Gleichungen (2.63) und (2.64) für vom Freiraum abweichende Umgebungen verallgemeinert werden.

2.6 Multipol-Entwicklung

Um die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die sich aus den Beziehungen zwischen Quellen und Feldern, wie sie (2.62) darstellen, ergeben, direkter darzustellen, ist es sinnvoll, Ausdrücke der allgemeinen Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_V \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' \quad (2.76)$$

näher zu untersuchen. Die folgenden Überlegungen beruhen im Wesentlichen auf [Bla07]. Wenn die Ableitungen von Θ kontinuierlich sind, kann Θ als Taylor-Entwicklung

$$\Theta(\mathbf{r}') = \Theta_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}'} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{r}'} x_i x_j \cdots \quad (2.77)$$

an der Stelle \mathbf{r}' dargestellt werden. Setzt man nun die Entwicklung (2.77) in (2.76) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \iiint_V \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' &= \Theta_0 \iiint_V \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}'} \iiint_V x_i \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{r}'} \iiint_V x_i x_j \mathbf{J} \, d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite lässt sich umformen zu

$$\iiint_V \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \iiint_V \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \iiint_V \nabla x_i \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r}', \quad (2.79)$$

wobei der Summationsindex i die drei Raumrichtungen repräsentiert. Für die jeweilige Raumrichtung kann über den letzten Term in (2.79) die Aussage

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla x_i \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' &= \iiint_V \nabla \cdot (x_i \mathbf{J}) \, d\mathbf{r}' - \iiint_V x_i \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' \\ &= \iint_S x_i \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' - \iiint_V x_i \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.80)$$

getroffen werden. Bei der Umformung der ersten zur zweiten Zeile wurde der Satz von Gauss ausgenutzt. Für die Integranden der letzten beiden Integrale in (2.80) gilt die Kontinuitätsgleichung (vgl. (2.16))

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho \quad (2.81)$$

und deren Oberflächenäquivalent

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{J} = j\omega\rho^\circ. \quad (2.82)$$

Mit (2.81) und (2.80) lässt sich (2.79) umschreiben zu

$$\iiint_V \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' = j\omega \left(\underbrace{\iint_S \rho^\circ \mathbf{r} \, d\mathbf{r}' + \iiint_V \rho \mathbf{r} \, d\mathbf{r}'}_{\mathbf{e}\mathbf{p}} \right). \quad (2.83)$$

Der Ausdruck in den Klammern in (2.83) wird als elektrisches Dipolmoment \mathbf{p} bezeichnet. Eine Analyse des zweiten Terms auf der rechten Seite von (2.78) gestaltet sich bereits etwas komplizierter. Der erste Schritt ist eine geschickte Umformung.

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}'} \iiint_V x_i \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}'} \iiint_V (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}) \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}'}}_{\nabla_{\mathbf{r}'} \Theta} \cdot \iiint_V \mathbf{r} \circ \mathbf{J} \, d\mathbf{r}' \quad (2.84)$$

Der letzte Integrand auf der rechten Seite von (2.84) ist ein dyadisches Produkt, das nach allgemeinen Gesetzen der Matrizen-Operationen in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgesplittet werden kann.

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \circ \mathbf{J} - \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r} \circ \mathbf{J} + \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) \quad (2.85)$$

Betrachtet man vorerst nur den ersten, antisymmetrischen Term auf der rechten Seite von (2.85) zusammen mit (2.84), erhält man mit Hilfe der allgemeinen Vektorbeziehung $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \circ \mathbf{c} - \mathbf{c} \circ \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$$\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}'} \Theta \cdot \iiint (\mathbf{r} \circ \mathbf{J} - \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) \, d\mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}'} \Theta \times \underbrace{\iiint \mathbf{r} \times \mathbf{J} \, d\mathbf{r}'}_{\mathbf{m}}. \quad (2.86)$$

Der Integralausdruck auf der rechten Seite von (2.86) wird als magnetisches Dipolmoment \mathbf{m} bezeichnet. Der zweite, symmetrische Term von (2.85) kann ähnlich wie (2.79) behandelt werden. Schreibt man den dyadischen Integranden in seiner Basis-Dyaden-Form, lässt sich der Ausdruck wie folgt umformen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{r} \circ \mathbf{J} + \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{r} \circ \mathbf{J} + \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i \mathbf{J} + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) \mathbf{e}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(x_i \underbrace{(\mathbf{e}_j \mathbf{J})}_{\nabla x_j \cdot \mathbf{J}} + x_j \underbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J})}_{\nabla x_i \cdot \mathbf{J}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i \nabla x_j + x_j \nabla x_i) \cdot \mathbf{J} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \nabla (x_i x_j) \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Das Volumenintegral des letzten Terms in (2.87) entspricht strukturell dem Term auf der linken Seite von (2.80) und kann wie dort beschrieben, umgeformt werden. Das Ergebnis ähnelt dann (2.83).

$$\frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{r} \circ \mathbf{J} + \mathbf{J} \circ \mathbf{r}) \, d\mathbf{r}' = \frac{j\omega}{2} \underbrace{\left(\iint_S \rho^o \mathbf{r} \circ \mathbf{r} \, d\mathbf{r}' + \iiint_V \rho \mathbf{r} \circ \mathbf{r} \, d\mathbf{r}' \right)}_{\bar{q}_e} \quad (2.88)$$

Der Term in den Klammern in (2.88) wird als elektrisches Quadropolmoment \bar{q}_e bezeichnet. Eine detaillierte Behandlung des dritten Terms in (2.78) würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher seien hier nur die Ergebnisse aus [Smy36] übernommen.

$$\iiint_V x_i \mathbf{J} x_j \, d\mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \bar{q}_m) - \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \times (\mathbf{e}_i \cdot \bar{q}_m) - \mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{p}_2) - \mathbf{e}_j \times (\mathbf{e}_i \times \mathbf{p}_2) \quad (2.89)$$

Dabei sind \mathbf{p}_2 das elektrische Dipolmoment 2. Ordnung und \bar{q}_m das magnetische Quadrupolmoment.

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{6} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} \times \mathbf{r} \, d\mathbf{r}' \quad (2.90)$$

$$\bar{q}_m = \frac{1}{3} \iiint_V (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) \circ \mathbf{r} + \mathbf{r} \circ (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) \, d\mathbf{r}' \quad (2.91)$$

Fasst man die Aussagen dieses Abschnitts zusammen, lässt sich (2.76) ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \underbrace{j\omega\varepsilon\mathbf{p}\Theta_0}_{0. \text{ Ordnung}} - \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'}\Theta \times \mathbf{m} + \frac{j\omega}{2}\nabla_{\mathbf{r}'}\Theta \cdot \bar{q}_e}_{1. \text{ Ordnung}} \\ & + \underbrace{\left(\bar{I}\nabla_{\mathbf{r}'}^2\right) \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{1}{2}\nabla \times (\nabla_{\mathbf{r}'}\Theta \cdot \bar{q}_m)}_{2. \text{ Ordnung}} + \dots \end{aligned} \quad (2.92)$$

2.7 Abstrahlung im Freiraum

Die Felder von Quellen im Freiraum werden mit Hilfe des Vektorpotentials durch (2.62) beschrieben. Eine Auswertung des Integrals ist je nach den Eigenschaften des Quellterms \mathbf{J} jedoch schwierig. Nimmt man an, die Quellen seien bekannt, ergeben sich beim Berechnen des Integrals z. B. Schwierigkeiten sobald sich \mathbf{r} und \mathbf{r}' nahe kommen, da dann eine Singularität auftritt. Eine nützliche Methode ist in diesem Fall, den Ausdruck $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ mit Blick auf die Abb. 2.8 wie folgt zu entwickeln [Bla07].

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= |\mathbf{r}| \sqrt{1 + \left(\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|}\right)^2 - 2\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi} \\ &= |\mathbf{r}| - |\mathbf{r}'| \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{2|\mathbf{r}|} \sin^2 \phi + \dots \end{aligned} \quad (2.93)$$

Nun erlaubt ein Einsetzen von (2.93) in den Exponenten in (2.62)

$$\mathbf{A} = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk\left(|\mathbf{r} - |\mathbf{r}'| \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{2|\mathbf{r}|} \sin^2 \phi + \dots\right)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\mathbf{r}' \quad (2.94)$$

eine allgemeine Analyse der Struktur elektromagnetischer Felder beliebiger Quellen. Dazu werden drei charakteristische Feldbereiche unterschieden, die in den nachfolgenden Abschnitten kurz erläutert werden.

2.7.1 Rayleigh-Zone

Die Rayleigh-Zone ist definiert als der Bereich um die Quelle, für dessen Radius gilt

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll k^{-1}, \quad (2.95a)$$

$$\text{so dass } k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx 0. \quad (2.95b)$$

Unter der Bedingung (2.95) strebt der Exponentialausdruck in (2.62) gegen 1. Die Frequenzabhängigkeit verschwindet und die Vektorpotentiale nähern sich ihrem statischen Wert an, so dass Ergebnisse aus der Elektro- und Magnetostatik genutzt werden können.

2.7.2 Fresnel-Zone

Die Fresnel-Zone ist der Übergangsbereich zwischen dem Nah- und Fernfeld, wird selbst jedoch häufig zum Nahfeld gezählt. Die Felder in diesem Bereich lassen sich nur durch eine vollständige Bestimmung des Integrals in (2.94) finden. Sobald bei größer werdendem Abstand zwischen Quelle und Feldpunkt für den zweiten Term des Exponenten in (2.94) gilt, dass

$$\frac{k|\mathbf{r}'|^2}{2|\mathbf{r}|} \sin^2 \phi + \dots \ll 1, \quad (2.96)$$

kann der Einfluss des Quellvolumens auf die weitere Feldausbreitung approximiert werden. Diese Bedingung markiert das Ende der Fresnel-Zone.

2.7.3 Fraunhofer-Zone

Die Gleichung (2.94) kann mit (2.96) als

$$\mathbf{A} = -\frac{e^{-jk|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{jk|\mathbf{r}'| \cos \phi} d\mathbf{r}', \quad (2.97)$$

approximiert werden, wenn

$$|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| \quad \text{also} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| \quad \text{und} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| - |\mathbf{r}'| \cos \phi. \quad (2.98)$$

In (2.97) wurde ausgenutzt, dass der erste Term der Entwicklung den Nenner im Integral von (2.62) für den Fall (2.98) dominiert, vorausgesetzt der Koordinatenursprung liegt im Quellvolumen. Für das Verhalten der Exponentialfunktion muss zusätzlich die Frequenz betrachtet werden.

Es ist schwierig, eine einheitliche Grenze zu definieren, ab welchem Abstand $|\mathbf{r}|$ die Bedingung (2.96) erfüllt ist. Eine mögliche Definition ist

$$|\mathbf{r}| \geq \frac{kd_{\max}^2}{\pi}, \quad (2.99)$$

wobei d_{\max} die größte Dimension der Quelle senkrecht zur Richtung der Abstrahlung ist (vgl. Abb. 2.8). Bei der Gültigkeit von (2.99) ist Vorsicht geboten, denn falls $d_{\max} \ll \lambda$ gilt, würde (2.99) den Beginn des Fernfeldes unterschätzen, da (2.96) automatisch erfüllt wäre, selbst wenn die ursprüngliche Bedingung (2.98) nicht mehr gilt. Um eine Aussage über den niedrigsten Wert von $|\mathbf{r}|$, für den (2.98) erfüllt ist, treffen zu können, ist es sinnvoll den Fall eines elektrisch kleinen Stromelements zu betrachten (vgl. Abschnitt 2.7.5).

2.7.4 Nahfeld und Fernfeld

Das Nahfeld einer Quelle umfasst die Rayleigh- und die Fresnelzone. Seine Polarisierung und Phasenebene ist abhängig von der geometrischen Form und Art seiner Quelle. Dies führt auch zu einer starken Ortsabhängigkeit aller Feldkomponenten.

Das Fernfeld entspricht der Fraunhofer-Zone. Das Nahfeld einer Quelle ist der Bereich in unmittelbarer Nähe der Quelle, bezogen auf die betrachtete Wellenlänge.

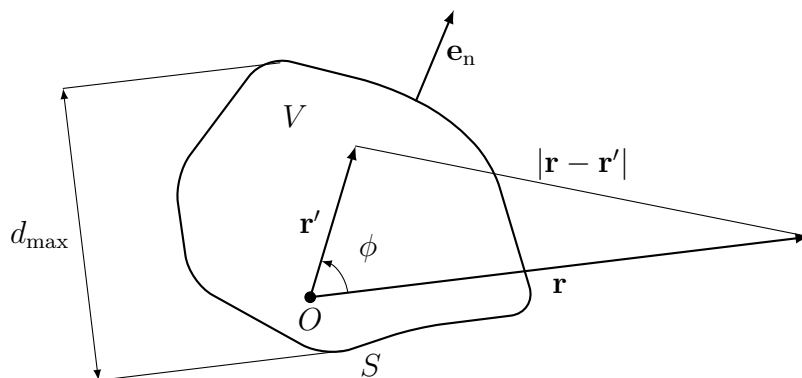


Abbildung 2.8: Richtungsbeziehungen bei der Abstrahlung des Quellvolumens.

2.7.5 Elementarstrahler

Die elektrisch kleine Linearantenne ist das denkbar einfachste Beispiel für die Bestimmung der zugehörigen Felder. Für diesen Fall geht die Stromdichte \mathbf{J}^e in den gerichteten Strom $e_z I$ über. Die größte Dimension der Quelle ist die Länge L der Antenne und die Antenne ist elektrisch klein, wenn

$$L \ll \lambda \quad (2.100)$$

gilt. Unter diesen Bedingungen geht (2.62a) in

$$\mathbf{A}_e = \frac{IL e^{jk\omega|\mathbf{r}|}}{4\pi |\mathbf{r}|} \quad (2.101)$$

über.

2.8 Simulationsverfahren

Als Referenz zur Validierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten analytischen Modelle sollen sogenannte *full wave* Simulationsverfahren für elektromagnetische Felder und Quellen verwendet werden. Es werden die Methode der Finiten Differenzen im Zeitbereich (*engl. Finite Differences in Time Domain (FDTD)*) und die Methode der Momente im Frequenzbereich verwendet (*engl. Method of Moments (MoM)*). Sie ergeben sich aus verschiedenen Formulierungen der Maxwell-Gleichungen (vgl. Abschnitt 2.1) und werden im Folgenden kurz erläutert.

2.8.1 Finiten Differenzen im Zeitbereich

Die FDTD beschreibt die zeitliche Ausbreitung elektromagnetischer Felder unter der Berücksichtigung der Randbedingungen. Das Verfahren hat sich zu einem der am häufigsten genutzten Methoden entwickelt, um elektromagnetische Problemstellungen zu untersuchen [Ant+13]. Dazu werden die Maxwell-Gleichungen (2.3a) und (2.3c) im Zeitbereich verwendet. Mit

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}^e \quad (2.102a)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.102b)$$

erhält man so die Grund-Gleichungen, auf denen die FDTD basiert. Dazu werden die Ableitungen in (2.102) nach Ort und Zeit durch die finiten Differenzen

$$\begin{aligned} & \mu \frac{H_x^{n+0.5}(i, j + 0.5, k + 0.5) - H_x^{n-0.5}(i, j + 0.5, k + 0.5)}{\Delta t} \\ &= \frac{E_y^n(i, j + 0.5, k + 1) - E_y^n(i, j + 0.5, k)}{\Delta z} \\ & - \frac{E_z^n(i, j + 1, k + 0.5) - E_z^n(i, j, k + 0.5)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.103)$$

für beispielsweise die x -Komponente von (2.102b) approximiert. Hierbei sind i, j und k die Indizes der Gitterpunkte. Die Feldkomponenten werden auf zwei um eine halbe Zellen-

länge versetzten dreidimensionalen Gittern im Raum und in der Zeit diskretisiert [Yee66], je eines für das elektrische und magnetische Feld. Dabei müssen die Randbedingungen, wie z. B. leitende Oberflächen ebenfalls entlang der Gitterpunkte definiert werden. Ausgehend von einem Anfangszeitpunkt mit bekannten Feldern im Simulationsvolumen können mit den diskretisierten Versionen von (2.102) zu jedem folgenden Zeitpunkt iterativ die elektrischen und magnetischen Felder berechnet werden.

Dabei muss die Größe des Zeitschrittes die Bedingung $\Delta t < h_{\min}/c\sqrt{3}$ erfüllen. Hier ist h_{\min} die kleinste Zellengröße, die im Gitter vorkommt. Dieses Verfahren findet im Kapitel 3 zur Validierung analytischer Ergebnisse Anwendung, da es sich durch die unterschiedlichen Zeitkonstanten der Streuprozesse eignet, die gesuchte Aperturstreuung aus der Gesamtstreuung zu extrahieren. Dabei wurde auf die offene Software openEMS zurückgegriffen [Lie+13].

2.8.2 Momenten-Methode

Gleichungen wie (2.62) bilden zusammen mit den Differentialbeziehungen (2.12) und (2.14) und entsprechenden Randbedingungen Integralgleichungen mit der allgemeinen Form

$$F(x) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, x') J(x') dx', \quad (2.104)$$

wobei $J(x')$ die gesuchte Größe, z. B. die elektrische Stromdichte, $G(x, x')$ ein Faltungskern, z. B. die Greensche Funktion einer elektrischen Quelle für das elektrische Feld und $F(x)$ die bekannte Anregung sind. Die Momenten-Methode (*engl. Method of Moments, MoM*) ermöglicht die approximative Lösung von (2.104) für $J(x')$ [Har67]. Dazu ist es von Vorteil (2.104) in Operator Schreibweise als

$$\mathcal{G}J = F \quad (2.105)$$

zu formulieren. In einem weiteren Schritt wird anschließend die gesuchte Größe in eine unendliche Reihe orthogonaler Basis-Funktionen

$$J = \sum_n c_n J_n \quad (2.106)$$

entwickelt. Gleichung (2.106) eingesetzt in (2.105) liefert

$$\sum_n c_n \mathcal{G}J_n = F. \quad (2.107)$$

Anschließend werden sogenannte Testfunktionen F_m mit $m = 1, 2, \dots, M$ definiert und im Sinne eines inneren Produkts

$$\langle g, f \rangle = \int g(x) \cdot f(x) \, dx \quad (2.108)$$

mit (2.107) multipliziert. So ergibt sich

$$\sum_N c_n \langle F_m, \mathcal{G}J_n \rangle = \langle F_m, F \rangle . \quad (2.109)$$

In (2.109) wird die unendliche Summe nach N Summanden abgebrochen und ergibt zusammen mit dem Set an Testfunktionen ein lineares Gleichungssystem, das sich als die Matrixgleichung

$$[G]\bar{J} = \bar{F} \quad (2.110)$$

formulieren lässt. Dabei ist $\bar{J} = \{c_1, \dots, c_n\}$ das Set der gesuchten Stromkoeffizienten, das zusammen mit (2.106) die gesuchte Stromdichte J approximiert, während die Elemente der Matrix $[G]$ sich nach

$$[G]_{nm} = \langle F_m, \mathcal{G}J_n \rangle \quad (2.111)$$

ergeben. Ist $[G]$ invertierbar, kann (2.110) gelöst werden. Je nach Wahl der Basis- und Testfunktionen ist für die Bestimmung der Elemente $[G]_{nm}$ eine bis zu zweifache numerische Integration nötig. Zur weiteren Erläuterungen wird auf [Har93] verwiesen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird vor allem auf die kommerziellen Implementationen FEKO [Hyp17] zurückgegriffen, um die analytischen Modelle im Kapitel 4 zu verifizieren.

3 Elektrisch kleine Aperturen

In diesem Kapitel wird sich schrittweise der Beantwortung der Fragestellung dieser Arbeit genähert. Der Ausgangspunkt ist die Betrachtung elektrisch kleiner Aperturen in der unendlichen Ebene, was das denkbar einfachste Modell ist und in Abb. 3.1 dargestellt ist. Die Einschränkung auf elektrisch kleine Aperturen erlaubt eine vereinfachte Lösung der assoziierten Integralgleichungen, die in eine bekannte Theorie mündet, die als eine Basis dieser Arbeit dient. Im Anschluss wird diese Theorie schrittweise verallgemeinert, um schließlich die Grundlage für das darauffolgende Kapitel zur Beschreibung elektrisch großer Aperturen zu schaffen.

3.1 Bethe-Theorie kleiner Aperturen

H. A. Bethe hat 1942 eine wegweisende Theorie zur Streuung an elektrisch kleinen, kreisförmigen Aperturen veröffentlicht [Bet44]. Sie wird bis heute zitiert und dient als Ausgangspunkt für Erweiterungen auf Aperturen anderer Formen und Größen [Lev80; Sol12]. Die wesentliche Erkenntnis, die sich aus [Bet44] ergibt, ist die Tatsache, dass sich die Streuung an kleinen Aperturen anhand magnetischer und elektrischer Dipole, die unter quasi-statischen Bedingungen erzeugt werden, und deren Abstrahlung betrachten lässt. Geschuldet der Tatsache, dass dieses nicht triviale Modell eine Basis dieser Arbeit darstellt, müssen die Schritte die zu der einfachen Beziehung

$$\mathbf{p} = \alpha_e \mathbf{E}_\perp^i \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}_\parallel^i \quad (3.1b)$$

führen, mit Hilfe der Aussagen im Kapitel 2 an dieser Stelle nachvollzogen und in eine einheitliche Formulierung überführt werden.

3.1.1 Randbedingungen der Apertur

Das mathematisch einfachste Szenario für die Aperturkopplung ist die Öffnung in einer unendlich ausgedehnten und perfekt leitfähigen Ebene zwischen zwei unendlich ausgedehnten

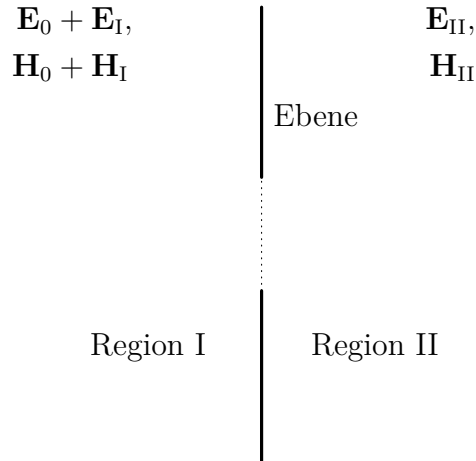


Abbildung 3.1: Apertur in der unendlichen, perfekt leitfähigen Ebene

Gebieten gleicher Medien. Wenn die Ebene durch den Koordinatenursprung verläuft und sich in y - und z -Richtung erstreckt, lassen sich die Felder formulieren als

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_I & \text{für } x < 0 \\ \mathbf{E}_{II} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I & \text{für } x < 0 \\ \mathbf{H}_{II} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.2b)$$

Dabei sind \mathbf{H}_0 und \mathbf{E}_0 die Felder, die im linken Halbraum existieren, wenn die Apertur geschlossen ist. Die übrigen Felder sind die Streufelder der Apertur in den jeweiligen Regionen, wie sie in der Abbildung 3.1 dargestellt sind. Für die Felder an der geschlossenen unendlichen Ebene gelten die Randbedingungen (2.38a), d. h. die tangentiale Komponente $\mathbf{E}_{0,\parallel}$ und die normale Komponente $\mathbf{H}_{0,\perp}$ verschwinden überall auf der Ebene. Nahe der Apertur müssen die tangentialen magnetischen und normalen elektrischen Felder kontinuierlich aus der Region I in die Region II ineinander übergehen, so dass

$$\mathbf{E}_{0,\perp} + \mathbf{E}_{I,\perp} = \mathbf{E}_{II,\perp} \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{H}_{0,\parallel} + \mathbf{H}_{I,\parallel} = \mathbf{H}_{II,\parallel} \quad (3.3b)$$

gilt. Die Gleichungen (3.3) stellen die Randbedingungen der Felder innerhalb der Apertur dar. Sie gelten unabhängig von der Größe oder Form der Apertur [Bet44]. Um diese Bedingungen auf der geschlossenen Ebene zu erzwingen, können am Ort der Apertur äquivalente Quellen angenommen werden. Diese Quellen würden nah über der geschlossenen Apertur in beiden Regionen existieren und die Streufelder $\mathbf{E}_I, \mathbf{H}_I$ und $\mathbf{E}_{II}, \mathbf{H}_{II}$ in den jeweiligen Halbraum abstrahlen. Das Äquivalenzprinzip 2.4.1 und das Eindeutigkeitstheorem 2.4.3 besagen, dass mit der Kenntnis der äquivalenten Quellen auf dem Rand der Regionen das

Feld innerhalb der Regionen eindeutig bestimmt ist.

3.1.2 Magnetisches Feld

In Region I existiert das Feld \mathbf{H}_0 , das sich aus einem einfallenden Feld \mathbf{H}^i und dem an der Ebene reflektierten Feld \mathbf{H}^r zusammensetzt. Das reflektierte Feld kann durch die Spiegelladungsmethode (vgl. Abschnitt 2.4.5) bestimmt werden. Geht man davon aus, dass die Quelle von \mathbf{H}^i weit entfernt ist, kann man die Region I in der Nähe der Apertur als quellenfrei auffassen und das gesamte Feld dieser Region ist dann die Superposition von \mathbf{H}_0 und \mathbf{H}_I , wobei \mathbf{H}_I nur von den äquivalenten Quellen der Apertur und der Abstrahlung in den Halbraum abhängt. Damit lässt sich das gesamte Feld in Region I nach (2.12a) und (2.14b) aufschreiben als

$$\mathbf{H} = \underbrace{\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r}_{\mathbf{H}_0} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}_e + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_m - j\omega\epsilon \mathbf{A}_m}_{\mathbf{H}_I} \quad \text{für } x < 0 \quad (3.4)$$

mit

$$\mathbf{A}_e = - \iint_S \mathbf{J}_o^e(\mathbf{r}') \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_e} d\mathbf{r}' \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}_m = - \iint_S \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} d\mathbf{r}' . \quad (3.6)$$

Dabei sind $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_e}$ und $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m}$ die dyadischen Greenschen Funktionen für das elektrische und magnetische Vektorpotential im Halbraum. Sie können mit der Spiegelladungsmethode bestimmt werden. Dabei wird klar, dass die zur Ebene tangential Komponente von $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_e}$ verschwindet, also tangential elektrische Quellen nicht abstrahlen. Wenn \mathbf{J}^e nur tangential Komponenten hat, dann verschwindet das zu \mathbf{J}^e gehörende Vektorpotential \mathbf{A}_e überall in der betrachteten Region I. Betrachtet man nun (3.3b) zusammen mit (3.4) und (3.6), ergibt sich ein Ausdruck für die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes und die daraus resultierenden magnetischen Quellen in der Apertur.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0,\parallel} + \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} - j\omega\epsilon \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \right) d\mathbf{r}' \\ = - \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} - j\omega\epsilon \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \right) d\mathbf{r}' . \end{aligned} \quad (3.7)$$

In (3.7) wird ausgenutzt, dass die Vektoroperationen an den Feldkoordinaten ausgeführt werden und daher nur auf $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m}$ angewendet werden müssen und die äquivalenten Quellen \mathbf{J}^m in beiden Regionen bis auf das Vorzeichen identisch sind. Die Funktion $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m}$ kann als

Vektorpotential einer dyadischen magnetischen Punktquelle betrachtet werden. Nach (2.14b) ergibt sich dann das zugehörige magnetische Feld einer dyadischen magnetischen Punktladung.

$$\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} - j\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \quad (3.8)$$

Hier ist $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m}$ die Greensche Funktion des magnetischen Feldes einer magnetischen Quelle im Halbraum. Nutzt man nun ferner aus, dass die tangentialen Komponente des reflektierten magnetischen Feldes auf der perfekt leitenden Ebene

$$\mathbf{H}_{||}^r = \mathbf{H}_{||}^i \quad (3.9)$$

ist, dann ergibt sich aus (3.7)

$$-\mathbf{H}_{||}^i = \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{||} \quad (3.10)$$

Die Gleichung (3.10) ist ein wichtiges Ergebnis, denn sie stellt den Zusammenhang zwischen dem einfallenden magnetischen Feld und den äquivalenten Quellen, die das Streufeld erzeugen, her. Die Struktur der Gleichung entspricht einer zweidimensionalen Version der Pocklington-Gleichung zur Bestimmung von Strömen auf Linearantennen. $\mathbf{H}_{||}^i$ ist bekannt und bestimmt \mathbf{J}^m in der Apertur. Sie und ihre Herleitung wird in den Abschnitten 3.2 und 3.3 eine wichtige Rolle spielen. Das Integral in (3.10) zu lösen, ist nicht trivial. Analytisch ist es nur unter Näherungen und Einschränkungen auswertbar.

3.1.3 Gestreutes Feld der Apertur

Bevor die Bestimmung der äquivalenten Quellen der Apertur behandelt wird, muss sich der Frage gewidmet werden, welche Aussagen zur Lösung des Problems gefunden werden müssen. Das eigentliche Ziel ist nicht die Bestimmung der Quellen, sondern des gestreuten Feldes der Apertur.

$$-\mathbf{A}_{m,I} = \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} d\mathbf{r}' \quad (3.11)$$

Mit (3.15) und (2.61b) ergibt sich also

$$\mathbf{A}_{m,I} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (3.12)$$

In den meisten Fällen ist man vor allem am abgestrahlten Feld der Apertur interessiert, also wenn die Bedingung (2.99) erfüllt ist. Dann ergibt sich, anhand der Ausführungen

im Abschnitt 2.7

$$\mathbf{A}_{m,I} = -\frac{e^{-jk|\mathbf{r}|}}{2\pi|\mathbf{r}|} \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') e^{-jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' . \quad (3.13)$$

Schränkt man die Lösung nun auf die Abstrahlung elektrisch kleiner Aperturen ein, verschwindet der Exponentialterm im Integral in (3.13). Ist also das gestreute Feld der elektrisch kleinen Apertur in großer Entfernung gesucht, muss nur noch das Integral der äquivalenten magnetischen Oberflächenströme in der Apertur bestimmt werden. Anhand der getroffenen Näherungen lässt sich schon jetzt anhand der Ausführungen im Abschnitt 2.6 feststellen, dass das Integral über die Quellen einem magnetischen Dipolmoment

$$\mathbf{m} = -\frac{j}{\omega\mu} \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.14)$$

entspricht.

3.1.4 Lösen des Integrals

In einem ersten Schritt ist es sinnvoll $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_h^m$ zu bestimmen. Wie im Abschnitt 2.4.5 erläutert wird, ist

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_h^{\mathbf{A}_m}\right)_{\parallel} = 2\left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_f^{\mathbf{A}_m}\right)_{\parallel} \quad (3.15)$$

mit Hilfe der Spiegelladungsmethode schnell gefunden. Aus (3.8) und (3.15) folgt unmittelbar

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{H}}}_h^m\right)_{\parallel} = 2\left(\overline{\overline{\mathbf{H}}}_f^m\right)_{\parallel} = 2\left(\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}_f^{\mathbf{A}_m} - j\omega\varepsilon \overline{\overline{\mathbf{G}}}_f^{\mathbf{A}_m}\right)_{\parallel} \quad (3.16)$$

Die Lösung von (3.10) zur Bestimmung der Quellen ist im allgemeinen nur numerisch möglich, z. B. mit Hilfe der Momenten-Methode [TIK97]. Hinzu kommt, dass $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_h^m$ nach (3.16) Singularitäten hoher Ordnung aufweist, wenn $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$ ist. Es ist allerdings möglich, unter der Bedingung elektrisch kleiner Aperturen eine Lösung für den quasistatischen Fall zu finden [Bet44; RSM77].

Der quasistatische Fall bedeutet, dass sich alle harmonischen Größen in der Apertur nur sehr langsam ändern. Dies trifft zu, wenn der Radius a der Apertur sehr klein ist gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Feldes, anders ausgedrückt, wenn $ka \ll 1$ ist. Dies führt zu einer Reihe von Vereinfachungen von (3.10). Erstens wird der exponentielle Term in $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_h^{\mathbf{A}_m}$ nahezu 1. Zweitens dominiert der erste Ausdruck der Differenz in (3.8). Damit ergibt sich zusammen mit (3.16)

$$-\frac{j\omega\mu\mathbf{H}_{\parallel}^i}{2} = \left(\nabla \iint_{S_A} \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}}_f^{\mathbf{A}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'\right)_{\parallel} . \quad (3.17)$$

Die Divergenz der dyadischen Greenschen Funktion für das Vektorpotential im Freiraum kann nach (2.10) als die dyadische Version der Greenschen Funktion eines skalaren Potentials magnetischer Quellen aufgefasst werden.

$$\nabla \cdot \overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{A}_m} = -j\omega\mu\overline{\overline{G}}_f^{\Phi_m} \quad (3.18)$$

Die Divergenz einer dyadischen Größe ergibt einen Zeilenvektor $\overline{\overline{G}}_f^{\Phi_m}$, der die Greenschen Funktionen der magnetischen Potentiale aller drei Raumrichtungen enthält. Aus (3.17) wird durch (3.18)

$$\frac{\mathbf{H}_{||}^i}{2} = (\nabla\Phi_m)_{||} \quad (3.19)$$

mit

$$\Phi_m = \iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_f^{\Phi_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.20)$$

Die Funktion Φ_m ist das magnetische Skalarpotential. Es ist aus der Magnetostatik bekannt und kann nach [Bet44] auch formuliert werden als

$$\Phi_m = \iint_{S_A} \frac{\rho_m^O}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (3.21)$$

Für die magnetische Oberflächenladungsdichte gilt das Oberflächenäquivalent der Kontinuitätsgleichung.

$$j\omega\rho_m^O = \nabla'_{||} \cdot \mathbf{J}_o^m \quad (3.22)$$

Die Divergenz an den Koordinaten der magnetischen Quellströme kann laut [Bla07, S. 489] über die Definition der Quellen im Sinne des Äquivalenzprinzips (vgl. Abschnitt 2.4.1) dargestellt werden als

$$\nabla'_{||} \cdot \mathbf{J}_o^m = \nabla'_{||} \cdot (\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}) = \mathbf{e}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu H_{\perp} \quad (3.23)$$

So ergibt sich aus (3.19) bis (3.23) eine Integralgleichung für die normale Komponente des unbekanntes magnetischen Gesamtfeldes in der Apertur, abhängig von der bekannten tangentialen Komponente des einfallenden magnetischen Feldes.

$$\frac{\mathbf{H}_{||}^i}{2} = -\nabla'_{||} \iint_{S_A} \frac{H_{\perp}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (3.24)$$

Nun kann man eine zweite Näherung in Betracht ziehen. Die tangentialen Feldkomponenten des magnetischen Feldes über der Apertur können als konstant betrachtet werden, da

sie sich dort wegen $ka \ll 1$ kaum ändern. Dann kann das normale magnetische Feld in der Apertur angesetzt werden als

$$H_{\perp} = \mathbf{r}_A \cdot \frac{\mathbf{H}_{\parallel}^i}{2}. \quad (3.25)$$

Der Vektor \mathbf{r}_A repräsentiert die Form der Apertur. Damit (3.24) erfüllt ist, müssen die Komponenten von \mathbf{r}_A so bestimmt werden, dass gilt

$$\nabla_{\parallel} \iint_{S_A} \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{e}_{\parallel}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (3.26)$$

Auch das Integral in (3.26) ist nicht einfach auszuwerten, jedoch hängt es nun nur noch von der Form und Lage der Apertur ab. Außerdem entspricht die Form von (3.26) dem Problem einer statischen Ladungsverteilung, die das Feld \mathbf{e}_{\parallel} erzeugt, wofür bereits Lösungen existieren. Diese werden an dieser Stelle nicht näher behandelt, stattdessen sei auf [Str; Bla07; McD85; MB77] verwiesen. Für eine kreisförmige Apertur mit dem Durchmesser d ergibt sich z. B.

$$\mathbf{r}_A = \frac{4r}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - r^2}} \mathbf{e}_r. \quad (3.27)$$

Um (3.25) und (3.24) nutzen zu können, um einen direkten Zusammenhang zwischen magnetischer Anregung und der erzeugten magnetischen Quelle herzustellen, lässt sich das Integral in (3.14) für seine einzelnen Komponenten umformen zu

$$\iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_y \iint_{S_A} \nabla_{\parallel} y' \cdot \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mathbf{e}_z \iint_{S_A} \nabla_{\parallel} z' \cdot \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.28)$$

Jedes der Integrale in (3.28) lässt sich durch elementweise Betrachtung der Operatoren schreiben als

$$\iint_{S_A} \nabla_{\parallel} y' \cdot \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{S_A} \nabla_{\parallel} \cdot (y' \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' - \iint_{S_A} y' \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.29)$$

hier beispielsweise für das erste Integral. Da die magnetische Oberflächenstromdichte \mathbf{J}_o^m am Rand der Fläche S_A der Apertur tangential zu selbigem verläuft, muss das erste Integral in (3.29) nach dem gausschen Integralsatz verschwinden. Setzt man unter Beachtung dieser Aussage (3.29) in (3.28) ein, kann gemeinsam mit (3.25) und (3.24) der Zusammenhang

$$\iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = j\omega\mu \iint_{S_A} \mathbf{r}' (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{H}^i) d\mathbf{r}' \quad (3.30)$$

hergestellt werden. Mit (3.14) und (3.30) kann damit das durch das einfallende Feld in der Apertur erzeugte magnetische Moment bestimmt werden. Da die Apertur elektrisch klein ist, kann \mathbf{H}^i als konstant entlang der Oberfläche der Apertur angenommen werden. Die Umformung

$$\mathbf{r}'(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{H}^i) = (\mathbf{r}' \circ \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{H}^i \quad (3.31)$$

erlaubt, das Feld aus dem Integral zu ziehen. Es ergibt sich

$$\mathbf{m} = \iint_{S_A} \mathbf{r}' \circ \mathbf{r}_A \, d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{H}^i \quad (3.32)$$

was zusammen mit der dyadischen magnetischen Polarisierbarkeit

$$\overline{\overline{\alpha}}_m = \iint_{S_A} \mathbf{r}' \circ \mathbf{r}_A \, d\mathbf{r}' \quad (3.33)$$

auf (3.1b) führt.

3.1.5 Elektrisches Feld

Für das elektrische Feld in Region I ergibt sich analog zu (3.4) nach (2.12b) und (2.14a)

$$\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r}_{\mathbf{E}_0} - \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}_m + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_e - j\omega\mu \mathbf{A}_e}_{\mathbf{E}_I} \quad (3.34)$$

Da \mathbf{A}_e für tangentialen elektrischen Ströme verschwindet, wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert wird, findet man mit (3.3a) und (3.6) für das normale elektrische Feld in der Apertur

$$\mathbf{E}_{0,\perp} + \left(\nabla \times \iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \right)_{\perp} = - \left(\nabla \times \iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \right)_{\perp} \quad (3.35)$$

Auch die Rotation bezieht sich nur auf die Feldkoordinaten und kann in das Integral geschrieben werden. Nach (2.14a) kann der Ausdruck $\nabla \times \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m}$ auch als elektrisches Feld einer dyadischen magnetischen Quelle betrachtet werden, also als Greensche Funktion $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{E}_m}$ für das elektrische Feld einer magnetischen Quelle. Analog zu (3.9) findet man schließlich einen Ausdruck für die äquivalenten magnetischen Quellen, abhängig von der normalen Komponente des auf einer perfekt leitfähigen Ebene einfallenden elektrischen Feldes. Mit

$$\mathbf{E}_{\perp}^r = \mathbf{E}_{\perp}^i \quad \text{und (3.35) ergibt sich} \quad (3.36)$$

$$-\mathbf{E}_{\perp}^i = \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{\mathbf{G}}_h^{\mathbf{E}^m}} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{\perp}. \quad (3.37)$$

Um die Wechselwirkungen zwischen den äquivalenten Quellen der Apertur und dem elektrischen Feld nutzen zu können, ist es hilfreich, (3.22) noch einmal näher zu betrachten. Dort können quellfreie magnetische Wirbelströme nicht berücksichtigt werden. Um einen Zusammenhang mit dem elektrischen Dipolmoment (3.1a) herzustellen, kann der Zusammenhang zwischen rotierenden magnetischen und longitudinalen elektrischen Stromdichten, der im Abschnitt 2.2 abgeleitet wird, ausgenutzt werden. Mit (2.28) und der Annahme lediglich tangentialer magnetischer Ströme in der Apertur, können die magnetischen Wirbelströme als zur Aperturebene senkrecht auftretende elektrische Ströme aufgefasst werden. Damit lässt sich unter den selben Bedingungen wie im Abschnitt 3.1.4 eine Integralgleichung

$$-\mathbf{E}_{\perp}^i = \left(\nabla \iint_{S_A} \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}_h^{\mathbf{A}^e}} \mathbf{J}^e(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{\perp}. \quad (3.38)$$

für die gesuchte elektrische Stromdichte aufstellen und analog behandeln.

3.2 Kleine Apertur in der unendlichen Ebene

Im Abschnitt 3.1 wurde erläutert, wie die Streuung an kleinen Aperturen mit Hilfe von äquivalenten Dipolmomenten beschrieben werden kann. Anhand der Näherung quasistatischer Felder über der Apertur konnten die Streufelder der Apertur im Fernfeldbereich analytisch bestimmt werden. Dieses Vorgehen weist jedoch einen logischen Schwachpunkt auf, denn Dipolmomente, die durch quasistatische Felder erzeugt werden, sind selbst quasistatisch und würde nicht abstrahlen. Dennoch wird im Abschnitt 3.1 das gestreute Feld als ebene Welle dargestellt. Dieser Widerspruch führt schließlich zu einer Verletzung der Energieerhaltung und muss daher aufgelöst werden [Col82]. Die Ursache des Widerspruchs ist die Annahme in [Bet44], dass die äquivalenten Quellen der Apertur nicht auf das Feld rückwirken, das sie erzeugt. In [Col82] wird der Widerspruch aufgelöst und Energieerhaltung hergestellt, indem die sogenannten Reaktionsfelder als Teil des einfallenden Feldes betrachtet werden. Im Rahmen dieser Arbeit ist ein direkterer Ansatz über die Green'schen Funktionen geeigneter, denn sie bieten die Möglichkeit mit Hilfe der Methode der analytischen Regularisierung [Nos99], einen allgemeineren Einblick zu gewinnen.

3.2.1 Regularisierung der Greenschen Funktion

Der Begriff der Regularisierung meint in dieser Arbeit, die Isolierung, Extraktion oder Eliminierung von Singularitäten. Der Ansatz ist, dass man die Greensche Funktion als Summe einer singulären Funktion und einer regulären Funktion

$$G = G_s + G_r \quad (3.39)$$

auffasst. Wendet man das Prinzip von (3.39) z. B. auf (3.10) an, erhält man

$$-\mathbf{H}_{\parallel}^i = \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_s^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{\parallel} + \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_r^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{\parallel}. \quad (3.40)$$

Die Funktion $\overline{\overline{G}}_r^{\mathbf{H}_m}$ ist der reguläre Teil der dyadischen Greenschen Funktion für das magnetische Feld einer magnetischen Quelle. Da $\overline{\overline{G}}_r^{\mathbf{H}_m}$ keine Singularität enthält, ist das zweite Integral auf der rechten Seite von (3.40) auswertbar, während das erste Integral wie im Abschnitt 3.1 dargestellt, gelöst werden kann. Die Schwierigkeit besteht in der Realisierung von (3.39) für die einzelnen Greenschen Funktionen. Der einfachste Fall der Regularisierung ist der Freiraum. Das Ziel ist ein Ausdruck, der die Funktion

$$\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{A}_m} = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \overline{\overline{I}} \quad (3.41)$$

als Summe eines singulären Teils und eines regulären Teils darzustellen. Da die Greensche Funktion zur Bestimmung der äquivalenten Quellen nur in der Nähe der elektrisch kleinen Apertur ausgewertet werden muss, kann sie durch eine Reihen-Entwicklung für $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 1$ um 0 dargestellt werden als

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - jk - \frac{k^2}{2}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + \frac{jk^3}{6}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \dots \quad (3.42)$$

Betrachtet man nun (2.14) zusammen mit (3.41) und (3.42), ergibt sich z. B. für die zz -Komponente der dyadischen Greenschen Funktion des magnetischen Feldes im Freiraum explizit

$$\left(\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \approx \frac{1}{4\pi j\omega} \left[\underbrace{\frac{2}{|z-z'|^3} + \frac{k^2}{|z-z'|^2}}_{\left(\overline{\overline{G}}_{f,s}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz}} - \underbrace{\frac{2}{3}jk^3}_{\left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz}} \right]. \quad (3.43)$$

Die übrigen diagonalen Elemente ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Koordinaten. In einer Konfiguration wie sie in der Abbildung 3.2 dargestellt ist, wird nur die zz -Komponente von $\overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m}$ wirksam. Außerdem tritt kein elektrisches Dipolmoment auf,

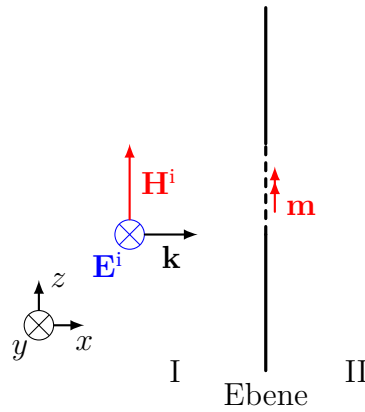


Abbildung 3.2: Apertur in der unendlichen, perfekt leitfähigen Ebene mit in z -Richtung polarisiertem, einfallendem, magnetischen Feld

da $\mathbf{E}_\perp^i = 0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich für dieses Beispiel die Gleichung (3.10) mit (3.43) und (3.15) umschreiben zu

$$-\frac{H_z^i}{2} = \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \left(\overline{\overline{G}}_{f,s}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} d\mathbf{r}' + \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} d\mathbf{r}'. \quad (3.44)$$

Ein Blick auf den letzten Term in der Klammer von (3.43) verrät, dass der reguläre Teil der Greenschen Funktion nicht vom Ort abhängt und damit sogar aus dem Integral gezogen werden kann. Damit gilt dann für das rechte Integral von (3.44) zusammen mit (3.14)

$$\begin{aligned} \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} d\mathbf{r}' &= \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= -\frac{jk^3}{6\pi} m_z = \left(-\frac{H_z^i}{2} \right)_r. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Der letzte Term in (3.45) ist der Teil des wirksamen einfallenden Feldes, der mit dem regulären Teil der Greenschen Funktion assoziiert ist. Diese Feldkomponente wird auch als Reaktionsfeld bezeichnet [Coh52b].

3.2.2 Renormalisierte Polarisierbarkeit

Nimmt man nun die Ergebnisse aus Abschnitt 3.1.4 zur Hand, stellt man fest, dass die dort beschriebene Lösung unter der Näherung statischer Bedingungen an der Apertur gerade die Lösung für den singulären Teil der Greenschen Funktion, also das linke Integral in (3.44) darstellt. Damit ergibt sich nach (3.45) und (3.32) noch einmal zusammengefasst für die einfache Geometrie aus Abbildung 3.2

$$\left(-\frac{H_z^i}{2} \right)_s = \frac{m_z}{\alpha_{m,zz}} \quad (3.46)$$

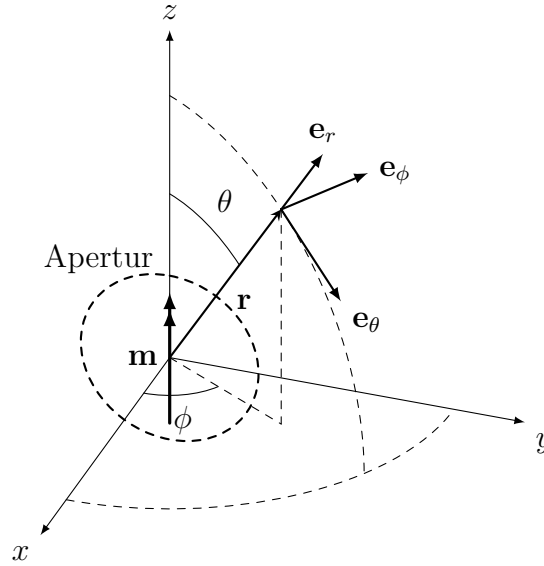


Abbildung 3.3: Koordinatensystem der Apertur

und

$$\left(-\frac{H_z^i}{2}\right)_r = -\frac{jk^3}{6\pi}m_z. \quad (3.47)$$

Damit ist für das magnetische Moment nun ein neuer Ausdruck gefunden, der auch von den Abstrahlungsbedingungen abhängt. Mit

$$\left(-\frac{H_z^i}{2}\right)_r + \left(-\frac{H_z^i}{2}\right)_s = -\frac{H_z^i}{2} \quad (3.48)$$

ergibt sich

$$\tilde{m}_z = -\underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{m,zz}} - \frac{jk^3}{6\pi}\right)^{-1}}_{\tilde{\alpha}_{m,zz}} \frac{H_z^i}{2}. \quad (3.49)$$

Dabei ist $\tilde{\alpha}_{m,zz}$ die zz -Komponente der renormalisierten dyadischen, magnetischen Polarisierbarkeit der Apertur. Sie repräsentiert neben der Form der Apertur nun auch die Randbedingungen der Felder. Das so bestimmte Moment strahlt nun unter Freiraumbedingungen in beide Regionen ab. Die abgestrahlten Felder können nun, wie in Abschnitt 2.7.5 beschrieben, bestimmt werden.

3.2.3 Energieerhaltung

Um die Erweiterung der Bethe-Theorie zu demonstrieren, wird in [PTV15], anhand des Beispiels einer elektrisch kleinen, kreisförmigen Apertur, die abgestrahlte Leistung des re-

normalisierten Moments mit der klassischen Lösung verglichen. Die dort getroffenen Aussagen werden hier noch einmal zusammengefasst. Für die Felder des in (3.49) bestimmten Dipols gilt nach Abschnitt 2.7.5 im Koordinatensystem der Apertur (vgl. Abbildung 3.3)

$$\mathbf{H}^s = \frac{jk^3 \tilde{m}_z}{4\pi} e^{-jkr_0} \left\{ \mathbf{e}_r 2 \cos \theta \left[\frac{1}{(kr_0)^2} - \frac{j}{(kr_0)^3} \right] + \mathbf{e}_\theta \sin \theta \left[\frac{j}{kr_0} + \frac{1}{(kr_0)^2} - \frac{j}{(kr_0)^3} \right] \right\} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{E}^s = -\frac{jk^3 \tilde{m}_z \eta_0}{4\pi} e^{-jkr_0} \mathbf{e}_\phi \sin \theta \left[\frac{j}{kr_0} + \frac{1}{(kr_0)^2} \right]. \quad (3.51)$$

Mit (2.43) ergibt sich für die gesamte abgestrahlte Leistung W^s der Apertur für Betrachtungen im Fernfeld

$$\begin{aligned} W^s &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^s \cdot \mathbf{e}_r r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\eta_0 k^4}{12\pi} \tilde{m}_z \tilde{m}_z^* \\ &= \frac{\eta_0 k^4}{12\pi} \frac{|H_z|^2}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{k^6}{9\pi^2}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Wenn das einfallende Feld ebenfalls eine ebene Welle ist, lässt sich ein Leistungsverhältnis aufstellen.

$$W^i = \eta_0 |H_z|^2 S_a \quad (3.53)$$

$$\frac{W^s}{W^i} = \frac{\eta_0 k^4}{12\pi S_a \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{k^6}{9\pi^2} \right)} \quad (3.54)$$

Für den Fall einer kreisförmigen Apertur mit dem Durchmesser d ist das Verhältnis von einfallender und abgestrahlter Leistung im Fernfeld in Abb. 3.4 für die klassischen Momente und die renormalisierten Momente über der normierten Frequenz dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Berücksichtigung der regulären Greenschen Funktion zu einer Einhaltung der Energieerhaltung führt, während die klassische Theorie nach Bethe vorhersagt, dass die Apertur ab $kd \geq 3$ mehr Leistung abstrahlt, als einfällt.

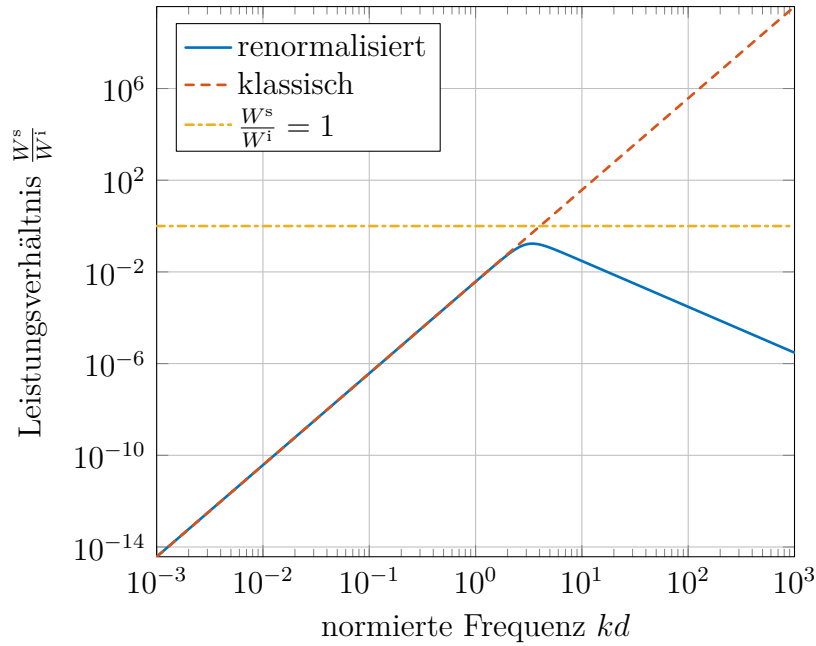


Abbildung 3.4: Verhältnis der abgestrahlten und einfallenden Leistung einer elektrisch kleinen, kreisförmigen Apertur mit dem Durchmesser d ; auf der logarithmischen Skale entspricht ein Wert über 0 einer Verletzung der Energieerhaltung

3.3 Kleine Apertur im quaderförmigen Hohlraumresonator

Die Apertur in einer Wand eines Hohlraumresonators kann als Apertur in einer unendlichen Schirmwand, die sich zwischen dem Freiraum in Region I und einem Hohlraumresonator in Region II befindet, verstanden werden, solange die Apertur nicht den Kanten des Resonators nah ist. Die Abbildung 3.5 zeigt die betrachtete Konfiguration. Die Randbedingungen (3.3) in der Apertur gelten wie im Fall der Apertur zwischen zwei Halbräumen. Die veränderten Abstrahlungsbedingungen in Region II führen allerdings zu veränderten Streufeldern. Der Einfachheit halber werden die weiteren Betrachtungen nur für das magnetische Feld durchgeführt, da sich die Zusammenhänge für das elektrische Feld analog verhalten, wie im Abschnitt 3.1.5 gezeigt wurde. Betrachtet man nun die Felder in (3.3b) erneut, kann die Änderung der Abstrahlungsbedingung in der Region II durch die Einführung einer Greenschen Funktion für den Hohlraumresonator berücksichtigt werden. Die linke Seite von (3.7) bleibt dabei unverändert, da hier weiterhin (3.4) bis (3.6) gilt. Die rechte Seite von (3.7) muss angepasst werden, um den Einfluss des Hohlraumresonators auf die äquivalenten Quellen und damit auf die Streufelder der Apertur abzubilden.

$$\mathbf{H} = + \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}_e + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_m - j\omega\varepsilon \mathbf{A}_m}_{\mathbf{H}_{II}} \quad \text{für } x > 0 \quad (3.55)$$

$$\mathbf{A}_e = - \iint_S \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_e} \mathbf{J}_o^e(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.56)$$

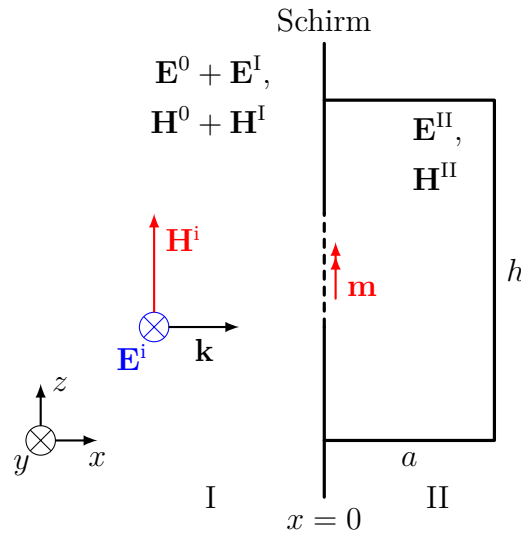


Abbildung 3.5: Elektrisch kleine Apertur zwischen einem rechteckigen Hohlraumresonator und dem Halbraum mit in z -Richtung polarisiertem, einfallendem, magnetischen Feld.

$$\mathbf{A}_m = - \iint_S \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.57)$$

Dabei sind $\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_e}$ und $\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}$ die dyadischen Greenschen Funktionen für das elektrische und magnetische Vektorpotential im Hohlraumresonator. So kann (3.7) umgeschrieben werden zu

$$-\mathbf{H}_{||}^0 = \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{||} + \left(\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)_{||}. \quad (3.58)$$

3.3.1 Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraumresonators

Für die analytische Repräsentation der Greenschen Funktion des quaderförmigen Hohlraumresonators gibt es viele Formen, die sich vor allem hinsichtlich der Konvergenzeigenschaften der enthaltenen unendlich gliedrigen Summen unterscheiden. Die verschiedenen Darstellungsformen werden in [Gro06] ausführlich diskutiert. An dieser Stelle wird die Entwicklung der Moden-Darstellung der Greenschen Funktion für das Vektorpotential im Hohlraumresonator erläutert. In [NTP10] und [NTP12] wird das prinzipielle Verfahren vorgestellt und soll hier auf den Formalismus der Greenschen Funktionen übertragen werden. Als Ausgangspunkt dient erneut das Spiegelladungen-Prinzip, wie es auch bei der unendlichen Ebene Anwendung findet (vgl. Abschnitt 2.4.5). Im Resonator findet allerdings eine unendliche Anzahl an Spiegelungen statt, wobei je nach Art der Quelle und Richtung und Anzahl der jeweiligen Spiegelungen die Richtung der Quelle nach dem in Abb. 2.5 dargestellten Schema beibehalten oder vertauscht wird. Die gesuchte Greensche Funktion ist dann die Summe der Greenschen Funktionen aller gespiegelten Punktquel-

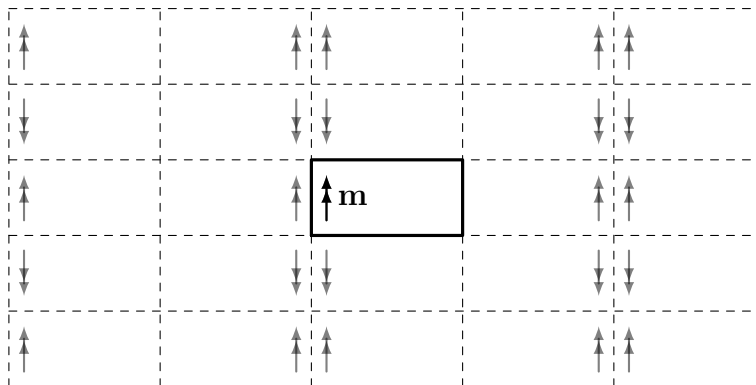


Abbildung 3.6: Zweidimensionale Darstellung der Spiegelungsmethode zur Konstruktion der Greenschen Funktion eines rechteckigen Hohlraumresonators

len im Freiraum. Nach [NTP12] ergeben sich die dyadischen Greenschen Funktionen des Vektorpotentials der jeweiligen Quellen so als

$$\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}^m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu} T_{\nu}^m \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|} \overline{\overline{I}} \quad \text{und} \quad (3.59)$$

$$\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}^e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\nu} T_{\nu}^e \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|} \overline{\overline{I}}. \quad (3.60)$$

Dabei sind $\nu = (n_x, n_y, n_z)$ der Vektor der Anzahl der Spiegelungen in den drei Raumrichtungen, T_{ν}^m und T_{ν}^e die jeweiligen Spiegeloperatoren für magnetische und elektrische Quellen und \mathbf{R}_{ν} die Positionen der gespiegelten Quellen. Anhand geometrischer Überlegungen wie sie in Abb. 3.6 dargestellt sind, lässt sich die Position der gespiegelten Quellen schreiben als

$$\mathbf{R}_{\nu} = (X(n_x), Y(n_y), Z(n_z)) \quad (3.61a)$$

mit

$$X(n_x) = x'(-1)^{n_x} + \left(\frac{1 - (-1)^{n_x}}{2} + n_x \right) a, \quad (3.61b)$$

$$Y(n_y) = y'(-1)^{n_y} + \left(\frac{1 - (-1)^{n_y}}{2} + n_y \right) b \quad \text{und} \quad (3.61c)$$

$$Z(n_z) = z'(-1)^{n_z} + \left(\frac{1 - (-1)^{n_z}}{2} + n_z \right) h, \quad (3.61d)$$

wenn das kartesische Koordinatensystem entlang der Kanten des Resonators definiert wird [NTP12]. Wählt man nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Konfiguration wie sie in der Abb. 3.5 dargestellt ist und untersucht die Gleichungen (3.59) und (3.60) am Ort der Apertur, stellt sich heraus, dass die tangentialen Komponenten von $\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}^e}$ analog zu Abschnitt 3.2 nahe der Apertur verschwinden und nur die tangentialen Komponenten

von $\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}$ einen Beitrag für die Kopplung zwischen der Quelle und dem Feld in dem Hohlraumresonator liefern. Nimmt man ferner an, dass in der Apertur nur magnetische Ströme in z -Richtung fließen können, wie es z. B. bei einem dünnen Schlitz in z -Richtung der Fall ist, genügt es vorerst, nur die zz -Komponente der Greenschen Funktion zu betrachten. Diese lässt sich dann schreiben als

$$\left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}\right)_{zz} = \sum_{\nu} (-1)^{n_z} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|}. \quad (3.62)$$

Die Gleichung (3.62) kann als Ausgangspunkt für die Konstruktion einer Eigenmoden-Repräsentation der Greenschen Funktion dienen. Dazu wird der Bruch in (3.62) durch seine räumliche Fourier-Darstellung ersetzt [NTP12].

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu}|} = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \frac{e^{-j\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{\nu})}}{k'^2 - k_c^2} d\mathbf{k}' \quad (3.63)$$

$$\text{mit } k_c = k \left(1 - \frac{j}{2Q}\right) \quad (3.64)$$

Die Integration in (3.63) findet in der komplexen Ebene entlang der reellen Achse statt. Um die Singularität bei $k'^2 = k^2$ zu vermeiden, wird in (3.64) die physikalische Wellenzahl in den komplexen Bereich erweitert. Der imaginäre Teil von (3.64) ist mit der Güte Q des Resonators verknüpft und bildet so verlustbehaftete Prozesse, wie z. B. elektrische Verluste in den Resonatorwänden, ab. Nähere Ausführungen zu Güten rechteckiger Resonatoren sind in [Hil+94] oder in Abschnitt 3.3.2 zu finden. Setzt man (3.63) in (3.62) ein und betrachtet zusätzlich (3.61), erhält man

$$\left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}\right)_{zz} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint \frac{e^{-j\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}}{k'^2 - k_c^2} \Psi_x \Psi_y \Psi_z d\mathbf{k}' \quad (3.65a)$$

$$\text{mit } \Psi_x = \sum_{n_x} e^{jk'_x X}, \quad (3.65b)$$

$$\Psi_y = \sum_{n_y} e^{jk'_y Y}, \quad (3.65c)$$

$$\text{und } \Psi_z = \sum_{n_z} (-1)^{n_z} e^{jk'_z Z}. \quad (3.65d)$$

In (3.65) sind die räumlichen Moden nun explizit dargestellt. Das Ziel ist nun die Berechnung des Integrals über den *Modenraum* aller \mathbf{k}' . Dazu ist es hilfreich, (3.61) noch einmal zu betrachten. Für die Koordinaten der Positionen der gespiegelten Quellen kann eine einfachere Darstellung für geradzahlige und ungeradzahlige Spiegelungsordnungen gefunden werden [NTP12, Gl.(16)]. So ergibt sich z. B. für die x -Komponente

$$X(n_x = 2l) = x' + 2la \quad (3.66a)$$

$$X(n_x = 2l - 1) = -x' + 2la \quad , \text{ wenn } l = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ ist.} \quad (3.66b)$$

Die Koordinate der Originalquelle x' lässt sich so aus der Summe (3.65b) herausziehen, um anschließend die Definition des Kosinus mit Hilfe der Euler-Identität anzuwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_x &= 2 \cos(k'_x x') \sum_{n_x} e^{jk'_x 2n_x a} \\ &= \frac{2\pi}{a} \cos(k'_x x') \sum_{n_x} \delta\left(\frac{k'_x - \pi n_x}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.67a)$$

Die zweiten Zeile von (3.67a) stellt eine Anwendung der Poissonschen Summengleichung dar. Für die y -Komponente gelten äquivalente Überlegungen.

$$\Psi_y = \frac{2\pi}{b} \cos(k'_y y') \sum_{n_y} \delta\left(\frac{k'_y - \pi n_y}{b}\right). \quad (3.67b)$$

Bei der z -Komponente bewirkt der Vorzeichen-Term bei der Aufteilung der Summe in gerade und ungerade Anteile, dass

$$\Psi_z = \frac{2\pi}{h} j \sin(k'_z z') \sum_{n_z} \delta\left(\frac{k'_z - \pi n_z}{h}\right). \quad (3.67c)$$

Mit (3.67) kann das Integral in (3.65) nun leicht bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}_m}}\right)_{zz} &= \frac{4\pi j}{V} \sum_{\nu} \frac{e^{-j\mathbf{k}^{\nu} \cdot \mathbf{r}} \cos(k_x^{\nu} x') \cos(k_y^{\nu} y') \sin(k_z^{\nu} z')}{|\mathbf{k}^{\nu}|^2 - k^2} \\ \text{mit } k_x^{\nu} &= \frac{\pi n_x}{a}, \quad k_y^{\nu} = \frac{\pi n_y}{b}, \quad k_z^{\nu} = \frac{\pi n_z}{h} \\ \text{und } \mathbf{k}^{\nu} &= (k_x^{\nu}, k_y^{\nu}, k_z^{\nu}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

In (3.68) ist V das Volumen des Resonators und \mathbf{k}^{ν} der Vektor jener Modenzahlen \mathbf{k}' , an denen die Delta-Funktionen in (3.67) einen Beitrag zum Integral in (3.65) liefern. Der exponentielle Ausdruck in der Summe in (3.68) kann mit Hilfe der Eulerschen Identität weiter umgeformt werden, so dass

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overline{\mathbf{A}_m}}\right)_{zz} &= \frac{8\pi}{V} \sum_{\nu} \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \cos(k_x^{\nu} x') \cos(k_y^{\nu} y') \\ &\quad \times \cos(k_y^{\nu} y') \cos(k_x^{\nu} x') \frac{\sin(k_z^{\nu} z') \sin(k_z^{\nu} z')}{|\mathbf{k}^{\nu}|^2 - k^2}, \\ \text{wobei } \epsilon_n &= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mit (3.69) kann für eine gegebene elektrisch kleine Quelle das Feld im Inneren eines Hohl-

raumresonators berechnet werden, wie es im Prinzip in [NTP12] ausgeführt wird. Um die numerisch-analytische Berechnung der Summe für konkrete Anwendungen zu beschleunigen, kann die Anzahl der Dimension der Summe in (3.69) mit Hilfe eines Grenzwertes für Summen der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\xi}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{e^{(\xi-2\pi)\alpha} + e^{-\xi\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha}} - \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq 2\pi \quad (3.70)$$

nach [BM92] auf zwei reduziert werden. Nach einigen Umformungen ergibt sich so

$$\begin{aligned} \left(\overline{G}_c^{\mathbf{A}_m} \right)_{zz} &= \frac{1}{ab} \sum_{n_x, n_y=0}^{\infty} \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \cos k_x^\nu x \cos k_x^\nu x' \\ &\quad \times \cos k_y^\nu y \cos k_y^\nu y' \frac{1}{\gamma_\nu \sinh(\gamma_\nu h)} \\ &\quad \times \begin{cases} \sinh(\gamma_\nu z) \sinh(\gamma_\nu(h-z')) & \text{für } z \geq z' \\ \sinh(\gamma_\nu z') \sinh(\gamma_\nu(h-z)) & \text{für } z' \geq z \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

wobei $\gamma_\nu = \sqrt{(k_x^\nu)^2 + (k_y^\nu)^2 - k_c^2}$.

3.3.2 Güte rechteckiger Hohlraumresonatoren

Jedem verlustbehafteten schwingfähigem System kann eine Güte zugeordnet werden. Sie ist definiert als das Verhältnis der mittleren gespeicherten Energie des Systems und der Verlustenergie je Sekunde [Col91, S. 389].

$$Q = \omega \cdot \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{disszipierte Energie je Sekunde}} \quad (3.72)$$

Die Definition (3.72) erlaubt eine Zerlegung der Gesamtgüte des Systems in einzelne Parameter, die dem jeweiligen verlustbehafteten Prozess zugeordnet sind. Im Fall elektromagnetischer Schwingungen in Hohlraumresonatoren sind die häufigsten betrachteten Verlustprozesse

- Leitungsverluste in den Resonatorwänden,
- dielektrische Verluste im inneren Medium des Resonators,
- Verluste durch Aperturabstrahlung und
- Verluste durch eine Beladung des Resonators, wie z. B. Antennen.

Jeder dieser Prozesse führt zu einer Verlustleistung. Die Summe dieser Verlustleistungen entspricht dann der gesamten disziptierten Leistung des Systems. So lässt sich mit (3.72)

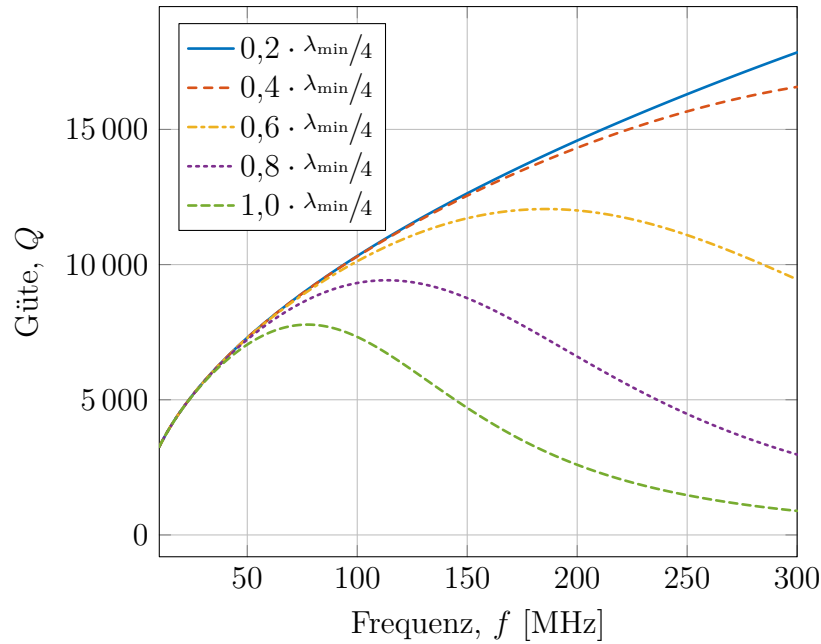


Abbildung 3.7: Frequenzabhängigkeit der Güte eines Hohlquaders mit Kupferwänden und einem Volumen von 1 m^3 für verschiedene Durchmesser kreisförmiger Aperturen

die Gesamtgüte schreiben als

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_l} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_A} + \frac{1}{Q_B}. \quad (3.73)$$

In [Hil+94] wird ein statistischer Ansatz beschrieben, um die einzelnen Güten modellieren zu können.

3.3.3 Regularisierung im Hohlraumresonator

Um die äquivalenten Quellen der Apertur zu bestimmen, muss für Region II (3.71) nahe der Apertur ausgewertet werden. Dazu ist eine reine Modendarstellung wie (3.71) ungeeignet, da die Summe nahe der Quelle schlechte Konvergenzeigenschaften aufweist. Spaltet man die Summe in (3.71) in eine endliche Summe, die bis zu einem Parameter γ_{\max} gebildet wird, und eine unendliche Summe auf, umgeht man so die schlechten Konvergenzeigenschaften nahe der Quelle. Die unendliche Summe kann durch eine Grenzwertbetrachtung durch eine Integration approximiert werden, die schließlich einen Term ergibt, der ähnlich

der Greenschen Funktion für den Freiraum ist [TVM99].

$$\begin{aligned}
 \left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}\right)_{zz} &= \frac{1}{ab} \sum_{n_x, n_y=0}^{\gamma_{\max}} \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \cos k_x^\nu x \cos k_x^\nu x' \cos k_y^\nu y \cos k_y^\nu y' \frac{1}{\gamma_\nu \sinh(\gamma_\nu h)} \\
 &\times \begin{cases} \sinh(\gamma_\nu z) \sinh(\gamma_\nu(h-z')) & \text{für } z \geq z' \\ \sinh(\gamma_\nu z') \sinh(\gamma_\nu(h-z)) & \text{für } z' \geq z \end{cases} \\
 &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-\gamma_{\max}|z-z'|}}{|z-z'|}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Dieser letzte Term in (3.74) enthält nun die Singularität bei $z = z'$ und kann wie im Fall des Freiraums in eine Taylorreihe entwickelt werden (vgl. Abschnitt 3.2.1). Außerdem gilt für die Punktquelle im Hohlraumresonator analog zur Punktquelle im Freiraum

$$\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla\nabla \cdot \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m} - j\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}. \tag{3.75}$$

So ergibt sich nach Einsetzen von (3.74) nach der Entwicklung in (3.75) nahe der Apertur

$$\begin{aligned}
 \left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m}\right)_{zz} &= \frac{1}{j\omega\mu_0 ab} \sum_{n_x, n_y=0}^{\gamma_{\max}} \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \left((k_x^\nu)^2 + (k_y^\nu)^2 \right) \cos^2(k_x^\nu x) \cos^2(k_y^\nu y) \\
 &\times \frac{\sinh(\gamma_\nu z) \sinh(\gamma_\nu(h-z))}{\gamma_\nu \sinh(\gamma_\nu h)} + \frac{1}{j\omega\mu_0 4\pi} \\
 &\times \left(\frac{2}{|z-z'|^3} + \frac{k^2}{|z-z'|} - \frac{\gamma_{\max}^3}{3} - k^2 \gamma_{\max} \right),
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

wobei die ersten beiden Summanden in der Klammer der singuläre Teil der Greenschen Funktion sind, welcher identisch ist mit dem singulären Teil der Greenschen Funktion für den Freiraum. Die übrigen Terme in (3.76) bilden den regulären Teil der Greenschen Funktion für den Hohlraumresonator und repräsentieren den Einfluss des Hohlraumresonators auf die äquivalenten Quellen der Apertur. In [Tka+09] und [TNAH12] wird dieses Verfahren als die Methode der kleinen Antenne (engl. Method of Small Antenna (MSA)) für den Fall einer elektrisch kleinen Dipolantenne im Inneren eines quaderförmigen¹ Hohlraumresonators vorgestellt. Diese wird in den folgenden Abschnitten für den Fall von elektrisch kleinen Aperturen, die sowohl den Abstrahlungsbedingungen des Resonators als auch denen des Halbraums unterworfen sind, verallgemeinert.

¹In [TNR14] wird das Verfahren auf eine elektrisch kleine Antenne im Hohlzylinder übertragen.

3.3.4 Renormalisierte Polarisierbarkeit

Nachdem die regulären Teile der Greenschen Funktion für den Halbraum (siehe (3.15) und (3.43)) und für den Hohlraumresonator (siehe (3.76)) gefunden sind, kann (3.58) nun geschrieben werden als

$$-2H_z^i = 3 \iint_{S_A} \left(\overline{\overline{G}}_{f,s}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \mathbf{J}_o^m \, d\mathbf{r}' + \left(\left(\overline{\overline{G}}_{c,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} + 2 \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \right) \iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m \, d\mathbf{r}'. \quad (3.77)$$

Auf der linken Seite von (3.77) wurde die Randbedingung an der perfekt leitenden Ebene mit geschlossener Apertur ausgenutzt, während auf der rechten Seite die Greenschen Funktionen in ihre singulären und regulären Anteile zerlegt und sortiert wurden. Die regulären Teile der Greenschen Funktionen hängen nicht mehr von der Integrationsvariablen ab und können daher aus dem Integral gezogen werden. Das erste Integral auf der linken Seite repräsentiert den Teil des einfallenden magnetischen Feldes, das die quasi-statischen Quellen aus Bethes Lösung induziert. Man kann schreiben

$$\iint_{S_A} \overline{\overline{G}}_{f,s}^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}_o^m \, d\mathbf{r}' = \mathbf{H}_s^i = -\overline{\overline{\alpha}}_m^{-1} \mathbf{m}. \quad (3.78)$$

Das zweite Integral ist die Definition für das magnetische Dipolmoment nach (2.83), wenn man die Dualität zwischen elektrischem und magnetischen Strom ausnutzt.

$$\iint_{S_A} \mathbf{J}_o^m \, d\mathbf{r}' = j\omega\mu\mathbf{m} \quad (3.79)$$

Mit (3.78) und (3.79) lässt sich (3.77) nach dem gesamten magnetischen Moment umstellen, um so eine explizite Vorschrift für dessen Berechnung zu finden. Wie im Abschnitt 3.1.4 diskutiert wurde, ist $\overline{\overline{\alpha}}_m$ die dyadische magnetische Polarisierbarkeit. Bei der betrachteten Konfiguration und Anregung spielt auch hier nur die zz -Komponente eine Rolle, so dass sich die vergleichsweise einfache Gleichung

$$m_z = \frac{2H_z^i}{\frac{3}{\overline{\overline{\alpha}}_{zz}} - j\omega\mu_0 \left(\left(\overline{\overline{G}}_{c,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} + 2 \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \right)} \quad (3.80)$$

ergibt. Die Struktur von (3.80) erlaubt nun die Einführung einer renormalisierten Polarisierbarkeit analog zu den Betrachtungen in Abschnitt 3.2. So lässt sich zusammenfassen, dass

$$\tilde{m}_z = \tilde{\overline{\overline{\alpha}}}_{m,zz} H_z^i \quad (3.81)$$

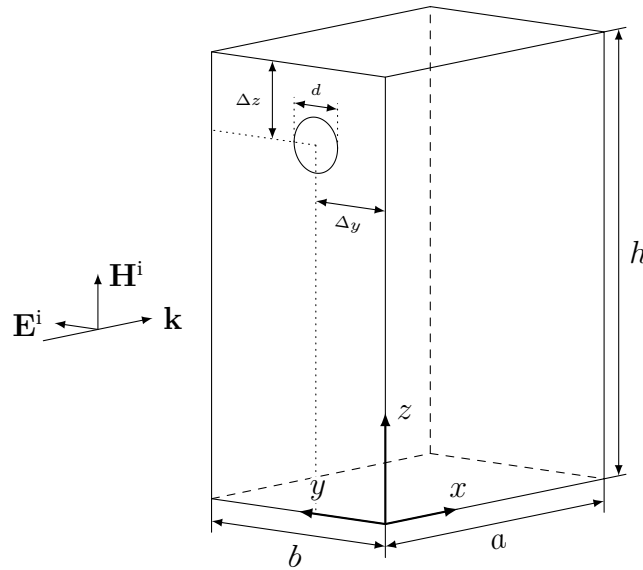


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung des Resonators mit einer kreisförmigen Apertur

mit

$$\tilde{\alpha}_{m,zz} = \frac{2}{\frac{3}{\alpha_{m,zz}} - j\omega \left(\left(\overline{\overline{G}}_{c,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} + 2 \left(\overline{\overline{G}}_{f,r}^{\mathbf{H}_m} \right)_{zz} \right)}. \quad (3.82)$$

Damit sind mit der Kenntnis der Greenschen Funktionen für die verschiedenen Regionen auch die äquivalenten Quellen bekannt. Im nächsten und letzten Schritt können so die gestreuten und gesamten Felder bestimmt werden.

3.3.5 Felder im Inneren des Resonators

In Region II ergeben sich die Felder analog zu (3.86) mit dem einzigen Unterschied, dass hier statt der Greenschen Funktion für das Vektorpotential des Halbraums jene des Resonators die Beziehungen zwischen Feld und Quelle festlegt

$$\mathbf{H}^{\text{II}} = j \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m} \omega \mu \mathbf{m} \quad (3.83a)$$

$$\mathbf{E}^{\text{II}} = j \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_m} \omega \mu \mathbf{m} \quad (3.83b)$$

$$\text{mit } \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m} - j\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m} \quad (3.83c)$$

$$\text{und } \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_m} = -\nabla \times \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{A}_m}. \quad (3.83d)$$

Mit (3.71) liefert (3.83) nun die Felder im Inneren des Resonators. Es ist zu erwähnen, dass sowohl (3.86) als auch (3.83) auch die Nahfelder einer elektrisch kleinen Quelle liefern. Im Abschnitt 3.3.5 werden einige beispielhafte Ergebnisse präsentiert und mit numerischen Simulationen verglichen. Basierend auf (3.83) sind in den Abbildungen 3.9

die analytischen Ergebnisse für eine zufällige Auswahl an Orten im Resonator dargestellt und werden mit Ergebnissen der Simulation mittels OpenEMS verglichen. Auf den ersten Blick zeigt sich in allen Punkten eine gute Übereinstimmung zwischen dem analytischen und numerischen Modell. Eine nähere Betrachtung offenbart allerdings die Schwächen der Zeitbereichsimulation, denn die ausgeprägten Resonanzmaxima der analytischen Lösung können bei der Simulation im Zeitbereich nur schwer und unter großem Rechenaufwand abgebildet werden. Dies führt auch zu der häufigen Diskrepanz bei kleineren, aber ebenso scharfen Maxima. Sie können im Zeitbereich nur durch eine sehr lange Schwingungsdauer berücksichtigt werden. Allerdings ist es möglich mit Hilfe einer in [WM63] vorgestellten Methode bereits im Zeitbereich berechnete Simulationsergebnisse einer algebraischen Repräsentation zuzuordnen, um so die Zeitreihe „künstlich“ zu verlängern. Eine anschließende Transformation in den Frequenzbereich ergibt dann das in der Abb. 3.10 gezeigte Ergebnis der Simulation. Dort wird auch ein Vergleich zwischen dem erweiterten Modell nach der MSA und der klassischen Bethe Theorie angestellt.

3.3.6 Schirmdämpfung

Das analytische Modell kann auch anhand eines Vergleichs mit Ergebnissen aus [Sol11] validiert werden. Dazu wurden die in [Sol11] verwendeten Parameter des Resonators auf das analytische Modell übertragen und so die Schirmdämpfung an einem Ort im Inneren des Resonators bestimmt und verglichen. Die Abb. 3.11 zeigt die Ergebnisse für die in Tab. 3.1 zusammengefassten Parameter und vergleicht sie mit den Ergebnissen aus [Sol11]. Die Ergebnisse sind in Form einer Schirmdämpfung (SE) bezogen auf eine Komponente des elektrischen Feldes nach

$$SE_y = -20 \log_{10} \frac{|E_y|}{|E_0|} \quad (3.84)$$

dargestellt. Es ist eine allgemein sehr gute Übereinstimmung festzustellen. Einige kleinere Abweichungen treten erst bei Frequenzen oberhalb 2 GHz auf, und können durch die in diesem Bereich nicht mehr geltende Einschränkung einer elektrisch kleinen Apertur erklärt werden.

3.3.7 Hohlraumresonanzen im äußeren Feld

Die Kenntnis der äquivalenten Quellen der Apertur unter den Abstrahlungsbedingungen in den jeweiligen Regionen erlaubt nun eine direkte Berechnung der Gesamtfelder. In der Region I in der Darstellung 3.5 können die bekannten Feldgleichungen für den magnetischen Dipol im Freiraum genutzt werden [TIK97, S.121]. Im Fernfeld gilt dann in Region I

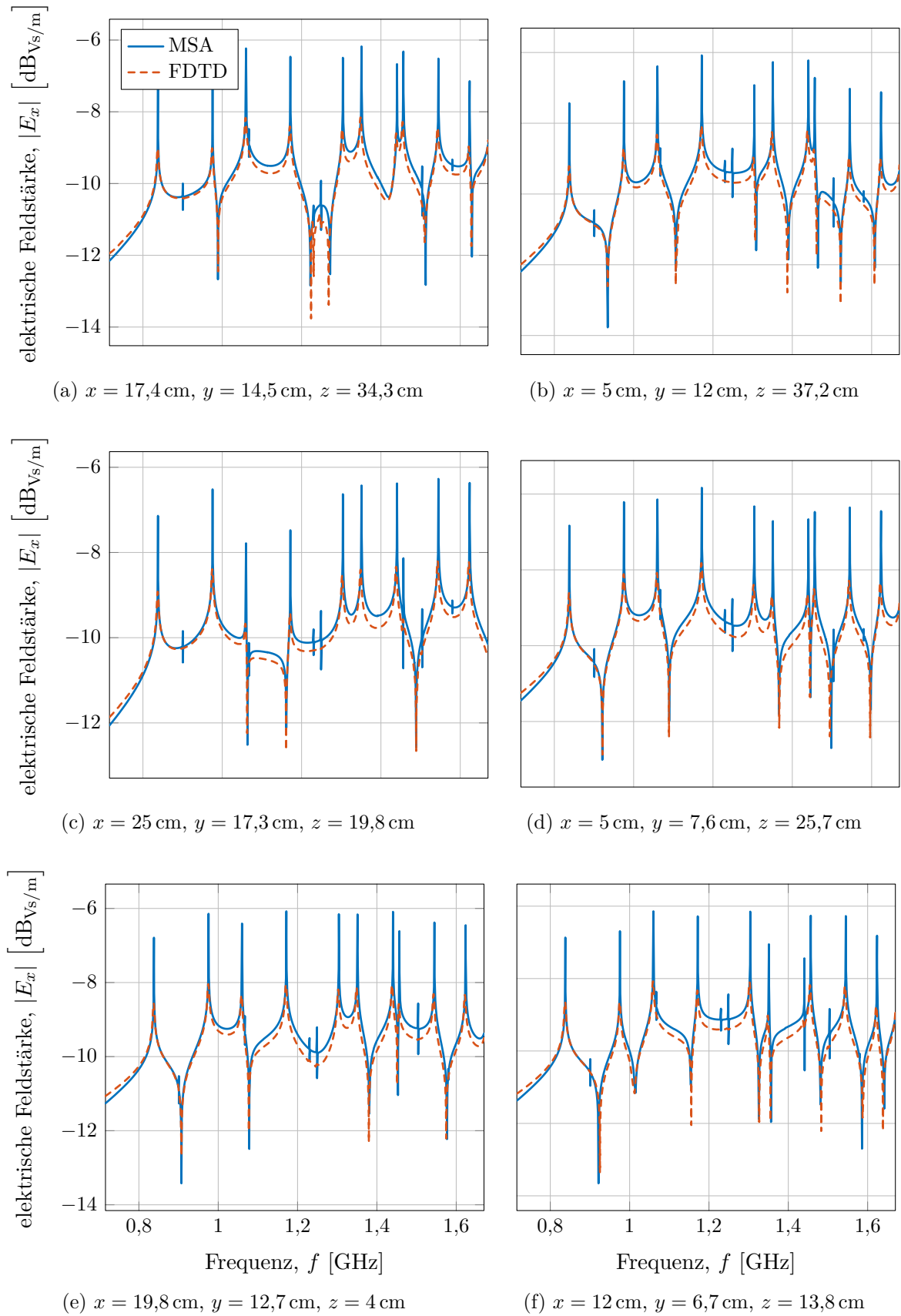


Abbildung 3.9: Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse für den Resonator nach Setup II (vgl. Tab. 3.2) an zufällig ausgewählten Orten innerhalb des Resonators.

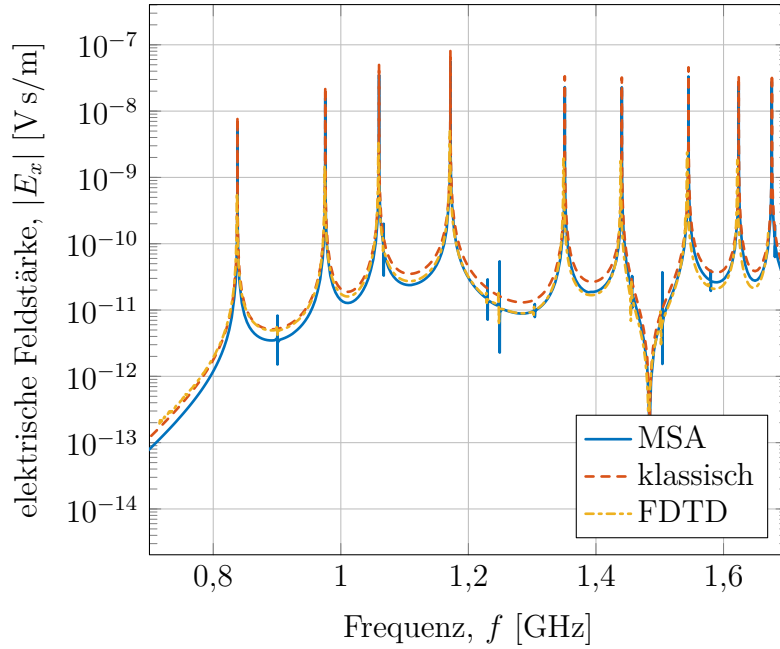


Abbildung 3.10: Betrag der x -Komponente des elektrischen Feldes im Frequenzbereich, abgestrahlt durch die Apertur bei $x = 22,5$ cm, $y = 5$ cm und $z = 10$ cm nach Setup II.

Tabelle 3.1: Parameter des Resonators und der Apertur für Setup I, übernommen aus [Sol11] und auf das Koordinatensystem in Abb. 3.8 angepasst

	Bezeichnung	Parameter	Wert
Resonator	Tiefe	a	30 cm
	Breite	b	15 cm
	Höhe	h	30 cm
Apertur	x -Position	Δx	0 cm
	y -Position	Δy	6,25 cm
	z -Position	Δz	15 cm
	Länge	l	10 cm
	Breite	b	0,5 cm

$$\mathbf{H}^I = \frac{jk^3 \tilde{m}_z}{2\pi} e^{-jkr_0} \mathbf{e}_\theta \frac{j \sin \theta}{kr_0} \quad (3.85a)$$

$$\mathbf{E}^I = - \frac{jk^3 \tilde{m}_z \eta_0}{2\pi} e^{-jkr_0} \mathbf{e}_\phi \frac{j \sin \theta}{kr_0}. \quad (3.85b)$$

Die Gleichungen (3.85) beschreiben die von der Apertur abgestrahlten Felder in Region I. Sie sind bis auf einen Faktor 2 identisch mit den Feldern eines magnetischen Dipols im Freiraum, da es sich bei Region I um einen Halbraum handelt.

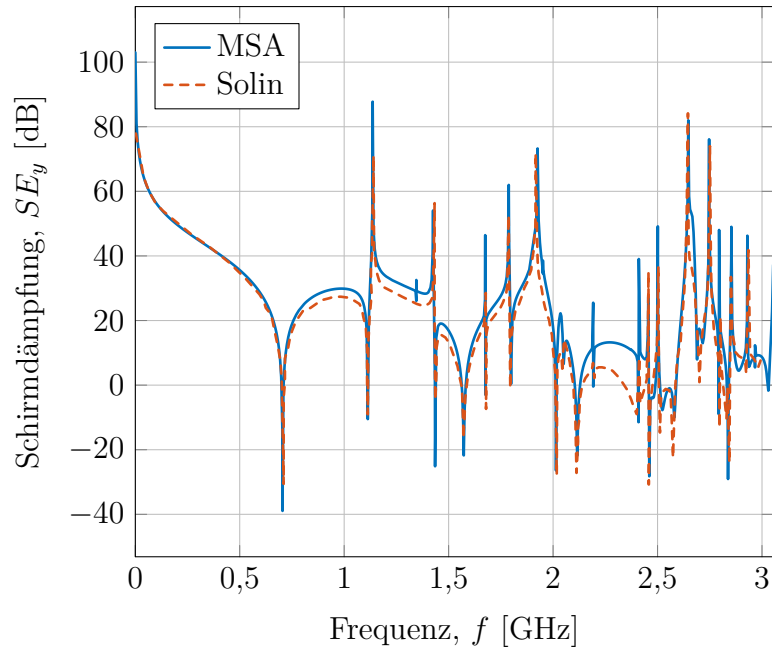


Abbildung 3.11: Ortsabhängige Schirmdämpfung bezüglich der y -Komponente des elektrischen Feldes bei $x = 15,25$ cm, $y = 11,75$ cm, $z = 14,75$ cm. Die Näherung einer elektrisch kleinen Apertur kann nur im Frequenzbereich bis 1,5 GHz angenommen werden. Als Referenz dient [Sol11].

Eine alternative, formaleren Darstellung unter Fernfeldbedingungen ist

$$\mathbf{H}^I = j \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m} \omega \mu \mathbf{m} \quad (3.86a)$$

$$\mathbf{E}^I = j \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{E}_m} \omega \mu \mathbf{m} \quad (3.86b)$$

$$\text{mit } \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{H}_m} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \nabla \cdot \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} - j\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m} \quad (3.86c)$$

$$\text{und } \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{E}_m} = -\nabla \times \overline{\overline{G}}_h^{\mathbf{A}_m}. \quad (3.86d)$$

Um das gesamte Feld in der Region I zu bestimmen, muss nach (3.3) das einfallende und von der Ebene reflektierte Feld \mathbf{E}_0 und \mathbf{H}_0 mit den Feldern in (3.85) überlagert werden. Es ist dann zu erwarten, dass das gestreute Feld der elektrisch kleinen Apertur bei jeder Frequenz mehrere Größenordnungen kleiner ist, als das einfallende und reflektierte Feld, solange realistische Güten des Hohlraumresonators angenommen werden. Dies erschwert die messtechnische Detektion innerer Hohlraumresonanzen im äußeren Feld. Um dennoch auswertbare Signale aus Region II in Region I zu messen, führen die Überlegungen aus diesem Kapitel zu der Überlegung, dass ein Übergang in den Zeitbereich sinnvoll ist, da scharfe Resonanzen im Frequenzbereich lang anhaltende Schwingungen im Zeitbereich bedeuten, wie im Abschnitt 3.3.8 näher erläutert wird.

3.3.8 Untersuchungen im Zeitbereich

Tabelle 3.2: Beliebig gewählte Parameter des Resonators und der Apertur für Setup II, siehe Abb. 3.8.

	Bezeichnung	Parameter	Wert
Resonator	Tiefe	a	30 cm
	Breite	b	20 cm
	Höhe	h	40 cm
Apertur	x -Position	Δx	0 cm
	y -Position	Δy	8 cm
	z -Position	Δz	7 cm
	Durchmesser	d	3 cm

Die Untersuchungen in [Pet+15] haben gezeigt, dass durch das Ausnutzen der hohen Güte des Resonators eine Separierung des reflektierten und des an der Apertur gestreuten Feldes im Zeitbereich möglich ist, wenn das einfallende Feld nach endlicher Zeit verschwindet. Die äußeren Moden weisen eine wesentlich geringere Güte auf, so dass sie bereits nach kurzer Zeit eine geringere Amplitude als das durch die Apertur zurück gestreute Feld besitzen.

Anhand eines konkreten Setups, wie es in der Abbildung 3.8 dargestellt ist, können die Simulationen im Zeit- und Frequenzbereich direkt mit den analytischen Ergebnissen verglichen werden. Dabei wurde die Geometrie durch einen vergrößerten Schirm ergänzt, um die äußeren Wechselwirkungen des Resonators mit dem anregenden Feld zu minimieren und eine Approximation einer unendlichen Ebene in der Aperturebene zu erreichen. Die Simulationen wurden anhand der in Tab. 3.2 genannten Parameter durchgeführt. Das FDTD-Verfahren (vgl. Abschnitt 2.8.1) wurde genutzt, um direkt im Zeitbereich zu simulieren. Als Referenzpunkt zur Bestimmung des äußeren Feldes wurde der Punkt direkt vor der Apertur in einem Abstand von 1 m gewählt, so dass dort bereits für die erste Hohlraumresonanzfrequenz Fernfeldbedingungen (vgl. Abschnitt 2.7.4) gelten. Im Koordinaten-System der Apertur, wie es in der Abb. 3.3 dargestellt ist, entspricht dies

- $r = 0,5$ m,
- $\theta = \pi/2$ und
- $\phi = 0$.

Als Anregung diente eine in y -Richtung polarisierte ebene Welle mit einer Amplitude von 1 V/m. Die Abb. 3.12 zeigt einen zeitlichen Ausschnitt des rückgestreuten Feldes. Der vergrößerte Ausschnitt stellt die anhaltende Aperturabstrahlung, die durch das innere Feld angeregt wird, dar. Die Amplitude, die aus den in Abb. 3.12 dargestellten Schwingungen

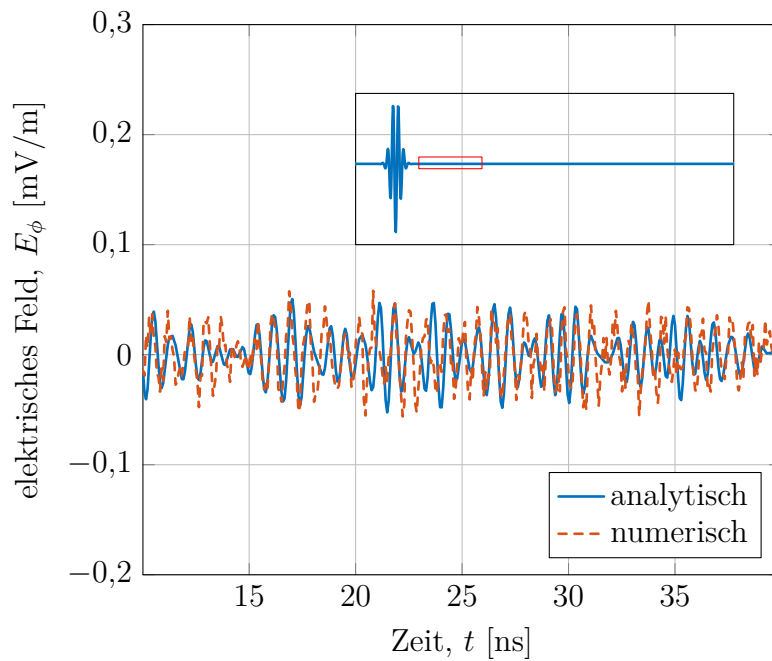


Abbildung 3.12: Zeitlicher Ausschnitt des gestreutes elektrischen Feldes an einem Hohlraumresonator.

erkennbar ist, beträgt nur etwa $1/10000$ der äußeren Streuung, was durch die verhältnismäßig geringe Größe der Apertur bestimmt ist. Zusätzlich ist das Ergebnis der iFFT des analytischen Modells dargestellt. Eine Transformation des Ausschnitts der Simulationsdaten, in dem die äußeren Moden bereits abgeklungen sind, in den Frequenzbereich kann mit den analytischen Ergebnissen für das elektrisch kleine Aperturmodell verglichen werden. Das Ergebnis ist in Abb. 3.13 dargestellt.

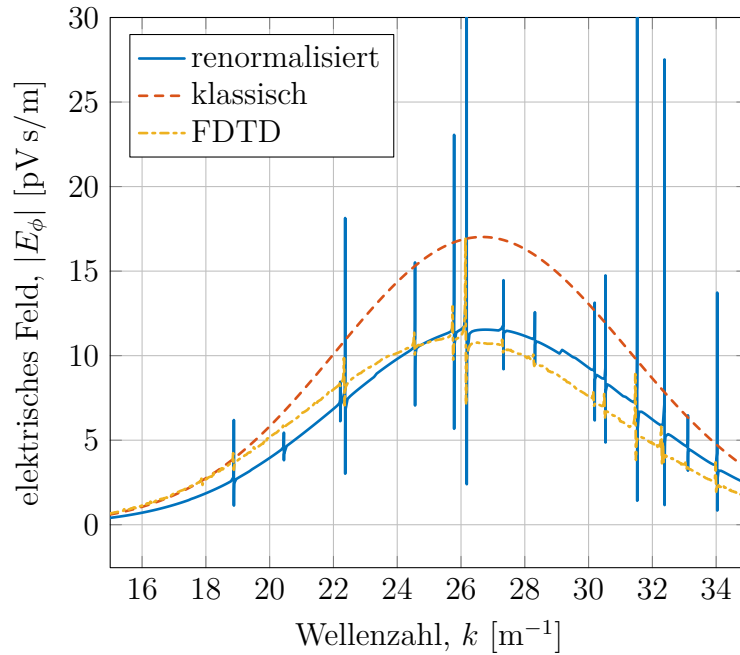


Abbildung 3.13: ϕ -Komponente der Amplitudendichte des elektrischen Feldes im Frequenzbereich, abgestrahlt von der Apertur bei $\theta = \pi/2$ und $r_0 = 0,5$ m in Region I.

3.4 Verallgemeinerung des Modells

Die Betrachtungen in den Abschnitten 3.2 und 3.3 gehen von einer ebenen, in z -Richtung polarisierten, magnetischen Anregung aus. So besitzt das magnetische Moment nur eine z -Komponente. Implizit wird angenommen, dass sich bei abweichender Polarisierung der Anregung die sich zusätzlich ergebenden elektrischen und magnetischen Momente analog behandeln lassen und diese sich nicht gegenseitig beeinflussen. Diese Annahme trifft nur für die Apertur zwischen zwei Halbräumen (Abs. 3.2) zu. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Reflexionen innerhalb der Hohlraumresonatoren zu einer Kopplung der Dipolmomente der Apertur führen.

3.4.1 Verallgemeinerung der Einfallsrichtung

Allgemein gilt, dass das Feld an einem Punkt im Raum die Summe der Felder aller vorhandenen Quellen ist. Im Fall einer kleinen Apertur bedeutet dies für das elektrische Feld in den jeweiligen Regionen nah der Apertur

$$E_x = G_{xx}^{\mathbf{E}_e} J_{e,x} + G_{xy}^{\mathbf{E}_m} J_{m,y} + G_{xz}^{\mathbf{E}_m} J_{m,z} \quad (3.87)$$

$$\text{mit } GJ = \iint_{S_A} G(r, r') J(r') \, d\mathbf{r}' \quad (3.88)$$

Die einzelnen Summanden auf der rechten Seite von (3.87) entsprechen den x -Komponenten der elektrischen Felder, die von den äquivalenten Quellen der Apertur erzeugt werden. Damit lässt sich (3.3a) im Koordinatensystem von Abb. 3.5 explizit aufschreiben als

$$-E_x^0 = \left(G_{I,xx}^{\mathbf{E}_e} + G_{II,xx}^{\mathbf{E}_e}\right)J_{e,x} + \left(G_{I,xy}^{\mathbf{E}_m} + G_{II,xy}^{\mathbf{E}_m}\right)J_{m,y} + \left(G_{I,xz}^{\mathbf{E}_m} + G_{II,xz}^{\mathbf{E}_m}\right)J_{m,z}. \quad (3.89)$$

Nun lässt sich für jeden Summanden von (3.89) eine zu den Ausführungen in den Abschnitten 3.3.3 und 3.2.1 analoge Vorgehensweise finden, so dass sich durch die Zerlegung der Greenschen Funktion in einen singulären und einen regulären Teil

$$\begin{aligned} -E_x^0 = & \left[\alpha_{I,xx,e} + \alpha_{II,xx,e} + j\omega\varepsilon\left(G_{I,xx,r}^{\mathbf{E}_e} + G_{II,xx,r}^{\mathbf{E}_e}\right)\right]p_x + j\omega\mu\left(G_{I,xy,r}^{\mathbf{E}_m} + G_{II,xy,r}^{\mathbf{E}_m}\right)m_y \\ & + j\omega\mu\left(G_{I,xz,r}^{\mathbf{E}_m} + G_{II,xz,r}^{\mathbf{E}_m}\right)m_z \end{aligned} \quad (3.90)$$

ergibt. Dabei wird ausgenutzt, dass die Polarisierbarkeit aus der quasi-stationären Lösung $\bar{\alpha}$ ein diagonaler Tensor ist und damit alle Komponenten abseits der Hauptdiagonalen verschwinden.

Aus (3.3b) lassen sich analog für die tangentialen magnetischen Felder die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} -H_y^0 = & j\omega\varepsilon\left(G_{I,yx,r}^{\mathbf{H}_e} + G_{II,yx,r}^{\mathbf{H}_e}\right)p_x + \left[\alpha_{I,yy,m} + \alpha_{II,yy,m} + j\omega\mu\left(G_{I,yy,r}^{\mathbf{H}_m} + G_{II,yy,r}^{\mathbf{H}_m}\right)\right]m_y \\ & + j\omega\mu\left(G_{I,yz,r}^{\mathbf{H}_m} + G_{II,yz,r}^{\mathbf{H}_m}\right)m_z \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} -H_z^0 = & j\omega\varepsilon\left(G_{I,zx,r}^{\mathbf{H}_e} + G_{II,zx,r}^{\mathbf{H}_e}\right)p_x + j\omega\mu\left(G_{I,zy,r}^{\mathbf{H}_m} + G_{II,zy,r}^{\mathbf{H}_m}\right)m_y \\ & + \left[\alpha_{I,zz,m} + \alpha_{II,zz,m} + j\omega\mu\left(G_{I,zz,r}^{\mathbf{H}_m} + G_{II,zz,r}^{\mathbf{H}_m}\right)\right]m_z \end{aligned} \quad (3.92)$$

ableiten. Die Gleichungen (3.90), (3.91) und (3.92) bilden ein Gleichungssystem und lassen sich in einer handlicheren Form als Matrixgleichung

$$-\begin{pmatrix} E_x^0 \\ H_y^0 \\ H_z^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\bar{\alpha}_I + \bar{\alpha}_{II} + \bar{G}_{I,r} + \bar{G}_{II,r}\right]}_{\bar{S}} \begin{pmatrix} p_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

schreiben. Die einzelnen dyadischen Größen in (3.93) hängen nur von der Geometrie des Problems ab, so dass sich die einzelnen Komponenten der Systemmatrix \bar{S} berechnen lassen und die äquivalenten Aperturmomente mit

$$\begin{pmatrix} p_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = -\bar{S}^{-1} \begin{pmatrix} E_x^0 \\ H_y^0 \\ H_z^0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

bestimmen lassen.

3.4.2 Beladung des Hohlraumresonators

Befindet sich im Inneren des Resonators ein weiterer Streuer, führt dies zu einer Modifikation der Gleichungen für die Randbedingungen an der Apertur (siehe (3.3)). In

$$\mathbf{H}_{||}^0 + \mathbf{H}_{||}^I = \mathbf{H}_{||}^{II} \quad (3.95)$$

$$\text{mit } \mathbf{H}_{||}^{II} = \mathbf{H}_{A,||}^{II} + \mathbf{H}_{L,||}^{II} \quad (3.96)$$

ist das Feld in Region II nicht mehr länger nur mit Quellen der Apertur, sondern auch mit den Quellen, die in einer Last im Inneren des Resonators auftreten, gekoppelt. Nimmt man z. B. an, dass es sich bei der Last um einen elektrischen Dipol handelt, gilt für dessen Feld an der Apertur

$$\mathbf{H}_{L,||}^{II} = \iint_{\text{Draht}} \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_e} \mathbf{J}^e ds, \quad (3.97)$$

wobei \mathbf{J}^e die Stromdichte auf der Oberfläche des Dipols ist. Wenn der Dipol nicht zu dicht an der Apertur positioniert ist und zusätzlich elektrisch klein, kann die Greensche Funktion für das magnetische Feld einer elektrischen Quelle vor das Integral in (3.97) geschoben werden. Damit ergibt sich

$$\mathbf{H}_{L,||}^{II} = j\omega\varepsilon\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_e} \mathbf{p}. \quad (3.98)$$

Auf diese Weise ist eine neue Unbekannte \mathbf{p} in das System eingeführt. Setzt man (3.98) in (3.95) ein erhält man eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Sie kann gelöst werden, indem zusätzlich die Randbedingungen an der Last betrachtet werden. Im Rahmen des gewählten Beispiels ist dies die Forderung, dass das gesamte tangential elektrische Feld

$$\mathbf{E}_{L,||} = 0 = \mathbf{E}_{||}^e + \mathbf{E}_{||}^s \quad (3.99)$$

auf der Oberfläche des Dipols verschwindet. Es ist die Summe des einfallenden und gestreuten Feldes des Dipols. Für den Fall einer elektrisch kleinen Apertur, die vereinfachend durch eine senkrecht einfallende ebene Welle angeregt wird, so dass nur magnetische Dipolmomente wirksam werden, gilt für das einfallende Feld

$$\mathbf{E}_{||}^e = \iint_{\text{Apertur}} \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_m} \mathbf{J}^m ds \approx j\omega\mu\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_m} \mathbf{m}. \quad (3.100)$$

Das Streufeld, das durch die Quellen auf dem Leiter selbst erzeugt wird, kann analog zu Abschnitt 3.3.3 durch

$$\mathbf{E}_{\parallel}^s = \iint_{\text{Dipol}} \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_e} \mathbf{J}^e \, ds \approx \left(\overline{\overline{\alpha}}_{\text{Dipol}}^{-1} + j\omega\varepsilon \overline{\overline{G}}_{c,r}^{\mathbf{E}_e} \right) \mathbf{p} \quad (3.101)$$

beschrieben werden. In (3.101) wurde das Verfahren der Regularisierung für die Bestimmung der Selbstrückwirkung verwendet.

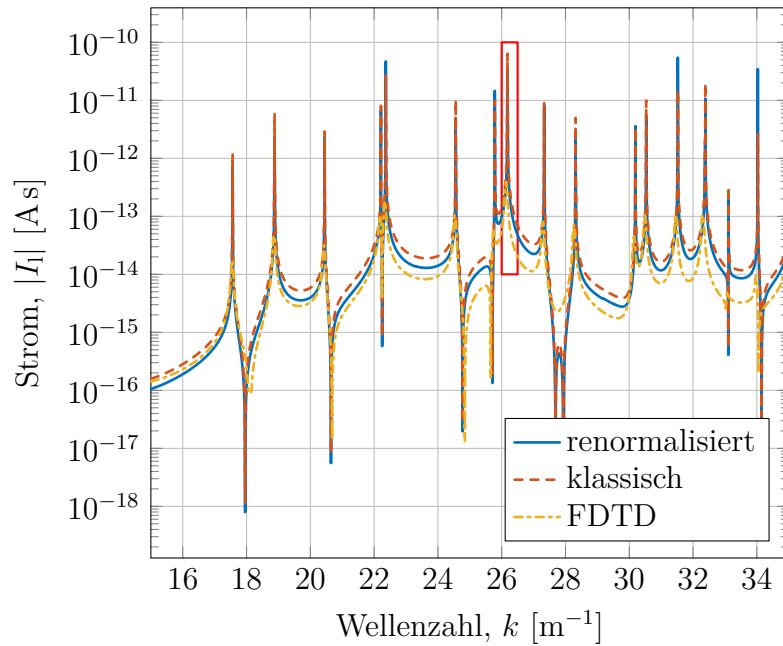
3.4.3 Validierung des eingekoppelten Stromes

Die Betrachtungen aus dem Abschnitt 3.4.2 wurden anhand eines Beispiels validiert. Um die Vielseitigkeit des entwickelten Modells zu unterstreichen, wurde der Strom, der in einer elektrisch kleinen Ringschleife im Inneren eines Resonator durch ein äußeres Feld via einer elektrisch kleinen Apertur erzeugt wird, berechnet. Dazu kann unter Ausnutzung der Dualität (vgl. Abschnitt 2.4.4) aus (3.101) die Gleichung

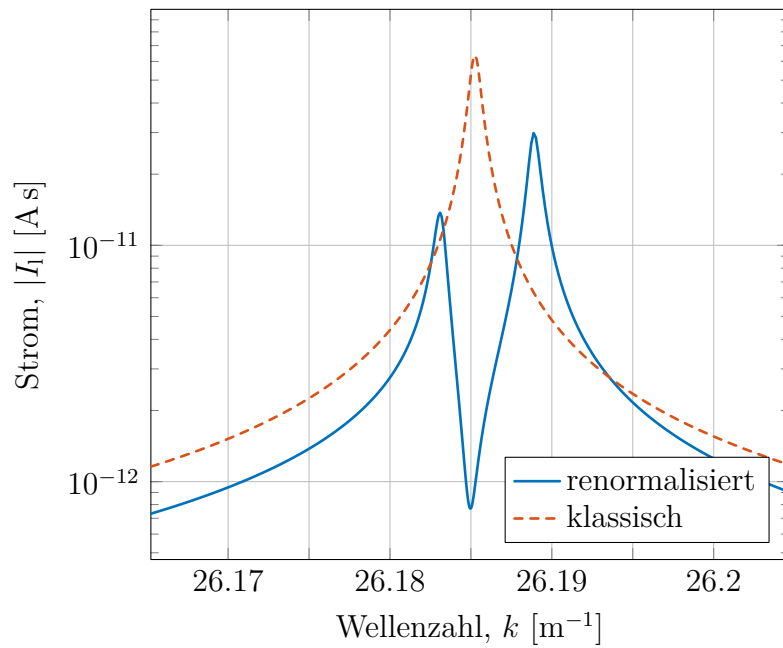
$$\mathbf{H}_{\parallel}^s = \iint_{\text{Dipol}} \overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_m} \mathbf{J}^m \, ds \approx \left(\overline{\overline{\alpha}}_{\text{Dipol},m}^{-1} + j\omega\mu \overline{\overline{G}}_{c,r}^{\mathbf{H}_m} \right) \mathbf{m} \quad (3.102)$$

abgeleitet werden. Durch (3.102) und Betrachtungen analog zu Abschnitt 3.4.2 kann das magnetische Moment $\mathbf{m} = IS_1$ und damit auch der Strom der Leiterschleife bestimmt werden. Bei einer Anregung durch eine äußere, in y -Richtung polarisierte ebene Welle mit einer gaussförmigen Anregungsfeldstärke ergab sich so die in Abb. 3.14 gezeigte Amplitudendichte des Stroms innerhalb der Leiterschleife. Die Mittenfrequenz betrug 1,19 GHz und die Bandbreite 477 MHz. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist insgesamt befriedigend. Während die Frequenzverläufe eindeutig bestätigt werden, gibt es Abweichungen bei der Höhe der Resonanzen, die auf den endlichen Berechnungsaufwand der numerischen Simulation zurückzuführen sind.

Weiterhin sind augenscheinlich kaum Unterschiede zwischen der klassischen Berechnungsweise, die keine Rückwirkungen der Leiterschleife auf die Apertur beinhaltet, und der hier vorgestellten Renormalisierung zu erkennen. Erhöht man jedoch die Frequenzauflösung und betrachtet einen schmalen Bandabschnitt wie in den Abb. 3.14 und 3.14b dargestellt, kann ein sogenanntes Peak-Splitting beobachtet werden, ein typisches Phänomen gekoppelter Systeme. Allerdings lässt sich diese Beobachtung nicht mit den verfügbaren Simulationsdaten bestätigen, da für eine entsprechende Frequenzauflösung ein nicht vertretbarer Rechenaufwand nötig wäre. Abhilfe würde hier eine starke Kopplung der Beladung mit der Apertur schaffen. Im Kapitel 4 wird darauf näher eingegangen.



(a) Gesamtdarstellung



(b) Vergrößerung des Ausschnitts

Abbildung 3.14: Amplitudendichte des Stroms I_1 in der Leiterschleife bei $x = 19$ cm, $y = 7$ cm and $z = 31$ cm im Inneren des Resonators aus Abb. 3.8 und Tab. 3.2.

4 Elektrisch große Aperturen

Die in Abschnitt 3.4 angestellten Überlegungen führen auf die naheliegende Frage, ob sich die Erkenntnisse der Wechselwirkungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und der elektrisch kleinen Quelle auch auf elektrisch große Quellen übertragen lassen. In der Literatur finden sich umfassende Arbeiten, die die Streuung an Objekten mit physikalischen Dimensionen, die nahe oder größer als die Wellenlänge der Anregung sind, beschreiben [Ana03]. Eine exakte analytische Lösungen für die eingekoppelten elektrischen und magnetischen Quellen, die wiederum das gestreute Feld erzeugen, ist in diesen Fällen schwer zu finden. Häufig wird auf Näherungen und numerische Verfahren, im Frequenzbereich insbesondere auf die Momentenmethode (vgl. Abschnitt 2.8.2) zurückgegriffen oder die Dimensionalität der streuenden Apertur reduziert, z. B. durch die Behandlung unendlich langer, dünner Schlitze [HI78]. Eine nähere Erläuterung des Verfahrens, sowie dessen Grundlagen sind in [Har67] im Zusammenhang mit elektromagnetischen Feldern und Quellen beschrieben.

Die hier vorgestellte Methode ist mit der MoM verwandt, weist jedoch entscheidende Unterschiede auf, die zu einigen Vorteilen führen, wie im Folgenden erläutert wird. Das Ziel dieses Abschnittes der Arbeit besteht in der Beschreibung der Kopplung einer einfachen elektrisch großen Apertur zwischen dem Freiraum und dem Hohlraumresonator. Dazu wird anhand des äquivalenten Problems der Einkopplung äußerer Felder in einen elektrisch langen Draht das erweiterte Modell vorgestellt, um dann die Lösung zuerst auf die Einkopplung eines Leiters im Resonator und schließlich auf den magnetischen Strom in einem langen dünnen Schlitz zu übertragen. Im Weiteren wird das Verfahren als die *Methode der kleinen Streuer* (engl. Method of Small Scatterer (MSS)) bezeichnet, ist dem erstmals in [PTV19] vorstellten Verfahren äquivalent und wird hier noch einmal vertieft erläutert.

4.1 Elektrisch langer dünner Draht

Den wesentlichen Grundgedanken der Unterteilung des elektrisch großen Problems in viele gekoppelte elektrisch kleine Probleme haben beinahe alle numerische Verfahren gemeinsam. Der elektrisch lange, dünne Draht wird beispielsweise in viele elektrisch kleine Quellen zerlegt (siehe Abb. 4.3), so dass in unmittelbarer Nähe jedes kleinen Elements

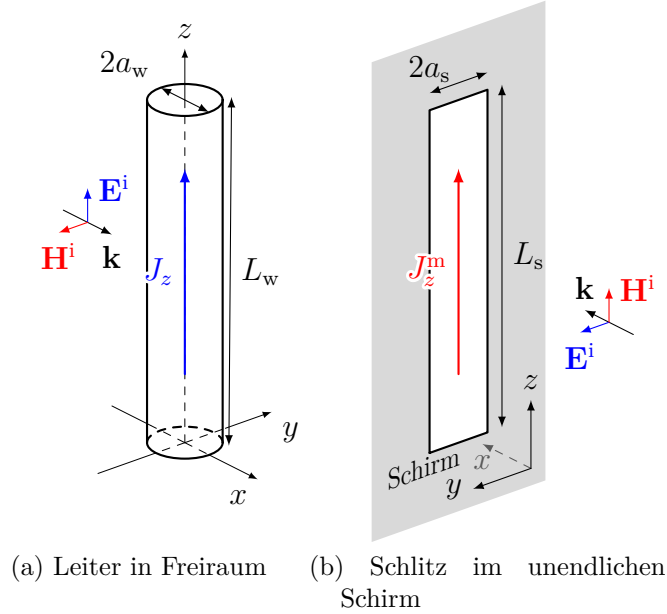


Abbildung 4.1: Elektrisch langer, dünner Leiter und elektrisch langer, dünner Schlitz in der unendlichen Ebene.

von räumlich konstanter Anregung ausgegangen werden kann. Dabei liefert die Lösung der Streuung an einem elektrisch leitenden Draht durch das Ersetzen der kleinen elektrischen Quellen durch kleine magnetische Quellen beinahe direkt auch die Lösung für einen dünnen, langen Schlitz in einer leitfähigen Ebene. Der entscheidende Unterschied zur üblichen Vorgehensweise liegt im Anwenden der analytischen Regularisierung für jedes Element. Ausgehend von der Randbedingung für das elektrische Feld auf einem perfekten Leiter

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 = \mathbf{E}_{\parallel}^i + \mathbf{E}_{\parallel}^s \quad (4.1)$$

und dem aufeinander folgenden Einsetzen von (2.12) und (2.62) erhält man mit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{\text{Draht}} G_{f,D}^{\mathbf{A}_e}(z, z') J_{e,z}(z') dz' = -j\omega\varepsilon E_z^i(z) \quad (4.2)$$

eine gemischte Integral-Differentialgleichung für den zu bestimmenden Strom auf einem dünnen Draht in z -Richtung. Hier ist $G_{f,D}^{\mathbf{A}_e}$ die Greensche Funktion für das Vektorpotential des Freiraums, modifiziert für einen unendlich leitfähigen Leiter auf dem sich der elektrische Strom nur in z -Richtung und konzentriert auf die Symmetrieachse ausbreiten kann. Explizit gilt im Rahmen der sogenannten Dünndraht-Näherung [TIK97, S. 127]

$$G_{f,D}^{\mathbf{A}_e} = \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2+a^2}}. \quad (4.3)$$

Eine nähere Untersuchung von (4.3) offenbart einige Eigenschaften, die für die Lösung von (4.2) nützlich sind. In der Abbildung 4.2 ist der generelle Verlauf der Greenschen Funktion in Abhängigkeit des betrachteten Abstands zwischen den Leiterpunkten zu sehen. Gleichzeitig ist das erste Glied der Taylor-Entwicklung von (4.3)

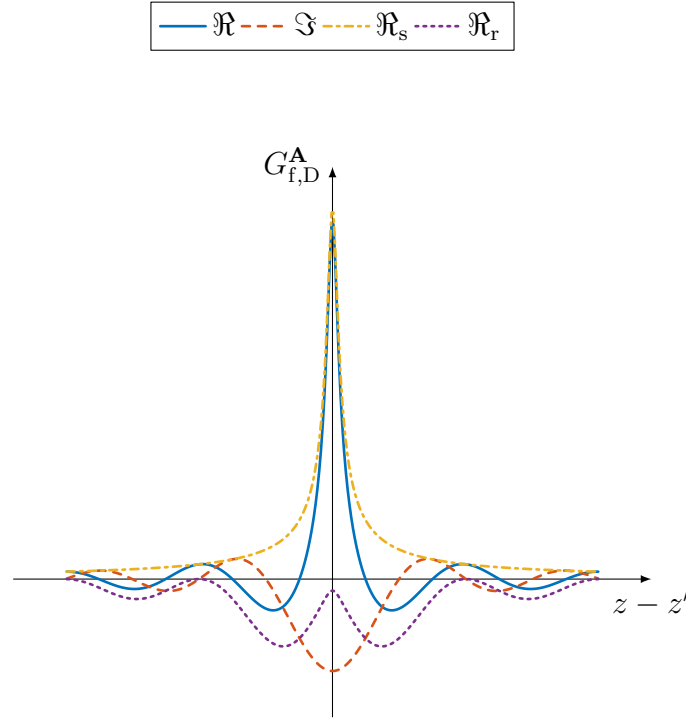


Abbildung 4.2: Verschiedene Anteile der Greenschen Funktion für das Vektorpotential eines langen, dünnen Drahtes und die Approximation durch deren 1. Taylor-Glied \mathfrak{R}_s , sowie der regularisierte Anteil \mathfrak{R}_r .

$$\frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} - jk - \frac{k^2}{2}\sqrt{(z-z')^2+a^2} + \frac{jk^3}{6}\left((z-z')^2+a^2\right) + \dots \quad (4.4)$$

dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Greensche Funktion durch das erste Taylor-Glied für kleine Abstände sehr gut approximiert wird. Weiter nimmt die relative Breite des Maximums für kleine Leiterdurchmesser ab, so dass unter den Bedingungen

$$ka \ll 1 \quad \text{und} \quad L \ll a$$

(4.2) durch

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)J_{e,z}(z)D(z) = -j\omega\epsilon 4\pi E_z^i(z) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } D(z) &= \int_{\text{Draht}} \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} dz' \\ &= \ln\left(\sqrt{(z-L)^2 + a^2} - z + L\right) - \ln\left(\sqrt{z^2 + a^2} - z\right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

approximiert werden kann, wie in [RT08, Kap. 4] und [TRI95] im Rahmen der Leitungstheorie gezeigt wird. Mit (4.5) wurde die Integral-Differential-Gleichung (4.2) in eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung überführt, die sich mit den üblichen Mitteln lösen lässt. Die Existenz einer rein analytischen Lösung ist dabei abhängig von der Anregungsfunktion E_z^i . Allgemein lässt sich die Lösung unter Beachtung der Randbedingung für die Stromdichte an den Drahtenden erneut mit dem in Abschnitt 2.5 erläuterten Formalismus als

$$J_{e,z}(z) = \frac{\int_{\text{Draht}} g(z, z') E_z^i(z') dz'}{D(z)} \quad (4.7)$$

darstellen. Die Greensche Funktion g für den eingekoppelten Strom lautet

$$g = -4\pi j\omega\varepsilon \frac{\sin(kz_<) \sin(k(z_> - L))}{k \sin(kL)} \quad (4.8)$$

$$\text{mit } z_< = \min\{z, z'\} \quad \text{und} \quad z_> = \max\{z, z'\}.$$

Setzt man in (4.7) als Anregung eine ebene Welle an, lässt sich das Integral analytisch lösen und man erhält die Funktion des Stroms entlang des Leiters. Die wesentliche Einschränkung dieser Lösung ist die Vernachlässigung der Abstrahlung oder Rückwirkung des zu bestimmenden Stroms. Dies führt zu Singularitäten des Stroms, wenn der Nenner des zweiten Bruchs auf der rechten Seite von (4.8) verschwindet, da sich das durch (4.7) beschriebene System in Resonanz befindet und gleichzeitig keine Verluste berücksichtigt werden. An dieser Stelle lassen sich die Erkenntnisse aus dem Abschnitt 3.2 und dessen Unterabschnitten anwenden und übertragen. In dem genannten Abschnitt wurde eine Verletzung der Energieerhaltung bei der Bestimmung der Abstrahlung der induzierten Quellen diskutiert, wenn quasistatische Bedingungen angenommen werden. Abhilfe dabei schaffte die Berücksichtigung des 2. Summanden der Taylor-Reihe der Greenschen Funktion.

Um die Ergebnisse zu übertragen, wird in einem ersten Schritt in (4.2) wie im Abschnitt 3.2.1 die Singularität extrahiert. Dazu ist es sinnvoll $G_{f,D}^{\mathbf{A}_e}$ in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \left[\int_{\text{Draht}} \frac{\cos(kR)}{R} J_{e,z}(z') dz' \right. \\ \left. - j \int_{\text{Draht}} \frac{\sin(kR)}{R} J_{e,z}(z') dz' \right] = -j\omega\varepsilon 4\pi E_z^i(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{mit } R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

aufzuteilen. Dabei wird offenbar, dass die Singularität nur im Realteil wirksam wird, da der Imaginärteil für kleine Abstände $|z - z'|$ gegen 1 strebt. Um die Singularität aus dem Realteil von (4.9) zu extrahieren, wird dieser in zwei weitere Anteile zerlegt. Die sich so ergebenden drei Anteile der Greenschen Funktion sind

$$G_{f,D}^{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{4\pi R}}_{G_{f,\Re_s}^{\mathbf{A}}} + \underbrace{\frac{\cos(-kR) - 1}{4\pi R}}_{G_{f,\Re_r}^{\mathbf{A}}} + j \underbrace{\frac{\sin(-kR)}{4\pi R}}_{G_{f,\Im}^{\mathbf{A}}}. \quad (4.10)$$

Zerlegt man andererseits das einfallende Feld E_z^i formal in drei entsprechende, nicht physikalische Anteile

$$E^{i,\Re_s} + E^{i,\Re_r} + E^{i,\Im} = E_z^i, \quad (4.11)$$

lassen sich durch Einsetzen von (4.10) und (4.11) in (4.2) drei separat behandelbare Probleme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^L G_{f,\Re_s}^{\mathbf{A}_e} J_z dz' = -j\omega\varepsilon E^{i,\Re_s} \quad (4.12a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^L G_{f,\Re_r}^{\mathbf{A}_e} J_z dz' = -j\omega\varepsilon E^{i,\Re_r} \quad (4.12b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^L j G_{f,\Im}^{\mathbf{A}_e} J_z dz' = -j\omega\varepsilon E^{i,\Im} \quad (4.12c)$$

konstruieren. Die Gleichungen (4.12) lassen sich auf verschiedene Weise analytisch approximiert lösen, wie im Folgenden gezeigt wird. Man beachte, dass die Summanden in (4.11) unbekannt sind. Das heißt, die Lösungen von (4.12) stellen nur formale Lösungen dar. Erst eine Rekombination der Ergebnisse der einzelnen Anteile erlaubt die explizite Lösung eines konkreten Problems, wie in den Abschnitten 4.1.4 und 4.3.1 erläutert und demonstriert wird.

4.1.1 Quasi-stationärer Realteil

Betrachtet man zunächst nur (4.12a) zeigt sich schnell, dass die Ergebnisse (4.7) und (4.8) bereits die ersten Schritte zur Lösung sind. In einem nächsten Schritt wird der Leiter in elektrisch kleine Elemente zerlegt, so dass von einer örtlich konstanten Anregung ausgegangen werden kann (vgl. Abb. 4.3). So sind auch beliebige einfallende Felder behandelbar, was für Betrachtungen im Abschnitt 4.2 von Nutzen sein wird. Dem äquivalent ist der Übergang der Integral-Gleichung (4.7) in ein Gleichungssystem für N Einzelemente

$$J_1(z) = E_z^{i, \Re_s}(z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + E_z^{i, \Re_s}(z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + \dots \quad (4.13a)$$

$$J_2(z) = E_z^{i, \Re_s}(z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + E_z^{i, \Re_s}(z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + \dots \quad (4.13b)$$

⋮

$$J_N(z) = E_z^{i, \Re_s}(z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + E_z^{i, \Re_s}(z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' + \dots \quad (4.13c)$$

Hierbei sind die Koordinaten z_n die Mittelpunkte der Einzelemente und δl ist die Länge eines Abschnitts. Diese wird mit

$$\delta l \leq \frac{\lambda_{\min}}{12} \quad (4.14)$$

so gewählt, dass von elektrisch kleinen Elementen ausgegangen werden kann. In Anbe-

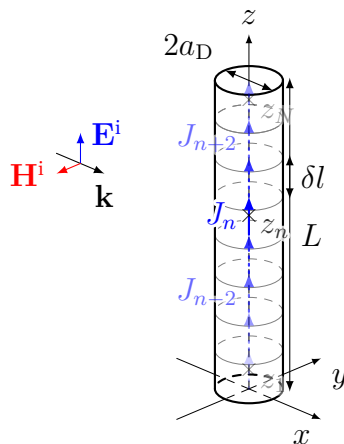


Abbildung 4.3: Diskretisierung des Drahtes.

tracht der ursprünglichen Zielstellung der Beschreibung der Streuung elektromagnetischer Felder und der Vereinheitlichung zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Dipolmomente kleiner Streuer, lässt sich mit

$$\begin{aligned} \int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} J_n(z) dz &= E_z^{i, \Re_s}(z_1) \int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' dz \\ &+ E_z^{i, \Re_s}(z_2) \int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' dz + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

eine Matrix-Gleichung

$$\bar{p} = [g] \bar{E}^{\text{i}, \mathfrak{R}_s} \quad (4.16)$$

für einen Satz $\bar{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ der elektrischen Dipol-Momente der einzelnen Abschnitte des Drahtes aufstellen. Die in (4.15) auftretenden Doppel-Integrale bestimmen die Elemente

$$[g]_{uv} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_{z_u - \frac{\delta l}{2}}^{z_u + \frac{\delta l}{2}} \int_{z_v - \frac{\delta l}{2}}^{z_v + \frac{\delta l}{2}} g(z, z') dz' dz \quad (4.17)$$

und können mit Blick auf (4.8) analytisch ausgewertet werden. Das Ergebnis ist

$$[g]_{uv} = 16\pi \sin^2\left(\frac{k\delta l}{2}\right) \frac{\sin(kz_<) \sin(k(L - z_>))}{k^3 \sin(kL)} \quad (4.18)$$

wobei $z_< = \min\{z_u, z_v\}$ und $z_> = \max\{z_u, z_v\}$.

Es ist zu beachten, dass der Anregungsvektor $\bar{E}^{\text{i}, \mathfrak{R}_s}$ als unbekannt betrachtet werden muss. Damit ist (4.16) nur formal eine Lösung. Wie später zu sehen sein wird, ergibt sich die eigentliche Lösung aus der Überlagerung der separaten Lösungen für die Integralterme von (4.12).

4.1.2 Imaginärteil

Mit Blick auf Abb. 4.2 und der zuvor beschriebenen Zerlegung des Drahtes in elektrisch kleine Dipol-Momente, wird eine einfache Behandlung des Imaginärteils der Greenschen Funktion möglich. Der reguläre Verlauf auch für kurze Abstände, ermöglicht die Approximation eines elementweise konstanten Imaginärteils der Greenschen Funktion, der so für jedes Element entsprechend

$$E_z^{\text{i}, \mathfrak{S}}(z_1) = G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_1, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_1, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + \dots \quad (4.19a)$$

$$E_z^{\text{i}, \mathfrak{S}}(z_2) = G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_2, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_2, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + \dots \quad (4.19b)$$

⋮

$$E_z^{\text{i}, \mathfrak{S}}(z_N) = G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_N, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + G_{\text{f}, \mathfrak{S}}^{\text{E}_e}(z_N, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_{e,z}(z') dz' + \dots \quad (4.19c)$$

aus dem Integral gezogen werden kann. Die Gleichungen (4.19) beschreiben erneut ein Gleichungssystem, dass sich nach einigen Umformungen als

$$\bar{E}^{i,\mathfrak{S}} = [G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e}] \bar{p} \quad (4.20)$$

schreiben lässt. Dabei sind die expliziten Matrixeinträge

$$[G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e}]_{uv} = \frac{j}{4\pi R^5} \left((a^4 k^2 + (k^2 \zeta^2 - 1) a^2 + 2\zeta^2) \sin(kR) + kR \cos(kR) (a^2 - 2\zeta^2) \right) \quad (4.21)$$

mit

$$R = \sqrt{a^2 + \zeta^2} \quad \text{und} \quad \zeta = z_u - z_v.$$

4.1.3 Regularisierter Realteil

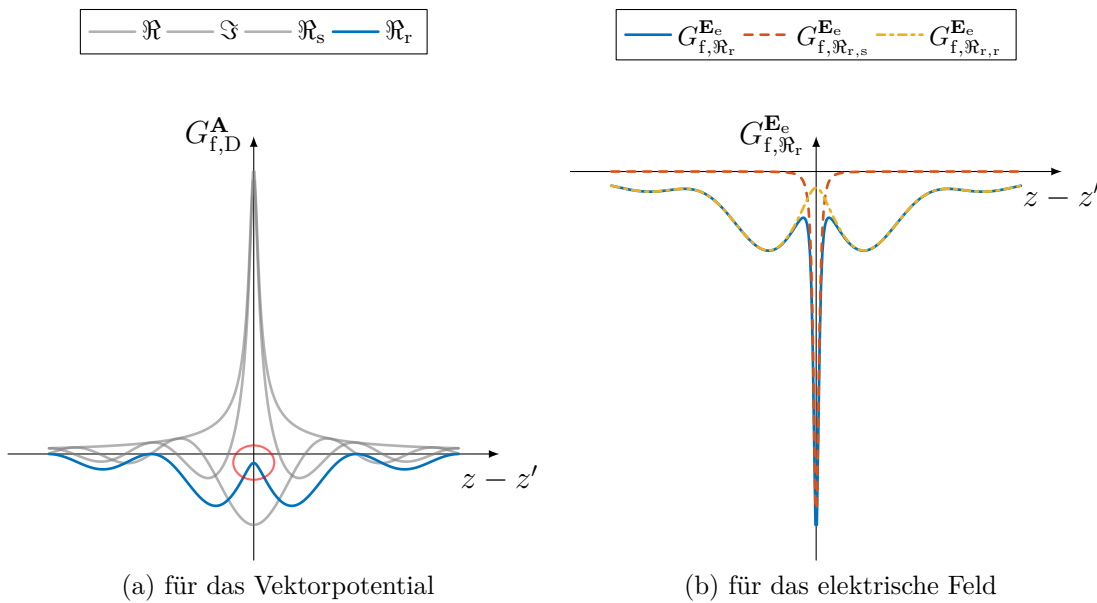


Abbildung 4.4: Darstellung der Irregularität des regularisierten Realteils der Greenschen Funktion für das elektrische Feld (b), hervorgerufen durch die zweifache Ableitung des regularisierten Realteils der Greenschen Funktion für das Vektorpotential (a) für kleine Abstände.

Die Gleichung (4.12b) stellt das letzte verbleibende Teilproblem dar. Die Abbildung 4.4a stellt noch einmal den charakteristischen Verlauf des regularisierten Realteils der Greenschen Funktion dar. Dabei liegt besonderes Augenmerk auf dem Verhalten der Funktion bei kleinen Abständen. Der relativ scharfe *Knick*, der für dünne Drähte an dieser Stelle auftritt, führt durch die Anwendung des Differentialoperators auf den Integrationskernel

$$j\omega\varepsilon G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{A}_e} \quad (4.22)$$

in (4.12b) zu einer Irregularität, die die Annahme elementweiser statischer Bedingungen für kleine Abstände verbietet. Die Irregularität ist in Abb. 4.4b exemplarisch dargestellt. Allerdings kann die Irregularität mit

$$G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} = \underbrace{G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} - G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e}}_{G_{f,\mathfrak{R}_{r,r}}^{\mathbf{E}_e}} + G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e} \quad (4.23)$$

in einem zu (4.10) ähnlichen Verfahren extrahiert werden, wie in Abb. 4.4b ebenfalls dargestellt ist. Dabei ist

$$j\omega\varepsilon G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} = \frac{3z^2(\cos(kR) - 1 + kR \sin(kR))}{4\pi R^5} - \frac{(k^2 z^2 + 1) \cos(kR) - 1}{4\pi R^3} - \frac{k(\sin(kR) - kR(\cos(kR) - 1))}{4\pi R^2} \quad (4.24)$$

$$\text{und } j\omega\varepsilon G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e} = -\frac{k^2 a^2}{8\pi R^3}. \quad (4.25)$$

Das Ergebnis ist ein für alle Abstände regulärer Ausdruck für die Greensche Funktion des elektrischen Feldes $G_{f,\mathfrak{R}_{r,r}}^{\mathbf{E}_e}$, für den die Annahme elementweise konstanter Bedingungen anwendbar ist. Gleichzeitig kann die extrahierte Irregularität $G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e}$ ähnlich wie in (4.5) behandelt werden. Ein Einsetzen von (4.23) in (4.12b) führt auf

$$-E^{i,\mathfrak{R}_r}(z) = \int_0^L G_{f,\mathfrak{R}_{r,r}}^{\mathbf{E}_e}(z, z') J(z') dz' + \int_0^L G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e}(z, z') J(z') dz', \quad (4.26)$$

wobei im zweiten Integral $G_{f,\mathfrak{R}_{r,s}}^{\mathbf{E}_e}$ wie eine Delta-Funktion wirkt, weshalb die Stromdichte $J(z')$ aus dem zweiten Integral gezogen werden kann. Das verbleibende Integral kann mit (4.25) analytisch bestimmt werden. Das erste Integral in (4.26) kann aufgrund des regulären Verhaltens von $G_{f,\mathfrak{R}_{r,r}}^{\mathbf{E}_e}$ wie im Abschnitt 4.1.2 behandelt werden. So ergibt sich

$$\bar{E}^{i,\mathfrak{R}_r} = [G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e}] \bar{p} \quad (4.27)$$

als Lösung für den regularisierten Realteil.

4.1.4 Gesamtlösung

Mit (4.16), (4.20) und (4.27) liegen nun alle nötigen Teillösungen vor. Die Matrixgleichung für das Gesamtproblem lässt sich nun durch ein Einsetzen der genannten Gleichungen in (4.11) schreiben als

$$[[g]^{-1} + [G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e}] + [G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e}]] \bar{p} = \bar{E}^i. \quad (4.28)$$

Damit ist die Lösung

$$\left[[g]^{-1} + \left[G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e} \right] + \left[G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} \right] \right]^{-1} \bar{E}^i = \bar{p}. \quad (4.29)$$

Die Struktur von (4.28) erlaubt eine physikalische Interpretation der einzelnen Matrizen. Während $[g]^{-1}$ die quasi-statische Wechselwirkung direkt benachbarter Dipolelemente beschreibt und dabei alle feldgebundenen Effekte vernachlässigt, repräsentiert $\left[G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e} \right]$ die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Elementen über die abgestrahlten Felder. So werden Abstrahlungsverluste und ihre Effekte auf die Stromverteilung auf dem Draht konsistent im Modell berücksichtigt. Schließlich vervollständigt die Matrix $\left[G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} \right]$ das Modell durch Kopplungseffekte über das Nahfeld der Dipolelemente. Zusammen liefert (4.29) die Gesamtlösung des Problems der Feldeinkopplung in einen langen, dünnen Leiter im Freiraum. Gegenüber der Momenten-Methode ergibt sich hier der Vorteil, dass durch die Regularisierung vollständig auf die numerische Berechnung anderweitig nicht lösbarer Integrale verzichtet werden kann.

Allerdings gilt die Einschränkung auf der Lösung für einen geraden Leiter, wobei auch andere kanonische Lösungen für Geometrien wie den dünnen Torus oder die dünne Kreisscheibe denkbar sind. Da auf dem Weg zu (4.29) eine Reihe von Approximationen notwendig waren, wird in Abschnitt 4.1.5 ein Vergleich der Ergebnisse einer MoM-Simulation mit Hilfe der kommerziellen Software FEKO [Hyp17] und der hier vorgestellten MSS anhand eines konkreten Beispiels durchgeführt. Dort wird auch anhand eines konkreten Beispiels ein Vergleich der schrittweisen Berücksichtigung der einzelnen Matrixsummanden aus (4.29) durchgeführt, um deren physikalische Interpretation zu untermauern. Eine insgesamt sehr gute Übereinstimmung validiert die Methode und rechtfertigt die Anwendung des Verfahrens auf die eigentliche Fragestellung der Kopplung einer elektrisch großen Apertur. Im Anschluss wird das Verfahren im Abschnitt 4.2 auf das Problem der Streuung an einem langen Leiter in einem Resonator angewandt, um durch einen erneuten Vergleich mit numerischen Ergebnissen die Methode auch hier zu validieren.

4.1.5 Validierung für den Strom

Um die MSS für den Draht im Freiraum zu validieren, wurde ein 1 m langer Draht mit einem Durchmesser von 1 mm betrachtet. Als Anregung diente eine einfallende ebene Welle, deren elektrische Feldkomponente in der Einfallsebene, die durch die Längsachse und die Einfallrichtung der Welle aufgespannt wird, liegt. Der Einfallswinkel betrug $\theta = 25^\circ$. Die Amplitude des elektrischen Feldes war $E^i = 1 \text{ V/m}$. In den Abbildungen 4.5 wird der berechnete Strom in der Mitte und nah einem Drahtende bis zu einer Frequenz von 5 GHz verglichen mit einer MoM-Lösung, die mit Hilfe von FEKO bestimmt wurde. In

beiden Fällen wurde der Draht in $N = 201$ Elemente diskretisiert. Da die MSS elektrische Dipolmomente bestimmt, müssen diese Ergebnisse noch mit

$$j\omega\varepsilon\bar{p} = \bar{J}\delta l \quad (4.30)$$

in ein Satz von elementweise konstanten Strömen \bar{J} umgerechnet werden, um beide Methoden vergleichen zu können. Eine sehr gute Übereinstimmung beider Methoden kann festgehalten werden. Weiterhin wurde eine Anregung durch eine diskrete ideale Spannungsquelle untersucht. Dabei wurde der untersuchte Frequenzbereich und damit auch die Diskretisierung beibehalten. Als Ort der Anregung wurde willkürlich das 145. Element ausgewählt, was $z = 72,5$ cm entspricht. Für die Modellierung der Spannungsquelle wurde der Ansatz, der in (4.45) zusammengefasst ist, verwendet. Die Amplitude der Quellspannung betrug $U_0 = 1$ V über alle Frequenzen. In den Abbildungen 4.6 ist der Strom an verschiedenen Orten des Leiters zusammen mit Ergebnissen der MoM dargestellt. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung festzuhalten.

Zusätzlich sind in Abb. 4.7 die Ergebnisse für den Strom an einem weiteren Ort des Drahtes unter Vernachlässigung der verschiedenen Matrizen in (4.29) dargestellt. Der Einfluss der Berücksichtigung der Feldkopplung durch $[G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e}]$ und $[G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e}]$ ist deutlich zu erkennen. Bleiben die Feldkopplungen unberücksichtigt, treten Singularitäten an den Leitungsresonanzen auf. Eine Berücksichtigung der Abstrahlung durch $[G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{E}_e}]$ führt zu endlichen Strömen an den Leitungsresonanzen und nähert die MSS-Ergebnisse den MoM-Ergebnissen an. Doch es treten noch Verschiebungen an den Resonanzstellen auf. Eine weitere Berücksichtigung der Matrix $[G_{f,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e}]$ führt schließlich zu einer sehr guten Übereinstimmung.

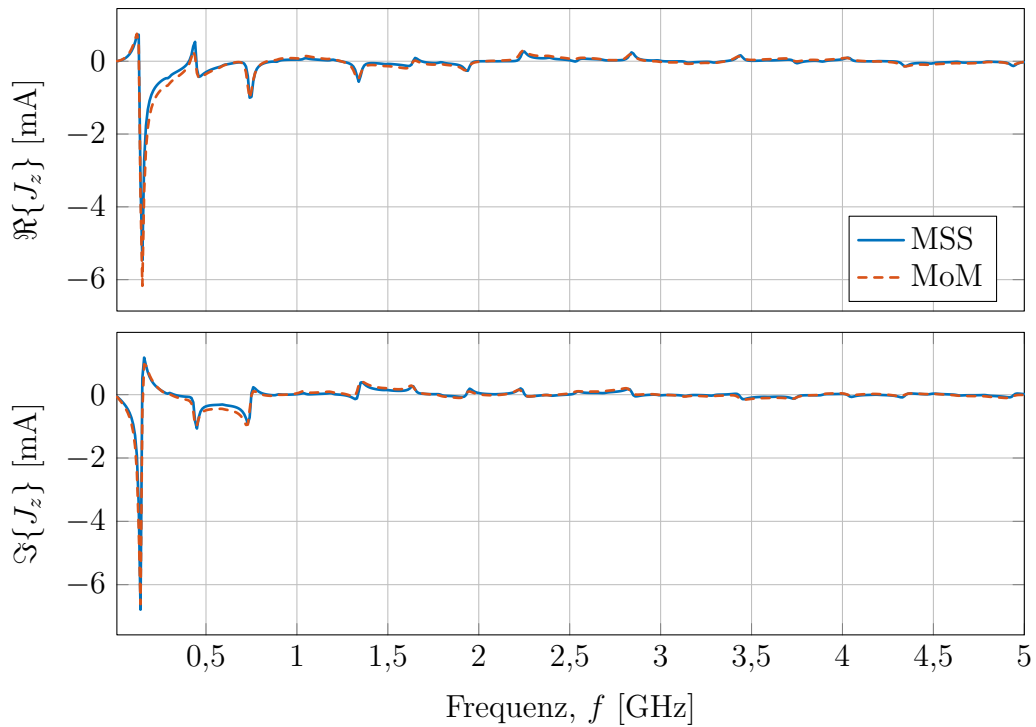
4.1.6 Konvergenz

Die MSS beruht auf zwei grundsätzlichen Approximationen. Zum Einen muss der Draht bezogen auf die Wellenlänge und auf die Drahtlänge dünn sein, d. h. $ka \ll 1$ und $a \ll L$, so dass

$$\int_0^L G_{f,\mathfrak{R}_s}^{\mathbf{A}_e}(z, z') J_z(z') dz' \approx J_z(z) \int_0^L G_{f,\mathfrak{R}_s}^{\mathbf{A}_e}(z, z') dz'. \quad (4.31)$$

Die so ermöglichte analytische Lösung von (4.12a) kann dann durch die anschließende Diskretisierung des Drahtes in elektrisch kleine Elemente durch die weitere Approximation

$$\int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{A}_e}(z, z') J_z(z') dz' \approx G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{A}_e}(z, z_n) \int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} J_z(z') dz' \quad (4.32)$$



(a) Elektrischer Strom in der Mitte des Drahtes.

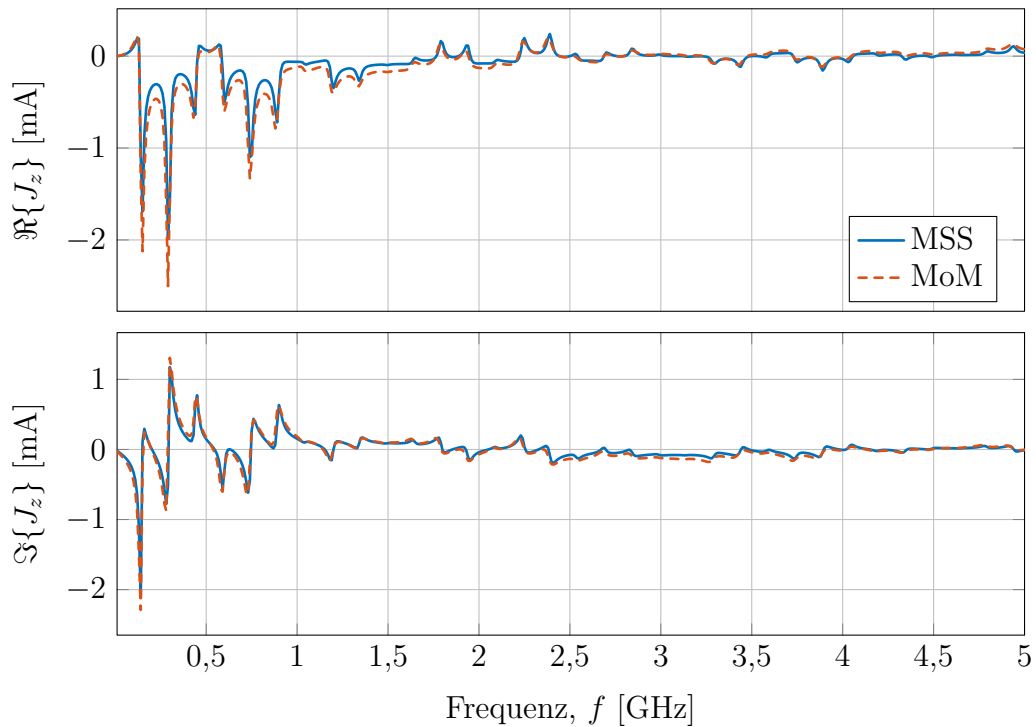
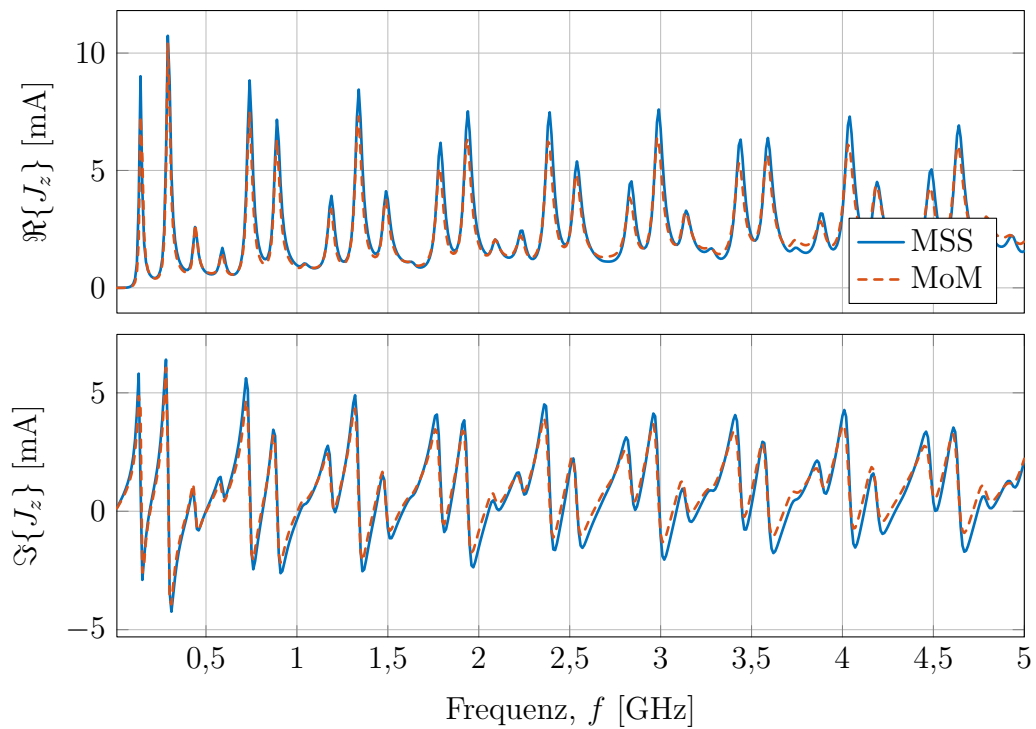
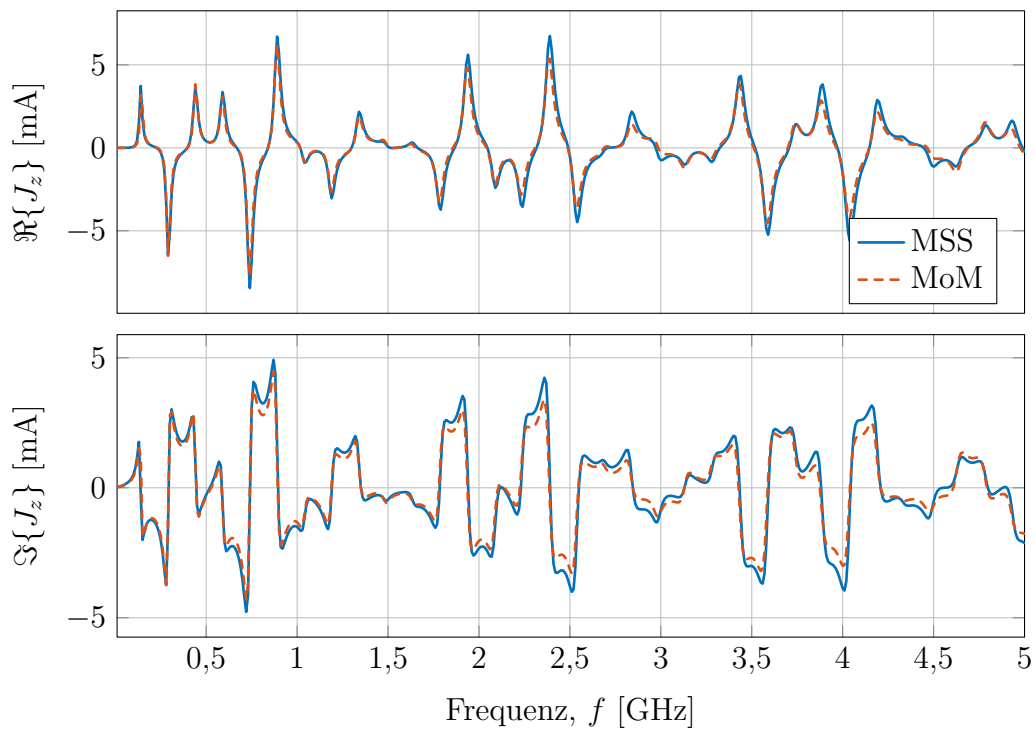
(b) Elektrischer Strom bei $z = 10$ cm.

Abbildung 4.5: Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms in (a) der Mitte und bei (b) $z = 10$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, erzeugt durch eine einfallende ebene Welle, berechnet mit (4.29) (MSS) und FEKO (MoM).



(a) Elektrischer Strom in der Spannungsquelle.



(b) Elektrischer Strom bei $z = 10$ cm.

Abbildung 4.6: Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms erzeugt durch eine ideale Spannungsquelle bei $z = 72,5$ cm, in (a) der Spannungsquelle und bei (b) $z = 10$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, berechnet mit (4.29) (MSS) und FEKO (MoM).

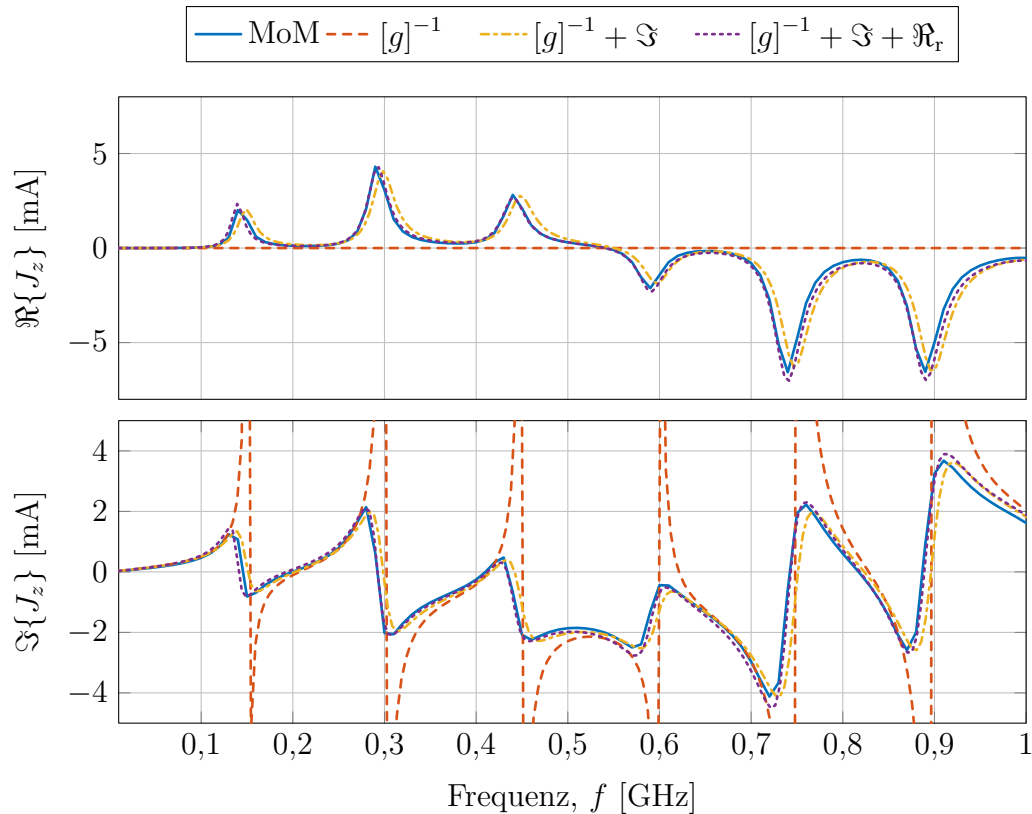


Abbildung 4.7: Real- und Imaginärteile des elektrischen Stroms erzeugt durch eine ideale Spannungsquelle bei $z = 95$ cm eines dünnen elektrisch langen Drahtes, unter schrittweiser Berücksichtigung der einzelnen Summanden der Gleichung (4.29) und verglichen mit der MoM.

vervollständigt werden. Die Gleichung (4.32) beschreibt die Repräsentation der verbleibenden regulären Funktion $G_{f,\mathfrak{S}}^{\mathbf{A}_e}$ durch eine abschnittsweise konstante Treppenfunktion mit der Abschnittslänge δl . Für solche Diskretisierungsverfahren sind Untersuchungen der Konvergenzeigenschaften obligatorisch. Konvergenz bedeutet in diesem Zusammenhang die Verringerung einer Fehlernorm durch Verkleinerung der Diskretisierungslänge. Zu diesem Zweck wurde auf Basis des im Abschnitt 4.1.5 untersuchten Beispiels eine numerische Konvergenzuntersuchung durchgeführt. Als Fehlernorm wurde die L^2 -Norm

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \|J_n - J_{n,\max}\|^2}{\sum_{n=1}^N \|J_{n,\max}\|^2}} \quad (4.33)$$

gewählt, wie sie in der Literatur häufig verwendet wird [WW04]. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.8 dargestellt und lassen klar ein konvergentes Verhalten erkennen.

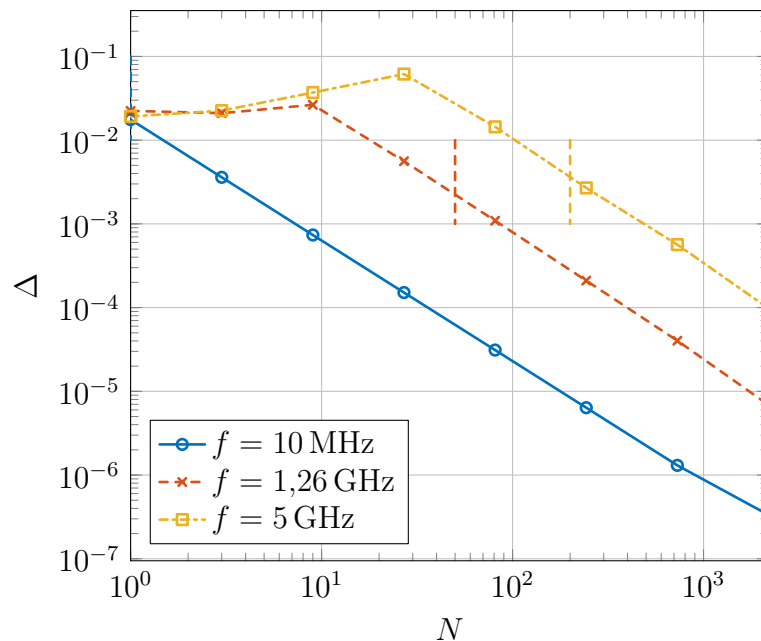


Abbildung 4.8: Relativer Fehler der mit der MSS berechneten Ströme bei schrittweiser Erhöhung der Anzahl der Unbekannten durch Verkleinerung der Diskretisierungslänge. Die vertikalen Linien markieren die Erfüllung der Bedingung (4.14).

4.1.7 Gestreute Nahfelder

Sind die Momente mit (4.29) bestimmt, lassen sich die Streufelder des Leiter prinzipiell als Summe der bekannten Felder der elektrischen Dipole im Freiraum (vgl. Abschnitt 3.3.7) beschreiben. Da diese jedoch häufig in einem sphärischen Koordinatensystem dargestellt werden, in dem der jeweilige Dipol im Ursprung positioniert ist, ist diese Darstellung ungünstig für die Bestimmung der Nahfelder. Alternativ dazu können mit Hilfe des Formalismus der dyadischen Greenschen Funktionen, die Felder eines elektrisch kleinen Dipols an jedem Ort auch in kartesischen Koordinaten angegeben werden. Für die Komponenten des elektrischen Feldes eines beliebig im Raum positionierten Dipols gilt dann analog zu (3.86)

$$\mathbf{E} = j\omega\varepsilon\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{E}_e} \mathbf{p} \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{H}_e} \mathbf{p} \quad (4.34b)$$

$$\text{mit } \overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{E}_e} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla\nabla \cdot \overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{A}_e} - j\omega\mu\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{A}_e} \quad (4.34c)$$

$$\text{und } \overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{H}_e} = \nabla \times \overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{A}_e} . \quad (4.34d)$$

Explizit ergeben sich nach Abschnitt 2.5.3 die einzelnen Komponenten der Greenschen Funktionen der Felder mit der Nomenklatur $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ für das elektrische Feld

als

$$\left(\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{E}_e}\right)_{uu} = \frac{e^{-jkR}}{j\omega\varepsilon 4\pi} \left(\frac{jk}{R^2} - \frac{jk3(x_u - x'_u)}{R^4} + \frac{k^2(x_u - x'_u)^2 + 1}{R^3} + \frac{k^2}{R} - \frac{3(x_u - x'_u)^2}{R^5} \right) \quad (4.35a)$$

$$\left(\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{E}_e}\right)_{uv} = \frac{3e^{-jkR}}{j\omega\varepsilon 4\pi} (x_u - x'_u)(x_v - x'_v) \left(\frac{jk}{R^4} - \frac{k^2}{3R^3} + \frac{1}{R^5} \right), \quad u \neq v \quad (4.35b)$$

und für das magnetische Feld als

$$\left(\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{H}_e}\right)_{uu} = 0 \quad (4.35c)$$

$$\left(\overline{\overline{G}}_f^{\mathbf{H}_e}\right)_{uv} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi} \left(\frac{jk}{R^2} + \frac{1}{R^3} \right) \begin{cases} - (x_w - x'_w) & \text{für } u + v + 1 \pmod{3} = 1 \\ (x_w - x'_w) & \text{für } u + v + 1 \pmod{3} = 2 \end{cases} \quad (4.35d)$$

mit

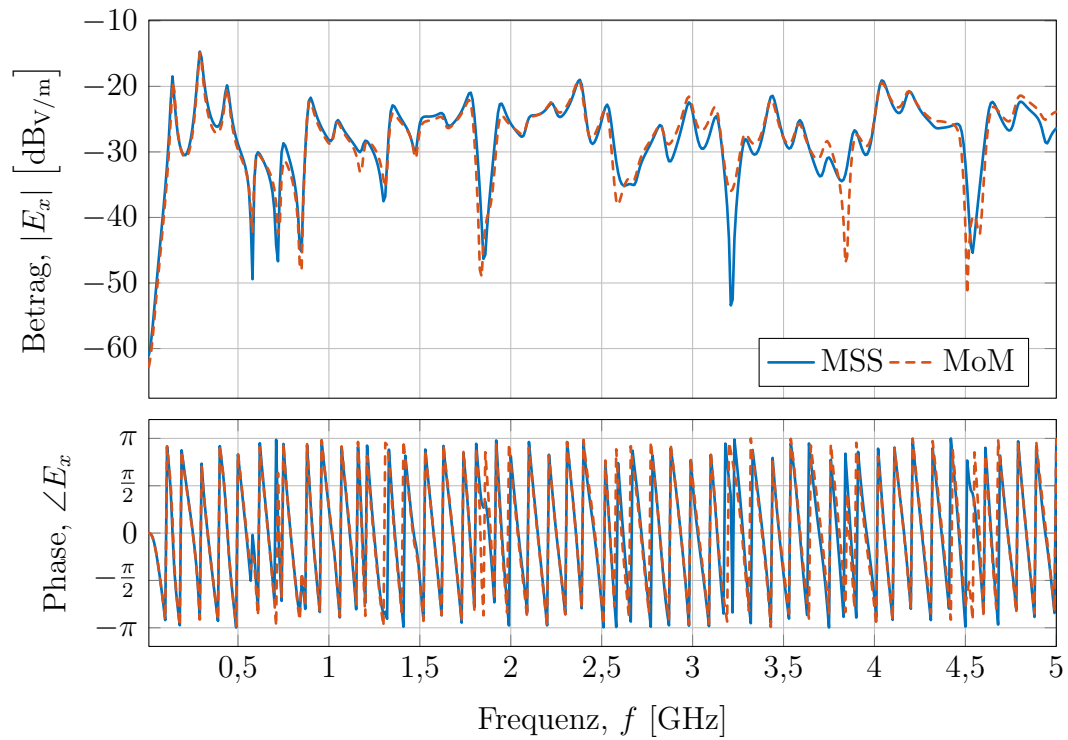
$$u, v \in \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad w = \neg\{\{1, 2, 3\} \cap \{u, v\}\}, \quad \text{sowie}$$

$$R = \sqrt{\sum_{u=1}^3 (x_u - x'_u)^2}. \quad (4.35e)$$

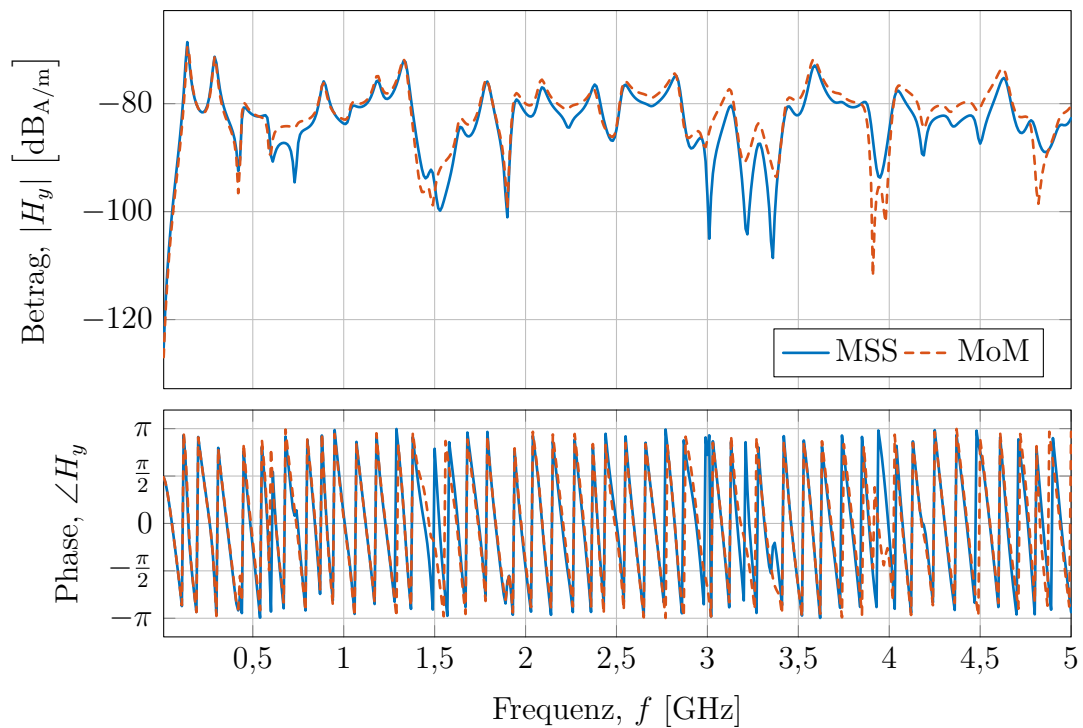
Dabei ist x_u die jeweilige Koordinate des Feldes und x'_u die jeweilige Koordinate der Position des Dipols. Das gesamte Feld eines Sets von Dipolelementen, wie die MSS es liefert, wird dann aus der Summe der sich durch (4.35) ergebenden Einzelfelder bestimmt.

4.1.8 Validierung für die Nahfelder

Mit Hilfe von (4.35) können alle Felder und ihre Richtungen beliebig angeordneter elektrischer Dipole im kartesischen Raum berechnet werden. In den Abb. 4.9 sind exemplarisch das elektrische und magnetische Feld in unterschiedlichen Raumrichtungen und an unterschiedlichen Orten in unmittelbarer Umgebung des Drahtes dargestellt und mit Ergebnissen der MoM validiert. Die geometrischen Parameter des Drahtes entsprechen dem Setup aus Abschnitt 4.1.5 mit der Anregung durch die ideale Spannungsquelle. Die Übereinstimmung ist gut bis sehr gut, auch bis hin zu hohen Frequenzen. Lediglich bei sehr kleinen Beträgen sind Abweichungen zu erkennen, die durch die logarithmische Achsenskalierung überexprimiert sind. Die MSS erlaubt so auch eine semi-analytische Bestimmung der Nahfelder.



(a) Elektrisches Feld bei $x = -2$ m, $y = -0,4$ m und $z = -1$ m



(b) Magnetisches Feld bei $x = 1,2$ m, $y = 2$ m und $z = 0$ m

Abbildung 4.9: Nahfelder an beliebigen Punkten im Raum eines elektrisch langen Drahtes, angeregt durch eine ideale Spannungsquelle.

4.1.9 Gestreute Fernfelder

Um die Wechselwirkung eines Streuers mit elektromagnetischen Feldern effizient zu beschreiben, werden häufig die Fernfelder und deren Frequenz- und Winkelabhängigkeiten untersucht. Um eine vergleichbare Größe verschiedener Streuer unter Fernfeldbedingungen zu erhalten wird dabei häufig der Wirkungsquerschnitt (engl. Radar Cross Section (RCS))

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} \quad (4.36)$$

eingeführt (z. B. in [WP92]). Das gestreute Fernfeld des Drahtes \mathbf{E}^s ist allgemein beschrieben durch (2.97). \mathbf{E}^i ist das einfallende Feld und wird häufig als eine ebene Welle mit der für die gewählte Geometrie relevanten tangentialen Komponente

$$E_z^i = -E_0 e^{-jkz \cos \theta^i} \sin \theta^i \quad (4.37)$$

angenommen. Dabei ist θ^i der Einfallswinkel. Mit der MSS wird der Draht als eine Menge elektrisch kleiner Dipole repräsentiert. Die Fernfelder eines kleinen elektrischen Dipols im Koordinatenursprung sind analog zu (3.85)

$$E_\theta = \frac{jk^3 p_z}{4\pi} e^{-jkr_0} \frac{j \sin \theta}{kr_0} \quad (4.38a)$$

$$H_\phi = \frac{jk^3 p_z}{4\pi\eta_0} e^{-jkr_0} \frac{j \sin \theta}{kr_0}. \quad (4.38b)$$

Da das gestreute Fernfeld des Drahtes die Summe der Fernfelder der Dipole ist, lässt sich dieses für die MSS für die in Abb. 4.3 dargestellte Geometrie schreiben als

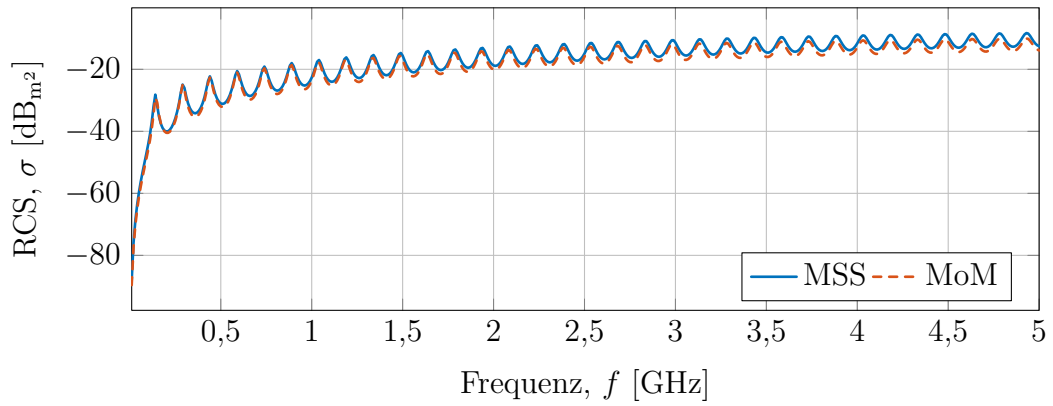
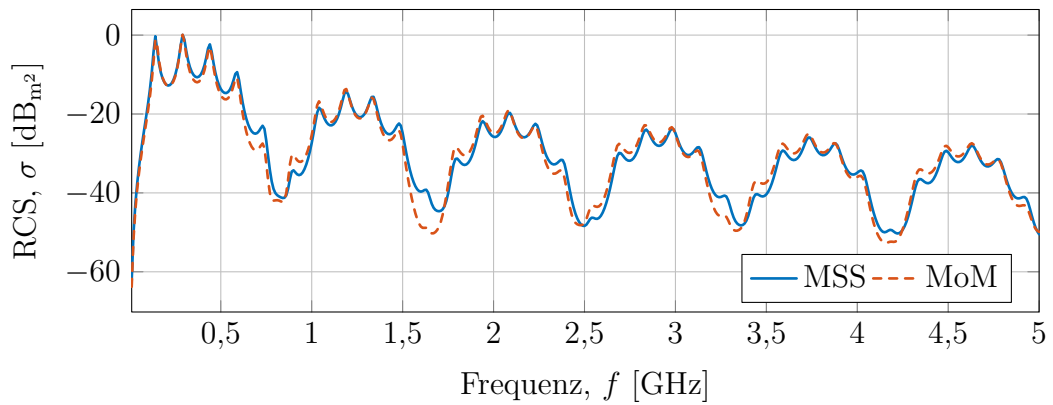
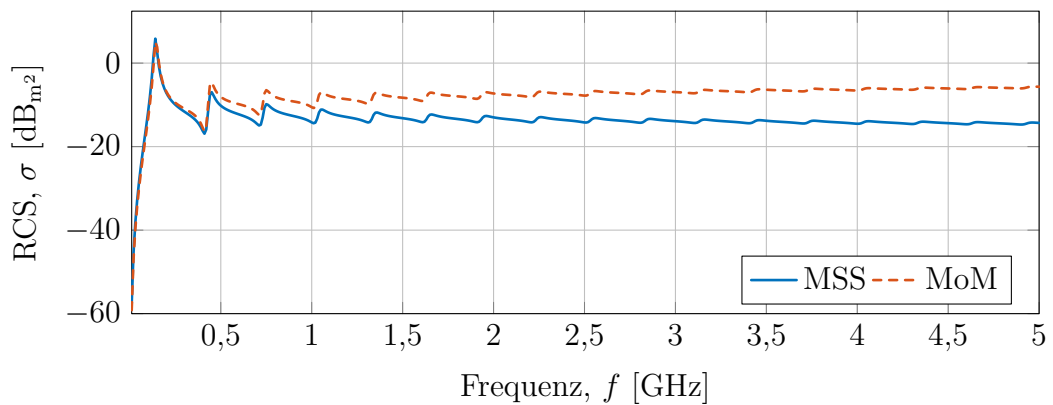
$$E_\theta^s = k^2 \frac{\sin \theta^s}{4\pi r} \sum_n^N p_{z,n} e^{-jkz_n \cos \theta^s} \quad (4.39a)$$

$$H_\phi^s = \frac{E_\theta^s}{\eta_0}. \quad (4.39b)$$

Die Gleichungen (4.39) beschreiben die Parallel-Strahlen-Approximation, bei der der relative Abstand r' der einzelnen Dipole zueinander gegenüber dem Abstand r zwischen dem Beobachtungspunkt und dem Drahtmittelpunkt vernachlässigt wird, da $|r - r'| \approx r$. Da die relative Lage der Dipole unter dem Polarwinkel θ^s der gestreuten Felder zueinander einen großen Einfluss auf die Phasenlage bei der Summation haben kann, wird diese durch den Exponentialterm in (4.39) berücksichtigt (vgl. [TIK97, S. 124]). Setzt man (4.39a) in (4.36) ein, erhält man eine vom Abstand unabhängige Größe, die die Wechselwirkung des Drahtes unter Abhängigkeit des Einfallswinkels θ^i , des Ausfallwinkels θ^s und der Frequenz beschreibt.

4.1.10 Validierung für die Fernfelder

Anhand des Beispiels aus Abschnitt 4.1.5 wird mit (4.36) bis (4.39a) die Winkel- und Frequenzabhängigkeit der Rückstreuung, also bei $\theta^i = \theta^s$ bei einer ebenen Welle an einem Draht mit der MSS berechnet und mit Ergebnissen der MoM verglichen. In den Abb. 4.10 ist die RCS über der Frequenz für verschiedene Streuwinkel dargestellt. Während bei $\theta = 10^\circ$ und 50° eine sehr gute Übereinstimmung für alle Frequenzen vorliegt, sind bei $\theta = 90^\circ$ größere Abweichungen jenseits der ersten Leiterresonanz zu erkennen. Dies ist insofern unerwartet, da alle Ergebnisse in Abb. 4.10 mit Hilfe der selben Systemmatrix bestimmt wurden. Lediglich der Anregungsvektor variiert mit dem Einfallswinkel. Die Ursache dieser Abweichungen sollte Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein.

(a) $\theta = 10^\circ$.(b) $\theta = 50^\circ$.(c) $\theta = 90^\circ$.Abbildung 4.10: Monostatische RCS des Drahtes für verschiedene Streu- und Einfallswinkel θ .

4.2 Elektrisch langer Draht im Resonator

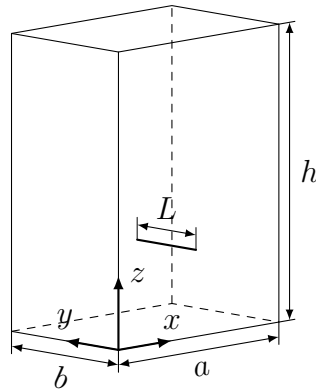


Abbildung 4.11: geometrisches Modell eines mit einem elektrisch langen Leiter beladenen Hohlraumresonators.

Ausgehend von den Ergebnissen im Abschnitt 4.1 kann nun der Draht in vom Freiraum abweichenden Umgebungen betrachtet werden. Ähnliche Fragestellungen wurden in [War+03] und [TNV] behandelt. Hier werden die davon unabhängigen Ergebnisse aus [PV18] noch einmal erläutert und vertieft dargestellt. Für eine beispielhafte Konfiguration, wie sie in der Abb. 4.11 zu sehen ist, kann eine Integralgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \int_{\text{Draht}} \left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy}(y, y') J_{e,y}(y') dy' = -j\omega\epsilon E_y^i(y) \quad (4.40)$$

für den Strom auf dem Leiter aufgestellt werden, die bis auf die veränderte Greensche Funktion, der Gleichung (4.2) entspricht. $\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy}$ ist dabei die yy -Komponente der dyadischen Greenschen Funktion des Vektorpotentials elektrischer Quellen. Sie lässt sich nahezu identisch zu den Ausführungen in Abschnitt 3.3.1 zum Vektorpotential für magnetische Quellen im Hohlraumresonator ableiten. Lediglich die abweichenden Randbedingungen an den Resonatorwänden für elektrische Quellen (siehe Abschnitt 2.4.5) führen zu

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} &= \frac{1}{ha} \sum_{n_z, n_x=0}^{\infty} \epsilon_{n_z} \epsilon_{n_x} \sin k_z^\nu z \sin k_z^\nu z' \\ &\quad \times \sin k_x^\nu x \sin k_x^\nu x' \frac{1}{\gamma_\nu \sinh(\gamma_\nu b)} \\ &\quad \times \begin{cases} \cosh(\gamma_\nu y) \cosh(\gamma_\nu(b-y)) & \text{für } y \geq y' \\ \cosh(\gamma_\nu y') \cosh(\gamma_\nu(b-y)) & \text{für } y' \geq y \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

wobei $\gamma_\nu = \sqrt{(k_z^\nu)^2 + (k_x^\nu)^2 - k_c^2}$.

Wie zuvor im Abschnitt 3.3.3, kann auch diese unendliche Summe in zwei Teile

$$\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} = \frac{1}{ha} \left(\sum_{n_z, n_x=0}^{\gamma_{\max}} \dots + \sum_{\gamma_{\max}}^{\infty} \dots \right) \quad (4.42)$$

zerlegt werden. Die zweite Summe auf der rechten Seite von (4.42) kann wie zuvor durch ein Integral approximiert werden und ergibt

$$\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} \approx \frac{1}{ha} \sum_{n_z, n_x=0}^{\gamma_{\max}} \dots + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\gamma_{\max}R}}{R}. \quad (4.43)$$

Der Exponentialausdruck in (4.43) repräsentiert die Wechselwirkung zwischen Quelle und Feld nahe des Leiters und entspricht bis auf den rein reellen Zähler der Greenschen Funktion für den Freiraum. Entsprechend kann die Methode nahezu analog zu den Betrachtungen aus Abschnitt 4.1 auf (4.43) angewandt werden. Nach der Anwendung der Schritte

1. Einsetzen von (4.43) in (4.40),
2. Separierung der Anregung (vgl. (4.11)),
3. Übergang von (4.40) in eine Differentialgleichung (vgl. (4.5)),
4. anschließenden Diskretisierung,
5. Erstellung der separaten Matrix-Gleichungen für die Momente und
6. Einsetzen der separaten Lösungen aus Schritt 2

ergibt sich als Lösung eine neue Matrixgleichung

$$\left[[g]^{-1} + \left[G_{c,r}^{\mathbf{E}_e} \right] + \left[G_{c,\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{E}_e} \right] \right]^{-1} \bar{E}^i = \bar{p}, \quad (4.44)$$

deren Struktur jener von (4.29) entspricht. Dabei repräsentiert $[g]^{-1}$ die quasi-statische Wechselwirkung der Leiterelemente und ist im Resonator und im Freiraum identisch. $\left[G_{c,r}^{\mathbf{E}_e} \right]$ ist an die Stelle der rein imaginären und damit vollständig verlustbehafteten feldgebundenen Wechselwirkung im Freiraum getreten. Der neue Abstrahlungsterm besitzt einen großen reellen Anteil, was die verlustarme Abstrahlung im Resonator widerspiegelt. Wie zuvor ist p_n ein Satz von Dipolmomenten, der den Streuquellen an einem elektrisch langen, dünnen Leiter entspricht. Im Abschnitt 4.2.1 wird ein Vergleich zwischen der MSS und MoM anhand eines konkreten Beispiels getroffen und ausführlich diskutiert.

Für den hier beschriebenen Fall wird die Rolle der Anregung E_n^i diskutiert. Während im Freiraum häufig ein Bezug auf eine ebenen Welle aus dem Unendlichen, deren Quelle als völlig entkoppelt betrachtet werden kann, als beispielhafte Anregung hergestellt wird, führen die Gegebenheiten im Inneren eines Resonators zu einer besonderen Betrachtung.

Ein völlig quellenfreies Feld ist hier nicht denkbar, da das Feld einer Quelle hier immer auf seinen Ursprung zurückgeworfen wird. Konkret bedeutet dies, dass (4.44) in dieser Form nur für den Fall, dass der Leiter selbst die Quelle aller Felder darstellt, Anwendung finden kann.¹ In diesem Fall kann die Anregung am m -ten Element des Leiters als

$$\bar{E}^i = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{U_0}{\Delta l} & \text{für } n = m \end{cases} \quad (4.45)$$

angesetzt werden. Dabei ist U_0 die Ausgangsspannung der Quelle und Δl die Länge eines Leitersegments. Im Abschnitt 4.2.1 wird dazu auf den Fall einer idealen Spannungsquelle in der Mitte des Leiters eingegangen. Alternativ kann die Anregung durch eine Apertur oder eine zweite Quelle im Inneren des Resonators betrachtet werden. Dazu kann die Systematik aus dem Abschnitt 3.4.2 herangezogen und mit (4.44) kombiniert werden. Dazu ist die Matrix-Summe in den eckigen Klammern von (4.44) um eine entsprechende Anzahl Zeilen und Spalten zu erweitern. Im Abschnitt 3.4.3 wird ein entsprechendes Beispiel erläutert und validiert.

4.2.1 Validierung des eingekoppelten Stromes und der Felder

Als nächster Schritt der Validierung der MSS wird in diesem Abschnitt der eingekoppelte Strom in einem Draht in einem Resonator betrachtet, nachdem im Abschnitt 4.1.5 die Methode für den Freiraum validiert wurde. Wie im Abschnitt 4.2 erläutert, werden zwei verschiedene Anregungen betrachtet. Die Abbildung 4.12 definiert zusammen mit Tab. 4.1 die untersuchte Geometrie.

Tabelle 4.1: Geometrische Parameter des Resonators mit langem Draht in Abb.4.12

Parameter	Werte in cm
(a, b, h)	(30 20 40)
P_A	(0 8 7)
d	2
$P_{D,1}$	(13 2,5 17)
$P_{D,2}$	(13 13,5 17)
L_D	11
a_D	0,05

¹Prinzipiell kann auch eine weitere Antenne, z. B. ein elektrisch kleiner Dipol, als Quelle dienen. Dies erfordert eine Erweiterung der Matrix-Gleichung, wie sie in Abschnitt 3.4.2 beschrieben wird.

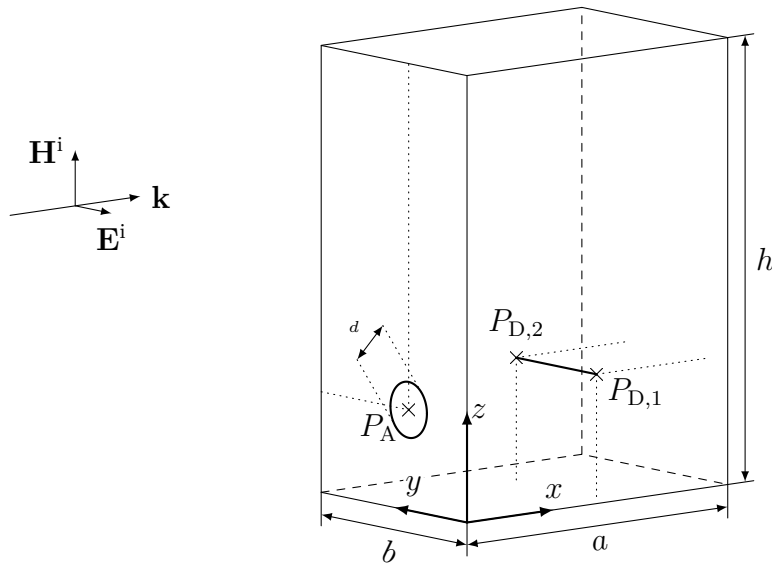


Abbildung 4.12: Geometrie des berechneten Beispiels der Einkopplung des Stroms in einen elektrisch langen Draht im Inneren eines Resonators. Die willkürlich gewählten Werte der geometrischen Parameter sind in Tab. 4.1 zusammengefasst. Dargestellt ist die Anregung mittels einer elektrisch kleinen Apertur. Außerdem wurde eine ideale Spannungsquelle in der Mitte des Drahtes als Anregung betrachtet.

4.2.1.1 Anregung mittels Apertur

In Abb. 4.12 wird die Anregung mittels elektrisch kleiner Apertur, die mit einer ebenen Welle aus der äußeren Region beaufschlagt wird, dargestellt. Die ebene Welle ist in y -Richtung polarisiert und trifft senkrecht auf die Aperturebene. Die Amplitude der einfallenden elektrischen Feldstärke beträgt 1 V/m . Die Apertur selbst wird mittels der Ausführungen im Abschnitt 3.4 modelliert. Die Ergebnisse für den eingekoppelten Strom im Leiter, die mittels der MSS nach (3.94) und (4.44) ermittelt wurden, sind in der Abb. 4.13 dargestellt. Trotz der geringen Beträge stimmen die Ergebnisse sehr gut überein. Die Phasenlage weist geringe Abweichungen auf, die sich in der Abbildung durch 2π -Phasensprünge übertrieben stark niederschlagen.

Zusätzlich wurden an zwei beliebig festgelegten Orten im Inneren des Resonators die elektrischen und magnetischen Felder mit jeweils der MoM und MSS berechnet und sind in den Abb. 4.14 verglichen. Um den Einfluss des Leiters auf die innere Feldverteilung und dessen korrekte Berücksichtigung mit der MSS zu demonstrieren, sind dort zusätzlich die Felder dargestellt, die sich ohne den Einfluss des Drahtes ergeben. Es wird deutlich, dass der Leiter einen klaren Einfluss auf die Feldverteilung im Inneren des Resonators und deren Frequenzgänge aufweist und dass dieser Einfluss durch die MSS korrekt abgebildet wird. Wie im Abschnitt 3.3.7 bereits gezeigt wurde, können die Hohlraumresonanzen auch im äußeren rückgestreuten Feld gefunden werden. Da die äquivalenten Aperturmomente bei der MSS auch von den Dipolmomenten des Drahtes abhängen, kann so auch der Einfluss

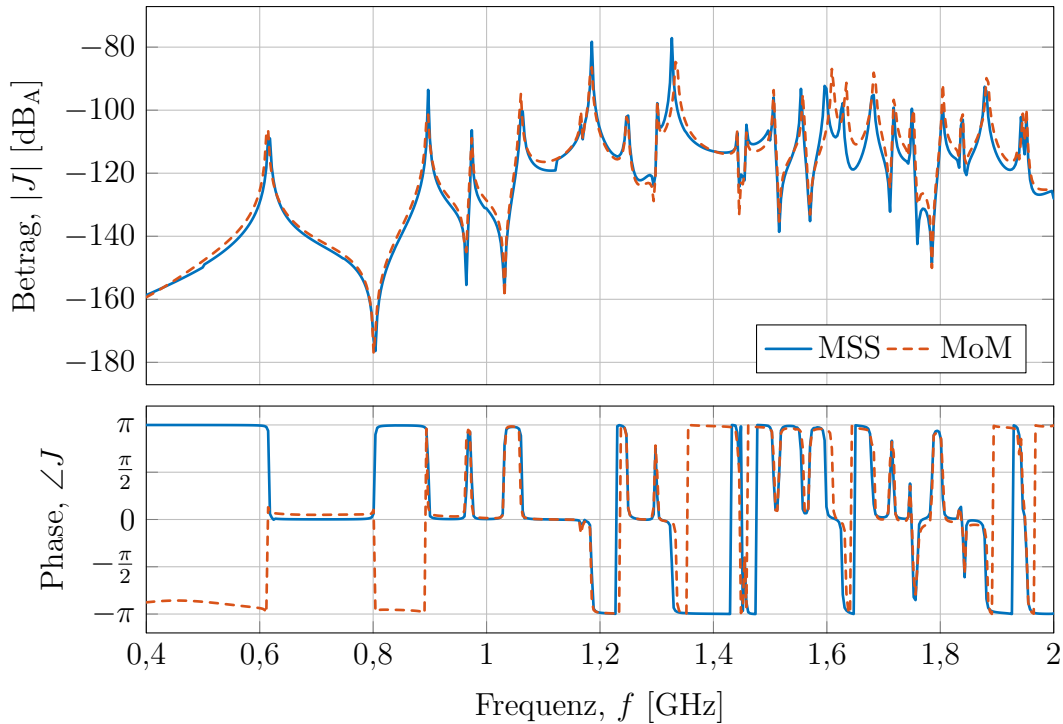


Abbildung 4.13: Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators (vgl. Abb. 4.12 und Tab. 4.1) bei einer Anregung mittels elektrisch kleiner Apertur.

des Drahtes auf die rückgestreuten Felder untersucht werden. In den Abb. 4.15 ist das dominierende Aperturmoment m_z für die beiden Fälle mit und ohne zusätzlichen Leiter im Resonator gegenübergestellt. In der Abb. 4.15 ist ein klarer Unterschied zu erkennen. Da sich die äquivalenten Momente der Apertur nur sehr umständlich numerisch bestimmen lassen, ist es sinnvoll, stattdessen die äußeren Felder zu untersuchen.

Hier tritt das im Abschnitt 3.3.7 bereits geschilderte Problem der geringen Feldstärken, die zurückgestreut werden, auf. Die in der Simulation und Realität auftretenden Streufelder werden vor allem durch Streuung der ebenen Welle an den Außenseiten des Resonators erzeugt. Diese überlagern das Aperturfeld. Betrachtet man allerdings das äußere Feld entlang einer symmetrischen Achse des Resonators und in einer Polarisation, die senkrecht zur einfallenden Welle steht, kann der Einfluss der äußeren Streuung in der Simulation reduziert werden, um das Modell zu validieren. In den Abb. 4.16 sind die x -Komponente des elektrischen Feldes und die y -Komponente des magnetischen Feldes außerhalb des Resonators nahe der vorderen Resonatorwand dargestellt. Auch wenn es eine grobe Übereinstimmung zwischen beiden Methoden gibt, wird erneut klar, dass die Rückwirkung durch elektrisch kleine Aperturen auf das äußere Feld zu gering ist, um verlässliche Aussagen zur Validität der MSS für dieses Szenario zu treffen, was die Motivation für dieses Kapitel der Arbeit noch einmal herausstellt.

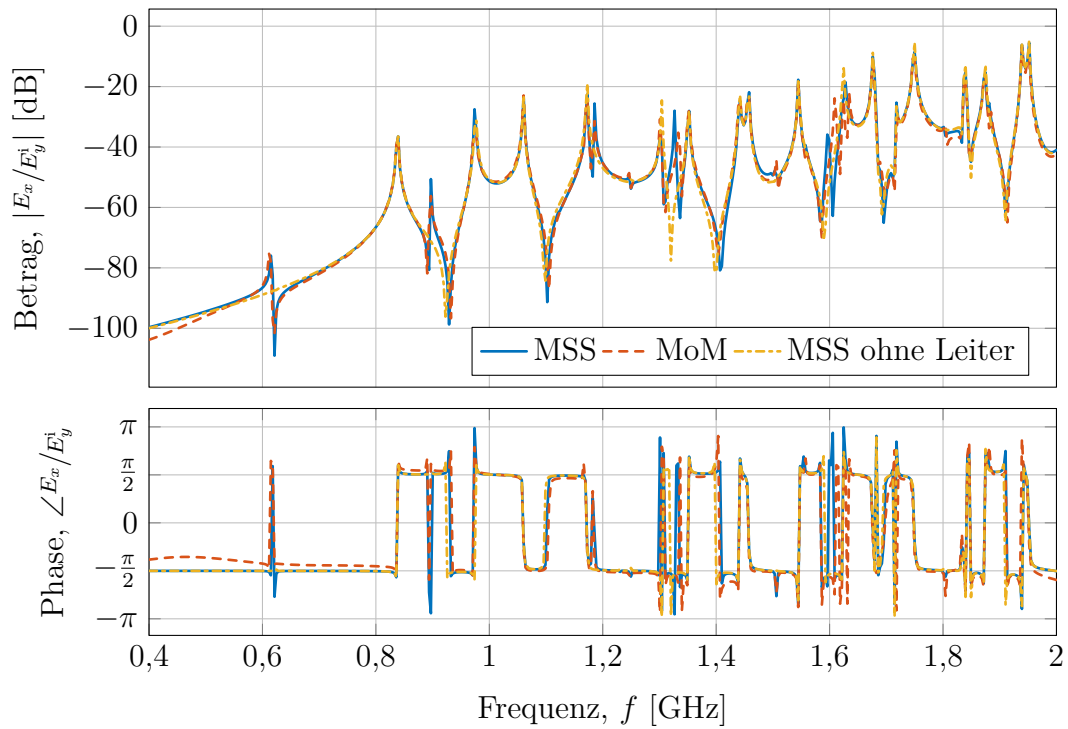
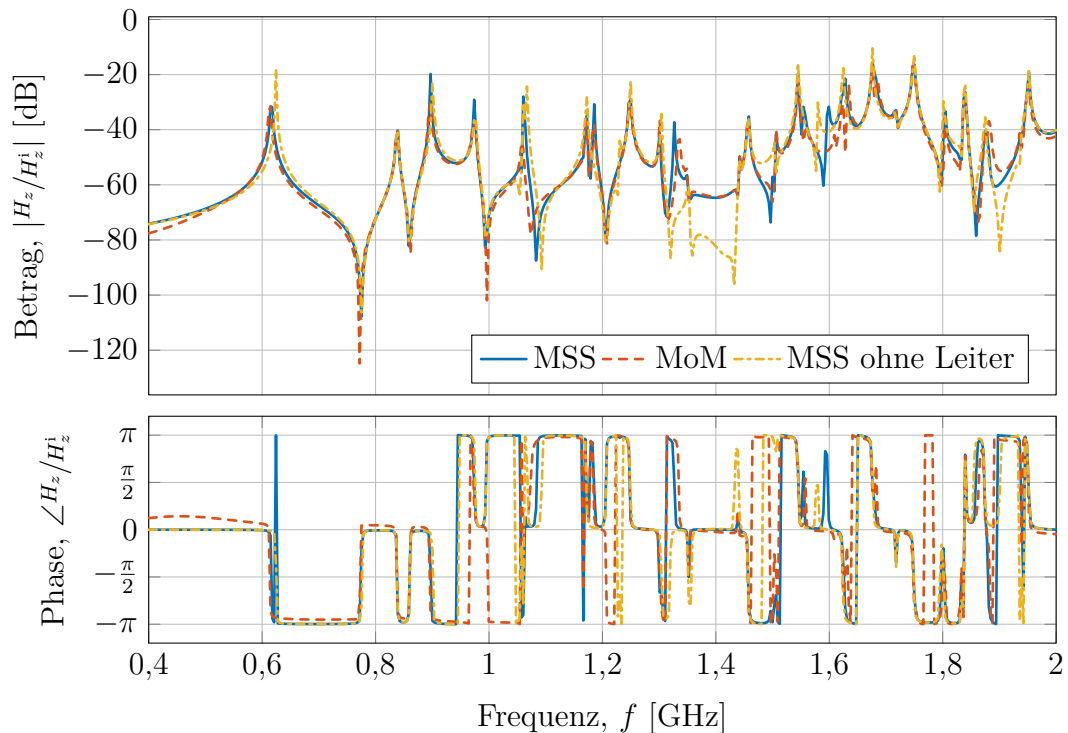
(a) Normalisiertes elektrisches Feld bei $P_{i,1}$ (b) Normalisiertes magnetisches Feld bei $P_{i,2}$

Abbildung 4.14: Normalisierte Felder im Inneren eines mit einem offenen, elektrisch langen Draht beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf eine elektrisch kleine kreisförmige Apertur einfallende ebene Welle. (a) x -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$.

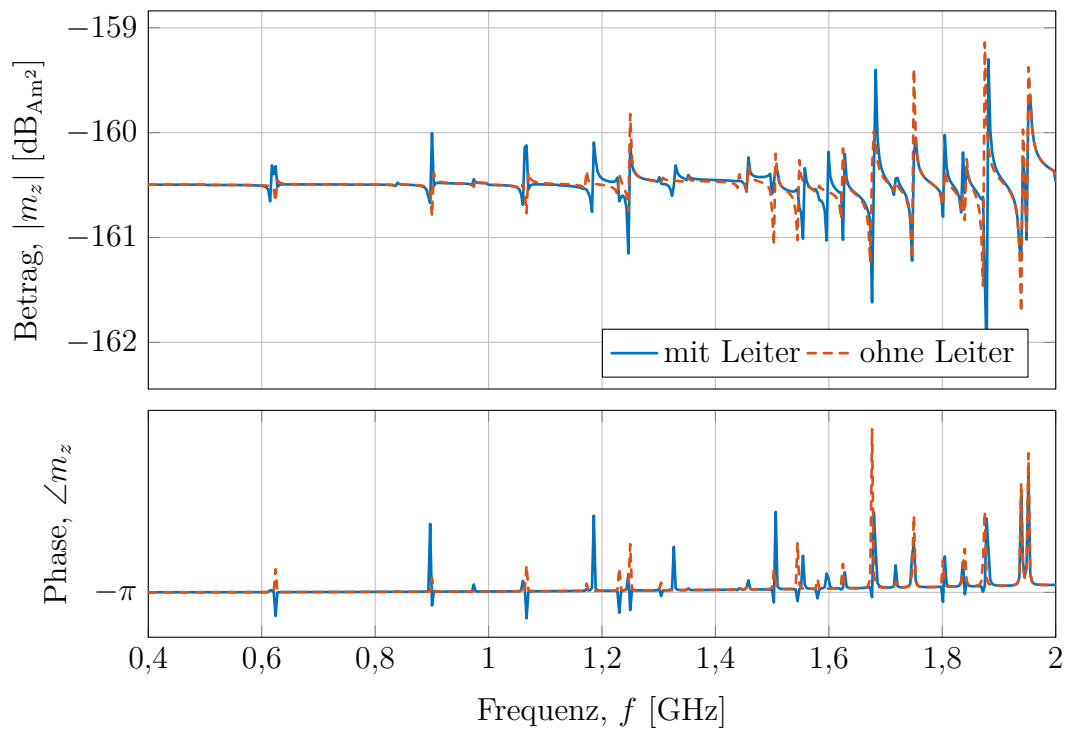


Abbildung 4.15: z -Komponente des magnetischen Dipolmoments der Apertur mit und ohne Berücksichtigung des elektrisch langen Leiters im Resonator.

4.2.1.2 Anregung mittels Spannungsquelle

Das Setup bei einer Anregung durch eine ideale Spannungsquelle in der Mitte des Leiters im Resonator ohne Apertur stellt ein verlustloses System dar. Dies führt insbesondere an den Resonanzfrequenzen zu Konvergenzproblemen der MoM und der MSS. Um dennoch mit geringem Aufwand eine Validierung durchführen zu können, wurde ein fiktives gering verlustbehaftetes dielektrisches Medium angenommen mit $\varepsilon = (1 - j10^{-3})\varepsilon_0$. Bei beiden Methoden kann dies schnell und einfach implementiert werden. Durch die auftretenden Verluste bleibt die Lösung bei beiden Methoden konvergent und es kann ein Vergleich, wie in der Abb. 4.17 zu sehen, angestellt werden.

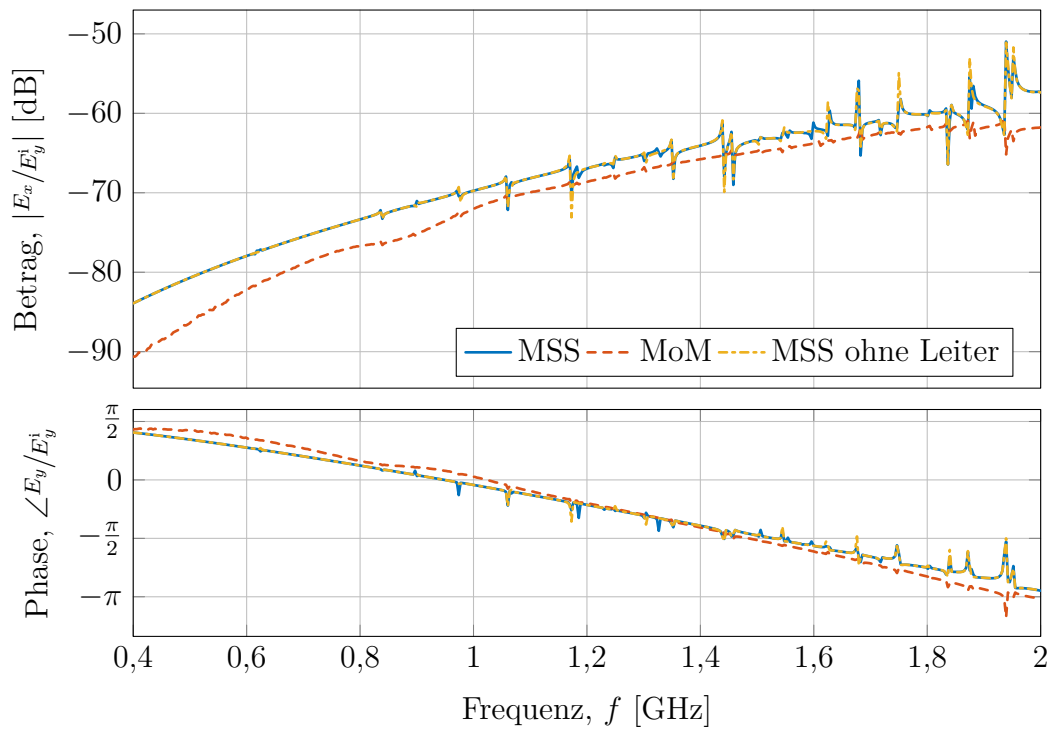
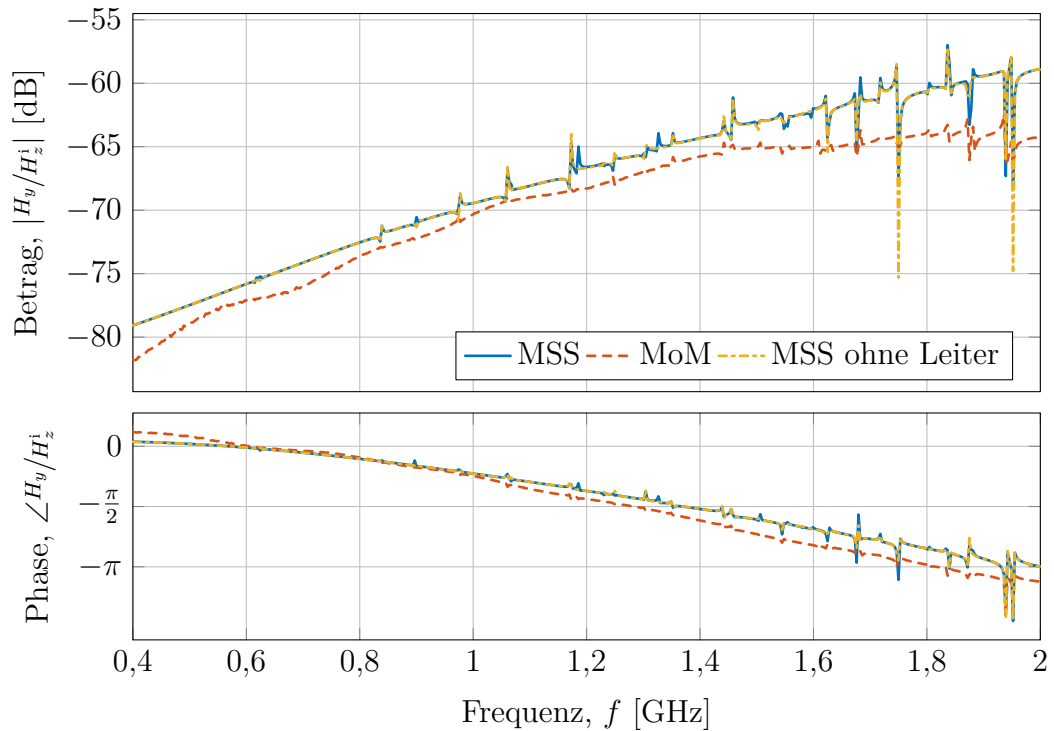
(a) Normalisiertes elektrisches Feld bei $P_{o,2}$ (b) Normalisiertes magnetisches Feld bei $P_{o,2}$

Abbildung 4.16: Normalisierte Felder außerhalb des Resonators, erzeugt durch eine auf eine elektrisch kleine Apertur einfallende ebene Welle. (a) x -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{o,2}$ und (b) y -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{o,2}$.

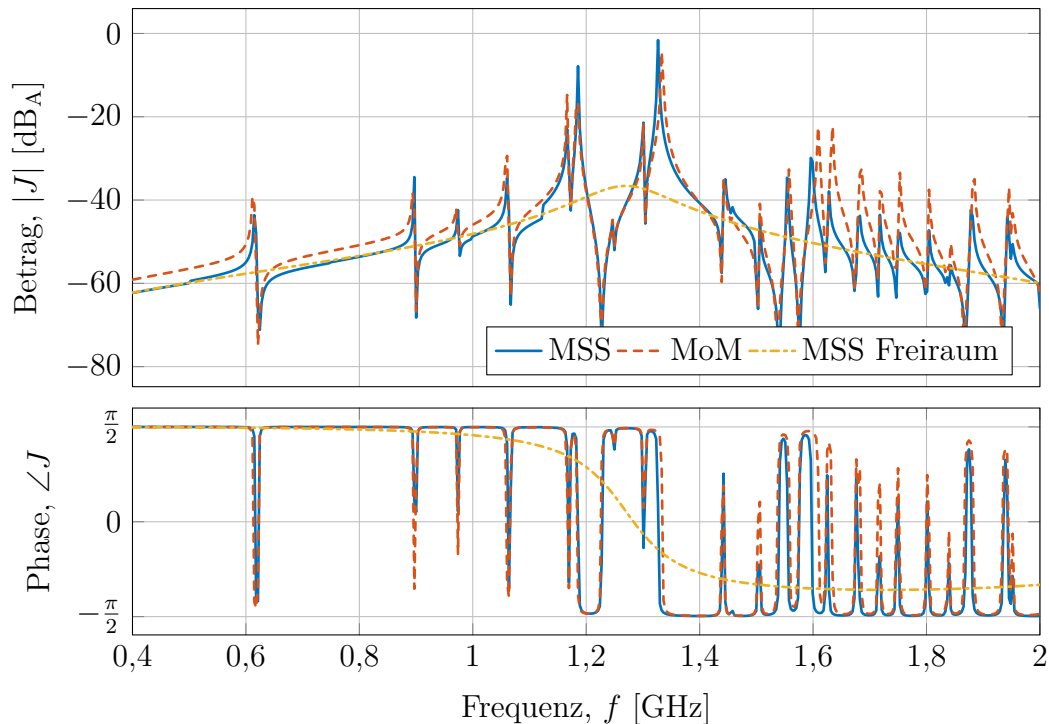


Abbildung 4.17: Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators (vgl. Abb. 4.12 und Tab. 4.1) bei einer Anregung mittels idealer Spannungsquelle in der Mitte des Drahtes.

4.3 Elektrisch langer Schlitz in der Resonatorwand

An dieser Stelle soll für den Fall des elektrisch langen Schlitzes noch einmal näher erläutert werden, warum der Ansatz der Dualität (vgl. Abschnitt 2.4.4) mit dem elektrischen Leiter gerechtfertigt ist. Am Anfang dieses Kapitels wurde die Möglichkeit der Repräsentation einer Apertur durch Dipolmomente als Grundlage und Ausgangspunkt der Betrachtungen festgehalten. Im Abschnitt 3.1.4 wurde diese Annahme auf ein theoretisches Fundament gestellt. Dabei wurde klar, dass die Momente ihre Ursache in den Freiheitsgraden der äquivalenten magnetischen Ströme (vgl. Abschnitt 2.4.1) haben.

Analog zu der in der Literatur üblichen Näherung eines dünnen Drahtes, kann im Fall eines dünnen Schlitzes dann von einer auf der Symmetrie-Achse konzentrierten magnetischen Stromdichte ausgegangen werden. Die Abb. 4.18 stellt das MSS Modell des elektrischen Leiters dem des Schlitzes gegenüber, um die Dualität der Problemstellung zu veranschaulichen. Die dort dargestellten magnetischen Ströme, die den Schlitz in einer geschlossenen Ebene repräsentieren, sind so zu bestimmen, dass sie die Randbedingungen (3.3b) erfüllen. Ausgehend von der Geometrie, wie sie in der Abb. 4.19 zu sehen ist, können die am Schlitz herrschenden Randbedingungen und die dazugehörige Integralgleichung dargestellt

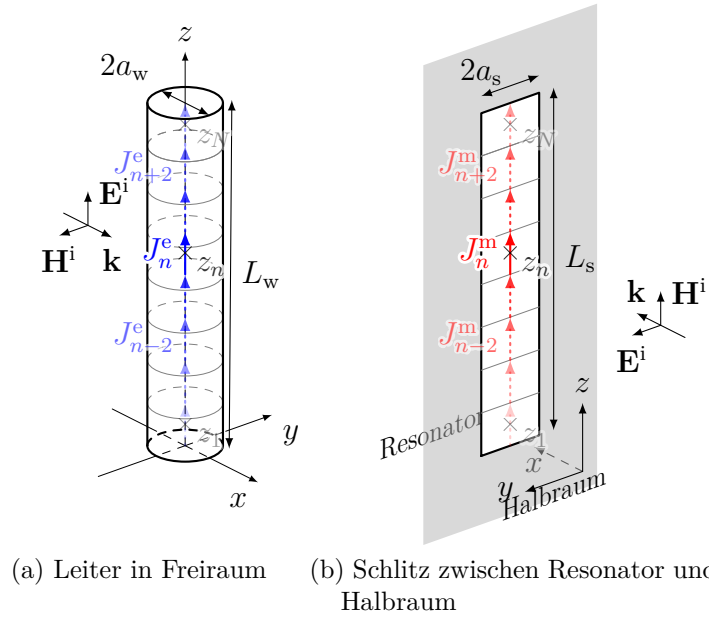


Abbildung 4.18: Übergang des diskretisierten Modells des dünnen Leiters auf das Modell des dünnen Schlitzes.

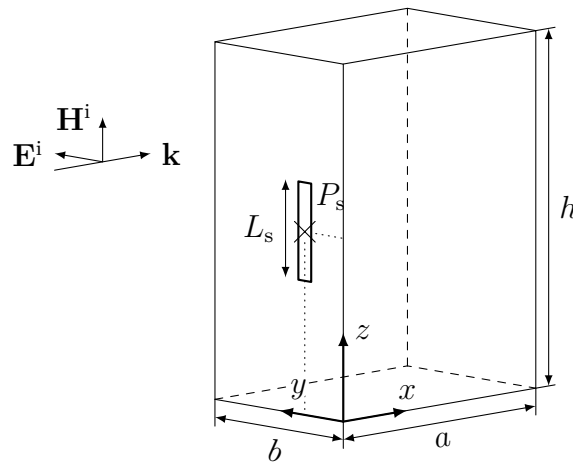


Abbildung 4.19: Beispielhafte Geometrie eines elektrisch langen Schlitzes in einer Resonatorwand.

werden als

$$H_z^0 + H_z^h = H_z^c \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} 2j\omega\mu H_z^i + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^{L_s} G_h^{\mathbf{A}^m}(z, z') J_z^m(z') dz' \\ = - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^{L_s} G_c^{\mathbf{A}^m}(z, z') J_z^m(z') dz' . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Für das Integral auf der linken Seite von (4.47) können mit (3.15) die selben Betrachtungen

wie im Abschnitt 4.1 herangezogen werden, da hier die Wechselwirkungen zwischen der Quelle und den Feldern im Halbraum, bzw. im Freiraum gelten. Auf der rechten Seite steht die aus Abschnitt 3.3.1 bekannte Komponente der Greenschen Funktion für magnetische Quellen im Resonator, die sich analog zu den Ausführungen aus Abschnitt 4.2 behandeln lässt. Nach dem Übergang auf das diskrete Modell ergibt sich so

$$\bar{m} = \left[[G_{\text{h}}^{\mathbf{H}_m}] + [G_{\text{c}}^{\mathbf{H}_m}] \right]^{-1} 2\bar{H}^i \quad (4.48)$$

mit

$$\frac{1}{2} [G_{\text{h}}^{\mathbf{H}_m}] = [g]^{-1} + [G_{\text{f},\mathfrak{S}}^{\mathbf{H}_m}] + [G_{\text{f},\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{H}_m}] \quad (4.49)$$

für die Wechselwirkung mit dem Halbraum und den zusätzlichen Termen

$$[G_{\text{c}}^{\mathbf{H}_m}] = [g]^{-1} + [G_{\text{c},\text{r}}^{\mathbf{H}_m}] + [G_{\text{c},\mathfrak{R}_r}^{\mathbf{H}_m}], \quad (4.50)$$

für die Wechselwirkung der Aperturquellen mit dem Resonator. Das Ergebnis (4.48) wird im Abschnitt 4.3.1 am Beispiel einer konkreten Geometrie mit der Momenten-Methode validiert. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen. Hervorzuheben ist hier das Potential der erheblichen Reduktion der Anzahl der Unbekannten. Während bei rein numerischen Verfahren die gesamte Geometrie diskretisiert werden muss, was insbesondere bei elektrisch großen und hochresonanten Systemen zu einer hohen Anzahl der nötigen Unbekannten führt, liefert die MSS ein Verfahren, bei der nur die Aperturen diskretisiert werden müssen. Zusätzlich kann durch die analytische Regularisierung auf jegliche numerische Integration verzichtet werden, die bei üblichen Verfahren nötig ist, um die Elemente der Systemmatrix zu bestimmen.

4.3.1 Validierung für die Felder

Für die Validierung der MSS für den elektrisch langen Schlitz in einem Resonatorgehäuse, wurde eine Konfiguration gewählt, wie sie in Abb. 4.20 dargestellt ist. Dabei wurden die Streufelder, die durch eine von außen einfallende ebene Welle durch den Schlitz in der inneren und äußeren Region des Resonators erzeugt werden, über (4.48) berechnet und mit Hilfe einer MoM-Simulation validiert. Die spezifischen Parameter der Berechnung können der Tabelle 4.2 entnommen werden. Die Wände des Resonators sind als perfekt leitfähig angenommen und sind unendlich dünn. Das einfallende Feld ist in y -Richtung polarisiert und breitet sich in x -Richtung aus. Die Amplitude des elektrischen Feldes ist E_y^i .

Tabelle 4.2: Geometrische Parameter des geschlitzten Resonators

Parameter	Werte in cm
(a, b, h)	(30, 20, 40)
$P_{i,1}$	(9, 14, 32)
$P_{i,2}$	(23, 14, 22)
$P_{o,1}$	(-50, 10, 20)
$P_{o,2}$	(-5, 10, 20)
P_s	(0, 8, 20.5)
L, a	11, 0.05

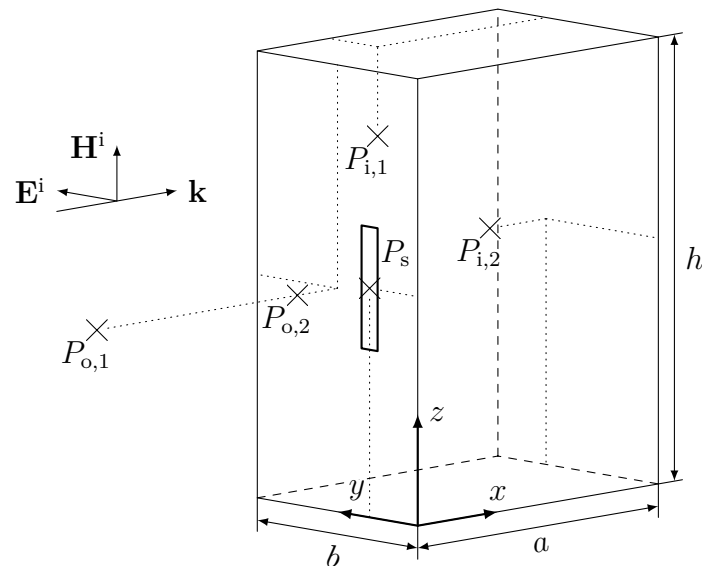
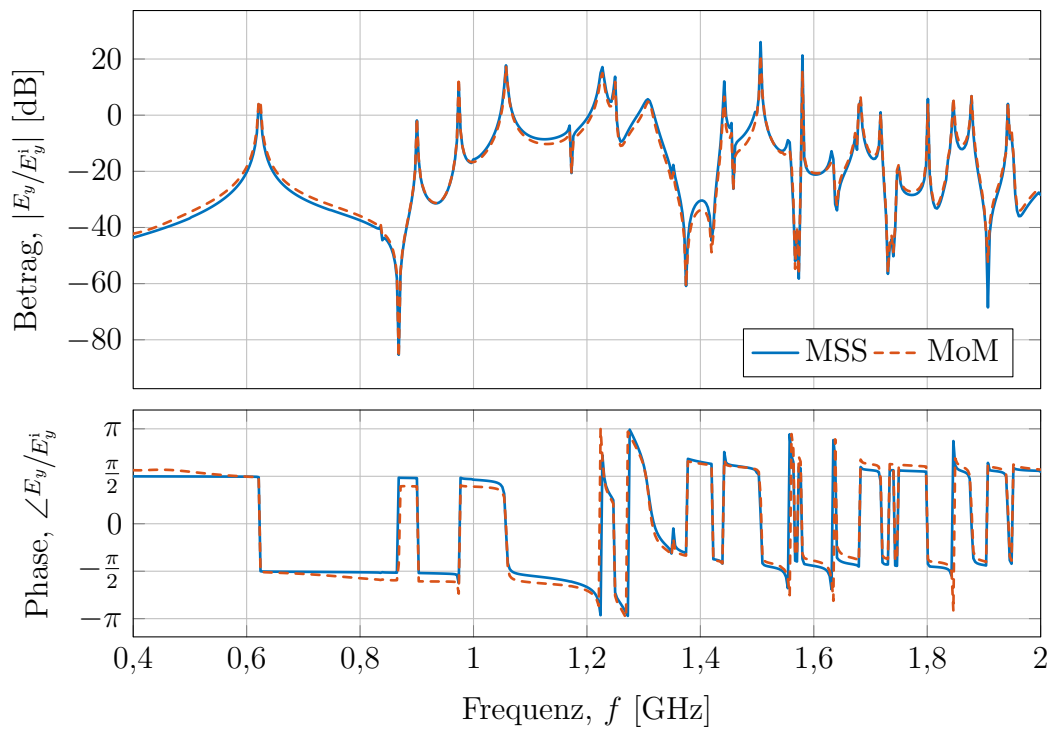


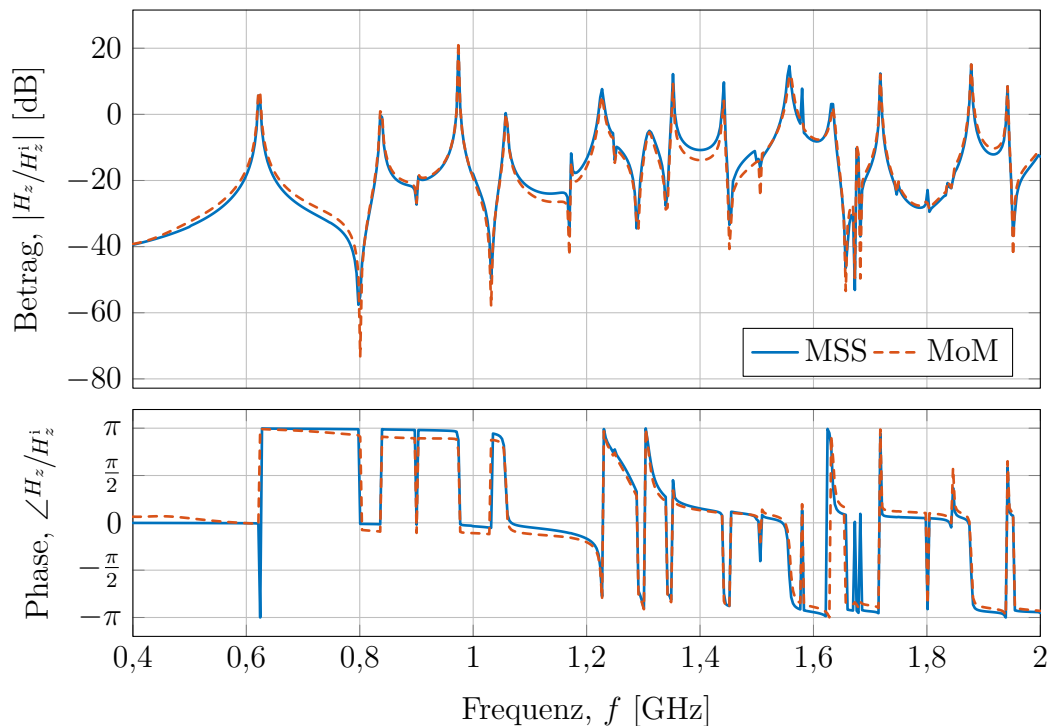
Abbildung 4.20: Geometrie des Resonatormodells für die MoM-Simulation. Die MSS nimmt einen unendlich ausgedehnten Schirm in der yz -Ebene an. Die Werte der Parameter sind in Tab. 4.2 aufgeführt.

4.3.1.1 Felder im Inneren des Resonators

Für die Konfiguration aus Abb. 4.20 und den in Tabelle 4.2 zusammengefassten Werten und den betrachteten Frequenzbereich von 0,4 GHz bis 2 GHz, wurde der Schlitz in $N = 10$ Elemente unterteilt. Die Abb. 4.21a zeigt die aus den ermittelten Streuquellen bestimmte y -Komponente des elektrischen Feldes am Ort $P_{i,1}$, während die Abb. 4.21b die Ergebnisse für die z -Komponente des magnetischen Feldes darstellt. In beiden Fällen demonstriert ein Vergleich sowohl der Amplitude als auch der Phase der ermittelten Größen mit den MoM-Ergebnissen die Validität der MSS für die Vorwärtsstreuung des Schlitzes.



(a) Normalisiertes elektrisches Feld bei $P_{i,1}$



(b) Normalisiertes magnetisches Feld bei $P_{i,2}$

Abbildung 4.21: Normalisierte Felder im Inneren des Resonators, erzeugt durch eine auf einen elektrisch langen Schlitz einfallende ebene Welle. (a) y -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$.

4.3.1.2 Felder außerhalb des Resonators

Da die äußere Streuung der ebenen Welle am Resonator, insbesondere an den Resonatoranten, durch die MSS nicht berücksichtigt werden kann, gleichzeitig aber zwangsläufig in den MoM-Simulationsergebnissen enthalten ist, ist ein direkter Vergleich schwierig. Eine Möglichkeit, die externe Streuung des Resonators zu unterdrücken, ist, einen Observationspunkt für die gestreuten Felder entlang einer Symmetrie-Achse des Resonators zu wählen. Die beiden Raumpunkte für das äußere gestreute Feld sind durch die Tabelle 4.2 und die Abb. 4.20 gegeben. Die Felder der MSS-Ergebnisse wurden aus den mit (4.48) bestimmten Quellen mit Hilfe der Gleichungen (3.86) bestimmt.

Da das einfallende Feld in y -Richtung polarisiert ist, kann angenommen werden, dass die x -Komponente des gestreuten Feldes an diesen Punkten nur durch die Streuung am Schlitz erzeugt werden. Die Ergebnisse sind in den Abb. 4.22 dargestellt. Die Abbildung 4.22a zeigt einige Abweichungen zwischen den Ergebnissen der MSS und MoM. Hier wurden die Felder am Punkt $P_{o,1}$ ausgewertet, was einer Entfernung von 0,5 m von der geschlitzten Frontseite entspricht. Ein Vergleich mit der Abb. 4.22b zeigt wesentlich weniger Abweichungen. Dies führt zu dem Schluss, dass die externe Streuung an den Kanten des Resonators, die bei größerer Entfernung von der Frontseite einen ausgeprägteren Einfluss auf das Gesamtfeld haben, als Ursache für die Abweichungen in Abb. 4.22a identifiziert werden kann. Die Annahme eines unendlich ausgedehnten Schirmes, wie sie bei der MSS vorgenommen wird, ist bei Abständen, die klein gegenüber der Abmessungen der Frontseite sind, eher zutreffend als bei in diesem Maßstab großen Entfernungen.

4.3.1.3 Fernfelder des Schlitzes

Da das gesamte gestreute Feld die Summe des Fernfelds des Schlitzes

$$E_{\phi}^s = \eta_0 H_{\theta}^s = \eta_0 k^2 \frac{\sin \theta^s}{2\pi r} \sum_n^N m_{z,n} e^{-jkz_n \cos \theta^s} \quad (4.51)$$

und des Resonators ist (vgl. (4.39a)), ist eine Validierung für dieses Szenario nicht trivial, da die MSS die äußere Streuung nicht abbilden kann, während diese in der MoM zwangsläufig enthalten ist. Um dennoch einen Vergleich zu ermöglichen, wird zusätzlich zur Geometrie aus Abb. 4.20 ein Resonator ohne Apertur simuliert. Anschließend können die jeweiligen Fernfelder verglichen werden, wie in den Abb. 4.23 für verschiedene Streuwinkel dargestellt ist. Unter Vernachlässigung der Kopplung des Schlitzes und des Resonators in der äußeren Region kann die Differenz der jeweiligen mit der MoM bestimmten Fernfelder zur Validierung der durch die MSS bestimmten Fernfelder des Schlitzes genutzt werden. Dazu ist in den Abb. 4.24 die monostatische RCS des Schlitzes für verschiedene

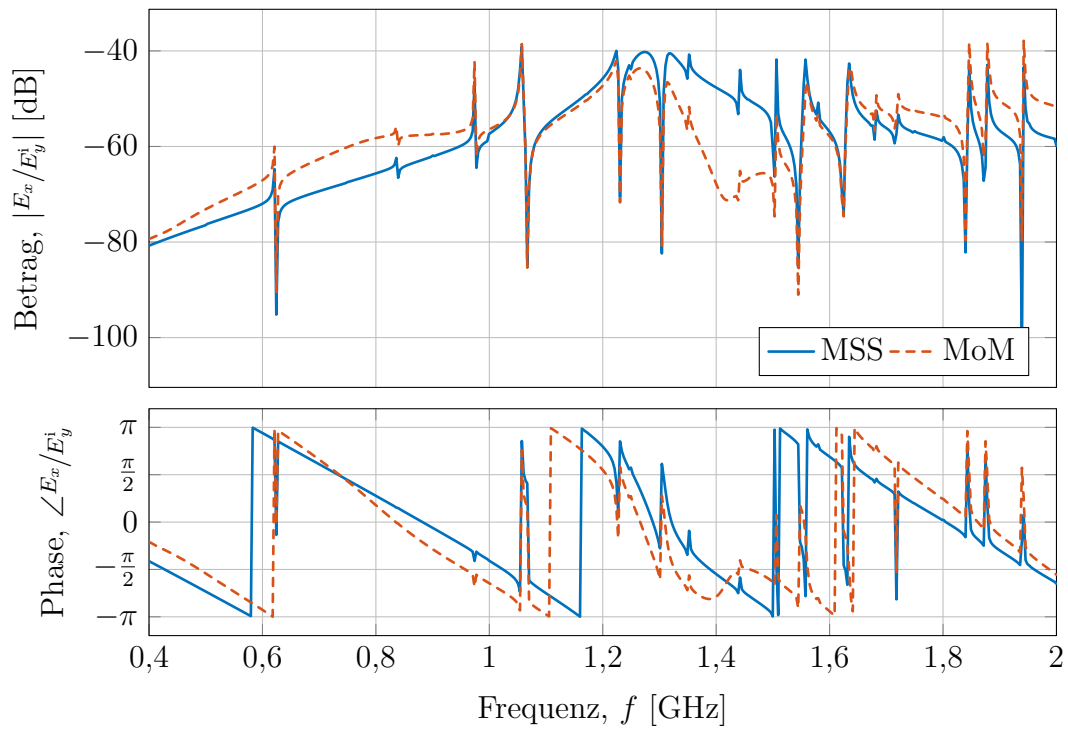
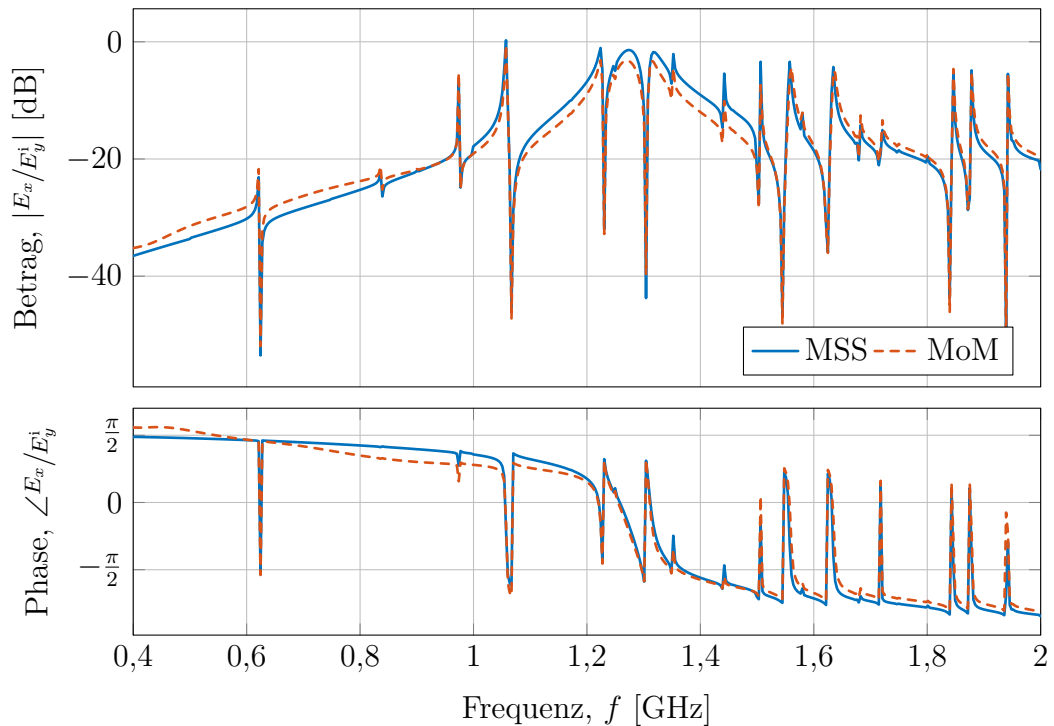
(a) Normalisiertes elektrisches Feld weit entfernt von der Frontseite bei $P_{o,1}$ (b) Normalisiertes elektrisches Feld nahe der Frontseite bei $P_{o,2}$

Abbildung 4.22: x -Komponente des normalisierten elektrischen Feldes außerhalb des Resonators, erzeugt durch eine auf einen langen Schlitz in y -Richtung polarisierte einfallende ebene Welle. (a) zeigt das Feld bei $P_{o,1}$ weit entfernt von der geschlitzten Frontseite. (b) zeigt das Feld bei $P_{o,2}$ nahe der Frontseite.

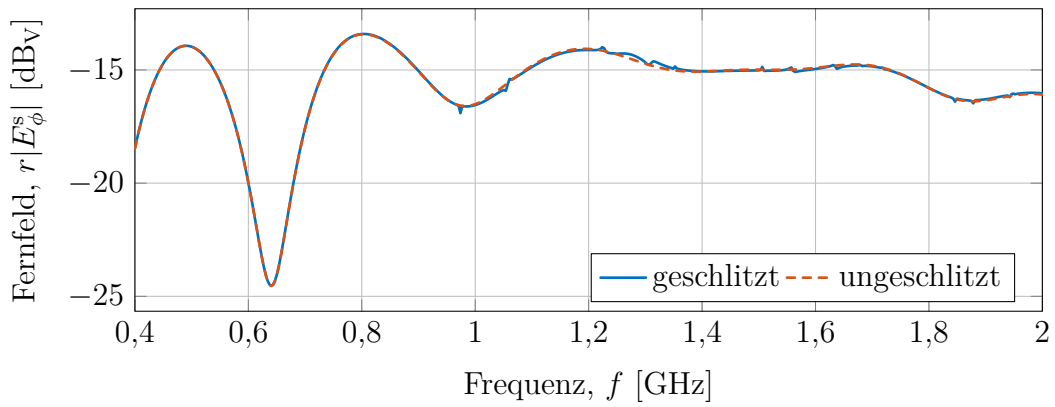
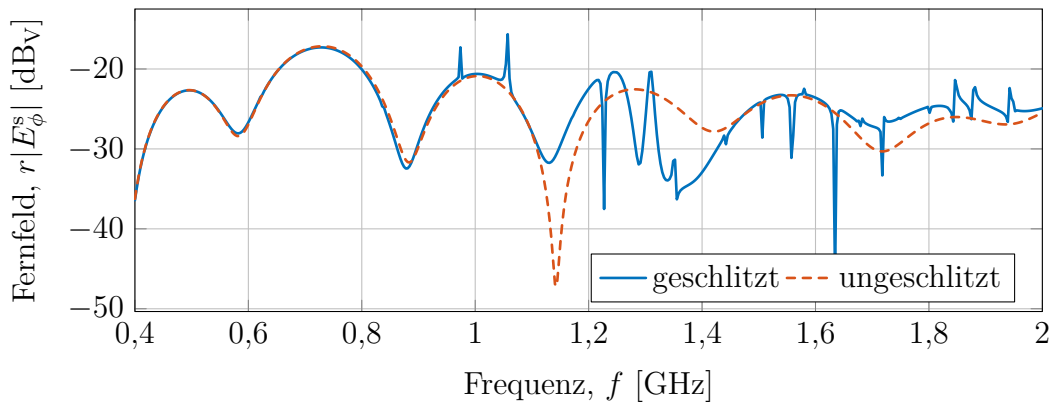
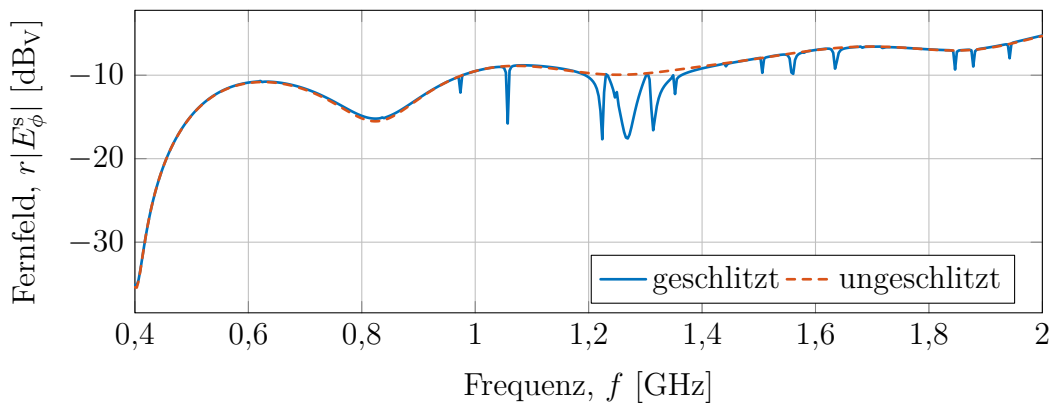
(a) $\theta = 10^\circ$ (b) $\theta = 50^\circ$ (c) $\theta = 90^\circ$

Abbildung 4.23: Fernfelder eines geschlitzten und ungeschlitzten Resonators für verschiedene Streuwinkel, berechnet mit der MoM. Die Differenz beider Felder approximiert das Fernfeld des Schlitzes und dient als Validierung der MSS in Abb. 4.24.

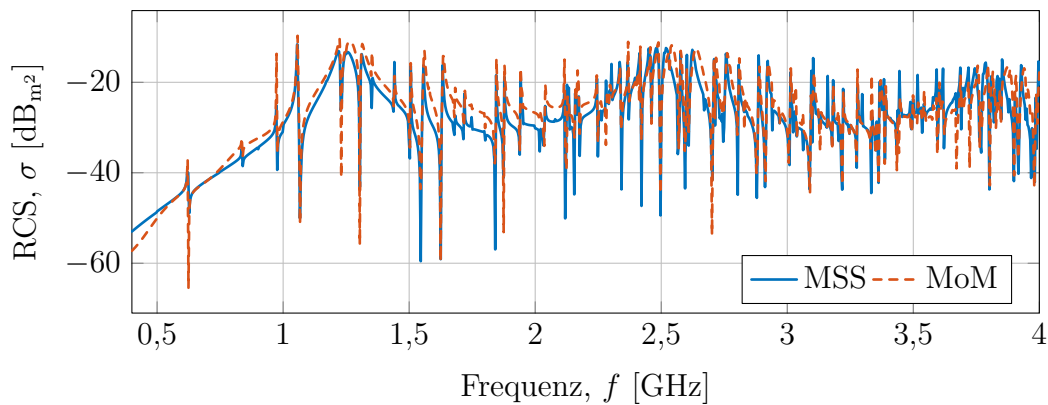
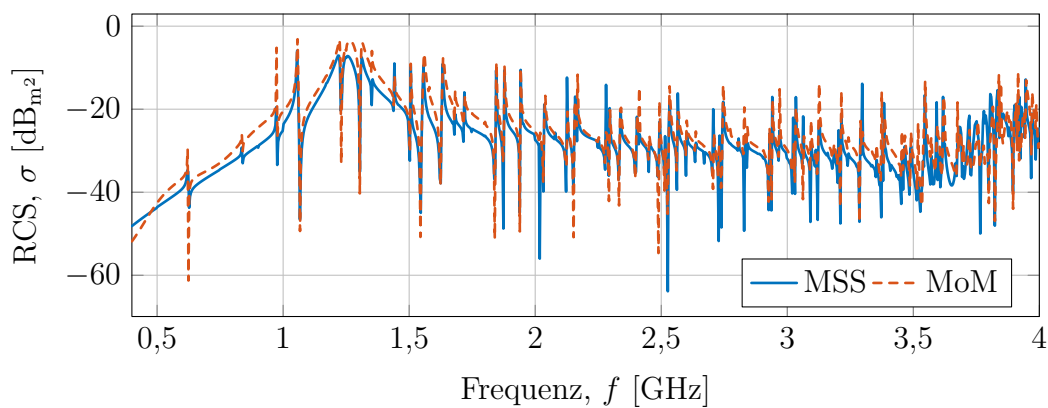
(a) $\theta = 50^\circ$ (b) $\theta = 90^\circ$

Abbildung 4.24: Monostatische RCS des Schlitzes in einem Resonator. Es wurden nur die Streufelder des Schlitzes berücksichtigt und validiert durch die Differenz der in Abb. 4.23 gezeigten Fernfelder für den geschlitzten und ungeschlitzten Fall.

Streuwinkel dargestellt. Die Ergebnisse zeigen eine annehmbare Übereinstimmung, wobei die Abweichung auf die Approximation der MoM-Referenz zurückzuführen sind. Um die Abhängigkeit vom Streuwinkel deutlicher darzustellen, wurde an dieser Stelle der untersuchte Frequenzbereich auf 4 GHz erweitert, so dass auch die zweite Eigenresonanz des Schlitzes angeregt wird. Bei der MSS wird dies einfach durch eine Erhöhung der Anzahl der Unbekannten auf $N = 20$ erreicht. Beachtenswert ist, dass die RCS bei $\theta^i = 50^\circ$ und $f = 2,5$ GHz größer ist als bei $\theta^i = 90^\circ$ bei der selben Frequenz. Diese Beobachtung führt zu der These, dass bei Frequenzen jenseits der ersten Resonanzfrequenz die Annahme eines *worst-case*-Szenarios durch eine zur Apertur normalen Einfallrichtung nicht immer berechtigt ist.

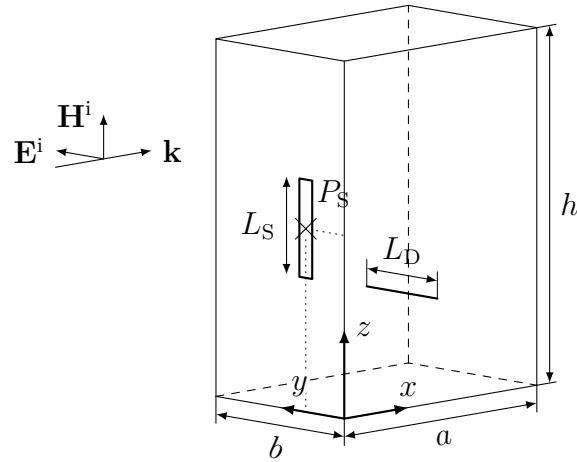


Abbildung 4.25: Beispielhafte Geometrie eines elektrisch langen Schlitzes in einem Resonator in dessen Inneren ein elektrisch langer Draht mit offenen Enden vorliegt.

4.4 Elektrisch langer Schlitz mit elektrisch langem Draht im Resonator

Nun soll die MSS genutzt werden, um den Einfluss elektrisch großer Strukturen im Inneren des Resonators auf das externe Streufeld der Apertur zu berechnen. In den Abschnitten 3.3.7 und 4.2.1.1 wurden bereits ähnliche Untersuchungen angestellt. Die Ergebnisse dort haben gezeigt, dass der Einfluss durch die Einschränkung auf elektrisch kleine Aperturen sehr gering ist und durch einen Vergleich mit entsprechenden MoM-Ergebnissen nur begrenzt validiert werden konnte. Die Verallgemeinerung auf elektrisch große Aperturen lässt nicht nur eine starke Kopplung der internen und externen Felder, sondern auch einen stärkeren Einfluss einer Beladung erwarten. In der Abb. 4.25 ist eine beispielhafte Geometrie dargestellt. Um das dort dargestellte Streu-Problem zu lösen, kann wie zuvor im Abschnitt 3.4.2 für elektrisch kleine Streuer, die Erfüllung der Randbedingungen

$$\text{am Schlitz} \quad H_z^0 + H_z^{h,S} = H_z^{c,S} + H_z^{c,D} \quad (4.52)$$

$$\text{und am Draht} \quad E_y = 0 = E_y^{c,S} + E_y^{c,D}. \quad (4.53)$$

für die elektrisch großen Streuer gefordert werden. So ergeben sich die beiden gekoppelten Integral-Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} 2j\omega\mu H_z^i(z) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{\text{Schlitz}} G_h^{\mathbf{A}_m}(z, z') J_z^m(z') dz' \\ = - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{\text{Schlitz}} G_c^{\mathbf{A}_m}(z, z') J_z^m(z') dz' + j\omega\mu H_z^{c,D}(z) \end{aligned} \quad (4.54a)$$

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \int_{\text{Draht}} G_c^{\mathbf{A}_e}(y, y') J_{e,y}(y') dy' = -j\omega\varepsilon E_y^{c,S}(y) \quad (4.54b)$$

mit

$$H_z^{c,D}(z) = \int_{\text{Draht}} \left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{H}_e}\right)_{zy} J_{e,y}(y') dy', \quad (4.54c)$$

$$E_y^{c,S}(y) = \int_{\text{Schlitz}} \left(\overline{\overline{G}}_c^{\mathbf{E}_m}\right)_{yz} J_{m,z}(z') dz'. \quad (4.54d)$$

Mit den Ausführungen in den Abschnitten 3.4.2, 4.2 und 4.3 lässt sich aus (4.54) eine Matrixgleichung mit der Struktur

$$\begin{bmatrix} -\bar{H}_z^i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_S] & [G_{S,D}] \\ [G_{D,S}] & [G_D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m}_z \\ \bar{p}_y \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

konstruieren, deren Lösung die äquivalenten Quellen des Schlitzes und des Drahtes liefert. Dabei ist $[G_S]$ eine Untermatrix, die die Wechselwirkung des Schlitzes mit sich selbst beinhaltet und der Gesamtmatrix aus (4.48) entspricht, während $[G_D]$ durch (4.44) bestimmt wird. Die antidiagonalen Untermatrizen stellen die Kopplung beider Strukturen über die Felder dar, die mit (4.54c) und (4.54d) bestimmt werden.

4.4.1 Validierung und Einfluss der Beladung auf die inneren und äußeren Felder

Um die MSS auch für dieses komplizierter gestellte Problem zu validieren, wird die Geometrie aus Abb. 4.25 mit den Parametern aus Tab. 4.3 in [Hyp17] erstellt und simuliert. Als Anregung dient wie zuvor eine senkrecht zum Schlitz einfallende Welle, deren magnetisches Feld tangential zum Schlitz polarisiert ist und die Amplitude $\eta_0^{-1}\text{V/m}$ aufweist. Zuerst wird der im Leiter eingekoppelte Strom mit den Ergebnissen der MoM verglichen. In Abb. 4.26 ist der Betrag und die Phase dargestellt. Es ist eine insgesamt gute Übereinstimmung festzustellen. Lediglich bei der Schlitz- bzw. Leiterresonanz bei etwa 1,3 GHz sind Abweichungen zu erkennen, die vermutlich auf geringe Phasenabweichungen zurückzuführen sind.

Da mit der Lösung von (4.55) alle gesuchten Quellen bekannt sind, können mit (3.83) die Felder im Inneren des Resonators bestimmt werden. In der Abbildung 4.27 ist die y -Komponente des elektrischen Feldes am Ort $P_{i,1}$ und die z -Komponente des magnetischen Feldes am Ort $P_{i,2}$ dargestellt. Auch hier ist eine insgesamt gute Übereinstimmung zwischen der MSS und der MoM zu erkennen. Zusätzlich ist das Feld dargestellt, dass

Tabelle 4.3: Geometrische Parameter des geschlitzten Resonators mit Beladung (vgl. Abb. 4.25).

Parameter	Werte in cm	Parameter	Werte in cm
(a, b, h)	(30, 20, 40)	L_s, a_s	11, 0,05
$P_{i,1}$	(9, 14, 32)	$P_{D,1}$	(17 2,5 11)
$P_{i,2}$	(23, 14, 22)	$P_{D,2}$	(17 13,5 11)
P_o	(-5, 10, 20)	L_D	11
P_s	(0, 8, 20,5)	a_D	0,01

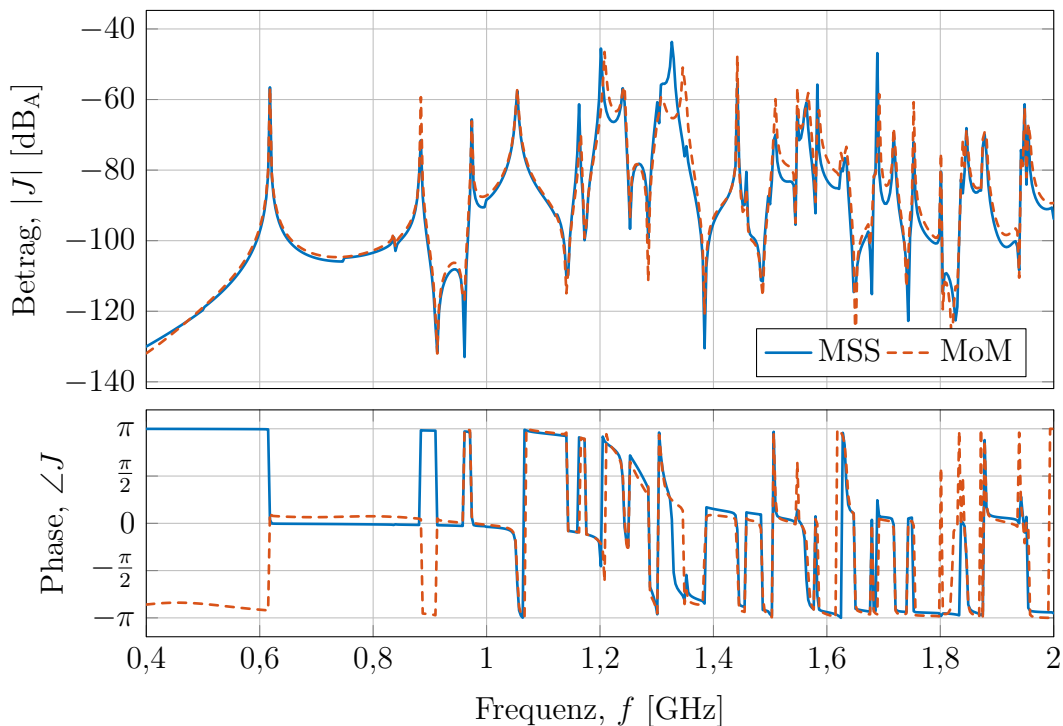
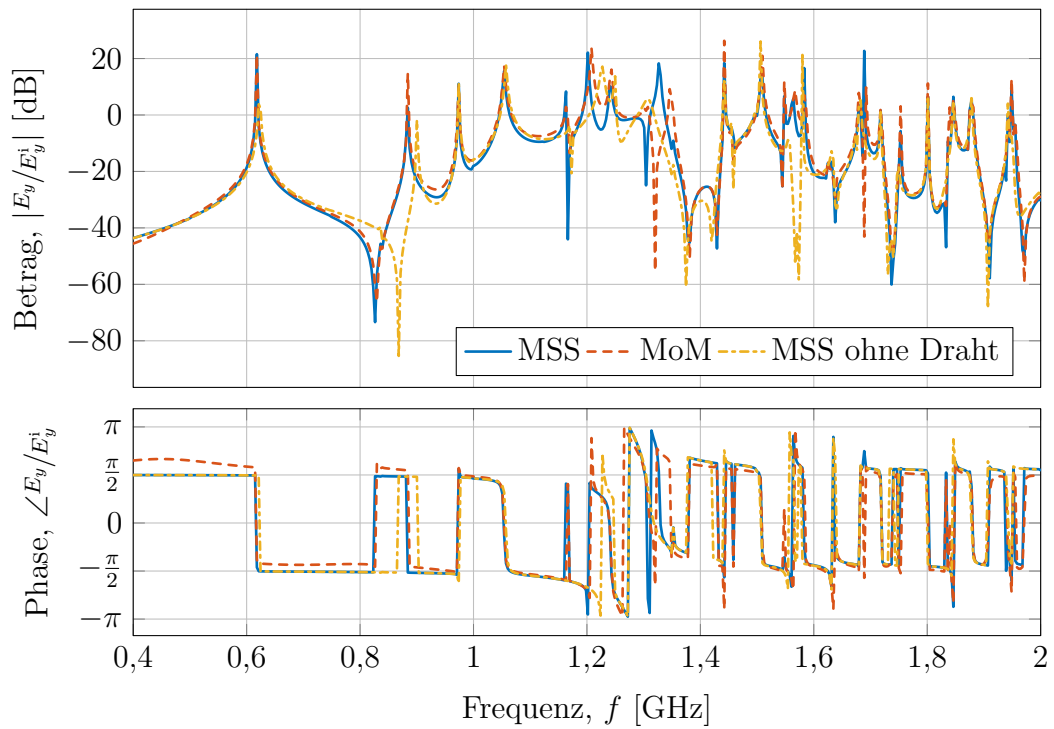
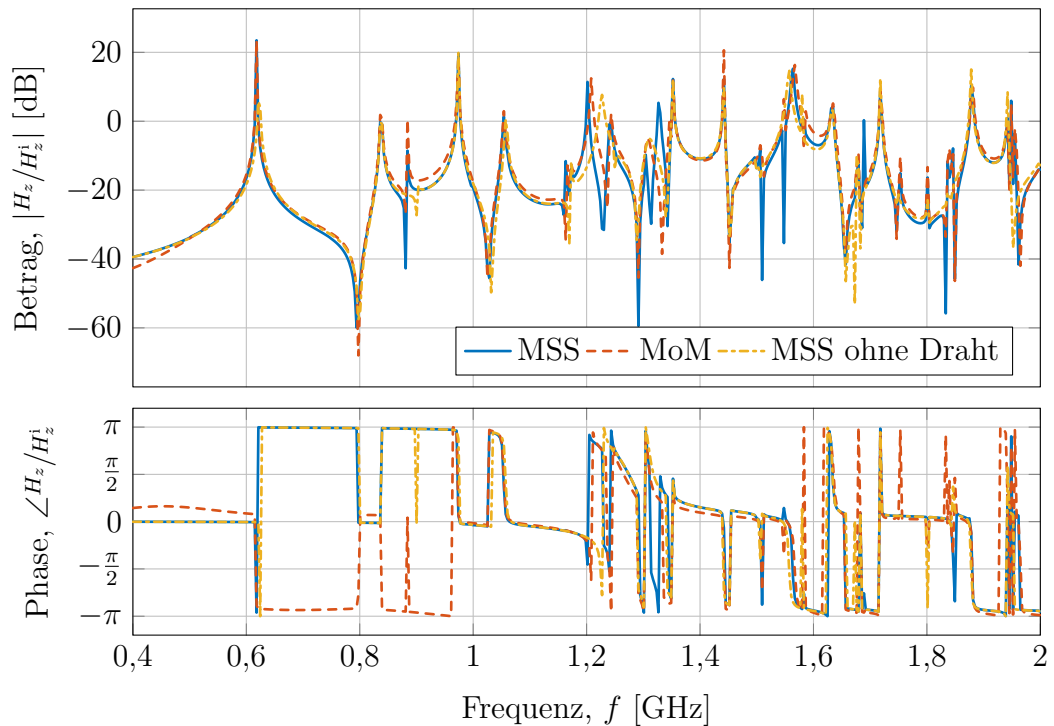


Abbildung 4.26: Eingekoppelter Strom in der Mitte eines elektrisch langen Leiters im Inneren eines Resonators bei einer Anregung mittels eines elektrisch langen Schlitzes in der Resonatorwand (vgl. Abb. 4.25 und Tab. 4.3).

sich ohne den Draht ergibt, um dessen Einfluss auf Feldverteilung exemplarisch herauszustellen. Um den Einfluss auf die äußeren Nahfelder zu untersuchen, kann (3.86) genutzt werden. Es gelten weiterhin die Einschränkungen bezüglich der externen Streuung des Resonators, wie sie in den Abschnitten 4.3.1.2 und 4.3.1.3 beschrieben sind. Auf Basis der dort diskutierten Methoden der Separierung der äußeren Streuung des Schlitzes und des Resonators ist in der Abb. 4.28 die x -Komponente des elektrischen Feldes am Ort P_o (vgl. Tab. 4.3) dargestellt. Als Gegenüberstellung ist zusätzlich das elektrische Feld nahe des Schlitzes dargestellt, falls sich kein Leiter im Inneren des Resonators befindet. Die Übereinstimmung ist gut. Gegenüber den Ergebnissen der MSS ohne Beladung sind z. B.



(a) Normalisiertes elektrisches Feld bei $P_{i,1}$



(b) Normalisiertes magnetisches Feld bei $P_{i,2}$

Abbildung 4.27: Normalisierte Felder im Inneren eines mit einem elektrisch langen Draht beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf einen elektrisch langen Schlitz einfallende ebene Welle. (a) y -Komponente des elektrischen Feldes bei $P_{i,1}$ und (b) z -Komponente des magnetischen Feldes bei $P_{i,2}$.

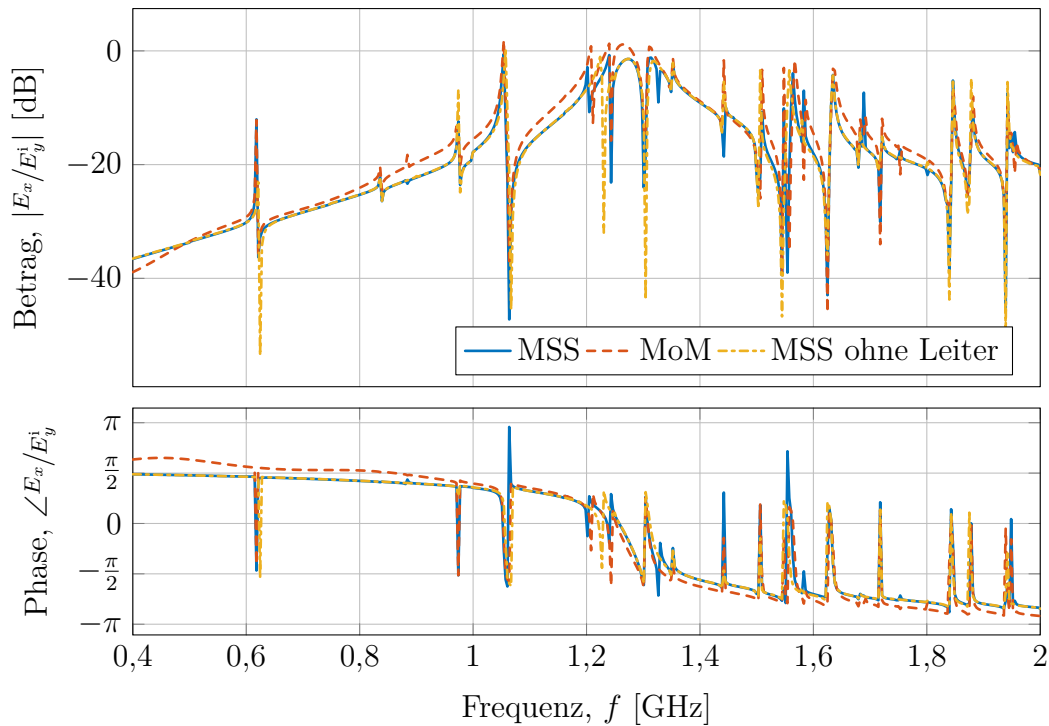


Abbildung 4.28: x -Komponente des normalisierten elektrischen Feldes außerhalb eines beladenen Resonators, erzeugt durch eine auf einen langen Schlitz in y -Richtung polarisierte einfallende ebene Welle.

bei 1,2 GHz und 1,55 GHz neue Resonanzen und Resonanzverschiebungen zu erkennen, die durch den inneren Leiter hervorgerufen werden. Um diesen Einfluss auch im Fernfeld nachzuweisen, können die mit (4.55) bestimmten äquivalenten Quellen des Schlitzes genutzt werden, um das Fernfeld nach (4.51) zu bestimmen. Die Ergebnisse dazu und ein Vergleich mit der Momentenmethode, sowie einer Darstellung der Ergebnisse ohne den inneren Leiter sind in den Abb. 4.29 zu sehen. Dort wurden die Darstellungen aufgrund der Winkelabhängigkeit der Schlitzstreuung bei hohen Frequenzen, der Frequenzbereiche bis 4 GHz in mehrere Abbildungen aufgeteilt, um den Einfluss der Beladung noch erkennen zu können. Es wird an vielen Stellen deutlich, dass dieser durch die MSS korrekt dargestellt wird.

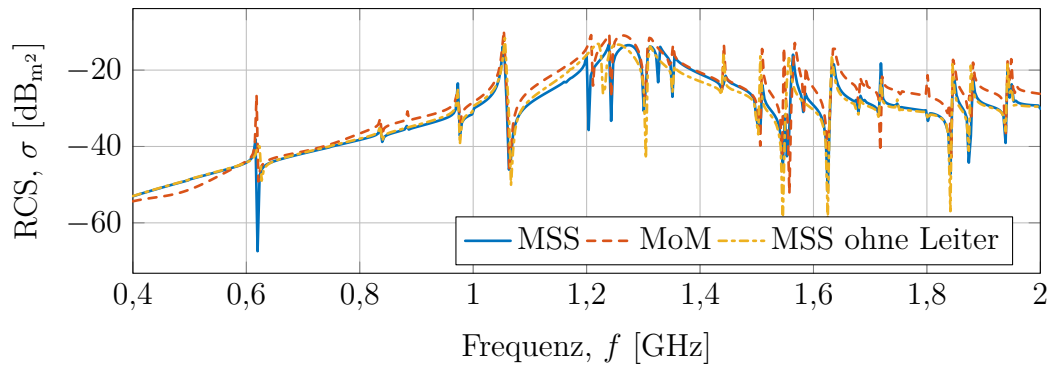
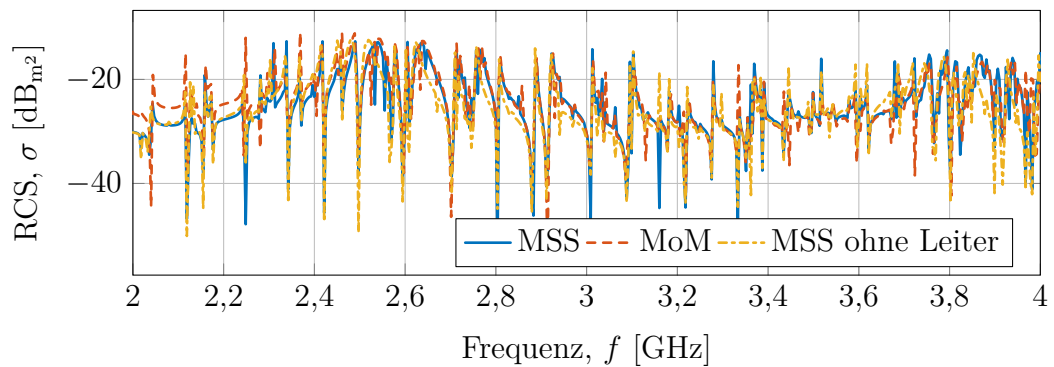
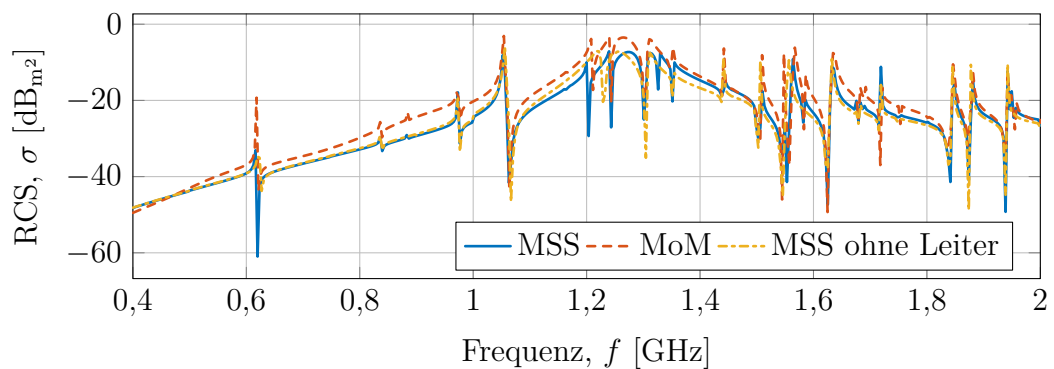
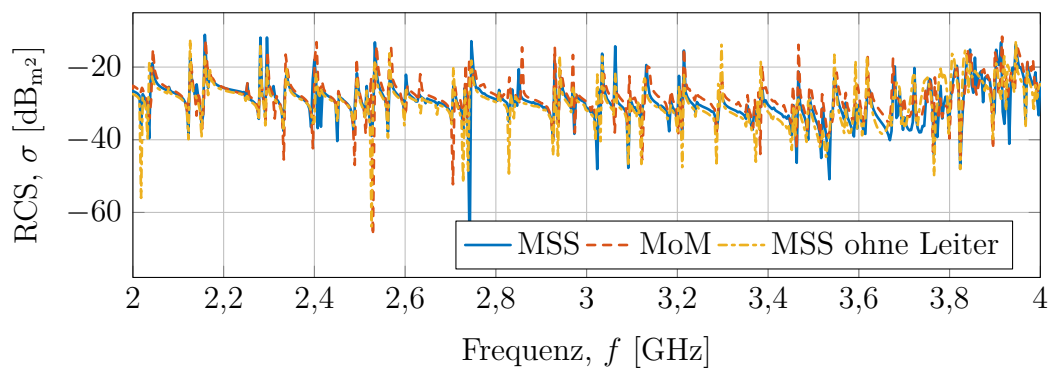
(a) $\theta = 50^\circ$, 0,4 GHz bis 2 GHz(b) $\theta = 50^\circ$, 2 GHz bis 4 GHz(c) $\theta = 90^\circ$, 0,4 GHz bis 2 GHz(d) $\theta = 90^\circ$, 2 GHz bis 4 GHz

Abbildung 4.29: Monostatische RCS des Schlitzes in einem beladenen Resonator bei verschiedenen Streuwinkeln und verschiedenen Frequenzbereichen. Der Einfluss der Beladung auf die Rückstreuung ist insbesondere nahe 1,2 GHz durch neu auftretende Resonanzen gut zu erkennen.

4.5 Vergleich des Berechnungsaufwandes

Für die einzelnen Validierungen der MSS mit der MoM in diesem Kapitel wurden zwei Geometrien untersucht. In einem ersten Schritt wurde der Draht im Freiraum untersucht. Die genauen Parameter des Beispiels sind im Abschnitt 4.1.5 dargestellt. In der Tabelle 4.4 wird die gemessene Zeit, die für das Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems nötig war, zusammen mit der notwendigen Anzahl der Unbekannten dargestellt. Dabei wurden die untersuchten Frequenzbereiche stets an 500 Einzelfrequenzen berechnet. Die Berechnungen für beide Methoden wurden auf einer Intel®Core™i7-4790 CPU mit 4 Kernen, taktend mit 3,6 GHz und einem Arbeitsspeicher von 16 GB RAM durchgeführt. Die MSS benötigt circa ein Fünftel der Zeit bei einer gleichen Anzahl von Unbekannten. Die Hauptursache dieser Zeitdifferenz liegt in den unterschiedlichen Verfahren zur Bestimmung der Matrixelemente.

Ein weiterer Aspekt ist die relativ einfache Implementation von vom Freiraum abweichender Abstrahlungsumgebungen in der MSS. Die Repräsentation durch die Greensche Funktion führt zu einer extremen Verringerung der nötigen Unbekannten für Betrachtungen in kanonischen Geometrien wie dem Hohlquader.

Zusätzlich zu den Vergleichen unter realistischen Anwendungsbedingungen wurde eine Studie zum Vergleich der numerischen Komplexität der MSS und der MoM-Implementation auf Basis der benötigten Rechenzeiten bei einer veränderlichen Anzahl der Unbekannten für das Szenario des Drahtes im Freiraum durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.30 dargestellt. Es wurde die Zeit gemessen, die für das einmalige Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems nötig war, d. h. für lediglich einen Frequenzpunkt. Bei kleinen Zeiten und wenigen Unbekannten treten einige Schwankungen auf, die auf Hintergrundprozesse des genutzten Computersystems zurückzuführen sind. Ab etwa 30 Unbekannten können verlässliche Daten interpretiert werden. Es zeigt sich, dass die MSS wesentlich weniger Zeit benötigt. Gleichzeitig wird mit zunehmender Anzahl der Unbekannten der Abstand zur MoM geringer. Dies ist durch die vergleichsweise einfache Implementation der MSS in der Softwareumgebung MATLAB [TM15] bedingt. Hier ist ein großes Potential zur numerischen Optimierung der MSS zu erwarten.

Tabelle 4.4: Vergleich des Berechnungsaufwandes zwischen MoM und MSS für die untersuchten Geometrien

Geometrie	Methode	Anzahl Unbekannter	Dauer
Freiraum	MSS	200	8 s
	FEKO	200	37 s
Resonator	MSS	10	6 s
	FEKO	13 419	10,3 h

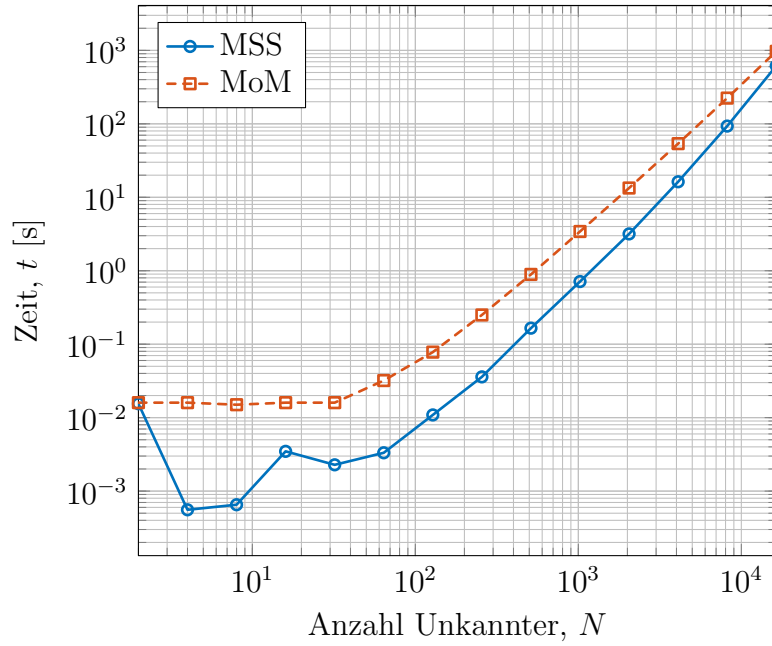


Abbildung 4.30: Der Berechnungsaufwand der MSS gegenüber der MoM-Implementation [Hyp17].

5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit noch einmal zusammenhängend dargestellt, um anschließend eine Einschätzung abzugeben, ob und in welchem Umfang die beiden Fragestellungen aus dem Abschnitt 1.3 beantwortet werden konnten. Neben einer ausführlichen Darstellung der schrittweisen Entwicklung eines möglichst allgemeinen Modells wird ein Ausblick auf vielversprechende Möglichkeiten der Anwendung der entwickelten Methode gegeben. Abschließend werden eine Reihe von Thesen formuliert, die auf den Erkenntnissen dieser Arbeit beruhen und den wissenschaftlichen Diskurs anregen sollen.

5.1 Ergebnisse

Im Kapitel 3 werden die in der Literatur verfügbaren Modelle zur Aperturkopplung analysiert und für die Anwendung auf die Fragestellungen in dieser Arbeit umformuliert. Ausgangspunkt ist dabei die Bethe-Theorie, die in dem Abschnitt 3.1 und den untergeordneten Abschnitten erläutert und mit den im Kapitel 2 gegebenen Mitteln nachvollzogen wird. Übernommen wird insbesondere die Repräsentation der elektrisch kleinen Apertur durch ein Set von Dipolmomenten. Dabei wird auch die Verletzung der Energieerhaltung, die sich als Folge einer strikten Anwendung der Bethe-Theorie ergibt, untersucht. Im Abschnitt 3.2 wird gezeigt, dass die Methode der analytischen Regularisierung als Alternative zur Methode der Reaktionsfelder aus der Literatur dienen kann, um die Verletzung dieses physikalischen Grundprinzips zu verhindern.

Als nächster konsequenter Schritt wird die Regularisierung für die Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraumresonators erläutert, um so eine Erweiterung der Bethe-Theorie für die Kopplung unterschiedlicher Abstrahlungsumgebungen zu entwickeln. Sobald das erste analytische Modell der Aperturkopplung vorliegt, wird es mit Hilfe numerischer Verfahren verifiziert. Dabei wird Software zur Vollwellensimulation nach dem FDTD-Verfahren im Zeitbereich und nach der MoM im Frequenzbereich eingesetzt. Es werden die durch die Apertur erzeugten inneren und äußeren Felder bestimmt und verglichen. Während für die Felder im Inneren eine gute bis sehr gute Übereinstimmung gefunden wird, ist eine Validierung der äußeren Felder aufwendiger, da das entwickelte analytische Modell

die äußere Streuung elektromagnetischer Wellen an dem Resonator nicht berücksichtigen kann.

Die analytischen Apertur-Modelle in dieser Arbeit nehmen stets eine unendlich ausgedehnte Ebene in der Apertur-Front an. Die numerischen Simulationen enthalten diese äußere Wechselwirkung jedoch, so dass die Felder der Apertur erst extrahiert werden müssen. Hinzu kommt, dass die Abstrahlung der elektrisch kleinen Apertur in der äußeren Region aufgrund der geringen Güte in dieser Region äußerst gering ist und von der um mehrere Größenordnungen größeren äußeren Streuung der Anregung überlagert wird. Entsprechender Weise wäre auch die Messung des rückgestreuten Feldes der Apertur sehr schwierig. Andererseits konnte nachgewiesen werden, dass das entwickelte, analytische Modell die inneren Hohlraumresonanzen im äußeren Feld korrekt darstellt.

Dies motiviert die Verallgemeinerung des Modells auf elektrisch große Aperturen. Das Ergebnis der in Kap. 4 dargestellten Überlegungen ist ein neues Verfahren zur approximativen Lösung der Feldintegralgleichungen eines dünnen, geraden und endlichen Schlitzes oder elektrischen Leiters in verschiedenen Abstrahlungsumgebungen. Das Verfahren, das in der Arbeit mit der Methode der kleinen Streuer (engl. Method of the Small Scatterer (MSS)) bezeichnet wird, repräsentiert in Anknüpfung an das analytische Modell für die kleine Apertur die elektrisch großen Strukturen als ein Satz von Dipolmomenten.

Die Überwindung der Einschränkung des analytischen Modells auf elektrisch kleine Strukturen ermöglicht auch eine weniger eingeschränkte Validierung mit Hilfe der MoM, da die Kopplung stärker ist und so die Simulationsergebnisse nicht am Rand des numerischen Rauschens liegen. Die Vergleiche zeigen, dass die MSS für die untersuchten Geometrien der MoM nahezu äquivalente Ergebnisse liefert. Die MSS ist insofern ein numerisches Verfahren, als dass sie eine zu invertierende Systemmatrix mit der Größe der Anzahl der Unbekannten liefert. Sie nutzt dabei ein ähnliches Diskretisierungsverfahren wie die MoM. Der entscheidende Unterschied ist, dass alle Matrixelemente der MSS analytisch bestimmt werden. Für den Fall eines Drahtes im Freiraum reduziert sich damit der nötige Rechenaufwand im Vergleich zur MoM circa um den Faktor 5, wie anhand eines Beispiels gezeigt wurde.

Für den Fall eines Schlitzes in einer Resonatorwand beträgt der Faktor sogar 6000, da bei der MSS nur die Apertur diskretisiert werden muss, während bei der MoM die gesamte Geometrie berücksichtigt werden muss. Auf diese Weise kann mit stark reduziertem Berechnungsaufwand der Einfluss der inneren Beladung eines Resonators auf das äußere Feld bestimmt werden, wie in Kapitel 4 detailliert erläutert und demonstriert wurde. Damit stellt die MSS zusammen mit dem Modell für elektrisch kleine Aperturen aus Kapitel 3 das Erreichen des 1. Zieles dieser Arbeit dar, nämlich das Auffinden einer kompakten analytischen Beschreibung der Aperturkopplung zwischen verschiedenen Umgebungen.

Das Erreichen des 2. Ziels, nämlich das Ziehen von Rückschlüssen auf die innere Beladung des Resonators durch die Messung des rückgestreuten Feldes, ist insbesondere durch die Ausführungen und beispielhaften Ergebnisse in den Abschnitten 4.3 und 4.4 erreichbar, denn dort wird gezeigt, dass und wie sich das gestreute Feld durch eine Beladung verändert, z. B. durch zusätzliche Resonanzen. Es ist somit gezeigt, dass das äußere Feld Informationen über die innere Struktur des Resonators enthält. Diese Informationen können durch eine Messung des Fernfeldes der angeregten Struktur und eine anschließende Extraktion der Resonanzstellen extrahiert werden.

5.2 Ausblick

Insbesondere die MSS zeigt vielversprechende Ergebnisse. In ihrem Rahmen wird das Verfahren der Regularisierung zur Extraktion der Singularität für kleine Abstände verwendet. Anschließend kann eine analytische Lösung des extrahierten Anteils gefunden werden, die dann durch eine Diskretisierung an die tatsächliche Lösung approximiert werden kann. Es sollte untersucht werden, ob und in wieweit das Verfahren auch für beliebig geformte Schlitze oder Leiter Anwendung finden kann.

In die analytische Lösung des extrahierten Anteils fließen die Randbedingungen an den Enden des Schlitzes oder der Leitung ein. Bisher ist diese Randbedingung, dass der magnetische oder elektrische Strom dort verschwinden muss. Die Lösung kann auch für beliebige Randbedingungen verallgemeinert werden, so dass z. B. auch Kombinationen von Schlitzten und Leitern betrachtet werden können.

Weiterhin ist eine Verallgemeinerung für zweidimensionale Strukturen denkbar. Voraussetzung dafür ist die Existenz einer analytischen Lösung des extrahierten Anteils einer solchen Geometrie. Bisher wurde ausschließlich der quaderförmige Hohlraumresonator betrachtet. Sofern eine Regularisierung erreicht werden kann, können auch andere relevante Abstrahlungsumgebungen, wie z. B. ein Hohlzylinder mit Aperturen, leicht berücksichtigt werden.

Die Fernfelder, die mittels der MSS oder durch Messung gewonnen werden, können mithilfe der *Singularity Expansion Method* (SEM) hinsichtlich der komplexen Polstellen des inneren und äußeren Systems untersucht werden [BGT12; CBS10]. Die Position dieser Polstellen in der komplexen Ebene hängen bekannterweise von der Geometrie des Systems, jedoch nicht von der Anregung ab. Auf diese Weise könnte eine Verbindung der MSS und der SEM eindeutige *Fingerabdrücke* in Form von Gruppen an Polstellen liefern, die weitere Einsichten zur gegebenen Fragestellung erlauben.

5.3 Thesen

1. Existiert eine analytische Lösung für die Verteilung der Stromdichte eines beliebigen Objektes unter quasistatischen Bedingungen, können auch die Abstrahlung und rückwirkende Feldeffekte ohne numerische Integration zur Bestimmung der Matrixelemente untersucht werden.
2. Der Formalismus der dyadischen Greenschen Funktionen ist die einfachste Darstellung der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Quellen und Feldern.
3. Die quasistatische Betrachtung eines elektromagnetischen Problems kann auch als *Nächster-Nachbar-Approximation* verstanden werden. Unter dieser Voraussetzung ist eine Verallgemeinerung der MSS auf beliebig geformte dünne Leiter möglich.

Literatur

- [AL09] R. Araneo und G. Lovat. „Fast MoM Analysis of the Shielding Effectiveness of Rectangular Enclosures With Apertures, Metal Plates, and Conducting Objects“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 51.2 (2009), S. 274–283. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEM.2008.2010456.
- [Ana03] H. Anastassiou. „A review of electromagnetic scattering analysis for inlets, cavities, and open ducts“. In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 45.6 (2003), S. 27–40. ISSN: 10459243. DOI: 10.1109/MAP.2003.1282177.
- [Ana+96] H. Anastassiou u. a. „Electromagnetic scattering from simple jet engine models“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 44.3 (1996), S. 420–421. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/8.486313.
- [Ant+13] S. S. Antman u. a. *Computational Electromagnetics*. New York und NY: Springer New York, 2013. ISBN: 978-1-4614-5350-5. DOI: 10.1007/978-1-4614-5351-2.
- [Bal05] C. A. Balanis. *Antenna theory: Analysis and design*. 3rd ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2005. ISBN: 0-471-66782-X.
- [Bet44] H. Bethe. „Theory of Diffraction by Small Holes“. In: *Physical Review* 66.7-8 (1944), S. 163–182. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.66.163.
- [BGT12] C. E. Baum, D. V. Giri und F. M. Tesche. *The singularity expansion method in electromagnetics: A summary survey and open questions*. First edition. 2012. ISBN: 978-1105424045.
- [Bla07] J. van Bladel. *Electromagnetic fields*. 2nd ed. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. Piscataway und N.J: IEEE, 2007. ISBN: 978-0-471-26388-3.
- [BM92] Y. A. Brychkov und O. I. Marichev. *Elementary functions*. 3. Aufl. New York [u.a.]: Gordon und Breach Science Publ, 1992. ISBN: 2-88124-089-5.
- [BY04] C. Bunting und S.-P. Yu. „Field Penetration in a Rectangular Box Using Numerical Techniques: An Effort to Obtain Statistical Shielding Effectiveness“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 46.2 (2004), S. 160–168. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEM.2004.826876.

- [Cas81] K. Casey. „Low-Frequency Electromagnetic Penetration of Loaded Apertures“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility EMC-23.4* (1981), S. 367–377. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.1981.303969.
- [CBS10] J. Chauveau, N. d. Beaucoudrey und J. Saillard. „Resonance Behavior of Radar Targets With Aperture: Example of an Open Rectangular Cavity“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 58.6 (2010), S. 2060–2068. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.2010.2046837.
- [CLS75] C. Chuang, C. Liang und Shung-Wu Lee. „High frequency scattering from an open-ended semi-infinite cylinder“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 23.6 (1975), S. 770–776. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1975.1141178.
- [Coh52a] S. Cohn. „Microwave Coupling by Large Apertures“. In: *Proceedings of the IRE* 40.6 (1952), S. 696–699. ISSN: 0096-8390. DOI: 10.1109/JRPROC.1952.274063.
- [Coh52b] S. Cohn. „The Electric Polarizability of Apertures of Arbitrary Shape“. In: *Proceedings of the IRE* 40.9 (1952), S. 1069–1071. ISSN: 0096-8390. DOI: 10.1109/JRPROC.1952.273876.
- [Col81] R. Collin. „Rayleigh scattering and power conservation“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 29.5 (1981), S. 795–798. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1981.1142655.
- [Col82] R. E. Collin. „Small aperture coupling between dissimilar regions“. In: *Electromagnetics* 2.1 (1982), S. 1–24.
- [Col91] R. E. Collin. *Field theory of guided waves*. 2nd ed. New York: IEEE Press, 1991. ISBN: 0879422378.
- [CT 2] K. Chan und F. Tremblay. „Mode matching analysis of metallic blades in a cylinder“. In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 1995 Digest. 18-23 June 1995*, S. 38–41. DOI: 10.1109/APS.1995.531095.
- [Gra+15] G. Gradoni u. a. „A Statistical Model for the Excitation of Cavities Through Apertures“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 57.5 (2015), S. 1049–1061. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.2015.2421346.
- [Gro06] F. Gronwald. *Antenna theory in resonating systems derived from fundamental electromagnetism: Univ., Habil.-Schr.–Magdeburg, 2006*. Bd. 16. Res electricae Magdeburgenses. Magdeburg: Univ, 2006. ISBN: 3929757931.

-
- [Har01] R. F. Harrington. *Time-harmonic electromagnetic fields*. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. New York: IEEE Press und Wiley-Interscience, 2001. ISBN: 047120806x.
- [Har67] R. Harrington. „Matrix methods for field problems“. In: *Proceedings of the IEEE* 55.2 (1967), S. 136–149. ISSN: 0018-9219. DOI: 10.1109/PROC.1967.5433.
- [Har93] R. F. Harrington. *Field computation by moment methods*. IEEE Press series on electromagnetic waves. Piscataway und NJ: IEEE Press, 1993. ISBN: 9780470544631.
- [HI78] K. Hongo und G. Ishii. „Diffraction of an electromagnetic plane wave by a thick slit“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 26.3 (1978), S. 494–499. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1978.1141870.
- [Hil+94] D. A. Hill u. a. „Aperture excitation of electrically large, lossy cavities“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 36.3 (1994), S. 169–178. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/15.305461.
- [HM76] R. Harrington und J. Mautz. „A generalized network formulation for aperture problems“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 24.6 (1976), S. 870–873. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1976.1141420.
- [HW12] W. Hergert und T. Wriedt. *The Mie theory: Basics and applications*. Bd. 169. Springer series in optical sciences. Berlin und London: Springer, 2012. ISBN: 3642287379.
- [Hyp17] Hyperworks. *FEKO*. 2017. URL: <https://altairhyperworks.com/product/FEKO>.
- [Kon+05] T. Konefal u. a. „A Fast Multiple Mode Intermediate Level Circuit Model for the Prediction of Shielding Effectiveness of a Rectangular Box Containing a Rectangular Aperture“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 47.4 (2005), S. 678–691. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.2005.853715.
- [Lee86] K. S. H. Lee. *EMP interaction: Principles, techniques, and reference data / a handbook of technology from the EMP interaction notes*. Washington und D.C: Hemisphere Pub. Corp., 1986. ISBN: 978-0891165811.
- [Lev80] R. Levy. „Improved Single and Multiaperature Waveguide Coupling Theory, Including Explanation of Mutual Interactions“. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 28.4 (1980), S. 331–338. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1980.1130073.

- [Lie+13] T. Liebig u. a. „openEMS - a free and open source equivalent-circuit (EC) FDTD simulation platform supporting cylindrical coordinates suitable for the analysis of traveling wave MRI applications“. In: *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 26.6 (2013), S. 680–696. ISSN: 08943370. DOI: 10.1002/jnm.1875.
- [MB77] F. d. Meulenaere und J. van Bladel. „Polarizability of some small apertures“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 25.2 (1977), S. 198–205. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1977.1141568.
- [McD85] N. A. McDonald. „Polynomial Approximations for the Electric Polarizabilities of Some Small Apertures“. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 33.11 (1985), S. 1146–1149. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1985.1133186.
- [MLC74] R. Mittra, S. W. Lee und C. A. Chuang. *Analytic Modeling of the Radar Scattering Characteristics of Aircraft*. Springfield VA, 1974.
- [MS70] J. Moll und R. Seecamp. „Calculation of Radar Reflecting Properties of Jet Engine Intakes Using a Waveguide Model“. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-6.5 (1970), S. 675–683. ISSN: 0018-9251. DOI: 10.1109/TAES.1970.310069.
- [Nos99] A. I. Nosich. „The method of analytical regularization in wave-scattering and eigenvalue problems: foundations and review of solutions“. In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 41.3 (1999), S. 34–49. ISSN: 10459243. DOI: 10.1109/74.775246.
- [NTP10] J. B. Nitsch, S. V. Tkachenko und S. Potthast. *Pulsed Excitations of Resonators*. 2010. URL: <http://www.ece.unm.edu/summa/notes/In/IN619.pdf>.
- [NTP12] J. B. Nitsch, S. V. Tkachenko und S. Potthast. „Transient Excitation of Rectangular Resonators Through Electrically Small Circular Holes“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.6 (2012), S. 1252–1259. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.2012.2201724.
- [OG00] J. Odendaal und D. Grygier. „RCS measurements and results of an engine-inlet system design optimization“. In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 42.6 (2000), S. 16–23. ISSN: 10459243. DOI: 10.1109/74.894178.
- [Pea53] J. D. Pearson. „The diffraction of electro-magnetic waves by a semi-infinite circular wave guide“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 49.4 (1953), S. 659–667. ISSN: 0305-0041. DOI: 10.1017/S0305004100028863.

-
- [Pet+15] J. Petzold u. a. „External scattering by rectangular cavities with small apertures“. In: *2015 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC 2015*. 2015, S. 68–73. DOI: 10.1109/ISEMC.2015.7256134.
- [PTV15] J. Petzold, S. Tkachenko und R. Vick. „Energy conserving coupling through small apertures in an infinite perfect conducting screen“. In: *Advances in Radio Science* 13 (2015), S. 227–232. ISSN: 1684-9973. DOI: 10.5194/ars-13-227-2015.
- [PTV19] J. Petzold, S. Tkachenko und R. Vick. „Scattering by an Electrically Large Slot in a Rectangular Cavity“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* (2019), S. 1. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.2019.2894258.
- [PV18] J. Petzold und R. Vick. „Effiziente Berechnung der Streuung an elektrisch großen Leitern im Freiraum und Resonator“. In: *emv – Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit*. Hrsg. von H. Garbe. Düsseldorf: VDE-Verlag, 2018.
- [Rob+98] M. Robinson u. a. „Analytical formulation for the shielding effectiveness of enclosures with apertures“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 40.3 (1998), S. 240–248. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/15.709422.
- [RSM77] Y. Rahmat-Samii und R. Mittra. „Electromagnetic coupling through small apertures in a conducting screen“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 25.2 (1977), S. 180–187. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1977.1141554.
- [RT08] F. Rachidi und S. Tkachenko. *Electromagnetic field interaction with transmission lines: From classical theory to HF radiation effects*. Advances in electrical and electronic engineering. Southampton, Billerica und MA: WIT Press, 2008. ISBN: 978-1-84564-063-7.
- [Smy36] W. R. Smythe. *Static and dynamic electricity*. International series in pure and applied physics. Ann Arbor und Mich: Edwards Bros., 1936.
- [Sol11] J. R. Solin. „Formula for the Field Excited in a Rectangular Cavity With a Small Aperture“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 53.1 (2011), S. 82–90. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.2010.2053711.
- [Sol12] J. R. Solin. „Formula for the Field Excited in a Rectangular Cavity With an Electrically Large Aperture“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.1 (2012), S. 188–192. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/TEMC.2011.2179941.
- [Str] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. ISBN: 978-1446517390.

- [TIK97] F. M. Tesche, M. Ianoz und T. Karlsson. *EMC analysis methods and computational models*. New York: John Wiley & Sons, 1997. ISBN: 0-471-15573-X.
- [Tka+09] S. Tkachenko u. a. „High frequency electromagnetic field coupling to small antennas in rectangular resonator“. In: *2009 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*. IEEE, 2009, S. 188–191. ISBN: 978-1-4244-3385-8. DOI: 10.1109/ICEAA.2009.5297515.
- [TM15] I. The MathWorks. *MATLAB*. 2015.
- [TNAH12] S. Tkachenko, J. Nitsch und M. Al-Hamid. „High-Frequency Electromagnetic Field Coupling to Small Antennae in a Rectangular Resonator“. In: *International Journal of Antennas and Propagation 2012* (2012), S. 1–6. ISSN: 1687-5869. DOI: 10.1155/2012/897074.
- [TNR14] S. Tkachenko, J. Nitsch und R. Rambousky. „Electromagnetic field coupling to an electrically small axial dipole antenna in a cylindrical cavity“. In: *2014 International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC EUROPE*. 2014, S. 175–180. DOI: 10.1109/EMCEurope.2014.6930898.
- [TNV] S. Tkachenko, J. Nitsch und R. Vick. „HF coupling to a transmission line inside a rectangular cavity“. In: *2010 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010)*, S. 5–8. DOI: 10.1109/URSI-EMTS.2010.5637177.
- [TRI95] S. Tkachenko, F. Rachidi und M. Ianoz. „Electromagnetic field coupling to a line of finite length: theory and fast iterative solutions in frequency and time domains“. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 37.4 (1995), S. 509–518. ISSN: 0018-9375. DOI: 10.1109/15.477335.
- [TVM99] S. V. Tkachenko, G. Vodopianov und L. Martinov. „Electromagnetic field coupling to an electrically small antenna in a rectangular cavity“. In: *13th International Zurich Symposium and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility*. 1999, S. 379–384.
- [VNV07] N. V. Veremey, A. I. Nosich und V. V. Veremey. „TE excitation of an unclosed circular cylinder at the planar penetrable interface“. In: *Electromagnetics* 13.2 (2007), S. 169–186. DOI: 10.1080/02726349308908341.
- [War+03] L. Warne u. a. „Statistical properties of linear antenna impedance in an electrically large cavity“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 51.5 (2003), S. 978–992. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.2003.811483.
- [WM63] L. Weiss und R. N. McDonough. „Prony’s Method, Z -Transforms, and Padé Approximation“. In: *SIAM Review* 5.2 (1963), S. 145–149. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/1005035.

- [WP92] P. C. Waterman und J. C. Pedersen. „Scattering by finite wires“. In: *Journal of Applied Physics* 72.2 (1992), S. 349–359. ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.351862.
- [WW04] K. Warnick und Weng Cho Chew. „Error analysis of the moment method“. In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 46.6 (2004), S. 38–53. ISSN: 10459243. DOI: 10.1109/MAP.2004.1396735.
- [Yee66] K. Yee. „Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14.3 (1966), S. 302–307. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.



- MAFO-01** ORTHS, A.: *Multikriterielle, optimale Planung von Verteilungsnetzen im liberalisierten Energiemarkt unter Verwendung von spieltheoretischen Verfahren*, 2003. ISBN 3-929757-57-5.
- MAFO-02** PURMANN, M.: *Optimierung des Betriebsverhaltens von PEM-Brennstoffzellen unter Berücksichtigung von elektrischem und Gesamtwirkungsgrad bei unterschiedlichen Lastanforderungen und Betriebsparametern*, 2004. ISBN 3-929757-63-X.
- MAFO-03** AL-HAMID, M.: *Extraktion von höheren Moden in TEM-Wellenleitern*, 2004. ISBN 3-929757-64-8.
- MAFO-04** HAASE, H., J. NITSCH, and T. STEINMETZ: *Transmission-Line Super Theory – A new Approach to an Effective Calculation of Electromagnetic Interference*, 2004. ISBN 3-929757-67-2.
- MAFO-05** BACHRY, A.: *Power Quality Studies in Distribution Systems Involving Spectral Decomposition*, 2004. ISBN 3-929757-68-0.
- MAFO-06** STYCZYNSKI, Z. A.: *Power Network and Renewables – A Scientific Report*, 2004. ISBN 3-929757-69-9.
- MAFO-07** BLUME, E.: *Numerische Analyse der Kopplung linearer Antennen innerhalb eines Resonators*, 2004. ISBN 3-929757-71-0.
- MAFO-08** HANDSCHIN, E. and Z. A. STYCZYNSKI: *Power System Application of the Modern Battery Storage*, 2004. ISBN 3-929757-75-3.
- MAFO-09** HAASE, H.: *Full-Wave Field Interactions of Nonuniform Transmission Lines*, 2005. ISBN 3-929757-78-8.
- MAFO-10** NITSCH, D.: *Die Wirkung eingekoppelter ultrabreitbandiger elektromagnetischer Impulse auf komplexe elektronische Systeme*, 2005. ISBN 3-929757-79-6.
- MAFO-11** HADZI-KOSTOVA, B.: *Protection Concepts in Distribution Networks with Decentralized Energy Resources*, 2005. ISBN 3-929757-84-2.
- MAFO-12** STEINMETZ, T.: *Ungleichförmige und zufällig geführte Mehrfachleitungen in komplexen technischen Systemen*, 2006. Nummerierung geändert, ISBN 3-929757-98-2.
- MAFO-13** STYCZYNSKI, Z. and J. HAUBROCK: *Influence of Distributed and Renewable Generation on Power System Security – Proceedings of the CRIS Workshop 2006*, 2006. ISBN 3-929757-99-0.
- MAFO-14** HEIDECK, G.: *Ein autonomes Brennstoffzellensystem: Optimierungsansätze*, 2006. ISBN 3-929757-94-X.
- MAFO-15** STYCZYNSKI, Z. und H.-D. MUSIKOWSKI: *Dresdener Kreis Elektroenergieversorgung 7*, 2006. ISBN 3-929757-85-0.
- MAFO-16** GRONWALD, F.: *Antenna Theory in Resonating Systems derived from Fundamental Electromagnetism*, 2007. ISBN 3-929757-93-1.
- MAFO-17** KRAUTHÄUSER, H.G.: *Grundlagen und Anwendungen von Modenverwirbelungskammern*, 2007. ISBN 978-3-929757-43-9.
- MAFO-18** DZIENIS, C.: *Ersatzmodelle nichtlinearer Lasten in elektrischen Verteilungsnetzen*, 2007. ISBN 978-3-929757-07-1.

- MAFO-19** STYCZYNSKI, Z. and J. HAUBROCK: *Renewable and Dispersed Power Generation in Power Systems*, 2007. ISBN 978-3-929757-44-6.
- MAFO-20** HAUBROCK, J.: *Parametrierung elektrischer Äquivalentschaltbilder von PEM-Brennstoffzellen*, 2008. ISBN 978-3-940961-02-0.
- MAFO-21** ANGELOV, A. N.: *Rechnergestütztes Lernen im Bereich der Regenerativen Energien (Ausgewählte Aspekte)*, 2008. ISBN 978-3-940961-03-7.
- MAFO-22** KOMARNICKI, P.: *Anwendung hochgenauer, synchroner Messungen zur Verbesserung des Betriebs von Verteilungsnetzen*, 2008. ISBN 978-3-940961-04-4.
- MAFO-23** ROGGATZ, C.: *Trainingssimulator für die Führung von elektrischen Systemen mit dezentralen Energieeinspeisungen – Trainingsszenarien und Umsetzung*, 2008. ISBN 978-3-940961-05-1.
- MAFO-24** RUDION, K.: *Aggregated Modelling of Wind Farms*, 2008. ISBN 978-3-940961-14-3.
- MAFO-25** GANJAVI, M. R.: *Protection System Coordination Using Expert System*, 2008. ISBN 978-3-940961-15-0.
- MAFO-26** BOFINGER, S.: *Energieversorgungsnetze mit einem hohen Anteil an photovoltaischer Solarenergie: Standortbestimmung, Solarstromprognose, Netzintegration*, 2008. ISBN 978-3-940961-25-9.
- MAFO-27** STYCZYNSKI, Z. and P. KOMARNICKI: *Distributed and Renewable Power Generation*, 2008. ISBN 978-3-940961-26-6.
- MAFO-28** KOCHETOV, S. V.: *Time- and Frequency-Domain Modeling of Passive Interconnection Structures in Field and Circuit Analysis*, 2008. ISBN 978-3-940961-27-3.
- MAFO-29** MAGDOWSKI, M.: *Entwicklung und Validierung eines Werkzeugs zur Berechnung der elektromagnetischen Einkopplung von stochastischen Feldern in Leitungsstrukturen*, 2008. ISBN 978-3-940961-28-0.
- MAFO-30** SONNEMANN, F.: *Elektromagnetische Effekte an elektrischen Zündmitteln (EED) mit angeschlossener Zündkreiselektronik (ZKE) bei impulsförmiger, breitbandiger Bestrahlung*, 2009. ISBN 978-3-940961-32-7.
- MAFO-31** SMIEJA, T.: *Multikriterielle Planung interregionaler Elektrizitätsnetze im liberalisierten Energiemarkt*, 2009. ISBN 978-3-940961-35-8.
- MAFO-32** HEYDE, C. O.: *Dynamic Voltage Security Assessment for On-Line Control Room Application*, 2010. ISBN 978-3-940961-40-2.
- MAFO-33** STYCZYNSKI, Z. A. and N. I. VOROPAI (EDITORS): *Renewable Energy Systems Fundamentals, Technologies, Techniques and Economics*, 2010. ISBN 978-3-940961-42-6.
- MAFO-34** Styczyński, Z. A. и N. I. Voropai (Editors): *Renewable Energy Systems Fundamentals, Technologies, Techniques and Economics (Russian Version)*, 2010. ISBN 978-3-940961-44-0.
- MAFO-35** STYCZYNSKI, Z. A. and A. LINDEMANN (EDITORS): *Integration of Renewable Energies into the Grid / Proceedings of the Power & Energy Student Summit 2010*, 2010. ISBN 978-3-940961-47-1.
- MAFO-36** STYCZYNSKI, Z. A. und H.-D. MUSIKOWSKI (EDITORS): *Dresdener Kreis Energieversorgung 11*, 2010. ISBN 978-3-940961-51-8.
- MAFO-37** GURBIEL, M. A.: *Definition and Testing of a Digital Interface of a Power Substation*, 2011. ISBN 978-3-940961-54-9.
- MAFO-38** LOMBARDI, P.: *Multi Criteria Optimization of an Autonomous Virtual Power Plant*, 2011. ISBN 978-3-940961-55-6.

- MAFO-39** POWALKO, M.: *Beobachtbarkeit eines elektrischen Verteilungsnetzes – Ein Beitrag zum Smart Grid*, 2011. ISBN 978-3-940961-62-4.
- MAFO-40** STYCZYNSKI, Z. A., K. RUDION, and C. NGUYEN-MAU (EDITORIAL BOARD): *Power System Dynamic Security Assessment*, 2011. ISBN 978-3-940961-61-7.
- MAFO-41** KÄBISCH, M.: *Optimale Dimensionierung und Betriebsführung einer brennstoffzellenbasierten Auxiliary Power Unit im Fahrzeug*, 2011. ISBN 978-3-940961-67-9.
- MAFO-42** STYCZYNSKI, Z. A. und N. I. VOROPAI (EDITORS): *Special Issue Grant 220 Russian Federation SSmart Grid for Efficient Energy Power System for the Future”, Proceedings Volume I*, 2012. ISBN 978-3-940961-74-7.
- MAFO-43** STYCZYNSKI, Z. A., P. KOMARNICKI und A. NAUMANN (EDITORS): *Abschlussbericht Harz.ErneuerbareEnergien-mobility*, 2012. ISBN 978-3-940961-71-6.
- MAFO-44** HEUER, M.: *Diagnosetool für stationär betriebene PEM-Brennstoffzellensysteme*, 2012. ISBN 978-3-940961-77-8.
- MAFO-45** STÖTZER, M.: *Demand Side Integration in elektrischen Verteilnetzen – Potenzialanalyse und Bewertung*, 2012. ISBN 978-3-940961-78-5.
- MAFO-46** MAGDOWSKI, M.: *Vergleich der Einkopplung deterministischer und statistischer elektromagnetischer Felder in Leitungen*, 2012. ISBN 978-3-940961-75-4.
- MAFO-47** NAUMANN, A.: *Leitwarte im Smart Grid*, 2012. ISBN 978-3-940961-81-5.
- MAFO-48** RUDION, K.: *Offshore Power System Planning – Selected Aspects*, 2012. ISBN 978-3-940961-82-2.
- MAFO-49** NGUYEN-MAU, C.: *Electric Power System Stability Enhancement by Voltage Source Converter based High Voltage Direct Current Technology*, 2012. ISBN 978-3-940961-84-6.
- MAFO-50** GUO, H.: *Measurement-Based Load Modeling for Smart Grid Planning*, 2012. ISBN 978-3-940961-86-0.
- MAFO-51** STYCZYNSKI, Z. A.: *Proceedings No. 2 in the Scope of Mega Grant Baikal*, 2013. ISBN 978-3-940961-95-2.
- MAFO-52** STYCZYNSKI, Z. A.: *Proceedings No. 3 in the Scope of Mega Grant Baikal*, 2013. ISBN 978-3-940961-98-3.
- MAFO-53** WENGE, C.: *Optimaler Betrieb von mobilen Speichern im Smart Grid. -Mobilitätsleitwarte-*, 2013. ISBN 978-3-944722-01-6.
- MAFO-54** RÖHRIG, C.: *Smart Distribution Planung unter Berücksichtigung von residualen Lasten*, 2014. ISBN 978-3-944722-06-1.
- MAFO-55** MIDDELSTÄDT, F.: *Research of SEM Poles of Complex Wire Structures*, 2014. ISBN 978-3-944722-07-8.
- MAFO-56** STYCZYNSKI, Z. A. (EDITOR): *Power Network and Renewables – A Scientific Report – 15 Years Research*, 2014. ISBN 978-3-944722-08-5.
- MAFO-57** SOLONINA, N. N., V. S. STEPANOV, and K. V. SUSLOV: *Information technology in intelligent power networks*, 2014. ISBN 978-3-944722-13-9.
- MAFO-58** KREBS, R.: *Fundamentals of Power System Protection*, 2014. ISBN 978-3-944722-15-3.
- MAFO-59** MOSKALENKO, N.: *Optimal Dynamic Energy Management System in Smart Homes*, 2014. ISBN 978-3-944722-16-0.
- MAFO-60** HAUER, I.: *Optimale Last- und Erzeugungsanpassung bei kritischen Netzzuständen – Algorithmen und deren Bewertung*, 2014. ISBN 978-3-944722-18-4.

- MAFO-61** RICHTER, M.: *Dresdner Kreis Elektroenergieversorgung 15, Begleitband zum Workshop 2014*, 2014. ISBN 978-3-944722-21-4.
- MAFO-62** STYCZYNSKI, Z. A., A. RICHTER und P. KÜHNE: *Second ELECON Workshop – Begleitband zum Workshop 2014*, 2014. ISBN 978-3-944722-23-8.
- MAFO-63** BERNSTEIN, P.: *Modellgestützte optimale Betriebsführung von PEM-Brennstoffzellen für autonome Anlagen*, 2015. ISBN 978-3-944722-24-5.
- MAFO-64** RABE, S.: *Betrieb einer Zweipunkt-Offshore-HGÜ-Verbindung – Modelluntersuchungen*, 2015. ISBN 978-3-944722-31-3.
- MAFO-65** ARENDARSKI, B.: *Reliability Assessment of Smart Grids*, 2015. ISBN 978-3-944722-32-0.
- MAFO-66** PAN, X.: *Numerisches EMV-Simulationsverfahren zur Berechnung der Störaussendung elektrischer Antriebssysteme in Hybridfahrzeugen*, 2016. ISBN 978-3-944722-34-4.
- MAFO-67** RICHTER, M.: *PMU-basierte Zustandsabschätzung in Smart Distribution*, 2016. ISBN 978-3-944722-43-6.
- MAFO-68** BIELCHEV, I.: *Adaptiver Distanzschutz im Standard IEC 61850*, 2016. ISBN 978-3-944722-45-0.
- MAFO-69** HASSAN, A.: *Modeling of Single and Double-Shielded Cables for EMC Applications*, 2016. ISBN 978-3-944722-41-2.
- MAFO-70** LIU, X.: *Control of Voltage Source Converter Based High Voltage Direct Current Transmission Systems for Grid Code Compliance*, 2016. ISBN 978-3-944722-46-7.
- MAFO-71** KAISER, M.: *Fusion of Interventional Ultrasound & X-ray*, 2016. ISBN 978-3-944722-51-1.
- MAFO-72** GRIEGER, F.: *Ein Beitrag zur Bestimmung der Zuverlässigkeit von Leistungshalbleiterbauelementen unter Berücksichtigung der Anwendung*, 2016. ISBN 978-3-944722-52-8.
- MAFO-73** LI, M.: *Towards a Robust Electromagnetic Tracking System for Use in Medical Applications*, 2018. ISBN 978-3-944722-66-5.
- MAFO-74** KLABUNDE, C., J. DANCKER, N. GAST, T. SCHRÖTER, F. SCHULZ, J. ROSSBERG und A. RICHTER: *Statusbericht der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg zum Verbundprojekt: Intelligentes Multi-Energie-System (SmartMES)*, 2018. ISBN 978-3-944722-69-6.
- MAFO-75** SCHRÖTER, T.: *19. Dresdner Kreis Elektroenergieversorgung, Begleitband zum Workshop 2018 in Magdeburg*, 2018. ISBN 978-3-944722-79-5.
- MAFO-76** KLABUNDE, C., J. DANCKER, N. GAST, T. SCHRÖTER, F. SCHULZ und J. ROSSBERG: *Intelligentes Multi-Energie-System (SmartMES) – Statusbericht der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg zum Verbundprojekt, 2. Statusseminar 04. April 2019 in Magdeburg*, 2019. ISBN 987-3-944722-80-1.
- MAFO-77** HELM, S., J. DANCKER, M. FRITSCH und T. SCHRÖTER: *Power and Energy Student Summit 2019, 09.–11. Juli*, 2019. ISBN 978-3-944722-84-9.
- MAFO-78** CHYCHYKINA, I.: *Comparison of Different Redispatch Optimization Strategies*, 2019. ISBN 978-3-944722-89-4.
-