

Mechanismenbasierte Bewertung der
Ermüdungslebensdauer von Metallen unter
Berücksichtigung der Streuung der
mechanischen Eigenschaften

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur
(Dr.-Ing.)

von Steffen Mittag, M. Sc.

geb. am 17. September 1986 in Lahr

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. mult. Holm Altenbach

Prof. Dr.-Ing. Matthias Oechsner

Prof. Dr.-Ing. Thomas Seifert

Promotionskolloquium am 28. Juni 2019

Ehrenerklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters habe ich nicht in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Verwendete fremde und eigene Quellen sind als solche kenntlich gemacht.

Ich habe insbesondere nicht wissentlich:

- Ergebnisse erfunden oder widersprüchliche Ergebnisse verschwiegen,
- statistische Verfahren absichtlich missbraucht, um Daten in ungerechtfertigter Weise zu interpretieren,
- fremde Ergebnisse oder Veröffentlichungen plagiiert,
- fremde Forschungsergebnisse verzerrt wiedergegeben

Mir ist bekannt, dass Verstöße gegen das Urheberrecht Unterlassungs und Schadensersatzansprüche des Urhebers sowie eine strafrechtliche Ahndung durch die Strafverfolgungsbehörden begründen kann

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die Dissertation ggf. mit Mitteln der elektronischen Datenverarbeitung auf Plagiate überprüft werden kann.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes auch noch nicht veröffentlicht.

Kurzfassung

In thermomechanisch hochbelasteten Bauteilen begrenzt das Wachstum von Ermüdungsrissen die Bauteillebensdauer. Es kommen Lebensdauermodelle und Finite-Elemente Simulationen zum Einsatz, um ein vorzeitiges Bauteilversagen zu verhindern. Hierbei werden im Allgemeinen deterministische Werkstoffeigenschaften unterstellt, sodass die Information über die im realen Werkstoff auftretenden Streuungen verloren geht, was eine Unsicherheit im Auslegungsprozess mit sich bringt. In der vorliegenden Ausarbeitung werden Methoden zur adäquaten Bestimmung der Werkstoffkennwerte und zur Beschreibung ihrer Streuung durch statistische Verteilungen entwickelt.

Einen wesentlichen Aspekt der Arbeit stellt die Bestimmung von objektiven Werkstoffkennwerten dar, zu deren Zweck ein Robustheitskriterium eingeführt wird. Anhand zahlreicher Versuchsdatensätze der Nickelbasislegierung MAR M247 und des niobstabilisierten austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10 kann diese Methodik ausgearbeitet werden und führt auf ein probabilistisches Lebensdauermodell, das die Abschätzung des Einflusses von statistisch verteilten Werkstoffkennwerten auf die Ermüdungslebensdauer erlaubt. Als Ergebnis einer Monte-Carlo Simulation zeigt sich, dass im Vergleich von deterministischer zu probabilistischer Lebensdauerbewertung eine probabilistische Auswertung bei beiden untersuchten Werkstoffen zu einem um circa Faktor zwei größeren Streuband in der Lebensdauer führt.

In einem Bauteilkonzept wird die anhand der Versuchsdaten erarbeitete Methodik erweitert, sodass eine Abschätzung des Einflusses von streuenden Werkstoffeigenschaften auf Bauteilebene durch Finite-Elemente Simulationen möglich wird. Es kommt das Two-Layer-Viscoplasticity Modell zum Einsatz. Um die Streuung seiner Werkstoffkennwerte ermitteln zu können, reicht die vorliegende Datenbasis nicht aus, sodass Annahmen zu den Werkstoffkennwerten getroffen werden müssen.

Abstract

In thermomechanically highly stressed components, the growth of fatigue cracks limits the component life. Fatigue life models and finite-element simulations are used to prevent unexpected component failure. Doing this, deterministic material characteristics are generally assumed and the information about the scattering of the real material properties is lost. This gives rise for uncertainties in the fatigue life assessment of the components.

In this work a methodology for the determination of the scattering of the material properties and for their statistical description is developed. An essential aspect of the work is the determination of objective material properties, for the purpose of which a robustness criterion is developed. Based on numerous experimental data sets of the nickel-base alloy MAR M247 and the niobium-stabilized austenitic steel X6 CrNiNb 18-10, this methodology can be worked out and leads to a probabilistic fatigue life model that allows the estimation of the influence of statistically distributed material properties on the fatigue life. As a result of the Monte-Carlo simulation, it can be seen that a probabilistic fatigue life assessment leads to a span in fatigue life that is two times higher for both investigated materials compared to the deterministic evaluation.

In a component concept, the methodology developed on the basis of the experimental data is extended so that it is possible to estimate the influence of scattering material properties on component level. The Two-Layer-Viscoplasticity material model is used. In order to be able to determine the scattering of its material properties, the available data base is not sufficient, so assumptions about the material characteristics have to be made.

Abkürzungsverzeichnis

2LVP	<i>Two-Layer-Viscoplasticity</i>
CC	konventioneller Guss (englisch: <i>conventional cast</i>)
CLCF	niederzyklische Ermüdung mit komplexem Vorprogramm (englisch: <i>complex low cycle fatigue</i>)
EFA	Einflussfaktorenanalyse
E-Modul	Elastizitätsmodul
FE	Finite-Elemente
FQS	Fehlerquadratsumme
HCF	hochzyklische Ermüdung (englisch: <i>high cycle fatigue</i>)
HIP	isostatisches Heißpressen (englisch: <i>hot isostatic pressure</i>)
IP	in Phase (englisch: <i>in-phase</i>)
LCF	niederzyklische Ermüdung (englisch: <i>low cycle fatigue</i>)
MLM	Maximum-Likelihood-Methode
OP	phasenverschoben (englisch: <i>out-of-phase</i>)
PYTHON	Programmiersprache <i>PYTHON</i>
TMF	thermomechanische Ermüdung (englisch: <i>thermomechanical fatigue</i>)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Ziele der Arbeit	2
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Versuchsdaten	4
2.1	Austenitischer Stahl X6 CrNiNb 18-10	4
2.2	Nickelbasislegierung MAR M247	6
2.2.1	LCF Versuche MAR M247	7
2.2.2	CLCF Versuche MAR M247	8
2.2.3	TMF Versuche MAR M247	10
2.2.4	Kriechversuche MAR M247	11
3	Numerische und statistische Methoden	12
3.1	Numerische Methoden	12
3.1.1	Lineare Interpolation	12
3.1.2	Numerische Differentiation	12
3.1.3	Numerische Integration	13
3.1.4	Newton-Verfahren	14
3.1.5	Gradientenbasierte Optimierung	15
3.2	Statistische Methoden	15
3.2.1	Verteilungstypen	16
3.2.2	Maximum-Likelihood Methode	21
3.2.3	Verfahren zur Bewertung von statistischen Hypothesen	23
3.3	Korrelation und Korrelationskoeffizienten	26
3.3.1	Lineare Korrelation nach Pearson	26
3.3.2	Rangkorrelation nach Spearman	27
3.4	Monte-Carlo Simulation	27
3.4.1	Ziehung von Pseudo-Zufallszahlen	28
3.4.2	Korrelation von Pseudo-Zufallszahlen	29
4	Lebensdauermodell und Einflussfaktoren	31
4.1	Mechanismenbasiertes Lebensdauermodell	32

4.2	Elastisch-plastische Werkstoffeigenschaften nach Ramberg-Osgood	35
4.2.1	Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells	36
4.2.2	Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte aus Versuchsdaten . . .	39
4.3	Kriechigenschaften nach Norton	42
4.3.1	Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Norton-Kriechmodells auf die Lebensdauervorhersage	43
4.3.2	Bestimmung der Norton-Kennwerte aus Kriechversuchen	45
5	Robustheit der Ramberg-Osgood Kennwerte	47
5.1	Analytischer Ansatz zur Untersuchung der Robustheit	48
5.2	Empirischer Ansatz zur Untersuchung der Robustheit	50
5.2.1	Kennwertraum des austenitischen Stahls	52
5.2.2	Kennwertraum der Nickelbasislegierung	53
5.3	Ergebnisse der Robustheitsstudien	53
5.4	Robustheitsbewertung der Ramberg-Osgood Kennwerte	56
5.4.1	Werkstoffkennwerte des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10 . . .	56
5.4.2	Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung MAR M247	62
6	Statistische Auswertung der Werkstoffkennwerte	64
6.1	Statistische Beschreibung der Ramberg-Osgood Kennwerte	64
6.1.1	Ergebnisse der statistischen Auswertung für den austenitischen Stahl .	65
6.1.2	Ergebnisse der statistischen Auswertung für die Nickelbasislegierung .	68
6.2	Statistische Beschreibung der Kennwerte des Norton-Kriechmodells	73
7	Deterministische und probabilistische Lebensdauerbewertung	75
7.1	Individuelle Auswertung des Lebensdauermodells	76
7.1.1	Individuelle Auswertung für den austenitischen Stahl	77
7.1.2	Individuelle Auswertung für die Nickelbasislegierung	79
7.2	Gemittelte Auswertung des Lebensdauermodells	80
7.2.1	Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei gemittelter Auswertung . .	81
7.2.2	Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei gemittelter Auswertung . .	85
7.3	Probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells ohne Berücksichtigung von Korrelationen	87
7.3.1	Stabilität der Ergebnisse der Monte-Carlo Methode	88
7.3.2	Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei probabilistischer Auswer- tung ohne Korrelationen	90
7.3.3	Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei probabilistischer Auswer- tung ohne Korrelationen	92

7.4	Probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells unter Berücksichtigung von Korrelationen	93
7.4.1	Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei probabilistischer Auswertung mit Korrelationen	94
7.4.2	Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei probabilistischer Auswertung mit Korrelationen	98
7.5	Vergleich der Ergebnisse für die deterministische und probabilistische Auswertung	100
7.5.1	Vergleich der Ergebnisse für den austenitischen Stahl	101
7.5.2	Vergleich der Ergebnisse für die Nickelbasislegierung	102
8	Bauteilkonzept	104
8.1	Mehrachsiges Formulierung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells . .	104
8.2	Zeit- und temperaturabhängige Wechselplastizitätsmodelle	106
8.2.1	Überblick	106
8.2.2	Two-Layer-Viscoplasticity Werkstoffmodell	107
8.3	Bestimmung der Kennwerte des Two-Layer-Viscoplasticity Modells	110
8.4	Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Two-Layer-Viscoplasticity Modells	119
8.5	Streuung der Kennwerte des 2LVP Modells	124
8.5.1	Bestimmung der Two-Layer-Viscoplasticity Kennwerte aus LCF Versuchen	124
8.5.2	Robustheitsuntersuchungen mit dem 2LVP Modell	126
8.6	Konzeptioneller Vorschlag für die Monte-Carlo Simulation einer thermomechanischen Bauteilberechnung	129
8.6.1	Simulationsmodell für die thermomechanische Simulation einer Turbinenschaufel	130
8.6.2	Konzept zur Ermittlung der Kennwertstreuung des Two-Layer-Viscoplasticity Modells	133
8.6.3	Thermomechanische Simulation einer Turbinenschaufel mit streuenden Werkstoffeigenschaften	141
9	Diskussion	144
9.1	Diskussion der Kennwertbestimmung und der Robustheitsuntersuchung	144
9.2	Diskussion der statistischen Methoden	148
9.3	Diskussion der Ergebnisse der probabilistischen und deterministischen Lebensdauerbewertung	150
9.4	Diskussion des Bauteilkonzepts	153
10	Zusammenfassung	156

1. Einleitung und Motivation

Aktuelle Entwicklungstendenzen sind von der Verknappung der Rohstoffe und dem zunehmenden Einfluss der vom Mensch verursachten Emissionen auf das globale Klima bestimmt. Trotz weltweit steigender Nachfrage nach Mobilität und Energie, sollen der Kohlendioxid-ausstoß und der Ressourcenaufwand bei der Energieerzeugung verringert werden. Dies kann unter anderem dadurch erreicht werden, dass der Wirkungsgrad von thermodynamischen Prozessen, wie sie beispielsweise in Verbrennungsmaschinen oder Kraftwerken ablaufen, erhöht wird. Diese Vergrößerung des Wirkungsgrades geht typischerweise mit einer Steigerung der Prozesstemperaturen einher und führt dazu, dass die verwendeten Werkstoffe einer größeren Belastung ausgesetzt werden. Zyklische Aufheiz- und Abkühlvorgänge lassen Temperaturgradienten in den Bauteilen entstehen und führen im Werkstoff zu Spannungen infolge von thermischer Ausdehnung, die lokalisiert inelastische Verformungen verursachen können. Die Kombination aus wechselnden Temperaturen und der zyklischen Beanspruchung des Werkstoffs hat zur Folge, dass dieser ermüdet und nach einer bestimmten Anzahl von Belastungszyklen versagt. Um die Schädigung durch thermomechanische Ermüdung (englisch: *thermomechanical fatigue*) (TMF) der Komponenten im Einsatz abschätzen zu können und die Lebensdauer unter thermomechanischer Belastung bewerten zu können, kommen Lebensdauermodelle zum Einsatz, die eine Korrelation zwischen einem Schädigungsparameter und der Zyklenzahl zum Versagen herstellen. Zur Lebensdauerbewertung von hochbelasteten Komponenten werden in der Regel die Ergebnisse von Finite-Elemente (FE) Berechnungen herangezogen, worin die thermomechanischen Belastungen und die daraus resultierenden Spannungen und inelastischen Dehnungen simuliert werden. Es kommen Plastizitätsmodelle zum Einsatz, deren Werkstoffkennwerte vorab in Versuchen ermittelt werden müssen. Anhand einer geometrisch einfachen Werkstoffprobe wird in diesen isothermen oder thermomechanischen Ermüdungsversuchen die Lebensdauer bei einer bestimmten Belastung ermittelt. Aus dem im Versuch ebenfalls ermittelten Werkstoffverhalten lassen sich die Werkstoffkennwerte bestimmen. Um die Ermüdungslebensdauer für weitere Belastungssituationen feststellen zu können, müssen weitere Versuche mit weiteren Werkstoffproben durchgeführt werden.

Zur Abschätzung der komplexen Beanspruchungen in einem thermomechanisch belasteten Bauteil durch die FE Simulation werden im Allgemeinen diejenigen Werkstoffkennwerte verwendet, die alle Versuchsdaten im Mittel gut beschreiben. Es wird ein deterministisches Werkstoffverhalten suggeriert. Das individuelle, von Werkstoffprobe zu Werkstoffprobe streuende Werkstoffverhalten wird bei dieser Vorgehensweise nicht berücksichtigt. Aus dieser determi-

nistischen Beschreibung des Werkstoffverhaltens folgt zum einen, dass Streuungsinformationen des Werkstoffverhaltens für die Lebensdauerbewertung verloren gehen und zum anderen, dass alle Streuungen in der Lebensdauer ausschließlich durch die Unsicherheiten im Lebensdauermodell erklärt werden können. Sollen Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden, so kann dies lediglich basierend auf der Korrelation zwischen dem Schädigungsparameter und der Zyklenzahl zum Versagen erfolgen. Ein möglicher Einfluss der individuellen Eigenschaften der Werkstoffproben auf die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Verwendung deterministischer Werkstoffkennwerte latent. Demnach ist es nicht möglich eine Aussage darüber zu treffen, wie stark die Streuung der mechanischen Eigenschaften innerhalb der Plastizitätsmodelle Einfluss auf die Streuung der Lebensdauerdaten nimmt. Die Streuung im mechanischen Werkstoffverhalten unterschiedlicher Proben eines Werkstoffs und deren Einfluss auf die Lebensdauer vorhersage von hoch belasteten Komponenten kann über die bisherige deterministische Betrachtungsweise nicht bewertet werden. Dadurch entstehen Unsicherheiten bei der Bauteilauslegung, die sowohl zu überkonservativen, jedoch aber auch zu nichtkonservativen Bauteilbewertungen führen können [1]. Diese Unsicherheiten werden beispielsweise in [2] durch ein probabilistisches Modell untersucht. Hierbei werden die Unsicherheiten aus dem individuellen Werkstoffverhalten der Proben dadurch berücksichtigt, dass der Schädigungsparameter variiert wird. Eine Korrelation zu den Werkstoffkennwerten, die das mechanische Verhalten beschreiben, bleibt jedoch unberücksichtigt. In [3] werden die Spannungs- und Dehnungs-Schwingbreiten von niederzyklischen Ermüdungsversuchen genutzt, um die Unsicherheiten der Kennwerte eines zeitunabhängigen Plastizitätsmodells abzuschätzen, die die Werkstoffverfestigung beschreiben. Da das tatsächliche Verfestigungsverhalten des untersuchten Werkstoffs unbekannt ist, werden Korrelationen zwischen einem Ramberg-Osgood Modell und der Coffin-Manson Gleichung angenommen, um das zyklische Werkstoffverhalten anzunähern. Es liegen keine gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven vor, sodass auch in dieser Arbeit keine unmittelbare Korrelation zwischen der Streuung der mechanischen Werkstoffeigenschaften und der Schädigung folgt. Die Einflüsse von verschiedenen statistisch verteilten Größen auf die hochzyklische Ermüdung (englisch: *high cycle fatigue*) (HCF) werden in [4] erkenntnistheoretisch untersucht. Hierbei wird die Streuung des elastischen Materialverhaltens durch eine Normalverteilung abgebildet, die auf einer theoretischen Annahme beruht. In [5] wird neben den elastischen Materialeigenschaften auch die Streckgrenze variiert und im Rahmen einer probabilistischen Simulation die Auswirkungen auf die Ermüdungslebensdauer ausgewertet. Die Streuung der Materialkennwerte wird hierbei wiederum durch eine Normalverteilung abgebildet, die auf Annahmen basiert. Aus diesen Arbeiten geht hervor, dass die Unsicherheiten der Werkstoffeigenschaften einen Einfluss auf die durch das Lebensdauermodell vorhergesagten Ermüdungslebensdauern haben.

1.1 Ziele der Arbeit

Das übergeordnete Ziel der vorliegenden Ausarbeitung ist die Untersuchung des Einflusses von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die von einem mechanismenbasierten Lebensdauermodell vorhergesagte Ermüdungslebensdauer. Anhand vorliegender Versuchsdaten von zwei metallischen Werkstoffen soll im Rahmen eines Modellkonzepts eine geschlossene Gesamtme-

thodik entwickelt werden, wie sie in dieser Art bisher nicht in der Fachliteratur existiert. Der Lösungsweg umfasst hierbei eine Kombination aus numerischen und statistischen Methoden, die es ermöglichen sollen Werkstoffkennwerte adäquat zu ermitteln und ihre Streuung in angemessener Weise durch statistische Verteilungshypothesen zu beschreiben. Basierend auf simulativen Methoden sollen die Einflüsse der so ermittelten Kennwertstreuung auf die Ermüdungslebensdauer untersucht und Aussagen zur Ausfallwahrscheinlichkeit möglich werden. In einem Bauteilkonzept sollen für einen der untersuchten Werkstoffe die erarbeiteten Methoden abschließend auf ein Simulationsmodell unter thermomechanischer Belastung übertragen werden, um Aussagen über den Einfluss von streuenden Werkstoffkennwerten auf der Bauteilebene bewerten zu können.

1.2 Aufbau der Arbeit

Aus der Zielsetzung der Arbeit lässt sich die folgende Struktur der Ausarbeitung ableiten: In Kapitel 2 werden die für die beiden metallischen Werkstoffe vorliegenden Versuchsdaten vorgestellt. Das Kapitel 3 fasst die zum Verständnis der Ausarbeitung notwendigen numerischen und statistischen Grundlagen und Methoden zusammen, bevor in Kapitel 4 das mechanismenbasierte Lebensdauermodell eingeführt und erläutert wird. Im Kapitel 5 wird die Methodik vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und zur adäquaten Ermittlung von Werkstoffkennwerten herangezogen wird. Die Ergebnisse für die statistische Auswertung der Streuungen der Werkstoffkennwerte sind in Kapitel 6 zusammengefasst, sodass in Kapitel 7 die deterministische und probabilistische Beschreibung der Ermüdungslebensdauer anhand isothermer Versuchsdaten für beide Werkstoffe erfolgen kann. In Kapitel 8 erfolgt die konzeptionelle Erweiterung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells auf mehrachsige Belastungen, die Einführung eines inkrementellen Werkstoffmodells für die FE Berechnung eines thermomechanisch belasteten Simulationsmodells sowie die deterministische und probabilistische Auswertung der Ermüdungslebensdauer. In Kapitel 9 werden die im Rahmen dieser Arbeit genutzten und erarbeiteten Methoden, die getroffenen Annahmen und die daraus folgenden Ergebnisse diskutiert. Abgeschlossen wird diese Ausarbeitung mit der in Kapitel 10 enthaltenen Zusammenfassung, die die wesentlichen Aspekte der Arbeit und ihre Ergebnisse einordnet.

2. Versuchsdaten

In der vorliegenden Ausarbeitung werden die streuenden mechanischen Eigenschaften innerhalb des Werkstoffverhaltens durch statistische Verteilungshypothesen quantifiziert und ihre Auswirkungen auf die von einem Lebensdauermodell vorhergesagte Ermüdungslebensdauer abgeschätzt. Um die Streuung der mechanischen Eigenschaften eines der untersuchten Werkstoffe erfassen zu können, werden Werkstoffkennwerte genutzt. Sie beschreiben charakteristische Merkmale des Werkstoffverhaltens und werden im Allgemeinen aus Versuchsdaten ermittelt. Um eine möglichst gute Abbildung der Streuung des Werkstoffverhaltens zu ermöglichen, sollten die Werkstoffkennwerte für eine möglichst große Anzahl an vergleichbaren Versuchen bestimmt werden. Um eine Korrelation der mechanischen Werkstoffeigenschaften mit der Ermüdung des Werkstoffs zu ermöglichen, müssen die verwendeten Versuche auch Informationen zur Lebensdauer des getesteten Prüflings bereitstellen.

Für diese Arbeit stehen Versuchsdaten von zwei unterschiedlichen metallischen Werkstoffen zur Verfügung. Zum einen liegen öffentliche Daten des niobstabilisierten austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10 vor und zum anderen werden von der MTU Aero Engines AG vertrauliche Versuchsdaten der Nickelbasislegierung MAR M247 bereitgestellt, die durch Daten aus öffentlichen Forschungsprojekten ergänzt und für die Methodenentwicklung herangezogen werden.

2.1 Austenitischer Stahl X6 CrNiNb 18-10

Für den hochlegierten austenitischen Stahl mit der Werkstoffnummer 1.4550 und der Legierungszusammensetzung X6 CrNiNb 18-10 liegen zahlreiche Versuche vor, die die niederzyklische Ermüdung (englisch: *low cycle fatigue*) (LCF) beschreiben. Diese wurden vom Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik IWM in Freiburg bereitgestellt und in vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Forschungsprojekten am Fraunhofer IWM [6] [7] ermittelt. In der Tabelle 2.1 ist eine Übersicht über die im Rahmen dieser Arbeit zur Verfügung stehenden Versuchsdaten aus LCF Versuchen für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 zusammengestellt. Es handelt sich dabei um einachsige zyklische Versuche, die unter isothermen Bedingungen geführt werden. Die geometrisch einfache zylindrische Werkstoffprobe wird jeweils bis zum Bruch ermüdet. Überschreitet die ertragbare Anzahl an Lastzyklen die Marke von 10^5 , werden die betreffenden Versuche im Rahmen dieser Arbeit als 'Langläufer' bezeichnet. Die Wahl dieser Zyklenzahl geht auf [8] zurück, worin ebenfalls 10^5

Tabelle 2.1: Austenitischer Stahl X6 CrNiNb 18-10, Zusammenfassung der vorliegenden LCF Versuche für jede Prüftemperatur

T [°C]	Anzahl der LCF Versuche	Anzahl der Langläufer
20	15	5
100	4	-
180	1	-
200	17	6
240	2	-
300	6	-
350	4	2
450	1	-
600	1	-

Belastungszyklen als Grenze für die 'Spannungs'-Ermüdung definiert sind. Unterhalb dieser Zyklenzahl treten bestimmte Versagensmechanismen nicht auf und es kann davon ausgegangen werden, dass die Ermüdung an Stellen startet, an denen sich Versetzungen infolge von Verformungen aufstauen.

Für jeden zyklischen Ermüdungsversuch werden die Belastungshysteresen in den Versuchsdaten dokumentiert. Diese Dokumentation erfolgt jedoch in den vorliegenden Daten nicht vollumfänglich, sodass in der Regel nur die Hysteresen von eins bis zehn geschlossen vorliegen und im weiteren Versuchsverlauf nur jede zehnte, fünfzigste oder hundertste Hysterese dokumentiert wird. Für die dokumentierten Hysteresen liegen Datenpaare vor. Die Diskretisierung der einzelnen Spannungs-Dehnungs-Hysteresen erfolgt durch eine bestimmte Anzahl an Datenpunkten, die sich jedoch von Versuch zu Versuch ändert. Um die Versuchsdaten zu vereinheitlichen, werden die Versuchsdaten reduziert. Unter Beibehaltung der Umkehrpunkte jeder dokumentierten Hysterese wird die Diskretisierung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs auf 81 Datenpunkte pro Hysterese reduziert. Dies entspricht der Anzahl an Datenpunkten, die in den Versuchsdaten der LCF Versuche der Nickelbasislegierung (siehe Abschnitt 2.2) einheitlich vorliegt. Jeder Datenpunkt beinhaltet die Information über die Zeit, die mechanische Dehnung, die Spannung und die Prüftemperatur. Die Dehnrates $\dot{\epsilon}$ ist ebenfalls von Versuch zu Versuch unterschiedlich, innerhalb eines Versuchs fällt sie jedoch stets betragsmäßig konstant aus. Beim Vergleich aller vorliegenden Versuchsdaten für den austenitischen Stahl liegt sie im Bereich $0.001 \frac{1}{s} \leq \dot{\epsilon} \leq 0.02 \frac{1}{s}$. Alle Versuche weisen ein einheitliches Dehnungsverhältnis von $R_{\epsilon} = -1$ auf. Es gibt das Verhältnis von minimaler zu maximaler Dehnung im Belastungszyklus an. Das Risswachstum ist in den vorliegenden Daten genauso wie die Risslänge am Ende des Versuchs nicht dokumentiert. Die Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft den Verlauf der Dehnung über der Zeit während eines Belastungszyklus im LCF Versuch der Legierung X6 CrNiNb 18-10. Die aus diesem Dehnungsverlauf resultierende Spannungsantwort des Werkstoffs ist in Abbildung 2.2 in einen Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt.

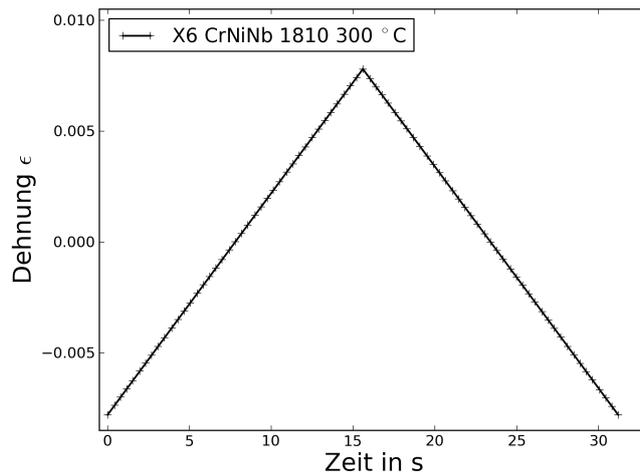


Abbildung 2.1: Dehnungsverlauf über der Zeit im LCF-Versuch. Darstellung eines Belastungszyklus.

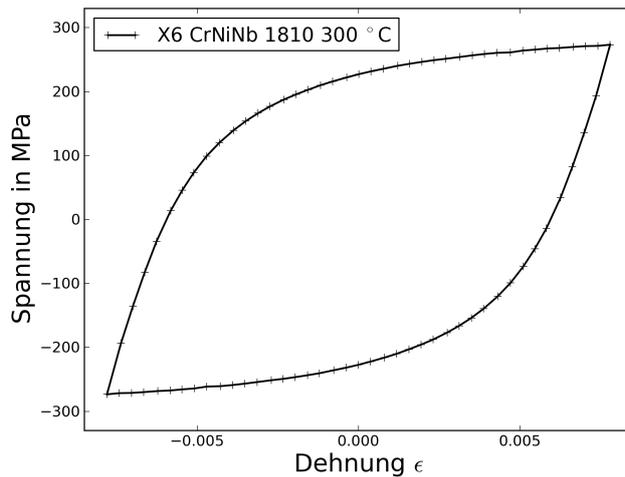


Abbildung 2.2: Verlauf der Spannung über der Dehnung in der Belastungshysterese bei halber Lebensdauer in einem LCF Versuch des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

2.2 Nickelbasislegierung MAR M247

Die Versuchsdatenbasis der polykristallinen Nickelbasis-Superlegierung MAR M247 setzt sich aus unterschiedlichen Versuchstypen zusammen. Von der MTU Aero Engines AG werden isotherme LCF Versuche und Kriechversuche zur Verfügung gestellt, die der Vertraulichkeit unterliegen. Für diese Versuche können im Rahmen dieser Arbeit keine absoluten Werte gezeigt werden. Die niederzyklische Ermüdung mit komplexem Vorprogramm (englisch: *complex low cycle fatigue*) (CLCF) und die TMF wird durch weitere Versuche beschrieben, die aus einem öffentlichen Forschungsvorhaben [9] stammen. Die Werkstoffproben der Nickelbasislegierung liegen als konventioneller Guss (englisch: *conventional cast*) (CC) vor. Ihre Porendichte ist durch isostatisches Heißpressen (englisch: *hot isostatic pressure*) (HIP) reduziert. Aus diesem Grund findet man in anderen Veröffentlichungen (beispielsweise in [10] und in [11]) häufig

die Bezeichnung MAR M247 CC (HIP). Der Werkstoffzustand aller Werkstoffproben der Nickelbasislegierung in dieser Arbeit ist vergleichbar. Die unterschiedlichen Versuchstypen sind in den folgenden Unterabschnitten näher erläutert.

2.2.1 LCF Versuche MAR M247

Sämtliche LCF Versuchsdaten des Werkstoffs MAR M247 sind von der MTU Aero Engines AG bereitgestellt und unterliegen der Geheimhaltung. Insgesamt liegen 101 isotherme einachsige zyklische Versuche bei fünf unterschiedlichen Prüftemperaturen vor. Innerhalb der vorliegenden LCF Versuche werden unterschiedliche Abbruchkriterien genutzt, die zur Klassifizierung der Daten herangezogen werden können. Bei reinen LCF Versuchen wird die Belastung der Probe bis zu ihrem Bruch aufrechterhalten. Die Dokumentation der Versuchsdaten endet mit dem Versagen der Probe. Bei diesem Versuchstyp wird die Anzahl von 10^5 Belastungszyklen nicht überschritten.

Eine weitere Klasse an Versuchen wird durch Langlaufversuche gebildet. Bei diesem Versuchstyp überschreitet die Zyklenzahl 10^5 Belastungszyklen bevor die Probe versagt oder die Beanspruchung wird bei einer festgelegten Zyklenzahl abgebrochen, sodass die Zyklenzahl zum Versagen nicht bekannt ist. Diese Versuche werden im Rahmen dieser Arbeit als 'Langläufer' bezeichnet. Ihre Versuchsdaten liefern entweder keine Information über die Zyklenzahl zum Versagen oder die im Versuch erreichte Lastspielzahl liegt nicht mehr im Bereich der niederzyklischen Ermüdung. Typischerweise weisen diese Versuche deutlich geringere Lastamplituden als die LCF Versuche auf. In Tabelle 2.2 sind die vorliegenden Versuche für jede Prüftemperatur zusammengefasst. Alle Versuche weisen eine betragsmäßig konstante Dehnrates von $\dot{\epsilon} = 0.003 \frac{1}{s}$ auf. Das Dehnungsverhältnis R_ϵ ist innerhalb eines Versuchs konstant. Es liegen Versuche mit $R_\epsilon = -1$ und Versuche mit $R_\epsilon = 0$ vor. Für jeden Versuch sind die ersten zehn Belastungshysterese in den Versuchsdaten enthalten. Abhängig von der im Versuch erreichten Zyklenzahl zum Versagen N_f oder dem festgelegten Abbruchkriterium, ist nach Erreichen des zehnten Belastungszyklus nur noch jede zehnte oder hundertste Belastungshysterese dokumentiert. Jeder dokumentierte Belastungszyklus ist durch 81 Spannungs-Dehnungs-Datenpaare diskretisiert. Beispielhaft ist die LCF Belastung als Dehnung über der Zeit in Abbildung 2.3 dargestellt. In Abbildung 2.4 ist die daraus resultierende Spannungs-Dehnungs-Hysterese bei halber Lebensdauer dargestellt. Wie sich die Risslänge im Versuch entwickelt, ist in den LCF Versuchsdaten der Nickelbasislegierung nicht dokumentiert. Aus den Versuchsdaten geht auch nicht hervor, wie groß der in der Probe entstandene

Tabelle 2.2: MAR M247, Zusammenfassung der vorliegenden LCF Versuche für jede Prüftemperatur

T [°C]	Anzahl der LCF Versuche	Anzahl der Langläufer
600	8	8
850	14	7
1000	14	5
1050	20	7
1150	13	5

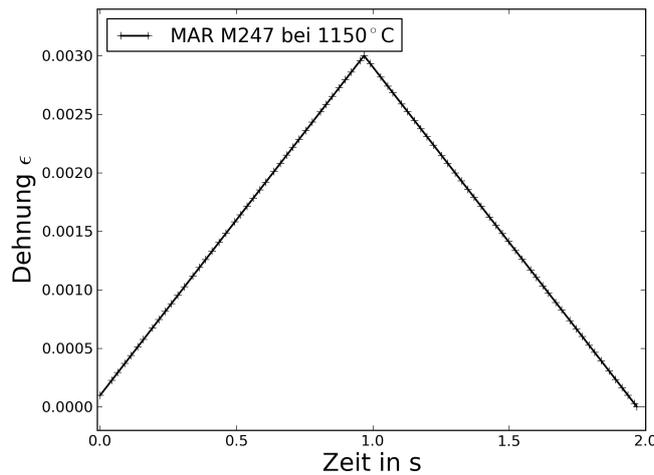


Abbildung 2.3: Dehnungsverlauf über der Zeit im LCF-Versuch. Darstellung eines Belastungszyklus

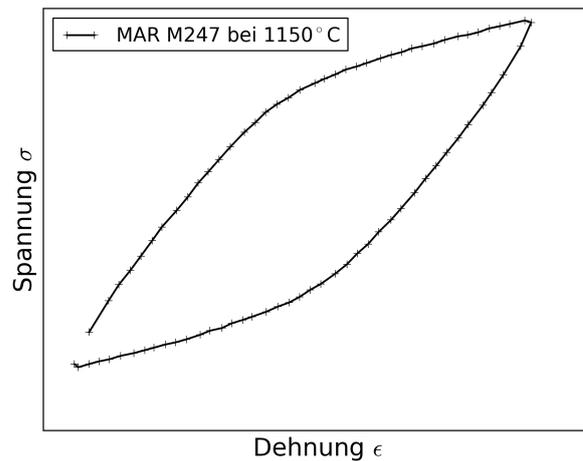


Abbildung 2.4: Spannungsverlauf über der Dehnung in der Belastungshysterese bei halber Lebensdauer im LCF-Versuch der Nickelbasislegierung

Ermüdungsriß am Ende des Versuchs ist.

2.2.2 CLCF Versuche MAR M247

Im Unterschied zu den LCF Versuchen, besitzen die CLCF Versuche ein komplexes Vorprogramm, welches der eigentlichen zyklischen Ermüdungslast vorangestellt ist. In diesem Vorprogramm werden unterschiedliche Dehnraten gefahren und Haltezeiten im Zug und im Druck vorgesehen. Außerdem wird in diesem Vorprogramm die Belastungsamplitude variiert. Die komplexere Belastungsgeschichte des Werkstoffs ermöglicht es, das zeitabhängige und das elastisch-plastische Werkstoffverhalten in nur einem Versuch anzusprechen und gezielt zu bewerten [12] [9, Seite 49]. Neben der Dehnratenabhängigkeit des Werkstoffs kann auch sein Relaxationsverhalten in diesen isothermen Versuchen untersucht werden. In Tabelle 2.3 sind die vorliegenden Versuchsumfänge der CLCF Versuche zusammengefasst. In der Abbildung

2.5 ist der Verlauf der Belastung über der Zeit im komplexen Vorprogramm für einen CLCF Versuch bei 950 °C in einem Dehnungs-Zeit-Diagramm dargestellt. Die Abbildung 2.6 zeigt die dazugehörige Spannungsantwort des Werkstoffs im Versuch.

Tabelle 2.3: Anzahl der vorliegenden CLCF Versuche pro Prüftemperatur für den Werkstoff MAR M247.

T [°C]	Anzahl der CLCF Versuche
20	2
300	2
750	3
850	2
950	3
1050	3

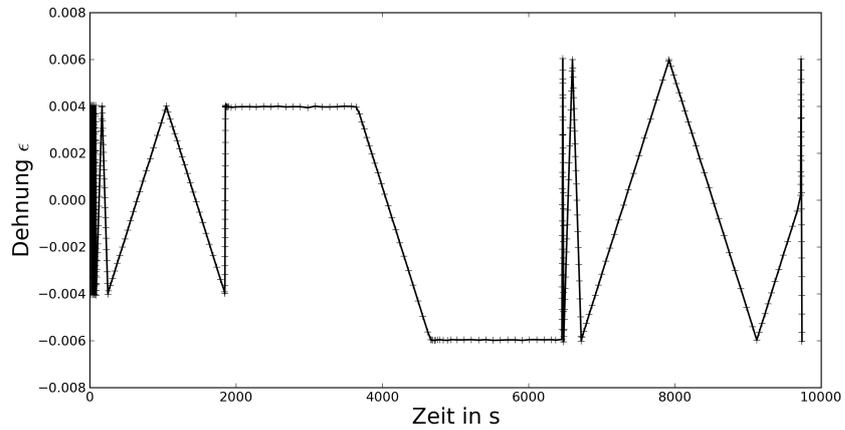


Abbildung 2.5: Dehnungsverlauf über der Zeit im komplexen Vorprogramm eines CLCF Versuchs bei 950 °C

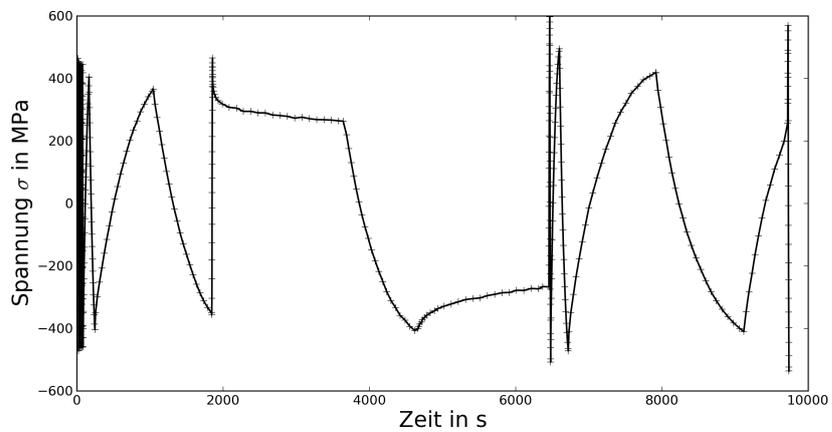


Abbildung 2.6: Spannungsverlauf über der Zeit im komplexen Vorprogramm eines CLCF Versuchs bei 950 °C

2.2.3 TMF Versuche MAR M247

Neben den isotherm geführten LCF und CLCF Versuchen werden auch TMF Versuche ausgewertet. Aus [9] stehen insgesamt vier Versuche zur Verfügung. In einem TMF Versuch wird der Werkstoff bei sich verändernder Prüftemperatur einer mechanischen Belastung unterworfen. Es wird zwischen zwei unterschiedlichen TMF Typen unterschieden. Erfolgt die Überlagerung von thermischer und mechanischer Dehnung in Phase so wird der Versuch als in Phase (englisch: *in-phase*) (IP) TMF bezeichnet. Treten innerhalb eines TMF Versuchs die Wärmedehnung und die mechanische Dehnung um 180° phasenverschoben (englisch: *out-of-phase*) (OP) auf, so wird der Versuch als OP TMF Versuch bezeichnet. In einem IP TMF Versuch laufen mechanische und thermische Dehnung in Phase, sodass der Werkstoff bei maximaler Temperatur eine Zugbeanspruchung erfährt. In einem OP TMF Versuch stellt sich bei maximaler Temperatur eine Druckbeanspruchung ein da die thermische und mechanische Dehnung phasenverschoben auftreten. Die vorliegenden TMF Versuche weisen jeweils die identischen Temperaturschwingbreite ΔT auf, unterscheiden sich jedoch im Dehnungsverhältnis R_ϵ , der Phasenverschiebung und der mechanischen Dehnung ϵ^{mech} . Diese kann aus der Differenz der Gesamtdehnung ϵ und der thermischen Dehnung ϵ^{th} bestimmt werden:

$$\epsilon^{\text{mech}} = \epsilon - \epsilon^{\text{th}} \quad (2.1)$$

Die Temperaturschwingbreite ΔT ergibt sich aus der Differenz zwischen der maximalen (T_{max}) und der minimalen Temperatur T_{min} im Belastungszyklus (siehe (Gleichung 2.2)):

$$\Delta T = T_{\text{max}} - T_{\text{min}} \quad (2.2)$$

In Tabelle 2.4 sind die vorliegenden TMF Versuche mit ihren Randbedingungen zusammengefasst. Der Abbildung 2.7 sind der Temperatur-, Spannungs- und Dehnungs-Verlauf der ersten drei Belastungszyklen eines OP TMF Versuchs zu entnehmen.

Tabelle 2.4: MAR M247, vorliegende TMF Versuche

T_{min} [°C]	T_{max} [°C]	Phase	R_ϵ	Anzahl der TMF Versuche
300	950	IP	-1	1
300	950	OP	$-\infty$	2
300	950	OP	-1	1

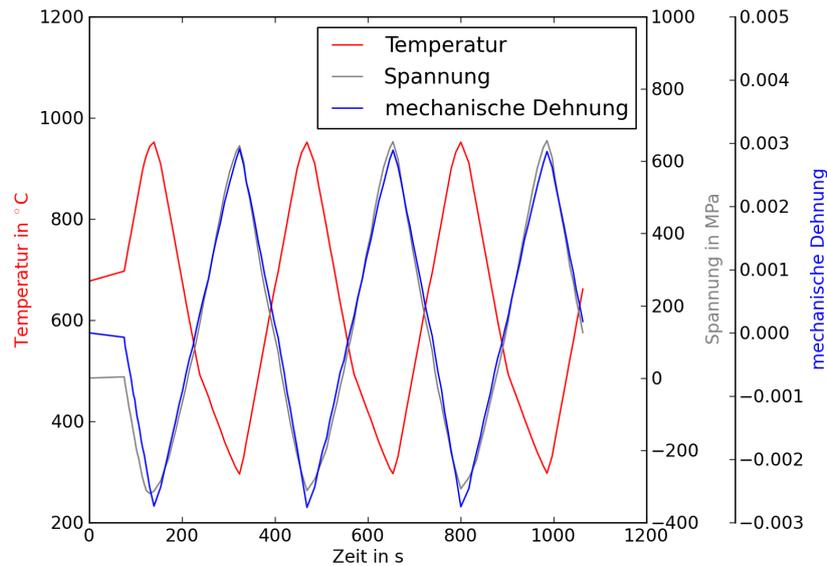


Abbildung 2.7: Temperatur-, Spannungs- und Dehnungs-Verlauf über der Zeit in einem OP TMF Versuch der Nickelbasislegierung

2.2.4 Kriechversuche MAR M247

Das sekundäre Kriechverhalten des Werkstoffs MAR M247 ist in einer Reihe von Kriechversuchen dokumentiert. Die Versuche werden jeweils bei einer konstanten Prüftemperatur mit einer konstanten Kriechspannungen geführt. Gemessen wird die sich durch die aufgebrachte Kriechspannung einstellende konstante sekundäre Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ [13, Seite 392]. Für jede Prüftemperatur liegen mehrere Kriechversuche vor, die sich jedoch untereinander durch die im Versuch aufgebrachte Kriechspannung unterscheiden. Insgesamt stehen für die Bestimmung der Kriecheigenschaften des Werkstoffs MAR M247 31 Kriechversuche bereit. Sie sind in Tabelle 2.5 zusammengefasst.

Tabelle 2.5: MAR M247, vorliegende Kriechversuche

Temperatur [°C]	Anzahl der Kriechversuche
700	4
800	4
850	5
900	4
980	3
1000	4
1050	3
1100	4

3. Numerische und statistische Methoden

Für die Auswertung der Versuchsdaten, die Integration von Werkstoffmodellen oder für die Unterstellung und die Bewertung statistischer Zusammenhänge werden effiziente Algorithmen und Programme benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese in der Programmiersprache *PYTHON* implementiert. Der Fokus der angewendeten numerischen und statistischen Methoden liegt dabei auf der Erstellung einer automatisierten Gesamtmethodik, die es erlaubt, den Einfluss der Kennwertstreuung auf die Ermüdungslebensdauer zu bewerten. In den folgenden Abschnitten sind die methodischen Grundlagen des Gesamtkonzepts erläutert.

3.1 Numerische Methoden

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die im Rahmen dieser Arbeit angewendeten numerischen Methoden gegeben. Sie gehören zum Stand der Technik und sind beispielsweise in [14] anschaulich erläutert.

3.1.1 Lineare Interpolation

Ist ein beliebiger Zusammenhang zwischen einer Größe x und einer Größe y in Form einer Tabelle gegeben, die aus $n = 1, 2, \dots, n$ Wertepaaren (x_i, y_i) besteht und nach aufsteigendem x sortiert ist, so lässt sich durch lineare Interpolation der Wert y für jedes beliebige x eindeutig abschätzen wenn gilt $x_1 < x < x_n$. Die lineare Interpolationsvorschrift für den gesuchten Wert y im Intervall $x_i < x < x_{i+1}$ lautet sodann [14, Seiten 105-109]:

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) \quad (3.1)$$

Gilt $x < x_1$, wird y zu $y = y_1$ gewählt. Für $x > x_n$ gilt $y = y_n$. Es wird auf eine lineare Extrapolation verzichtet.

3.1.2 Numerische Differentiation

Kann die analytische Ableitung einer Funktion nicht oder nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand hergeleitet werden, werden in dieser Arbeit numerische Ableitungen eingesetzt. Dies

ist beispielsweise bei der gradientenbasierten Lösung von Optimierungsproblemen der Fall, wie sie in Abschnitt 3.1.5 beschrieben ist. Es kommt der Vorwärtsdifferenzenquotient für die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ zum Einsatz. Für die erste numerische Ableitung gilt demnach

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Die zweite numerische Ableitung wird durch

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2 \cdot f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$

berechnet [14, Seiten 186-188]. Wesentlich für die Berechnung der numerischen Ableitung einer Funktion ist die Wahl der Variation Δx . Ist diese zu klein gewählt, treten Rundungsfehler auf. Wird sie zu groß gewählt, dann wird das Ergebnis der Ableitung ungenau. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Differenzenquotienten mit der optimalen Variation genutzt. Sie werden in [15, Seite 98] ermittelt und ergeben sich aus

$$\Delta x = \sqrt{\eta} \cdot \max[|x|, \text{typ}[|x|]] \cdot \text{sign}[x]. \quad (3.4)$$

Die Maschinengenauigkeit wird mit η bezeichnet und $\text{typ}[|x|]$ beschreibt einen für x typischen Wert. Das Vorzeichen von x wird durch die sign -Funktion dargestellt, für die

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

gilt.

3.1.3 Numerische Integration

Im Rahmen dieser Arbeit werden Werkstoffmodelle, die in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben sind, durch Integration gelöst. Eine geschlossene analytische Lösung ist dabei nur in seltenen Fällen möglich, weshalb meist eine numerische Integration zum Einsatz kommen muss [14, Seiten 129-131]. Soll die Funktion $f(x)$ zu y integriert werden, sodass

$$y = \int f(x) dx \text{ und somit } \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (3.6)$$

gilt, so wird eine numerische Integration durch die bedingungslos stabile implizite Integrationsvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n) \cdot f(x_{n+1}) \quad (3.7)$$

umgesetzt. Der Index n kennzeichnet einen bereits bekannten Zustand und entspricht für $n = 0$ dem Startwert der Integration, der auch häufig als Anfangsbedingung bezeichnet wird. Die Größe des Inkrements $x_{n+1} - x_n$ bestimmt maßgeblich die Integrationsgenauigkeit und kann analog zu der in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten Variation (siehe Gleichung (3.4)) gewählt

werden, um diese zu optimieren. Bei der Integration einer Funktion der Form $f(x, y)$ für die

$$y = \int f(x, y) dx \text{ und somit } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.8)$$

gilt. Ergibt sich aus der impliziten Integrationsvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n) \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (3.9)$$

Diese Gleichung ist für nichtlineare Funktionen $f(x, y)$ ebenfalls nichtlinear und kann iterativ durch das Newton-Verfahren gelöst werden, das im folgenden Abschnitt erläutert ist.

3.1.4 Newton-Verfahren

Zur iterativen Lösung von nichtlinearen Gleichungen hat sich das Newton-Verfahren bewährt [14, Seiten 362-367]. In dieser Arbeit wird es zur Lösung nichtlinearer Gleichungen innerhalb der Werkstoffmodelle oder der statistischen Methoden herangezogen. Um das Newton-Verfahren anwenden zu können, wird die zu lösende Gleichung als Residuum $R(x) \approx 0$ formuliert, sodass der Wert x gefunden werden muss, der gerade dazu führt, dass das Residuum verschwindet. Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens lautet

$$x^{i+1} = x^i - \left[\frac{\partial R(x^i)}{\partial x^i} \right]^{-1} \cdot R(x^i). \quad (3.10)$$

Der Index i verweist auf die aktuelle Newton-Iteration während der Lösungsfindung. Das Verfahren startet ausgehend von einem Schätzwert x^0 und approximiert die Lösung der Gleichung schrittweise. Sinnvolle Abbruchkriterien für den iterativen Prozess können auf das Residuum oder auf die Variable x bezogen werden. Es ist möglich eine Toleranz TOL_R anzugeben, die dann zum Abbruch des Iterationsprozesses führt, wenn

$$TOL_R > |R(x^{i+1})| \quad (3.11)$$

gilt. Es wird im Rahmen dieser Arbeit bezogen auf die typische Größenordnung der gesuchten Größe formuliert. Ein auf die Variable x bezogenes Abbruchkriterium stützt sich auf das Inkrement der Variable $x^{i+1} - x^i$ innerhalb eines Iterationsschritts und führt zum Iterationsabbruch wenn

$$TOL_x > |x^{i+1} - x^i| \quad (3.12)$$

gilt. TOL_x beschreibt hierbei die Toleranz für den Abbruch aufgrund eines zu kleinen Inkrements in x . Hierbei muss beachtet werden, dass dieses Abbruchkriterium nicht zwangsläufig ein zuverlässiges Kriterium dafür ist, dass die nichtlineare Gleichung tatsächlich gelöst ist. Kommt es innerhalb des Newton-Verfahrens zu keiner Konvergenz, ist es weiterhin sinnvoll eine maximal zulässige Anzahl an Iterationen vorzugeben. In dieser Arbeit wird bei Erreichen von $i = 25$ der Iterationsvorgang abgebrochen.

3.1.5 Gradientenbasierte Optimierung

Im Rahmen dieser Arbeit sollen zum einen Werkstoffkennwerte automatisiert ermittelt und zum anderen Kennwerte von statistischen Verteilungen zur Beschreibung von Stichproben optimiert werden. Dies führt auf Optimierungsprobleme, die mit Hilfe eines gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus gelöst werden.

Gradientenbasierte Optimierungsverfahren starten ausgehend von einem Startwert. Dieser muss vom Anwender festgelegt beziehungsweise abgeschätzt werden. Ist dieser Schätzwert sinnvoll gewählt, sind die gradientenbasierten Optimierungsstrategien in der Regel effizienter als beispielsweise Evolutionsstrategien, die wesentlich mehr Funktionsauswertungen benötigen, um die optimale Lösung zu finden. Hierbei muss jedoch berücksichtigt werden, dass es sich bei dem von einem gradientenbasiert arbeitenden Optimierungsalgorithmus identifizierten Optimum im allgemeinen Fall um einen lokalen Extremwert in einem vorab festgelegten Kennwertbereich handelt [14, Seiten 394-397].

Im Rahmen dieser Arbeit werden Optimierungsprobleme stets so formuliert, dass eine Funktion minimiert wird. Ist diese Funktion abhängig von mehreren Parametern, die in einem Vektor \mathbf{x} zusammengefasst sind, so lautet die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \mathbf{H}^i \cdot \nabla f(\mathbf{x}^i). \quad (3.13)$$

∇f ist der Gradient der zu minimierenden Funktion $f(\mathbf{x})$. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Levenberg-Marquardt Verfahren verwendet mit der in [15, Seite 129] und [16, Seite 227] beschriebenen Iterationsmatrix \mathbf{H} .

$$\mathbf{H}^i = [\nabla \nabla f(\mathbf{x}^i) + \lambda^i \mathbf{1}]^{-1} \quad (3.14)$$

$\nabla \nabla f(\mathbf{x})$ ist die Hesse-Matrix \mathbf{H} der zu minimierenden Funktion und $\mathbf{1}$ steht für die Einheitsmatrix. Der Parameter λ wird im Levenberg-Marquardt Verfahren dazu genutzt, das Verfahren des steilsten Abstiegs mit dem Gauß-Newton-Verfahren zu kombinieren. Die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens des steilsten Abstiegs sind in großer Entfernung zum Lösungspunkt gut. In unmittelbarer Umgebung der Lösung, erweist sich jedoch das Gauß-Newton-Verfahren als besonders effizient. λ wird gemäß dem in [16, Seite 227] beschriebenen iterativen Verfahren bestimmt. Diese Vorgehensweise hat in [17] gute Konvergenzeigenschaften gezeigt.

Im Rahmen dieser Arbeit kommt bei der gradientenbasierten Optimierung das Projektionsverfahren aus [18] zum Einsatz. Es stellt sicher, dass die zu optimierenden Größen einen durch festgelegte Schranken definierten Wertebereich nicht verlassen. Die Ableitungen des Gradienten und der Hesse-Matrix werden, wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, numerisch berechnet.

3.2 Statistische Methoden

Im Rahmen dieser Arbeit sollen unter anderem die Streuungen bestimmter Größen mit Hilfe von statistischen Verteilungen mathematisch beschrieben werden. Hierbei wird angenommen, dass Stichproben aus voneinander unabhängigen Stichprobenwerten vorliegen. Ziel

der statistischen Beschreibung einer Stichprobe einer beliebigen Größe ist es meist, und so auch in dieser Ausarbeitung, eine belastbare Aussage über das Streuverhalten dieser Größe über die Stichprobe hinaus zu ermöglichen. Es wird die Streuung ihrer Grundgesamtheit abgeschätzt. Anhand weniger Probenwerte soll mittels statistischer Methoden eine Aussage darüber ermöglicht werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten weiterer Stichprobenwerte innerhalb eines festgelegten Wertebereichs ist. Mit zunehmendem Stichprobenumfang steigt hierbei die Verlässlichkeit der probabilistischen Vorhersage.

Von der Stichprobe ausgehend bis hin zu ihrer adäquaten statistischen Beschreibung, sind mehrere Schritte nötig. Zunächst müssen Verteilungsfunktionen und ihre Verteilungsparameter bekannt sein. Die in dieser Arbeit verwendeten Verteilungstypen sind in Abschnitt 3.2.1 zusammengefasst und beschrieben. Weiterhin wird in Abschnitt 3.2.2 eine Methode zur Formulierung einer statistischen Verteilungshypothese, die Maximum-Likelihood Methode, erläutert. Sie wird herangezogen um ein Optimierungsproblem zu formulieren, das die Bestimmung der optimalen Verteilungsparameter eines Verteilungstyps erlaubt. Es resultieren Verteilungshypothesen. Diese können anhand der in Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Methoden bewertet und verglichen werden.

3.2.1 Verteilungstypen

Für die adäquate statistische Beschreibung der Streuung eines bestimmten Merkmals ist es hilfreich, wenn die Streuungscharakteristik bereits vorab bekannt ist. Nur so ist es möglich, einen für die Beschreibung geeigneten Verteilungstyp auszuwählen. Die Streuungscharakteristik kann hierbei beispielsweise durch Symmetrien oder durch das Auftreten von Stichprobenwerten in einem bestimmten Wertebereich erfolgen. Da die Charakteristiken der Streuungen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, im Vorfeld noch unbekannt sind, werden für die deskriptive Statistik mehrere Verteilungstypen bereitgehalten. Es werden für jede zu beschreibende Streuung vier Verteilungshypothesen formuliert. Hierbei wird auf die Normalverteilung, die zweiparametrische Weibullverteilung und die dreiparametrische Weibullverteilung sowie die logarithmische Normalverteilung zurückgegriffen. Diese Verteilungen weisen unterschiedliche Eigenschaften auf, sodass Streuungen mit unterschiedlichsten Charakteristika beschrieben werden können. Diese vier Verteilungstypen werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert.

Um Verteilungshypothesen bewerten zu können, werden im Rahmen dieser Arbeit sogenannte Hypothesentests verwendet. Einige dieser Testverfahren greifen auf weitere Verteilungstypen wie die χ^2 -Verteilung und die Student-t-Verteilung zurück. Diese werden ebenfalls in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

3.2.1.1 Normalverteilung

Die Normalverteilung oder auch Gaußverteilung findet sich häufig bei Streuungen wieder, die in der Natur auftreten. Dieser Verteilungstyp weist eine symmetrische Dichtefunktion $f_N(x)$ auf [19, Seite 37]. Sie besitzt mit dem Mittelwert σ_N und der Standardabweichung μ_N zwei Verteilungsparameter. Während für den Mittelwert $\mu_N \in \mathbb{R}$ gilt, muss die Standardabweichung stets Werte größer null annehmen ($\sigma_N \in \mathbb{R}, \sigma_N > 0$). Dabei wird der Mittelwert der

Normalverteilung als Lageparameter der Verteilung und die Standardabweichung als Skalensparameter bezeichnet. Die Dichtefunktion $f_N(x)$ der Normalverteilung ist definiert als

$$f_N(x|\sigma_N, \mu_N) = \frac{1}{\sigma_N \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\left[\frac{-(x-\mu_N)^2}{2 \cdot \sigma_N^2} \right]}. \quad (3.15)$$

Ein Sonderfall der Normalverteilung ist die Standardnormalverteilung. Für sie gelten $\sigma_N = 1$ und $\mu_N = 0$. Zur Veranschaulichung der Dichtefunktion der Normalverteilung, die häufig auch als Glockenkurve bezeichnet wird, dient Abbildung 3.1. Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Als Schätzwert für den Verteilungsparameter μ_N wird häufig der arithmetische Mittelwert \bar{x} verwendet. Liegt eine Stichprobe aus n Werten x_1, x_2, \dots, x_n vor, so lässt sich der arithmetische Mittelwert aus

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.16)$$

berechnen. Bezogen auf diesen arithmetischen Mittelwert, kann auch die Varianz der Stichprobe s_x durch

$$s_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.17)$$

abgeschätzt werden.

$$\sigma_{Ns} = \sqrt{s_x} \quad (3.18)$$

beschreibt die Standardabweichung der Stichprobe σ_{Ns} und stellt den Schätzwert für σ_N dar [19, Seite 38].

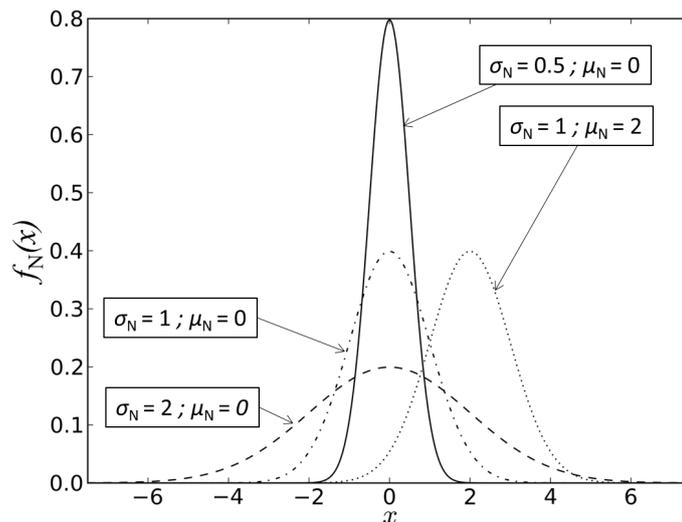


Abbildung 3.1: Dichtefunktion der Normalverteilung bei unterschiedlicher Wahl der Verteilungsparameter σ_N und μ_N .

3.2.1.2 Weibullverteilung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Weibullverteilung als zweiparametrig und als dreiparametrigem Verteilungstyp genutzt. Sie wird häufig herangezogen, wenn es darum geht die Ausfallrate einer Komponente aus sprödem Werkstoff statistisch zu beschreiben [20, Seite 9]. Die Dichtefunktion $f_W(x)$ der Weibullverteilung ist für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ definiert und lautet

$$f_W(x|a_W, b_W, T_W) = \frac{b_W \cdot (x - T_W)^{b_W - 1}}{a_W^{b_W}} \cdot e^{-\left[\frac{x - T_W}{a_W}\right]^{b_W}}. \quad (3.19)$$

b_W stellt den Formparameter dieses Verteilungstyps dar. Für b_W gilt: $b_W \in \mathbb{R}, b_W \geq 0$. In Abhängigkeit von diesem Kennwert ändert die Weibullverteilung ihre Schiefe und kann dementsprechend sowohl linksschief als auch rechtsschief ausfallen (siehe Abbildung 3.2) [21, Seite 54].

Die Unterscheidung zwischen der zweiparametrig und dreiparametrig Weibullverteilung erfolgt über die Definition der Totzeit oder des Schwellwerts T_W . Wird $T_W = 0$ festgelegt, so besitzt die Weibullverteilung nur zwei anpassbare Verteilungsparameter. Für $T_W \neq 0$ sind es drei. Hierbei gilt $T_W \in \mathbb{R}, T_W \geq 0$. Der Verteilungsparameter a_W wird als charakteristische Lebensdauer bezeichnet und stellt den Lageparameter dieses Verteilungstyps dar. Für die Weibullverteilung gilt

$$\int_0^{x - T_W} f_W(x|a_W, b_W, T_W) dx = 0.632 \text{ mit } x - T_W = a_W. \quad (3.20)$$

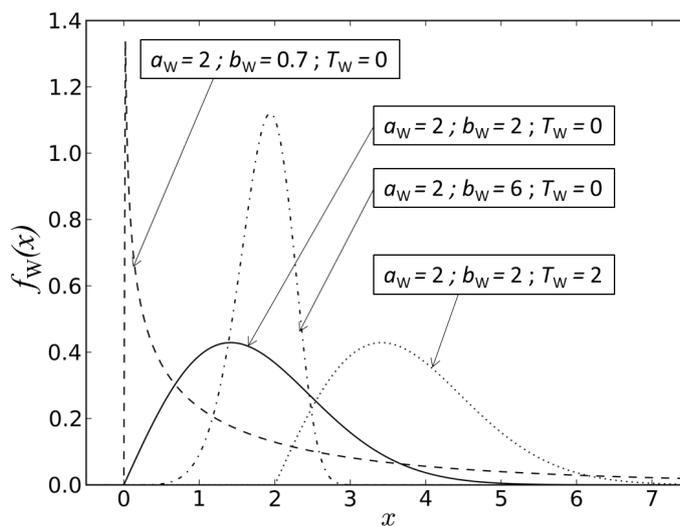


Abbildung 3.2: Dichtefunktion der Weibullverteilung bei unterschiedlicher Wahl der Verteilungsparameter a_W , b_W und T_W .

3.2.1.3 Logarithmische Normalverteilung

Aus der Normalverteilung lässt sich die logarithmische Normalverteilung ableiten. Die Streuung eines Merkmals weist dann eine logarithmische Normalverteilung auf, wenn ihr Logarithmus normalverteilt ist [22]. Die Dichteverteilung $f_{\text{Log}}(x)$ der logarithmischen Normalverteilung folgt dem Zusammenhang

$$f_{\text{Log}}(x|\sigma_{\text{Log}}, \mu_{\text{Log}}) = \frac{1}{\sigma_{\text{Log}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot x} \cdot e^{\left[\frac{-(\ln(x) - \mu_{\text{Log}})^2}{2 \cdot \sigma_{\text{Log}}^2} \right]}. \quad (3.21)$$

Die logarithmische Normalverteilung besitzt wie die Normalverteilung zwei Verteilungsparameter. σ_{Log} ($\sigma_{\text{Log}} \in \mathbb{R}, \sigma_{\text{Log}} > 0$) wird als Skalenparameter und μ_{Log} ($\mu_{\text{Log}} \in \mathbb{R}$) wird als Formparameter dieses Verteilungstyps bezeichnet. Aus Abbildung 3.3 ist ersichtlich, dass die Dichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung rechtsschief ausfällt. Sie ist lediglich für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ definiert.

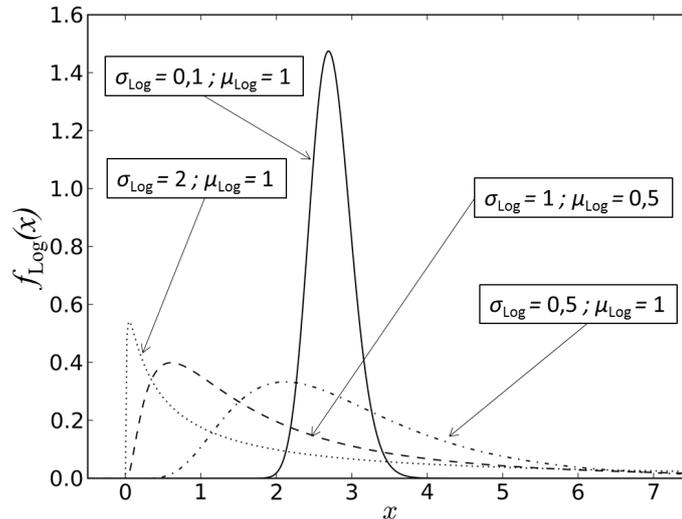


Abbildung 3.3: Dichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung bei unterschiedlicher Wahl der Verteilungsparameter σ_{Log} und μ_{Log} .

3.2.1.4 χ^2 -Verteilung

Bei der χ^2 -Verteilung handelt es sich um eine Testverteilung, die zur Durchführung von statistischen Tests in der induktiven Statistik herangezogen wird. Unter anderem wird sie für den T-Test verwendet (siehe Abschnitt 3.2.3), um Korrelationskoeffizienten (siehe Abschnitt 3.3) bewerten zu können.

Die χ^2 -Verteilung beschreibt die Verteilung der Summe $\chi_{n_f}^2$ der Quadrate von n_f zufällig aus einer Standardnormalverteilung $f_{\text{N}}(x|1, 0)$ gezogenen Zufallszahlen Z_i . Die $\chi_{n_f}^2$ -Summe kann aus

$$\chi_{n_f}^2 = \sum_{i=1}^{n_f} Z_i^2 \quad (3.22)$$

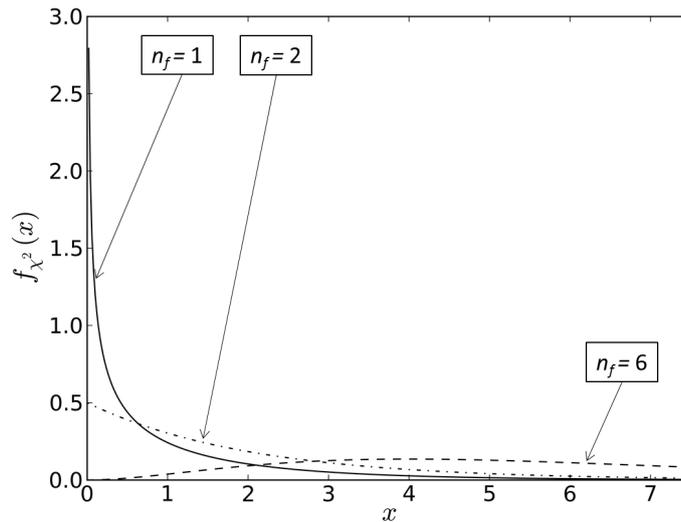


Abbildung 3.4: Dichtefunktion der χ^2 -Verteilung bei unterschiedlicher Anzahl von Freiheitsgraden n_f .

berechnet werden. n_f beschreibt hierbei die Anzahl der Freiheitsgrade der Verteilung, für die $n_f \in \mathbb{N}$ gelten muss. Die Dichtefunktion zur Beschreibung der Streuung der χ^2 -Summe für eine bestimmte Anzahl von Freiheitsgraden n_f ist durch

$$f_{\chi^2}(x|n_f) = \frac{1}{(2^{\frac{n_f}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n_f}{2}))} \cdot x^{\left(\frac{n_f}{2}-1\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \quad (3.23)$$

gegeben. Sie ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert und beinhaltet die Γ -Funktion. Diese hat die Eigenschaft

$$\Gamma(x+1) = x!, \quad (3.24)$$

sodass

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (3.25)$$

gilt. Die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Funktionswerte der Γ -Funktion können ausgehend von den Lösungen

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(0,5) = \sqrt{\pi} \quad (3.26)$$

einfach berechnet werden. In Abbildung 3.4 ist die Dichtefunktion der χ^2 -Verteilung für unterschiedliche Freiheitsgrade n_f gezeigt. Für $n_f > 30$ kann die χ^2 -Verteilung in guter Näherung als symmetrisch angenommen werden [19, Seite 261]. Die Lage der Verteilung wird maßgeblich durch ihre Freiheitsgrade bestimmt (siehe Abbildung 3.4), da ihr Erwartungswert gerade der Anzahl an Freiheitsgraden entspricht.

3.2.1.5 Student-t-Verteilung

Wie bei der χ^2 -Verteilung handelt es sich auch bei der Student-t-Verteilung um eine Testverteilung, die für die induktive Statistik herangezogen werden kann. Die Student-t-Verteilung fällt symmetrisch aus und nähert sich für ausreichend große Stichprobenumfänge der Stan-

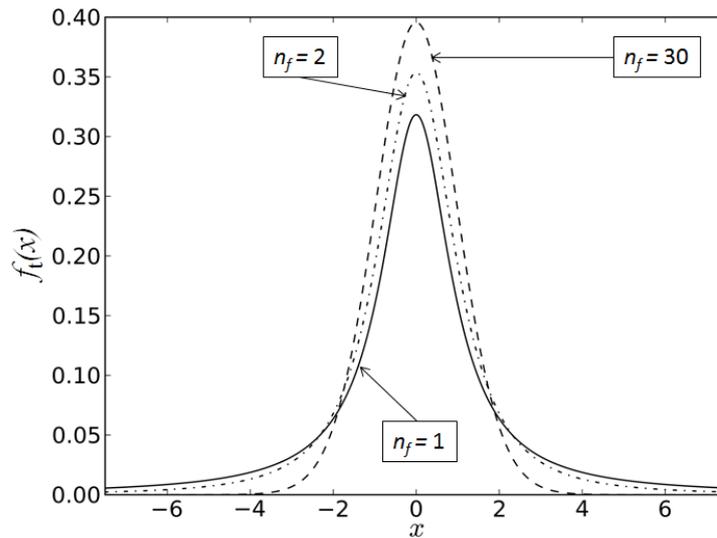


Abbildung 3.5: Dichtefunktion der Student-t-Verteilung bei unterschiedlicher Anzahl von Freiheitsgraden n_f .

dardnormalverteilung [19, Seite 263] an. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Student-t-Verteilung ab einem Stichprobenumfang von $n = 35$ durch die Standardnormalverteilung ersetzt.

Eine Zufallsgröße T_{n_f} weist dann eine Student-t-Verteilung auf, wenn ihr Auftreten durch

$$T_{n_f} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_{n_f}^2}{n_f}}} \quad (3.27)$$

beschrieben werden kann. Z ist eine standardnormalverteilte Zufallszahl und $\chi_{n_f}^2$ eine davon unabhängige Zufallszahl, die der χ^2 -Verteilung mit n_f Freiheitsgraden folgt. Es gilt: $n_f = n - 1$.

Die Dichteverteilung der Student-t-Verteilung ist durch

$$f_t(x|n_f) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_f+1}{2}\right)}{\sqrt{n_f\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n_f}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n_f}\right)^{\left(\frac{n_f+1}{2}\right)}} \quad (3.28)$$

gegeben. Sie ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Dichtefunktion ist für alle $n_f \in \mathbb{N}$ definiert. Beispielfhaft ist ihr Verlauf in Abbildung 3.5 dargestellt.

3.2.2 Maximum-Likelihood Methode

In der vorliegenden Arbeit sollen mithilfe von statistischen Verteilungen die Streuungen von unterschiedlichen Merkmalen (zum Beispiel von Werkstoffkennwerten) beschrieben werden. Eine der zentralen Herausforderungen ist es hierbei eine im statistischen Sinne optimale Beschreibung der Merkmalstreuung zu finden. Bei der Formulierung sogenannter Verteilungs-

hypothesen muss eine objektive Methode zum Einsatz kommen, die es erlaubt die Verteilungsparameter \mathbf{p} eines Verteilungstyps $f(x|\mathbf{p})$ so zu bestimmen, dass die zugrundeliegende Stichprobe im statistischen Sinne bestmöglich beschrieben wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierzu die Maximum-Likelihood-Methode (MLM) eingesetzt [14, Seiten 656-659].

Für eine beliebige stetige Verteilungsfunktion $f(x|\mathbf{p})$ mit bekannten Verteilungsparametern \mathbf{p} lässt sich die Auftrittswahrscheinlichkeit P für einen einzelnen Stichprobenwert in einem bestimmten Intervall $I = [I_0, I_1]$ durch die Integration der Verteilungsfunktion gemäß

$$P = \int_{I_0}^{I_1} f(x|\mathbf{p}) dx \quad (3.29)$$

berechnen. In der Praxis tritt jedoch häufig der umgekehrte Fall auf. Es sind n Stichprobenwerte und ein beliebiger Verteilungstyp vorgegeben, jedoch fehlen Werte für die m Verteilungsparameter $p_1, p_2, \dots, p_m = \mathbf{p}$. Um diese sinnvoll bestimmen zu können wird zunächst die Likelihood-Funktion L definiert:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n|\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\mathbf{p}) \quad (3.30)$$

In x_1, x_2, \dots, x_n sind die Stichprobenwerte zusammengefasst. Die Likelihood-Funktion kann als Gesamthäufigkeitsdichte interpretiert werden. Sie gibt im statistischen Sinne an, wie häufig das Auftreten einer Stichprobe unter einer gegebenen Verteilungshypothese mit den Verteilungsparametern \mathbf{p} zu erwarten ist. Berechnet werden kann sie aus dem Produkt der Einzelhäufigkeitsdichten jedes Stichprobenwerts, wenn die Stichprobenwerte voneinander unabhängig sind [19, Seite 335]. Als Maximum-Likelihood-Parameter \mathbf{p}^* werden diejenigen Verteilungsparameter bezeichnet, die die Likelihood-Gleichung L maximieren. Da Wahrscheinlichkeiten und Dichtefunktionswerte nicht negativ ausfallen können und der Logarithmus monoton wachsend ist, weist die Likelihood-Funktion L an den selben Stellen für \mathbf{p}^* ihr Maximum auf wie ihr Logarithmus $\ln(L)$ [19, Seite 336]. Die Maximierung der logarithmierten Likelihood-Funktion

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i|\mathbf{p})) \quad (3.31)$$

stellt ein Optimierungsproblem dar, dass gradientenbasiert mithilfe des in Abschnitt 3.1.5 vorgestellten Optimierungsalgorithmus gelöst werden kann. Sein Ergebnis liefert sodann diejenigen Verteilungsparameter \mathbf{p}^* , die die Auftrittswahrscheinlichkeit der zugrundeliegenden Stichprobe bezogen auf den vorgegebenen Verteilungstyp maximieren.

Die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparameters weist bei besonderen Stichprobenausprägungen kein solches Maximum auf. Es werden die in [23] vorgeschlagenen Methoden angewendet, um den Verteilungsparameter T_W iterativ zu bestimmen, sobald die MLM am Lösungspunkt kein Maximum erreicht.

3.2.3 Verfahren zur Bewertung von statistischen Hypothesen

Die MLM liefert lediglich diejenigen Verteilungsparameter, die dazuführen, dass ein vorgegebener Verteilungstyp eine vorgegebene Stichprobe im statistischen Sinne bestmöglich beschreibt. Sie gibt jedoch keinerlei Information über die Güte der Beschreibung der Stichprobe durch diese Verteilungshypothese wieder. Hierfür werden fortschrittlichere Methoden notwendig und es kommen sogenannte Hypothesentests zum Einsatz. Diese Testverfahren liefern eine auf Probabilistik basierende Bewertungsmöglichkeit der durch die MLM ermittelten Verteilungshypothese. Hypothesentests lassen keine absolute Aussage über die Richtigkeit einer unterstellten Verteilungshypothese zu. Sie bewerten lediglich wahrscheinlichkeitsbasiert, wie gut die Streuung der untersuchten Stichprobe durch die unterstellte Verteilungshypothese beschrieben wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden Hypothesentests genutzt, um einen P-Wert P_{Wert} zu berechnen. Der P-Wert gibt im Allgemeinen an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ausfällt, dass unter der Annahme, der in der Nullhypothese unterstellte statistische Zusammenhang sei korrekt, zufällig extremere Werte auftreten als diejenigen, die im Test als Stichprobe genutzt werden [14, Seite 616].

Ob eine Verteilungshypothese oder eine andere auf Statistik basierende Behauptung als zutreffend bewertet wird, kann mittels einem Signifikanzniveau α entschieden werden. Gilt $P_{\text{Wert}} \geq \alpha$, so wird die formulierte Nullhypothese H_0 beibehalten. Hierbei ist zu beachten, dass die Auswahl des im Test angewendeten Signifikanzniveaus bereits vor Testbeginn erfolgen muss. Wie hoch das Signifikanzniveau gewählt wird, ist maßgeblich davon beeinflusst, wie schwer aus Sicht des Anwenders die aus dem Test folgenden Entscheidungen wiegen. Häufig wird das Signifikanzniveau zu $\alpha = 0.05$ oder zu $\alpha = 0.005$ gewählt. Das Signifikanzniveau entspricht direkt der Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler der 1. Art zu begehen, also die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen. Der Fehler 2. Art, also die Entscheidung für die Nullhypothese H_0 , obwohl die Alternativhypothese H_1 korrekt ist, tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von β auf. Sie spielt im Rahmen dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle und ist im Allgemeinen nur unter bestimmten Voraussetzungen berechenbar [19, Seite 391]. Die Nullhypothese und die Alternativhypothese müssen stets so formuliert sein, dass sich ihre beiden Auftretenswahrscheinlichkeiten P_{H_0} und P_{H_1} zu

$$P_{H_0} + P_{H_1} = 1 \tag{3.32}$$

addieren.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Hypothesentests mit unterschiedlichem Anwendungsbereich verwendet. In den folgenden Abschnitten wird zunächst der T-Test vorgestellt. Dieser liefert eine Aussage darüber, ob eine zwischen zwei Merkmalen messbare Korrelation zufällig oder systematisch auftritt. Weiterhin kommt der Anderson-Darling Parameter zum Einsatz. Dieser wird im Anderson-Darling Test ermittelt und zur Bewertung der Qualität der Beschreibung einer Stichprobe durch die mittels der MLM ermittelten Verteilungshypothese eingesetzt.

3.2.3.1 T-Test

Der T-Test kommt im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz, um die Unabhängigkeit zweier Merkmale zu bewerten. Der T-Test auf Unabhängigkeit umfasst mehrere Schritte. Es liegen die Annahmen zugrunde, dass die beiden getesteten Merkmale jeweils normalverteilt und als n Wertepaare einer zweidimensionalen Stichprobe vorliegen. Ziel dieses Hypothesentests ist es, eine wahrscheinlichkeitsbehaftete Aussage darüber zu erlauben, ob ein Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen gemessener Zusammenhang zufällig oder systematisch auftritt. Die Hypothesen H_0 und H_1 dieses Testverfahrens sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst:

Tabelle 3.1: T-Test Hypothesen

H_0 : Zwischen den Merkmalen liegt keine systematische Abhängigkeit vor.
H_1 : Zwischen den Merkmalen liegt eine systematische Abhängigkeit vor.

In einem ersten Schritt wird in diesem Test die lineare Korrelation nach Pearson R_{Pea} (siehe Abschnitt 3.3.1) zwischen den Merkmalen bestimmt. Basierend auf dieser Größe kann die Prüfgröße des T-Tests T_t mit

$$T_t = \sqrt{n-2} \cdot \frac{R_{\text{Pea}}}{\sqrt{1-R_{\text{Pea}}^2}} \quad (3.33)$$

berechnet werden [19, Seite 408]. Obwohl zwischen den Merkmalen eine lineare Korrelation besteht, gibt es die Möglichkeit, dass diese Korrelation nur zufällig auftritt. Um die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Auftreten einer Korrelation berechnen zu können wird die T-Verteilung mit $n_f = n - 2$ Freiheitsgraden genutzt. Der P-Wert P_{Wert} des T-Tests ergibt sich aus

$$P_{\text{Wert}} = 1 - 2 \cdot \int_0^{|T_t|} f_t(x|n_f) dx. \quad (3.34)$$

Beim T-Test handelt es sich um einen zweiseitigen Test, sodass sowohl eine sehr große positive Prüfgröße als auch eine sehr kleine negative Prüfgröße zur Ablehnung der Nullhypothese führen. Das Signifikanzniveau für den T-Test im Rahmen dieser Arbeit wird zu $\alpha = 0.2$ festgelegt. Bezogen auf die lineare Korrelation bedeutet dies, dass nur dann von einer Korrelation zwischen zwei Merkmalen ausgegangen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gemessene Korrelation zufällig auftritt, kleiner ist als 20%. Da es sich um einen zweiseitigen Test handelt und der lineare Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen sowohl positiv als auch negativ ausfallen kann, wird die Nullhypothese für $P_{\text{Wert}} \leq \frac{\alpha}{2}$ abgelehnt und von einem nicht zufälligen Zusammenhang der Merkmale ausgegangen.

3.2.3.2 Anderson-Darling Test

Wie der T-Test liefert auch der Anpassungstest nach Anderson-Darling eine statistisch basierte Aussage über die Güte einer Nullhypothese [22, Seite 109]. Im Rahmen dieser Arbeit, wird der Anderson-Darling Test verwendet, um die Abweichungen zwischen einer gemessenen Streuung eines Merkmals und der durch die MLM ermittelten statistischen Beschreibung zu

bewerten. Der basierend auf dem Anderson-Darling Test berechnete P-Wert wird nicht dazu genutzt, Nullhypothesen zu verwerfen, sondern dient als Entscheidungsgrundlage bei der Wahl des Verteilungstyps, welcher für die Beschreibung der Streuung herangezogen werden soll.

Es wird davon ausgegangen, dass eine Stichprobe \mathbf{S} bestehend aus n Stichprobenwerten x_1, x_2, \dots, x_n vorliegt. Ihre Stichprobenwerte sind der Größe nach aufsteigend sortiert und es soll überprüft werden, ob eine Verteilungshypothese gemäß $f(x|\mathbf{p}^*)$ dazu genutzt werden kann, sie adäquat zu beschreiben. Hierzu nutzt der Anderson-Darling Test den Anderson-Darling Parameter A_D^2 , welcher sich aus

$$A_D^2 = -n - \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot k - 1}{n} [\ln(F(x_k|\mathbf{p}^*)) + \ln(1 - F(x_{n+1-k}|\mathbf{p}^*))] \quad (3.35)$$

berechnen lässt [22, Seite 108]. \mathbf{p}^* enthält die Verteilungsparameter, die für einen beliebigen Verteilungstyp $f(x|\mathbf{p})$ mittels der MLM ermittelt wurden. $F(x|\mathbf{p}^*)$ beschreibt die Integration der Dichtefunktion

$$F(x_k|\mathbf{p}^*) = \int_{U_{\text{Def}}}^{x_k} f(x|\mathbf{p}^*) dx, \quad (3.36)$$

wobei die individuelle Untergrenze des Definitionsbereichs U_{Def} des verwendeten Verteilungstyps berücksichtigt werden muss (siehe auch in Abschnitt 3.2.1). Für kleine Stichproben muss der so ermittelte Anderson-Darling Parameter korrigiert werden [21, Seite 146 und Seite 373]. Hierbei wird in Abhängigkeit des in der Nullhypothese unterstellten Verteilungstyps unterschieden: Liegt eine Nullhypothese gemäß der Normalverteilung oder der logarithmischen Normalverteilung vor, gilt für den korrigierten Anderson-Darling Parameter A_D^*

$$A_D^* = A_D^2 \cdot \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right). \quad (3.37)$$

Wird die Nullhypothese gemäß der zweiparametrischen oder dreiparametrischen Weibullverteilung formuliert, so folgt für A_D^*

$$A_D^* = A_D^2 \cdot \left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.38)$$

[24, Seite 135] liefert einen empirischen Zusammenhang zwischen dem korrigierten Anderson-Darling Parameter und dem P-Wert P_{Wert}

$$\begin{aligned} P_{\text{Wert}} &= 0 && \text{für } A_D^* \geq 13 \\ P_{\text{Wert}} &= e^{1.2937 - 5.709 \cdot A_D^* + 0.0186 \cdot A_D^{*2}} && \text{für } 13 > A_D^* \geq 0.6 \\ P_{\text{Wert}} &= e^{0.9177 - 4.279 \cdot A_D^* - 1.38 \cdot A_D^{*2}} && \text{für } 0.6 > A_D^* \geq 0.34 \\ P_{\text{Wert}} &= 1 - e^{-8.318 + 42.796 \cdot A_D^* - 59.938 \cdot A_D^{*2}} && \text{für } 0.34 > A_D^* \geq 0.2 \\ P_{\text{Wert}} &= 1 - e^{-13.436 + 101.14 \cdot A_D^* - 223.73 \cdot A_D^{*2}} && \text{für } 0.2 > A_D^* \geq 0.0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Der Anderson-Darling Test erweist sich im Vergleich mit anderen statistischen Testverfah-

ren robuster gegenüber großen Abweichungen zwischen der hypothetischen Verteilung und der Stichprobe. Weiterhin werden die Randbereiche einer Verteilung durch eine geeignete Gewichtung vergleichsweise gut abgebildet [22, Seite 410].

3.3 Korrelation und Korrelationskoeffizienten

Neben der Streuung von bestimmten Größen soll in dieser Arbeit auch untersucht werden, ob diese bestimmten Größen untereinander in einem systematischen Zusammenhang stehen. Hierzu lassen sich Korrelationskoeffizienten nutzen [25, Seite 138]. Sie geben an, ob zwischen zwei Merkmalen \mathbf{x} und \mathbf{y} , welche als n (x_i, y_i) Paarungen auftreten, eine Korrelation besteht (siehe hierzu auch Abschnitt 3.2.3). Korrelationskoeffizienten lassen jedoch keinerlei Rückschlüsse darauf zu, ob zwischen den beiden Merkmalen ein funktionaler Zusammenhang besteht, beziehungsweise darauf, ob ein Merkmal sich auf das andere im Ursache-Wirkungs-Prinzip auswirkt [25, Seite 147]. Eine positive Korrelation zwischen zwei Merkmalen zeichnet sich dadurch aus, dass große Werte x_i tendenziell gemeinsam mit großen Werten y_i auftreten. Bei einer negativen Korrelation zwischen den beiden Merkmalen, treten große x_i Werte mit zumeist kleinen y_i Werten auf.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Korrelationskoeffizienten angewendet. In den folgenden Abschnitten werden der Korrelationskoeffizient für lineare Korrelationen nach Pearson und der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman erläutert.

3.3.1 Lineare Korrelation nach Pearson

Der Korrelationskoeffizient nach Pearson R_{Pea} (häufig auch nach Bravais-Pearson [25, Seite 139]) liefert ein Maß für den linearen Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen \mathbf{x} und \mathbf{y} . Er ist als

$$R_{\text{Pea}} = \frac{s_{xy}}{s_{\mathbf{x}} \cdot s_{\mathbf{y}}} \quad (3.40)$$

definiert. s_{xy} wird als die Kovarianz der zweidimensionalen Stichprobe bezeichnet und kann durch

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \quad (3.41)$$

berechnet werden. \bar{x} und \bar{y} beschreiben die arithmetischen Mittelwerte der beiden Merkmale gemäß der Gleichung (3.16). Die Varianzen der beiden Merkmale $s_{\mathbf{x}}$ und $s_{\mathbf{y}}$ können durch Gleichung (3.17) bestimmt werden.

R_{Pea} kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Je größer der Betrag der ermittelten Korrelationskoeffizienten ausfällt, desto ausgeprägter ist der lineare Zusammenhang zwischen den beiden untersuchten Merkmalen. Mithilfe des T-Tests (siehe Abschnitt 3.2.3) kann basierend auf statistischen Methoden abgeschätzt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass eine ermittelte Korrelation zufällig auftritt. Weiterhin lässt sich aus $R_{\text{Pea}}^2 = B$ das Bestimmtheitsmaß berechnen [19, Seite 95]. Es gibt an, welcher Anteil der Streuung des einen Merkmals durch die Streuung des anderen Merkmals erklärt werden kann [26, Seite 215]. B ist somit für die Interpretation eines ermittelten Korrelationskoeffizienten wichtig.

3.3.2 Rangkorrelation nach Spearman

Der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman R_{Spe} dient als Maß für die lineare Korrelation der Stichprobenränge. Er besitzt die gleichen Eigenschaften wie der Korrelationskoeffizient nach Pearson [25, Seite 145]. Der Unterschied zwischen den beiden Koeffizienten liegt darin, dass bei der Auswertung der Rangkorrelation nicht die Zahlenwerte der Wertepaare (x_i, y_i) auf Korrelation untersucht werden, sondern ihre Rangzahlen $r \in \mathbb{N}$. Jedem beobachteten Wert m_i innerhalb des Merkmals \mathbf{m} wird eine Rangzahl r_i zugeordnet. Hierbei erhält der kleinste Wert des Merkmals m_{\min} die kleinste Rangzahl $r_{\min} = 1$. Mit aufsteigendem Wert, steigt auch die dem Wert zugeordnete Rangzahl. Die maximale Rangzahl r_{\max} entspricht also gerade der Anzahl n vorliegender Wertepaare. Tritt innerhalb eines Merkmals ein identischer Wert k -fach auf, so werden innerhalb der identischen Werte die Rangzahlen zunächst weiterhin aufsteigend zugeordnet, anschließend aber arithmetisch gemittelt. Ist die Bestimmung der Rangzahlen für die Merkmale \mathbf{x} und \mathbf{y} abgeschlossen und sind die Wertepaare der Ränge (r_{x_i}, r_{y_i}) bekannt, kann die Berechnung des Korrelationskoeffizienten R_{Spe} nach Spearman analog zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson R_{Pea} erfolgen. Anstatt der Varianzen (siehe Gleichung (3.17)) und Kovarianzen (siehe Gleichung 3.41) der Merkmale werden nun die ihrer Rangzahlen ausgewertet. Gegenüber dem Korrelationskoeffizient nach Pearson hat der Rangkorrelationskoeffizient den Vorteil, dass auch nicht lineare Zusammenhänge innerhalb der Merkmale erfasst werden können, was mit dem Korrelationskoeffizient nach Pearson nicht gelingt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Rangkorrelationskoeffizient als Indikator für nicht lineare Korrelationen genutzt. Treten zwischen R_{Pea} und R_{Spe} deutliche Abweichungen auf, kann eine nichtlineare Korrelation die Ursache sein [19, Seite 83].

3.4 Monte-Carlo Simulation

In einigen Anwendungsfällen der Ingenieurwissenschaften kann eine Vorhersage basierend auf Modellen und Funktionen nicht durch die analytische oder numerische Lösung einer Gleichung erfolgen. Beispielsweise ist dies der Fall, wenn ein funktionaler Zusammenhang zwischen mehreren Größen besteht und diese Größen stochastischen Einflüssen unterworfen sind [27], sodass eine wiederholte Lösung der zugrundeliegenden Gleichungen stets zu unterschiedlichen Ergebnissen führt. Häufig ist es analytisch nur mit sehr hohem Aufwand oder überhaupt nicht möglich eine sinnvolle Beschreibung der resultierenden Streuung der Ergebnisgrößen zu ermitteln. Aus diesem Grund kommen im Rahmen dieser Arbeit Monte-Carlo Simulationen zum Einsatz. Diese Art der Simulation wird beispielsweise in [1] oder [28] für die Lösung ähnlicher Problemstellungen genutzt. Um den Einfluss von streuenden Werkstoffkennwerten auf die Lebensdauervorhersage eines Lebensdauermodells bestimmen zu können, ist es nicht zielführend nur eine einzige deterministische Modellauswertung mit vorab festgelegten Werkstoffkennwerten durchzuführen, da diese Auswertung nur einen einzigen speziellen Zustand beschreibt. Stattdessen sollen Werkstoffkennwerte genutzt werden, die aus den statistischen Beschreibungen zufällig gezogen werden. Die Monte-Carlo Simulation erlaubt es, durch eine Vielzahl von Modellberechnungen unter Berücksichtigung der Streuung der Modellvariablen

die Streuungseigenschaften und die Extremwerte des Lebensdauermodells abzuschätzen. Hierbei wird ein Stabilisierungseffekt genutzt, der allgemein auch unter dem *Gesetz der großen Zahlen* [19, Seite 157] bekannt ist. Die relativen Häufigkeiten, wie beispielsweise der Mittelwert, eines Zufallsexperiments können sehr stark schwanken, wenn sie anhand nur weniger Stichprobenwerte ermittelt werden. Mit zunehmender Anzahl an Stichprobenwerten schwindet diese Schwankung zusehends und die relativen Häufigkeiten konvergieren. Diese Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten nennt sich *das schwache Gesetz der großen Zahlen* [19, Seite 310]. Es führt dazu, dass basierend auf einer großen Anzahl an Berechnungen, Aussagen zu Wahrscheinlichkeiten sehr präzise möglich werden. Mit der Präzision der Aussagen steigt jedoch der Berechnungsaufwand bei der Monte-Carlo Simulation.

Um eine Vielzahl an Lebensdauerbewertungen unter Berücksichtigung von streuenden Werkstoffkennwerten ermöglichen zu können, ist es nötig zufällig Kennwerte aus statistischen Verteilungen zu ziehen. Die Ziehung erfolgt hierbei so, dass die gezogenen Werkstoffkennwerte in ihrer Grundgesamtheit der zugrundeliegenden statistischen Beschreibung folgen. Es kommt ein Zufallszahlengenerator zum Einsatz, welcher im folgenden Abschnitt kurz erläutert ist. Um die Monte-Carlo Simulation möglichst realitätsnah zu gestalten und ihre Ergebnisqualität zu verbessern, sollen auch die Einflüsse von Korrelationen zwischen den einzelnen Werkstoffkennwerten auf die vom Modell vorhergesagte Lebensdauer untersucht und bewertet werden. Um dies im Rahmen einer Monte-Carlo Simulation zu ermöglichen, müssen die gezogenen Zufallszahlen einerseits miteinander korreliert sein und andererseits weiterhin dem statistischen Zusammenhang folgen, der ihnen unterstellt wird. Um dies umsetzen zu können, wurde ein Algorithmus entwickelt, der in Abschnitt 3.4.2 vorgestellt wird.

3.4.1 Ziehung von Pseudo-Zufallszahlen

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Zufallszahlengenerator steht in der Programmiersprache *PYTHON* (PYTHON) standardmäßig in der Bibliothek mit dem Namen *random* zur Verfügung. Wie alle rechnergestützten Zufallszahlengeneratoren liefert auch dieser lediglich Pseudo-Zufallszahlen, die nicht vollkommen zufällig, sondern deterministisch und von bestimmten äußeren Einflussgrößen abhängig sind [29]. Der in PYTHON bereitgestellte Zufallszahlengenerator basiert auf einem Algorithmus, der als Mersenne-Twister bezeichnet und in [30] detailliert erläutert wird. Er besitzt eine Periodizität von $2^{19937} - 1$ und generiert gleichverteilte Fließkommazahlen im halb-offenen Intervall $[0, 1)$ mit einer Präzision von 53 Bit. Um die gleichverteilten Zufallszahlen in Zufallszahlen zu transformieren, die einem anderen Verteilungstyp folgen, werden die gleichverteilten Zufallszahlen als Wahrscheinlichkeiten P interpretiert. Für jeden beliebigen Verteilungstyp $f(x|\mathbf{p})$ gilt, dass die Integration der Verteilungsfunktion über den gesamten Definitionsbereich die Wahrscheinlichkeit

$$P = \int_{U_{\text{Def}}}^{O_{\text{Def}}} f(x|\mathbf{p}) dx = 1 \quad (3.42)$$

liefert. U_{Def} und O_{Def} geben hierbei die untere und obere Grenze des Definitionsbereichs an. Für die Transformation einer gleichverteilten Zufallszahl des Zufallszahlengenerators Z_g in

eine äquivalente Zufallszahl eines anderen Verteilungstyps, muss

$$Z_g = \int_{U_{\text{Def}}}^Z f(x|\mathbf{p})dx \quad (3.43)$$

gelten. Ist diese Gleichung erfüllt, entspricht Z gerade der gesuchten Zufallszahl. In PYTHON stehen Zufallszahlengeneratoren für alle im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Verteilungstypen standardmäßig in der *random*-Bibliothek zur Verfügung [29].

3.4.2 Korrelation von Pseudo-Zufallszahlen

Liegen zwei unabhängige Stichproben \mathbf{x} und \mathbf{y} aus zwei unterschiedlichen statistischen Verteilungen vor, welche mithilfe des in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Zufallszahlengenerators gezogen wurden, so zeigen diese Stichproben keine Korrelation.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Werkstoffkennwerte aus statistischen Verteilungen generiert, um sie als streuende Eingangsgrößen in die Lebensdauerbewertung einfließen zu lassen. Diese Kennwerte können Korrelationen aufweisen. Es wird demnach eine Methode benötigt, die es erlaubt korrelierte Zufallszahlen zu ermitteln. Ansätze zur Korrelation von Zufallszahlen, die die Cholesky-Zerlegung nutzen, wie sie beispielsweise in [31, Seite 78] beschrieben ist, eignen sich nur, wenn die zu korrelierenden Stichproben aus Zufallszahlen bestehen, die aus Normalverteilungen stammen. Da im Rahmen dieser Arbeit auch andere Verteilungstypen genutzt werden, wird ein Algorithmus entwickelt, der es erlaubt Zufallszahlen aus beliebigen Verteilungstypen so zu korrelieren, dass jeder zugrundeliegende Verteilungstyp erhalten bleibt. Weiterhin wird in der vorliegenden Arbeit unter anderem das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz herangezogen um das Werkstoffverhalten zu beschreiben. Es ist in Abschnitt 4.2.2 erläutert und besitzt drei Werkstoffkennwerte. Die Streuungen dieser drei Werkstoffkennwerte sollen im Rahmen dieser Arbeit statistisch beschrieben werden. Die statistischen Beschreibungen werden anschließend für eine Monte-Carlo Simulation der Lebensdauer herangezogen. Wenn die drei Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes untereinander korreliert sind, so sollten auch zwischen den Zufallszahlen, die aus ihren statistischen Verteilungen gezogen werden, Korrelationen bestehen. Um diese Korrelationen in einem probabilistischen Lebensdauermodell mit drei untereinander korrelierten Werkstoffkennwerten abbilden zu können, muss der im folgenden beschriebene Algorithmus so implementiert werden, dass die Korrelation innerhalb von drei unabhängigen, statistisch verteilten Stichproben eingestellt werden kann.

Zunächst werden drei Stichproben \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} mit einem beliebigen Stichprobenumfang n aus beliebigen Verteilungen gezogen. Sie repräsentieren die Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes. Diese Stichproben sind voneinander unabhängig und unkorreliert. Es wird angenommen, dass die Korrelationskoeffizienten nach Pearson $R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$, $R_{\mathbf{x}\mathbf{z}}$ und $R_{\mathbf{y}\mathbf{z}}$, die sich zwischen den Stichproben \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} einstellen sollen, bekannt sind. Sie stellen die Sollkorrelationen da und werden im Rahmen dieser Arbeit experimentell ermittelt. Für jede Stichprobe können nun in einem weiteren Schritt diese Sollkorrelationskoeffizienten addiert

werden:

$$\begin{aligned}
 R_{xy} + R_{xz} & \text{ für } \mathbf{x} \\
 R_{xy} + R_{yz} & \text{ für } \mathbf{y} \\
 R_{yz} + R_{xz} & \text{ für } \mathbf{z}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Es wird angenommen, dass aus der Summe der Korrelationskoeffizienten eine Kennwerthierarchie abgeleitet werden kann. Diejenige Stichprobe, deren akkumulierte lineare Korrelationen zu den beiden anderen Stichproben am stärksten ausfallen, wird als Masterstichprobe \mathbf{M} festgelegt. Sie weist die größte Summe aus Korrelationskoeffizienten auf. Die Stichprobe mit dem zweitgrößten Einfluss auf die anderen Stichproben wird zur ersten abhängigen Größe \mathbf{A}_1 und die übrige Stichprobe zur zweiten abhängigen Größe \mathbf{A}_2 erklärt. Die Korrelationskoeffizienten, die eingestellt werden sollen, $R_{\text{Soll},\mathbf{MA}_1}$, $R_{\text{Soll},\mathbf{MA}_2}$ und $R_{\text{Soll},\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}$ werden entsprechend der Stichprobenhierarchie im Algorithmus zugeordnet. Es liegen somit n Wertetripel $(M_k, A_{1,k}, A_{2,k})$ aus den noch unkorrelierten Stichproben vor.

Es kommt ein iteratives Verfahren zum Einsatz, um die gewünschte Korrelation einzustellen. Dieses beruht auf der Idee, die Stichprobenwerte innerhalb der Stichproben solange zufällig zu vertauschen, bis sich die gewünschten Korrelationen einstellen.

Zunächst wird der Korrelationskoeffizient $R_{\mathbf{MA}_1,i}$ zwischen den Stichproben \mathbf{M} und \mathbf{A}_1 ermittelt. Der Index i gibt die Anzahl der Iterationsschleifen an. Für $i = 0$ wird der Anfangswert des Korrelationskoeffizienten zwischen den noch unkorrelierten Stichproben indiziert. Mithilfe des in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Algorithmus zur Ziehung von Zufallszahlen, wird ein positiv natürliches Zufallszahlenpaar (Z_1, Z_2) mit $Z \in \mathbb{N}$ im Intervall $[1, n]$ gezogen. Die Zufallszahlen Z_1 und Z_2 geben an, welche Stichprobenwerte der ersten abhängigen Stichprobe \mathbf{A}_1 vertauscht werden. Mit der so modifizierten Stichprobe $\mathbf{A}_{1,i+1}$ kann nun der Korrelationskoeffizient $R_{\mathbf{MA}_1,i+1}$ bestimmt werden. Führt der Tausch der Stichprobenwerte zu einer Annäherung der Korrelation $R_{\mathbf{MA}_1}$ an $R_{\text{Soll},\mathbf{MA}_1}$, wird der Tausch beibehalten. Die Anfangswerte werden aktualisiert und ein neuer Iterationschritt beginnt. Führt der Tausch zu einer Verschlechterung des Ergebnisses, so wird er verworfen und es wird ein neues Zufallszahlenpaar (Z_1, Z_2) gezogen. Die Iteration wird fortgesetzt, bis die Abweichungen zwischen Soll-Korrelation $R_{\text{Soll},\mathbf{MA}_1}$ und Ist-Korrelation $R_{\mathbf{MA}_1}$ kleiner sind als 3%.

In einem weiteren Schritt kann der identische Algorithmus zum Tauschen der Stichprobenwerte auf die Stichprobe \mathbf{A}_2 angewendet werden. Die Stichproben \mathbf{M} und \mathbf{A}_1 bleiben dabei unverändert, sodass die bereits eingestellte Korrelation $R_{\mathbf{MA}_1}$ unangetastet bleibt. In diesem Schritt muss beachtet werden, dass der Tausch von zwei Stichprobenwerten nur dann beibehalten werden darf, wenn sich sowohl $R_{\mathbf{MA}_2}$ als auch $R_{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}$ gegenüber den Anfangswerten verbessern. Es werden hierzu weitere Fallunterscheidungen nötig und das Konvergenzverhalten des Algorithmus verlangsamt sich zusehends. Das Abbruchkriterium für die zweite Iterationsschleife ist erfüllt, wenn die relative Abweichung zwischen beiden eingestellten Korrelationskoeffizienten kleiner als 5% gegenüber der jeweiligen Soll-Korrelation beträgt. Es resultieren n Wertetripel aus den korrelierten Stichprobenwerten $(M_k, A_{1,k}, A_{2,k})$. Da sich der Tausch von Stichprobenwerten innerhalb einer Stichprobe nicht auf deren statistische Verteilung auswirkt, bleiben die ursprünglichen statistischen Verteilungen durch diese Methodik erhalten.

4. Lebensdauermodell und Einflussfaktoren

Für die Lebensdauerbewertung unter TMF Belastung gibt es nicht viele Lebensdauermodelle. Rein phänomenologische Modelle, wie beispielsweise das Manson-Coffin Modell [32, Seite 198], der Smith-Watson-Topper Parameter [33] [34] oder der Ostergren Parameter [35], können den Einfluss der Spannungs-Temperatur-Geschichte auf die Schädigung in der Regel nicht beschreiben. Das Sehitoglu-Modell aus [36] und [37] geht auf Schädigungsmechanismen ein und berücksichtigt die Schädigungen durch Oxidation, Kriechen und Ermüdung durch eine lineare Schadensakkumulationsregel. Während die Beschreibung der Schädigung durch Oxidation in diesem Modell durch den Mechanismus des Aufwachsens und des Abplatzens von Oxidschichten beschrieben wird, folgen die Modelle für Kriechschädigung und Ermüdung rein phänomenologischen Ansätzen. Insbesondere wird für die Ermüdungsschädigung eine einfache Dehnungswöhlerlinie verwendet. Aus [37] ist bekannt, dass TMF und LCF Lebensdauern der Nickelbasislegierung MAR M247 durch das Sehitoglu-Modell gut beschrieben werden können. Der große Nachteil dieses Modells ist jedoch, dass es auf einer Vielzahl von Werkstoffkennwerten basiert, die zu einem großen Teil in keinem Bezug zu den mechanischen Eigenschaften des Werkstoffs stehen.

Ein mechanismenbasierter Ansatz zur Beschreibung der Lebensdauer eines Bauteils unter zyklischer oder thermozyklischer Belastung ist die Beschreibung der Entstehung und des Wachstums von Mikrorissen. Im LCF Belastungsbereich ist die Bauteillebensdauer im Allgemeinen durch das Risswachstum dominiert, da sich bei den relativ hohen Belastungsamplituden Mikrorisse bereits in einem frühen Stadium der Lebensdauer bilden [38] [39]. Es bietet sich demnach an, den dominanten Schädigungsmechanismus, das Wachstum der Mikrorisse, durch bruchmechanische Konzepte zu beschreiben [40]. In [41] wird beispielsweise das zyklische J-Integral über einen Frequenzfaktor und einen Arrhenius Ansatz erweitert und zur TMF Lebensdauer vorhersage einer Nickelbasislegierung eingesetzt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein mechanismenbasiertes Lebensdauermodell verwendet, das ebenfalls durch bruchmechanische Konzepte das zeit- und temperaturabhängige Wachstum von kurzen Rissen unter thermozyklischer Belastung betrachtet. Es ist in Abschnitt 4.1 erläutert. Das Risswachstum wird dabei im Modell durch einen Schädigungsparameter beschrieben, der neben den auftretenden Spannungs-, Dehnungs- und Temperatur-Geschichten im Thermozyklus ausschließlich von den mechanischen Werkstoffkennwerten abhängig ist.

Neben den mechanischen Werkstoffkennwerten enthält das Modell nur zwei weitere Kennwerte, die den Zusammenhang zwischen dem Schädigungsparameter und der Zyklenzahl zum Versagen beschreiben. Es wurde unter anderem in leicht abgewandelter Form erfolgreich in [7] zur Beschreibung der LCF und TMF Ermüdungslebensdauer des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 1810 eingesetzt. Die mechanischen Werkstoffkennwerte und die entsprechenden Werkstoffmodelle, die das elastisch-plastische Werkstoffverhalten und das zeitabhängige Kriechen berücksichtigen, werden in den Abschnitten 4.2 und 4.3 vorgestellt.

4.1 Mechanismenbasiertes Lebensdauermodell

Das in dieser Arbeit verwendete mechanismenbasierte TMF Lebensdauermodell basiert auf der Annahme, dass die Risswachstumsgeschwindigkeit, die durch das Inkrement der Risslängenzunahme pro Lastzyklus da/dN beschrieben werden kann, mit der zyklischen Rissöffnungsverschiebung $\Delta CTOD$ (englisch: *crack-tip opening displacement*) korreliert [42]:

$$\frac{da}{dN} = \beta \Delta CTOD^B. \quad (4.1)$$

β und B sind Werkstoffkennwerte. Diese Korrelation basiert auf der Vorstellung, dass die Rissspitze beim Öffnen des Risses durch das Abgleiten der Gitterebenen abstumpft, neue metallische Oberfläche entsteht und die Risslänge zunimmt. Die Oxidation durch den in der Umgebungsluft enthaltenen Sauerstoff verhindert ein Wiederverschweißen der so entstandenen Rissflanken, sobald sich der Riss wieder schließt [8] [43]. Die Rissspitzenöffnung spielt beim Ermüdungsrisswachstum eine entscheidende Rolle. Sie lässt sich durch die Auswertung der Verschiebungsfelder hinter der Rissspitze berechnen [11].

Die zyklische Rissöffnungsverschiebung kann über bruchmechanische Parameter abgeschätzt werden, wobei der Spannungsintensitätsfaktor K , das zyklische J -Integral und das C^* -Integral jeweils den elastischen, plastischen und den viskosen Anteil der Rissöffnung beschreiben. Für kurze halbkreisförmige Oberflächenrisse ergibt sich der Zusammenhang zur Bestimmung der Rissöffnungsverschiebung

$$\Delta CTOD = d_{N'} \cdot D_{TMF} \cdot a. \quad (4.2)$$

Hierbei beschreiben a die Risslänge und D_{TMF} den Schädigungsparameter. Dieser gibt Aufschluss über die schädigende Wirkung eines Belastungszyklus. Der Vorfaktor $d_{N'}$ hängt vom Verfestigungsverhalten des untersuchten Materials ab. $d_{N'}$ wird in [44] für unterschiedliche Werte des Ramberg-Osgood Verfestigungsexponenten N' , der in Abschnitt 4.2.2 eingeführt wird, ausgewertet. In [11] und [45] wird der Zusammenhang zwischen dem Verfestigungsverhalten und dem Vorfaktor $d_{N'}$ über ein Polynom dritter Ordnung beschrieben. Hierbei wird der Ramberg-Osgood Verfestigungsexponent für die Beschreibung des Verfestigungsverhaltens herangezogen. Im Rahmen dieser Arbeit wird $d_{N'} = 0.5$ gewählt und entspricht damit dem in [46], [47], [48] und in [49] abgeschätzten Wert. Dieser ergibt sich für einen Ramberg-Osgood Verfestigungsexponenten von $N' = 10$.

Die Schädigung ist abhängig von den im Werkstoff auftretenden Beanspruchungen so-

wie von seinen mechanischen Werkstoffeigenschaften, die durch Werkstoffkennwerte in den D_{TMF} -Schädigungsparameter eingehen. Für die im Abschnitt 2 beschriebenen Versuchsdaten aus einachsigen Belastungsversuchen, ergibt sich der Schädigungsparameter D_{TMF}

$$\begin{aligned}
 D_{TMF} &= \frac{Z_D}{\sigma_{cy}} \cdot F \\
 Z_D &= 1.45 \cdot \frac{\Delta\sigma_{\text{eff}}^2}{E} + \frac{2.4}{\sqrt{1+3 \cdot N'^{-1}}} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon^{\text{pl}} = Z_D^e + Z_D^{\text{pl}} \\
 F &= \left(1 + \alpha_{cr} \cdot e^{\frac{Q_{cr}}{R_{\text{gas}} \cdot T_{\text{ref}}}} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{cy}^{N_{cr}-2} \cdot \delta\sigma \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R_{\text{gas}} \cdot T}} dt \right)^{\frac{1}{N_{cr}}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

basierend auf der Annahme [50], dass sich zwischen der bruchmechanischen Lösung für elastisches Materialverhalten und der Lösung für vollplastisches Materialverhalten interpolieren lässt. Die F -Funktion beschreibt zusätzlich den zeitabhängigen Verformungsanteil der Rissöffnung. Für zeitunabhängiges, nicht viskoses Werkstoffverhalten nimmt sie den Wert $F = 1$ an und das Lebensdauermodell entspricht dem in [51] vorgeschlagenen Risswachstumsmodell mit dem Schädigungsparameter Z_D für LCF Belastungen bei Raumtemperatur. $\Delta\sigma$ entspricht der Spannungsschwingbreite und $\Delta\epsilon^{\text{pl}}$ der plastischen Dehnschwingbreite im Belastungszyklus. Sie sind durch die Zeitpunkte der Lastumkehr t_0 und t_1 definiert. t_0 und t_1 werden so im Belastungszyklus gewählt, dass die beiden Zeitpunkte zu einer maximalen Schädigung führen. $\delta\sigma$ entspricht der zu einem bestimmten Zeitpunkt t vorliegenden Spannungsschwingbreite bezogen auf den unteren Umkehrpunkt bei t_0 . T ist die Temperatur in Kelvin und T_{ref} eine sinnvoll frei wählbare Referenztemperatur, die zur Vermeidung von numerischen Rundungsfehlern bei der Integration eingeführt wird. Mittelspannungseffekte durch Riss schließen werden über die effektive Spannungsschwingbreite nach *Heitmann* [51, Seite 3603]

$$\Delta\sigma_{\text{eff}} = \frac{3.72}{(3 - R_\sigma)^{1.74}} \cdot \Delta\sigma \tag{4.4}$$

berücksichtigt. Sie hängt vom Verhältnis von minimaler zu maximaler Spannung im Zyklus, dem Spannungsverhältnis R_σ , ab.

Die Lösungen der linear elastischen Bruchmechanik führen unter Berücksichtigung der Geometriefaktoren Y eines halbkreisförmigen Oberflächenrisses [52, Seite 85] auf den Vorfaktor des ersten Terms im Z_D -Schädigungsparameter. Hierbei wird das J -Integral J^e für den ebenen Verzerrungszustand durch

$$\begin{aligned}
 \Delta J^e &= \frac{\Delta K^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) = Z_D^e \cdot a \\
 \Delta K &= Y \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \\
 Y &= 1.121 \cdot \frac{2}{\pi}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

[52, Seite 124] berechnet und später die effektive Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma_{\text{eff}}$ nach *Heitmann* für $\Delta\sigma$ eingesetzt. ΔK beschreibt die Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors. Die Querkontraktionszahl wird zu $\nu = 0.3$ gewählt.

Der Vorfaktor des zweiten Terms ergibt sich aus [53] und beschreibt den Einfluss des plastischen Verformungsanteils auf Z_D . Für den eindimensionalen Fall folgt für einen innenliegenden kreisförmigen Riss

$$\Delta J^{\text{pl}} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3 \cdot N'^{-1}}} \cdot \Delta \sigma \cdot \Delta \epsilon^{\text{pl}} \cdot a = Z_D^{\text{pl}} \cdot a. \quad (4.6)$$

Dieser wird mit dem Korrekturfaktor 1.121^2 für halbkreisförmige Oberflächenrisse multipliziert. Sowohl bei der elastischen als auch bei der plastischen Lösung des J -Integrals, besteht ein linearer Zusammenhang mit der Risslänge a .

Die mechanischen Werkstoffkennwerte, die in die Berechnung von D_{TMF} einfließen sind der Elastizitätsmodul (E-Modul) E , die zyklische Fließgrenze σ_{cy} und der zyklische Verfestigungsexponent N' . Diese Kennwerte stammen aus dem Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz, welches in Abschnitt 4.2 erläutert ist. Darüber hinaus gehen die Werkstoffkennwerte des Norton-Kriechmodells in die D_{TMF} -Formulierung ein. Dieses Modell ist in Abschnitt 4.3 beschrieben. Neben der Aktivierungsenergie für Kriechen Q_{cr} gehen der Spannungsexponent des Norton-Modells N_{cr} und ein Vorfaktor α_{cr} zur Beschreibung des Kriechens ein.

Da die Werkstoffkennwerte E , σ_{cy} und N' temperaturabhängig sind, wird bei nicht isothermer Versuchsführung der integrale Mittelwert [48] dieser Größen zur Berechnung von Z_D verwendet. Der integrale Mittelwert beispielsweise für den E-Modul E ergibt sich aus

$$E_{\text{mittel}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} E(T) dt. \quad (4.7)$$

In [49] wird anstatt des integralen Mittelwerts der arithmetische Mittelwert aus den im Belastungszyklus maximal auftretenden Werkstoffkennwerten genutzt. Die Integration des Risswachstumsgesetzes aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) von einer Anfangsrisslänge a_0 bis zu einer Risslänge zum Versagen a_f führt auf den Zusammenhang

$$N_f = A \cdot D_{TMF}^{-B}. \quad (4.8)$$

für die Zyklenzahl bis zum Versagen N_f . Der Kennwert A des Lebensdauermodells ist hierbei von der gewählten Anfangsrisslänge und der Risslänge bei Versagen sowie von dem Kennwert β abhängig:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\beta} \cdot \ln \left(\frac{a_f}{a_0} \right) \quad \text{für } B = 1 \\ A &= \frac{2^B}{\beta} \cdot \left(\frac{a_f^{1-B} - a_0^{1-B}}{1-B} \right) \quad \text{für } B \neq 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Anfangsrisslänge a_0 hängt typischerweise mit einer charakteristischen Länge der Mikrostruktur des Werkstoffs zusammen. Sie wird beispielsweise durch die Korngröße oder durch die Form der im Gusseisen vorliegenden Graphitstrukturen [49] beeinflusst. Während der Kennwert B den Zusammenhang zwischen dem D_{TMF} -Schädigungsparameter und der Lebensdauer werkstoffspezifisch beschreibt, werden im Kennwert A die mittleren individuellen Probeneigenschaften berücksichtigt. A und B sind anpassbare Kennwerte des Lebensdauer-

modells und können auf Basis von Versuchsdaten bestimmt werden.

4.2 Elastisch-plastische Werkstoffeigenschaften nach Ramberg-Osgood

In den Schädigungsparameter D_{TMF} gehen unter anderem die mechanischen Werkstoffeigenschaften ein. Um basierend auf dem mechanismusbasierten Lebensdauermodell die Zyklenzahl zum Versagen berechnen zu können, müssen die elastisch-plastischen Eigenschaften des Werkstoffs bekannt sein. Diese werden im D_{TMF} -Parameter durch den E-Modul, die zyklische Fließgrenze σ_{cy} und den zyklischen Verfestigungsexponenten N' abgebildet. Diese Werkstoffkennwerte werden im Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz genutzt, um einen eindeutigen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang verschiedener metallischer Werkstoffe unter monotoner Belastung zu beschreiben [54]. Für eine Anwendung des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes auf zyklische Belastungen werden die Spannungen und Dehnungen jeweils auf einen Umkehrpunkt der Spannungs-Dehnungs-Hysterese bezogen. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta\epsilon &= \delta\epsilon^e + \delta\epsilon^{pl} \\ \delta\epsilon &= \frac{\delta\sigma}{E} + 0.002 \left(\frac{\delta\sigma}{\sigma_{cy}} \right)^{N'} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Die elastischen Dehnungsanteile innerhalb eines Hystereseasts werden durch das linear-elastische Werkstoffverhalten beschrieben, das durch den E-Modul E festgelegt ist. Für die Beschreibung der plastischen Dehnungsanteile wird ein Potenzgesetz zugrunde gelegt. Es beschreibt die Verfestigung des Werkstoffs durch den zyklischen Verfestigungsexponenten N' und die zyklische Fließgrenze σ_{cy} . Die Beschreibung der plastischen Verformung über ein Potenzgesetz führt auf die Lösungen für die Rissspitzenfelder der elastisch-plastischen Bruchmechanik [55] [56] und ist somit der Grund für die Verwendung des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes im mechanismusbasierten Lebensdauermodell. σ_{cy} wird als diejenige Spannungsschwingbreite definiert, die in einem Zyklus zu einer plastischen Dehnung von $\delta\epsilon^{pl} = 0.2\%$ führt. In Abbildung 4.1 ist eine schematische Spannungs-Dehnungs-Kurve mit den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für die Auswertung des ansteigenden Hystereseasts eines zyklischen Versuchs dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz dehnungsgeführt formuliert. Für die Berechnung der Modellspannungen für eine vorgegebene Dehnung resultiert für $N' \neq 1$ ein nichtlinearer Zusammenhang, der mithilfe des in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Newton-Verfahrens gelöst wird.

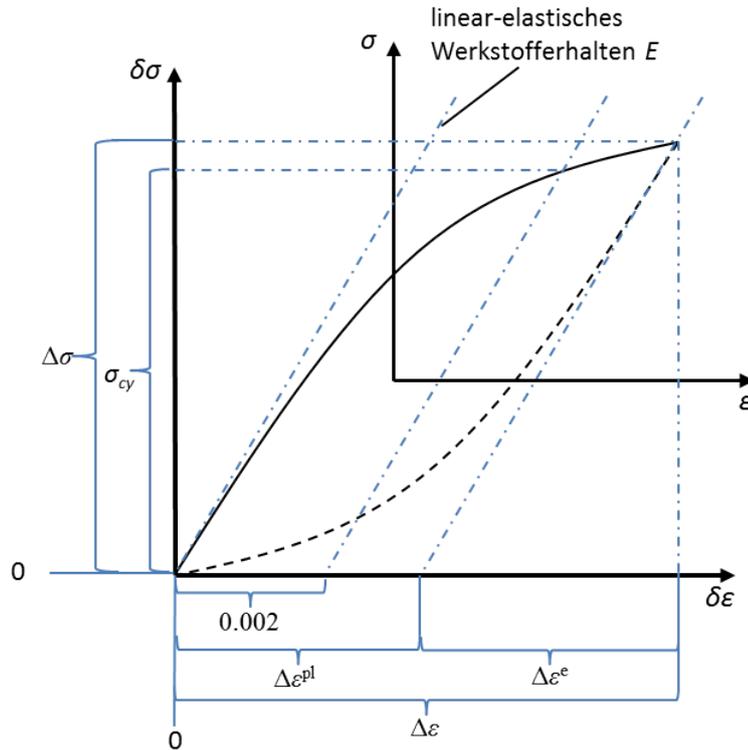


Abbildung 4.1: Schema des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes zur Verdeutlichung der Kennwerte E und σ_{cy} .

4.2.1 Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells

Um den Einfluss der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes auf die durch das D_{TMF} -Lebensdauermodell vorhergesagte Zyklenzahl bis zum Versagen N_f bestimmen zu können, wird eine Einflussfaktorenanalyse (EFA) durchgeführt. Neben der Quantifizierung der Kennwerteeinflüsse auf die Lebensdauer kann mit Hilfe der EFA möglicherweise auch eine Hierarchisierung der Werkstoffkennwerte erfolgen. Sollte es sich zeigen, dass einer der Kennwerte keinen oder nur einen sehr geringen Einfluss auf die durch das Lebensdauermodell vorhergesagte Lebensdauer besitzt, kann dieser in den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden. Kennwerte mit großem Einfluss auf die Lebensdauer finden gegebenenfalls bei einer späteren Auswertung mehr Beachtung.

Die EFA erfolgt dehnungsgeführt. Durch die Variation der einzelnen Ramberg-Osgood Kennwerte ausgehend von einem Masterkennwertsatz soll der Kennwerteeinfluss auf die vom Modell vorhergesagte Lebensdauer untersucht werden. Hierbei wird berücksichtigt, dass mit einer Änderung der Werkstoffeigenschaften durch eine Werkstoffkennwertvariation stets auch eine Änderung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens einher geht. Bei der Auswertung des Einflusses einer Kennwertvariation wird aus diesem Grund immer zunächst dehnungsgeführt eine synthetische Spannungs-Dehnungs-Kurve generiert. Aus ihr werden die Belastungsgrößen $\Delta\sigma_{eff}$, $\Delta\epsilon^{pl}$ und $\Delta\sigma$ ermittelt und der D_{TMF} -Schädigungsparameter mit den aktuell unterstellten Werkstoffkennwerten bestimmt. Die vorliegenden LCF Versuche beider untersuchten Werkstoffe weisen unterschiedliche Dehnschwingbreiten auf. Mit der Dehn-

schwingbreite ändert sich das Lastniveau im Versuch. Dies kann die Einflussfaktoren der einzelnen Ramberg-Osgood Kennwerte auf die vorhergesagte Lebensdauer beeinträchtigen und muss in der EFA berücksichtigt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die EFA mit den typischen Werkstoffeigenschaften bei unterschiedlichen Temperaturen der Nickelbasislegierung MAR M247 durchgeführt. Es werden unterschiedliche Lastniveaus, wie sie typischerweise bei einer LCF-Belastung dieses Werkstoffs auftreten, untersucht. Der Masterkennwertsatz wird temperaturabhängig gewählt, sodass für jede Prüftemperatur eine separate EFA erfolgt und Aussagen zu den Kennwerteinflüssen sowohl temperaturabhängig als auch in Abhängigkeit des Lastniveaus möglich werden.

Ausgehend von den Masterkennwerten erfolgt eine Variation der Werkstoffkennwerte um $\pm 50\%$. Die F-Funktion (siehe Gleichung (4.3)) wird im Rahmen der EFA der Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes zu $F = 1$ festgelegt. Die EFA wird basierend auf den in den Abschnitten 4.2.2 und 6.1.2 ermittelten Kennwerten der Nickelbasislegierung durchgeführt. Als Masterkennwerte werden für jede Prüftemperatur die 50 %-Werte der statistischen Verteilungshypothese genutzt, die die Kennwertstreuung des betreffenden Werkstoffkennwerts am besten beschreibt. Da für die Prüftemperaturen von 600°C und 850°C im Rahmen dieser Arbeit keine Ramberg-Osgood Kennwerte zur Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens bestimmt werden können (siehe Abschnitt 5.3), werden die Kennwerte aus [9] genutzt, beziehungsweise linear interpoliert. Die Kennwerte A und B des Lebensdauermodells werden im Abschnitt 7.1 bestimmt. Das Spannungsverhältnis wird zu $R_\sigma = -1$ festgelegt. Es lässt sich ein Faktor aus dem Verhältnis von der Zyklenzahl zum Versagen unter Verwendung der variierten Ramberg-Osgood Kennwerte zur Zyklenzahl zum Versagen unter Verwendung der Masterkennwerte bilden. Dieser wird für die Darstellung der Ergebnisse der EFA herangezogen.

Für die Nickelbasislegierung liegen LCF Versuchsdaten für die Prüftemperaturen 600°C , 850°C , 1000°C , 1050°C und 1150°C vor. Für jede dieser Prüftemperaturen wird das mittlere Werkstoffverhalten herangezogen, um die Masterkennwerte der EFA zu definieren. Das Belastungsniveau wird hierbei ausgehend von einer minimalen Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon_{\min} = 0.001$ in vier äquidistanten Schritten auf die maximale Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon_{\max} = 0.009$ erhöht. Die Abbildung 4.2 zeigt das Ergebnis der EFA bei der niedrigsten Prüftemperatur und der niedrigsten Belastung. In diesem Lastfall treten in der erzeugten Spannungs-Dehnungs-Antwort des Ramberg-Osgood Modells nur minimale plastische Verformungen auf. Der E-Modul E und die zyklische Fließgrenze σ_{cy} weisen deutlich größere Einflussfaktoren auf die vom Modell vorhergesagte Lebensdauer auf, als der Verfestigungsexponent N' . Wird das Belastungsniveau für diese Prüftemperatur auf $\Delta\epsilon_{\max}$ angehoben, nehmen die Einflüsse der Kennwertvariation auf die Lebensdauer zu (siehe Abbildung 4.3). Lediglich der Einfluss des Verfestigungsexponenten N' fällt auch bei höherer Belastung verhältnismäßig gering aus. Bei der maximalen Prüftemperatur der Nickelbasislegierung von 1150°C und minimalem Lastniveau ergeben sich die in Abbildung 4.4 dargestellten Ergebnisse. Diese EFA zeigt einen erheblich stärkeren Einfluss des Verfestigungsexponenten N' auf die Lebensdauer. Eine Vergrößerung des Lastniveaus auf eine Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.009$ führt bei maximaler Prüftemperatur zu einer Abnahme aller Einflussfaktoren (siehe Abbildung 4.5). Basierend

4.2. ELASTISCH-PLASTISCHE WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN NACH RAMBERG-OSGOOD

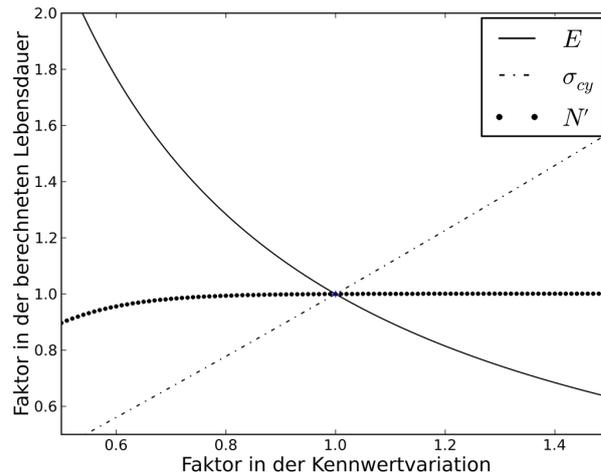


Abbildung 4.2: Ergebnisse der EFA bei 600 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.001$

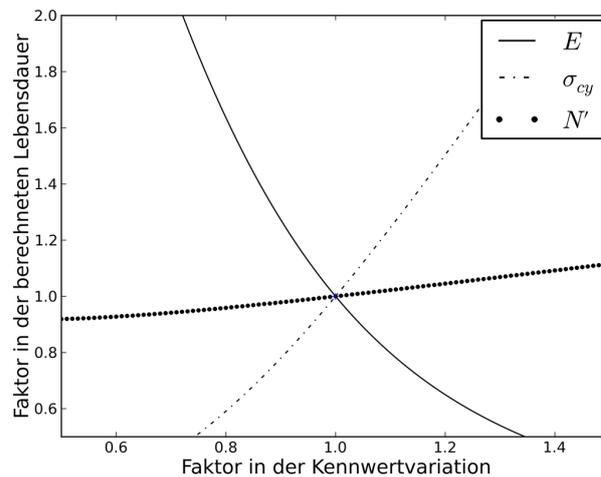


Abbildung 4.3: Ergebnisse der EFA bei 600 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.009$

auf den Ergebnissen der hier gezeigten EFA für die Nickelbasislegierung MAR M247 kann die Schlussfolgerung abgeleitet werden, dass die Höhe des Belastungsniveaus die Einflussfaktoren der einzelnen Werkstoffkennwerte sehr unterschiedlich beeinflussen kann. Weiterhin wird aus den Ergebnissen deutlich, dass der Verfestigungsexponent N' im Vergleich zum E-Modul E und zur zyklischen Fließgrenze σ_{cy} einen geringen Einfluss auf die Lebensdauer aufweist. Jedoch sind, wie in Abbildung 4.4 deutlich wird, Kennwertkombinationen denkbar, die zu einem Werkstoffverhalten führen, bei welchem auch dieser Werkstoffkennwert erheblichen Einfluss auf die vom Modell vorhergesagte Ermüdungslebensdauer besitzt.

Eine weitere EFA unter Verwendung der typischen Werkstoffkennwerte des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10 wird im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt. Es wird angenommen, dass sich die erläuterten Ergebnisse der durchgeführten EFA auf den austenitischen Stahl übertragen lassen und auch bei der Auswertung dieses Werkstoffs alle Ramberg-Osgood Kennwerte berücksichtigt werden müssen.

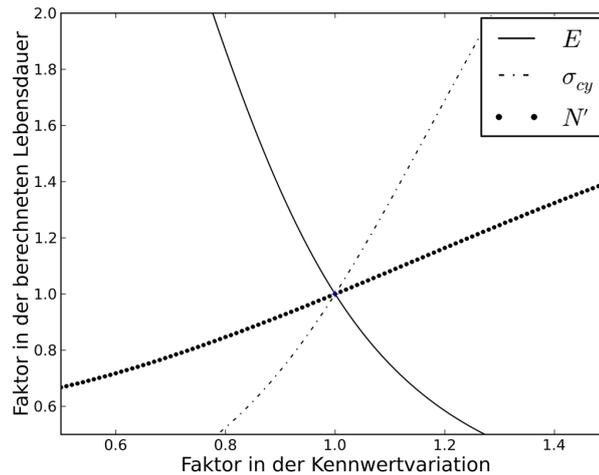


Abbildung 4.4: Ergebnisse der EFA bei 1150 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.001$

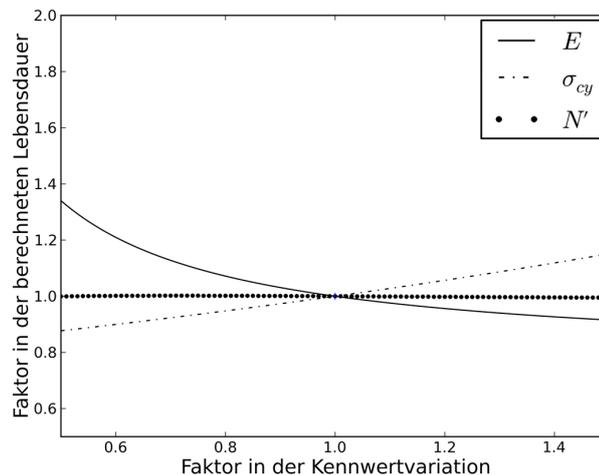


Abbildung 4.5: Ergebnisse der EFA bei 1150 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.009$

4.2.2 Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte aus Versuchsdaten

Die Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte erfolgt für beide Werkstoffe anhand der LCF Versuchsdaten. Um die individuellen Werkstoffeigenschaften für den untersuchten Versuchsdatensatz ermitteln zu können, sollen die Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte so bestimmt werden, dass die Abweichungen zwischen den im Versuch ermittelten Spannungen σ_{exp} und den von den Kennwerten abhängigen Modellspannungen σ_{mod} minimal werden. Da das Ramberg-Osgood-Verfestigungsgesetz Deformationsplastizität beschreibt und somit Spannung und Dehnung in einen eindeutigen geschichtsunabhängigen Zusammenhang bringt, ist es nicht sinnvoll dieses Modell zur Beschreibung eines gesamten LCF Versuchs heranzuziehen. Es eignet sich sehr gut zur Beschreibung monotoner Belastungen. Zur Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte werden deshalb lediglich die Spannungen und Dehnungen des

4.2. ELASTISCH-PLASTISCHE WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN NACH RAMBERG-OSGOOD

absteigenden Hystereseasts bei halber Lebensdauer $N_{f/2}$ untersucht. Diese Vorgehensweise wird auch in [9, Seite 53] gewählt, um die Ramberg-Osgood Kennwerte eines LCF Versuchs zu bestimmen. In [9] werden die Ramberg-Osgood Kennwerte jedoch anhand des ansteigenden Hystereseasts ermittelt. Im Rahmen dieser Arbeit ist der absteigende Hystereseast im Gegensatz zum ansteigenden Hystereseast für beide untersuchten Werkstoffe in allen vorliegenden Versuchen vollständig dokumentiert (siehe beispielsweise in Abbildung 2.4).

Ist für einen Versuch die Ermüdungslebensdauer aus den vorliegenden Versuchsdaten nicht ersichtlich, so wird der Zyklus zur Auswertung herangezogen, der der halben maximalen dokumentierten Zyklenzahl des Versuchs entspricht. Zug-Druck-Asymmetrien, die bei beiden untersuchten Werkstoffen in den vorliegenden Versuchen nicht ausgeprägt auftreten, werden vernachlässigt. Es wird die Fehlerquadratsumme (FQS)

$$FQS = \sum_{i=1}^n (\delta\sigma_{\text{exp},i} - \delta\sigma_{\text{mod},i}(\delta\epsilon_{\text{exp},i}))^2 \quad (4.11)$$

über die n Spannungs-Dehnungs-Datenpunkte des Hystereseasts formuliert. Ihre Minimierung stellt ein mehrdimensionales Optimierungsproblem dar, welches mithilfe des in Abschnitt 3.1.5 erläuterten Optimierungsalgorithmus gelöst wird. Da der Anteil an plastischer Dehnung innerhalb der vorliegenden Versuchsdaten stark unterschiedlich ausfällt und einige Versuche augenscheinlich keine oder nur eine sehr geringe plastische Verformung zeigen (siehe Abschnitt 2.2), wird zugunsten einer besseren Verwertbarkeit der Daten der E-Modul in einem ersten separaten Optimierungsschritt bestimmt. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme zugrunde, dass eine sinnvolle Ermittlung aller Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte ein gewisses Maß an Plastizität erfordert. Diese Annahme ist in Abschnitt 5 weiterführend erläutert. In einem weiteren Optimierungsschritt werden sodann die Werkstoffkennwerte zur Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens bestimmt.

Zur Anpassung des E-Moduls E wird zunächst werkstoff- und temperaturspezifisch ein elastischer Bereich $\Delta\epsilon_{\text{S}}^{\text{e}}$ abgeschätzt. Die Schätzwerte für diesen elastischen Bereich sind für den austenitischen Stahl in Tabelle 4.1 und für die Nickelbasislegierung in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Es wird angenommen, dass ausgehend vom Lastumkehrpunkt an dem $\delta\epsilon = 0$ gilt bis zum Erreichen von $\delta\epsilon = \Delta\epsilon_{\text{S}}^{\text{e}}$ reinelastisches Werkstoffverhalten auftritt. Das durch

$$\delta\epsilon = \frac{\delta\sigma}{E} \quad (4.12)$$

beschrieben werden kann. Für die Bestimmung des E-Moduls werden alle k Spannungs-Dehnungs-Datenpaare herangezogen, die innerhalb des Intervalls $\delta\epsilon \in [0; \Delta\epsilon_{\text{S}}^{\text{e}}]$ liegen. Die Minimierung der FQS für die E-Modul Bestimmung

$$FQS = \sum_{i=1}^k (\delta\sigma_{\text{exp},i} - \delta\sigma_{\text{mod},i}(\delta\epsilon_{\text{exp},i}|E))^2 \quad (4.13)$$

führt wiederum auf ein Optimierungsproblem, dessen Lösung der gesuchte E-Modul E^* ist. Für die Anpassung der Werkstoffkennwerte σ_{cy} und N' wird der bereits angepasste E-Modul

E^* verwendet und

$$FQS = \sum_{i=1}^n (\delta\sigma_{\text{exp},i} - \delta\sigma_{\text{mod},i}(\delta\epsilon_{\text{exp},i}|E^*, \sigma_{cy}, N'))^2 \quad (4.14)$$

zur Bestimmung der Kennwerte des nichtlinearen Werkstoffverhaltens minimiert. Der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang wird hierbei durch

$$\delta\epsilon = \frac{\delta\sigma}{E^*} + \left(\frac{\delta\sigma}{\sigma_{cy}}\right)^{N'} \quad (4.15)$$

beschrieben. Es werden alle n Spannungs-Dehnungs-Datenpaare des untersuchten Hysteresests genutzt. In Abbildung 4.6 ist beispielhaft ein Ergebnis der Werkstoffkennwertanpassung schematisch dargestellt. Der Abbildung lassen sich neben der im Versuch gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurve, die Spannungsantwort des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes, der abgeschätzte elastische Bereich $\Delta\epsilon_{\xi}^e$ und das linear elastische Werkstoffverhalten als Anpassungsergebnis für den E-Modul entnehmen.

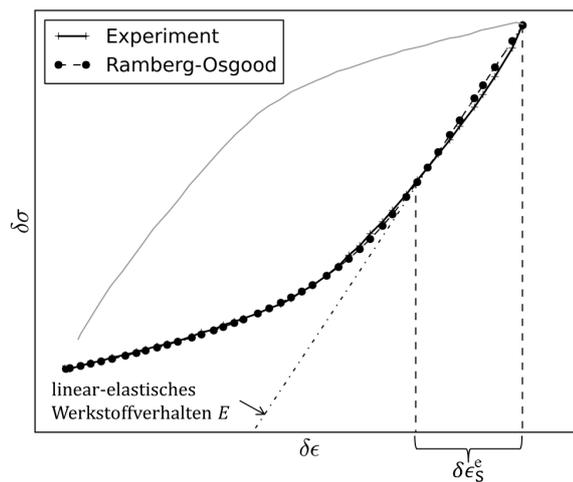


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung zur Anpassung des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes an experimentelle Daten

4.2.2.1 Abschätzung des Bereichs linear-elastischer Verformung nach der Lastumkehr für den austenitischen Stahl

In Tabelle 4.1 sind die für den austenitischen Stahl verwendeten abgeschätzten elastischen Bereiche $\Delta\epsilon_{\xi}^e$ temperaturspezifisch zusammengefasst.

Tabelle 4.1: Austenitischer Stahl, Abschätzungen der linearelastischen Dehnungsbereiche nach der Lastumkehr

T [°C]	Elastischer Bereich $\Delta\epsilon_{\xi}^e$
20 bis 240	0.0012
300 bis 450	0.0010
600	0.0008

4.2.2.2 Abschätzung des Bereichs linear elastischer Verformung nach der Lastumkehr für die Nickelbasislegierung

In Tabelle 4.2 sind die für die Nickelbasislegierung verwendeten abgeschätzten elastischen Bereiche $\Delta\epsilon_{\xi}^e$ temperaturspezifisch zusammengefasst. Mit zunehmender Temperatur nimmt der Bereich, in dem linear-elastisches Werkstoffverhalten unterstellt wird, ab.

Tabelle 4.2: MAR M247, Abschätzungen der linearelastischen Dehnungsbereiche nach der Lastumkehr

T [°C]	Elastischer Bereich $\Delta\epsilon_{\xi}^e$
600	0.0012
850	0.0010
1000	0.0010
1050	0.0010
1150	0.0007

4.3 Kriecheigenschaften nach Norton

Neben den elastisch-plastischen Werkstoffeigenschaften wird die Lebensdauer im D_{TMF} -Modell auch durch die zeitabhängigen Werkstoffeigenschaften bestimmt. Zeitabhängige Effekte wie beispielsweise Kriechen und Relaxation werden im D_{TMF} -Modell durch die in Gleichung (4.3) eingeführte F -Funktion

$$F = \left(1 + \alpha_{cr} \cdot e^{\frac{Q_{cr}}{R_{gas} \cdot T_{ref}}} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{cy}^{N_{cr}-2} \cdot \delta\sigma \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R_{gas} \cdot T}} dt \right)^{\frac{1}{N_{cr}}}$$

berücksichtigt. Sie beschreibt den Einfluss von Zeit, Spannung und Temperatur auf den Schädigungsparameter und nutzt zur Beschreibung des sekundären Kriechverhaltens die Werkstoffkennwerte des Norton-Kriechmodells.

Kriechen tritt bei erhöhter Temperatur auf und führt als thermisch aktivierter Vorgang zu zeitabhängigen plastischen Verformungen. Das Norton-Kriechmodell dient zur Beschreibung des sekundären Kriechens. Unter konstanter Beanspruchung stellt sich eine konstante Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ ein, die durch den Potenzansatz

$$\dot{\epsilon}^{cr} = A_{cr} \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R \cdot T}} \cdot \sigma^{N_{cr}} \quad (4.16)$$

beschrieben werden kann [13, Seite 393]. Der Nortonexponent N_{cr} dient zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Kriechspannung σ und der Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ bei konstanter Temperatur. A_{cr} wird als Vorfaktor des Kriechmodells bezeichnet und steht mit α_{cr} in folgendem Zusammenhang [11]

$$A_{cr} = \alpha_{cr} \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R \cdot T_{ref}}}. \quad (4.17)$$

Weiterhin werden in einem Arrhenius-Ansatz die Aktivierungsenergie für Kriechen Q_{cr} , eine physikalische Werkstoffeigenschaft, welche die Temperaturabhängigkeit der dem Kriechen zugrunde liegenden Diffusionsprozesse abbildet, und die universelle Gaskonstante $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ berücksichtigt. Das Norton-Kriechmodell besitzt somit drei anpassbare Kennwerte A_{cr} , Q_{cr} und N_{cr} , die dazu genutzt werden können, das zeit- und temperaturabhängige Werkstoffverhalten bestmöglich zu beschreiben. Hierbei ist es, anders als beim Ramberg-Osgood Modell nicht möglich das Modell individuell und gleichzeitig sinnvoll an einen einzelnen Kriechversuch anzupassen. Zur sinnvollen Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Kriecheigenschaften werden mehrere Versuche benötigt, die unterschiedliche Prüftemperaturen und unterschiedliche Lastniveaus aufweisen. Das Kriechmodell beschreibt sodann das mittlere Kriechverhalten des Werkstoffs und lässt keine Rückschlüsse auf die individuellen Probeneigenschaften zu (siehe Abschnitt 4.3.2).

Im folgenden Abschnitt wird eine EFA für die Kennwerte des Norton-Kriechmodells durchgeführt und in Abschnitt 4.3.2 anschließend erläutert, wie sich diese Kennwerte aus den vorliegenden Versuchsdaten ermitteln lassen.

4.3.1 Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Norton-Kriechmodells auf die Lebensdauervorhersage

Zur Bestimmung der Einflüsse der Werkstoffkennwerte des Norton-Kriechmodells auf die Lebensdauervorhersage für LCF Versuche durch das D_{TMF} -Modell wird auch für seine Werkstoffkennwerte eine EFA durchgeführt. Hierbei wird in einem ersten Schritt untersucht, wie sich die Zyklusdauer eines LCF Belastungszyklus auf den Wert der F -Funktion auswirkt. In einem weiteren Schritt werden die Kennwerteinflüsse auf die F -Funktion für eine typische LCF Belastung bestimmt.

Die F -Funktion kann als Schädigungsfaktor durch Kriechen interpretiert werden, der in die Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters eingeht (siehe Gleichung (4.3)). Im Rahmen dieser EFA werden die Einflussfaktoren nicht bezogen auf die vom D_{TMF} -Modell vorhergesagte Lebensdauer ermittelt. Stattdessen werden die Werte der F -Funktion ausgewertet. Sie gehen explizit als linearer Faktor in die Berechnung von D_{TMF} ein. Bei zeitunabhängigem Werkstoffverhalten, wie es beispielsweise bei tiefen Temperaturen auftritt, nimmt die F -Funktion den Wert $F = 1$ an und hat dementsprechend keinen Einfluss auf den D_{TMF} -Schädigungsparameter.

Da für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10 im Rahmen dieser Arbeit keine Kriechversuche vorliegen, wird die EFA des Norton-Kriechmodells mit den Werkstoffkennwerten der Nickelbasislegierung durchgeführt. Diese unterliegen der Vertraulichkeit. Die EFA für

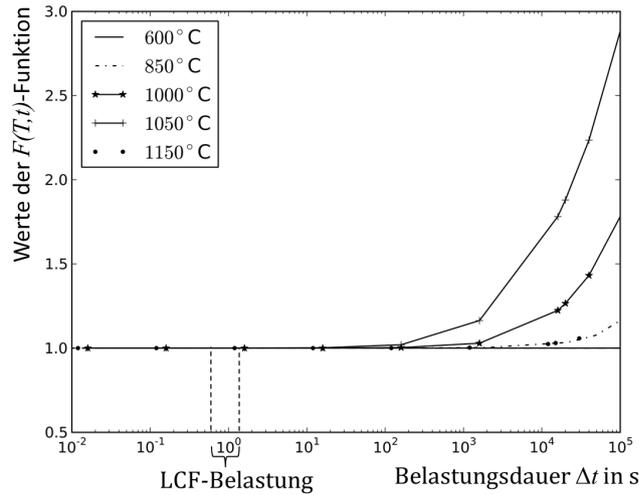


Abbildung 4.7: Ergebnis der EFA der Belastungsdauer auf die F -Funktion des D_{TMF} -Schädigungsparameters unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten.

die Kennwerte des Norton-Kriechmodells für Nickelbasislegierung MAR M247 wird auf Basis der in Abschnitt 4.3.1 ermittelten Werkstoffkennwerte des Norton-Kriechmodells schematisch erläutert. Zur Bestimmung von $\delta\sigma$ werden die mittleren Ramberg-Osgood Kennwerte aus dem Abschnitt 6.1.2 genutzt.

Im ersten Teil der EFA wird untersucht, welchen Einfluss die Dauer eines Belastungszyklus auf die F -Funktion hat. Hierzu werden die mittleren Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Modells und die in Abschnitt 4.3.2 angepassten Kennwerte des Norton-Kriechmodells genutzt. In diesem Teil der EFA wird keine Kennwertvariation durchgeführt. Es wird lediglich die Belastungsdauer eines Zyklus Δt zwischen $0.01 \text{ s} \leq \Delta t \leq 10^5 \text{ s}$ schrittweise verändert. Für jede Belastungsdauer wird eine temperaturspezifische Auswertung der F -Funktion durchgeführt. Hierbei wird die Belastungsgröße $\delta\sigma$ aus der Modellantwort des Ramberg-Osgood Modells verwendet. Diese wird unter Annahme einer für die LCF Versuche bei den unterschiedlichen Temperaturen typischen Dehnschwingbreite berechnet. Die Ergebnisse dieser Studie sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Werte der F -Funktion fallen in den für eine LCF Belastung typischen Belastungsdauern für alle in dieser Arbeit untersuchten Prüftemperaturen klein aus und entsprechen näherungsweise dem Wert $F \approx 1$. Für die in den vorliegenden LCF Versuchsdaten der Nickelbasislegierung beträgt die längste Zyklusdauer ungefähr $\Delta t \approx 4 \text{ s}$. Für diese Belastungsdauer nimmt die F -Funktion maximal den Wert $F \approx 1.001$ an. Bei LCF Belastung hat die Kriechschädigung damit nur einen sehr geringen Anteil an der Schädigung. Im zweiten Teil der EFA wird der Einfluss einer Kennwertvariation der Kennwerte des Norton-Kriechmodells auf die F -Funktion untersucht. Aus der Abbildung 4.7 geht hervor, dass eine Prüftemperatur von 1050 °C zu der größten Kriechschädigung im Vergleich mit anderen Prüftemperaturen führt. Aus diesem Grund werden für diesen Teil der EFA die mittleren Ramberg-Osgood Kennwerte bei dieser Prüftemperatur aus Abschnitt 4.2.1 genutzt. Mit der für die LCF Versuche der Nickelbasislegierung typischen Dehnrates von $\dot{\epsilon} = 0.003 \text{ s}^{-1}$, werden synthetische Spannungs-Dehnungs-Hysteresen berechnet und die F -Funktion ausge-

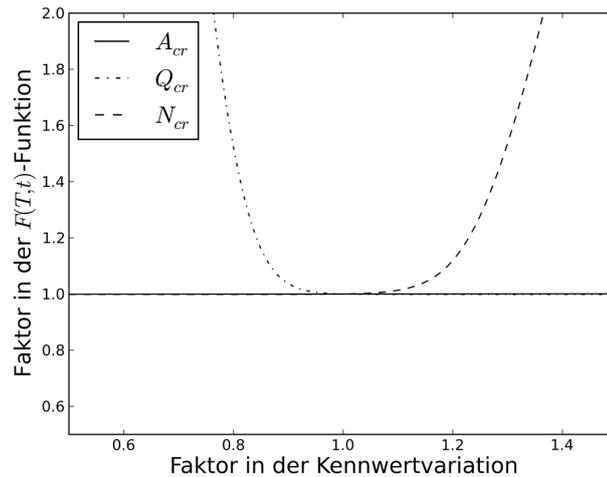


Abbildung 4.8: Ergebnis der EFA der Kennwerte des Norton-Kriechmodells auf die F -Funktion des D_{TMF} -Schädigungsparameters

wertet. Hierbei werden die Kennwerte A_{cr} , Q_{cr} und N_{cr} jeweils einzeln um $\pm 50\%$ ausgehend von ihrem Masterwert (siehe Abschnitt 4.3.2) variiert. Die Belastungsdauer Δt wird zu einem für die LCF-Versuche typischen Wert von $\Delta t = 4\text{ s}$ gewählt, sodass sich die EFA auf für LCF typische Belastungssituationen bei 1050 °C bezieht. Die gewählte Belastungsdauer für einen Zyklus und die festgelegten Dehnraten führen zu einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.006$. Die Abbildung 4.8 zeigt die relative Änderung des Wertes der F -Funktion über den Kennwertvariationen. Der Faktor in der F -Funktion wird bezogen auf den unter Verwendung der Masterkennwerte ermittelten Wert von F dargestellt.

Der Vorfaktor des Norton-Kriechmodells hat nahezu keinen Einfluss auf die für die F -Funktion berechneten Werte. Die Einflussfaktoren von Q_{cr} und N_{cr} fallen erheblich größer aus. Während für Q_{cr} eine Verringerung des Masterkennwerts um circa 20% zu einem Einflussfaktor von zwei führt, muss der Kennwert N_{cr} um rund 30% vergrößert werden für den selben Effekt in der F -Funktion. Die vergleichsweise hohe Sensitivität der F -Funktion auf diese beiden Kennwerte kann darauf zurückgeführt werden, dass sie das zeit- und temperaturabhängige Verhalten durch ihren exponentiellen Einfluss deutlich stärker beeinflussen als A_{cr} .

4.3.2 Bestimmung der Norton-Kennwerte aus Kriechversuchen

Im Rahmen dieser Arbeit wird das sekundäre Kriechverhalten der untersuchten Nickelbasislegierung mithilfe des Norton-Kriechmodells beschrieben. Für den austenitischen Stahl liegen keine Kriechversuche vor. Durch den Potenzansatz (siehe Gleichung (4.16))

$$\dot{\epsilon}_{cr} = A_{cr} \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R \cdot T}} \cdot \sigma^{N_{cr}}$$

stellt dieses Modell einen Zusammenhang zwischen der sekundären Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}_{cr}$ und dem durch die konstante Kriechspannung σ gegebenen Spannungsniveau her. Die Kennwerte A_{cr} , Q_{cr} und N_{cr} werden durch den gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus (siehe

Abschnitt 3.1.5)) so bestimmt, dass die vorliegenden n Kriechversuche bestmöglich durch das Kriechmodell beschrieben werden. Anders als das Ramberg-Osgood Modell wird das Norton-Kriechmodell nicht herangezogen um das individuelle Kriechverhalten einer individuellen Werkstoffprobe zu charakterisieren. Es dient vielmehr zur Beschreibung der Kriecheigenschaften eines untersuchten Werkstoffs in einem weiten Temperatur- und Belastungsbereich. Für eine sinnvolle Anpassung des Modells müssen Kriechversuche bei unterschiedlichen Temperaturen und unterschiedlichen Lastniveaus ausgewertet werden. Hierzu wird die FQS als

$$FQS = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\dot{\epsilon}_{\text{exp},i}^{\text{cr}} - \dot{\epsilon}_{\text{mod},i}^{\text{cr}}\right)^2}{\left(\dot{\epsilon}_{\text{exp},i}^{\text{cr}}\right)^2} \quad (4.18)$$

formuliert. Da die experimentell ermittelten Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}_{\text{exp},i}^{\text{cr}}$ und die vom Norton-Kriechmodell vorhergesagten Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}_{\text{mod},i}^{\text{cr}}$ im Vergleich aller vorliegenden Versuche einen Wertebereich umfassen, der sich auf mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, ist es nicht sinnvoll eine FQS wie in Gleichung (4.11) zu nutzen. Die Fehlerquadrate der einzelnen Summanden liefern Beiträge zur FQS, die ebenfalls mehrere Zehnerpotenzen auseinander liegen und dementsprechend zu einem Anpassungsergebnis führen, das vor allem die Experimente mit hohen Kriechdehnraten gut beschreibt. Durch die Verwendung des relativen Fehlers in der FQS, lassen sich die Kriechdehnraten auf den experimentellen Wert bezogen, gewichtet berücksichtigen [14]. In Abbildung 4.9 ist das Ergebnis der Kennwertanpassung des Norton-Kriechmodells an die vorliegenden Daten aus Kriechversuchen abgebildet. Die angepassten Norton-Werkstoffkennwerte A_{cr}^* , Q_{cr}^* und N_{cr}^* führen auf eine optimierte Beschreibung der Versuchsdaten. Die durch das angepasste Kriech-Modell berechneten Werte für $\dot{\epsilon}_{\text{mod},i}^{\text{cr}}$ weichen vereinzelt deutlich von den experimentell ermittelten Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}_{\text{exp},i}^{\text{cr}}$ ab.

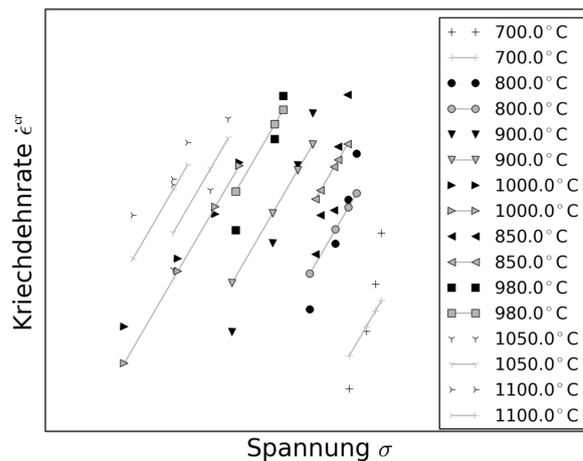


Abbildung 4.9: Ergebnis der Kennwertanpassung des Norton-Kriechmodells (verbundene Symbole) an experimentelle Daten. Verlauf der Kriechdehnrates über der Spannung σ in doppelt-logarithmischer Auftragung.

5. Robustheit der Ramberg-Osgood Kennwerte

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes durch die Minimierung einer Fehlerquadratfunktion bestimmt (siehe Gleichung (4.11)). Hierbei wird der Unterschied zwischen den im Versuch gemessenen experimentellen Spannungswerten und den durch das Modell berechneten Spannungen durch die Anpassung eines oder mehrerer Werkstoffkennwerte minimiert. Diese Methodik führt zu der bestmöglichen Beschreibung des Werkstoffverhaltens durch das Modell und hat sich bereits in vergangenen Forschungsarbeiten als zielführend erwiesen (siehe in [17, Seiten 2269-2283], [57, Seiten 409-414], [58, Seiten 413-420], [59, Seiten 451-479] und [60, Seiten 337-345]). Die iterative Bestimmung der Werkstoffkennwerte basierend auf dieser Methodik kann jedoch zu fehlerbehafteten Anpassungsergebnissen führen. Sie treten auf, wenn einer oder mehrere der anzupassenden Kennwerte innerhalb des Optimierungsprozesses den Einfluss auf die zu minimierende Fehlerquadratfunktion verlieren (siehe in [57, Seiten 409-414], [59, Seiten 451-479] und [60, Seiten 337-345]). Die FQS ist in diesem Fall nicht mehr sensitiv auf eine Kennwertvariation. Die Gradienten der betroffenen Kennwerte gehen gegen null, sodass eine objektive Bestimmung nicht mehr möglich ist. Eine weitere Folge des Mangels an Sensitivität ist, dass der Einfluss von Störgrößen wie beispielsweise dem Messwerttrauschen oder der numerischen Unschärfe zunimmt. Außerdem führt ein Mangel an Sensitivität dazu, dass die Startwerte der Optimierung das Anpassungsergebnis beeinflussen. Es ist nicht sichergestellt, dass ein durch das gradientenbasierte Optimierungsverfahren ermittelter Kennwert objektiv und eindeutig anhand der im Versuch gemessenen Spannungs-Dehnungs-Werte bestimmt werden kann.

Im Hinblick auf die statistische Beschreibung der Streuung von Werkstoffeigenschaften, stellt die Bewertung der angepassten Werkstoffkennwerte einen zentralen Aspekt dieser Arbeit dar. Werden Kennwerte innerhalb einer gradientenbasierten Optimierung aufgrund von Störeinflüssen verfälscht, so beschreiben ihre Streuungseigenschaften nicht mehr die tatsächliche Streuung der Werkstoffeigenschaften, sondern die Streuung der Gesamtmethodik, die für ihre Anpassung genutzt wird. Eine adäquate statistische Beschreibung der Streuungseigenschaften der tatsächlichen Einflussgrößen ist nötig, um im Rahmen einer probabilistischen Auswertung Streuungseinflüsse auf die Lebensdauer untersuchen zu können [5]. Sie ist nur dann sichergestellt, wenn die ermittelten Werkstoffkennwerte, die zur Formulierung von statistischen Verteilungshypothesen genutzt werden, robust sind und nicht durch Störgrößen

verfälscht werden. Hierzu muss das bei einer vorgegebenen Versuchsführung messbare Werkstoffverhalten alle im Werkstoffmodell enthaltenen Verfestigungsverhalten in ausreichendem Maße ansprechen. Beispielsweise können für einen Werkstoff nur dann robuste Kennwerte zur Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens bestimmt werden, wenn dieser zum einen nichtlineare Verformung zeigt und zum anderen die Versuchsführung so gewählt ist, dass das nichtlineare Verformungsverhalten durch die Versuchsführung angesprochen wird.

Während die Anpassung des E-Moduls für jeden der vorliegenden LCF Versuche an die Datenpunkte nach dem Lastumkehrpunkt robust erfolgen kann, wird für die Anpassung der Kennwerte, die das nichtlineare Werkstoffverhalten im Ramberg-Osgood Modell abbilden, nichtlineare Verformung in den Versuchsdaten benötigt. Die zur Verfügung stehenden LCF Versuche weisen jedoch nicht alle in gleichem Maße plastische Verformungsanteile auf, weshalb ein Bewertungskriterium für die Robustheit der angepassten Kennwerte benötigt wird.

In den folgenden Abschnitten ist die Entwicklung eines Robustheitskriteriums erläutert. Es wird zunächst eine analytische Lösung vorgestellt. In einem weiteren Schritt wird sodann ein empirischer Weg zur Bestimmung der Robustheit der ermittelten Kennwerte aufgezeigt, der im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde.

5.1 Analytischer Ansatz zur Untersuchung der Robustheit

Die Untersuchung der Robustheit der angepassten Ramberg-Osgood Kennwerte σ_{cy} und N' erfolgt zunächst durch eine analytische Auswertung. Bereits in [57, Seiten 409-414] und [59] werden die Eigenwerte der Hesse-Matrix am Lösungspunkt eines Optimierungsproblems dazu genutzt, um die Stabilität von angepassten Werkstoffkennwerten zu bewerten. In [58] und [60] werden ebenfalls basierend auf der Hesse-Matrix Aussagen zu Korrelationen zwischen den angepassten Werkstoffkennwerten eines komplexen Werkstoffmodells vorgestellt. Hierbei wird die Kovarianzmatrix $\mathbf{K}_{\mathbf{p}}$ der Modellkennwerte am Lösungspunkt berechnet. Diese entspricht unter bestimmten Voraussetzungen gerade der inversen Hesse-Matrix am Lösungspunkt der Kennwertoptimierung. In [61] und in [62] wird der Zusammenhang

$$\mathbf{K}_{\mathbf{p}}^{-1} = \nabla \nabla \chi_{\mathbf{p}}^2 \quad (5.1)$$

hergeleitet. Hierbei gilt die Annahme, dass das angepasste Werkstoffmodell messfehlerfreie experimentelle Daten perfekt beschreibt und somit die Fehlerquadratsumme am Lösungspunkt verschwindet. Weiterhin wird angenommen, dass das Messwerttrauschen, das in experimentellen Daten auftritt, eine Normalverteilung aufweist und zu einer zufälligen Streuung der Messwerte um die messfehlerfreie Lösung führt. Ist die relative Standardabweichung des experimentellen Messfehlers s_{exp} bekannt, lässt sich der Messfehler s_i eines beliebigen experimentellen Messwerts $\sigma_{\text{exp},i}$ durch

$$s_i = \sigma_{\text{exp},i} \cdot s_{\text{exp}} \quad (5.2)$$

abschätzen. Sämtliche zwischen dem Modell und den experimentellen Werten auftretenden Differenzen werden auf das Rauschen der Messwerte zurückgeführt. Bezieht man die auf-

tretenden Fehlerquadrate auf den Messfehler ergibt sich die FQS mit einem eingeführten Vorfaktor von $\frac{1}{2}$ zu

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\sigma(\mathbf{p})_{\text{mod},i} - \sigma_{\text{exp},i})^2}{s_i^2} \quad (5.3)$$

einer χ^2 -verteilten Zufallsgröße, die gemäß einer χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden verteilt ist. n beschreibt die Anzahl der Datenpunkte des Experiments. Diese Formulierung der Fehlerquadratsumme lässt sich auch als

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{exp}})^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{exp}}) \quad (5.4)$$

schreiben, sodass \mathbf{K}_{σ}^{-1} die inverse Kovarianzmatrix bezogen auf die experimentellen Spannungswerte darstellt. Unter der Annahme, dass die gemessenen Spannungswerte unkorreliert sind, ergibt sich diese Matrix zu einer Diagonalmatrix, die die Information über die Unsicherheit der gemessenen Spannungswerte $\sigma_{\text{exp},i}$ beinhaltet.

Besteht zwischen den Werkstoffkennwerten \mathbf{p} und den Modellspannungen $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}$ in unmittelbarer Nähe der Lösung \mathbf{p}^* des Optimierungsproblems ein linearer Zusammenhang, so lassen sich die Modellspannungen in Lösungsnähe durch

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}^*)_{\text{mod}} + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) \quad (5.5)$$

ausdrücken. Wird dieser lineare Zusammenhang unter der Annahme in die FQS eingesetzt, dass das Modell am Lösungspunkt exakt den experimentellen Werten entspricht, resultiert

$$\chi^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^T \cdot \left(\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*} \right)^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{-1} \cdot \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*). \quad (5.6)$$

Die inverse Kovarianzmatrix \mathbf{K}_{σ}^{-1} enthält die Unsicherheiten der gemessenen Spannungen. Analog dazu beinhaltet die Kovarianzmatrix der Kennwerte $\mathbf{K}_{\mathbf{p}^*}$ die Information über die Unsicherheit innerhalb der Kennwerte \mathbf{p}^* am Lösungspunkt. Sie kann aus

$$\mathbf{K}_{\mathbf{p}^*}^{-1} = \left(\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*} \right)^T \cdot \mathbf{K}_{\sigma}^{-1} \cdot \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})_{\text{mod}}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^*} \quad (5.7)$$

berechnet werden, sodass sich schließlich

$$\nabla \nabla \chi^2(\mathbf{p})^* = \nabla \nabla \left(\frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^T \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{p}^*}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) \right) = \mathbf{K}_{\mathbf{p}^*}^{-1} \quad (5.8)$$

zeigen lässt. Die inverse Hesse-Matrix entspricht demnach gerade der Kovarianzmatrix der Kennwerte. Diese beinhaltet auf ihrer Diagonalen die Unsicherheiten der Kennwerte infolge von Messwerttauschen in Form der Kennwert-Varianzen. Für die relative Standardabweichung, die im Rahmen dieser Arbeit als Bewertungskriterium für die Kennwertunsicherheit herangezogen wird, gilt

$$s_{\text{rel},p,i} = \frac{\sqrt{K_{\mathbf{p},ii}}}{p_i^*}. \quad (5.9)$$

Die analytische Auswertung der Hesse-Matrix am Lösungspunkt erlaubt somit die Bewertung der Kennwertrobustheit durch die Bestimmung der relativen Standardabweichung der Kennwerte $s_{\text{rel},p,i}$ für ein bekanntes experimentell begründetes Messwertrauschen s_{exp} . Die Robustheitsanalyse für angepasste Modellkennwerte kann basierend auf dieser Methodik für jeden Versuch erfolgen. Allerdings können wegen der Forderung der exakten Modellbeschreibung und der messfehlerfreien experimentellen Daten nur synthetische Daten herangezogen werden, um diese analytische Methodik fehlerfrei und entsprechend der getroffenen Annahmen anwenden zu können. Doch selbst bei dieser Form der Anwendung ist nicht sichergestellt, dass zwischen den Kennwerten \mathbf{p} und den Modellspannungen $\sigma(\mathbf{p})_{\text{mod}}$ in unmittelbarer Lösungsnahe ein linearer Zusammenhang besteht.

5.2 Empirischer Ansatz zur Untersuchung der Robustheit

Bei einer analytischen Untersuchung der Robustheit der angepassten Kennwerte eines Werkstoffmodells wird die Annahme getroffen, dass die Kennwerte linear in die Modellspannungen eingehen (siehe Gleichung (5.5)). Sie ist für die Kennwerte σ_{cy} und N' im Allgemeinen nicht erfüllt und führt dazu, dass dem Ergebnis der analytischen Methodik nicht bedingungslos vertraut werden kann. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse einer empirischen Studie zur Untersuchung der Kennwertrobustheit erläutert. Sie hat zwei Ziele. Zum einen soll aus ihr ein empirisches Bewertungskriterium resultieren, dass zum Vergleich mit dem analytischen Ergebnis herangezogen werden kann und zum anderen soll sie den gesamten physikalisch sinnvollen Kennwertraum für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Werkstoffe betrachten. Als physikalisch sinnvoll wird jeweils der Kennwertbereich angesehen, in dem die angepassten Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells bei der Auswertung der LCF Versuche erwartet werden. Für jeden Werkstoff wird der Kennwertraum individuell definiert und durch eine frei wählbare Anzahl an Stützstellen äquidistant unterteilt. Für jede dieser Stützstellen wird untersucht, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, dass eine gradientenbasierte Kennwertanpassung robust erfolgen kann. Abschließend wird eine Aussage zur Robustheit der angepassten Kennwerte in diesem definierten Kennwertraum möglich.

Im Folgenden wird die grundlegende Vorgehensweise bei der empirischen Untersuchung zur Kennwertrobustheit an einer beliebigen Stützstelle im Kennwertraum erläutert. Alle werkstoffspezifischen Annahmen wie beispielsweise die Größe des untersuchten Kennwertraums und das gewählte Robustheitsniveau sind in den folgenden Unterabschnitten zusammengefasst.

Die empirische Untersuchung der Kennwertrobustheit umfasst eine Studie, in der basierend auf einer Vielzahl von Anpassungen unter der Verwendung des gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus der Einfluss des Messwertrauschens auf die Unsicherheit der angepassten Kennwerte untersucht werden soll. Zunächst wird ein Robustheitsniveau R_{niv} gewählt. Es gilt für den gesamten untersuchten Kennwertraum und wird später werkstoffspezifisch festgelegt. Es gibt an, wie groß die Unsicherheit innerhalb der angepassten Kennwerte σ_{cy} und N' maximal ausfallen darf, sodass diese noch als robust bewertet werden.

Wie bereits bei der analytischen Methodik wird auch bei der empirischen Robustheitsstudie die relative Standardabweichung s_{rel} der angepassten Werkstoffkennwerte als Maß für

die Unsicherheit in der Kennwertanpassung herangezogen. Um den Einfluss der Messwertstreuung auf die angepassten Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells bewerten zu können, werden in einem ersten Schritt synthetische Spannungs-Dehnungs-Daten generiert. Hierzu werden die Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells der untersuchten Stützstelle genutzt. Sie werden als Masterkennwerte \mathbf{p}_M bezeichnet. Analog zu den im Rahmen dieser Arbeit vorliegenden experimentellen Daten aus LCF Versuchen, wird ein Hystereseast durch 41 Spannungs-Dehnungs-Datenpaare diskretisiert. Die mechanische Dehnungsschwingbreite $\Delta\epsilon$ wird basierend auf einem festgelegten anfänglichem Belastungsniveau $B_{niv,start}$ berechnet. Es beschreibt das Verhältnis von der Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma$ zur zyklischen Fließgrenze σ_{cy} , gemäß

$$B_{niv} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{cy,M}}, \quad (5.10)$$

sodass die Dehnschwingbreite direkt aus dem in Gleichung (4.10) vorgestellten Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz folgt und die Umkehrpunkte des Hystereseast bekannt sind. Die Verteilung der restlichen Dehnungsstützstellen erfolgt äquidistant und die Spannungsantwort wird dehnungsgeführt bestimmt. Sie wird im Folgenden als Masterantwort bezeichnet. Diese nicht verrauschte, messfehlerfreie Spannungs-Dehnungs-Kurve dient als Grundlage für die empirische Untersuchung. Ihr wird nun ein synthetisches Messwerttrauschen überlagert. Hierzu wird ein Zufallszahlengenerator (siehe Abschnitt 3.4.1) genutzt. Jeder Spannungswert der Masterantwort $\sigma_{M,i}$ wird gemäß

$$\sigma_{scat,i} = \sigma_{M,i} + \sigma_{M,i} \cdot Z(f_N(x|0, s_{exp}))_i \quad (5.11)$$

verrauscht. $\sigma_{scat,i}$ bezeichnet den verrauschten Spannungswert. $Z(f_N(x|0, s_{exp}))$ ist eine Zufallszahl, die aus einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_N = 0$ und der Standardabweichung $\sigma_N = s_{exp}$ stammt. An die so verrauschten Spannungs-Dehnungs-Daten, die als synthetische Versuchsdaten interpretiert werden, werden nun in einer Optimierung die Kennwerte σ_{cy} und N' des Ramberg-Osgood Modells angepasst. Als Startwerte der Optimierung werden die Masterkennwerte genutzt. Die Prozedur bestehend aus dem Verrauschen der Masterantwort und der Reidentifikation der Masterkennwerte wird 200-mal wiederholt. Die Anpassungsergebnisse werden in zwei Stichproben zusammengefasst: $\mathbf{S}_{\sigma_{cy}}$ enthält die 200 angepassten Werte für die zyklische Fließgrenze und $\mathbf{S}_{N'}$ die des zyklischen Ramberg-Osgood Verfestigungsexponenten. Für beide Stichproben können nun der arithmetische Mittelwert (siehe Gleichung (3.16)) und die Stichprobenvarianz (siehe Gleichung (3.17)) bestimmt werden. Aus den Stichprobenvarianzen lassen sich die Standardabweichungen $s_{\sigma_{cy}}$ und $s_{N'}$ der Stichproben abschätzen (siehe Gleichung 3.18). Sie werden als Maß für die Bewertung der Robustheit der angepassten Kennwerte genutzt. Gilt für diese beiden relativen Standardabweichungen

$$\max [s_{rel,\sigma_{cy}}, s_{rel,N'}] > R_{niv} \quad (5.12)$$

so erfüllen die Kennwerte die Robustheitsanforderungen nicht. Liegen die Werte für $s_{\sigma_{cy}}$ und $s_{N'}$ unterhalb der maximal zulässigen Unsicherheit R_{niv} , so gelten die angepassten Kennwerte als robust.

Um ermitteln zu können, wie groß der Anteil an plastischer Verformung $\delta\epsilon_{crit}^{pl}$ in den syntheti-

schen Versuchsdaten mindestens sein muss, um die Anforderungen für robuste Kennwerte zu erfüllen, wird nun das Belastungsniveau B_{niv} verändert. Dieser Veränderung liegt die Annahme zugrunde, dass eine Steigerung der Belastung die plastischen Verformungsanteile erhöht und somit eine robustere Anpassung der Kennwerte ermöglicht. Die neue Dehnungsschwingbreite ergibt sich in Abhängigkeit der Bewertung der angepassten Kennwerte gemäß

$$\begin{aligned} B_{niv,neu} &= B_{niv,alt} - \Delta B_{niv} \text{ bei robusten Kennwerten} \\ B_{niv,neu} &= B_{niv,alt} + \Delta B_{niv} \text{ bei nicht robusten Kennwerten.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Das Inkrement der schrittweisen Änderung des Belastungsniveaus ΔB_{niv} wird im Rahmen dieser Arbeit zu $\Delta B_{niv} = 0.01$ gewählt. Für das modifizierte Belastungsniveau $B_{niv,neu}$ resultiert eine modifizierte Dehnungsschwingbreite $\Delta \epsilon_{neu}$ unter deren Verwendung erneut die Standardabweichungen der angepassten Kennwerte bestimmt und ihre Robustheit mithilfe des Robustheitsniveaus bewertet werden kann. Das Belastungsniveau wird solange verändert, bis sich die Bewertung der Robustheit gegenüber der anfänglichen Bewertung ändert. Ist dies der Fall liegen ein $\Delta \epsilon_{alt}$ und ein $\Delta \epsilon_{neu}$ vor, die zu unterschiedlicher Bewertung der angepassten Kennwerte führen. Durch lineare Interpolation zwischen den Ergebnissen für die Kennwertunsicherheit kann das kritische Belastungsniveau $B_{niv,crit}$ ermittelt werden, das gerade die Anpassung von robusten Kennwerten erlaubt. Dieses kritische Belastungsniveau führt auf die kritische plastische Dehnung

$$\delta \epsilon_{crit}^{pl} = 0.002 \cdot (B_{niv,crit})^{N'_M} \quad (5.14)$$

die für die robuste Anpassung der Kennwerte mindestens in den Versuchsdaten vorliegen muss. $\delta \sigma_{crit}$ ist die dazugehörige kritische Spannungsschwingbreite.

Die aufwendige Durchführung der empirischen Robustheitsstudie erfolgt vollständig automatisiert, basierend auf einem Algorithmus, der in PYTHON implementiert wird. Um die Robustheitsbewertung im gesamten physikalisch sinnvollen Kennwertraum zu erlauben, werden insgesamt mehr als drei Millionen Optimierungsaufrufe für jedes untersuchte Robustheitsniveau benötigt.

In den folgenden Tabellen sind die Grenzen der im Rahmen dieser Arbeit festgelegten Kennwerträume für die beiden untersuchten Werkstoffe gezeigt.

5.2.1 Kennwertraum des austenitischen Stahls

In Tabelle 5.1 sind die Grenzen des physikalisch sinnvollen Kennwertraums für die Robustheitsstudie des austenitischen Stahls zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells, die den physikalisch sinnvollen Kennwertraum bei der Robustheitsstudie des austenitischen Stahls begrenzen.

Kennwert	Minimum	Maximum	Anzahl der Stützstellen
E	140000 MPa	220000 MPa	9
σ_{cy}	300 MPa	750	10
N'	4.5	8.5	9

5.2.2 Kennwertraum der Nickelbasislegierung

In Tabelle 5.2 sind die Grenzen des physikalisch sinnvollen Grenzen des Kennwertraums für die Robustheitsstudie der Nickelbasislegierung zusammengefasst.

Tabelle 5.2: Kennwerte des Ramberg-Osgood Models, die den physikalisch sinnvollen Kennwertraum bei der Robustheitsstudie der Nickelbasislegierung MAR M247 begrenzen.

Kennwert	Minimum	Maximum	Anzahl der Stützstellen
E	90000 MPa	220000 MPa	7
σ_{cy}	90 MPa	2000 MPa	20
N'	1.8	20	25

5.3 Ergebnisse der Robustheitstudien

Neben der analytischen Herleitung einer Bewertungsgrundlage für die Robustheit (siehe Abschnitt 5.1) der durch die gradientenbasierte Optimierung angepassten Werkstoffkennwerte, wird im Abschnitt 5.2 eine Methodik zur empirischen Herleitung eines gleichwertigen Kriteriums vorgestellt. Gegenüber der analytischen Herangehensweise hat sie den Nachteil, dass der Berechnungsaufwand deutlich höher ausfällt. Demgegenüber bringt sie jedoch den Vorteil mit sich, dass nicht zwingend erforderlich ist, dass die Werkstoffkennwerte in unmittelbarer Nähe der Lösung des Optimierungsproblems linear in die Modellspannungen eingehen (siehe Gleichung (5.5)). In diesem Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse der beiden Herangehensweisen verglichen. Anschließend wird gezeigt, wie sich die Wahl des experimentellen Messfehlers und sich ändernde Werkstoffkennwerte auf die Robustheit der Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells auswirken.

In der Abbildung 5.1 sind der Verlauf der Kennwertunsicherheiten $s_{\sigma_{cy}}$ und $s_{N'}$ über dem Belastungsniveau B_{niv} aufgetragen. Es werden die Ergebnisse der empirischen Auswertung der Kennwertunsicherheit den Ergebnissen der analytischen Auswertung gegenübergestellt. Als Masterkennwerte werden hierbei die in Tabelle 5.3 zusammengefassten Werkstoffkennwerte genutzt. Der experimentelle Messfehler wird zu $s_{exp} = 0.003$ abgeschätzt. Mit zunehmendem Belastungsniveau B_{niv} nimmt die Unsicherheit in den angepassten Kennwerten zusehends ab. Die Ergebnisse der empirischen Studie führen in nahezu allen Fällen zu etwas größeren Werten in der Kennwertunsicherheit. Dies gilt sowohl bei der Auswertung der relativen Standardabweichung der zyklischen Fließgrenze $s_{\sigma_{cy}}$ als auch bei der Auswertung der relativen Standardabweichung des zyklischen Verfestigungsexponenten $s_{N'}$. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit, das empirisch bestimmte Mindestmaß an plastischer Dehnung $\delta\epsilon_{crit}^{pl}$ zur Bewertung der Kennwertrobustheit verwendet. Es liefert gegenüber der analytischen

Tabelle 5.3: Der für die Auswertung genutzte Masterkennwertsatz

E	σ_{cy}	N'
150000 MPa	500 MPa	5.0

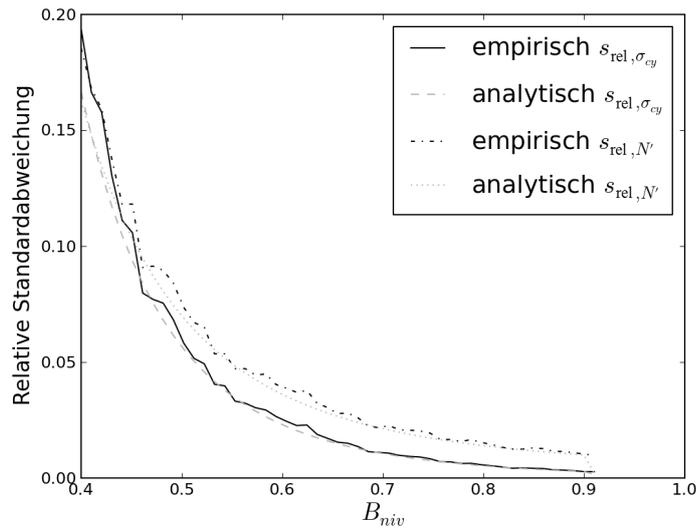


Abbildung 5.1: Vergleich der Ergebnisse der empirischen und der analytischen Robustheitsstudien. Darstellung der relativen Standardabweichung in den Werkstoffkennwerten s_{rel} über dem Belastungsniveau B_{niv}

Lösung konservativere Werte.

Die Abbildung 5.2 stellt den Einfluss des experimentellen Messfehlers s_{exp} auf die kritische plastische Dehnung $\delta\epsilon_{crit}^{pl}$ dar.

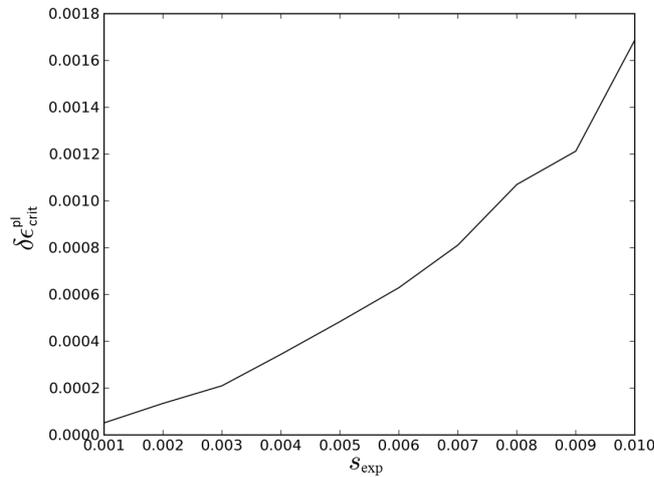


Abbildung 5.2: $\delta\epsilon_{crit}^{pl}$ über dem experimentellen Messfehler s_{exp} .

Die gezeigten Ergebnisse resultieren unter Verwendung der Masterkennwerte aus Tabelle 5.3. Das Robustheitsniveau wird zu $R_{niv} = 0.03$ festgelegt und der experimentelle Messfehler in einem Bereich von $0.001 \leq s_{exp} \leq 0.01$ variiert.

Nimmt der experimentelle Messfehler zu, steigt auch die kritische plastische Dehnung an. Um eine robuste Kennwertermittlung bei möglichst geringem Anteil an plastischer Verformung zu erlauben, ist ein möglichst kleiner experimenteller Messfehler notwendig.

Weitere Ergebnisse der Robustheitsstudie sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Sie zeigt den Ein-

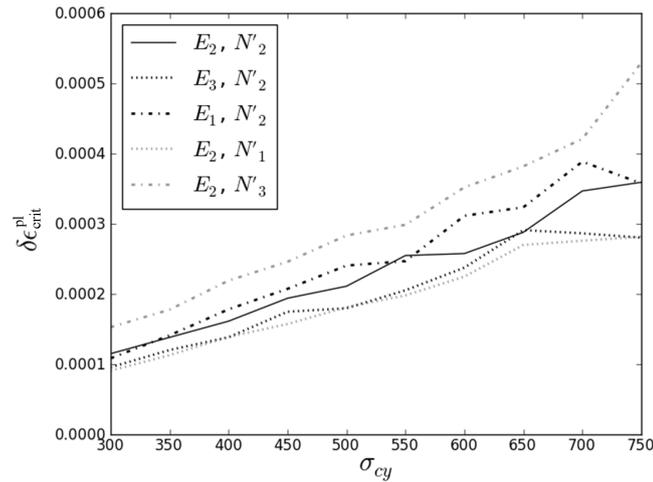


Abbildung 5.3: $\delta\epsilon_{\text{crit}}^{\text{pl}}$ über der zyklischen Fließgrenze σ_{cy} .

Tabelle 5.4: Übersicht über die verwendeten Ramberg-Osgood Kennwerte zur Bestimmung des Kennwerteeinflusses auf die kritische plastische Dehnung.

E_1	E_2	E_3	N'_1	N'_2	N'_3
140000 MPa	150000 MPa	170000 MPa	4.5	5	6

fluss der Ramberg-Osgood Kennwerte auf die kritische plastische Dehnung. Hierzu wird der Verlauf der kritischen plastischen Dehnung über der zyklischen Fließgrenze für unterschiedliche E-Moduln und Verfestigungsexponenten aufgetragen. Die verwendeten Kennwerte sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

Es wird deutlich, dass die Werkstoffkennwerte und damit das ihnen zugrundeliegende Werkstoffverhalten selbst einen Einfluss auf die Robustheitsbewertung haben. Es ist nicht möglich ein allgemeingültiges konstantes Maß an kritischer plastischer Dehnung zu definieren, um angepasste Werkstoffkennwerte eines beliebigen Werkstoffs zu bewerten. Es müssen stattdessen stets die Werkstoffkennwerte und das dadurch beschriebene Werkstoffverhalten in der Bewertung Berücksichtigung finden. Mit zunehmender zyklischer Fließgrenze σ_{cy} und zunehmendem Verfestigungsexponenten N' sowie mit abnehmendem E-Modul E nimmt die kritische plastische Dehnung tendenziell zu.

In der Abbildung 5.4 sind beispielhaft die Spannungs-Dehnungs-Hysteresen zweier LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 bei halber Lebensdauer gezeigt. Die beiden Hysteresen werden so verschoben, dass ihre oberen Umkehrpunkte aufeinander liegen. Obwohl die Beschreibung der im Versuch gemessenen Spannungen für beide Versuche durch das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz gut gelingt, werden lediglich die Kennwerte des LCF Versuch 1 als robust bewertet.

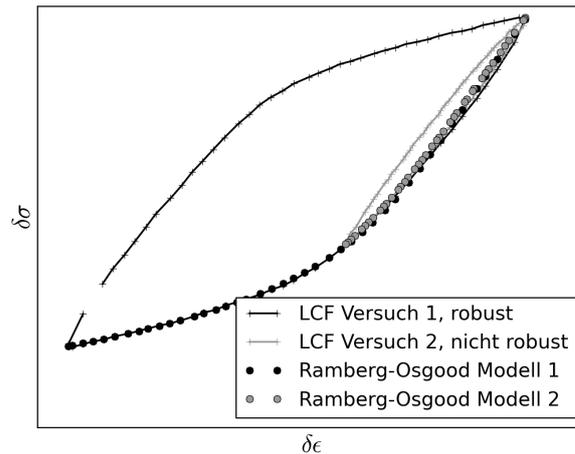


Abbildung 5.4: Vergleich zweier Spannungs-Dehnungs-Hysteresen der Nickelbasislegierung. Darstellung der Versuchsdaten und der daran angepassten Ramberg-Osgood Spannungsantwort.

5.4 Robustheitsbewertung der Ramberg-Osgood Kennwerte

Anhand der formulierten Robustheitskriterien und der Ergebnisse der Robustheitsstudien, können die basierend auf den LCF Versuchsdaten ermittelten Ramberg-Osgood Kennwerte hinsichtlich ihrer Robustheit bewertet werden. Ziel dieser Bewertung ist es, die Werkstoffkennwerte in robuste und nicht robuste Ergebnisse zu unterteilen. Durch diese Unterteilung wird festgelegt, ob die Werkstoffkennwerte eines Versuchs für die anschließende statistische Auswertung der Kennwertstreuung berücksichtigt werden.

Die Bewertung erfolgt werkstoffspezifisch, basierend auf den im Abschnitt 5.2.1 eingeführten Diskretisierungen der Kennwerträume. Das für die individuelle Bewertung der angepassten Werkstoffkennwerte eines LCF Versuchs benötigte Maß an kritischer plastischer Dehnung $\delta\epsilon_{\text{crit}}^{\text{pl}}$ wird durch lineare Interpolation zwischen den Stützstellen im Kennwertraum ermittelt. In den folgenden Abschnitten werden die durch die Robustheitsbewertung erzielten Ergebnisse werkstoffspezifisch vorgestellt.

5.4.1 Werkstoffkennwerte des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse der Kennwertanpassung für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10 zusammengetragen. In den Tabellen 5.5 bis 5.7 sind die angepassten Ramberg-Osgood Kennwerte sowie die Randbedingungen der zugrundeliegenden LCF Versuche zusammengefasst.

Anhand dieser Werkstoffkennwerte kann eine Robustheitsuntersuchung durchgeführt werden. Die Versuche mit der Bezeichnung aRF_RT_d13 und LCF_R=-1_240_08_P157 werden bei der Robustheitsbewertung nicht berücksichtigt, da ihre Versuchsdaten fehlerbehaftet sind. In beiden Versuchen treten in der Hysterese bei halber Lebensdauer Anomalien in den gemessenen Spannungen auf. Die Spannungsantwort des Werkstoffs fällt stark asymmetrisch aus. Beträgsmäßig sehr große Druckspannungen stehen relativ kleinen Zugspannungen gegenüber.

KAPITEL 5. ROBUSTHEIT DER RAMBERG-OSGOOD
KENNWERTE

Tabelle 5.5: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes anhand der Versuchsdaten des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 20 °C.

Bezeichnung	T	E	σ_{cy}	N'	R_σ	$\Delta\sigma$	$\Delta\epsilon$	R_ϵ
CLCF_WF1RT_d1_051	20	182110	581.5	5.85	-1.01	709.5	0.0104	-1.00
aRF_RT_d04	20	183891	576.0	6.90	-1.01	725.2	0.0156	-1.00
aRF_RT_d05	20	173778	586.3	7.38	-1.01	733.1	0.0155	-1.00
aRF_RT_d06	20	175585	596.4	7.23	-1.01	743.6	0.0156	-1.01
aRF_RT_d07	20	175191	513.2	6.81	-1.00	606.6	0.0102	-1.00
aRF_RT_d08	20	186050	509.7	6.90	-1.01	602.7	0.0102	-1.00
aRF_RT_d09	20	184434	504.9	6.98	-1.01	596.4	0.0102	-1.00
aRF_RT_d11	20	172878	448.9	6.71	-1.00	509.9	0.0072	-1.00
#aRF_RT_d13	20	145274	240.0	14.58	-3.77	266.9	0.0052	-0.99
aRF_RT_d14	20	181107	442.6	6.48	-1.01	471.1	0.0053	-1.02
aRF_RT_d15	20	176106	434.1	6.06	-1.04	458.3	0.0052	-1.00
aRF_RT_d17	20	185126	491.5	6.13	-0.93	435.1	0.0032	-0.99
aRF_RT_d19	20	182089	501.0	5.94	-1.01	436.6	0.0032	-1.00
aRF_RT_d20	20	176644	465.4	6.51	-1.00	529.2	0.0072	-1.00
aRF_RT_d21	20	183619	536.4	5.77	-0.96	428.1	0.0028	-1.00
LCF_R=-1_20_04_P71	20	188469	477.4	6.70	-1.01	547.6	0.0080	-1.01
LCF_R=-1_20_06_P65	20	196550	545.8	7.08	-1.02	663.2	0.0120	-1.00
LCF_R=-1_20_10_P70	20	197950	706.6	6.81	-1.03	929.8	0.0200	-1.00
CLCF_RT_0.25-0.5_AGM_D_5	20	211127	540.0	6.32	-1.02	657.2	0.0101	-1.00
CLCF_RT_0.35-0.75_AGM_D_6	20	212267	599.3	7.24	-1.02	758.0	0.0150	-1.00

5.4. ROBUSTHEITSBEWERTUNG DER RAMBERG-OSGOOD KENNWERTE

Tabelle 5.6: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes anhand der Versuchsdaten des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 100 °C, 180 °C, 240 °C, 300 °C, 350 °C, 450 °C und 600 °C.

Bezeichnung	T	E	σ_{cy}	N'	R_σ	$\Delta\sigma$	$\Delta\epsilon$	R_ϵ
CLCF_WF1RT_d2_078	100	192491	689.8	6.41	-1.01	887.6	0.0158	-1.00
CLCF_WF11_d3_051	100	179639	472.2	6.88	-1.02	564.9	0.0104	-1.01
CLCF_WF11_d4_078	100	178293	526.2	7.81	-1.02	652.7	0.0158	-1.00
CLCF_100_0.25-0.5_AGM_D_7	100	194446	489.3	6.95	-1.02	581.1	0.0100	-0.97
CLCF_180_0.125-0.35_AGM_D_9	180	202309	405.8	5.40	-1.00	475.2	0.0071	-1.00
LCF_R=-1_240_04_P156	240	180447	361.0	5.92	-0.94	425.4	0.0080	-1.00
#LCF_R=-1_240_08_P157	240	101539	91.8	20.00	-3.20	97.9	0.0160	-1.00
CLCF_WF13_d8_078	300	170027	460.7	6.87	-1.03	590.4	0.0158	-0.98
LCF_R=-1_300_04_P153	300	171644	325.5	6.03	-1.02	384.9	0.0080	-1.00
LCF_R=-1_300_06_P130	300	169421	392.4	6.40	-0.88	487.9	0.0120	-1.00
LCF_R=-1_300_08_P151	300	167386	434.3	7.16	-0.94	554.2	0.0160	-1.00
LCF_R=-1_300_10_P56	300	166733	474.4	7.83	-1.03	604.1	0.0200	-1.00
LCF_R=-1_300_12_P132	300	146249	484.1	8.40	-0.93	623.1	0.0240	-1.00
aRH_35_d01	350	147108	384.6	6.47	-1.02	496.0	0.0157	-1.00
aRH_35_d02	350	158850	331.7	6.11	-1.02	407.9	0.0102	-1.00
aRH_35_d03	350	156705	337.6	6.26	-1.03	386.4	0.0072	-0.99
aRH_35_d04	350	164716	316.1	5.91	-1.01	341.7	0.0052	-1.00
aRH_35_d05	350	161537	349.7	5.71	-1.03	325.5	0.0032	-1.01
aRH_35_d06	350	170573	358.3	5.73	-1.03	315.6	0.0028	-1.02
WF1_CLCF_d11	450	147118	382.6	5.07	-1.01	452.5	0.0081	-1.03
WF1_CLCF_d10	600	142914	414.9	5.88	-1.01	472.9	0.0082	-2.28

Aus den Versuchsdaten geht nicht hervor, ob die Proben dieser Versuche zu diesem Zeitpunkt bereits Risse aufweisen. Die aus der Kennwertoptimierung resultierenden Werkstoffkennwerte weisen deutliche Abweichungen zu den Kennwerten der restlichen LCF Versuche bei vergleichbaren Prüftemperaturen auf. Die angepassten Werkstoffkennwerte aller anderen LCF Versuche werden im Rahmen der Robustheitsuntersuchung geprüft. Der E-Modul E , die zyklische Fließgrenze σ_{cy} sowie die Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma$ werden in MPa angegeben. Die Temperatur T besitzt die Einheit °C. Der Verfestigungsexponent des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes ist dimensionslos. Weitere dimensionslose Größen, die die Randbedingungen eines zyklischen Versuchs beschreiben sind durch das Spannungsverhältnis R_σ , das Dehnungsverhältnis R_ϵ und die Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon$ in den Tabellen gegeben.

KAPITEL 5. ROBUSTHEIT DER RAMBERG-OSGOOD
KENNWERTE

Tabelle 5.7: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes anhand der Versuchsdaten des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 200 °C.

Bezeichnung	T	E	σ_{cy}	N'	R_σ	$\Delta\sigma$	$\Delta\epsilon$	R_ϵ
CLCF_WF12_d5_051	200	174996	427.8	6.29	-1.02	518.4	0.0103	-1.01
CLCF_WF12_d6_078	200	177382	473.8	6.76	-1.03	605.3	0.0157	-1.00
aRF_200_d01	200	148152	429.9	6.88	-1.02	545.0	0.0156	-1.00
aRF_200_d02	200	151014	437.6	7.09	-1.01	548.2	0.0156	-1.00
aRF_200_d03	200	145169	433.8	7.17	-1.01	549.5	0.0155	-1.00
aRF_200_d05	200	164962	386.1	6.11	-1.02	467.3	0.0102	-1.00
aRF_200_d06	200	162612	376.2	6.05	-1.02	462.3	0.0102	-1.00
aRF_200_d07	200	163511	327.9	5.70	-1.01	384.4	0.0072	-1.00
aRF_200_d08	200	163325	336.1	5.69	-1.01	389.3	0.0072	-1.00
aRF_200_d09	200	162683	327.7	5.63	-1.01	383.7	0.0072	-1.00
aRF_200_d10	200	168638	324.5	5.71	-1.01	353.1	0.0052	-1.00
aRF_200_d11	200	171711	333.5	5.75	-1.01	362.4	0.0052	-0.98
aRF_200_d12	200	170389	327.8	5.54	-1.01	358.5	0.0052	-1.00
aRF_200_d13	200	174216	344.8	5.56	-0.97	323.7	0.0032	-1.00
aRF_200_d14	200	172636	346.1	5.47	-0.97	322.2	0.0032	-1.01
aRF_200_d15	200	177737	396.2	4.99	-0.87	315.6	0.0024	-1.00
aRF_200_d16	200	173961	367.1	5.62	-0.91	322.7	0.0028	-0.96
aRH_2_d01	200	143207	431.2	6.87	-1.01	547.1	0.0156	-1.00
aRH_2_d02	200	162135	402.7	6.08	-1.02	491.7	0.0102	-1.00
aRH_2_d03	200	170112	378.0	5.54	-1.01	435.5	0.0072	-1.00
aRH_2_d04	200	171749	345.6	5.37	-1.02	375.8	0.0052	-1.00
aRH_2_d05	200	173471	375.4	5.25	-1.03	343.9	0.0032	-0.99
aRH_2_d06	200	175433	387.5	5.03	-1.03	334.2	0.0028	-1.01

5.4.1.1 Robustheitsbewertung der Werkstoffkennwerte von X6 CrNiNb 18-10

Die Robustheitsbewertung der Werkstoffkennwerte des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 erfolgt bei einem Robustheitsniveau von $R_{niv} = 0.01$. Der Tabelle 5.8 ist zu entnehmen, wie viele Versuche bei den unterschiedlichen Prüftemperaturen zur Bestimmung von robusten Werkstoffkennwerten dienen.

Aus den Tabellen 5.9 bis 5.11 sind die Ergebnisse der Robustheitsbewertung für die einzelnen zyklischen Versuche zu entnehmen. Sie sind in der letzten Spalte aufgetragen. Der Wert 0 weist auf nicht robuste Kennwerte hin. Der Wert 1 zeigt auf, dass die Unsicherheit bei der Kennwertbestimmung infolge von Messwerttrauschen das geforderte Robustheitsniveau unterschreitet und die Kennwerte robust sind.

In den Tabellen 5.9 bis 5.11 sind die Informationen über die Prüftemperatur T in °C, den D_{TMF} -Schädigungsparameter, den Z_D -Schädigungsparameter, die plastische Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon^{pl}$ in der Hysterese bei halber Lebensdauer $N_{f/2}$ sowie über die im Versuch ermittelte Zyklenzahl zum Versagen N_f dokumentiert. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die angegebene Lebensdauer stets an der letzten in den Versuchsdaten angegebenen Belastungshysterese orientiert. Beim Vergleich mit den in [7] beschriebenen Werten für N_f kommt es zu meist geringen Abweichungen. Die Auswirkungen dieser Vorgehensweise auf die Risslänge

5.4. ROBUSTHEITSBEWERTUNG DER RAMBERG-OSGOOD KENNWERTE

beim Versagen a_f werden in Abschnitt 9.3 diskutiert.

Tabelle 5.8: Ergebnisse der Robustheitsbewertung der basierend auf den Versuchen des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 angepassten Kennwertsätze.

T [°C]	Anzahl LCF Ver- suche	davon robust be- wertet	Anzahl Langläufer	davon robust be- wertet
20	15	15	5	1
100	4	4	-	-
180	1	1	-	-
200	17	17	6	5
240	2	1	-	-
300	6	6	-	-
350	4	4	2	2
450	1	1	-	-
650	1	1	-	-

Tabelle 5.9: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Robustheitsuntersuchung der Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 20 °C.

Bezeichnung	T	D_{TMF}	Z_D	$\delta\epsilon^{pl}$	N_f	$N_{f/2}$	Robustheits- bewertung
CLCF_WF1- RT_d1.051	20	0.0155	9.04	0.0062	7943	3960	1
aRF_RT_d04	20	0.0297	17.13	0.0112	3410	1800	1
aRF_RT_d05	20	0.0291	17.07	0.0111	2759	1500	1
aRF_RT_d06	20	0.0291	17.34	0.0110	3171	1800	1
aRF_RT_d07	20	0.0162	8.32	0.0065	10034	5000	1
aRF_RT_d08	20	0.0166	8.48	0.0067	6965	3500	1
aRF_RT_d09	20	0.0167	8.43	0.0067	7918	4000	1
aRF_RT_d11	20	0.0097	4.34	0.0041	29973	15000	1
#aRF_RT_d13	20	0.0068	1.64	0.0030	161038	80000	0
aRF_RT_d14	20	0.0057	2.54	0.0026	85262	40000	1
aRF_RT_d15	20	0.0056	2.43	0.0025	161963	80000	1
aRF_RT_d17	20	0.0017	0.86	0.0008	631113	300000	0
aRF_RT_d19	20	0.0017	0.83	0.0008	917477	450000	0
aRF_RT_d20	20	0.0097	4.51	0.0041	28078	15000	1
aRF_RT_d21	20	0.0010	0.55	0.0005	3000000	1500000	0
LCF_R=- 1_20.04_P71	20	0.0120	5.71	0.0050	10005	5005	1
LCF_R=- 1_20.06_P65	20	0.0212	11.55	0.0083	3162	1585	1
LCF_R=- 1_20.10_P70	20	0.0404	28.58	0.0147	1039	525	1
CLCF_RT.0.25- 0.5_AGM.D.5	20	0.0163	8.79	0.0066	6473	3234	1
CLCF_RT.0.35- 0.75_AGM.D.6	20	0.0284	17.00	0.0108	2372	1182	1

KAPITEL 5. ROBUSTHEIT DER RAMBERG-OSGOOD
KENNWERTE

Tabelle 5.10: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Robustheitsuntersuchung der Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 100 °C, 180 °C, 240 °C, 300 °C, 350 °C, 450 °C und 600 °C.

Bezeichnung	T	D_{TMF}	Z_D	$\delta\epsilon^{Pl}$	N_f	$N_{f/2}$	Robustheits- bewertung
CLCF_WF1-RT_d2.078	100	0.0285	19.63	0.0107	2235	1122	1
CLCF_WF-11_d3_051	100	0.0171	8.10	0.0069	10000	5012	1
CLCF_WF-11_d4.078	100	0.0299	15.71	0.0114	2891	1449	1
CLCF_100.0.25-0.5_AGM_D_7	100	0.0171	8.35	0.0069	7633	3818	1
CLCF_180.0.125-0.35_AGM_D_9	180	0.0106	4.29	0.0045	22969	11485	1
LCF_R=-1.240.04_P156	240	0.0130	4.71	0.0054	10004	5007	1
#LCF_R=-1.240.08_P157	240	0.0346	3.18	0.0140	10000	5012	0
CLCF_WF-13_d8.078	300	0.0314	14.46	0.0118	3981	1995	1
LCF_R=-1.300.04_P153	300	0.0133	4.33	0.0055	10004	5007	1
LCF_R=-1.300.06_P130	300	0.0227	8.92	0.0088	6310	3162	1
LCF_R=-1.300.08_P151	300	0.0325	14.13	0.0123	1998	999	1
LCF_R=-1.300.10_P56	300	0.0428	20.32	0.0158	1259	631	1
LCF_R=-1.300.12_P132	300	0.0523	25.33	0.0191	1000	501	1
aRH_35_d01	350	0.0321	12.34	0.0120	2455	1200	1
aRH_35_d02	350	0.0188	6.23	0.0075	12537	6000	1
aRH_35_d03	350	0.0109	3.67	0.0046	24453	12000	1
aRH_35_d04	350	0.0067	2.13	0.0030	45693	20000	1
aRH_35_d05	350	0.0024	0.83	0.0012	192177	100000	1
aRH_35_d06	350	0.0018	0.65	0.0009	297319	150000	1
WF1_CLCF_d11	450	0.0111	4.24	0.0047	14975	7485	1
WF1_CLCF_d10	600	0.0107	4.45	0.0045	7943	3981	1

Tabelle 5.11: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Robustheitsuntersuchung der Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei 200 °C.

Bezeichnung	T	D_{TMF}	Z_D	$\delta\epsilon^{pl}$	N_f	$N_{f/2}$	Robustheitsbewertung
CLCF_WF-12_d5_051	200	0.0175	7.48	0.0070	9678	4835	1
CLCF_WF-12_d6_078	200	0.0310	14.71	0.0117	5012	2512	1
aRF_200_d01	200	0.0306	13.17	0.0116	2777	1500	1
aRF_200_d02	200	0.0308	13.48	0.0116	3044	1500	1
aRF_200_d03	200	0.0300	13.02	0.0114	2711	1500	1
aRF_200_d05	200	0.0176	6.81	0.0071	10559	5000	1
aRF_200_d06	200	0.0177	6.66	0.0071	10843	5000	1
aRF_200_d07	200	0.0111	3.65	0.0047	27520	15000	1
aRF_200_d08	200	0.0110	3.70	0.0047	26771	15000	1
aRF_200_d09	200	0.0111	3.64	0.0047	27213	15000	1
aRF_200_d10	200	0.0066	2.14	0.0030	51708	25000	1
aRF_200_d11	200	0.0065	2.16	0.0029	53807	25000	1
aRF_200_d12	200	0.0066	2.15	0.0030	51517	25000	1
aRF_200_d13	200	0.0026	0.89	0.0013	150867	80000	1
aRF_200_d14	200	0.0026	0.89	0.0013	173600	80000	1
aRF_200_d15	200	0.0012	0.46	0.0006	520548	250000	0
aRF_200_d16	200	0.0018	0.66	0.0009	240442	120000	1
aRH_2_d01	200	0.0302	13.01	0.0114	4452	2400	1
aRH_2_d02	200	0.0174	7.00	0.0070	10339	5000	1
aRH_2_d03	200	0.0106	3.99	0.0045	23719	12000	1
aRH_2_d04	200	0.0064	2.20	0.0029	54000	24000	1
aRH_2_d05	200	0.0023	0.87	0.0012	134227	70000	1
aRH_2_d06	200	0.0017	0.65	0.0009	234082	120000	1

5.4.2 Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung MAR M247

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Robustheitsbewertung für die Werkstoffkennwerte vorgestellt, die sich basierend auf den LCF Versuchsdaten der Nickelbasislegierung MAR M247 ergeben. Die für die Nickelbasislegierung ermittelten Werkstoffkennwerte unterliegen der Vertraulichkeit und werden aus diesem Grund im Rahmen dieser Arbeit nicht dokumentiert.

5.4.2.1 Robustheitsbewertung der Werkstoffkennwerte von MAR M247

Die Robustheitsbewertung der Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung MAR M247 erfolgt bei einem Robustheitsniveau von $R_{niv} = 0.03$. Das Robustheitsniveau wird bei der Robustheitsuntersuchung der Nickelbasislegierung gegenüber dem für den austenitischen Stahl gewählten Wert angehoben. Die damit einhergehende Zunahme der Unsicherheit innerhalb der ermittelten Kennwerte wird akzeptiert, da durch die weniger strenge Bewertung deutlich mehr Versuche das Robustheitskriterium erfüllen und somit eine statistische Bewertung der

KAPITEL 5. ROBUSTHEIT DER RAMBERG-OSGOOD
KENNWERTE

Kennwertstreuung möglich wird. Ein strengeres Robustheitskriterium führt zu sehr kleinen Stichprobenumfängen bei der statistischen Auswertung (siehe Abschnitt 6) In Tabelle 5.12 sind die Ergebnisse der Robustheitsbewertung zusammengefasst.

Lediglich 37 der insgesamt 69 LCF Versuche der Nickelbasislegierung erlauben die Anpassung von robusten Ramberg-Osgood Kennwerten. Keiner der vorliegenden LCF Versuche, die bei einer Prüftemperatur unter 1000 °C geführt wurden, kann zur Anpassung robuster Kennwerte herangezogen werden. Auch bei der Auswertung der Langläufer ergeben sich keine robusten Werkstoffkennwerte.

Tabelle 5.12: Ergebnisse der Robustheitsbewertung der basierend auf den LCF Versuchen der Nickelbasislegierung angepassten Kennwertsätze.

T [°C]	Anzahl LCF Ver- suche	davon robust be- wertet	Anzahl Langläufer	davon robust be- wertet
600	8	0	8	0
850	14	0	7	0
1000	14	12	5	0
1050	20	15	7	0
1150	13	10	5	0

6. Statistische Auswertung der Werkstoffkennwerte

Das Ziel der statistischen Auswertung ist die Beschreibung der Streuung der Werkstoffkennwerte durch statistische Verteilungen. Um eine beliebige Stichprobe durch eine statistische Verteilung beschreiben zu können, werden in einem ersten Schritt die Verteilungsparameter dieser Verteilung bestimmt. Hierzu wird die MLM (siehe Abschnitt 3.2.2) in Kombination mit dem gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus (siehe Abschnitt 3.1.5) zur Lösung des resultierenden Minimierungsproblems eingesetzt. Die Lösung dieser Optimierung liefert die Verteilungsparameter, die zu einer im statistischen Sinne bestmöglichen Beschreibung der Stichprobe durch die statistische Verteilungsfunktion führen. Die sogenannte Verteilungshypothese wird für jede Stichprobe jeweils für die Normalverteilung, für die logarithmische Normalverteilung, für die Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern und für die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern formuliert. Basierend auf dem Ergebnis des in Abschnitt 3.2.3.2 erläuterten Anderson-Darling Tests wird nun bewertet, welche der zuvor formulierten Verteilungshypothesen die Stichprobe am Besten beschreibt. Die Verteilungshypothese, die den kleinsten Anderson-Darling Parameter als Testergebnis liefert, wird für die statistische Beschreibung der Stichprobe genutzt. Weiterhin kann basierend auf dem Anderson-Darling Parameter ein P-Wert berechnet werden. Dieser lässt eine greifbare Aussage über die Güte der Beschreibung der Stichprobe durch die Verteilungshypothese zu. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Methoden zur statistischen Beschreibung einer Stichprobe und zur probabilistischen Bewertung von Verteilungshypothesen in PYTHON Skripten implementiert.

In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse der statistischen Auswertung der Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes und des Norton-Kriechmodells beschrieben. In diesen Abschnitten wird außerdem erläutert, wie die Stichproben für die jeweilige Auswertung gebildet werden.

6.1 Statistische Beschreibung der Ramberg-Osgood Kennwerte

Zur Beschreibung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens werden im Rahmen dieser Arbeit die Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes an Versuchsda-

ten aus LCF Versuchen angepasst. Diese Kennwerte gehen direkt in die Berechnung des Schädigungsparameters D_{TMF} ein und beeinflussen somit die vom Lebensdauermodell vorhergesagte Zyklenzahl zum Versagen N_f (siehe Abschnitt 4.2.1). Das Materialverhalten von metallischen Werkstoffen zeigt eine starke Temperaturabhängigkeit [13, Seite 60 und Seite 195]. Diese führt dazu, dass Werkstoffeigenschaften und die mit ihnen einhergehenden Werkstoffkennwerte nur dann miteinander vergleichbar sind, wenn sie bei gleicher Prüftemperatur bestimmt werden. Die statistische Auswertung der Kennwertstreuungen für die Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Modells muss deshalb temperaturspezifisch erfolgen. Für jede Prüftemperatur werden drei Stichproben zusammengefasst. Sie enthalten jeweils die für einen Werkstoffkennwert des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes angepassten Werte. Es wird je eine Stichprobe für den E-Modul \mathbf{S}_E , die zyklische Fließgrenze $\mathbf{S}_{\sigma_{cy}}$ und den Verfestigungsexponenten $\mathbf{S}_{N'}$ gebildet. Während für die statistische Beschreibung der Streuung des E-Moduls die Anpassungsergebnisse aller vorliegenden zyklischen Versuche herangezogen werden können, werden in $\mathbf{S}_{\sigma_{cy}}$ und $\mathbf{S}_{N'}$ nur Kennwerte berücksichtigt, die das in Abschnitt 5.4 erläuterte Robustheitskriterium erfüllen. In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse der statistischen Auswertung für die Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Modells für den austenitischen Stahl und für die Nickelbasislegierung dargestellt.

6.1.1 Ergebnisse der statistischen Auswertung für den austenitischen Stahl

Für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10 liegen insgesamt 64 zyklische Versuche vor, die bei acht unterschiedlichen Prüftemperaturen geführt werden. Lediglich für die Temperaturen von 20 °C und 200 °C ist die Anzahl der durchgeführten Versuche für eine statistische Auswertung ausreichend groß. Von den 20 vorliegenden Versuchen bei 20 °C, liefern 16 robuste Werkstoffkennwerte für das Ramberg-Osgood Modell. Von den 23 vorliegenden Versuchen bei der Prüftemperatur von 200 °C werden die Kennwerte von 22 Versuchen als robust bewertet. In den Abbildungen 6.1 und 6.2 sind zunächst die Ergebnisse der statistischen Auswertung des E-Moduls für die Prüftemperaturen 20 °C und 200 °C dargestellt. Neben den Stichprobenwerten, die zur Veranschaulichung ihrer Lage als Balken abgebildet sind, werden die durch die MLM formulierten Verteilungshypothesen der Normalverteilung, der logarithmischen Normalverteilung, der Weibullverteilung mit zwei und der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern gezeigt. Die Häufigkeitsdichten der mittels der MLM angepassten Verteilungshypothesen werden jeweils über dem untersuchten Werkstoffkennwert aufgetragen.

Die Charakteristik der Streuung des E-Moduls fällt für die beiden untersuchten Prüftemperaturen völlig unterschiedlich aus. Während sich bei der Prüftemperatur von 20 °C das Auftreten der einzelnen Mess- oder Stichprobenwerte des E-Moduls im Bereich der kleinen gemessenen Werte konzentriert, treten bei 200 °C vermehrt große Werte auf. Dies wird durch die angepassten Weibullverteilungen mit drei Verteilungsparametern besonders adäquat abgebildet. Dieser Verteilungstyp weist bei der Auswertung der E-Modul Streuung bei einer Prüftemperatur von 20 °C eine deutliche Rechtsschiefe auf, während er bei der Prüftemperatur von 200 ° eindeutig linksschief und nahezu deckungsgleich mit der Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern ausfällt. Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen die Ergebnisse der

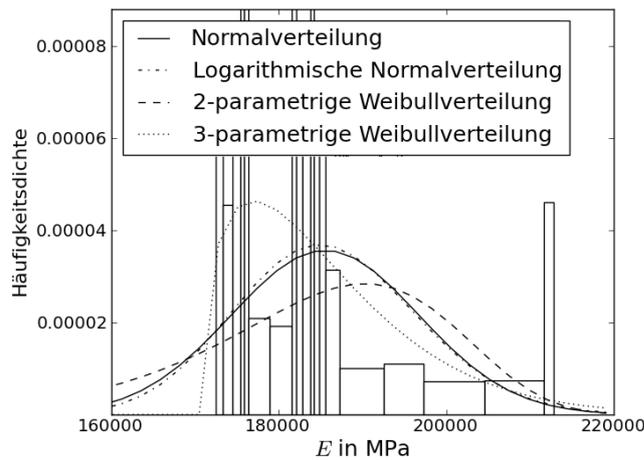


Abbildung 6.1: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 20 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

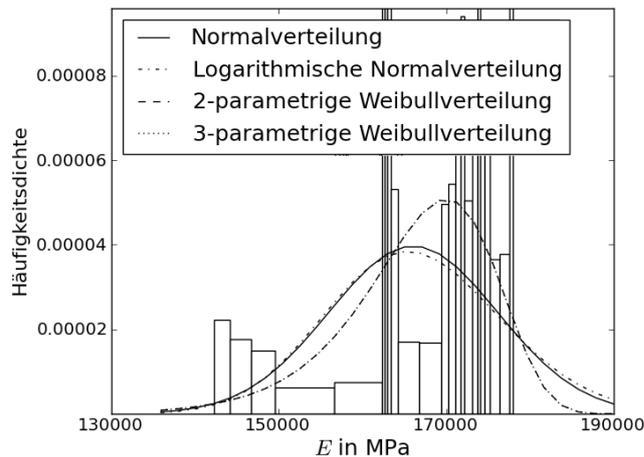


Abbildung 6.2: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 200 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

statistischen Beschreibung der Werkstoffkennwerte σ_{cy} und N' bei 20 °C und 200 °C. In der Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse der statistischen Auswertung für die Kennwerte des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10 zusammengefasst. Für die beiden untersuchten Prüftemperaturen sind kennwertspezifisch jeweils diejenigen statistischen Verteilungstypen angegeben, die zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter A_D^* führen. Weiterhin werden der daraus berechnete P-Wert und die zugehörigen Parameter der Verteilungsfunktion aufgeführt. Mit nur einer Ausnahme gelingt die beste statistische Beschreibung der Kennwertstreuung mit der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern. Keiner der ermittelten P-Werte liegt unterhalb von 5 %, sodass basierend auf der statistischen Bewertung von einer adäquaten Beschreibung der Kennwertstreuung durch die statistischen Verteilungshy-

KAPITEL 6. STATISTISCHE AUSWERTUNG DER WERKSTOFFKENNWERTE

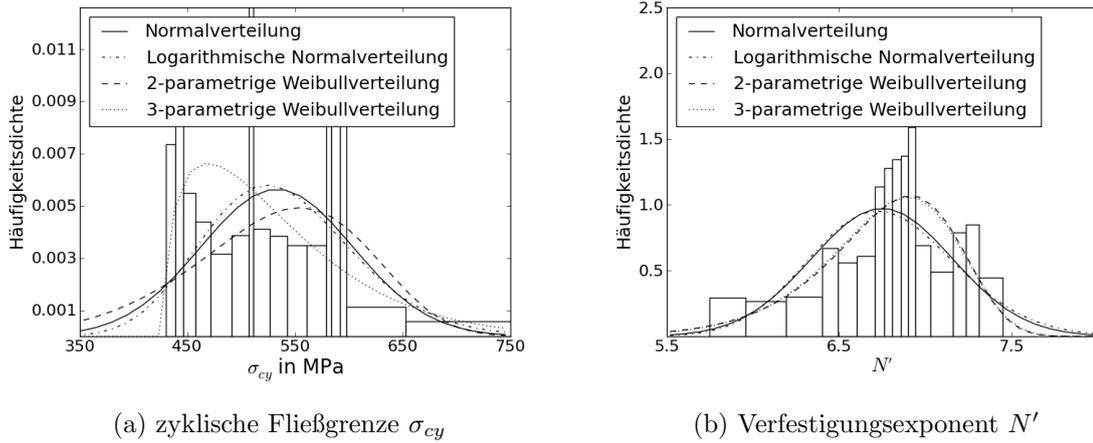


Abbildung 6.3: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 20 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

pothesen ausgegangen werden kann. Keine der aus der Bewertungsmethodik hervorgehenden Verteilungen weist bei diesem Signifikanzniveau ein signifikantes Ergebnis auf.

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung der Werkstoffkennwerte des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

Kennwert	E-Modul E	zyklische Fließgrenze σ_{cy}	zyklischer Verfestigungsexponent N'
20 °C	3 Parameter Weibull, $P_{\text{Wert}} = 0.441,$ $a_W = 15824.2,$ $b_W = 1.3524,$ $T_W = 171084.9$	Normalverteilung, $P_{\text{Wert}} = 0.477,$ $\sigma_N = 533.0,$ $\mu_N = 70.8$	3 Parameter Weibull, $P_{\text{Wert}} = 0.955,$ $a_W = 4.611,$ $b_W = 13.25,$ $T_W = 2.32$
200 °C	3 Parameter Weibull, $P_W = 0.06,$ $a_W = 170329.2,$ $b_W = 23.5,$ $T_W = 0.08$	3 Parameter Weibull, $P_{\text{Wert}} = 0.13,$ $a_W = 64.6,$ $b_W = 1.30,$ $T_W = 318.5$	3 Parameter Weibull, $P_{\text{Wert}} = 0.153,$ $a_W = 1.11,$ $b_W = 1.669,$ $T_W = 4.97$

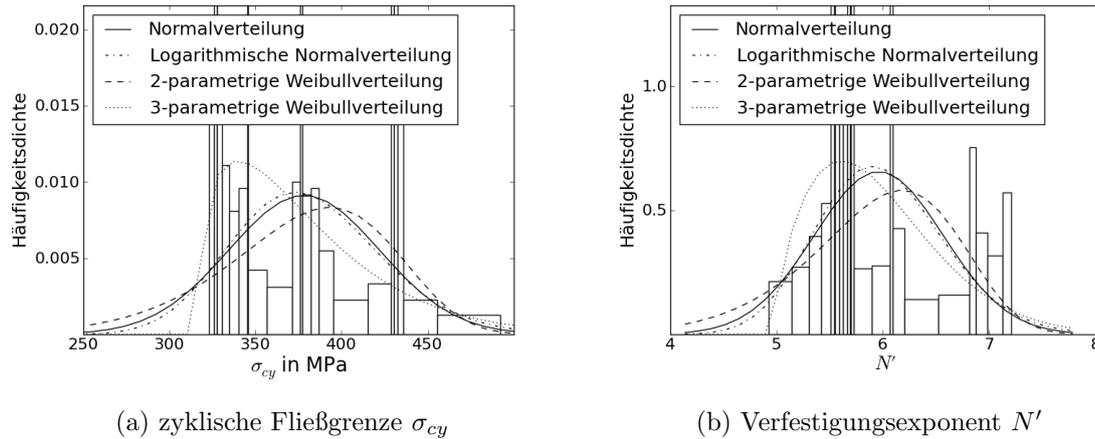


Abbildung 6.4: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 200 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

6.1.2 Ergebnisse der statistischen Auswertung für die Nickelbasislegierung

Für die Nickelbasislegierung MAR M247 liegen insgesamt 101 zyklische Versuche vor, die sich auf fünf unterschiedliche Prüftemperaturen aufteilen. Für die Prüftemperaturen 600 °C und 850 °C können für keinen der vorliegenden Versuche robuste Kennwerte zur Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens angepasst werden, sodass für diese Prüftemperaturen lediglich die statistischen Verteilungen zur Beschreibung der Streuung des E-Moduls ermittelt werden können.

Für die Prüftemperaturen von 1000 °C, 1050 °C und 1150 °C liegen in ausreichender Anzahl robuste Werkstoffkennwerte vor, sodass für diese Temperaturen eine statistische Beschreibung der Streuung aller Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Modells erfolgen kann. In den Abbildungen 6.5 bis 6.9 sind zunächst die Ergebnisse der statistischen Auswertung des E-Moduls für alle Prüftemperaturen abgebildet. Neben den Stichprobenwerten, die zur Veranschaulichung als Balken dargestellt sind, werden die durch die MLM formulierten Verteilungshypothesen der Normalverteilung, der logarithmischen Normalverteilung, der Weibullverteilung mit zwei und der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern gezeigt. Aus Gründen der Vertraulichkeit der zugrundeliegenden Werkstoffdaten wird auf eine Skalierung der Achsen verzichtet. Die Häufigkeitsdichte, die gerade dem Funktionswert der Dichteverteilung entspricht, wird über dem untersuchten Kennwert aufgetragen.

Die Abbildungen 6.10, 6.11 und 6.12 stellen die Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei 1000 °C, 1050 °C und 1150 °C dar.

Die Tabelle 6.2 fasst die Ergebnisse der statistischen Auswertung für die Nickelbasislegierung zusammen. Für jede Prüftemperatur und für jeden Kennwert werden jeweils der Verteilungstyp, der zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling A_D^* Parameter führt, und der aus der dazugehörigen Verteilungshypothese resultierende P-Wert angegeben. In nahezu allen Fällen führt die Weibullverteilung mit 3 Verteilungsparametern zur besten statistischen Beschreibung der Streuung der Werkstoffkennwerte. Lediglich bei der Beschreibung der Streuung der

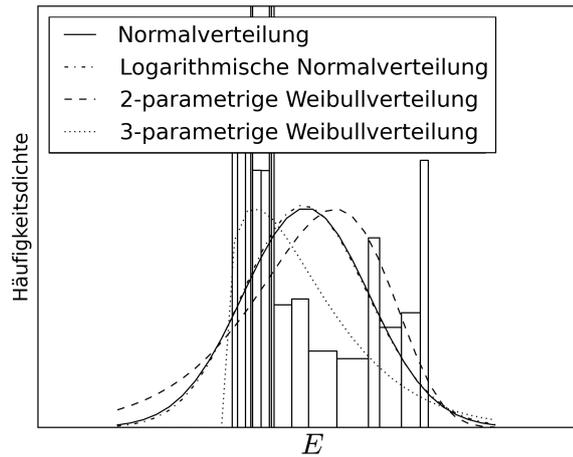


Abbildung 6.5: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 600 °C . Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

Tabelle 6.2: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung der Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung MAR M247.

Kennwert	E-Modul E	zyklische Fließgrenze σ_{cy}	zyklischer Verfestigungsexponent N'
600 °C	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.244$	-	-
850 °C	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.454$	-	-
1000 °C	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.724$	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.975$	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.292$
1050 °C	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.511$	logarithmische Normalverteilung, $P_{Wert} = 0.685$	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.92$
1150 °C	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.967$	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.495$	3 Parameter Weibull, $P_{Wert} = 0.182$

zyklischen Fließgrenze bei einer Prüftemperatur von 1050 °C liefert die logarithmische Normalverteilung einen geringeren korrigierten Anderson-Darling Parameter A_D^* .

Die ermittelten P-Werte fallen teilweise sehr groß aus, was auf eine gute Beschreibung der Stichprobenwerte durch die statistische Verteilung hindeutet. Der minimale P-Wert tritt bei der Beschreibung der Streuung des zyklischen Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 1150 °C auf und liegt mit $P_{Wert} = 0.182$ in einem statistisch nicht signifikanten Bereich, sodass basierend auf dem Ergebnis der statistischen Bewertung von einer adäquaten Beschreibung der Kennwertstreuung durch die formulierten Verteilungshypothesen ausgegangen werden kann.

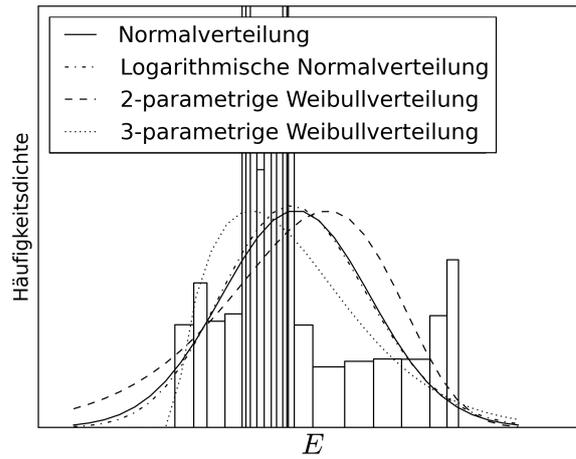


Abbildung 6.6: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 850 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

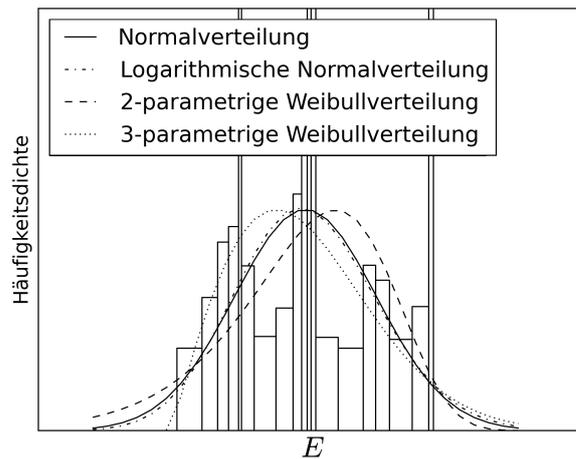


Abbildung 6.7: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 1000 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

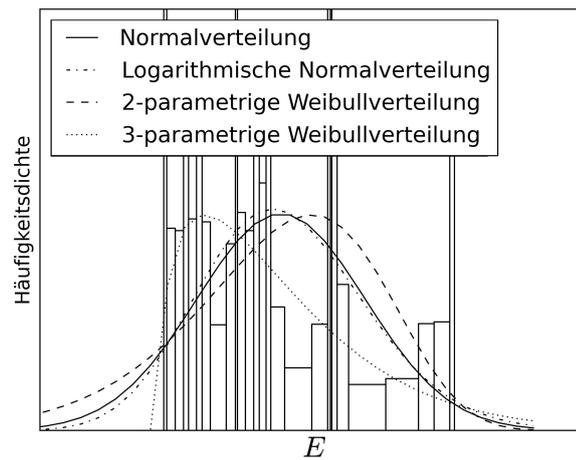


Abbildung 6.8: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 1050 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

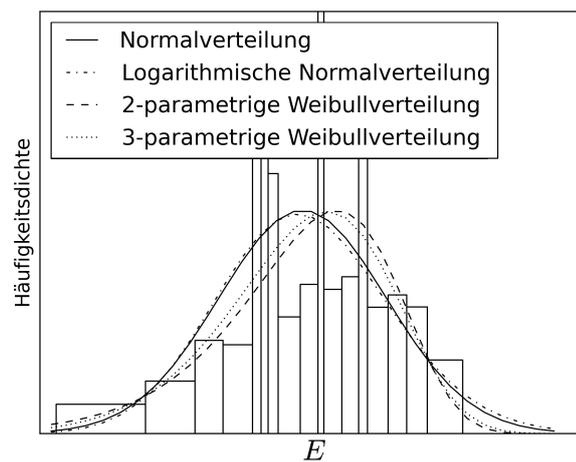


Abbildung 6.9: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des E-Moduls E bei einer Prüftemperatur von 1150 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

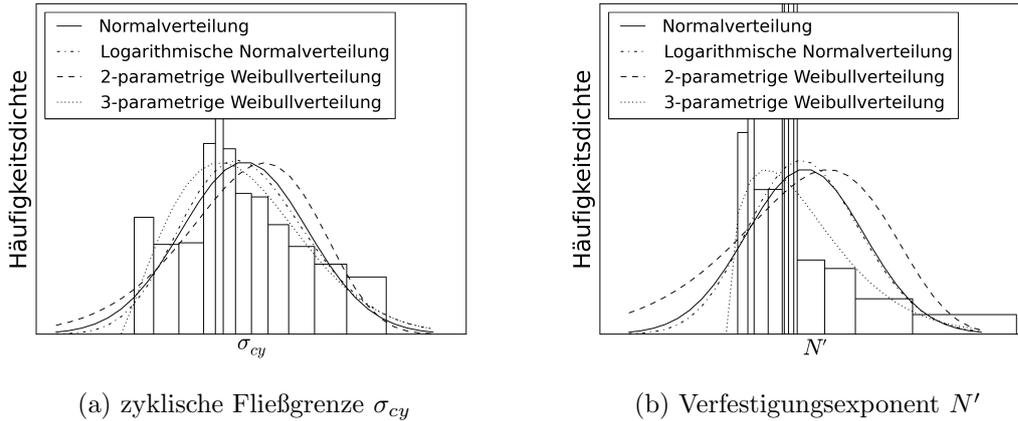


Abbildung 6.10: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 1000 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

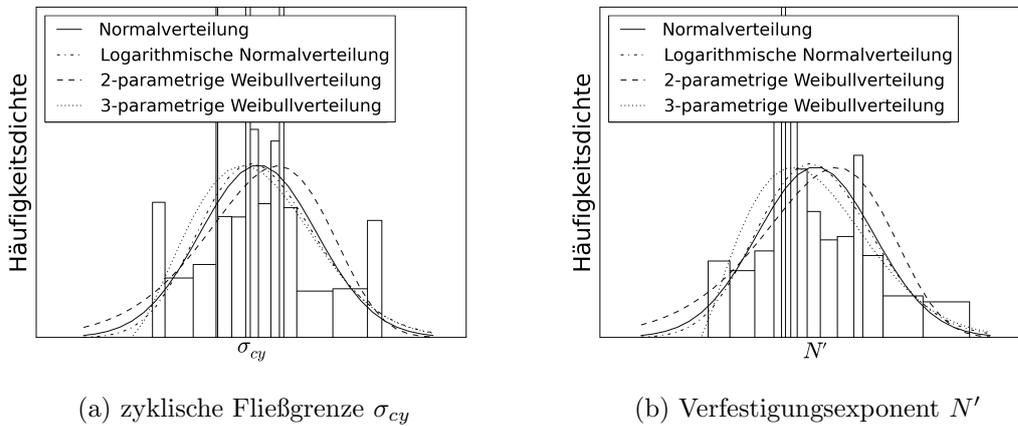


Abbildung 6.11: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 1050 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

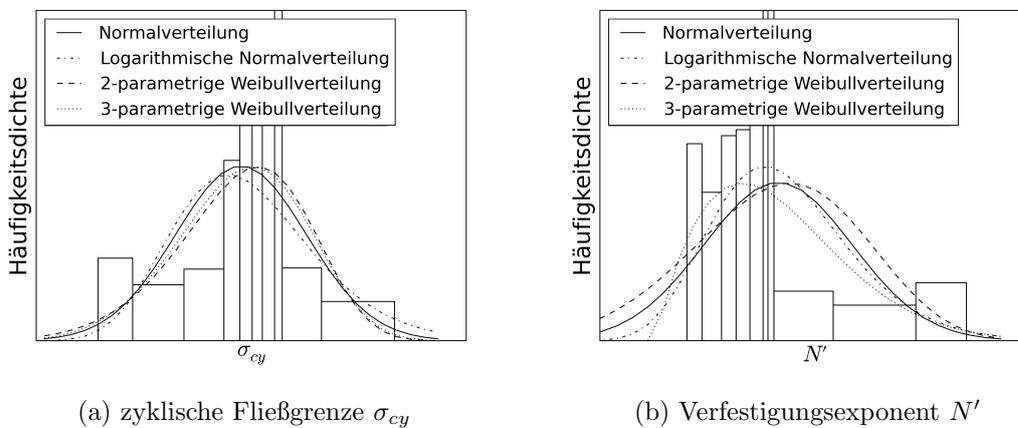


Abbildung 6.12: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze und des Verfestigungsexponenten bei einer Prüftemperatur von 1150 °C. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

6.2 Statistische Beschreibung der Kennwerte des Norton-Kriechmodells

Neben den elastisch-plastischen Werkstoffeigenschaften werden im D_{TMF} -Schädigungsparameter auch zeitabhängige Effekte im Werkstoffverhalten berücksichtigt. Ihr Einfluss auf die Schädigung und damit auf die Ermüdungslebensdauer wird über die in Abschnitt 4.3.1 erläuterte F -Funktion abgeschätzt. In diese Funktion gehen die Kennwerte A_{cr} , Q_{cr} und N_{cr} des Norton-Kriechmodells ein. Diese Kennwerte werden so angepasst, dass Versuchsdaten aus einem weiten Belastungs- und Temperaturbereich optimal beschrieben werden. Die Kennwerte A_{cr}^* , Q_{cr}^* und N_{cr}^* stellen die Lösung des in Abschnitt 4.3.2 erläuterten Optimierungsproblems dar. Anders als das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz wird das Norton-Kriechmodell nicht an individuelle Versuche angepasst, sondern zur Beschreibung der Kriecheigenschaften des Werkstoffs in seinem gesamten Einsatzbereich genutzt, sodass für jeden Werkstoff nur ein einziger Kennwertsatz für die Beschreibung aller Kriechversuchsdaten resultiert. Da im Rahmen dieser Arbeit für den austenitischen Stahl X6 Cr-NiNb 18-10 keine Versuchsdaten aus Kriechversuchen vorliegen, werden die Kennwerte des Norton-Kriechmodells lediglich für die Nickelbasislegierung MAR M247 bestimmt und statistisch ausgewertet.

Während die Aktivierungsenergie für Kriechen Q_{cr} den Temperatureinfluss auf die Kriechdehnrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ im Kriechmodell abbildet, wird der Nortonexponent N_{cr} zur Beschreibung der Abhängigkeit von $\dot{\epsilon}^{cr}$ zur beanspruchenden Spannung genutzt. Eine sinnvolle Anpassung dieser beiden Kennwerte ist nur möglich, wenn mehrere Kriechversuche bei unterschiedlicher Prüftemperatur oder unterschiedlichem Belastungsniveau vorliegen. Lediglich der Vorfaktor des Norton-Kriechmodells $A_{cr,i}$ kann sinnvoll an einen einzelnen Kriechversuch (Index i) angepasst werden, wenn die beiden anderen Modellkennwerte bereits bekannt sind. Unter Verwendung der optimierten Kennwerte Q_{cr}^* und N_{cr}^* kann für jeden Kriechversuch die Bestimmung eines individuellen Vorfaktors $A_{cr,i}$ so erfolgen, dass

$$A_{cr,i} = \frac{\dot{\epsilon}_i^{cr}}{e^{\frac{-Q_{cr}^*}{R \cdot T_i}} \cdot \sigma_i^{N_{cr}^*}} \quad (6.1)$$

gilt und die vom Modell für einen Kriechversuch vorhergesagte Kriechdehnrate exakt dem experimentellen Ergebnis entspricht. Ein auf diese Weise bestimmter Vorfaktor $A_{cr,i}$ erlaubt eine Aussage darüber, wie stark die Werkstoffprobe des ausgewerteten Versuchs zum Kriechen neigt. Diese Aussage ist stets auf die mittleren Kriecheigenschaften des untersuchten Werkstoffs bezogen.

Um die Streuung der individuellen Kriecheigenschaften ermitteln zu können, werden die für jeden Kriechversuch angepassten Werte für den individuellen Vorfaktor $A_{cr,i}$ in einer Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{cr}}$ zusammengefasst. Für diese Stichprobe können die statistischen Verteilungshypothesen mit Hilfe der MLM formuliert werden. In der Abbildung 6.13 sind die Ergebnisse der statistischen Auswertung des individuell angepassten Vorfaktors des Norton-Kriechmodells $A_{cr,i}$ abgebildet. Neben den Stichprobenwerten, die als Balken dargestellt sind, werden die formulierten Verteilungshypothesen der Normalverteilung, der logarithmischen Normalverteilung,

6.2. STATISTISCHE BESCHREIBUNG DER KENNWERTE DES NORTON-KRIECHMODELLS

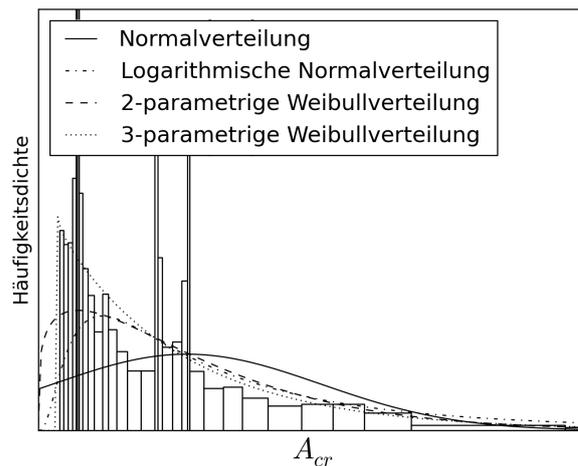


Abbildung 6.13: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des Norton-Kriechmodells A_{cr} . Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

der Weibullverteilung mit zwei und der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern gezeigt. Die Verteilungshypothese, die zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter A_D^* führt, ist in dieser Auswertung die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern. Der zugehörige P-Wert von $P_{\text{Wert}} = 0.953$ liegt sehr hoch, sodass eine sehr gute Beschreibung der Streuung der Kriecheigenschaften basierend auf dieser statistischen Verteilung möglich ist.

7. Deterministische und probabilistische Lebensdauerbewertung

Das mechanismenbasierte Lebensdauermodell wird im Rahmen dieser Arbeit auf unterschiedliche Arten ausgewertet. Die Art der Auswertung wird hierbei dadurch bestimmt, wie die Werkstoffkennwerte beziehungsweise die Streuung der Werkstoffkennwerte im Lebensdauermodell berücksichtigt werden.

Zunächst wird das Lebensdauermodell in zwei deterministischen Auswertungen untersucht. Als deterministisch werden diese bezeichnet, da sie auf ein deterministisches Ergebnis führen, welches nicht durch streuende Eingangsgrößen beeinflusst ist. Es wird zwischen einer individuellen Auswertung und einer mittleren Auswertung unterschieden. Die individuelle Auswertung nutzt bei der Lebensdauerbewertung das individuelle mechanische Werkstoffverhalten der einzelnen Proben und die mittlere Auswertung geht von einem deterministischen mittleren mechanischen Werkstoffverhalten aus, das die mechanischen Eigenschaften der Proben im Mittel gut beschreibt.

Innerhalb der probabilistischen Betrachtungsweisen werden statistische Verteilungen genutzt, um die Werkstoffkennwertstreuung bei der Lebensdauerbewertung zu berücksichtigen. Es wird eine Aussage darüber möglich, wie sich statistisch verteilte Eingangsgrößen auf die vom Lebensdauermodell abgeschätzte Lebensdauer auswirken. Hierbei werden in einem ersten Schritt statistisch verteilte, unkorrelierte Werkstoffkennwertkombinationen gezogen. In einer weiteren probabilistischen Auswertung werden sodann experimentell ermittelte Korrelationen zwischen den statistisch verteilten Werkstoffkennwerten berücksichtigt.

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der unterschiedlichen Auswertemethoden für beide Werkstoffe, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, zusammengefasst. Zunächst wird in Abschnitt 7.1 die Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells basierend auf den individuell angepassten Werkstoffkennwerten durchgeführt. In diesem Abschnitt ist außerdem erläutert, wie die resultierenden Streubänder des Lebensdauermodells ermittelt werden. In Abschnitt 7.2 wird die Lebensdauerbewertung mit gemittelten Werkstoffkennwerten durchgeführt, bevor in den Abschnitten 7.3 die probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells ohne Berücksichtigung von Korrelationen beschrieben wird. Abschließend wird in Abschnitt 7.4 das Lebensdauermodell bei probabilistischer Auswertung und unter Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten untersucht.

7.1 Individuelle Auswertung des Lebensdauermodells

Basierend auf den im Abschnitt 5.4 ermittelten individuellen Werkstoffkennwerten kann in diesem Abschnitt die deterministische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells erfolgen. Für jeden LCF Versuch (Index i), der eine robuste Kennwertanpassung erlaubt, kann gemäß der Gleichung (4.10) und der aus den Versuchsdaten bekannten Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon_i$ die individuelle Modellantwort des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes berechnet werden. Unter Verwendung des experimentell ermittelten Spannungsverhältnisses $R_{\sigma,i}$ können aus dieser Modellantwort alle Belastungsgrößen für die Bestimmung eines individuellen Werts für den D_{TMF} -Schädigungsparameter (siehe Gleichung (4.3)) berechnet werden. Da die Zyklusdauer innerhalb der untersuchten LCF Versuche kurz ausfällt, wird die F -Funktion hierbei zu $F = 1$ gewählt (siehe Abschnitt 4.3.1), sodass in hinreichend kurzen Belastungszyklen keine Schädigung durch zeitabhängige Effekte berücksichtigt wird [11, Seite 19]. Die Anpassung der Kennwerte A und B des Lebensdauermodells erfolgt in einem ersten Schritt so, dass im Mittel alle robusten LCF Versuche bestmöglich beschrieben werden und die Abweichungen zwischen der vom Lebensdauermodell vorhergesagten Zyklenzahl zum Versagen $N_{f,\text{mod}}$ zur experimentell ermittelten Lebensdauer $N_{f,\text{exp}}$ minimal werden. Es kommt der in Abschnitt 3.1.5 vorgestellte Optimierungsalgorithmus zum Einsatz, um die FQS

$$FQS_{N_f} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(N_{f,\text{exp},i} - N_{f,\text{mod},i})^2}{N_{f,\text{exp},i}^2} \right) \quad (7.1)$$

zu minimieren. n beschreibt die Anzahl der vorliegenden LCF Versuche, die eine robuste Kennwertbestimmung erlauben. Ergebnis des Optimierungsaufrufs sind die Kennwerte A^* und B^* .

Um eine statistische Auswertung der Unsicherheit der Lebensdauer vorhersage zu ermöglichen, wird für jeden vorliegenden LCF Versuch, dessen Kennwerte als robust bewertet wurden, ein individuelles $A_{\text{ind},i}$ bestimmt, sodass

$$A_{\text{ind},i} = \frac{N_{f,\text{exp},i}}{D_{TMF,i}^{-B^*}} \quad (7.2)$$

gilt und die vom Lebensdauermodell vorhergesagte Lebensdauer $N_{f,\text{mod},i}$ unter Verwendung von $A_{\text{ind},i}$ exakt dem experimentellen Ergebnis $N_{f,\text{exp},i}$ entspricht. Die so ermittelten Werte für A_{ind} werden in einer Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{\text{ind}}}$ zusammengefasst und einer statistischen Auswertung unterzogen. Es werden Verteilungshypothesen durch die Normalverteilung, die logarithmische Normalverteilung, durch die Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern und durch die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern unter Verwendung der MLM formuliert und durch den Anderson-Darling Test bewertet. In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse der individuellen deterministischen Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells werkstoffspezifisch für den austenitischen Stahl und für die Nickelbasislegierung zusammengefasst.

Zur Quantifizierung der Unterschiede in den Streubreiten des Lebensdauermodells bei deter-

ministischer beziehungsweise probabilistischer Auswertung wird ein Quotient K

$$K = \frac{A_{95}}{A_{0.1}} \quad (7.3)$$

eingeführt. Er beschreibt das Verhältnis des Wertes von A_{95} bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 95\%$ zum Wert von $A_{0.1}$ bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 0.1\%$ und basiert wesentlich auf [63]. $A_{0.1}$ und A_{95} können als Flächeninhalte unter der Dichteverteilungsfunktion durch numerische Integration ermittelt werden. Für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten wird diejenige Verteilungshypothese genutzt, deren korrigierter Anderson-Darling Parameter bei der statistischen Auswertung am kleinsten ausfällt.

7.1.1 Individuelle Auswertung für den austenitischen Stahl

Für die Anpassung der Kennwerte A und B des Lebensdauermodells werden alle vorliegenden LCF Versuche verwendet, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind. Die Kennwerte A^* und B^* lassen sich durch die Minimierung der Fehlerquadratsumme (siehe Gleichung (7.1)) unter Verwendung der bereits in den Tabellen 5.9, 5.10 und 5.11 zusammengefassten Zwischenergebnisse ermitteln. Es ergeben sich $A^* = 3.442$ und $B^* = 1.913$. Die Abbildung 7.1 zeigt das Ergebnis der Kennwertanpassung in einem D_{TMF} - N_f -Diagramm.

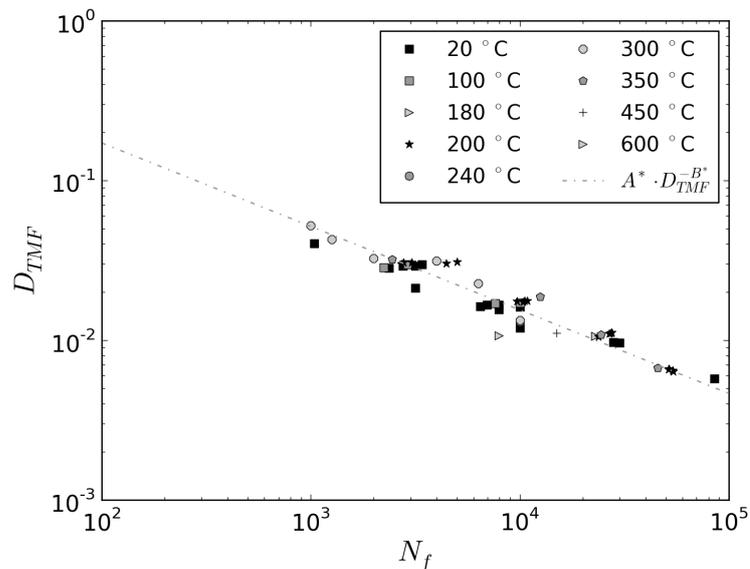


Abbildung 7.1: Ergebnisse der Anpassung des Lebensdauermodells an die vorliegenden Versuchsdaten. Darstellung des individuell ermittelten D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f für alle LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

Für die weitere Auswertung werden lediglich die LCF Versuche mit den Prüftemperaturen von 20 °C und 200 °C genutzt. Sie liegen temperaturspezifisch in ausreichender Anzahl vor. Für diese Prüftemperaturen lassen sich die Kennwertstreuungen statistisch beschreiben (siehe Abschnitt 6.1.1), sodass deterministische und probabilistische Betrachtungen des Lebensdauermodells möglich sind. Für alle anderen Prüftemperaturen ist diese Voraussetzung beim

Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 nicht erfüllt.

Die Abbildung 7.2 zeigt die formulierten Verteilungshypothesen zur Beschreibung der Streuung innerhalb der Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{\text{ind}}}$ für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10. Zur Veranschaulichung der Lage der einzelnen Stichprobenwerte sind diese als Balken dargestellt. Für diesen Werkstoff liegen 32 robust bewertete Kennwertsätze aus LCF Versuchen mit den Prüftemperaturen 20 °C und 200 °C vor. Die für diese Versuche ermittelten Werte für den Vorfaktor A_{ind} können aus den in den Tabellen 5.9 und 5.11 zusammengefassten Zwischenergebnissen einfach berechnet werden (siehe Gleichung (7.2)). Die Verteilungshypothese, die

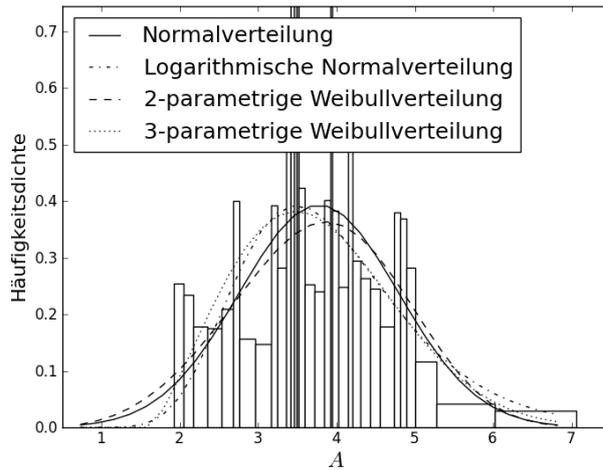


Abbildung 7.2: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei individueller, deterministischer Auswertung der LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter A_D^* führt, ist die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern. Die durch die MLM bestimmten Werte dieser Parameter und die basierend auf dieser Verteilungshypothese ermittelten Werte für A_D^* und den P-Wert sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Die Bewertung der Streubreite dieser Verteilung durch den Quotienten K liefert $K = 3.23$. In der Abbildung 7.3 sind die individuell für jeden LCF Versuch berechneten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der in diesem Versuch ermittelten Lebensdauer aufgetragen. Weiterhin werden in der Abbildung die Ausfallwahrscheinlichkeiten von 0.1 %, 5 %, 50 % und 95 % gezeigt.

Tabelle 7.1: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung des Vorfaktors A_{ind} des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei deterministischer Auswertung unter Verwendung von individuellen Werkstoffkennwerten des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

Verteilungshypothese	a_W	b_W	T_W	A_D^*	P_{Wert}
3 Parameter Weibull	2.42	2.22	1.63	0.20	0.85

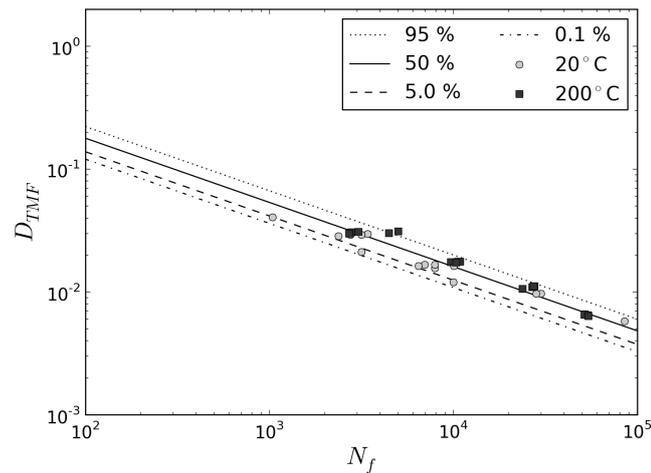


Abbildung 7.3: Ergebnisse für das D_{TMF} -Lebensdauermodells bei individueller Auswertung. Darstellung des Schädigungsparameters D_{TMF} über der Zyklenzahl zum Versagen N_f für alle LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 der Prüftemperaturen 20 °C und 200 °C, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

7.1.2 Individuelle Auswertung für die Nickelbasislegierung

Für die Nickelbasislegierung liegen 37 robuste LCF Versuche vor. In Abbildung 7.4 sind die formulierten Verteilungshypothesen und die Stichprobenwerte der Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{ind}}$ als Balken dargestellt. Die angepassten Kennwerte A^* und B^* für die Nickelbasislegierung MAR M247 unterliegen der Vertraulichkeit. Für die individuelle Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells ergibt sich $K = 10.27$. Die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparameter eignet sich am besten, um die Streuung innerhalb der Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{ind}}$ zu beschreiben. Der durch diese Verteilungshypothese ermittelte P-Wert beträgt $P_{Wert} = 0.646$.

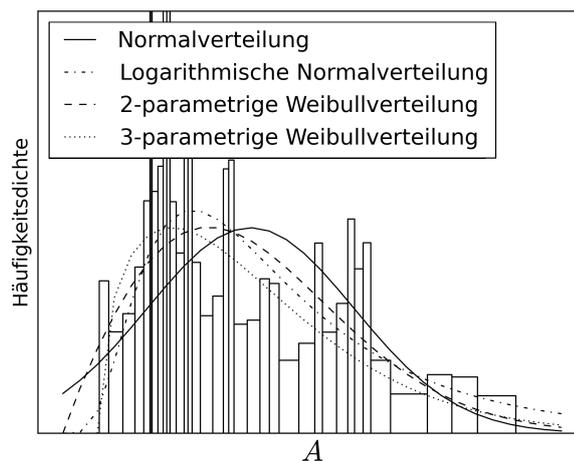


Abbildung 7.4: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei individueller Auswertung der LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

In der Abbildung 7.5 sind die individuell für jeden robusten LCF Versuch berechneten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der in diesem Versuch ermittelten Lebensdauer aufgetragen. Weiterhin sind die Ausfallwahrscheinlichkeiten von 0.1 %, 5 %, 50 % und 95 % zur Verdeutlichung der Streubreite des Lebensdauermodells gezeigt. Um den Vergleich der Streubreiten für die unterschiedlichen Auswertungsmethoden des Lebensdauermodells zu ermöglichen, werden für die Auswertung der Nickelbasislegierung D_{TMF} - N_f -Diagramme mit identischer Achsenskalierung verwendet.

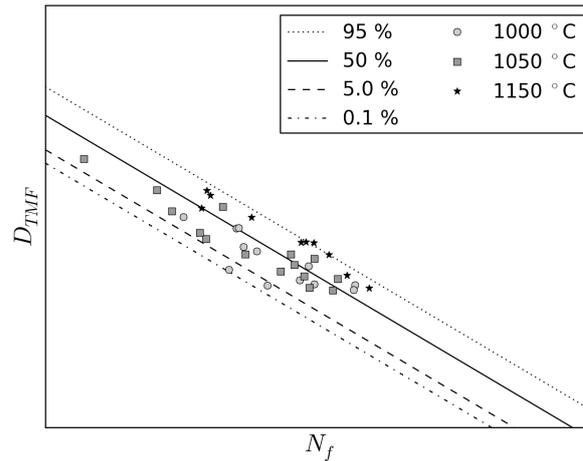


Abbildung 7.5: Ergebnisse für das D_{TMF} -Lebensdauermodells bei individueller Auswertung. Darstellung des Schädigungsparameters D_{TMF} über der Zyklenzahl zum Versagen N_f für alle LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

7.2 Gemittelte Auswertung des Lebensdauermodells

Die Auswertung des Lebensdauermodells und die Bewertung seiner Streubänder erfolgt in diesem Abschnitt unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten. Es soll untersucht werden, wie sich die Unterstellung eines deterministisch festgelegten, mittleren Werkstoffverhaltens auf die Lebensdauervorhersage mit dem mechanismenbasierten Lebensdauermodell auswirkt. Hierbei werden die in Abschnitt 6.1 ermittelten statistischen Verteilungen der Werkstoffkennwerte temperaturspezifisch genutzt. Für jede Prüftemperatur wird ein Kennwert aus mittleren Werkstoffkennwerten bestimmt, indem die 50 %-Werte der Verteilungshypothesen temperaturspezifisch durch Integration der Dichteverteilungsfunktion ausgewertet werden. Basierend auf dem so definierten Werkstoffverhalten, kann für jede Prüftemperatur ein mittleres Werkstoffverhalten durch das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz berechnet werden. Die Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters eines Experiments (Index i) erfolgt unter Verwendung der experimentellen Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon_i$ und des experimentellen Spannungsverhältnisses $R_{\sigma,i}$. Es werden anstatt der individuellen Werkstoffkennwerte die

temperaturspezifischen mittleren Werkstoffkennwerte \bar{E} , $\bar{\sigma}_{cy}$ und \bar{N}' eingesetzt. Es folgt

$$D_{TMF,mit} = \frac{Z_{D,mit}}{\bar{\sigma}_{cy}} \cdot F$$

$$Z_{D,mit} = 1.45 \cdot \frac{\Delta\sigma_{eff}^2}{\bar{E}} + \frac{2.4}{\sqrt{1 + 3 \cdot \bar{N}'^{-1}}} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon^{Pl} \quad (7.4)$$

$$F = 1.$$

Die F -Funktion wird auch bei dieser Auswertung zu $F = 1$ gewählt.

Um eine statistische Bewertung der Streuung in der Lebensdauervorhersage durch das D_{TMF} -Modell zu ermöglichen, wird zunächst für jeden vorliegenden LCF Versuch, dessen individuelle Werkstoffkennwerte als robust bewertet wurden, ein individueller Vorfaktor $A_{mit,i}$ ermittelt, sodass

$$A_{mit,i} = \frac{N_{f,exp,i}}{D_{TMF,mit,i}^{-B^*}} \quad (7.5)$$

die vom Lebensdauermodell mit mittleren Werkstoffkennwerten vorhergesagte Zyklenzahl zum Versagen $\bar{N}_{f,mod,i}$ exakt der experimentell ermittelten $N_{f,exp,i}$ entspricht. Der Kennwert B^* wird aus Abschnitt 7.1 übernommen. Die so ermittelten Werte für $A_{mit,i}$ können nun wiederum in einer Stichprobe $\mathbf{S}_{A,mit}$ zusammengefasst und statistisch beschrieben werden.

In einem weiteren Schritt kann die deterministische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells mit mittleren Werkstoffkennwerten um diejenigen LCF Versuche erweitert werden, für die keine robuste Anpassung der Ramberg-Osgood Kennwerte erfolgen konnte. Auch für diese Versuche kann mit der gleichen Vorgehensweise, unter der Annahme eines mittleren Werkstoffverhaltens ein $D_{TMF,mit}$ Schädigungsparameter berechnet werden. Die Streuung der Lebensdauervorhersage wird wiederum anhand der Streuung innerhalb der Vorfaktoren $A_{mit,alle,i}$, die in der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,mit,alle}$ zusammengefasst sind, untersucht.

In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse der Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten zusammengestellt.

7.2.1 Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei gemittelter Auswertung

Für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10 liegen insgesamt 32 LCF Versuche bei den Prüftemperaturen 20 °C und 200 °C vor. Das für die deterministische Auswertung des Lebensdauermodells unterstellte mittlere Werkstoffverhalten wird durch die in der Tabelle 7.2 zusammengefassten temperaturspezifischen mittleren Ramberg-Osgood Kennwerte \bar{E} , $\bar{\sigma}_{cy}$ und \bar{N}' definiert. Diese werden als 50 %-Werte der in Tabelle 6.1 beschriebenen Verteilungen bestimmt.

Die sich für diese Variante der Lebensdauerbewertung für jeden LCF Versuch der beiden untersuchten Prüftemperaturen ergebenden Schädigungsparameter $D_{TMF,mit,i}$ und die daraus gemäß der Gleichung (7.5) ermittelten Werte für $A_{mit,i}$ sind in den Tabellen 7.3 und 7.4 zusammengefasst.

Sie bilden die Stichprobe $\mathbf{S}_{A,mit}$. Für den austenitischen Stahl ist eine weitere Untersuchung, die nicht robuste LCF Versuche berücksichtigt, nicht notwendig, da alle LCF Versuche bei

Tabelle 7.2: Zusammenfassung der für die deterministische Auswertung des Lebensdauermodells mit mittlerem Werkstoffverhalten genutzten Werkstoffkennwerte für den austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10.

Kennwert	mittlerer E-Modul \bar{E} [MPa]	mittlere zyklische Fließgrenze $\bar{\sigma}_{cy}$ [MPa]	mittlerer zyklischer Verfestigungsexponent \bar{N}'
20 °C	183159	539.6	6.85
200 °C	167700	367.0	5.87

Tabelle 7.3: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Auswertung des Lebensdauermodells mit mittleren Ramberg-Osgood Kennwerten für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 bei 20 °C.

Bezeichnung	T in °C	$\Delta\sigma$ in MPa	$\delta\epsilon^{pl}$	$D_{TMF,mit}$	N_f	A_{mit}
CLCF_WF1-RT_d1_051	20	645.8	0.0068	0.0062	7943	3.30
aRF_RT_d04	20	698.7	0.0117	0.0112	3410	4.49
aRF_RT_d05	20	698.7	0.0117	0.0111	2759	3.63
aRF_RT_d06	20	698.7	0.0117	0.0110	3171	4.18
aRF_RT_d07	20	643.1	0.0066	0.0065	10034	3.92
aRF_RT_d08	20	643.1	0.0066	0.0067	6965	2.72
aRF_RT_d09	20	643.1	0.0066	0.0067	7918	3.09
aRF_RT_d11	20	595.1	0.0039	0.0041	29973	3.82
aRF_RT_d14	20	549.0	0.0023	0.0026	85262	3.48
aRF_RT_d20	20	595.3	0.0039	0.0041	28078	3.60
LCF_R=-1_20_04_P71	20	610.1	0.0046	0.0050	10005	1.82
LCF_R=-1_20_06_P65	20	664.8	0.0083	0.0083	3162	2.00
LCF_R=-1_20_10_P70	20	730.9	0.0160	0.0147	1039	2.66
CLCF_RT_0.25-0.5_AGM_D_5	20	641.9	0.0066	0.0066	6473	2.46
CLCF_RT_0.35-0.75_AGM_D_6	20	694.5	0.0113	0.0108	2372	2.85

20 °C und 200 °C zu robusten Kennwerten führen.

Die Abbildung 7.6 zeigt die Streuung des Vorfaktors A_{mit} für die Auswertung des Lebensdauermodells mit mittleren Werkstoffeigenschaften. Die einzelnen Stichprobenwerte sind als Balken dargestellt. Weiterhin werden die zur statistischen Beschreibung der Streuung des Vorfaktors formulierten Verteilungshypothesen der Normalverteilung, der logarithmischen Normalverteilung, der Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern und der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern gezeigt. In Tabelle 7.5 sind die Verteilungsparameter dieser Verteilungshypothese zusammengefasst.

Die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern führt zur besten statistischen Beschreibung der Streuung innerhalb der Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{mit}}$ für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10. Sie führt auf das in Abbildung 7.7 dargestellte Streuband und zu einem Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten von $K_{mit} = 3.83$. Weiterhin sind in der Abbildung die für diese Art der Lebensdauerbewertung berechneten Werte für $D_{TMF,mit}$ über der Lebensdauer aufgetragen.

KAPITEL 7. DETERMINISTISCHE UND PROBABILISTISCHE
LEBENSDAUERBEWERTUNG

Tabelle 7.4: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Auswertung des Lebensdauermodells mit mittleren Ramberg-Osgood Kennwerten für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 bei 200 °C.

Bezeichnung	T in °C	$\Delta\sigma$ in MPa	$\delta\epsilon^{pl}$	$D_{TMF,mit}$	N_f	A_{mit}
CLCF_WF-12_d5_051	200	460.0	0.0190	0.0075	9678	4.94
CLCF_WF-12_d6_078	200	502.6	0.0346	0.0127	5012	8.04
aRF_200_d01	200	501.9	0.0343	0.0126	2777	4.37
aRF_200_d02	200	501.9	0.0342	0.0126	3044	4.79
aRF_200_d03	200	501.6	0.0341	0.0125	2711	4.23
aRF_200_d05	200	459.2	0.0188	0.0075	10559	5.26
aRF_200_d06	200	458.8	0.0187	0.0074	10843	5.34
aRF_200_d07	200	423.6	0.0109	0.0046	27520	4.87
aRF_200_d08	200	424.0	0.0110	0.0047	26771	4.80
aRF_200_d09	200	423.6	0.0109	0.0046	27213	4.82
aRF_200_d10	200	390.5	0.0064	0.0029	51708	3.27
aRF_200_d11	200	390.1	0.0063	0.0029	53807	3.36
aRF_200_d12	200	390.3	0.0064	0.0029	51517	3.24
aRH_2_d01	200	501.9	0.0342	0.0126	4452	7.00
aRH_2_d02	200	458.9	0.0187	0.0074	10339	5.11
aRH_2_d03	200	423.7	0.0110	0.0047	23719	4.22
aRH_2_d04	200	390.1	0.0063	0.0029	54000	3.37

Tabelle 7.5: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung des Vorfaktors A_{mit} des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei deterministischer Auswertung unter Verwendung von gemittelten Werkstoffkennwerten des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

Verteilungshypothese	a_W	b_W	T_W	A_D^*	P_{Wert}
3 Parameter Weibull	2.74	1.94	1.60	0.34	0.466

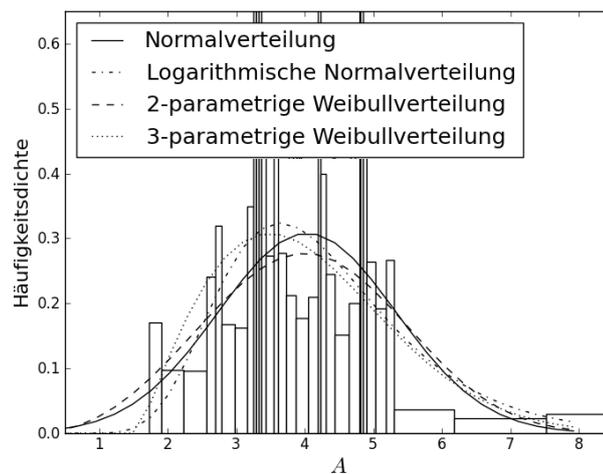


Abbildung 7.6: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors A_{mit} des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei deterministischer Auswertung der LCF Versuche mit den gemittelten Werkstoffkennwerten des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

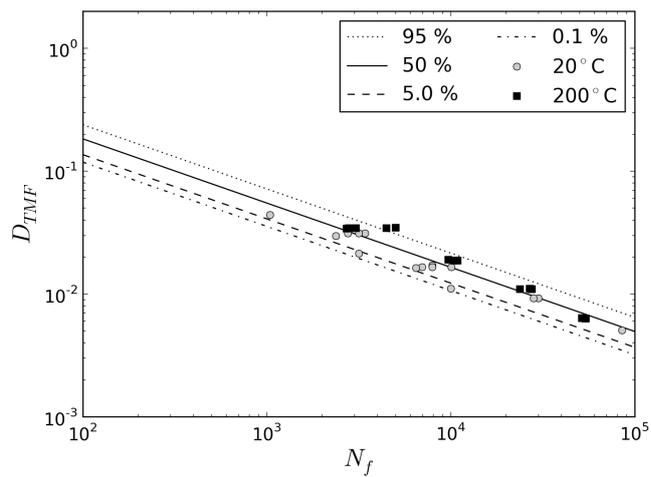


Abbildung 7.7: Ergebnisse für die deterministische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung der mittleren temperaturspezifischen Werkstoffkennwerte für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f für alle LCF Versuche, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

7.2.2 Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei gemittelter Auswertung

Für die Nickelbasislegierung liegen insgesamt 37 LCF Versuche vor, deren Werkstoffkennwerte als robust bewertet werden (siehe Tabelle 5.12). Für diese Versuche ist in Abbildung 7.8 das Ergebnis der statistischen Auswertung der Streuung des Vorfaktors A_{mit} gezeigt, die sich für die Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von mittleren Werkstoffeigenschaften ergibt, wenn nur die als robust bewerteten Versuche in die Auswertung einfließen. Neben den Verteilungshypothesen sind die Stichprobenwerte von $\mathbf{S}_{A_{\text{mit}}}$ als Balken dargestellt.

Für die statistische Beschreibung der Streuung des Vorfaktors A_{mit} des D_{TMF} -Lebensdauermodells eignet sich die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern am besten. Sie führt auf einen P-Wert von $P_{\text{Wert}} = 0.445$. Es ergibt sich ein Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten von $K_{\text{mit}} = 9.42$. In der Abbildung 7.9 sind die unter Verwendung der mittleren Werkstoffeigenschaften berechneten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der experimentell ermittelten Zyklenzahl zum Versagen aufgetragen. Das Streuband im Lebensdauermodell wird durch die Linien konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit verdeutlicht. Es werden lediglich die LCF Versuche ausgewertet, die die Bestimmung von robusten Ramberg-Osgood Kennwerten erlauben.

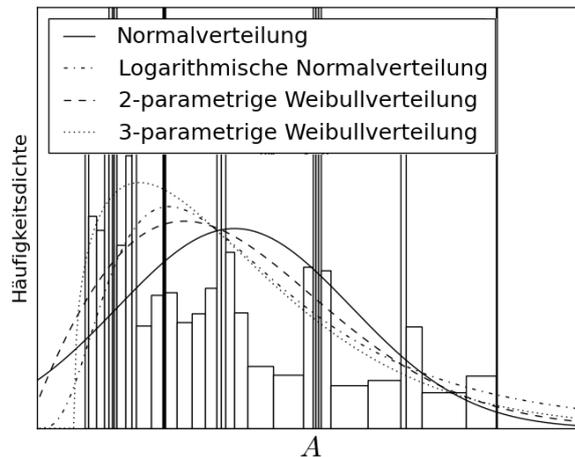


Abbildung 7.8: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei deterministischer Auswertung unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken) für alle LCF Versuche, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

Für die Prüftemperaturen ab 1000°C liegen insgesamt 47 LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 vor. Unabhängig von ihrer Robustheitsbewertung kann für jeden dieser Versuche das mittlere Werkstoffverhalten unterstellt werden und die Beschreibung der Streuung des Vorfaktors $A_{\text{mit,alle}}$ durch statistische Verteilungen erfolgen. Die Vorgehensweise unterscheidet sich hierbei nicht von der Vorgehensweise im obigen Absatz. Die Abbildung 7.10 stellt das Ergebnis der statistischen Beschreibung dar.

Neben den Verteilungshypothesen sind die Stichprobenwerte von $\mathbf{S}_{A_{\text{mit,alle}}}$ als Balken gezeigt.

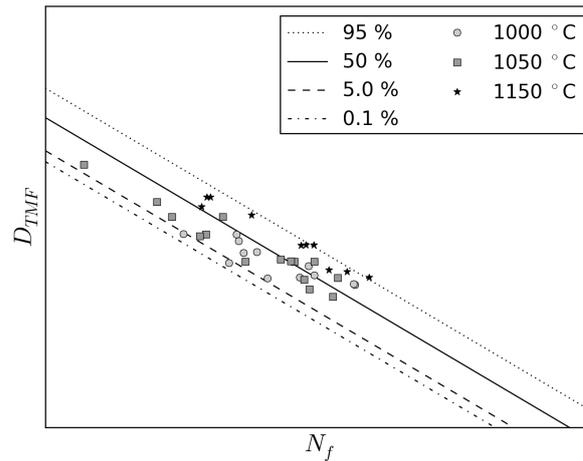


Abbildung 7.9: Ergebnisse für die deterministische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung der mittleren temperaturspezifischen Werkstoffkennwerten der Nickelbasislegierung MAR M247. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f für alle LCF Versuche, deren Werkstoffkennwerte robust bewertet sind.

Die Verteilungshypothese der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern führt mit einem P-Wert von $P_{\text{Wert}} = 0.656$ zur besten Beschreibung. Es ergibt sich ein Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten von $K_{\text{mit,alle}} = 11.0$. In Abbildung 7.11 sind die unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten berechneten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der Zyklenzahl zum Versagen mit den Linien konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit aufgetragen.

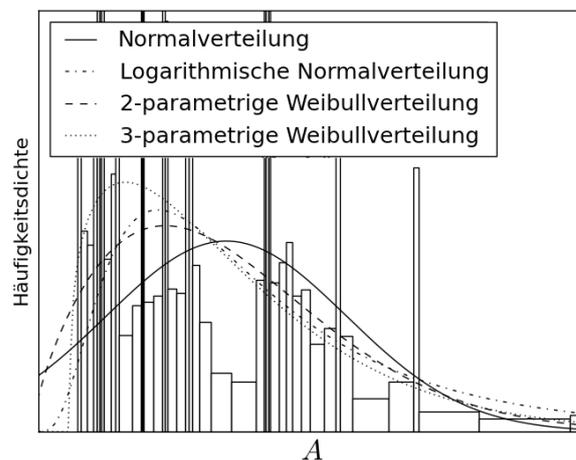


Abbildung 7.10: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei individueller Auswertung unter Verwendung von mittleren temperaturspezifischen Werkstoffkennwerten der Nickelbasislegierung MAR M247. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken) für alle LCF Versuche ab einer Prüftemperatur von 1000 °C

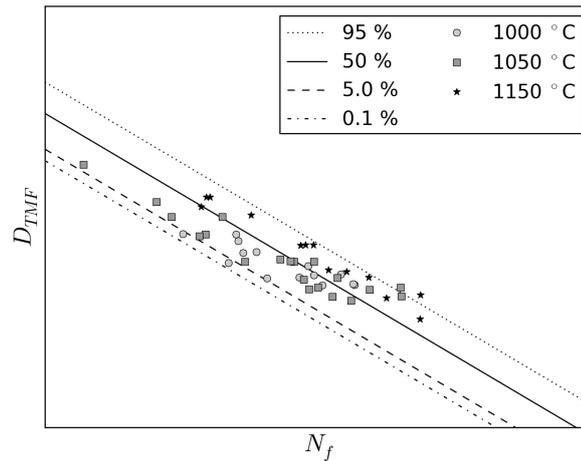


Abbildung 7.11: Ergebnisse für die deterministische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von mittleren temperaturspezifischen Werkstoffkennwerten der Nickelbasislegierung MAR M247. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f . Auswertung aller LCF Versuche ab einer Prüftemperatur von 1000 °C.

7.3 Probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells ohne Berücksichtigung von Korrelationen

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise bei der probabilistischen Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Berücksichtigung von statistisch verteilten Werkstoffkennwerten durch eine Monte-Carlo Simulation erläutert.

Anstatt für jeden der n vorliegenden LCF Versuche nur einen einzelnen deterministisch festgelegten D_{TMF} -Schädigungsparameter zu ermitteln, werden die in Abschnitt 6.1 ermittelten statistischen Verteilungen genutzt, um statistisch verteilte, zufällige Kennwerte zu generieren. Es resultieren synthetische, probabilistische Kennwertsätze. Unter der Annahme, dass diese die Streuung im realen Werkstoffverhalten abbilden, lassen sich synthetische Versuchsdaten durch die Berechnung der Modellspannungen erzeugen.

Die bereits in Abschnitt 3.4 erläuterte Monte-Carlo Simulation wird im Rahmen dieser Arbeit dazu genutzt, die Einflüsse von statistisch verteilten, zufälligen Werkstoffkennwertkombinationen auf die Streuung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells abzuschätzen. Neben den wahrscheinlichkeitsbehafteten Aussagen zum Auftreten von besonders ungünstigen Kennwertkombinationen kann eine statistische Auswertung der Streubänder der Lebensdauer vorhersage Aufschluss darüber geben, wie sich die probabilistische Betrachtungsweise auf die Unsicherheit der Lebensdauerabschätzung auswirkt. Das detaillierte Vorgehen bei dieser probabilistischen Auswertung des Lebensdauermodells ist im Folgenden erläutert.

Für jeden LCF Versuch (Index i) wird eine bestimmte Anzahl an Monte-Carlo Ziehungen n_{MC} durchgeführt, sodass sich die Gesamtanzahl n_{rand} der D_{TMF} -Auswertungen aus

$$n_{rand} = n \cdot n_{MC} \quad (7.6)$$

ergibt. Für jede Auswertung werden aus den temperaturspezifischen statistischen Verteilungen der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes unkorrelierte Zufallszahlen gezogen. Hierbei wird die Funktionalität des in Abschnitt 3.4.1 erläuterten Zufallszahlengenerators genutzt. Die Zufallszahlen, die der statistischen Verteilung der Werkstoffkennwerte folgen, werden als E_{rand} , $\sigma_{cy,\text{rand}}$ und N'_{rand} interpretiert und legen ein zufälliges Werkstoffverhalten fest. Es wird angenommen, dass dieses zufällige Werkstoffverhalten aus der Grundgesamtheit aller theoretisch möglichen Werkstoffverhalten des untersuchten Werkstoffs stammt. Ausgehend von diesen zufällig gezogenen Kennwerten, kann mittels der experimentellen Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon$ und dem Spannungsverhältnis R_σ die Spannungsantwort des Ramberg-Osgood Modells berechnet und mit der Gleichung (4.3) der Schädigungsparameter $D_{TMF,\text{rand}}$ für ein Experiment bestimmt werden.

Die statistische Auswertung der Streuung der Lebensdauervorhersage durch das probabilistisch ausgewertete D_{TMF} -Modell erfolgt basierend auf der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,\text{rand}}$. Sie enthält n_{rand} Werte für den Vorfaktor A_{rand} , die aus

$$A_{\text{rand},ik} = \frac{N_{f,\text{exp},i}}{D_{TMF,\text{rand},ik}^{-B^*}} \quad (7.7)$$

so berechnet werden, dass die experimentell ermittelte Zyklenzahl zum Versagen $N_{f,\text{exp},i}$ exakt der vom D_{TMF} -Lebensdauermodell vorhergesagten Lebensdauer $N_{f,\text{mod},ik}$ entspricht. Hierbei kennzeichnet der Index i wiederum den auszuwertenden LCF Versuch. Der Index k bezeichnet die fortlaufende Anzahl der Monte-Carlo Ziehungen pro LCF Versuch mit $1 \leq k \leq n_{MC}$. Die Streubänder des probabilistisch ausgewerteten D_{TMF} -Lebensdauermodell werden durch die statistische Verteilungshypothese bestimmt. Zur Beschreibung wird diejenige Verteilungshypothese genutzt, deren korrigierter Anderson-Darling Parameter A_D^* im Vergleich mit den anderen formulierten Verteilungshypothesen am geringsten ausfällt.

Alle Ergebnisse der probabilistischen Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells sind einer Streuung unterworfen, die aus der Zufälligkeit der Werkstoffkennwerte in die Lebensdauerabschätzung resultiert. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse vorgestellt, die diese Streuungseinflüsse und ihre Auswirkungen auf die Monte-Carlo Ergebnisse quantifizieren. Ziel dieser Untersuchungen ist es den Umfang der Monte-Carlo Simulation mit Hinblick auf die Stabilität ihrer Ergebnisse festzulegen. In den Abschnitten 7.3.2 und 7.3.3 sind anschließend die Ergebnisse der probabilistischen Lebensdauerauswertung für den austenitischen Stahl und für die Nickelbasislegierung zusammengefasst.

7.3.1 Stabilität der Ergebnisse der Monte-Carlo Methode

Das Ergebnis der probabilistischen Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells ist nicht deterministisch, da es von Eingangsgrößen abhängt, die zufällig aus statistischen Verteilungen gezogen werden. Wird eine Monte-Carlo Simulation mehrfach wiederholt, so ist ihr Ergebnis ebenfalls dem Zufall unterworfen. Wie groß die Streuung im Ergebnis der Monte-Carlo Simulation ausfällt, hängt zum einen vom Streuungsverhalten der Eingangsgrößen und zum anderen davon ab, wie viele Monte-Carlo Ziehungen n_{MC} durchgeführt werden. Mit einer zunehmenden Anzahl an Ziehungen konvergiert das Ergebnis der Monte-Carlo Simulation gegen

einen quasi deterministischen Wert und die Streuung im Ergebnis der Studie verschwindet. Um einer bestimmten Anzahl von Monte-Carlo Ziehungen n_{MC} ein bestimmtes Streuungsniveau zuordnen zu können, wird eine Studie durchgeführt. Basierend auf ihrem Resultat wird für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Problemstellung eine konkrete Aussage über den nötigen Umfang der Monte-Carlo Simulation möglich.

Es werden für unterschiedliche Werte von n_{MC} jeweils 40 Monte-Carlo Simulationen durchgeführt. In jeder dieser 40 Simulationen wird die Streuung des Vorfaktors A des Lebensdauermodells anhand von Verteilungshypothesen beschrieben und durch die bereits vorgestellten probabilistischen Methoden bewertet. Für die Monte-Carlo Simulationen werden die statistischen Beschreibungen für die Kennwertstreuung der Nickelbasislegierung genutzt um zufällig statistisch verteilte Werkstoffkennwerte zu generieren. Für die Nickelbasislegierung stehen hierzu 47 LCF Versuche zur Verfügung, sodass sich

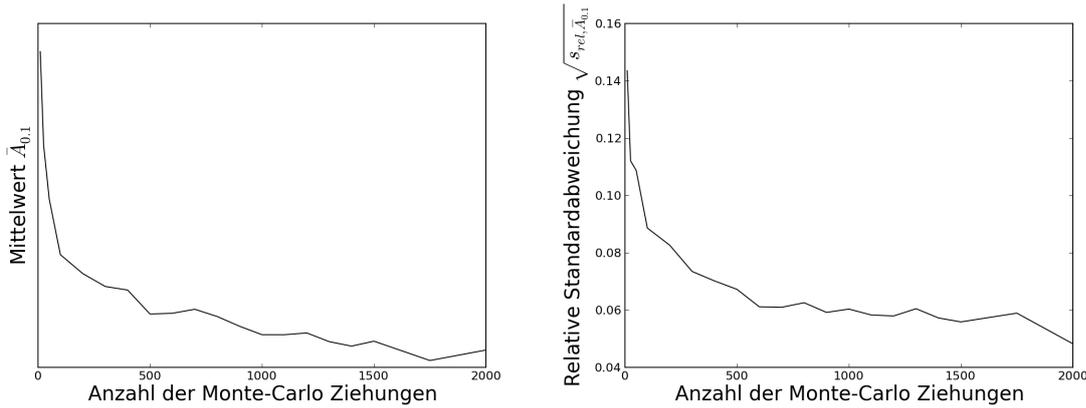
$$n_{\text{rand}} = 47 \cdot n_{MC}$$

ergibt. Für jeden untersuchten Wert von n_{MC} resultieren 40 verschiedene Verteilungshypothesen, die jeweils die Streuung in einer der 40 verschiedenen $\mathbf{S}_{A,\text{rand}}$ -Stichproben bestmöglich beschreiben. Basierend auf diesen Verteilungshypothesen kann für jede Monte-Carlo Simulation jeweils ein $A_{0,1}$ -Wert ermittelt werden. Zur Bewertung der Streuung innerhalb der Ergebnisse der Monte-Carlo Simulationen für einen bestimmten Wert von n_{MC} , werden diese Werte in einer Stichprobe $\mathbf{S}_{A_{0,1}}$ zusammengefasst. Von dieser Stichprobe können durch die Gleichungen (3.16) und (3.17) der Mittelwert $\bar{A}_{0,1}$ beziehungsweise die relative Stichprobenvarianz $s_{\text{rel},\bar{A}_{0,1}}$ bezogen auf den Mittelwert bestimmt werden. Aus der Stichprobenvarianz kann die relative Standardabweichung innerhalb der Stichprobe $\sqrt{s_{\text{rel},\bar{A}_{0,1}}}$ mit Gleichung (3.18) berechnet werden. Diese wird als Bewertungskriterium für die Stabilität des Ergebnisses der Monte-Carlo Simulation herangezogen. Je kleiner die relative Standardabweichung innerhalb der 40 untersuchten Werte für $A_{0,1}$ ausfällt, desto stabiler fällt das Ergebnis der untersuchten Auswertung aus.

Die Abbildung 7.12 fasst die Ergebnisse der oben beschriebenen Studie zusammen. Für $10 \leq n_{MC} \leq 2000$ werden die Mittelwerte der berechneten Stichproben und die zugehörigen relativen Standardabweichungen dargestellt. Mit zunehmender Anzahl an Monte-Carlo Ziehungen kann die relative Standardabweichung im Ergebnis der Monte-Carlo Simulationen bis auf $\sqrt{s_{\text{rel},\bar{A}_{0,1}}} \approx 0.05$ reduziert werden. Auch der zugehörige Mittelwert $\bar{A}_{0,1}$ der Studien zeigt eine abnehmende Tendenz bei zunehmender Anzahl an Monte-Carlo Ziehungen.

Da mit einer zunehmenden Anzahl an Monte-Carlo Ziehungen der Berechnungsaufwand und die Berechnungsdauer stark ansteigen, wird die Anzahl der Ziehungen bei der probabilistischen Auswertung der Nickelbasislegierung auf $n_{MC} = 500$ beschränkt. Die relative Standardabweichung bei diesem Umfang von $n_{\text{rand}} = 23500$ der Monte-Carlo Simulation beträgt $\sqrt{s_{\text{rel},\bar{A}_{0,1}}} = 0.069$.

Für den austenitischen Stahl liegen lediglich 32 LCF Versuche vor. Deshalb wird bei der Auswertung des austenitischen Stahls die Anzahl der Monte-Carlo Ziehungen auf $n_{MC} = 735$ erhöht, sodass sich die Gesamtanzahl an zufällig gezogenen Werkstoffkennwerten zu $n_{\text{rand}} = 23520$ ergibt.



(a) Mittelwert $\bar{A}_{0,1}$ über der Anzahl der Monte-Carlo Ziehungen n_{MC} (b) Relative Standardabweichung $\sqrt{s_{rel, \bar{A}_{0,1}}}$ über der Anzahl der Monte-Carlo Ziehungen n_{MC}

Abbildung 7.12: Ergebnisse der Studie zur Stabilität der Monte-Carlo Simulation.

7.3.2 Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei probabilistischer Auswertung ohne Korrelationen

Für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 liegen insgesamt 32 LCF Versuche bei den Prüftemperaturen von 20 °C und 200 °C vor. Für diese Prüftemperaturen sind statistische Verteilungen bekannt, die die Streuung der Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte beschreiben. Sie sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Aus diesen Verteilungen werden temperaturspezifisch für jeden vorliegenden LCF Versuch $n_{MC} = 735$ zufällige Kennwertsätze gezogen, sodass die Monte-Carlo Simulation auf insgesamt $n_{rand} = 23520$ zufälligen Kennwertsätzen basiert. In diesem Abschnitt werden keine Korrelationen zwischen den gezogenen Werkstoffkennwerten berücksichtigt.

Die statistische Auswertung der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,rand}$ führt auf die in Abbildung 7.13 dargestellten Verteilungshypothesen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Darstellung der einzelnen Stichprobenwerte in Balkenform verzichtet. Die Weibull-Verteilung mit drei Verteilungsparametern beschreibt die Streuung innerhalb der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,rand}$ am besten und führt zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter. In der Tabelle 7.6 sind die Verteilungsparameter dieser Verteilung, der korrigierte Anderson-Darling Parameter und der daraus ermittelte P-Wert zusammengefasst. Dieser ergibt sich zu $P_{Wert} = 0.0$. Dieses Ergebnis kann durch den großen Stichprobenumfang begründet werden [64] und ist in Abschnitt 9 diskutiert. Basierend auf dieser statistischen Verteilung ergibt sich das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten K (siehe Gleichung (7.3)) für die probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells ohne die Berücksichtigung von Korrelationen zu $K_{rand} = 7.63$. Damit fällt die Streuung im Vorfaktor A_{rand} des Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung circa doppelt so groß aus wie bei der deterministischen Auswertung mit individuellen Werkstoffkennwerten (siehe Abschnitt 7.1.1).

In der Abbildung 7.14 sind die im Rahmen der probabilistischen Auswertung ermittelten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der experimentell ermittelten Zyklenzahl zum Versagen aufgetragen. Durch die Linien konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit wird das Streuband in der Lebensdauervorhersage verdeutlicht.

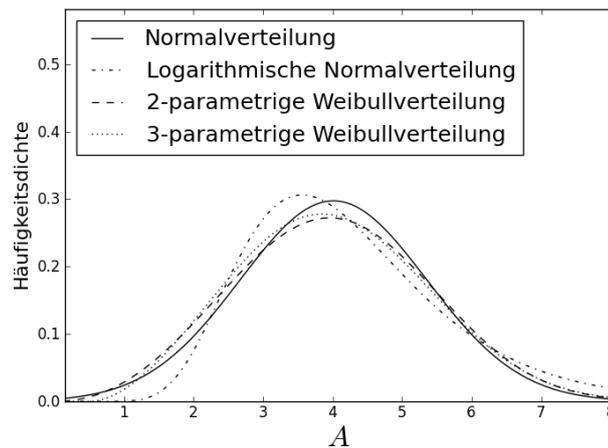


Abbildung 7.13: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, unkorrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen für alle LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 für die Prüftemperaturen von 20 °C und 200 °C.

Tabelle 7.6: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung des Vorfaktors A_{rand} des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, unkorrelierten Werkstoffkennwerten des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

Verteilungshypothese	a_W	b_W	T_W	A_D^*	P_{Wert}
3 Parameter Weibull	3.92	2.74	0.52	148.32	0.0

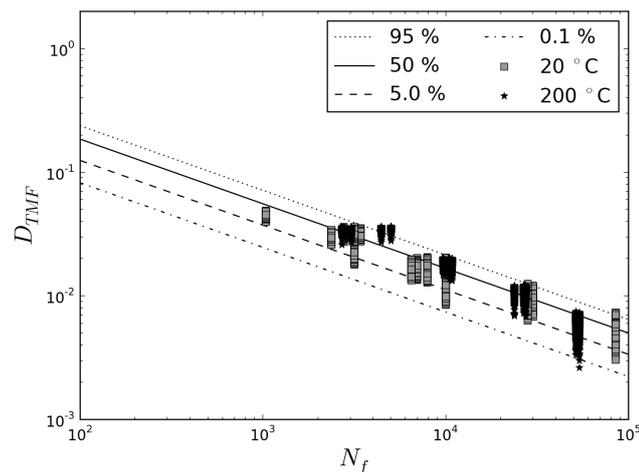


Abbildung 7.14: Ergebnisse für die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von statistisch verteilten, unkorrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f . Auswertung aller LCF Versuche für die Prüftemperaturen von 20 °C und 200 °C.

7.3.3 Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei probabilistischer Auswertung ohne Korrelationen

Für die Nickelbasislegierung liegen insgesamt 47 LCF Versuche ab einer Prüftemperatur von 1000 °C vor. Die Monte-Carlo Simulation und damit die probabilistische Bewertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells erfolgt basierend auf $n_{rand} = 23500$ zufällig aus statistischen Verteilungen gezogenen Werkstoffkennwertsätzen. In diesem Abschnitt werden keine Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten berücksichtigt. Die statistische Auswertung der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,rand}$ führt auf die in Abbildung 7.15 dargestellten Verteilungshypothesen. Auf die Darstellung der einzelnen Stichprobenwerte als Balkendiagramm wird aus

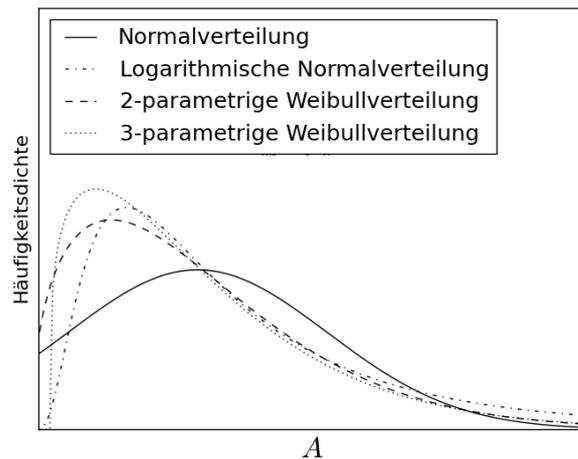


Abbildung 7.15: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, unkorrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen für alle LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 ab einer Prüftemperatur von 1000 °C

Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Auch bei der probabilistischen Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells führt die statistische Beschreibung durch die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter. Der dazugehörige P-Wert ergibt sich zu $P_{Wert} = 0.0$. Dieses Ergebnis kann durch den großen Stichprobenumfang begründet werden [64]. Zur Ermittlung aussagekräftiger P-Werte wird in Kapitel 9 eine mögliche Vorgehensweise diskutiert. Das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten K_{rand} ergibt sich zu $K_{rand} = 22.7$ und fällt somit circa doppelt so groß aus wie bei der deterministischen Auswertung des Lebensdauermodells. In der Abbildung 7.16 sind die im Rahmen der probabilistischen Auswertung ermittelten D_{TMF} -Schädigungsparameter über der experimentell ermittelten Zyklenzahl zum Versagen aufgetragen. Durch die Linien konstanter Ausfallwahrscheinlichkeit wird das Streuband in der Lebensdauervorhersage verdeutlicht.

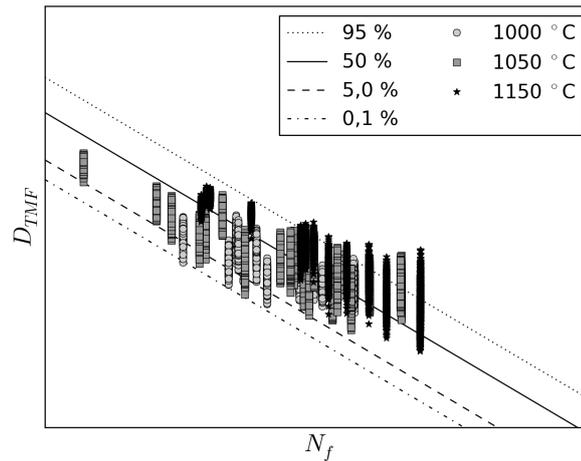


Abbildung 7.16: Ergebnisse für die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von statistisch verteilten, unkorrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f . Auswertung aller LCF Versuche ab einer Prüftemperatur von 1000 °C.

7.4 Probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells unter Berücksichtigung von Korrelationen

In diesem Abschnitt wird die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells erweitert. Neben den statistischen Verteilungen zur Beschreibung der Kennwertstreuung, die aus Abschnitt 6.1 bekannt sind, werden die experimentell ermittelten Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes berücksichtigt. Für jede Prüftemperatur können basierend auf der Gleichung (3.40) die Korrelationskoeffizienten nach Pearson R_{Pea} und Spearman R_{Spe} zwischen den robust bewerteten Ramberg-Osgood Kennwerten aus den LCF Versuchen einer Prüftemperatur ermittelt werden. Zur Bewertung der linearen Korrelationskoeffizienten wird der in Abschnitt 3.2.3.1 vorgestellte T-Test genutzt. Für die probabilistische Auswertung des Lebensdauermodells werden lediglich diejenigen Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten berücksichtigt, die zu einem signifikanten Testergebnis führen. Liegt der im T-Test ermittelte P-Wert oberhalb des Signifikanzniveaus von $\frac{\alpha}{2} = 0.1$ (siehe Abschnitt 3.2.3.1), so wird davon ausgegangen, dass die beiden untersuchten Merkmale unkorreliert sind. Liegt eine signifikante Korrelation zwischen zwei Werkstoffkennwerten bei einer Prüftemperatur vor, so werden mithilfe des im Abschnitt 3.4.2 erläuterten Algorithmus die ermittelten Korrelationskoeffizienten zwischen den zufällig generierten Werkstoffkennwerten eingestellt. Die unkorrelierten Werkstoffkennwerte, die zufällig aus statistischen Verteilungen gezogen werden, werden aus dem Abschnitt 7.3 übernommen. So wird ein direkter Vergleich der Ergebnisse beider probabilistischer Auswerteverfahren möglich und der Einfluss von Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten auf das Streuband des D_{TMF} -Lebensdauermodells wird ersichtlich.

Die Auswertung des Streubands im D_{TMF} -Lebensdauermodell erfolgt, wie bereits in Abschnitt 7.3 erläutert. Die statistisch verteilten aber nun temperaturspezifisch korrelierten

Werkstoffkennwertsätze bestehen aus den Werkstoffkennwerten E_{korr} , $\sigma_{cy,\text{korr}}$ und N'_{korr} . Sie erlauben unter Verwendung der experimentellen Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon$ und dem Spannungsverhältnis R_σ die Berechnung der Spannungsantwort des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes. Basierend auf der Gleichung (4.3) kann für der Schädigungsparameter $D_{TMF,\text{korr}}$ für einen LCF Versuch unter Verwendung eines Kennwertsatzes berechnet werden.

Die statistische Auswertung der Streuung der Lebensdauervorhersage durch das probabilistisch ausgewertete D_{TMF} -Modell erfolgt durch die statistische Beschreibung der Streuung in der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,\text{korr}}$. Sie enthält n_{rand} Werte für den Vorfaktor $A_{\text{korr},ik}$, die aus

$$A_{\text{korr},ik} = \frac{N_{f,\text{exp},i}}{D_{TMF,\text{korr},ik}^{-B^*}} \quad (7.8)$$

so berechnet werden, dass die experimentell ermittelte Zyklenzahl zum Versagen $N_{f,\text{exp},i}$ exakt durch das Lebensdauermodell vorhergesagt wird. Der Index i kennzeichnet den auszuwertenden LCF Versuch und der Index k die fortlaufende Anzahl der Monte-Carlo Ziehungen pro LCF Versuch mit $k \leq n_{\text{MC}}$ bezeichnet. Die Streubänder des mit korrelierten Werkstoffkennwerten probabilistisch ausgewerteten D_{TMF} -Lebensdauermodells werden durch die statistische Verteilungshypothese festgelegt, deren korrigierter Anderson-Darling Parameter A_D^* im Vergleich mit den anderen im Rahmen der statistischen Bewertung formulierten Verteilungshypothesen am geringsten ausfällt.

In den folgenden Abschnitten sind die Ergebnisse für die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells mit statistisch verteilten, korrelierten Kennwerten für den austenitischen Stahl und für die Nickelbasislegierung zusammengefasst.

7.4.1 Ergebnisse für den austenitischen Stahl bei probabilistischer Auswertung mit Korrelationen

In der Tabelle 7.7 sind die Ergebnisse der Korrelationskoeffizienten nach Pearson (Abschnitt 3.3.1) und Spearman (Abschnitt 3.3.2) zusammengefasst, die sich zwischen den Kennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz ergeben.

Zwischen den robusten Ramberg-Osgood Kennwerten, die aus LCF Versuchen bei einer Prüftemperatur von 20 °C ermittelt werden, bestehen keine signifikanten Korrelationen. Die Ramberg-Osgood Kennwerte, die anhand der LCF Versuche bei einer Prüftemperatur von 200 °C ermittelt werden, weisen bei einem Signifikanzniveau von $\frac{\alpha}{2} = 0.1$ signifikante Korrelationen auf. Für diese Prüftemperatur werden Korrelationen zwischen den zufällig gezogenen statistisch verteilten Werkstoffkennwerten berücksichtigt. Hierzu wird der in Abschnitt 3.4.2 vorgestellte Algorithmus herangezogen. Der Ramberg-Osgood Verfestigungsexponent korreliert sowohl mit der zyklischen Fließgrenze σ_{cy} als auch mit dem E-Modul E . Während die Korrelation zwischen dem Verfestigungsexponenten und der Fließgrenze positiv ausfällt, weist der Korrelationskoeffizient zwischen dem Verfestigungsexponenten und dem E-Modul ein negatives Vorzeichen auf.

Die Abbildung 7.17 zeigt die im Rahmen der Monte-Carlo Simulation gezogenen, unkorrelierten Kennwertpaarungen für die Prüftemperatur von 200 °C und vergleicht diese mit den durch den Algorithmus modifizierten, korrelierten Paarungen. Die Bewertung des Streu-

KAPITEL 7. DETERMINISTISCHE UND PROBABILISTISCHE
LEBENSDAUERBEWERTUNG

Tabelle 7.7: Zusammenfassung der Bewertungsergebnisse durch den T-Test zur Bewertung der Signifikanz von Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10.

T [°C]	Kennwert	Kennwert	R_{Pea}	R_{Spe}	Ergebnis T-Test
20	E	σ_{cy}	0.422	0.344	nicht signifikant $P_{Wert} = 0.1031$
20	E	N'	0.082	0.026	nicht signifikant $P_{Wert} = 0.7635$
20	N'	σ_{cy}	0.376	0.547	nicht signifikant $P_{Wert} = 0.1506$
200	E	σ_{cy}	-0.381	-0.162	signifikant $P_{Wert} = 0.081$
200	E	N'	-0.733	-0.579	signifikant $P_{Wert} = 0.0001$
200	N'	σ_{cy}	0.781	0.584	signifikant $P_{Wert} = 0.0$

bands des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von statistisch verteilten korrelierten Werkstoffkennwerten bei der probabilistischen Auswertung erfolgt basierend auf den in der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,korr}$ zusammengefassten Stichprobenwerte für $A_{korr,ik}$.

Die Abbildung 7.18 zeigt die ermittelten Verteilungshypothesen zur statistischen Beschreibung der Unsicherheit im Vorfaktor A des probabilistisch ausgewerteten Lebensdauermodells.

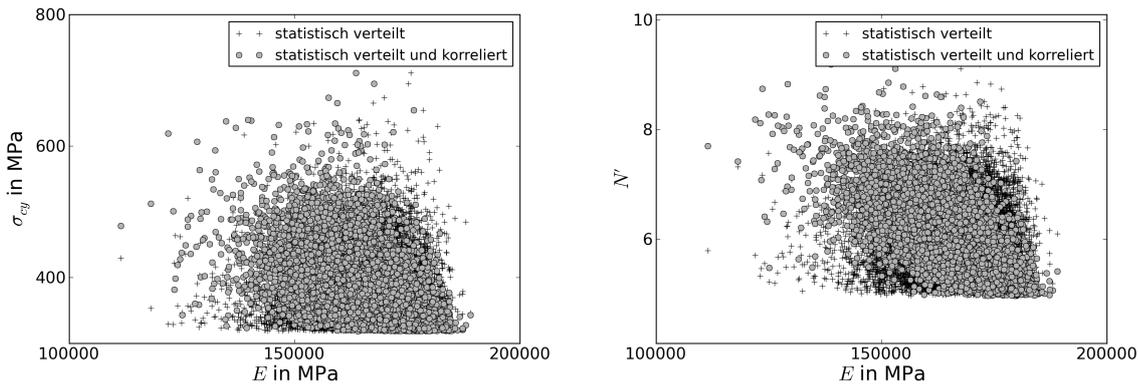
Die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern führt zum kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter und liefert somit die beste statistische Beschreibung der untersuchten Stichprobe. Ihre Verteilungsparameter, der errechnete korrigierte Anderson-Darling Parameter und der zugehörige P-Wert sind in Tabelle 7.8 zusammengefasst.

Tabelle 7.8: Zusammenfassung der Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten des austenitischen Stahls X6 CrNiNb 18-10.

Verteilungshypothese	a_W	b_W	T_W	A_D^*	P_{Wert}
3 Parameter Weibull	3.77	2.60	0.6628	123.9	0.0

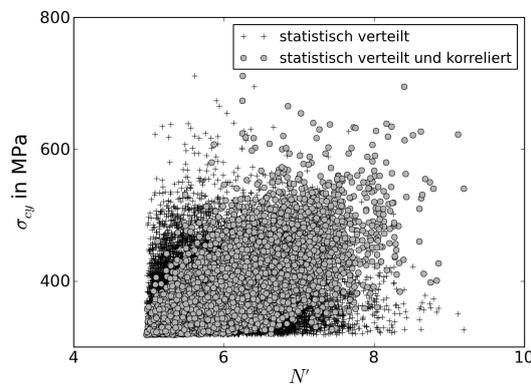
Aus dieser Verteilung lässt sich das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten zu $K_{korr} = 6.92$ berechnen. In der Abbildung 7.19 sind über der experimentell ermittelten Zyklenzahl zum Versagen N_f die D_{TMF} -Schädigungsparameter aufgetragen, die sich für die probabilistische Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten ergeben.

7.4. PROBABILISTISCHE AUSWERTUNG DES LEBENSDAUERMODELLS UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON KORRELATIONEN



(a) E und σ_{cy}

(b) E und N'



(c) σ_{cy} und N'

Abbildung 7.17: Darstellung der korrelierten und unkorrelierten Wertepaare der statistisch verteilten Werkstoffkennwerte des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 bei einer Prüftemperatur von 200 °C.

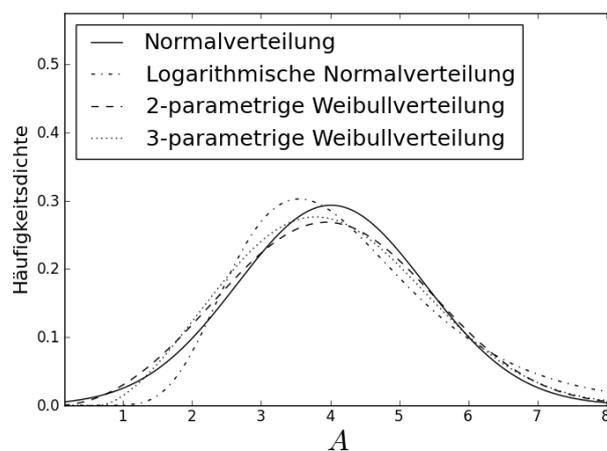


Abbildung 7.18: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen für alle LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 für die Prüftemperaturen von 20 °C und 200 °C.

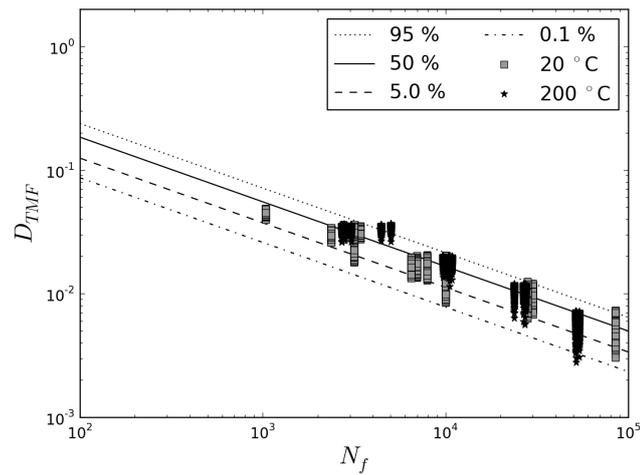


Abbildung 7.19: Ergebnisse für die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f . Auswertung aller LCF Versuche für die Prüftemperaturen von 20°C und 200°C .

7.4.2 Ergebnisse für die Nickelbasislegierung bei probabilistischer Auswertung mit Korrelationen

In der Tabelle 7.9 sind die Ergebnisse der Korrelationskoeffizienten nach Pearson (Abschnitt 3.3.1) und Spearman (Abschnitt 3.3.2) zusammengefasst, die sich zwischen den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz ergeben. Da die Ergebnisse der Vertraulichkeit unterliegen, wird für jede temperaturspezifische Werkstoffkennwertkombination lediglich angegeben, ob die beiden ermittelten Korrelationskoeffizienten als signifikant bewertet werden oder nicht. Während für die Prüftemperaturen von 1000 °C und 1050 °C le-

Tabelle 7.9: Zusammenfassung der Bewertungsergebnisse durch den T-Test zur Bewertung der Signifikanz von Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für die Nickelbasislegierung MAR M247.

T [°C]	Kennwert	Kennwert	Ergebnis T-Test
1000	E	σ_{cy}	nicht signifikant
1000	E	N'	nicht signifikant
1000	N'	σ_{cy}	signifikant
1050	E	σ_{cy}	nicht signifikant
1050	E	N'	signifikant
1050	N'	σ_{cy}	nicht signifikant
1150	E	σ_{cy}	signifikant
1150	E	N'	signifikant
1150	N'	σ_{cy}	signifikant

diglich eine der drei Werkstoffkennwertkombinationen eine signifikante Korrelation aufweist, müssen für die Prüftemperatur von 1150 °C die Korrelationen für alle Kennwertkombinationen berücksichtigt werden. Geprüft wird die Signifikanz der Korrelation für ein Signifikanzniveau von $\frac{\alpha}{2} = 0.1$ (siehe Abschnitt 3.2.3.1). Die Abbildung 7.20 zeigt den Vergleich der nicht korrelierten Kennwertpaarungen, wie sie bei der zufälligen Ziehung aus den statistischen Verteilungen resultieren mit den durch den Algorithmus (siehe Abschnitt 3.4.2) modifizierten, korrelierten Paarungen.

In den in Abbildung 7.20 dargestellten Kennwertpaarungen werden die unterschiedlichen Charakteristiken der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern deutlich. Obwohl die Streuung aller Werkstoffkennwerte bei einer Prüftemperatur von 1150 °C bestmöglich durch die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern beschrieben wird (siehe Tabelle 6.2 und Abbildungen 6.9 und 6.12), weisen lediglich die für den Werkstoffkennwert N' gezogenen, statistisch verteilten Kennwerte einen erkennbaren Schwellwert auf. E und σ_{cy} sind bei der Prüftemperatur 1150 °C positiv korreliert. Die Korrelation zwischen N' und den beiden anderen Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes fällt negativ aus. Die Bewertung des Streubands des D_{TMF} -Lebensdauermodells für statistisch verteilte, korrelierte Werkstoffkennwerte im Rahmen der probabilistischen Auswertung erfolgt basierend auf der Stichprobe $\mathbf{S}_{A,\text{korr}}$. Die Abbildung 7.21 zeigt die ermittelten Verteilungshypothesen zur Beschreibung der Unsicherheit im Vorfaktor A des Lebensdauermodells. Die Beschreibung der Stichprobe durch die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern führt auf

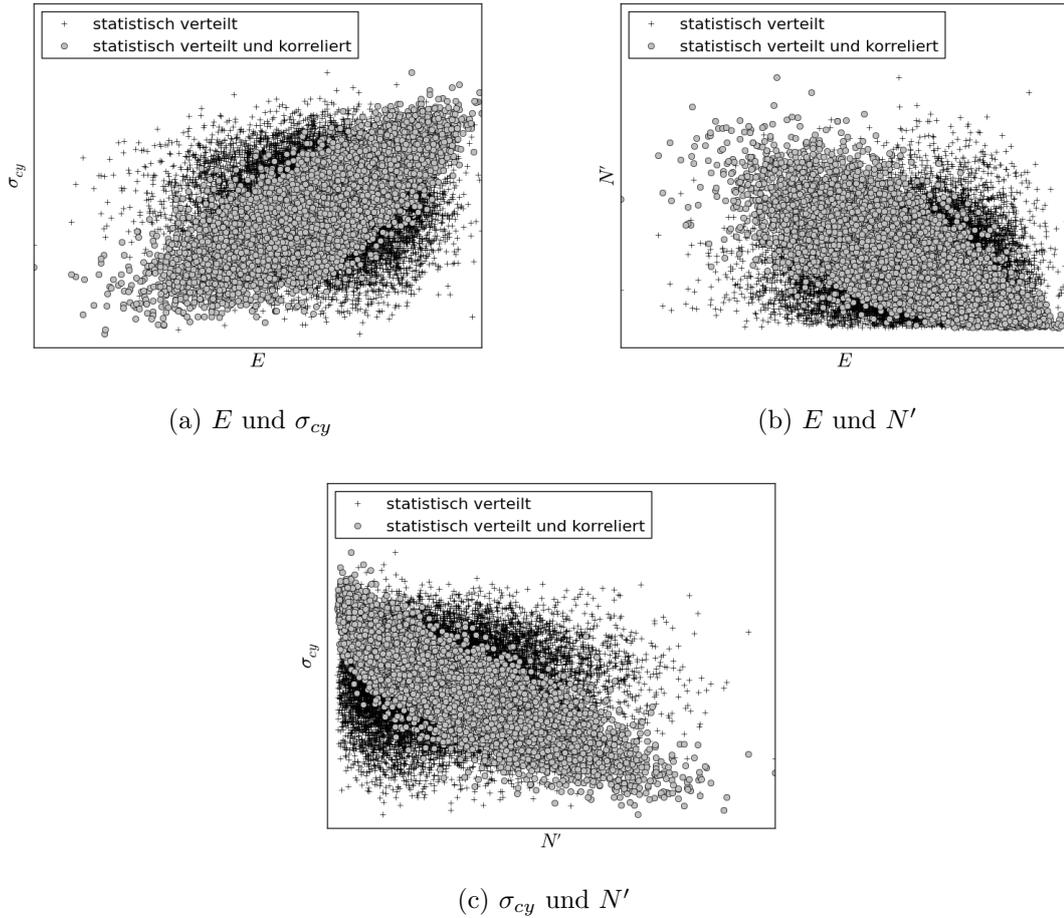


Abbildung 7.20: Darstellung der korrelierten und unkorrelierten Wertepaare der statistisch verteilten Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung MAR M247 für die Prüftemperatur 1150 °C.

den kleinsten korrigierten Anderson-Darling Parameter. Der P-Wert der formulierten Verteilungshypothese liegt bei $P_{Wert} = 0.0$. Das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten K_{korr} ergibt sich zu $K_{\text{korr}} = 21.1$. In der Abbildung 7.22 sind über der experimentell ermittelten Zyklenzahl zum Versagen die D_{TMF} -Schädigungsparameter aufgetragen, die sich für die probabilistische Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten ergeben.

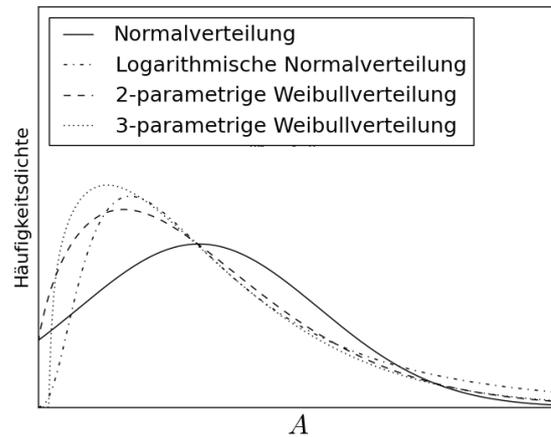


Abbildung 7.21: Ergebnisse der statistischen Beschreibung des Vorfaktors des D_{TMF} -Lebensdauermodells bei probabilistischer Auswertung unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen für alle LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 ab einer Prüftemperatur von 1000 °C

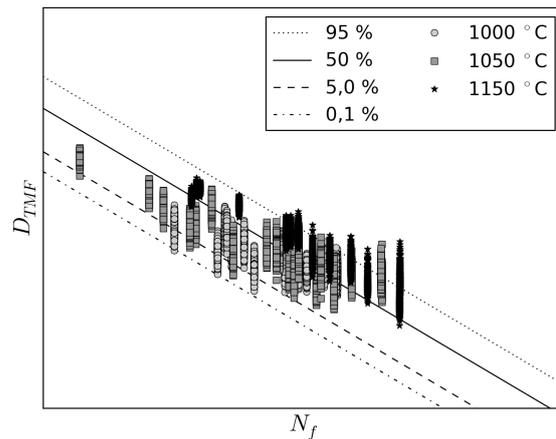


Abbildung 7.22: Ergebnisse für die probabilistische Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells unter Verwendung von statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten. Darstellung des D_{TMF} - Schädigungsparameters über der Zyklenzahl zum Versagen N_f . Auswertung aller LCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 ab einer Prüftemperatur von 1000 °C.

7.5 Vergleich der Ergebnisse für die deterministische und probabilistische Auswertung

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse der verschiedenen Auswertungen des D_{TMF} -Lebensdauermodells werkstoffspezifisch zusammengefasst. Neben der Darstellung der Verteilungshypothesen, die zur besten Beschreibung der Unsicherheit im Vorfaktor A des Lebensdauermodells führen, werden die Werte für die Verhältnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten in jeweils einer Übersichtstabelle gezeigt.

7.5.1 Vergleich der Ergebnisse für den austenitischen Stahl

In der Abbildung 7.23 sind die Verteilungshypothesen dargestellt, die sich am besten für die statistische Beschreibung der Unsicherheit des Vorfaktors A des Lebensdauermodells eignen. Anhand dieser Abbildung kann ein Vergleich der deterministischen und probabilistischen Auswertungen des Lebensdauermodells erfolgen. In der Tabelle 7.10 sind die zu den verschiedenen Betrachtungsweisen des Lebensdauermodells dazugehörigen Verhältnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten zusammengefasst.

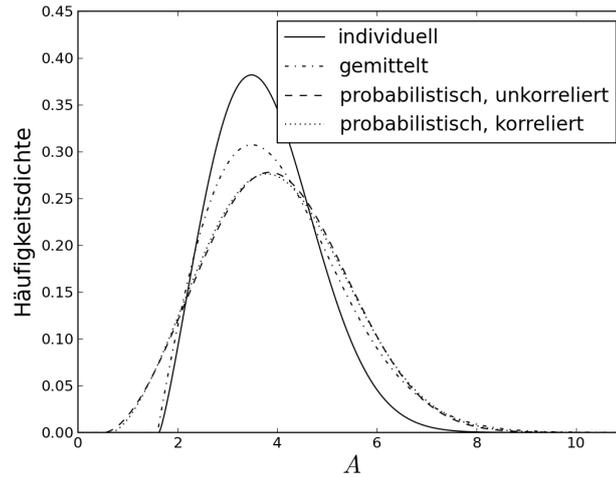


Abbildung 7.23: Vergleich der Verteilungshypothesen zur Beschreibung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells für die deterministischen und probabilistischen Betrachtungsweisen des D_{TMF} -Lebensdauermodells. Darstellung der ermittelten Häufigkeitsdichten über A für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10.

Tabelle 7.10: Zusammenfassung der Ergebnisse für das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten K für die unterschiedlichen Auswertungsvarianten des Lebensdauermodells mit dem Werkstoff X6 CrNiNb 18-10

Auswertungsmethodik	Bezeichnung	Wert für K
individuelle, deterministische	K	3.23
gemittelte, deterministische	K_{mit}	3.83
unkorrelierte, probabilistische, alle LCF Versuche	K_{rand}	7.62
korrelierte, probabilistische, alle LCF Versuche	K_{korr}	6.92

Für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 ergibt sich für die individuelle Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells die geringste Streubreite. Beim Vergleich der beiden probabilistischen Betrachtungsweisen, zeigt sich, dass die Berücksichtigung von Korrelationen zu einem etwas schmaleren Streuband im Kennwert A führt. Werden Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten berücksichtigt, fällt der Quotient K rund 10 % kleiner aus als bei der Auswertung ohne Korrelation.

7.5.2 Vergleich der Ergebnisse für die Nickelbasislegierung

In der Abbildung 7.24 sind die drei Verteilungshypothesen dargestellt, die im Rahmen der deterministischen Lebensdauerbewertung zu der besten Beschreibung der Streuung innerhalb der Stichproben \mathbf{S}_A (siehe Abschnitt 7.1), $\mathbf{S}_{A,\text{mit}}$ und $\mathbf{S}_{A,\text{mit,alle}}$ (siehe Abschnitt 7.2) führen. Bei allen drei Verteilungsfunktionen handelt es sich um Weibullverteilungen mit drei Verteilungsparametern.

Die Abbildung 7.25 stellt die Verteilungshypothesen dar, die im Rahmen der probabilistischen Lebensdauerbewertung zur besten Beschreibung der Streuung innerhalb der Stichproben $\mathbf{S}_{A,\text{rand}}$ (siehe Abschnitt 7.3) und $\mathbf{S}_{A,\text{korr}}$ (siehe Abschnitt 7.4) führen.

Um den direkten Vergleich mit der deterministischen Lebensdauerbewertung zu ermöglichen ist außerdem die Verteilungshypothese der deterministischen Auswertung des Lebensdauermodells unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten abgebildet. Für alle drei Auswertungen liegen 47 LCF Versuche zugrunde. Auch zur Beschreibung der Streuung der probabilistisch ausgewerteten Lebensdauermodelle eignet sich die Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern jeweils am besten. Die Charakteristik der zugrundeliegenden Verteilung ist hierbei stets die selbe. Die Weibullverteilung zeigt sich in allen Fällen linkssteil und rechtsschief. Der Schwellwert T_W der Verteilung ist jeweils deutlich ausgeprägt. Bei den probabilistisch ausgewerteten Modellen, liegt er deutlich niedriger als bei den deterministischen Auswertungen. Die Tabelle 7.11 fasst die Ergebnisse für das Verhältnis K (siehe Gleichung (7.3)) der Ausfallwahrscheinlichkeiten für alle Auswertungsmethoden zusammen. Der Quotient zur Charakterisierung der Streubreite einer statistischen Verteilung verdoppelt sich nahezu, wenn anstelle der deterministischen die probabilistische Sichtweise angenommen wird.

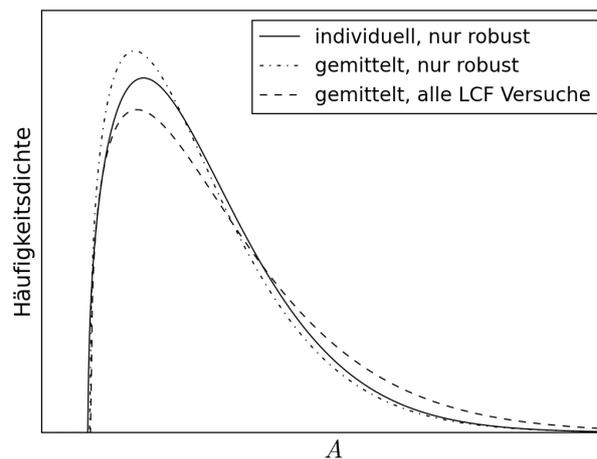


Abbildung 7.24: Vergleich der Verteilungshypothesen zur Beschreibung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells für die deterministischen Betrachtungsweisen. Darstellung der Häufigkeitsdichte über A für die individuelle und für die gemittelte Auswertung der robusten LCF Versuche sowie für die gemittelte Auswertung aller LCF Versuche.

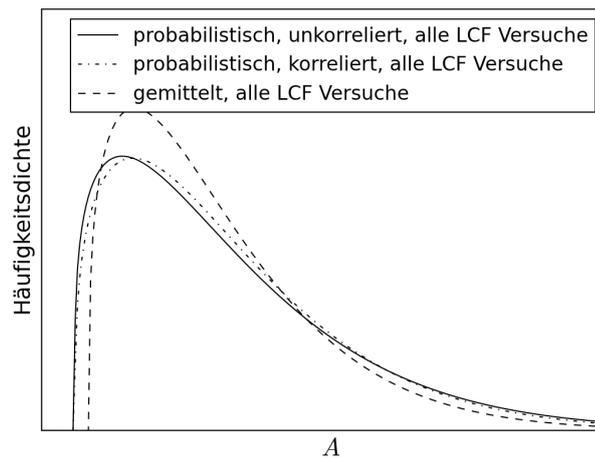


Abbildung 7.25: Vergleich der Verteilungshypothesen zur Beschreibung des Vorfaktors A des D_{TMF} -Lebensdauermodells für die probabilistischen Auswertungen und die deterministische Auswertung mit mittleren Werkstoffkennwerten. Darstellung der Häufigkeitsdichte über A .
Auswertung aller LCF Versuche.

Tabelle 7.11: Zusammenfassung der Ergebnisse für das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten K für die unterschiedlichen Auswertungsvarianten des Lebensdauermodells mit dem Werkstoff MAR M247.

Auswertungsmethodik	Bezeichnung	Wert für K
individuelle, deterministische	K	10.3
gemittelte, deterministische	K_{mit}	9.4
gemittelte, deterministische, alle LCF Versuche	$K_{\text{mit,alle}}$	11.0
unkorrelierte, probabilistische, alle LCF Versuche	K_{rand}	22.7
korrelierte, probabilistische, alle LCF Versuche	K_{korr}	21.1

8. Bauteilkonzept

Die probabilistische Betrachtungsweise des D_{TMF} -Lebensdauermodells wird im Rahmen dieser Arbeit auf Basis von eindimensionalen isothermen Versuchsdaten entwickelt. In einem Bauteil im Realbetrieb treten diese Beanspruchungsbedingungen jedoch nur sehr selten auf. Bauteile sind in der Regel mehrachsigen Spannungszuständen unterworfen, die zudem unter sich verändernden Temperaturen auftreten können. Um die bestehende Methodik für die probabilistische Lebensdauerbewertung an geometrisch einfachen Werkstoffproben auf eine komplexe Bauteilgeometrie unter thermomechanischer Belastung erweitern zu können, wird im folgenden Kapitel anhand der Nickelbasislegierung MAR M247 ein konzeptioneller Ansatz vorgestellt.

In einem ersten Schritt wird in Abschnitt 8.1 die eindimensionale Formulierung des D_{TMF} -Lebensdauermodells für mehrachsige Spannungs- und Dehnungszustände modifiziert und in Abschnitt 8.2.2 mit dem *Two-Layer-Viscoplasticity* (2LVP) Modell ein FE taugliches, inkrementelles Plastizitätsmodell erläutert. In Abschnitt 8.3 ist die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells erläutert. In einem weiteren Schritt wird in Abschnitt 8.4 eine Einflussfaktorenanalyse für das 2LVP Modell durchgeführt und im folgenden Abschnitt die Robustheit der Kennwerte untersucht und bewertet. Abschließend wird unter Abschnitt 8.6 eine Methodik zur Bestimmung von Kennwertsätzen zur Simulation thermomechanisch beanspruchter Bauteile vorgestellt, sodass die FE Simulation und die statistische Auswertung der Bauteillebensdauer erfolgen kann.

8.1 Mehrachsige Formulierung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells

Das in Abschnitt 4.1 eingeführte mechanismenbasierte Lebensdauermodell beruht auf analytischen bruchmechanischen Lösungen für einfache Lastfälle. Für reale Bauteile, die in der Regel einer nicht proportionalen, mehrachsigen Belastung unterliegen, existieren diese analytischen bruchmechanischen Lösungen nicht. Um dennoch das Risswachstum durch den D_{TMF} -Schädigungsparameter abschätzen zu können, werden die existierenden Lösungen des J-Integrals für mehrachsige, proportionale Belastungen aus [53] herangezogen, aus welchen

der D_{TMF} -Schädigungsparameter wie folgt abgeleitet werden kann [47][49]:

$$\begin{aligned}
 D_{TMF} &= \frac{Z_D}{\sigma_{cy,eff}} \cdot F \\
 Z_D &= 1.45 \cdot \frac{\Delta\sigma_{I,eff}^2}{E_{eff}} + \frac{2.4}{\sqrt{1 + 3 \cdot N_{eff}'^{-1}}} \cdot \frac{\Delta\sigma_I^2 \cdot \Delta\epsilon_{eq}^{pl}}{\Delta\sigma_{eq}} \\
 F &= \left(1 + \alpha_{cr} \cdot e^{\frac{Q_{cr}}{R_{gas} \cdot T_{ref}}} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{cy,eff}^{N_{cr}-2} \cdot \delta\sigma_I \cdot e^{\frac{-Q_{cr}}{R_{gas} \cdot T}} dt \right)^{\frac{1}{N_{cr}}}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

$\Delta\epsilon_{eq}^{pl}$ ist der von Mises Vergleichswert des Tensors der plastischen Dehnschwingbreite, die innerhalb eines Belastungszyklus auftritt. $\Delta\sigma_I$ bezeichnet die maximale Hauptspannung des Tensors der Spannungsschwingbreite und σ_{eq} ist dessen von Mises Vergleichswert. Mittelspannungseffekte werden nun durch die effektive Spannungsschwingbreite

$$\Delta\sigma_{I,eff} = \frac{3.72}{(3 - R_\sigma)^{1.74}} \cdot \Delta\sigma_I \tag{8.2}$$

berücksichtigt. Für das Spannungsverhältnis R_σ werden die folgenden Definitionen für die maximale und minimale Spannung im Zyklus verwendet:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{min} &= \sigma_m - \frac{\Delta\sigma_I}{2} \\
 \sigma_{max} &= \sigma_m + \frac{\Delta\sigma_I}{2}
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Die Mittelspannung σ_m entspricht der Komponente des Mittelspannungstensors in der $\Delta\sigma_I$ zugeordneten Hauptrichtung.

Die Schwingbreiten sind wiederum durch die Umkehrpunkte der Belastung zu den Zeiten t_0 und t_1 definiert. Diese Zeitpunkte werden so im Belastungszyklus gewählt, dass sich durch sie ein maximaler D_{TMF} -Schädigungsparameter ergibt. Die D_{TMF} -Maximierungsstrategie auf Basis der Hauptspannungsrichtungen berücksichtigt nicht, dass in eine andere Richtung infolge anderer Spannungsverhältnisse größere D_{TMF} -Werte auftreten können. Es wäre möglich durch einen Maximierungsalgorithmus die kritische Schnittebene zu identifizieren, die sodann auf einen maximalen Schädigungsparameter führt. Diese Maximierung ist jedoch sehr Rechenzeit intensiv. Bei dem im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Bauteil wird angenommen, dass die über die Hauptspannungen erzielten Ergebnisse eine gute Näherung zu den Ergebnissen unter Berücksichtigung der kritischen Schnittebene liefern.

Die F -Funktion beschreibt auch bei der mehrachsigen Beschreibung des D_{TMF} -Schädigungsparameters zeitabhängige Effekte, wie beispielsweise das Kriechen. Hierin wird der von Mises Vergleichswert des Tensors der entsprechenden Spannungsschwingbreite verwendet.

8.2 Zeit- und temperaturabhängige Wechselplastizitätsmodelle

Für die Simulation einer thermomechanisch belasteten Bauteilgeometrie wird im Rahmen dieser Arbeit das FE Programm ABAQUS genutzt. Um das Werkstoffverhalten bei hohen Temperaturen beschreiben zu können, werden höherwertige FE taugliche Werkstoffmodelle benötigt, die in der Lage sind das geschichtsabhängige visko-plastische Materialverhalten unter komplexer Last zu simulieren. Neben plastischer Verformung können in hoch belasteten Bauteilen Kriechvorgänge ablaufen und zyklische Mittelspannungsrelaxation, sogenanntes Ratchetting, auftreten. Diese Effekte haben unter Umständen signifikanten Einfluss auf die Spannungs-Dehnungs-Antwort des Werkstoffs und müssen möglicherweise durch das gewählte Werkstoffmodell berücksichtigt werden.

8.2.1 Überblick

Das bereits vorgestellte Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz stellt lediglich einen einfachen die Deformationsplastizität beschreibenden Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen im Werkstoff her. Für eine FE Simulation von zyklischen Belastungen ist es bei auftretender Wechselplastizität jedoch nicht geeignet, da es keine geschichtsabhängigen Mechanismen modelliert, wie sie beispielsweise in Form des Bauschingereffekts auftreten. Dieser kann beispielsweise durch den Ansatz von *Frederick* und *Armstrong* [65] als kinematische Verfestigung durch eine Rückspannung im Material modelliert werden (siehe in Gleichung (8.13)). Dieser Modellierungsansatz hat die Eigenschaft die Mittelspannungsrelaxation deutlich zu überschätzen und wird in dem Werkstoffmodell von *Chaboche* [66] durch einen Ratchetting Term in der Entwicklungsgleichung der Rückspannung erweitert. Das zeitabhängige Werkstoffverhalten wird in diesem Modell durch ein Potenzgesetz in der Fließregel abgebildet, welches mit der im Norton-Kriechmodell angewendeten Formulierung vergleichbar ist [67] (siehe Gleichung (4.16)).

Das Modell von *Ohno* und *Wang* [68] [69] basiert wie das Modell von *Chaboche* auf der von *Frederick* und *Armstrong* formulierten Entwicklungsgleichung für die kinematische Verfestigung. Um die Ratchettingeigenschaften dieses Ansatzes zu verbessern wird im Modell von *Ohno* und *Wang* durch unterschiedliche Schwellwerte in die Entwicklung der Rückspannung eingegriffen und so das Ratchetting im Modell reduziert.

Das in [70] erläuterte Modell von *Becker* ist das komplexeste Werkstoffmodell, das in dieser kurzen Übersicht genannt wird. Mit seinen 23 Modellkennwerten kann es die Eigenschaften der Nickelbasislegierung IN 718 auch unter komplexesten Lastbedingungen beschreiben. Es eignet sich zur Modellierung von ratenabhängiger, sowie ratenunabhängiger nichtlinearer Verformung und bildet Krieeigenschaften sowie Ratchettingverhalten bei komplexem Verlauf der Mitteldehnung ab. Außerdem wird in diesem Modell die Überspannung durch einen Grenzwert beschränkt, eine Eigenschaft, die die anderen vorgestellten Modelle nicht besitzen. Die Komplexität der hier erwähnten Werkstoffmodelle führt dazu, dass mit ihnen das reale Werkstoffverhalten auch bei komplexen Belastungen in der Regel gut beschrieben werden kann und die simulativen Ergebnisse die Realität adäquat abbilden. Die einzelnen Verfor-

mungsmechanismen, die in den Werkstoffmodellen modelliert werden, führen jedoch stets zu einer zunehmenden Anzahl von Modellkennwerten, die benötigt werden, um das Modellverhalten zu definieren. Im Hinblick auf die probabilistische Bewertung der Ermüdungslebensdauer, ist bereits in Abschnitt 5.4 anhand der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes erläutert, weshalb für die Bestimmung der Kennwertstreuung nur robuste Kennwerte herangezogen werden dürfen. Weiterhin kann in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass sich robuste Kennwerte dann ergeben, wenn der von ihnen im Werkstoffmodell definierte Mechanismus durch das Werkstoffverhalten in den Versuchsdaten in ausreichendem Maße angesprochen wird. Je komplexer ein Werkstoffmodell ausfällt, desto vielschichtiger muss demnach auch die Versuchsführung gestaltet sein. Innerhalb der für die Kennwertbestimmung genutzten Versuchsdaten müssen alle Modelleigenschaften angesprochen werden, um eine objektive Kennwertermittlung zu ermöglichen. Bereits bei der Auswertung des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes reduziert sich die Anzahl der nutzbaren Versuche erheblich. Aus diesem Grund wird die Auswahl des Werkstoffmodells für die FE Simulation wesentlich durch den Bedarf an robusten Werkstoffkennwerten bestimmt und es wird im Rahmen dieser Arbeit ein verhältnismäßig einfaches viskoplastisches Werkstoffmodell mit geringer Kennwertanzahl gewählt: Das Two-Layer-Viscoplasticity (2LVP) Modell.

8.2.2 Two-Layer-Viscoplasticity Werkstoffmodell

Das 2LVP Modell stellt ein höherwertiges Werkstoffmodell dar, das sich zur Beschreibung von elastisch-viskoplastischem Werkstoffverhalten unter zyklischer thermomechanischer Belastung eignet. Es handelt sich um ein Werkstoffmodell, welches standardmäßig in der FE Software ABAQUS zur Verfügung steht [71].

Die Spannungen σ_{ij} , die durch das 2LVP Modell berechnet werden, ergeben sich aus der Summe der Spannungen eines elastisch-plastischen (pl) und eines elastisch-viskosen (v) Layers. Diese Layer sind über die Dehnungen ϵ_{ij} gekoppelt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{\text{pl}} + \sigma_{ij}^{\text{v}} \\ \sigma_{ij}^{\text{pl}} &= C_{ijkl}^{\text{pl}} \cdot (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{\text{th}} - \epsilon_{kl}^{\text{pl}}) \\ \sigma_{ij}^{\text{v}} &= C_{ijkl}^{\text{v}} \cdot (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{\text{th}} - \epsilon_{kl}^{\text{v}})\end{aligned}\tag{8.4}$$

Die Elastizitätstensoren \mathbf{C}^{pl} und \mathbf{C}^{v} enthalten die Elastizitätsmoduln E^{pl} und E^{v} der beiden Layer sowie die Querkontraktionszahl ν . ϵ beschreibt den Tensor der Gesamtdehnung. ϵ^{th} , ϵ^{pl} und ϵ^{v} stehen für den thermischen, den plastischen und den viskosen Dehnungstensor. Während das plastische Layer das zeitunabhängige plastische Materialverhalten beschreibt, kann das viskose Layer als Maxwell-Element, einer Reihenschaltung aus einer Feder und einem Dämpfer, rheologisch interpretiert werden [72, Seite 292]. Das Verhältnis der Elastizitätsmoduln lässt sich über den Werkstoffkennwert f durch

$$f = \frac{E^{\text{v}}}{E_{2\text{LVP}}} \text{ mit } E_{2\text{LVP}} = E^{\text{v}} + E^{\text{pl}}\tag{8.5}$$

beschreiben. f kann aus Versuchsdaten ermittelt werden. $E_{2\text{LVP}}$ wird als instantaner E-Modul

bezeichnet, da er durch die Einflüsse des viskosen Layers abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit ist. Aus Gleichung (8.5) folgen weitere Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} E^v &= E_{2LVP} f \\ E^{Pl} &= E_{2LVP} (1 - f) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Die thermische Dehnung wird mit Hilfe des thermischen Ausdehnungskoeffizienten α^{th} berechnet:

$$\epsilon_{ij}^{\text{th}} = \alpha^{\text{th}} \Delta T \delta_{ij} \quad (8.7)$$

Die Temperaturdifferenz ΔT wird bezogen auf eine vorgegebene Ausgangstemperatur. δ bezeichnet den Einheitstensor zweiter Stufe.

Ob im elastisch-plastischen Layer zeitunabhängige plastische Verformungen auftreten, wird durch die Fließfunktion

$$\phi = \beta_{\text{eq}} - R_e \quad (8.8)$$

bestimmt. Für $\phi \leq 0$ findet rein elastische Deformation statt. Über den von Mises Vergleichswert β_{eq} der effektiven Spannung β_{ij} wird die kinematische Verfestigung berücksichtigt, die zur Beschreibung der Werkstoffverfestigung bei zyklischer Belastung notwendig ist. Es gilt

$$\beta_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \quad (8.9)$$

für die effektive Spannung und

$$\beta_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \beta'_{ij} \beta'_{ij}} \quad (8.10)$$

für die Vergleichsspannung. β' bezeichnet den Deviator des effektiven Spannungstensors und α den Rückspannungstensor. R_e ist die temperaturabhängige Streckgrenze. Auf die Modellierung der isotropen Verfestigung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Soll diese zusätzlich implementiert werden, wird R_e zu $R_p(\bar{\epsilon}^{\text{Pl}})$, einer von der akkumulierten plastischen Dehnung $\bar{\epsilon}^{\text{Pl}}$ abhängigen Verfestigungsvariablen, umdeklariert.

Zur Berechnung der plastischen Dehnungen aus Gleichung (8.4) wird die Fließregel genutzt:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{Pl}} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}^{\text{Pl}} \frac{\beta_{ij}}{\beta_{\text{eq}}} \quad (8.11)$$

Durch die Integration der plastischen Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}^{\text{Pl}}$ ergibt sich die akkumulierte plastische Dehnung $\bar{\epsilon}^{\text{Pl}}$ zu

$$\bar{\epsilon}^{\text{Pl}} = \int \dot{\epsilon}^{\text{Pl}} dt. \quad (8.12)$$

Der Rückspannungstensor α folgt der Entwicklungsgleichung [65]

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{Pl}} - \gamma \dot{\epsilon} \alpha_{ij} + \frac{\partial C}{\partial T} \frac{1}{C} \dot{T} \alpha_{ij} \quad (8.13)$$

worin C und γ temperaturabhängige Werkstoffkennwerte bezeichnen. Im Rahmen dieser Ar-

beit wird anstatt des Kennwerts γ der Sättigungswert der Rückspannung

$$C_\infty = \frac{C}{\gamma} \quad (8.14)$$

verwendet, der auf Basis des Werkstoffverhaltens unter plastischer Verformung einfach zu interpretieren ist.

Die viskosen Dehnungen aus Gleichung (8.4) werden durch das Norton-Kriechmodell beschrieben und können durch

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^v &= \frac{3}{2} \dot{\bar{\epsilon}}^v \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\text{eq}}} \\ \text{mit } \dot{\bar{\epsilon}}^v &= B (\sigma_{\text{eq}})^{N^v} \end{aligned} \quad (8.15)$$

bestimmt werden. B und N^v beschreiben temperaturabhängige Werkstoffkennwerte und σ_{eq} ist die von Mises Vergleichsspannung im viskosen Layer. Durch das Verhalten des viskosen Layers können zeitabhängige Effekte wie beispielsweise Spannungsrelaxation oder die Dehnratenabhängigkeit der Spannungsantwort durch das 2LVP Modell abgebildet werden. Der Werkstoffkennwert B nimmt für metallische Werkstoffe sehr kleine positive Werte an. Er wird deshalb durch den Kennwert B_{mod}

$$B_{\text{mod}} = B^{-\frac{1}{N^v}} \quad (8.16)$$

substituiert. Die akkumulierte viskose Dehnung kann durch Integration der viskosen Dehngeschwindigkeit über der Zeit

$$\bar{\epsilon}^v = \int \dot{\bar{\epsilon}}^v dt \quad (8.17)$$

berechnet werden.

Der viskoplastische Dehnungstensor ϵ^{vp} des 2LVP Modells, der in bei der Lebensdauerbewertung herangezogen werden muss, wird durch

$$\epsilon_{ij}^{\text{vp}} = f \epsilon_{ij}^v + (1 - f) \epsilon_{ij}^{\text{pl}} \quad (8.18)$$

bestimmt. Da ABAQUS die thermischen (th) und elastischen (e) Dehnungen in einem Simulationsergebnis bereitstellt, können die viskoplastischen Dehnungen alternativ durch

$$\epsilon_{ij}^{\text{vp}} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{\text{th}} - \epsilon_{ij}^{\text{e}} \quad (8.19)$$

ermittelt werden. Die akkumulierte viskoplastische Dehnung kann durch die Integration der viskoplastischen Vergleichsdehngeschwindigkeit

$$\bar{\epsilon}^{\text{vp}} = \int \dot{\bar{\epsilon}}^{\text{vp}} dt \quad (8.20)$$

bestimmt werden, die sich aus

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^{\text{vp}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{vp}} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{vp}}} \quad (8.21)$$

ergibt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die viskoplastischen Dehnungen und die akkumulierte visko-

8.3. BESTIMMUNG DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS

plastische Dehnung durch ein PYTHON Skript ausgewertet.

Die Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells und ihre Bedeutung sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst. Um das 2LVP für die FE Berechnung von Bauteilen nutzbar zu machen, müssen die Werkstoffkennwerte aus Versuchsdaten bestimmt und in einer Materialkarte dem FE Programm bereitgestellt werden.

Die Modellgleichungen werden numerisch durch Integration der Entwicklungsgleichungen gelöst. Für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte aus einachsigen Versuchen wird eine einachsige Modellimplementierung in PYTHON vorgenommen. Die gemäß der Gleichung (3.9) numerisch integrierten Entwicklungsgleichungen können mathematisch in eine nichtlineare Gleichung umgeformt werden. Diese lässt sich mit dem Newton-Verfahren aus Abschnitt 3.1.4 lösen.

Tabelle 8.1: Zusammenfassung der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells.

Bezeichnung des Kennwerts	
α^{th}	thermischer Ausdehnungskoeffizient
ν	Querkontraktionszahl
E^{pl}	E-Modul des elastisch-plastischen Layers
R_e	Streckgrenze
C	Verfestigungsmodul der kinematische Verfestigung
C_∞	E-Modul des elastisch-plastischen Layers
E^{v}	E-Modul des viskoelastischen Layers
B_{mod}	modifizierter Vorfaktor des Norton-Modells
N^{v}	Norton-Exponent des 2LVP Modells

8.3 Bestimmung der Kennwerte des Two-Layer-Viscoplasticity Modells

Die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells erfolgt anhand der isothermen CLCF Versuche, die in Abschnitt 2.2 vorgestellt werden. Es liegen Versuche in einem breiten Temperaturbereich vor. Die Prüftemperaturen der CLCF Versuche der Nickelbasislegierung MAR M247 liegen bei 20 °C, 300 °C, 750 °C, 850 °C, 950 °C und 1050 °C. Die Validierung der ermittelten Kennwerte kann anhand der TMF Versuche erfolgen, die ebenfalls in Abschnitt 2.2 beschrieben werden. Die Bestimmung der Kennwerte des 2LVP Modells basierend auf den Versuchsdaten der LCF Versuche wird nicht als sinnvoll erachtet, da in LCF Versuchen keinerlei Informationen über das zeit- beziehungsweise dehnratenabhängige Werkstoffverhalten enthalten sind. Da diese Mechanismen des Werkstoffmodells durch die Versuchsführung überhaupt nicht angesprochen werden, können auch die Werkstoffkennwerte, die eben genau diese Effekte im Modell definieren, nicht adäquat bestimmt werden.

Für die Bestimmung der Kennwerte des 2LVP Modells wird, wie schon bei den Kennwerten des Ramberg-Osgood Modells, eine automatisierbare numerische Methodik gewählt. Basierend auf einer FQS können die Modellkennwerte für jede Prüftemperatur individuell mit Hilfe des gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus bestimmt werden. Diese Vorgehensweise

Tabelle 8.2: Zusammenfassung der thermischen Ausdehnungskoeffizienten für den Werkstoff MAR M247.

Temperatur	thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha^{\text{th}} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$
20 °C	$1.0397 \cdot 10^{-5}$
300 °C	$1.3257 \cdot 10^{-5}$
750 °C	$1.8605 \cdot 10^{-5}$
850 °C	$2.1018 \cdot 10^{-5}$
950 °C	$2.4191 \cdot 10^{-5}$
1050 °C	$2.8267 \cdot 10^{-5}$

erscheint zunächst zielführend, führt jedoch zu physikalisch unsinnigen Kennwertverläufen über der Prüftemperatur. Der Kennwert B_{mod} weist beispielsweise einen derart starken temperaturabhängigen Verlauf auf, dass er sich zwischen den einzelnen Prüftemperaturen um mehrere Zehnerpotenzen unstet verändert. Eine Nachrechnung der TMF Belastung, in der die Werkstoffkennwerte zwischen den einzelnen Temperaturstützstellen interpoliert werden müssen, kann basierend auf den so bestimmten Kennwerten nicht durchgeführt werden, da das sich stark verändernde viskose Modellverhalten zu unrealistischen Lösungen in der Spannungsantwort des Werkstoffmodells führt.

Um TMF Versuche adäquat mit dem 2LVP Modell nachrechnen zu können, muss der Verlauf der einzelnen Werkstoffkennwerte zumindest bei der Auswertung für die Nickelbasislegierung MAR M247 über der Temperatur erfahrungsbasiert modifiziert werden. Dieser erfahrungsbasierte Eingriff in die mit dem gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus ermittelten Werkstoffkennwerte erfolgt so, dass zum einen die Kennwertverläufe über der Temperatur sinnvoll erscheinen und sich der Werkstoffkennwert B_{mod} zwischen zwei Temperaturstützstellen um nicht mehr als Faktor 10 verändert. Zum anderen erfolgt die Ermittlung der Kennwerte so, dass alle CLCF Versuche optisch möglichst gut durch das Werkstoffmodell beschrieben werden. Es resultiert eine Methodik, die die deterministische, auf Numerik basierende Kennwertbestimmung mit einer erfahrungsbasierten Methodik kombiniert.

Die zwischen den Werkstoffkennwerten bestehenden Wechselwirkungen führen dabei auf einen iterativen Prozess, der erfahrungsbasiert ist und nicht mehr als objektiv oder gar deterministisch angesehen werden darf. Diese Vorgehensweise erscheint im Rahmen der vorliegenden Arbeit als einzig zielführende und ist in Kapitel 9 diskutiert und im Folgenden im Detail erläutert.

Die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells unter der Kombination von gradientenbasierter und erfahrungsbasierter Kennwertbestimmung führt auf ein iteratives Verfahren. In einem ersten Schritt werden gradientenbasiert, unter Verwendung des in Abschnitt 3.1.5 vorgestellten Optimierungsalgorithmus, alle Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells bestimmt. Die Querkontraktionszahl wird zu $\nu = 0.3$ [9, Seite 225] gewählt. Die thermischen Ausdehnungskoeffizienten werden ebenfalls aus [9, Seite 225] übernommen und sind in Tabelle 8.2 zusammengefasst. Für die Kennwertbestimmung wird für jede Prüftemperatur je ein CLCF Versuch herangezogen. Da basierend auf den Ergebnissen aus Abschnitt 5.4.2 davon ausgegangen werden kann, dass eine große Dehnschwingbreite die Verfestigungseigenschaften

8.3. BESTIMMUNG DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS

Tabelle 8.3: Zusammenfassung der 2LVP Kennwerte, die anhand der CLCF bestimmt und basierend auf den TMF Versuchen des Werkstoffs MAR M247 validiert werden.

Temperatur [°C]	20	300	600	750	850	950	1000	1050
E_{2LVP} [MPa]	208582	193689	177569	167695	159244	147621	141810	134255
f	0.0001	0.0001	0.1	0.12	0.15	0.15	0.15	0.2
B_{mod} $\left[\text{MPa} \cdot \text{s}^{\frac{1}{N^v}} \right]$	15.80	15.80	46.41	211.5	1000	1143	1585	1520
N^v	10	10	6	4	3	2.67	2.5	2.2
R_e [MPa]	650	650	600	550	280	180	130	110
C [MPa]	350000	350000	350000	300000	275021	215450	185665	132561
C_∞ [MPa]	233	233	233	300	374	214	134	117

des Werkstoffs am besten anspricht, wird jeweils der CLCF Versuch gewählt, dessen Dehnschwingbreite am größten ausfällt. Eine adäquate Bestimmung der Werkstoffkennwerte kann dadurch erleichtert werden.

Die gradientenbasierte Optimierung findet das Minimum der FQS der Form

$$FQS_{\text{CLCF}} = \sum_{i=1}^n (\sigma_{\text{exp},i} - \sigma_{2LVP,i})^2. \quad (8.22)$$

In σ_{exp} sind die im CLCF Versuch gemessenen, experimentellen Spannungen und in σ_{2LVP} die vom 2LVP Modell berechnete Spannungsantwort für jeden in den Versuchsdaten dokumentierten Datenpunkt enthalten. Die Anzahl der Datenpunkte im CLCF Versuch entspricht n . Ausgehend vom Ergebnis der gradientenbasierten Anpassung werden die Kennwerte des 2LVP Modells manuell verändert. Die Ergebnisse der Kennwertbestimmung sind in Tabelle 8.3 zusammengefasst.

Es werden zwei zusätzliche Temperaturstützstellen bei 600 °C und 1000 °C eingefügt. Diese werden bei der späteren Auswertung des D_{TMF} -Lebensdauermodells benötigt. Die 2LVP Kennwerte bei diesen Temperaturen werden so gewählt, dass sich ein sinnvoller Verlauf der Kennwerte über der Temperatur ergibt und eine gute Beschreibung der TMF Versuche vorliegt.

In den Abbildungen 8.1 bis 8.6 sind die Anpassungsergebnisse für die ausgewerteten CLCF Versuche dargestellt. Es wird je ein Spannungs-Dehnungs- und ein Spannungs-Zeit-Diagramm gezeigt. Die Abbildungen 8.7 bis 8.10 zeigen die Spannungsantwort des 2LVP Modells im Vergleich zu den Versuchsdaten aus TMF Versuchen. Es werden jeweils ein Spannungs-Dehnungs-, ein Spannungs-Zeit-, ein Spannungs-Temperatur- und ein Temperatur-Zeit-Diagramm gezeigt.

Das 2LVP Modell ist in der Lage das Werkstoffverhalten des Werkstoffs MAR M247 sowohl bei CLCF als auch bei TMF Belastung adäquat zu beschreiben. Lediglich das Relaxationsverhalten des Werkstoffs kann durch das viskose Layer des Werkstoffmodells nicht immer beschrieben werden. Besonders bei hohen Temperaturen, wenn eine Haltezeit mit geringer Dehnrates angefahren wird, zeigt das Modell eine nur mangelhafte Beschreibung der Versuchsdaten (siehe Abbildungen 8.5 und 8.6).

Die vorliegenden TMF Versuche lassen sich mit dem 2LVP Modell gut beschreiben. Für die Validierung der Modellantwort werden jeweils die ersten zehn thermomechanischen Belastungszyklen nachgerechnet. Die Beschreibung des Werkstoffverhaltens bei einer IP Belastung gelingt mit dem angepassten 2LVP Modell besonders gut (siehe Abbildung 8.7).

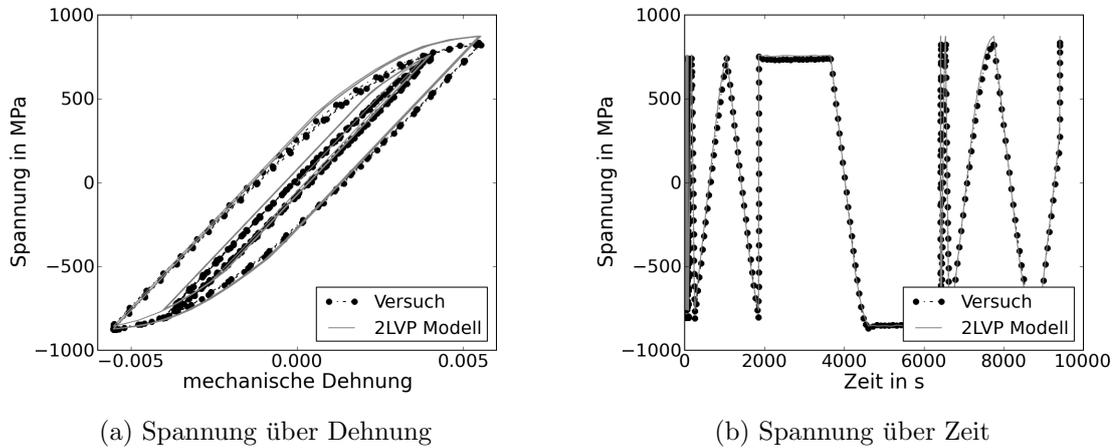


Abbildung 8.1: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 20 °C

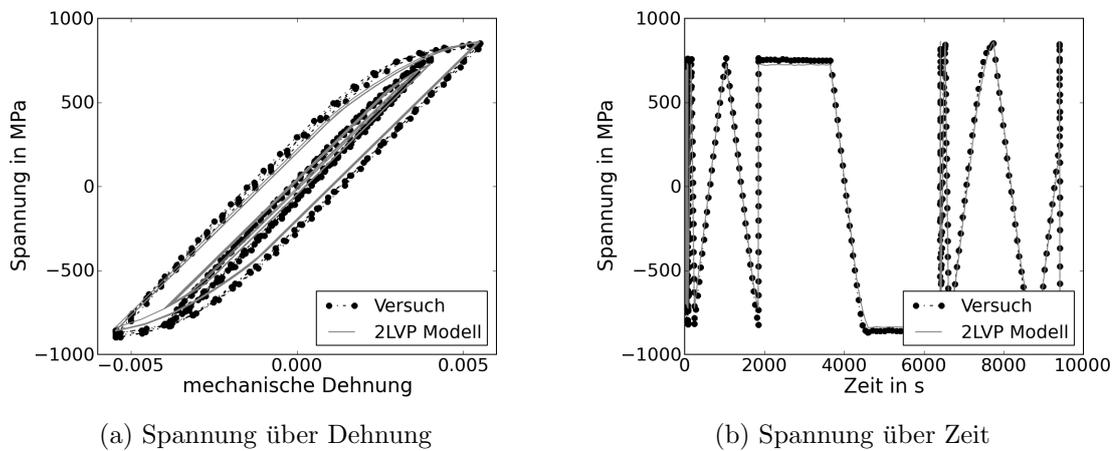
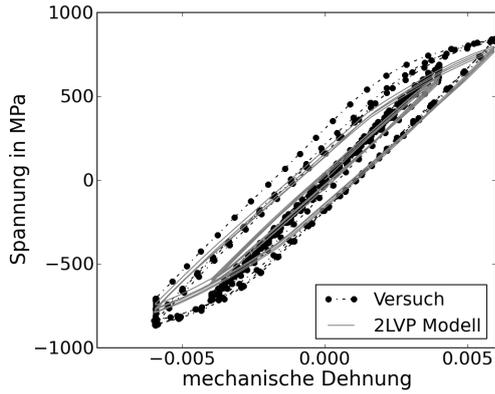
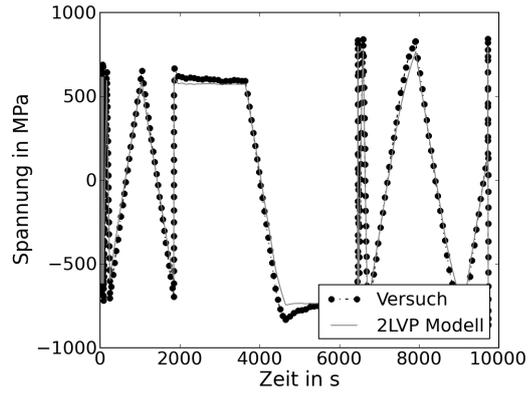


Abbildung 8.2: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 300 °C

8.3. BESTIMMUNG DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS

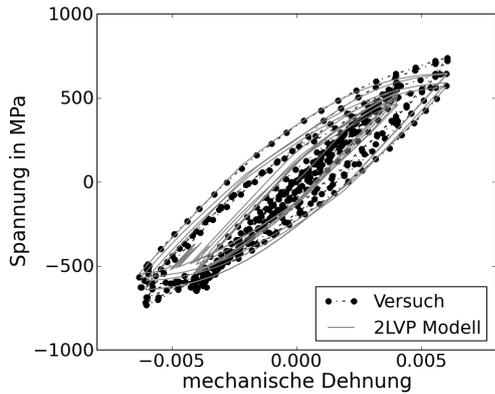


(a) Spannung über Dehnung

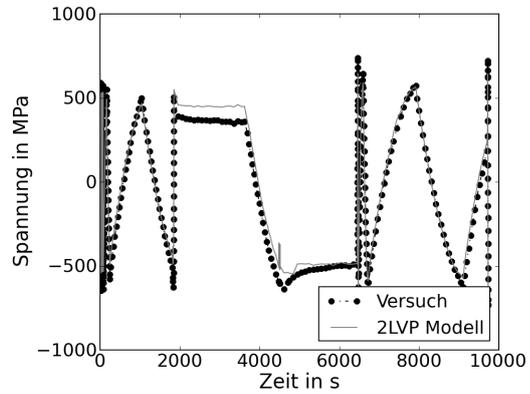


(b) Spannung über Zeit

Abbildung 8.3: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 750 °C

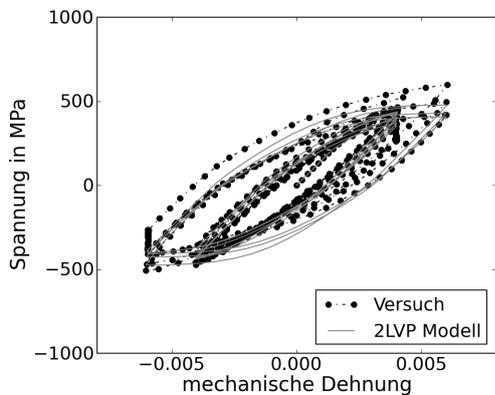


(a) Spannung über Dehnung

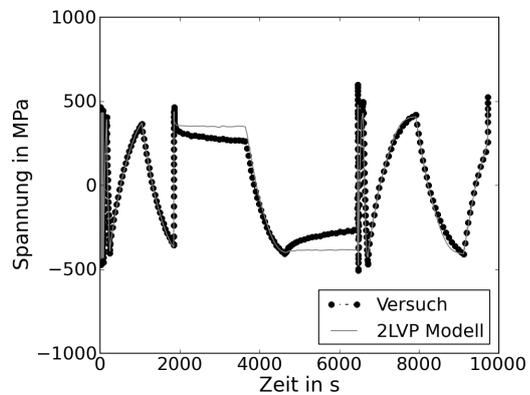


(b) Spannung über Zeit

Abbildung 8.4: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 850 °C

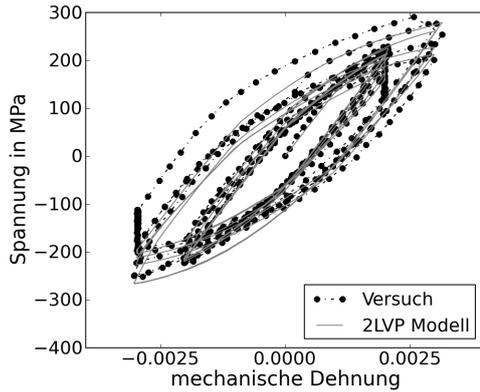


(a) Spannung über Dehnung

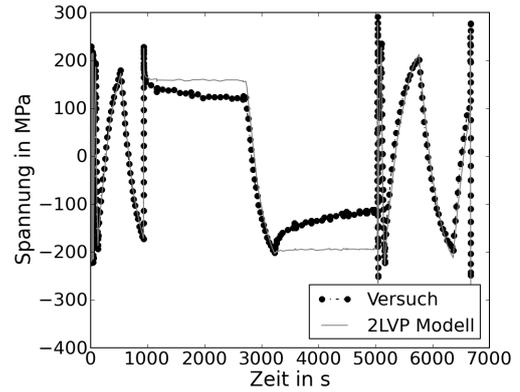


(b) Spannung über Zeit

Abbildung 8.5: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 950 °C

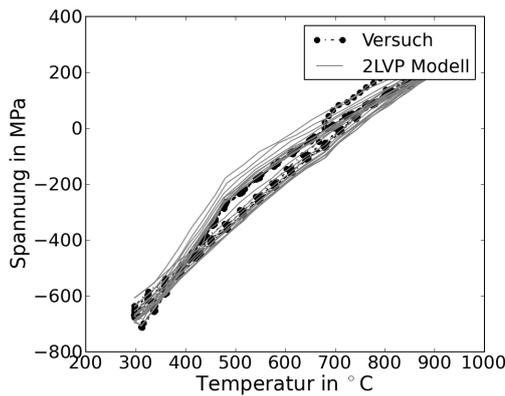


(a) Spannung über Dehnung

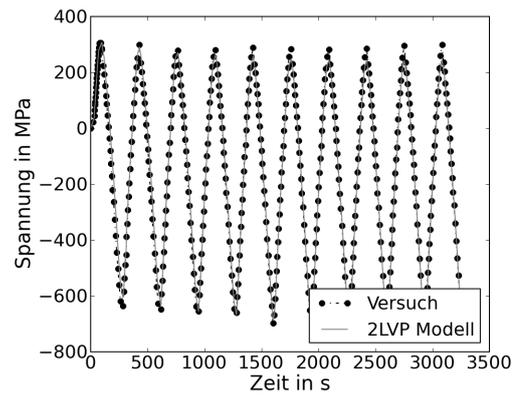


(b) Spannung über Zeit

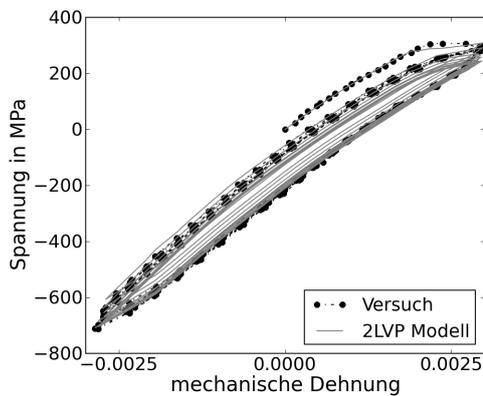
Abbildung 8.6: Ergebnis der Anpassung des 2LVP Modells an die experimentellen Daten des CLCF Versuchs bei 1050 °C



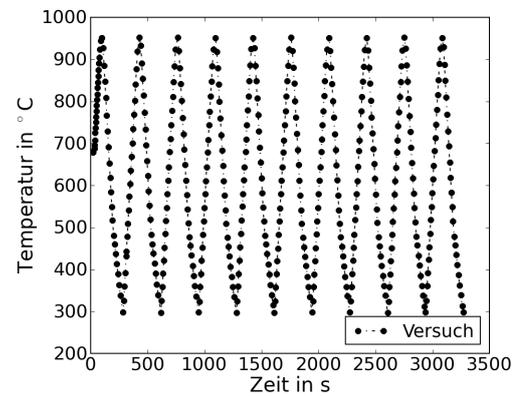
(a) Spannung über Temperatur



(b) Spannung über Zeit



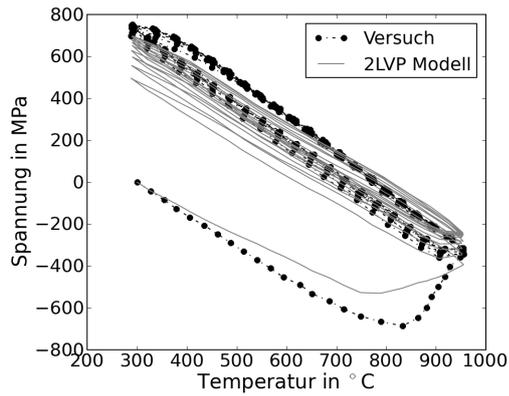
(c) Spannung über Dehnung



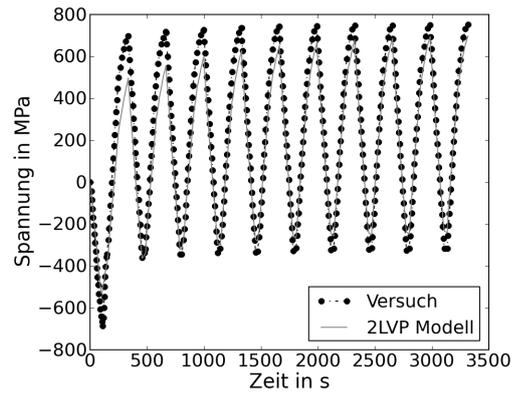
(d) Temperatur über Zeit

Abbildung 8.7: Ergebnis der Berechnung eines IP TMF Versuchs mit dem 2LVP Modell. Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.0056$ und Dehnungsverhältnis $R_\epsilon = -1$.

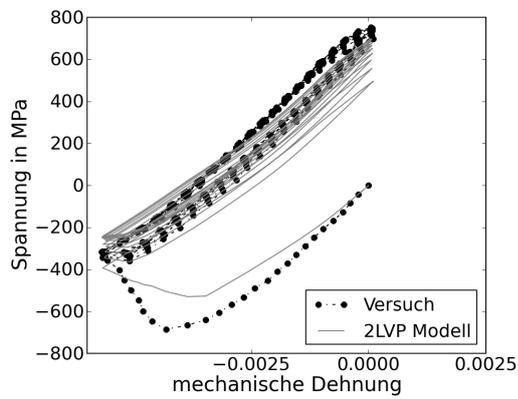
8.3. BESTIMMUNG DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS



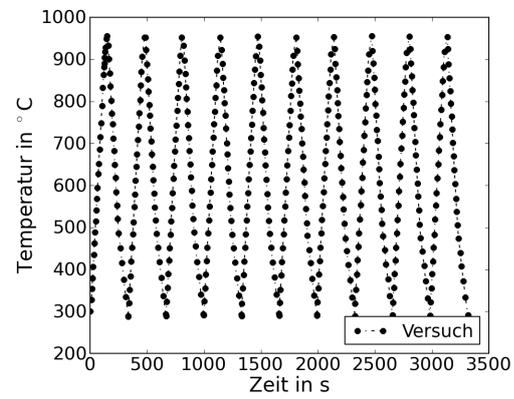
(a) Spannung über Temperatur



(b) Spannung über Zeit

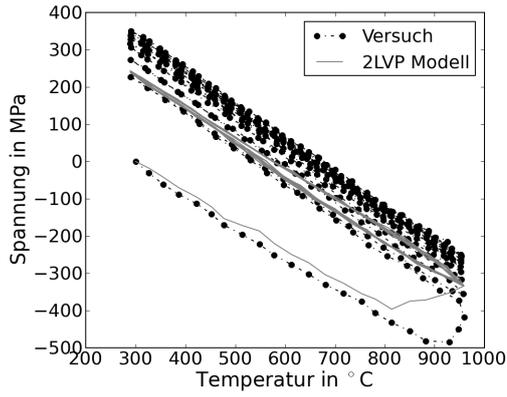


(c) Spannung über Dehnung

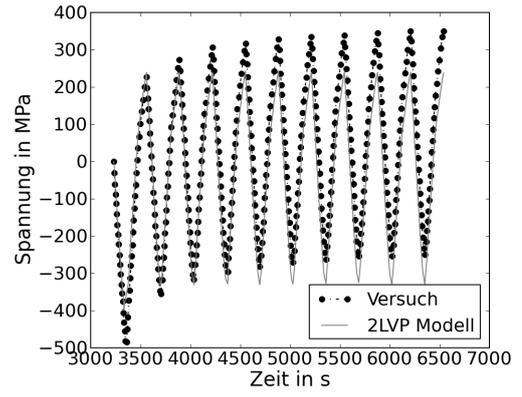


(d) Temperatur über Zeit

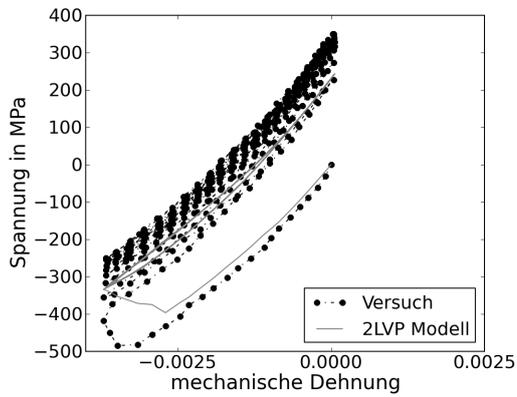
Abbildung 8.8: Ergebnis der Berechnung eines OP TMF Versuchs mit dem 2LVP Modell. Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.0056$ und Dehnungsverhältnis $R_\epsilon = -\infty$.



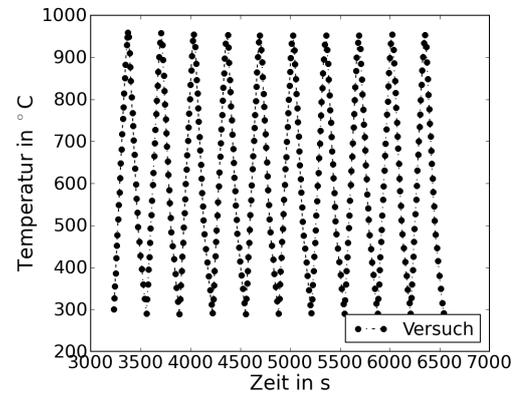
(a) Spannung über Temperatur



(b) Spannung über Zeit



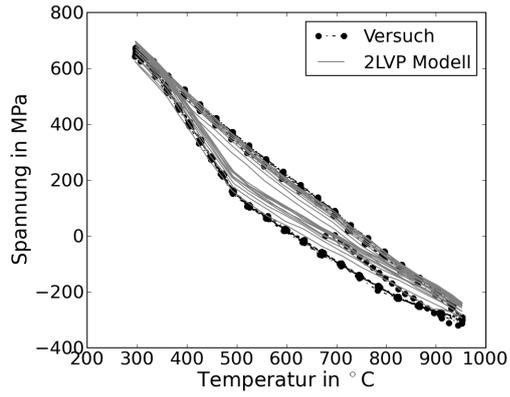
(c) Spannung über Dehnung



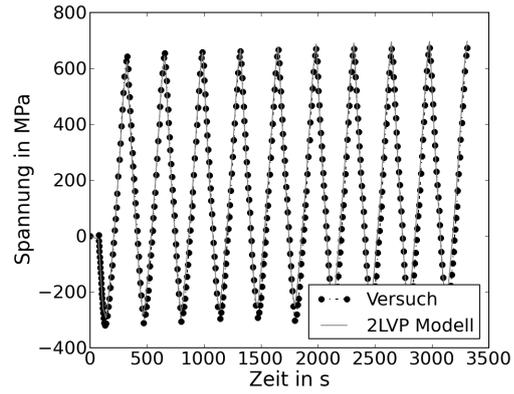
(d) Temperatur über Zeit

Abbildung 8.9: Ergebnis der Berechnung eines OP TMF Versuchs mit dem 2LVP Modell. Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.0036$ und Dehnungsverhältnis $R_\epsilon = -\infty$.

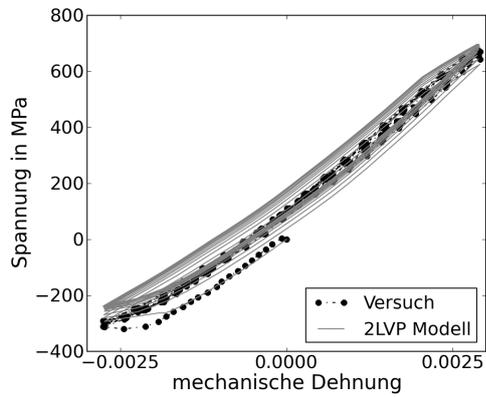
8.3. BESTIMMUNG DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS



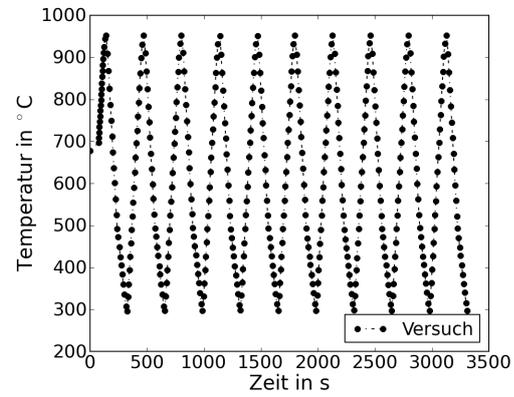
(a) Spannung über Temperatur



(b) Spannung über Zeit



(c) Spannung über Dehnung



(d) Temperatur über Zeit

Abbildung 8.10: Ergebnis der Berechnung eines OP TMF Versuchs mit dem 2LVP Modell. Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.0056$ und Dehnungsverhältnis $R_\epsilon = -1$.

8.4 Einflussfaktorenanalyse der Kennwerte des Two-Layer-Viscoplasticity Modells

Die EFA der Kennwerte des 2LVP Modells untersucht die Einflüsse der einzelnen Kennwerte des Werkstoffmodells auf die vom mechanismenbasierten Lebensdauermodell vorhergesagte Ermüdungslebensdauer. Untersucht werden die Einflüsse bei isothermen Bedingungen und einachsiger zyklischer Belastung, wie sie auch in den LCF Versuchen des Werkstoffs MAR M247 vorliegen.

Anders als die Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells gehen die Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells nicht explizit in die Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters ein. Um eine Änderung des D_{TMF} -Schädigungsparameters infolge einer Kennwertvariation innerhalb der Kennwerte des 2LVP Modells feststellen zu können, müssen die mit der Spannungsantwort des 2LVP Modells korrespondierenden Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte ermittelt werden. Die EFA der Kennwerte des 2LVP umfasst deshalb mehrere Schritte. Zunächst wird die Spannungsantwort des 2LVP Modells auf eine zyklische Belastung mit einer betragsmäßig konstanten Dehnrate von $\dot{\epsilon} = 0.003 \frac{1}{s}$ berechnet. Die für diese Belastung vorgegebene Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon$ ist frei wählbar. Im Rahmen dieser Untersuchung werden die Dehnschwingbreiten entsprechend der experimentellen Dehnschwingbreiten gewählt, die aus LCF Versuchen der Nickelbasislegierung bekannt sind. Sie sind in Tabelle 8.5 für jede Prüftemperatur zusammengefasst.

Die vorliegenden LCF Versuche weisen größtenteils ein Dehnungsverhältnis von $R_\epsilon = 0$ auf, was bei der Berechnung der Spannungsantwort des 2LVP Modells berücksichtigt wird. Da in den LCF Versuchen beim Erreichen der halben Zyklenzahl zum Versagen ein Spannungsverhältnis von $R_\sigma \approx -1$ festgestellt werden kann, genügt es nicht die Erstbelastung des 2LVP Modells als Grundlage für die Anpassung der Ramberg-Osgood Kennwerte heranzuziehen. Aufgrund des aufgeprägten Dehnungsverhältnisses weist die Hysterese der Erstbelastung ein deutlich von $R_\sigma = -1$ abweichendes Spannungsverhältnis auf. Stattdessen wird ein Algorithmus entwickelt, welcher die dehnungsgeführte zyklische Belastung des 2LVP Modells solange aufrecht erhält, bis sich die Spannungshysterese stabilisiert. Erst wenn die Mittelspannung σ_m

$$\sigma_{m,k} = \frac{\max(\sigma_{2LVP,k}) - \min(\sigma_{2LVP,k})}{2} \quad (8.23)$$

der berechneten Spannungs-Dehnungs-Hysterese (Index k) kleiner als $\sigma_m \leq 0.5 \text{ MPa}$ ausfällt oder sich die Mittelspannung im Vergleich zweier aufeinander folgender Hysteresen um weniger als eine Toleranz $TOL_{\sigma_m} = 0.001 \text{ MPa}$ ändert, ist die Bedingung für Stabilität

$$|\sigma_{m,k} - \sigma_{m,k+1}| \leq TOL_{\sigma_m} \quad (8.24)$$

erfüllt. Das Kriterium, welches die Differenz der Mittelspannungen zweier aufeinander folgender Hysteresen bewertet, kann als Abbruchkriterium verstanden werden. Bei Belastungen, die zu sehr geringen viskosen oder plastischen Dehnungen innerhalb der berechneten 2LVP Hysteresen führen, baut sich die Mittelspannung innerhalb der Modellantwort nur sehr langsam ab. Um zu verhindern, dass die Rechenzeiten aufgrund eines mangelhaften Kon-

8.4. EINFLUSSFAKTORENANALYSE DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS

Tabelle 8.4: Zusammenfassung der angepassten Ramberg-Osgood Kennwerte, die sich unter Verwendung der Masterkennwerte aus Tabelle 8.1 anhand der Spannungsantwort des 2LVP Modells bestimmen lassen.

Temperatur [°C]	20	300	600	750	850	950	1000	1050
E [MPa]	208582	193689	166688	164927	164728	150572	143709	143078
σ_{cy} [MPa]	1738.1	1732.4	1647.6	1519.1	1309.9	880.1	649.2	586.4
N'	47.84	34.55	15.26	8.84	4.50	4.46	6.11	6.00

vergenzverhalten steigen, erweist sich dieses Kriterium als sehr sinnvoll. Sobald eines der beiden Kriterien erfüllt ist, wird die Spannungs-Dehnungs-Hysterese des letzten Belastungszyklus genutzt, um die zu den verwendeten 2LVP Werkstoffkennwerten korrespondierenden Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte zu bestimmen. Hierzu kommen die Methoden aus Abschnitt 4.2.2 zum Einsatz. Anstatt an den absteigenden Hystereseast, werden die Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells an den ansteigenden Hystereseast der 2LVP Spannungsantwort angepasst. Es wird angenommen, dass die Spannungsantwort des 2LVP Modells in einer stabilisierten Hysterese symmetrisch ausfällt. Diese Ramberg-Osgood Kennwerte bilden das Modellverhalten des 2LVP Modells ab und können zur Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters genutzt werden. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 4.2.2, werden die angepassten Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells herangezogen, um die Spannungsantwort des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes zu berechnen und daraus die Beanspruchungsgrößen $\Delta\epsilon$, $\Delta\epsilon^{pl}$, $\Delta\sigma$ und $\Delta\sigma_{eff}$ für die Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters zu ermitteln.

Für jeden Kennwert des 2LVP Modells werden insgesamt 21 Kennwertvariationen durchgeführt. Der variierte Kennwert p_{var} ergibt sich aus der Multiplikation des Masterkennwerts p_M mit einem Faktor F_{var} , der 21 äquidistant verteilte Werte im Wertebereich $0.85 \leq F_{var} \leq 1.15$ annimmt. Die Masterkennwerte, die bei dieser EFA genutzt werden sind der Tabelle 8.1 aus Abschnitt 8.3 zu entnehmen. In der Tabelle 8.4 sind die zu den Masterkennwerten des 2LVP Modells korrespondierenden Ramberg-Osgood Kennwerte zusammengefasst. Sie werden anhand der Spannungsantwort des 2LVP Modells unter Verwendung der in Tabelle 8.5 gelisteten größten temperaturabhängigen Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon$ bestimmt.

Da die in Abschnitt 7.1 für die Nickelbasislegierung MAR M247 ermittelten Kennwerte A und B des Lebensdauermodells der Geheimhaltung unterliegen, wird bei der Darstellung der Ergebnisse dieser Studie auf die Berechnung der vom D_{TMF} -Lebensdauermodell vorhergesagten Zyklenzahl zum Versagen verzichtet. Stattdessen werden die Einflussfaktoren für die Kennwertvariationen direkt auf den D_{TMF} -Schädigungsparameter bezogen, der sich für die unterschiedlichen Temperaturen unter Verwendung der Masterkennwerte ergibt. Diese können anhand der öffentlichen Daten für den Werkstoff MAR M247 und der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden ermittelt werden.

Die Tabelle 8.5 fasst die in der EFA untersuchten Belastungsniveaus und den jeweils unter Verwendung der Masterkennwerte berechneten D_{TMF} -Schädigungsparameter zusammen. In der Abbildung 8.11 ist zunächst die 2LVP Modellantwort dargestellt, wie sie sich unter Verwendung des oben beschriebenen Algorithmus und der Masterkennwerte für die Prüftemperatur

Tabelle 8.5: Zusammenfassung der temperaturspezifischen Belastungsniveaus, die im Rahmen der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells untersucht werden und der sich unter Verwendung der Masterkennwerte ergebenden D_{TMF} -Schädigungsparameter.

Temperatur [°C]	20	300	600	850	1000	1050
$\Delta\epsilon = 0.003$	-	-	-	-	-	0.0010
$\Delta\epsilon = 0.004$	-	-	-	-	0.0015	0.0017
$\Delta\epsilon = 0.006$	-	-	-	-	0.0036	0.0083
$\Delta\epsilon = 0.008$	-	-	-	0.0013	0.0075	-
$\Delta\epsilon = 0.01$	0.0051	0.0042	0.0034	0.0052	-	-
$\Delta\epsilon = 0.012$	0.0094	0.0079	0.0059	0.0081	-	-
$\Delta\epsilon = 0.014$	0.0144	0.0129	0.0102	-	-	-

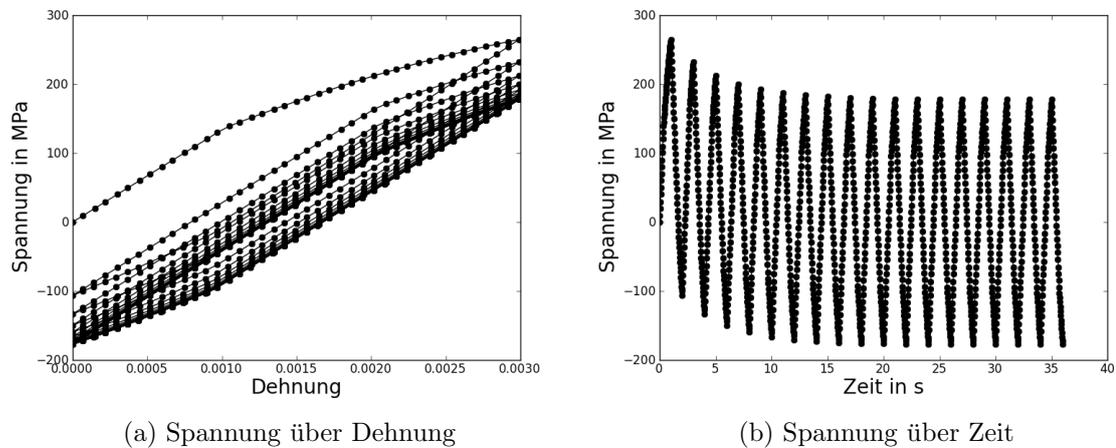


Abbildung 8.11: Ergebnis für die Berechnung einer stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Hysteresis unter Verwendung der Masterkennwerte für 1050 °C und der Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.003$.

von 1050 °C ergibt. Es wird das Ergebnis für die minimale Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.003$ abgebildet. Jeder Belastungszyklus wird durch 81 Spannungs-Dehnungs-Zeit-Datentripel diskretisiert. Es werden in diesem Fall 18 Belastungshysteresen aufgeprägt, bis eines der beiden Stabilitätskriterien erfüllt ist. Im Vergleich dazu wird in Abbildung 8.12 das Ergebnis des Algorithmus unter Verwendung der maximalen Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.006$ für die Prüftemperatur von 1050 °C dargestellt. In diesem Fall werden bis zur Stabilisierung der Modellantwort nur fünf Belastungszyklen benötigt. Es tritt deutliche viskoplastische Verformung auf, sodass die Mittelspannung im Modell innerhalb weniger Belastungszyklen abgebaut wird. In den Abbildungen 8.13 bis 8.16 sind die Ergebnisse der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells für die Temperaturen von 20 °C, 600 °C, 1000 °C und 1050 °C unter Verwendung der jeweils maximalen Dehnschwingbreite dargestellt. Über alle Temperaturen hinweg ist der E-Modul des elastisch-plastischen Layers der Kennwert, dessen Variation das Ergebnis für den D_{TMF} -Schädigungsparameter am stärksten beeinflusst. Er steht außerdem als einziger Kennwert über allen Temperaturen hinweg in positiver Korrelation mit dem D_{TMF} -Schädigungsparameter. Mit steigendem E^{pl} nimmt die Schädigung zu. Mit steigender Temperatur nehmen die Einflussfaktoren der Werkstoffkennwerte zu, die das zeitabhängige Verhalten des

8.4. EINFLUSSFAKTORENANALYSE DER KENNWERTE DES TWO-LAYER-VISCOPLASTICITY MODELLS

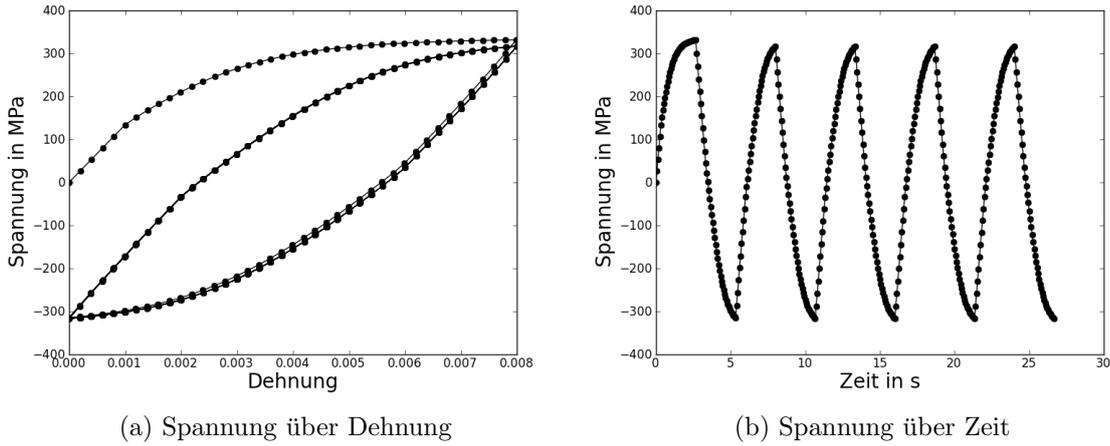


Abbildung 8.12: Ergebnis für die Berechnung einer stabilisierten Spannungs-Dehnungs-Hysterese unter Verwendung der Masterkennwerte für 1050 °C und der Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon = 0.006$.

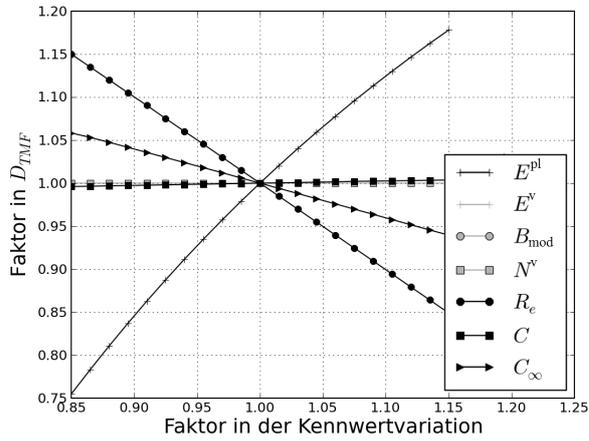


Abbildung 8.13: Ergebnis der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells bei einer Temperatur von 20 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.014$.

2LVP Modells definieren. Im viskoelastischen Layer entwickelt der Kennwert N^v mit zunehmender Temperatur einen immer größeren Einfluss auf den D_{TMF} -Schädigungsparameter. Die Kennwerte E^v und C weisen für jede Temperatur und für jedes Belastungsniveau nur einen sehr geringen Einflussfaktor auf.

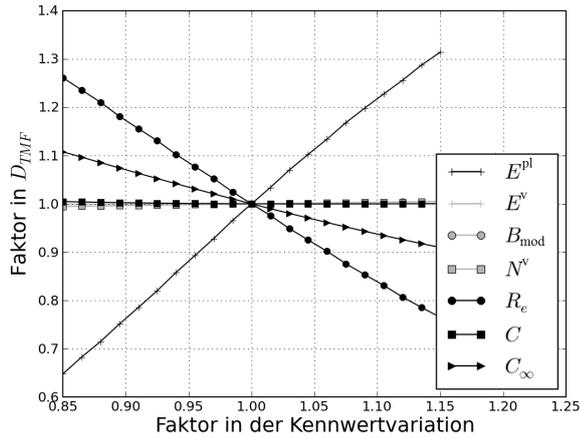


Abbildung 8.14: Ergebnis der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells bei einer Temperatur von 600 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.014$.

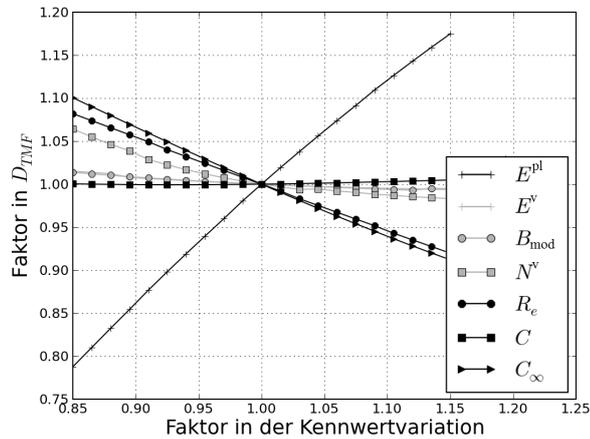


Abbildung 8.15: Ergebnis der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells bei einer Temperatur von 1000 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.01$.

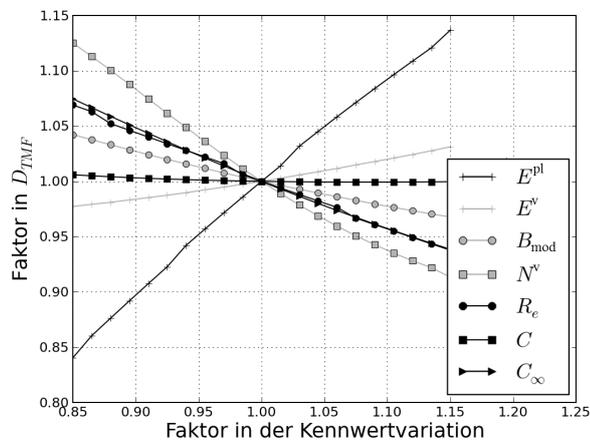


Abbildung 8.16: Ergebnis der EFA der Kennwerte des 2LVP Modells bei einer Temperatur von 1050 °C und einer Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.006$.

8.5 Streuung der Kennwerte des 2LVP Modells

Um die Streuung der Kennwerte des 2LVP Modells ermitteln zu können, müssen die LCF Versuchsdaten der Nickelbasislegierung herangezogen werden. Eine Streuungsauswertung basierend auf CLCF Daten ist nicht möglich, da für diesen Versuchstyp die vorliegenden Versuchsumfänge zu gering sind. Maximal liegen 3 Versuche pro Prüftemperatur vor, was für eine statistische Auswertung nicht ausreicht.

Um basierend auf LCF Versuchsdaten eine für das 2LVP Modell sinnvolle Kennwertbestimmung durchführen zu können, werden die beiden Layer des Werkstoffmodells separat betrachtet. Es werden Annahmen getroffen, die im folgenden Abschnitt näher erläutert sind. Aufbauend auf den dabei ermittelten Ergebnissen, wird in Abschnitt 8.5.2 die Robustheit der ermittelten Kennwerte des 2LVP Modells überprüft.

8.5.1 Bestimmung der Two-Layer-Viscoplasticity Kennwerte aus LCF Versuchen

Die objektive Bestimmung aller Kennwerte des 2LVP Modells anhand von LCF Daten ist nicht möglich, da diese in der Versuchsführung wenig komplexen Versuche weder Haltezeiten noch betragsmäßige Dehnratenvariationen aufweisen und somit keine eindeutige Anpassung der Werkstoffkennwerte, die das zeitabhängige Modellverhalten definieren, ermöglichen. Sie sprechen die viskosen Eigenschaften des visko-elastischen Layers im Modell nicht an, sodass durch die Belastungsgeschichte keine Rückschlüsse auf das zeitabhängige Werkstoffverhalten und damit auch nicht auf das zeitabhängige Modellverhalten möglich werden. Bei einer gradientenbasierten Optimierung führen diese Voraussetzungen dazu, dass die Sensitivität der Fehlerquadratsumme auf eine Kennwertänderung verloren geht und dass das Optimierungsergebnis nicht durch das Werkstoffverhalten definiert ist. Die Wechselwirkungen zwischen den Kennwerten des Werkstoffmodells lassen in diesem Fall auch keine sinnvolle Anpassung der Kennwerte des elastisch-plastischen Layers zu.

Um die Bestimmung der Kennwerte des elastisch-plastischen Layers gradientenbasiert zu ermöglichen, werden die Kennwerte des visko-elastischen Layers entsprechend der in Abschnitt 8.3 bestimmten Werte definiert und das zeitabhängige visko-elastische Modellverhalten für jede Temperatur als frei von Streuungen angenommen. Die temperaturspezifischen Werte für E^v , B_{mod} und N^v können der Tabelle 8.6 entnommen werden. Sie stellt ein Auszug aus Tabelle 8.3 dar. Für die Temperaturen 20 °C und 300 °C weist die Modellantwort aufgrund des sehr klein gewählten E-Moduls E^v nahezu keine zeitabhängigen Effekte auf.

Tabelle 8.6: Zusammenfassung der 2LVP Kennwerte die zur Beschreibung des zeitabhängigen Modellverhaltens festgelegt werden.

Temperatur [°C]	20	300	600	750	850	950	1000	1050
E^v [MPa]	20.9	19.4	17756.9	20123.4	23886.6	22143.2	21271.5	26851
B_{mod} [MPa]	15.80	15.80	46.41	211.5	1000	1143	1585	1520
N^v	10	10	6	4	3	2.67	2.5	2.2

Theoretisch kann die komplette Belastungsgeschichte eines LCF Versuchs mit dem inkrementell formulierten 2LVP Modell nachgerechnet werden. Da in den vorliegenden LCF Daten jedoch diese Belastungsgeschichte nicht vollständig dokumentiert ist, die aufgrund des Dehnungsverhältnisses $R_\epsilon = 0$ auftretende Mittelspannungsrelaxation vom 2LVP Modell nicht adäquat abgebildet werden kann und die Berechnung der Modellantwort für mehrere tausend Belastungszyklen sehr zeitintensiv ausfällt, wird für die Bestimmung der Kennwerte des elastisch-plastischen Modellverhaltens die Spannungs-Dehnungs-Hysterese bei halber Lebensdauer herangezogen. Es handelt sich um die gleiche Hysterese, die auch für die Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte genutzt wird (siehe Abschnitt 4.2.2).

Da die Bestimmung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers deutlich mehr Rechenzeit in Anspruch nimmt als die Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte und sich die Komplexität des Anpassungsproblems durch die zunehmende Anzahl an unbekanntem Werkstoffkennwerten erhöht, werden lediglich diejenigen LCF Versuche (Index i) ausgewertet, für die im Abschnitt 5.4.2 eine robuste Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte möglich ist.

Im Allgemeinen führen die bei der zyklischen Belastung während LCF Versuchen auftretenden Spannungen zu Wechsellastplastizität, sodass Mittelspannungsrelaxation auftritt und Rückspannungen im Material entstehen. Dies gilt es bei der Bestimmung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers zu berücksichtigen. Für jeden der n vorliegenden Versuche ist die individuelle Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon_i$, das Spannungsverhältnis $R_{\sigma,i}$ und das Dehnungsverhältnis $R_{\epsilon,i}$ bekannt. Durch den bereits in Abschnitt 8.4 erläuterten Algorithmus kann dem 2LVP Modell eine zyklische Belastung solange aufgeprägt werden, bis sich die festgelegte Mittelspannung σ_m einstellt. Dieser Algorithmus muss für die Arbeit mit realen Versuchsdaten schrittweise erweitert werden. Obwohl die Nickelbasislegierung MAR M247 keine nennenswerte Zug-Druck Asymmetrie in ihren Spannungs-Dehnungs-Hysteresen zeigt, können in den Hysteresen bei halber Lebensdauer Mittelspannungen $\sigma_{m,i}$ auftreten, die kleiner sind als null. Das 2LVP Modell konvergiert bei zyklischer Belastung nach einigen Zyklen beim Erreichen einer stabilen Spannungs-Dehnungs-Hysterese. Diese Hysterese weist jedoch stets ein Spannungsverhältnis von $R_\sigma = -1$ auf, was einer Mittelspannung von $\sigma_m = 0$ entspricht. Die Modellantwort ist exakt symmetrisch in Zug und Druck. Spannungsverhältnisse, die bei einem Dehnungsverhältnis von $R_\epsilon = 0$ kleiner ausfallen als $R_\sigma = -1$ können vom Modell in einer stabilen Hysterese nicht beschrieben werden. Anstatt des festgelegten Mittelspannungswerts von 0.5 MPa aus Abschnitt 8.4 wird die zyklische Belastung des Modells so lange aufrecht erhalten bis die Mittelspannung der modellierten Spannungs-Dehnungs-Hysterese $\sigma_{m,mod}$ der experimentell bestimmten Mittelspannung aus dem LCF Versuch $\sigma_{m,i}$ in den Grenzen einer Toleranz TOL entspricht und

$$|\sigma_{m,mod} - \sigma_{m,i}| \leq TOL \quad (8.25)$$

gilt. Die Toleranz wird zu $TOL = 0.1$ MPa festgelegt. Um bei negativen Mittelspannungen, die dazu führen, dass die Toleranzgrenze nicht unterschritten wird, ein sinnvolles Abbruchkriterium für den Algorithmus zu finden, wird durch eine Fallunterscheidung die minimale Mittelspannung der herangezogenen LCF Hysterese zu $\sigma_{m,min} = 0$ festgelegt. Sobald in der

Spannungs-Dehnungs-Hysterese bei halber Lebensdauer der Fall

$$\sigma_{m,i} \leq \sigma_{m,\min} \quad (8.26)$$

eintritt, wird

$$\sigma_{m,i} = \sigma_{m,\min} \quad (8.27)$$

festgelegt. Die Dehnschwingbreite und das Dehnungsverhältnis der zyklischen Belastung wird hierbei entsprechend der Randbedingungen des ausgewerteten LCF Versuchs gewählt.

Die Bestimmung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers E^{pl} , R_e , C und C_∞ erfolgt gradientenbasiert durch die Minimierung einer Fehlerquadratsumme. Die Bestimmung der elastischen und plastischen Modelleigenschaften wird anders als noch bei der Bestimmung der Ramberg-Osgood Kennwerte in einem einzigen Optimierungsschritt durchgeführt. Hierbei muss beachtet werden, dass der gradientenbasierte Optimierungsalgorithmus die partiellen Ableitungen, wie in Abschnitt 3.1.5 erläutert, numerisch ermittelt. Zur Berechnung des Differenzenquotienten werden inkrementelle Variationen der Werkstoffkennwerte durchgeführt (siehe Gleichung (3.2)). Diese inkrementelle Variation der Werkstoffkennwerte hat zur Folge, dass sich das Modellverhalten inkrementell verändert. Dies kann sich auf das Konvergenzverhalten im oben beschriebenen Algorithmus auswirken, sodass sich bei einer Kennwertvariation die Anzahl der zur Unterschreitung der Toleranz benötigten Anzahl an Belastungszyklen verändert und die Berechnung des Gradienten verfälscht. Dies kann verhindert werden, indem die Anzahl N_A der zu berechnenden Belastungszyklen für jede Iteration des gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus zwischengespeichert wird.

Die zu minimierende Fehlerquadratsumme FQS_{LCF} ist durch

$$FQS_{\text{LCF}} = \sum_{k=1}^m (\sigma_{\text{exp},k} - \sigma_{2\text{LVP},k})^2 \quad (8.28)$$

definiert. Für jeden der $m = 81$ Datenpunkte der Spannungs-Dehnungs-Hysterese wird die Differenz aus der durch das 2LVP Modell berechneten Spannung $\sigma_{2\text{LVP},k}$ und der experimentell ermittelten Spannung $\sigma_{\text{exp},k}$ gebildet. Die gradientenbasierte Optimierung startet ausgehend von manuell festgelegten Startwerten.

8.5.2 Robustheitsuntersuchungen mit dem 2LVP Modell

Wie bereits im Abschnitt 5 erläutert, können Störeinflüsse die durch den gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus bestimmten Kennwerte verfälschen. Auch für die ermittelten Kennwerte des elastisch-plastischen Layers des 2LVP Modells sollen diese unerwünschten Unsicherheiten bei der Kennwertermittlung im Rahmen einer Robustheitsuntersuchung auf ein geringes Maß begrenzt werden, sodass die spätere statistische Beschreibung der Kennwertunsicherheit die tatsächliche Streuung der Werkstoffeigenschaften beschreibt.

Während bei der Robustheitsuntersuchung des Ramberg-Osgood Modells in einer empirischen Studie der gesamte physikalisch sinnvolle Kennwertraum betrachtet wird, ist diese Vorgehensweise für die Untersuchung der Kennwerte des 2LVP Modells aufgrund der benötigten Rechenzeit nicht zielführend. Stattdessen kann jedoch eine Robustheitsuntersuchung für je-

den LCF Versuch erfolgen. Es wird derjenige Punkt im Kennwertraum untersucht, der sich aus der Anpassung der 2LVP Kennwerte ergibt. Für jedes Ergebnis des Optimierungsalgorithmus wird die Kennwertrobustheit untersucht. Diese Untersuchung erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst wird mit der in Abschnitt 8.5.1 beschriebenen Methodik für jeden der untersuchten LCF Versuche der Kennwertsatz $\mathbf{p}_{\text{init}}^*$ ermittelt, der die Fehlerquadratsumme aus Gleichung (8.28) minimiert. Aufgrund der Komplexität des Optimierungsproblems und der verwendeten Optimierungsmethodik besteht die Möglichkeit, dass die durch den Optimierungsalgorithmus identifizierten Kennwerte nur ein lokales Minimum der FQS beschreiben und dass in der Umgebung der identifizierten Lösung noch weitere, im Sinne der Fehlerquadratminimierung, bessere Lösungen existieren. Deshalb werden die Kennwerte $E_{\text{init}}^{\text{P}^*}$, $R_{e,\text{init}}^*$, $C_{\infty,\text{init}}^*$ und C_{init}^* als Ausgangspunkt für eine genauere Suche nach Minima in der FQS genutzt. Es werden 15 weitere Optimierungsaufrufe ausgehend von zufällig verrauschten Startkennwerten durchgeführt, die in der Nähe von $\mathbf{p}_{\text{init}}^*$ liegen. Für jeden Aufruf werden die Startwerte gemäß

$$p_i = p_{\text{init},i}^* + p_{\text{init},i}^* \cdot Z_i(f_N(x|0, 0.15)) \quad (8.29)$$

zufällig variiert. Hierbei beschreibt $Z_i(f_N(x|0, 0.15))$ eine Zufallszahl, die durch den Zufallszahlengenerator aus einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_N = 0$ und der Standardabweichung $\sigma_N = 0.15$ gezogen wird. Der Index i indiziert in diesem Fall den im Kennwertsatz an der i -ten Stelle stehenden Kennwert. Führt die Gleichung (8.29) auf Kennwerte, die außerhalb der für diesen Kennwert definierten Schranken des Optimierungsalgorithmus liegen, wird die Ziehung solange wiederholt, bis der Kennwert p_i zulässig ist.

Das Ergebnis der Untersuchung sind 15 Kennwertsätze \mathbf{p}_k^* , mit $1 \leq k \leq 15$, die jeweils zur Minimierung der FQS $FQS_{\text{LCF},k}^*$ führen. Für die Robustheitsuntersuchung wird derjenige Kennwertsatz genutzt, der zur kleinsten FQS im Vergleich aller 15 Fehlerquadratminimierungen führt. Der dazugehörige Kennwertsatz beinhaltet die Masterkennwerte \mathbf{p}_M , die für die Durchführung der Robustheitsstudie am Lösungspunkt herangezogen werden.

Analog zur Vorgehensweise beim Ramberg-Osgood Modell wird auch für das 2LVP Modell die empirische Robustheitsuntersuchung basierend auf synthetischen Daten durchgeführt, die sich aus den Belastungen des untersuchten LCF Versuchs ergeben. Um die Versuchsbedingungen des untersuchten LCF Versuchs möglichst genau abzubilden, werden dem 2LVP Modell bis zum Erreichen einer vorgegebenen Mittelspannung eine bestimmte Anzahl an Belastungszyklen aufgeprägt. Diese Anzahl entspricht der zwischengespeicherten Variable N_A , die in Abschnitt 8.5.1 erläutert wird. Die durch das 2LVP Modell unter Verwendung der Masterantwort erzeugte Spannungs-Dehnungs-Hysterese wird durch eine zufällige Störgröße überlagert, die das Messwertrauschen infolge von Messfehlern beschreibt. Die verrauschten Spannungen σ_{scat} werden durch die Addition der Spannungen der Masterantwort σ_M mit einer Zufallszahl Z_i gemäß

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{scat},i} &= \sigma_{M,i} + \sigma_{M,i} \cdot Z_i \\ \text{mit } Z_i &= Z(f_N(x|0, s_{\text{exp}}))_i \end{aligned} \quad (8.30)$$

berechnet. Der Index i indiziert die Wertepaare der Masterantwort. Z_i wird zufällig aus einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu_N = 0$ und der Standardabweichung $\sigma_N = s_{\text{exp}}$ generiert. Der Messfehler ist demnach direkt mit dem synthetischen Messwert $\sigma_{M,i}$ korreliert.

In einem weiteren Schritt wird das 2LVP Modell ausgehend von den Masterkennwerten durch den Aufruf des gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus an die verrauschte Masterantwort angepasst. Die Prozedur aus dem Verrauschen der Masterantwort und der Reidentifikation der Masterkennwerte wird für jeden untersuchten LCF Versuch 15 Mal wiederholt. Die in den 15 so ermittelten Kennwertsätzen $\mathbf{p}_{\text{scat},j}^*$ mit $1 \leq j \leq 15$ enthaltenen Kennwerte, können nun kennwertspezifisch zu Stichproben zusammengefasst werden. Anhand der Gleichungen (3.16) und (3.17) lassen sich für jeden Kennwert (Index i) der arithmetische Stichprobenmittelwert \bar{p}_i , die Stichprobenvarianz und die relative Standardabweichung der Stichprobenwerte des i -ten Kennwerts $s_{\text{rel},i}$ im Kennwertsatz berechnen. Die relative Standardabweichung dient als Maß für die Unsicherheit im i -ten Kennwert. Fällt sie für einen der Kennwerte größer als ein zuvor definierter Wert aus, der im Rahmen dieser Arbeit als Robustheitsniveau R_{niv} bezeichnet wird, werden die für diesen Versuch bestimmten Kennwerte als nicht robust bewertet. In der Tabelle 8.7 sind die Ergebnisse der Robustheitsuntersuchung der Kennwerte des 2LVP Modells für ein Robustheitsniveau $R_{\text{niv}} = 0.03$ zusammengefasst. Es liegen insgesamt 37 LCF Versuche vor, deren Ramberg-Osgood Kennwerte für dieses Robustheitsniveau als robust bewertet werden.

Tabelle 8.7: Ergebnis der Robustheitsuntersuchung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers bei einem Robustheitsniveau von $R_{\text{niv}} = 0.03$.

Temperatur [°C]	Anzahl robuste Ramberg-Osgood Kennwertsätze bei $R_{\text{niv}} = 0.03$	robuste Kennwertsätze des elastisch-plastischen Layers des 2LVP Modells bei $R_{\text{niv}} = 0.03$
1000	12	0
1050	15	2
1150	10	1

Aus diesen Versuchen erfüllen lediglich drei der für das elastisch-plastische Layer bestimmten Kennwertsätze die Robustheitsanforderungen bei $R_{\text{niv}} = 0.03$. Die Ergebnisse der EFA aus dem Abschnitt 8.4 zeigen, dass der D_{TMF} -Schädigungsparameter deutlich sensitiver auf eine Variation des E-Moduls des elastisch-plastischen Layers E^{pl} reagiert, als bei Variation der anderen Werkstoffkennwerte dieses Layers. Deshalb wird eine weitere Robustheitsuntersuchung mit einem Robustheitsniveau von $R_{\text{niv}} = 0.03$ für die Unsicherheit in E^{pl} und $R_{\text{niv}} = 0.06$ für die Unsicherheit der restlichen Kennwerte des elastisch-plastischen Layers durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.8 zusammengefasst. Die Anhebung des Robustheitsniveaus führt dazu, dass die Kennwerte von acht der 37 ausgewerteten LCF Versuche robust bewertet werden können. Wird das Robustheitsniveau auf $R_{\text{niv}} = 0.06$ für alle Kennwerte des elastisch-plastischen Layers angehoben, ergeben sich die in Tabelle 8.9 gezeigten Ergebnisse. Die Verdopplung der ursprünglich zulässigen Kennwertstreuung führt zu insgesamt zehn robust bewerteten Kennwertsätzen. Trotzdem ist basierend auf diesen Ergebnissen keine belastbare statistische Auswertung der temperaturspezifischen Kennwertstreuung möglich, da die resultierenden Stichprobenumfänge sehr klein ausfallen.

Tabelle 8.8: Ergebnis der Robustheitsuntersuchung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers bei einem Robustheitsniveau von $R_{niv} = 0.03$ für E^p und $R_{niv} = 0.06$ für R_e , C und C_∞ .

Temperatur [°C]	Anzahl robuste Ramberg-Osgood Kennwertsätze bei $R_{niv} = 0.03$	robuste Kennwertsätze des elastisch-plastischen Layers des 2LVP Modells bei $R_{niv} = 0.03$ für E^p und $R_{niv} = 0.06$ für R_e , C und C_∞
1000	12	1
1050	15	4
1150	10	3

Tabelle 8.9: Ergebnis der Robustheitsuntersuchung der 2LVP Kennwerte des elastisch-plastischen Layers bei einem Robustheitsniveau von $R_{niv} = 0.06$.

Temperatur [°C]	Anzahl robuste Ramberg-Osgood Kennwertsätze bei $R_{niv} = 0.03$	robuste Kennwertsätze des elastisch-plastischen Layers des 2LVP Modells bei $R_{niv} = 0.06$
1000	12	3
1050	15	4
1150	10	3

8.6 Konzeptioneller Vorschlag für die Monte-Carlo Simulation einer thermomechanischen Bauteilberechnung

In Abschnitt 8.5.2 kann gezeigt werden, dass die Anzahl an robusten Kennwertsätzen für das 2LVP Modell sehr gering ausfällt. Eine belastbare statistische Beschreibung der Streuung der Kennwerte dieses Werkstoffmodells ist basierend auf dem in dieser Arbeit vorliegenden Datenumfang nicht möglich. Um dennoch den Einfluss von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die Bauteillebensdauer in einer Monte-Carlo Simulation basierend auf einer thermomechanischen FE Simulation untersuchen zu können, wird in diesem Abschnitt ein konzeptioneller Ansatz entwickelt. Er ermöglicht die Übertragung der Kennwertstreuung aus den bereits vorgestellten Ergebnissen auf ein Simulationsmodell, das in Abschnitt 8.6.1 zunächst unter Verwendung von nicht probabilistischen Kennwerten vorgestellt wird.

In Abschnitt 8.6.2 wird ein konzeptioneller Lösungsansatz zur Ermittlung der Kennwertstreuung erarbeitet und erläutert, wie sich aus den vorliegenden Werkstoffdaten die Kennwerte des 2LVP Modells unter Berücksichtigung von Kennwertstreuung für eine thermomechanische Bauteilsimulation ableiten lassen. Der Ablauf der Monte-Carlo Simulation des Bauteils unter thermomechanischer Belastung wird in Abschnitt 8.6.3 beschrieben und die daraus folgenden Ergebnisse für die Streuung der Bauteillebensdauer statistisch ausgewertet.

8.6.1 Simulationsmodell für die thermomechanische Simulation einer Turbinenschaufel

Für die Untersuchung des Einflusses von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die Bauteillebensdauer wird von der MTU Aero Engines AG ein vollständiges FE Modell für die Bauteilsimulation bereitgestellt. Es betrachtet einen Ausschnitt aus einem Schaufelring. Seine Rotationssymmetrie ist durch entsprechenden Randbedingungen in tangentialer Richtung berücksichtigt. Der Ausschnitt beinhaltet insgesamt drei Schaufeln. Er ist in Abbildung 8.17 dargestellt. Die thermomechanischen Belastungen erfolgen zyklisch und simulieren den Real-

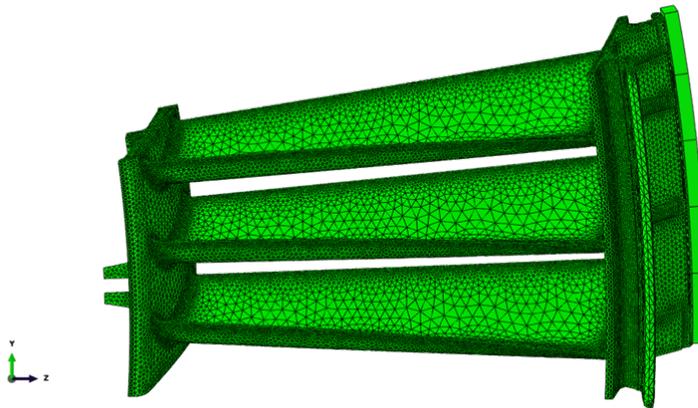


Abbildung 8.17: Darstellung des Simulationsmodells des Ausschnitts aus einem Schaufelring.

betrieb einer Turbine. In jedem Zyklus wird das Anfahren, das Aufheizen auf maximal Temperatur bei Volllast und das anschließende Abkühlen der Turbine berücksichtigt. Die Zyklusdauer beträgt rund 200 s. Es werden drei Belastungszyklen simuliert. Temperaturen und Drücke sind zu unterschiedlichen Zeitpunkten des Belastungszyklus für jeden Knoten vorgegeben. Das Temperaturfeld bei maximaler Temperatur ist in Abbildung 8.18 dargestellt. Die Abbildung 8.19 zeigt schematisch den Temperaturverlauf an zwei Knoten des Simulationsmodells während der drei berechneten Belastungszyklen. Der Temperaturverlauf zwischen den Knoten zeigt keine Phasenverschiebung. Im gesamten Bauteil wird die lokale maximale Tem-

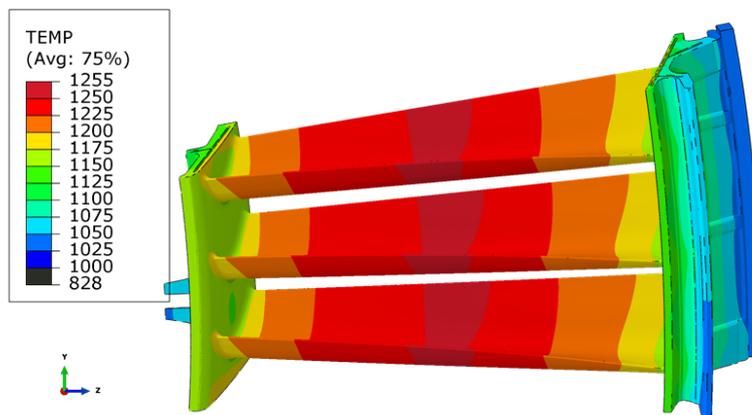


Abbildung 8.18: Temperaturverteilung im Simulationsmodell des Schaufelringausschnitts bei maximaler Bauteiltemperatur im Belastungszyklus (Temperaturen in Kelvin).

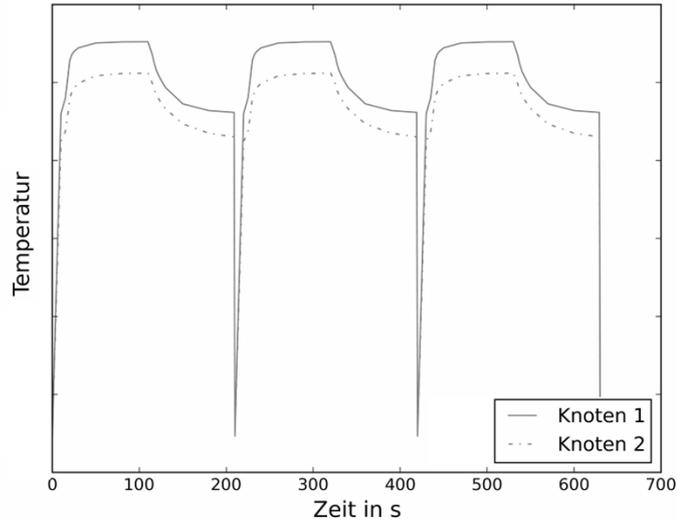


Abbildung 8.19: Temperaturverlauf über der Zeit in den Knoten 1 und 2 bei der Simulation von drei Belastungszyklen.

peratur jeweils zum selben Zeitpunkt im Lastzyklus erreicht. Am Knoten 1 tritt die größte Temperatur im Modell mit $T_{\max} = 1255 \text{ K}$ auf. Der Knoten 2 kennzeichnet den höchstbelasteten Bereich im Bauteil mit der geringsten Lebensdauer. Hier fallen die erreichten Temperaturen deutlich niedriger aus. Die FE Berechnung des Turbinenschaufelmodells wird mit dem 2LVP Modell und den in Abschnitt 8.3 bestimmten Werkstoffkennwerten durchgeführt (siehe Tabelle 8.3). Es werden die Spannungen, elastische, thermische, plastische und viskose Dehnungen, die Temperaturen und die Knotenverschiebungen für das Gesamtmodell ausgegeben.

Die Abbildung 8.20 zeigt den schematischen Verlauf der akkumulierten plastischen, der akkumulierten viskosen und der akkumulierten viskoplastischen Dehnungen über der Zeit im hochbelasteten Knoten 2.

Während der Erstbelastung nehmen die plastischen und die viskosen Dehnungen stark zu. In den folgenden Zyklen zeigt die plastische Dehnung nur noch sehr geringe Zuwächse. Die viskoplastische Dehnung kann durch den Werkstoffkennwert f gewichtet in ihren plastischen und viskosen Anteil zerlegt werden (siehe Gleichung (8.5)).

In der Abbildung 8.21 ist der höchst belastete Bereich des Bauteils, die Umgebung des Knotens 2 dargestellt. Die Abbildung zeigt den Zuwachs der plastischen, der viskosen und der viskoplastischen Dehnungsanteile im dritten Belastungszyklus, der für die Lebensdauerbewertung herangezogen wird. Plastische Dehnungen im elastisch-plastischen Layer des 2LVP Modells treten nur sehr lokalisiert im Bereich dieses Knotens auf. Das Inkrement an plastischer Dehnung fällt deutlich geringer aus als das Inkrement an viskoser Dehnung. Die Auswertung des D_{TMF} -Schädigungsparameters erfolgt durch ein PYTHON Skript, welches auf die Ergebnisse der FE Simulation zugreift. Da die D_{TMF} Auswertung für das gesamte Bauteil aufgrund der Rechenzeiten und der lokalisiert auftretenden maximalen Schädigung nicht zielführend erscheint, erfolgt sie lediglich in dem in Abbildung 8.21 dargestellten Bauteilbereich. Für jeden Integrationspunkt in einem vorab definierten Elementset werden die Größen,

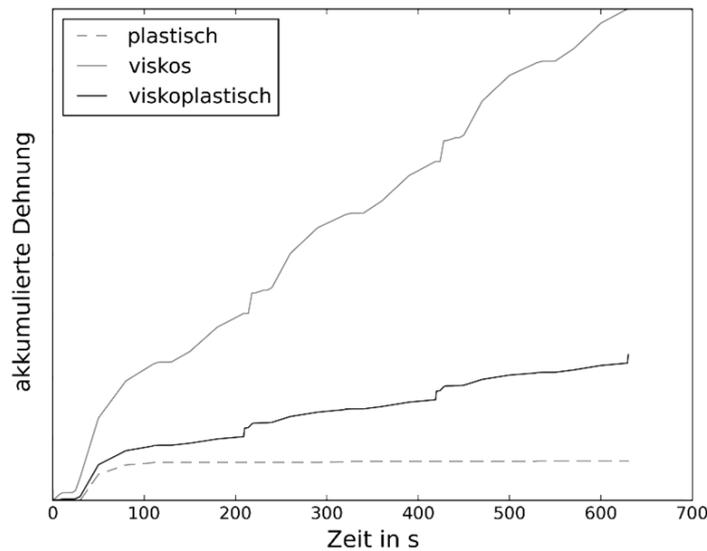


Abbildung 8.20: Verlauf der akkumulierten plastischen, der akkumulierten viskosen und der akkumulierten viskoplastischen Dehnung über der Zeit im Knoten 2 bei der Simulation von drei Belastungszyklen.

die zur Berechnung der Schädigung im letzten berechneten Belastungszyklus benötigt werden, extrahiert. Die Ergebnisse für den D_{TMF} -Schädigungsparameter werden zunächst durch die in Abschnitt 8.1 beschriebene Methodik berechnet und anschließend in die Ergebnisdatei zurückgeschrieben, sodass der Verlauf der Ermüdungslebensdauer und des D_{TMF} -Schädigungsparameters genauso wie die anderen Ergebnisgrößen der FE Berechnung im Elementset dargestellt werden können. Die Abbildung 8.22 zeigt die Ergebnisse für die Auswertung des D_{TMF} -Schädigungsparameters des Schaufelringausschnitts im hoch belasteten Bauteilbereich. Zur Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters wird der integrale Mittelwert der in Tabelle 8.4 zusammengefassten Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells für den untersuchten thermomechanischen Belastungszyklus ermittelt. Die Auswertung des Schädigungsparameters erfolgt hierbei für jeden Integrationspunkt, der im betrachteten Bauteilbereich enthalten ist. Die F -Funktion wird in dieser Auswertung zu $F = 1$ gewählt. Bei Verwendung der für den Werkstoff MAR M247 in Abschnitt 4.3.1 bestimmten Kennwerte des Norton-Kriechmodells und einer Zyklusdauer von $t_z \approx 200$ s nimmt die F -Funktion Werte an, die ungefähr dem Wert von $F = 1$ entsprechen (siehe Abbildung 4.7) und hat damit bei der gegebenen thermomechanischen Belastung einen sehr geringen Einfluss auf die Schädigung des Bauteils.

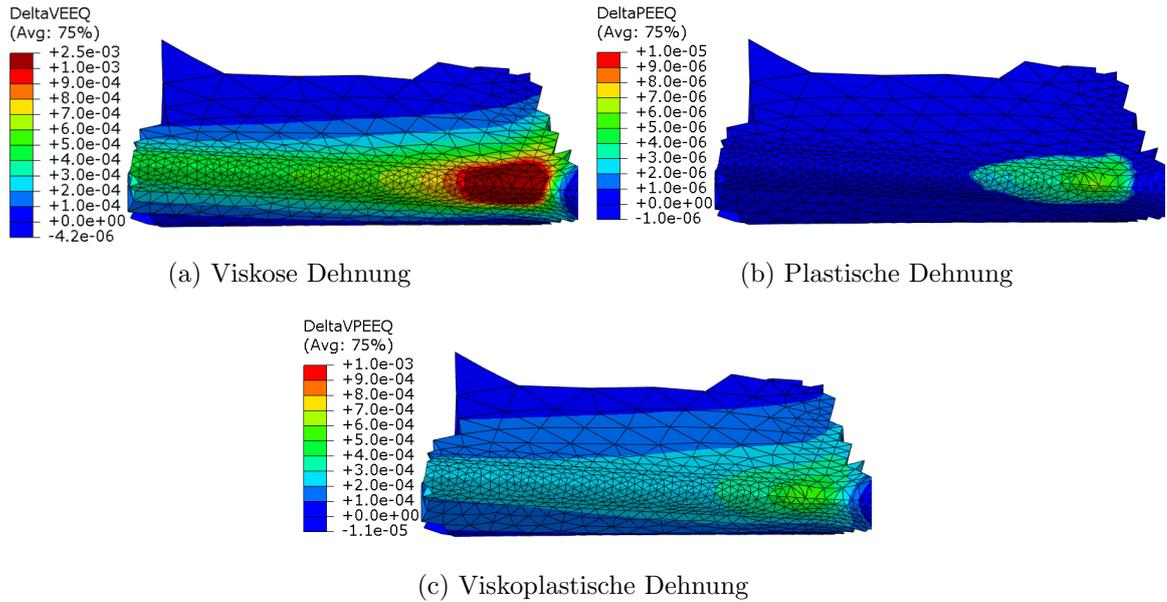


Abbildung 8.21: Darstellung der plastischen, der viskosen und der viskoplastischen Dehnungen (Skalierung der Dehnungen nicht identisch), die sich im dritten Belastungszyklus akkumulieren.

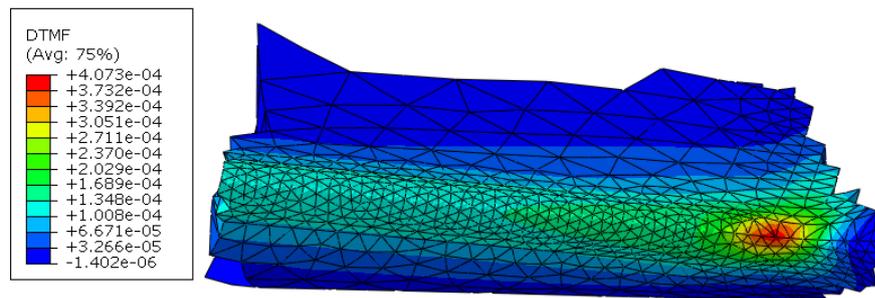


Abbildung 8.22: Darstellung des D_{TMF} -Schädigungsparameters im kritischen Bereich des Schaufelringausschnitts.

8.6.2 Konzept zur Ermittlung der Kennwertstreuung des Two-Layer-Viscoplasticity Modells

Für die Simulation des FE Modells des Schaufelringausschnitts in Abschnitt 8.6.1 werden die 2LVP Kennwerte des Werkstoffs MAR M247 genutzt, die in Abschnitt 8.3 bestimmt werden. Das Werkstoffverhalten wird in dem vorgestellten Simulationsmodell durch das 2LVP Modell beschrieben. Um die Temperaturabhängigkeit des Werkstoffverhaltens beschreiben zu können, sind die Kennwerte des 2LVP Modells bei den Temperaturstützstellen 20 °C, 300 °C, 600 °C, 750 °C, 850 °C, 1000 °C und 1050 °C entsprechend der in Tabelle 8.3 zusammengefassten Werte gewählt. Für die Auswertung des D_{TMF} -Schädigungsparameters werden die korrespondierenden Ramberg-Osgood Kennwerte benötigt. Sie sind in Tabelle 8.4 aufgelistet. Für eine Untersuchung des Einflusses der Kennwertstreuung des 2LVP Modells auf das Ergebnis der Bauteilsimulation und auf die vom D_{TMF} - Lebensdauermodell vorhergesagten Bau-

teillebensdauer fehlen, wie in der Robustheitsuntersuchung im Abschnitt 8.5.2 gezeigt wird, verlässliche Informationen über das Streuverhalten der Modellkennwerte. Eine quantitative Beschreibung der Streuung innerhalb der Kennwerte durch statistische Verteilungshypothesen ist basierend auf den ermittelten Ergebnissen nicht möglich.

Für eine FE basierte Monte-Carlo Simulation des thermomechanisch belasteten Schaufelringausschnitts unter Berücksichtigung der Kennwertstreuung des 2LVP Modells muss die Kennwertstreuung der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells anhand heuristischer Methoden abgeschätzt werden. Hierzu werden Annahmen getroffen, die in den folgenden Abschnitten näher erläutert werden. Für bestimmte Temperaturstützstellen liegen mehr Informationen vor als für andere. Deshalb muss die Bestimmung der Kennwertstreuung für die Kennwerte des 2LVP Modells temperaturspezifisch erfolgen.

8.6.2.1 1000 °C und 1050 °C

Für die Prüftemperaturen 1000 °C und 1050 °C sind die statistischen Verteilungen zur Beschreibung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoff MAR M247 bekannt (siehe Abschnitt 6.1.2). Außerdem liegen Informationen über die temperaturspezifische Korrelation zwischen den Ramberg-Osgood Kennwerten vor. Es wird angenommen, dass sich die Streuung des realen Werkstoffverhaltens in LCF Versuchen durch die Streuung der Modellantwort des Ramberg-Osgood Modells abbilden lässt, wenn statistisch verteilte, korrelierte Kennwerte für die Berechnung der Spannungsantwort genutzt werden. An diese synthetischen Spannungs-Dehnungsdaten des Ramberg-Osgood Modells kann das 2LVP Modell angepasst werden. Da das Ramberg-Osgood Modell Deformationsplastizität beschreibt, müssen der ansteigende und der absteigende Ast der synthetischen Spannungshysterese separat berechnet und zu einer Hysterese verknüpft werden. Dies wird durch die Verschiebung der Lastumkehrpunkte erreicht. Es wird eine Dehnschwingbreite von $\Delta\epsilon = 0.006$ gewählt. Weiterhin wird angenommen, dass die resultierende Hysterese ein Spannungsverhältnis von $R_\sigma = -1$ und ein Dehnungsverhältnis von $R_\epsilon = 0$ aufweist. Die Spannungsantwort des Ramberg-Osgood Modells wird an 41 äquidistanten Dehnungsstützellen pro Hystereseast diskretisiert und orientiert sich dabei an dem für die LCF Versuche typischen Diskretisierungsgrad. Für die Berechnung der Belastungsdauer wird eine Dehnrates von $\dot{\epsilon} = 0.003 \frac{1}{s}$ festgelegt.

Während die Kennwerte des viskoelastischen Layers des 2LVP Modells als deterministisch betrachtet werden und den in Tabelle 8.3 aufgeführten Werten entsprechen, können die Werkstoffkennwerte des elastisch-plastischen Layers durch den bereits in Abschnitt 8.4 vorgestellten Algorithmus bestimmt werden.

Für die Prüftemperaturen 1000 °C und 1050 °C werden jeweils 500 Kennwertsätze des Ramberg-Osgood Modells zufällig gezogen. Die Kennwerte folgen dabei der für sie ermittelten statistischen Verteilung. Weiterhin wird für die zufällig gezogenen Kennwertsätze die aus den experimentellen Ergebnissen bekannte Korrelation eingestellt. Für jeden so erzeugten Ramberg-Osgood Kennwertsatz werden in einem weiteren Schritt die 2LVP Kennwerte bestimmt, sodass für die beiden Prüftemperaturen sowohl die für die Lebensdauerbewertung benötigten Ramberg-Osgood Kennwerte, als auch die korrespondierenden 2LVP Kennwerte

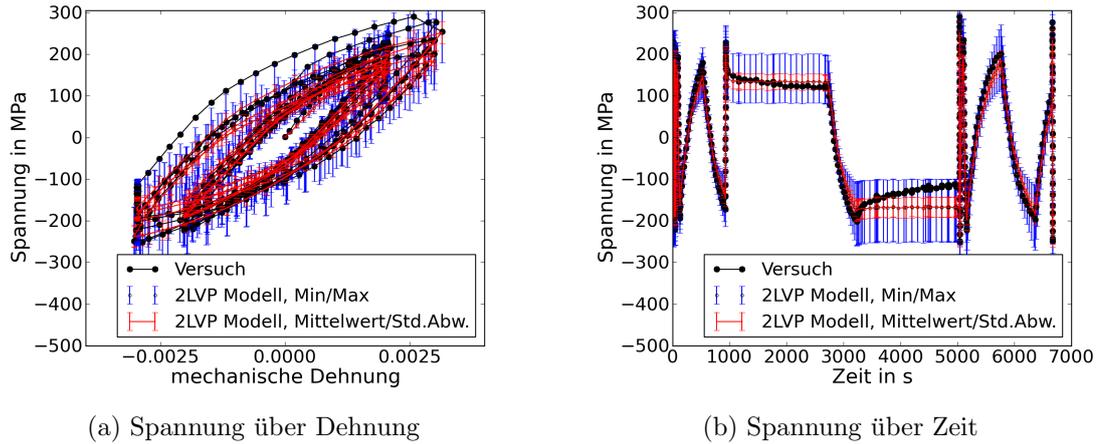


Abbildung 8.23: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 1050 °C.

vorliegen, die für die Beschreibung der Werkstoffeigenschaften in der FE Berechnung bekannt sein müssen. In der Abbildung 8.23 wird anhand der Versuchsdaten des CLCF Versuchs bei 1050 °C das Ergebnis für die so ermittelte Streuung der 2LVP Kennwerte anhand der berechneten Spannungsantwort des Modells verdeutlicht. Die Abbildung 8.23 zeigt ein Spannungs-Zeit- und ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Für jeden Versuch wird anhand der 500 vorliegenden 2LVP Kennwertsätze die Modellantwort berechnet. In den Abbildungen sind neben den Versuchsdaten (schwarz) die maximalen positiven und negativen Abweichungen (blau) zwischen Versuch und Modellantwort für jeden Datenpunkt aufgetragen. Es werden hierbei alle 500 Modellantworten genutzt. Außerdem zeigen die Abbildungen die mittlere Modelllösung (rot), die sich als Mittelwert der 500 Modelllösungen für jeden Datenpunkt ergibt sowie die dazugehörige Standardabweichung.

8.6.2.2 600 °C und 850 °C

Für die Temperaturstützstellen bei 600 °C und 850 °C liegen keine statistischen Verteilungen zur Beschreibung der Streuung der Kennwerte σ_{cy} und N' des Ramberg-Osgood Modells vor. Um dennoch Streuungsinformationen für die Kennwerte des 2LVP Modells aus den vorliegenden Ergebnisse abschätzen zu können, werden die statistischen Verteilungen des E-Moduls E genutzt, die für diese beiden Temperaturen bekannt sind (siehe Abschnitt 6.1.2). Die Streuung der elastischen Eigenschaften des Ramberg-Osgood Modells wird in das elastisch-plastische Layer des 2LVP Modells projiziert. Hierzu werden zufallsbehaftet statistisch verteilte Werte für E aus der jeweiligen statistischen Verteilungen gezogen. Aufgrund der vergleichsweise hohen Dehnrates wird angenommen, dass

$$E = E^{pl} + E^v \tag{8.31}$$

gilt. Alle Kennwerte des viskosen Layers und die Kennwerte zur Beschreibung des plastischen Werkstoffverhaltens werden deterministisch betrachtet und sind gemäß den in Tabelle 8.3 zusammengestellten Werten gewählt. Hierbei ist zu beachten, dass eine Veränderung des

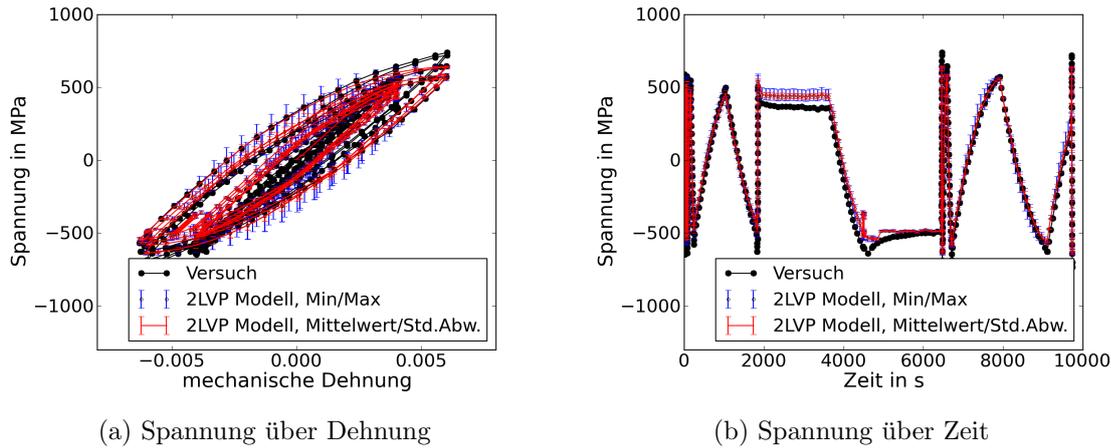


Abbildung 8.24: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 850 °C.

E-Moduls E^{pl} des elastisch-plastischen Layers stets zu einer Änderung im Kennwert f führt, wenn E^{v} konstant bleibt. Die gesamte Streuung der Werkstoffeigenschaften des Werkstoffs MAR M247 wird demnach durch die Streuung im Kennwert E^{p} des 2LVP Modells abgebildet. Es werden für jede Temperaturstützstelle 500 Kennwertsätze für das 2LVP Modell bestimmt. Für jeden 2LVP Kennwertsatz muss in einem weiteren Schritt ein korrespondierender Kennwertsatz der Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells ermittelt werden. Hierzu werden die Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells anhand der durch das 2LVP Modell berechneten Modellantwort bestimmt. Die Vorgehensweise hierbei ist analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 8.4.

In der Abbildung 8.24 sind die Auswirkungen der so ermittelten Kennwertstreuung im Vergleich mit dem CLCF Versuch bei 850 °C dargestellt. In je einem Spannung-Zeit- und einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm werden analog zur Abbildung 8.23 die maximal auftretenden positiven sowie die maximal auftretenden negativen Abweichungen zwischen den Versuchsdaten und den Modellantworten gezeigt. Weiterhin ist die mittlere Modellanpassung und ihre Standardabweichung dargestellt.

8.6.2.3 20 °C, 300 °C und 750 °C

Für die Temperaturstützstellen bei 20 °C, 300 °C und 750 °C liegen keine LCF Versuche vor, sodass für keinen der Ramberg-Osgood Kennwerte statistische Verteilungen zur Beschreibung der Kennwertstreuung bekannt sind. Für die thermomechanische Simulation des Schaufelringausschnitts ist es jedoch wünschenswert auch bei diesen Temperaturen das Werkstoffverhalten und seine Streuung durch geeignete Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells vorzugeben.

Als Ausgangspunkt für die Abbildung von streuenden Werkstoffeigenschaften bei diesen Temperaturen dienen die in Tabelle 8.3 zusammengefassten Kennwerte des 2LVP Modells. Da keinerlei Streuungsinformationen der Werkstoffeigenschaften bekannt sind, wird angenommen, dass sich die Ergebnisse der statistischen Beschreibung der Streuung des E-Moduls bei einer Temperatur von 600 °C auf die Temperaturen 20 °C, 300 °C und 750 °C übertragen lassen und dass sich in dem Temperaturbereich zwischen 20 °C und 750 °C die Charakteristik

der Streuung der elastischen Eigenschaften nicht oder nur geringfügig verändert. Die gesamte Streuung der elastischen Eigenschaften wird, wie bereits im vorherigen Abschnitt erläutert, in den E-Modul des elastisch-plastischen Layers projiziert. Alle anderen Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells werden deterministisch betrachtet. Aus Tabelle 8.3 ist ersichtlich, dass sich der E-Modul im betreffenden Temperaturbereich bereits mit zunehmenden Temperatur deutlich verringert. Dementsprechend ist es sinnvoll die Streuung des E-Moduls bei 600 °C als relative Streuung bezogen auf den in Tabelle 8.3 aufgeführten Wert zu interpretieren. Um beispielsweise einen zufallsbehafteten E-Modul des 2LVP Modells bei 20 °C $E_{2LVP,20,z}$ zu ermitteln wird

$$E_{2LVP,20,z} = E_{600,z} \cdot \frac{E_{2LVP,20}}{E_{2LVP,600}} \quad (8.32)$$

berechnet. Es wird ein zufälliger Wert $E_{600,z}$ aus der statistischen Verteilungsfunktion des E-Moduls des Ramberg-Osgood Modells bei 600 °C gezogen und mit dem Quotienten aus den temperaturspezifischen E-Moduln $E_{2LVP,20}$ und $E_{2LVP,600}$ aus der Tabelle 8.3 multipliziert. Der Index z weist hierbei lediglich darauf hin, dass es sich um eine zufallsbehaftete Größe handelt. Für jede Temperaturstützstelle werden je 500 Kennwertsätze des 2LVP Modells erzeugt. Die korrespondierenden Ramberg-Osgood Kennwertsätze können anhand der Modellantwort des 2LVP Modells ermittelt werden (siehe Abschnitt 8.4).

Die Abbildungen 8.25, 8.26 und 8.27 zeigen in jeweils einem Spannungs-Dehnungs- und einem Spannungs-Zeit-Diagramm die Auswirkung der Streuung in den Werkstoffkennwerten auf die Modellantwort. Neben den Versuchsdaten der nachgerechneten CLCF Versuche (schwarz) sind die Maxima und Minima der berechneten Modellantworten für jeden Datenpunkt dargestellt (blau). Die mittlere Modellantwort und die dazugehörige Standardabweichung werden rot abgebildet. Da die Streuung der Kennwerte des 2LVP Modells lediglich in den elastischen Eigenschaften des elastisch-plastischen Layers angenommen werden, zeigen sich ihre Effekte besonders in den Bereichen der Spannungsantwort in denen elastische Verformungen in den CLCF Versuchen auftreten.

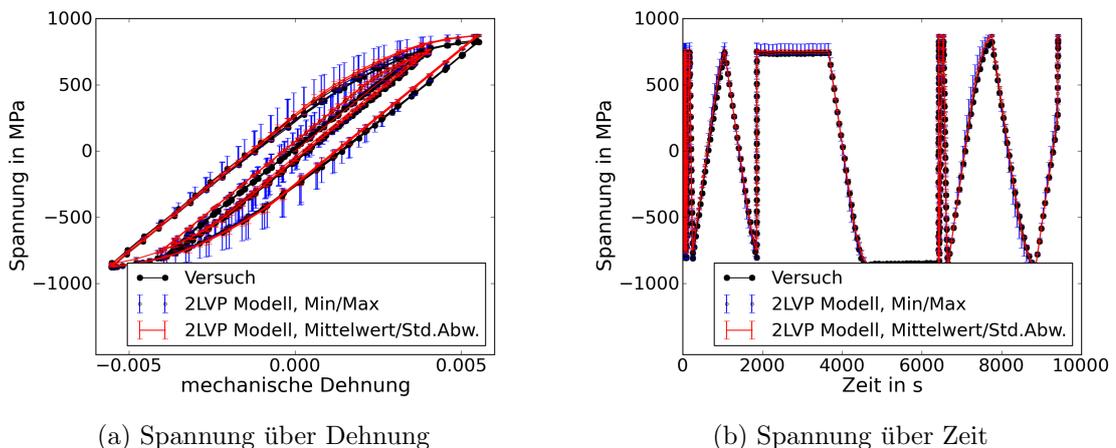


Abbildung 8.25: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 20 °C.

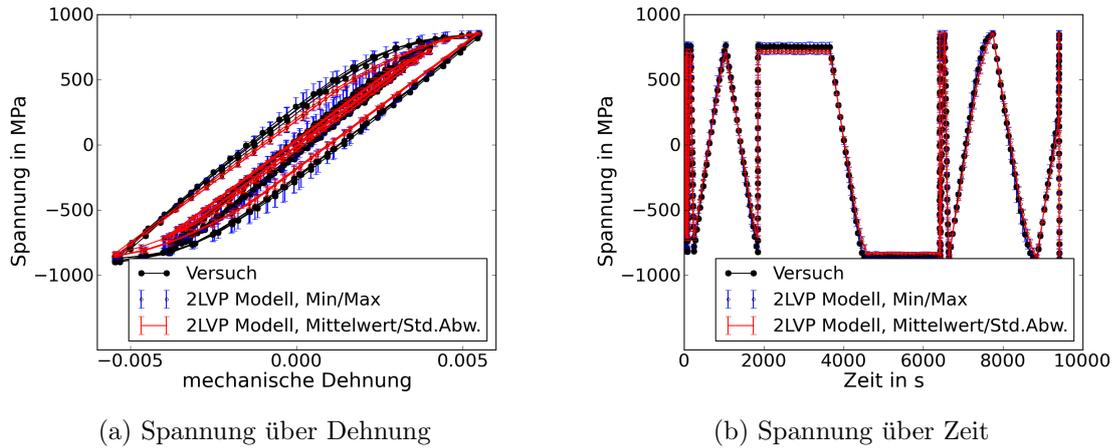


Abbildung 8.26: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 300 °C.

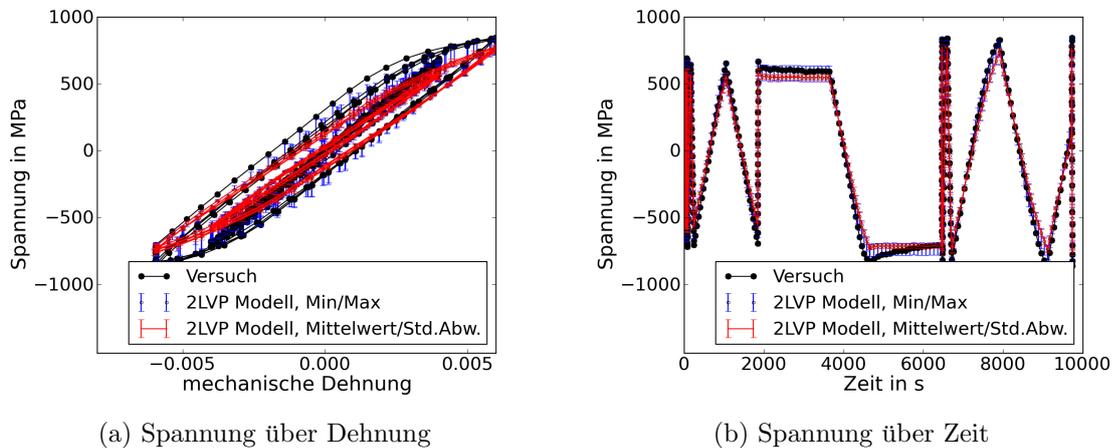


Abbildung 8.27: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 750 °C.

8.6.2.4 Zusammenstellung der Kennwertsätze für die thermomechanische Simulation

Um eine thermomechanische Bauteilsimulation durchführen zu können, werden die Werkstoffigenschaften bei bestimmten Temperaturen benötigt. Da in der vorliegenden Ausarbeitung die Auswirkungen von streuenden Werkstoffeigenschaften auf das Simulationsergebnis und darauf basierend die Auswirkungen auf die Abschätzung der Bauteillebensdauer untersucht werden sollen, werden in den vorangegangenen Abschnitten für die Temperaturstützstellen bei 20 °C, 300 °C, 600 °C, 750 °C, 850 °C, 1000 °C und 1050 °C jeweils 500 Kennwertsätze für das 2LVP Modell und die dazu korrespondierenden Kennwertsätze des Ramberg-Osgood Modells erzeugt. Für eine thermomechanische Bauteilsimulation muss für jede dieser Temperaturen ein Kennwertsatz aus den 500 vorliegenden Sätzen gewählt werden, so dass das Werkstoffverhalten in der Simulation über den gesamten Temperaturbereich definiert ist. Diese Wahl kann nicht willkürlich erfolgen. Die Kennwertsätze müssen so kombiniert werden, dass sich über der Temperatur physikalisch sinnvolle Kennwertverläufe ergeben.

Da aus den vorliegenden LCF Versuchsdaten, die alle aus isotherm geführten Versuchen stammen, keine Kombinationsvorschrift für die Kennwerte bei unterschiedlicher Temperatur abgeleitet werden kann, wird angenommen, dass eine sinnvolle Kombination der temperaturspezifischen Kennwertsätze über den E-Modul erfolgen kann. Es wird angenommen, dass eine Werkstoffprobe, die bei niedriger Temperatur einen vergleichsweise hohen E-Modul aufweist, diesen auch bei zunehmender Temperatur behält. Sortiert man die vorliegenden Kennwertsätze temperaturspezifisch nach dem absteigenden E-Modul des Ramberg-Osgood Modells E , bildet sich eine Rangfolge der absteigenden Steifigkeiten über die die Kennwertsätze temperaturübergreifend miteinander kombiniert werden können. Für eine thermomechanische Bauteilsimulation werden jeweils temperaturspezifische Kennwertsätze genutzt, die die gleiche Rangzahl bei der vorgenommenen Sortierung besitzen.

Wie sich die Streuungen der Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells auf die Spannungsantwort des Modells bei der Berechnung von CLCF Versuchen auswirken, konnte bisher nur untersucht werden, wenn die Prüftemperatur des CLCF Versuchs einer Temperaturstützstelle entspricht für die die Kennwertsätze bestimmt wurden. Da nun ein Zusammenhang zwischen den Kennwertsätzen der einzelnen Temperaturstützstellen besteht und diese kombiniert werden können, können auch CLCF Versuche nachgerechnet werden, die bei einer Prüftemperatur liegen, die eine Kennwertinterpolation zwischen zwei benachbarten Temperaturstützstellen erfordert. Weiterhin können nun die Einflüsse von streuenden Werkstoffkennwerten auf die Modellantwort bei TMF Belastung untersucht werden. Beispielhaft sind hierzu in Abbildung 8.28 zunächst die Ergebnisse für die Streuung der Modellantwort des 2LVP Modells für die Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 950 °C dargestellt. Die einzelnen Kennwerte der insgesamt 500 Kennwertsätze bei 950 °C werden durch lineare Interpolation über der Temperatur aus den sortierten Kennwertsätzen von 850 °C und 1050 °C bestimmt. Die Abbildungen 8.29 und 8.30 zeigen jeweils die Auswirkungen der Kennwertstreuung im 2LVP Modell auf die Spannungsantwort bei der Nachrechnung von TMF Versuchen.

Neben den Versuchsdaten der nachgerechneten Versuche (schwarz) sind wiederum die Maxima und Minima der berechneten Modellantworten für jeden Datenpunkt dargestellt (blau). Die mittlere Modellantwort und die dazugehörige Standardabweichung werden rot abgebildet. Die Methodik zur Kennwertkombination führt bei dem CLCF Versuch bei 950 °C (siehe Abbildung 8.28) zu einer Beschreibung in der das 2LVP Modell die im Versuch gemessenen Spannungen betragsmäßig deutlich überschätzt.

Für die Qualität der Beschreibung der TMF Versuchsdaten kann keine pauschale Aussage getroffen werden. Während der IP TMF Versuch durch das 2LVP Modell mit streuenden Werkstoffkennwerten gut beschrieben werden kann (siehe Abbildung 8.29), treten beim OP TMF Versuch Abweichungen zwischen der durch streuende Werkstoffkennwerte beeinflussten Modellantwort (siehe Abbildung 8.30) und den Versuchsdaten auf. Die durch das 2LVP Modell berechneten Spannungen unterschätzen die Spannungen aus dem Versuch.

8.6. KONZEPTIONELLER VORSCHLAG FÜR DIE MONTE-CARLO SIMULATION EINER THERMOMECHANISCHEN BAUTEILBERECHNUNG

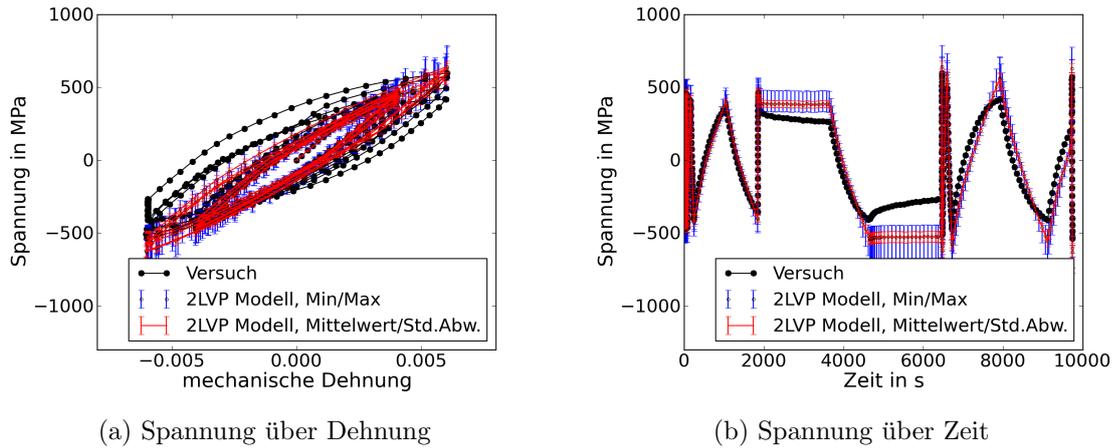


Abbildung 8.28: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines CLCF Versuchs bei 950 °C.

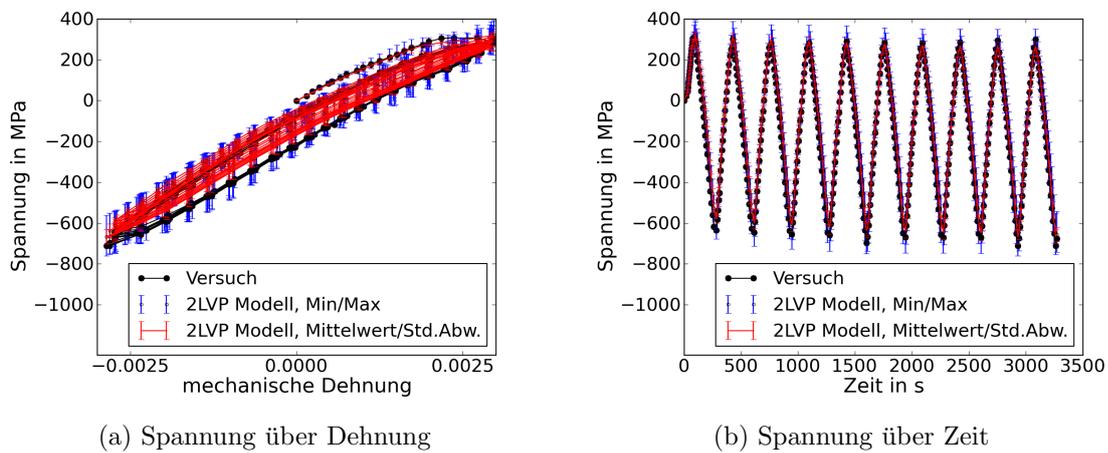


Abbildung 8.29: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines IP TMF Versuchs zwischen 300 °C und 950 °C.

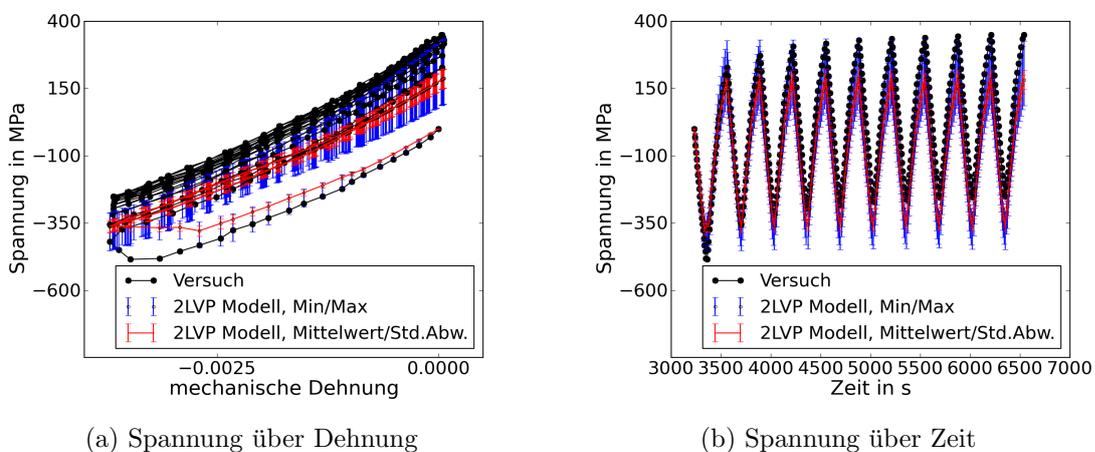


Abbildung 8.30: Auswertung der Streuungen in der Modellantwort des 2LVP Modells bei der Nachrechnung eines OP TMF Versuchs zwischen 300 °C und 950 °C.

8.6.3 Thermomechanische Simulation einer Turbinenschaufel mit streuenden Werkstoffeigenschaften

Im diesem Abschnitt wird die Methodik vorgestellt, die dazu verwendet wird, das Simulationsmodell eines Schaufelringausschnitts unter Berücksichtigung von streuenden Werkstoffeigenschaften und thermomechanischer Belastung zu simulieren. Die Kennwertstreuung ist in den in Abschnitt 8.6.2 ermittelten Kennwertsätzen des 2LVP Modells enthalten und wird durch insgesamt 500 streuende Kennwertsätze abgebildet. Jeder dieser Kennwertsätze weist 2LVP Werkstoffkennwerte und die dazu korrespondierenden Ramberg-Osgood Kennwerte an den Temperaturstützstellen 20 °C, 300 °C, 600 °C, 750 °C, 850 °C, 1000 °C und 1050 °C auf. Aus Effizienzgründen werden nur 100 Bauteilsimulationen durchgeführt. Für jede Berechnung wird dem Simulationsmodell aus Abschnitt 8.6.1 ein anderer Kennwertsatz zur Beschreibung der Werkstoffeigenschaften zugrunde gelegt. Um die Kennwertstreuung und ihren Einfluss auf das Simulationsergebnis bestmöglich innerhalb dieser 100 Simulationen abbilden zu können wird jeder fünfte der nach dem E-Modul sortierten Kennwertsätze verwendet. Für jede der 100 Bauteilsimulationen kann im kritischen Bereich des Bauteils (siehe Abbildung 8.21) der D_{TMF} -Schädigungsparameter ermittelt werden. Hierzu wird das in Abschnitt 8.6.1 vorgestellte PYTHON Skript verwendet.

Die ermittelten maximalen D_{TMF} -Schädigungsparameter werden in einer Stichprobe zusammengefasst und statistisch ausgewertet. Durch die MLM werden Verteilungshypothesen gemäß der Normal-, der logarithmischen Normal-, der Weibullverteilung mit zwei und der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern formuliert. Durch den korrigierten Anderson-Darling Parameter wird ermittelt, welche der formulierten Hypothesen die Stichprobe am besten beschreibt. Die Abbildung zeigt die formulierten Verteilungshypothesen. Außerdem sind die 100 Werte für den D_{TMF} -Schädigungsparameter als Balken dargestellt. Die Normalverteilung beschreibt die vorliegende Stichprobe mit einem P-Wert von $P_{\text{Wert}} = 0.803$ am besten. Zur Charakterisierung der Streubreite dieser Verteilungshypothese kann der Quotient K gemäß der Gleichung (7.3) ermittelt werden. Er ergibt sich zu $K = 1.31$. Die Streuung im Ergebnis des D_{TMF} -Schädigungsparameters resultiert bei dieser Auswertung ausschließlich aus der Streuung der Werkstoffeigenschaften, die durch die streuenden Werkstoffkennwerte des 2LVP Modells in der Bauteilsimulation berücksichtigt werden.

Ein direkter Vergleich der Ergebnisse aus Abschnitt 7.4.2 und der in diesem Abschnitt ermittelten Unsicherheit im D_{TMF} -Schädigungsparameter kann nicht erfolgen, da mit dem Vorfaktor A des Lebensdauermodells und dem D_{TMF} -Schädigungsparameter unterschiedliche Größen untersucht werden. Während die Unsicherheit im D_{TMF} -Schädigungsparameter ausschließlich auf die Streuung der Werkstoffeigenschaften zurückgeht, fließen in die Streuung von A die Unsicherheiten aus der individuellen Probenbeschaffenheit ein, mikrostrukturelle Größen, die sich beispielsweise auf die Anfangsrislänge a_0 auswirken [49]. Es ist jedoch möglich die Auswirkungen der Unsicherheiten beider Größen auf die Lebensdauer N_f zu beziehen. Hierzu wird das Lebensdauermodell

$$N_f = A \cdot D_{TMF}^{-B}$$

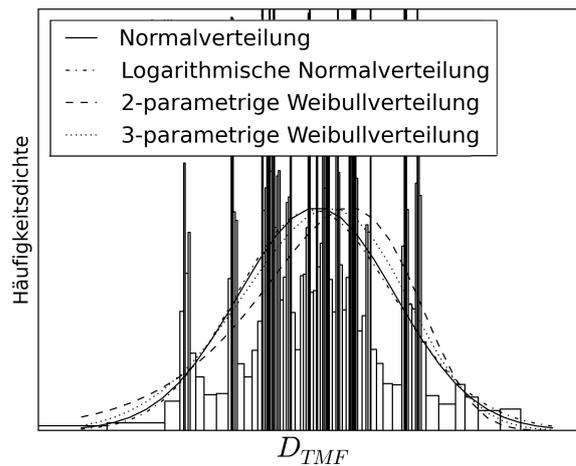


Abbildung 8.31: Ergebnis der statistischen Beschreibung der Streuung des D_{TMF} -Schädigungsparameters bei streuenden 2LVP Kennwerten und thermomechanischer Belastung.

ausgewertet und für die durch statistische Verteilungen beschriebene Unsicherheit der Größen A und D_{TMF} eine Häufigkeitsverteilung über der Lebensdauer generiert. Um die Häufigkeitsverteilung in der Lebensdauer unter statistisch verteiltem Kennwert A berechnen zu können wird der deterministische 50 %-Wert $D_{TMF,50}$ der Verteilungshypothese aus diesem Abschnitt genutzt. Die Unsicherheit im Kennwert A wird durch die in Abschnitt 7.4.2 ermittelte Dichtefunktion für die Beschreibung von A_{korrt} berücksichtigt. Die Häufigkeitsverteilung in der Lebensdauer infolge eines statistisch verteilten D_{TMF} -Schädigungsparameters wird mit dem deterministischen 50 %-Wert $A_{\text{korrt},50}$ der in Abschnitt 7.4.2 ermittelten Verteilungshypothese berechnet. Die Unsicherheit im D_{TMF} -Schädigungsparameter wird über seine Dichtefunktion aus diesem Abschnitt beschrieben. Der Exponent B^* wird für beide Auswertungen gemäß dem in Abschnitt 7.1 ermittelten Wert gewählt.

Zur Veranschaulichung zeigt die Abbildung 8.32 die ermittelten Häufigkeitsdichten über der Zyklenzahl zum Versagen N_f .

Die Streuung in der Ermüdungslebensdauer, die aus streuenden Werkstoffkennwerten bei einer thermomechanischen Simulation eines Bauteils resultiert, fällt erheblich kleiner aus als die Streuung in der Ermüdungslebensdauer, die infolge der Unsicherheit im Kennwert A des probabilistisch ausgewerteten Lebensdauermodell basierend auf den LCF Versuchsdaten auftritt. Dies wird in Abschnitt 9.4 diskutiert.

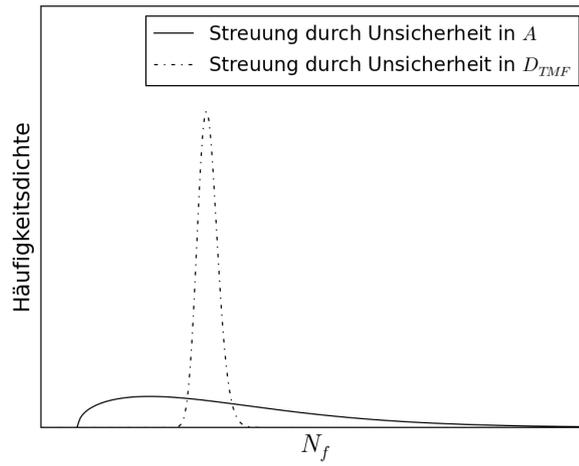


Abbildung 8.32: Vergleich der Unsicherheit in der Lebensdauer infolge der Streuung des Kennwerts A des Lebensdauermodells und infolge der Streuung des D_{TMF} -Schädigungsparameters.

9. Diskussion

In der vorliegenden Ausarbeitung wird eine Gesamtmethodik vorgestellt, die es erlaubt den Einfluss der Streuung des Werkstoffverhaltens auf die Ermüdungslebensdauer abzuschätzen. Ein wesentlicher Teilaspekt ist hierbei die Bestimmung und Bewertung von Werkstoffkennwerten, die basierend auf Versuchsdaten ermittelt werden. Sie werden herangezogen um die Kennwertstreuung durch statistische Verteilungshypothesen beschreibbar zu machen. Ausgehend von diesen Ergebnissen kann der Einfluss von statistisch verteilter Kennwertstreuung auf die Ermüdungslebensdauer, die durch ein mechanismenbasiertes Lebensdauermodell berechnet wird, untersucht werden.

Die erarbeitete Methodik wird abschließend auf ein dreidimensionales Simulationsmodell einer Bauteilgeometrie übertragen. Anhand dieses Modells wird basierend auf einer Monte-Carlo Simulation eine Aussage zu den durch die Streuung der Werkstoffeigenschaften hervorgerufenen Streuungen in der Bauteillebensdauer möglich.

Es kommen sowohl numerische als auch statistische Methoden zum Einsatz. Diese werden in den folgenden Abschnitten gemeinsam mit den getroffenen Annahmen und den daraus resultierenden Ergebnissen diskutiert.

9.1 Diskussion der Kennwertbestimmung und der Robustheitsuntersuchung

Die Kennwertbestimmung nimmt im Rahmen dieser Arbeit eine zentrale Rolle ein. Basierend auf zyklischen Versuchsdaten aus LCF Ermüdungsversuchen werden die Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes gradientenbasiert angepasst. Das verwendete Levenberg-Marquardt Verfahren führt auf einen effizienten und zuverlässigen Optimierungsalgorithmus für die objektive Kennwertbestimmung.

Für einige der vorliegenden LCF Versuche scheitert die numerische Anpassung der Werkstoffkennwerte mit diesem Algorithmus, da die Sensitivität der Kennwerte zur Beschreibung von plastischer Verformung im iterativen Optimierungsvorgang verloren geht. Um basierend auf Versuchsdaten, deren Belastungshysteresen typischerweise keine beziehungsweise nur sehr geringe plastische Verformungsanteile zeigen, Informationen über die Probensteifigkeit ermitteln zu können, wird die Anpassung des E-Moduls in einem separaten Optimierungsaufruf vorgenommen.

Das vollständige Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz bildet im Allgemeinen keinen linearen

Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ab. Dies wird erst durch die Vereinfachung des Modells im ersten Optimierungsaufwurf möglich (siehe Abschnitt 4.2.2) und schließt die Annahme mit ein, dass der Werkstoff nach der Belastungsumkehr linear-elastisches Verhalten zeigt. In Versuchen, deren Spannungs-Dehnungs-Hysteresen große Anteile an nichtlinearer Verformung zeigen, wird dieses linear-elastische Werkstoffverhalten nur durch wenige Datenpunkte unmittelbar nach der Belastungsumkehr diskretisiert. Dies führt dazu, dass dieser Teil des Werkstoffverhaltens nur einen sehr geringen Anteil der FQS ausmacht. Um eine optimale Beschreibung des experimentell ermittelten Werkstoffverhaltens durch das Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetz zu erreichen, kann es bei Versuchen mit großer Dehnschwingbreite sinnvoll sein auf eine sehr genaue Beschreibung des elastischen Bereichs zugunsten einer besseren Beschreibung der nichtlinearen Verformung zu verzichten. Eine separate Anpassung des E-Moduls in einem separaten Optimierungsvorgang erlaubt diese Gewichtung zugunsten einer besseren Gesamtbeschreibung nicht, sodass davon ausgegangen werden muss, dass die Wahl der Strategie zur Bestimmung der Werkstoffkennwerte direkte Auswirkungen auf die ermittelten Kennwerte hat. Wie groß diese Auswirkungen sind und welche Tendenzen sie haben können, ist nur schwer abschätzbar.

Bei Versuchen mit einer relativ geringen Dehnschwingbreite können die Auswirkungen einer separaten Anpassung des E-Moduls und deren Einfluss auf die bestimmten Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes wie folgt erklärt werden: Das im ersten Optimierungsschritt angepasste vereinfachte Modell beschreibt zwar das linear-elastische Werkstoffverhalten sehr genau, jedoch führen die im Gesamtmodell überlagerten nichtlinearen Verformungen bereits im Bereich der als linear-elastisch angenommenen Entlastung zu einer Reduktion der Modellspannungen. Dieser Effekt kann teilweise bei der Bestimmung der zyklischen Fließgrenze und des Ramberg-Osgood Verfestigungsexponenten ausgeglichen werden. Er wird bei der Bestimmung aller Ramberg-Osgood Kennwerte in einem Optimierungsschritt durch einen im Vergleich größeren E-Modul verhindert. Beispielhaft sind hierzu in den Tabellen 9.1 und 9.2 die ermittelten Ramberg-Osgood Kennwerte für einige LCF Versuche des Werkstoffs X6 CrNiNb 18-10 zusammengefasst. In der Tabelle 9.1 finden sich die Kennwerte, die aus der Anpassungsstrategie mit zwei Optimierungsschritten hervorgehen. In der Tabelle 9.2 sind die ermittelten Werkstoffkennwerte für die selben Versuchsdaten gelistet, die sich ergeben wenn die Kennwertbestimmung in nur einem Optimierungsschritt erfolgt. Die durch die beiden Anpassungsstrategien ermittelten Kennwertsätze zeigen für die jeweiligen Versuche teilweise sehr ähnliche und teilweise deutlich unterschiedliche Resultate. Augenscheinlich hat die Dehnschwingbreite, die in der letzten Spalte der Tabellen dokumentiert ist, einen Einfluss darauf, wie stark die Abweichungen in den Ergebnissen der beiden Strategien im Vergleich zueinander ausfallen. Dieses Ergebnis lässt sich mit den oben gegebenen Erläuterungen begründen.

Der Vorteil der in dieser Arbeit gewählten Strategie zur Bestimmung der Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte ist, dass für jeden der vorliegenden zyklischen Versuche unter Beibehaltung einer konsistenten Vorgehensweise ein E-Modul ermittelt werden kann. Dies führt dazu, dass die für die statistische Auswertung der Kennwertstreuung nutzbaren Stichprobenumfänge des E-Moduls deutlich größer ausfallen als für die Kennwerte σ_{cy} und N' und

9.1. DISKUSSION DER KENNWERTBESTIMMUNG UND DER ROBUSTHEITSUNTERSUCHUNG

Tabelle 9.1: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 durch zwei Optimierungsaufufe. Anpassung des E-Moduls erfolgt separat.

Bezeichnung	T [°C]	E [MPa]	σ_{cy} [MPa]	N'	$\Delta\epsilon$
aRF_RT_d04	20	183891	576.0	6.90	0.0156
aRF_RT_d07	20	175191	513.2	6.81	0.0102
aRF_RT_d15	20	176106	434.1	6.06	0.0052
aRF_200_d01	200	148152	429.9	6.88	0.0156
aRH_35_d01	350	147108	384.6	6.47	0.0157
WF1_CLCF_d11	450	147118	382.6	5.07	0.0081

Tabelle 9.2: Zusammenfassung der Ergebnisse für die Bestimmung der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes für den Werkstoff X6 CrNiNb 18-10 durch einen Optimierungsaufuf.

Bezeichnung	T [°C]	E [MPa]	σ_{cy} [MPa]	N'	$\Delta\epsilon$
aRF_RT_d04	20	172149	588.9	7.63	0.0156
aRF_RT_d07	20	177106	511.4	6.81	0.0102
aRF_RT_d15	20	201248	422.7	4.55	0.0052
aRF_200_d01	200	133749	444.0	7.97	0.0156
aRH_35_d01	350	134558	394.9	7.19	0.0157
WF1_CLCF_d11	450	144504	384.9	5.22	0.0081

bringt damit einen Mehrwert für die Aussagekraft der ermittelten statistischen Beschreibung mit sich. Die gewählte Vorgehensweise erscheint auch in abschließender Bewertung sinnvoll. Die zyklische Fließgrenze σ_{cy} und der Ramberg-Osgood Verfestigungsexponenten N' , die das nichtlineare Modellverhalten definieren, werden durch ein Robustheitskriterium bewertet. Dieses stellt sicher, dass die Einflüsse aus der Messwertstreuung und der Anpassungsmethodik auf das Ergebnis des Optimierungsalgorithmus klein sind (siehe Abschnitt 5). Die Robustheitsuntersuchung erlaubt eine quantitative Aussage zur Unsicherheit innerhalb der angepassten Werkstoffkennwerte und sichert auf diese Weise deren Qualität ab. Für die statistische Auswertung der Kennwertstreuung dürfen nur diejenigen Kennwerte genutzt werden, die die Anforderung der Robustheit erfüllen. Das Robustheitskriterium findet für beide im Rahmen dieser Ausarbeitung untersuchten Werkstoffe Anwendung.

Die Auswirkungen des Robustheitskriteriums auf die statistische Beschreibung der Kennwertstreuung können anhand der Abbildungen 9.1 und 9.2 erläutert werden. Beide Abbildungen weisen die identische Achsenskalierung auf. In der Abbildung 9.1 sind die statistischen Verteilungshypothesen dargestellt, die sich für die Beschreibung der Kennwertstreuung der robusten Werkstoffkennwerte der zyklischen Fließgrenze der Nickelbasislegierung MAR M247 bei einer Prüftemperatur von 1050 °C ergeben. Im Vergleich dazu zeigt die Abbildung 9.2 die Verteilungshypothesen für den gleichen Werkstoffkennwert bei der selben Prüftemperatur ohne die Berücksichtigung des Robustheitskriteriums.

Die Berücksichtigung des Robustheitskriteriums reduziert zwar die Anzahl der nutzbaren Versuchsumfänge, sie stellt jedoch sicher, dass nur valide Kennwerte in die Stichproben zur

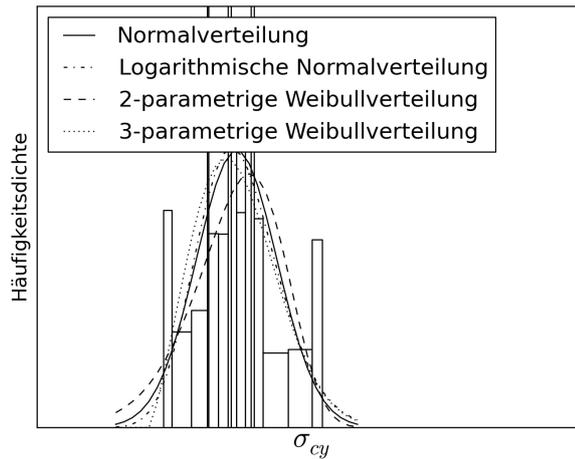


Abbildung 9.1: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze der Nickelbasislegierung MAR M247 bei einer Prüftemperatur von 1050 °C bei Anwendung des Robustheitskriteriums. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

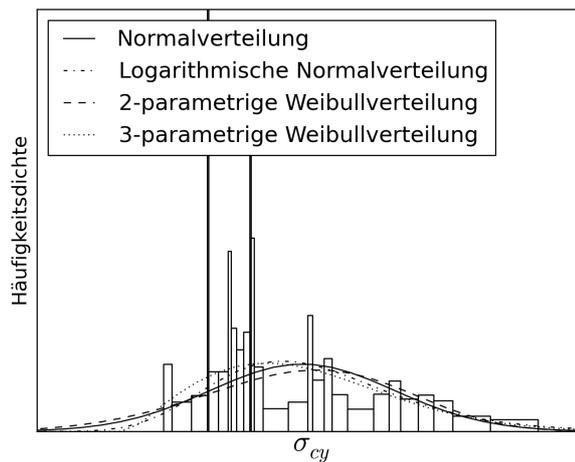


Abbildung 9.2: Ergebnisse der statistischen Beschreibung der zyklischen Fließgrenze der Nickelbasislegierung MAR M247 bei einer Prüftemperatur von 1050 °C bei Vernachlässigung des geforderten Robustheitskriteriums. Darstellung der ermittelten Verteilungshypothesen und der Stichprobenwerte (Balken).

statistischen Beschreibung der Kennwertstreuung eingehen. Dies hat zur Folge, dass die ermittelten statistischen Verteilungen erheblich schmäler ausfallen. Im Beispiel der zyklischen Fließgrenze der Nickelbasislegierung bei einer Prüftemperatur von 1050 °C ergibt sich ein Faktor 3 in der Streubreite, wenn das Robustheitskriterium nicht angewendet wird. Diese Zunahme der Streubreite kann jedoch nicht auf die Streuung der Werkstoffeigenschaften zurückgeführt werden, sondern ist methodischen Ursprungs und deshalb bei der probabilistischen Betrachtung unerwünscht. Ohne eine Robustheitsuntersuchung ist keine adäquate Bewertung der angepassten Kennwerte möglich. Die ermittelten Streuungen fallen unrealistisch aus und wirken sich negativ auf die Aussagekraft des Ergebnisses der probabilistischen

Auswertung des Lebensdauermodells aus.

Die Ergebnisse, die aus dem angewendeten Robustheitskriterium folgen, erscheinen plausibel. Sie können zukünftig in die Versuchsplanung von zyklischen Ermüdungsversuchen einfließen und erlauben eine Abschätzung der kritischen plastischen Dehnung, die im Versuch erreicht werden muss, um eine robuste Kennwertbestimmung zu ermöglichen. Das Robustheitskriterium selbst kann dabei vom Anwender festgelegt werden und kann werkstoffspezifisch oder anwendungsspezifisch variieren. Je weniger tolerant der Anwender gegenüber einem methodischen Einfluss in den angepassten Werkstoffkennwerten ist, desto strenger ist das Robustheitskriterium zu wählen. Für den austenitischen Stahl wird es im Rahmen dieser Arbeit auf $R_{niv} = 0.01$ festgelegt und ist damit sehr streng.

Für die Nickelbasislegierung wird $R_{niv} = 0.03$ gewählt. Diese Bewertung der angepassten Werkstoffkennwerte reduziert den Umfang der robust auswertbaren Versuche für diesen Werkstoff erheblich. Für die Prüftemperaturen von 600 °C und 850 °C liefert keiner der vorliegenden Versuche robuste Werkstoffkennwerte (siehe Tabelle 5.12). Trotzdem stellt die Wahl eines Robustheitsniveaus von 3 % in diesem Fall einen guten Kompromiss dar.

Wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wird, hat der experimentelle Messfehler, der der Robustheitsuntersuchung zugrunde liegt, einen großen Einfluss darauf, wie groß die kritische plastische Dehnung $\delta\epsilon_{crit}^{pl}$ ausfällt. Dieser experimentelle Messfehler wird im Rahmen dieser Arbeit als normalverteilt angenommen und als synthetischer Messfehler normalverteilt modelliert. Es könnten jedoch auch andere Verteilungstypen unterstellt werden. Auch der Wert des Messfehlers muss durch den Anwender abgeschätzt werden und beeinflusst somit das Ergebnis.

9.2 Diskussion der statistischen Methoden

Im Rahmen dieser Arbeit werden statistische Methoden einerseits herangezogen, um statistische Zusammenhänge innerhalb der Streuung von unterschiedlichen Merkmalen, beispielsweise der Kennwerte des Ramberg-Osgood Modells, zu finden. Andererseits bieten statistische Testverfahren die Möglichkeit, die so bestimmten statistischen Verteilungshypothesen zu bewerten und auf statistische Signifikanz zu prüfen. Ein weiterer Anwendungsbereich der Statistik ist in der vorliegenden Ausarbeitung die Bewertung von Korrelationen beziehungsweise der Korrelationskoeffizienten zwischen zwei Merkmalen.

Der Anwendungsbereich und die Komplexität der deskriptiven und der beweisführenden Statistik sind nur schwer vollumfänglich in einer anwendungsbezogenen Arbeit zu erfassen. Im Rahmen dieser Ausarbeitung liegt der Schwerpunkt der statistischen Auswertungen in erster Linie auf ihrer sinnvollen und effizienten Anwendbarkeit auf eine werkstoffmechanische, praxisbezogene Fragestellung. Ziel dieser Arbeit ist es nicht, die Anwendung der statistischen Methoden bis ins Detail zu verfeinern. Stattdessen sollen anhand der Statistik Informationen gewonnen und basierend auf den grundlegenden statistischen Methoden für weiterführende Auswertungen verfügbar gemacht werden.

In einem ersten Schritt werden die Streuungen der Werkstoffkennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes ausgewertet und durch Verteilungshypothesen beschrieben. Hierbei werden vier unterschiedliche Verteilungstypen unterstellt und jeweils mittels der MLM Verteilungshypothesen ermittelt. Diese Vorgehensweise erscheint zielführend und erweist sich in

der Anwendung als zuverlässig und effizient. Sie kann gradientenbasiert und damit automatisiert erfolgen. Die Auswahl der Verteilungstypen, die jeweils unterschiedliche Charakteristiken aufweisen, führt in den allermeisten Fällen zu einer guten Beschreibung der untersuchten Stichproben aus Werkstoffkennwerten (siehe Tabelle 6.1 und 6.2). Die Auswahl der Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern darf in Frage gestellt werden. Sie liefert in allen Auswertungen schlechtere Beschreibungen als die Weibullverteilung, die mit dem Schwellwert T_W einen zusätzlichen dritten Verteilungsparameter besitzt. Diese zusätzliche Anpassungsmöglichkeit führt dazu, dass das Anpassungsergebnis der Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern stets in der Lage ist, eine Stichprobe genauso gut oder besser zu beschreiben wie die gleiche Verteilung mit nur zwei Verteilungsparametern. Möglicherweise ist es sinnvoll die Weibullverteilung mit zwei Verteilungsparametern durch einen anderen Verteilungstyp zu ersetzen, der ebenfalls einen Schwellwert besitzt. Andererseits ist die Beschreibung einer Kennwertstreuung durch statistische Verteilungen, die einen Schwellwert besitzen, kritisch zu betrachten. Der Schwellwert stellt den kleinstmöglichen Wert dar, der aus einer statistischen Verteilung gezogen werden kann. Bei der Auswertung von relativ kleinen Stichproben, wie sie im Rahmen dieser Arbeit auftreten, muss jedoch davon ausgegangen werden, dass der ermittelte Schwellwert nicht den Minimalwert der Grundgesamtheit darstellt aus der die Stichprobe stammt und dass es theoretisch möglich ist, dass kleinere Werte auftreten als die, die in der Stichprobe untersucht werden, was zu nicht konservativen Ergebnissen führen kann.

Die Bewertung der formulierten statistischen Verteilungshypothesen erfolgt durch den Anderson-Darling Test und den gleichnamigen Anderson-Darling Parameter. Auch diese Methodik erscheint bei der Bewertung der Verteilungshypothesen der Werkstoffkennwerte zielführend. Andere statistische Testverfahren sind zwar denkbar, bringen jedoch Nachteile mit sich (siehe Abschnitt 3.2.3.2).

Die bei der statistischen Auswertung untersuchten Stichprobenumfänge variieren von einigen wenigen Werten bis hin zu mehreren zehntausenden. Sollen ausgehend von der Streuung einer Stichprobe Aussagen über die Streuung beziehungsweise die statistische Verteilung der Grundgesamtheit ermöglicht werden, nimmt die Aussagekraft mit zunehmendem Stichprobenumfang grundsätzlich zu. Für die Werkstoffkennwerte der Nickelbasislegierung liegen teilweise nur sehr wenige robuste Kennwerte innerhalb einer Stichprobe vor. Eine größere Versuchsdatenbasis mit LCF Versuchen zur Bestimmung von robusten Werkstoffkennwerten ist an dieser Stelle wünschenswert, für die Methodenentwicklung jedoch nicht zwingend notwendig. Wie groß der Stichprobenumfang zur Formulierung einer aussagekräftigen statistischen Verteilungshypothese mindestens ausfallen muss, lässt sich auch mit der im Rahmen dieser Arbeit herangezogenen Fachliteratur nicht abschließend und eindeutig klären. Statistische Testverfahren zur Bestimmung der Trennschärfe der angewendeten Bewertungsverfahren kommen in dieser Ausarbeitung nicht zum Einsatz. Sie bieten die Möglichkeit einer wahrrscheinlichkeitsbehafteten Aussage über das Auftreten eines Verteilungsparameters in einem festgelegten Intervall [26, Seiten 109f.] zu treffen und eröffnen damit weiteren theoretischen Spielraum bei der Interpretation und der Bewertung von statistischen Verteilungsparametern. Weiterhin wird im Rahmen dieser Arbeit davon abgesehen Stichproben auszuwerten, die we-

niger als sieben Werte umfassen. Kleinere Stichproben ließen sich zwar ebenfalls mit den herangezogenen Methoden statistisch beschreiben, jedoch leidet bei den statistischen Testverfahren die Trennschärfe zusehends und die ermittelten Verteilungsparameter verlieren bei wachsenden P-Werten zunehmend an Aussagekraft.

In den Abschnitten 7.3 und 7.4 werden bei probabilistischer Auswertung des Lebensdauermodells sehr große Stichproben untersucht. Während die MLM auch bei großen Stichproben sehr effizient arbeitet, zeigen die Ergebnisse des Anderson-Darling Parameters zunehmend große Werte, die in allen Fällen zu einem P-Wert von null führen. Auch dieses Ergebnis kann auf die Trennschärfe zurückgeführt werden. Mit stark wachsenden Stichproben, werden statistische Testverfahren schärfer. Dies führt dazu, dass bereits kleine Abweichungen zwischen der Verteilungshypothese und der Stichprobe zu signifikanten Ergebnissen führen. Anschaulich wird dies beispielsweise in [64] erläutert und in [73] theoretisch diskutiert.

Ist es für die jeweilige Anwendung von Vorteil auch in diesen Fällen einen P-Wert berechnen zu können, ist es möglich die zu untersuchende Stichprobe in Klassen zu unterteilen und die Bewertung der Verteilungshypothese anhand der Gruppenmittelwerte durchzuführen. Dies ist häufig Teil anderer statistischer Testverfahren und findet beispielsweise beim χ^2 -Test Anwendung [19, Seite 440]. Durch eine Klassifizierung der Daten in eine festgelegte Anzahl von Gruppen lässt sich zwar der Stichprobenumfang reduzieren, es resultieren jedoch Herausforderungen hinsichtlich der Ergebnisinterpretation [19, Seite 442]. Zudem kann die gewählte Gruppengröße erheblichen Einfluss auf den ermittelten P-Wert haben, sodass weiterführende Untersuchungen ratsam sind, wenn eine Klassifizierung der Daten erfolgt.

In Abschnitt 7.4 werden Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten ausgewertet. Durch den T-Test (siehe Abschnitt 3.2.3.1) lassen sich die Korrelationen zwischen Merkmalen hinsichtlich ihrer statistischen Signifikanz bewerten. Der T-Test baut auf der χ^2 -Verteilung und damit auch auf der Annahme von normalverteilten Merkmalen auf. Er sollte nur angewendet werden, wenn die Streuung in den untersuchten Merkmalen durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann. Diese Voraussetzung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht immer erfüllt. Da sich aus der zu Rate gezogenen Fachliteratur keine alternative Herangehensweise für die Bewertung von Korrelationen ableiten lässt und sich die Berücksichtigung von Korrelationen deutlich auf die Streubreite der Lebensdauer bei der probabilistischen Auswertung auswirkt, wird der T-Test dennoch verwendet.

9.3 Diskussion der Ergebnisse der probabilistischen und deterministischen Lebensdauerbewertung

Das mechanismenbasierte Lebensdauermodell, das in Abschnitt 4.1 eingeführt wird, nutzt den D_{TMF} -Schädigungsparameter zur Vorhersage der Zyklenzahl zum Versagen. In diesem Schädigungsparameter werden in der eindimensionalen Formulierung (siehe Gleichung (4.3)) die Werkstoffeigenschaften durch die Kennwerte des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes und die charakteristischen Beanspruchungsgrößen zur Quantifizierung der Belastung durch die effektive Spannung $\Delta\sigma_{\text{eff}}$, die plastische Dehnschwingbreite $\Delta\epsilon^{\text{pl}}$ und die Spannungsschwingbreite $\Delta\sigma$ berücksichtigt. Unabhängig von der Art der Auswertung

des Lebensdauermodells werden die charakteristischen Beanspruchungsgrößen durch die Spannungs-Dehnungs-Antwort des Modells berechnet. Dies führt auf eine konsistente Methodik und wäre bei einer individuellen Auswertung des Modells auch anders denkbar. Bei dieser Art der Auswertung könnten die Beanspruchungen auch aus den Versuchsdaten direkt bestimmt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass die schädigende Wirkung durch zeitabhängige Effekte bei der Bewertung von LCF Versuchen vernachlässigbar ist (siehe Abschnitt 4.3.1). Die F -Funktion wird aus diesem Grund für alle Auswertemethoden des Lebensdauermodells zu $F = 1$ festgelegt. Diese konsistente Vereinfachung des Modells liefert gute Ergebnisse bei der Beschreibung der Ermüdungslebensdauern für die beiden untersuchten Werkstoffe. Lägen im Rahmen dieser Arbeit LCF Versuche mit langen Zykluszeiten vor, wäre die Auswertung des D_{TMF} -Schädigungsparameters unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Schädigung relevant, da die F -Funktion mit zunehmender Zyklusdauer erheblichen Beitrag zur Schädigung liefern kann (siehe Abbildung 4.7). Eine gemittelte Auswertung des Kriechmodells stellt die einfachste Möglichkeit für die Bewertung der Einflüsse der F -Funktion auf die Ermüdungslebensdauer dar. Eine individuelle Auswertung der zeitabhängigen Schädigung ist nur dann möglich, wenn die Kriecheigenschaften und die elastisch-plastischen Eigenschaften an einer einzigen Werkstoffprobe ermittelt werden. Alternativ müssten Annahmen darüber getroffen werden, wie die zeitunabhängigen mechanischen Eigenschaften mit den Kriecheigenschaften zu korrelieren sind.

Das mechanismenbasierte Lebensdauermodell wird im Rahmen dieser Ausarbeitung für zwei unterschiedliche metallische Werkstoffe und jeweils vier unterschiedliche Betrachtungsweisen ausgewertet. Die individuelle Auswertung des Lebensdauermodells wird dabei genutzt, um die Kennwerte A^* und B^* des Modells so anzupassen, dass alle Versuche des untersuchten Werkstoffs bestmöglich beschrieben werden. Der ermittelte Wert für B^* wird für alle weiteren Auswertemethoden des Lebensdauermodells beibehalten. Diese Vorgehensweise erscheint sinnvoll, da in der individuellen Auswertung das tatsächlich vorliegende Werkstoffverhalten durch individuelle Kennwerte für die Berechnung des D_{TMF} -Schädigungsparameters genutzt wird und somit der werkstoffspezifische Zusammenhang zwischen dem D_{TMF} -Schädigungsparameter und der Ermüdungslebensdauer durch B^* basierend auf dem tatsächlichen Werkstoffverhalten abgebildet wird.

Der Kennwert A wird bei der Auswertung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells genutzt, um die individuellen Probeneigenschaften zu quantifizieren. Die Ursachen der Streuung innerhalb der Werte, die für den Kennwert A bestimmt werden, lassen sich anhand der Gleichung (4.9) erläutern. Die Anfangsrisslänge a_0 ist probenspezifisch. Sie hängt von den individuellen Probenbeschaffenheit ab. So können Oberflächendefekte oder mikrostrukturelle Eigenschaften wie die Korngröße oder auftretende Poren die Anfangsrisslänge beeinflussen. Die Risslänge beim Versagen a_f stellt jedoch im eigentlichen Sinne eine messbare Größe dar. Die in dieser Arbeit verwendeten Versuchsdaten besitzen jedoch kein einheitliches Abbruchkriterium, sodass auch über die Risslänge beim Versagen eine Streuung im Kennwert A resultiert. Diese sollte jedoch im Vergleich zur Streuung durch die Anfangsrisslänge klein ausfallen.

Bei der Auswertung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells mit mittleren Werkstoffkennwerten wird ein deterministisches Werkstoffverhalten unterstellt. Hierzu werden werkstoff-, und temperaturspezifisch jeweils die 50 %-Werte der zur Beschreibung der Streuung der Werkstoffkennwerte formulierten Verteilungshypothesen genutzt, um das Werkstoffverhalten zu modellieren. Beschreibt die Verteilungshypothese die Kennwertstreuung nicht gut, kann diese Vorgehensweise kritisch betrachtet werden und alternativ zum 50 %-Wert könnte der arithmetische Mittelwert des Werkstoffkennwerts genutzt werden oder eine Anpassung des Werkstoffkennwerts über alle Versuche einer Temperatur durchgeführt werden. Für die probabilistischen Betrachtungsweisen des mechanismenbasierten Lebensdauermodells kommt die Monte-Carlo Methode zum Einsatz, um den Einfluss von statistisch verteilten Eingangsgrößen auf die Streuung des Kennwerts A des Lebensdauermodells zu untersuchen. Sie lässt sich einfach implementieren. Die Rechenzeit bei der probabilistischen Auswertung des Lebensdauermodells nimmt im Vergleich mit der deterministischen Auswertung deutlich zu, was auf die steigende Anzahl an Funktionsauswertungen zurückgeführt werden kann.

Die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen statistisch verteilten Werkstoffkennwerten innerhalb des probabilistisch ausgewerteten Lebensdauermodells wird durch einen im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus realisiert (siehe Abschnitt 3.4.2). Dieser stellt den experimentell ermittelten Korrelationskoeffizienten zwischen zwei unkorrelierten Stichproben durch zufälliges Vertauschen der Stichprobenpaarungen ein. Der implementierte Algorithmus nutzt Toleranzen, die je nach Anwendung durch den Anwender anzupassen sind. Es ist nicht sichergestellt, dass durch die stochastische Arbeitsweise der zwischen den Stichproben gewünschte Korrelationskoeffizient tatsächlich realisiert werden kann. Für die Anwendungen in dieser Arbeit konvergiert der Algorithmus und erreicht die vorgegebenen Toleranzen.

Die Ergebnisse der einzelnen Auswertemethoden werden durch die Streuung im Kennwert A vergleichbar. Es wird ein Quotient K (siehe Gleichung (7.3)) für das Verhältnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten eingeführt. Dieser beschreibt das Verhältnis zwischen den Werten für eine 0.1 %-ige und für eine 95 %-ige Ausfallwahrscheinlichkeit. Der Wert für die 0.1 %-ige Ausfallwahrscheinlichkeit stellt eine sehr konservative Abschätzung dar und ist bei der Verwendung einer rechtsschiefen Weibullverteilung mit drei Verteilungsparametern sehr stark vom Schwellwert T_W abhängig. Dieser Schwellwert wiederum wird durch das Auftreten des kleinsten Stichprobenwerts beeinflusst, da er häufig nahe der unteren Grenze des Wertebereichs der Verteilungsfunktion auftritt. Die ermittelte Streubreite K hängt somit stark vom kleinsten Stichprobenwert ab. Aus Sicht der statistischen Beschreibung ist diese Wahl dennoch gerechtfertigt, wenn sehr große Stichproben untersucht werden. Bei kleinen Stichproben beeinflusst diese starke Abhängigkeit das Ergebnis unter Umständen sehr deutlich und ist bei der Anwendung in Verbindung mit einer Verteilung, die einen Schwellwert besitzt, unbedingt zu bedenken. Für die Validierung von derart kleinen Wahrscheinlichkeiten werden einerseits mehrere tausend Stichprobenwerte benötigt [28], sodass diese basierend auf Versuchsdaten nur mit erheblichem finanziellen und zeitlichen Aufwand erfolgen kann. Andererseits ist die Auswertung einer sehr konservativen Ausfallwahrscheinlichkeit im Hinblick auf die Auslegung eines sicherheitsrelevanten Bauteils zwingend notwendig.

Durch den Vergleich der Streubreiten, die sich für die einzelnen Auswertemethoden ergeben,

lassen sich die Ergebnisse der beiden im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Werkstoffe gegenüber stellen. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 7.10 und 7.11 zusammengefasst. Die Streubänder, die für die Nickelbasislegierung MAR M247 ermittelt werden, fallen für alle Auswertungen des Lebensdauermodells deutlich größer aus als die des Werkstoffs X6 Cr-NiNb 18-10. Während die Auswertung unter Verwendung der mittleren Werkstoffkennwerte beim austenitischen Stahl zu einer leichten Vergrößerung des Quotienten K gegenüber der individuellen Auswertung führt, kehrt sich diese Beobachtung für die Nickelbasislegierung um.

Die probabilistischen Auswertungen des Lebensdauermodells zeigen für beide Werkstoffe ein um circa Faktor 2 breiteres Streuband als die deterministischen Auswertemethoden. Auch führt die Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten des Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes bei beiden Werkstoffen zu einer geringen Reduktion des Quotienten K . Diese Ergebnisse erscheinen grundsätzlich plausibel. Eine Validierung basierend auf Versuchsdaten ist jedoch, wie bereits erwähnt, nur mit sehr großem finanziellen und zeitlichen Aufwand möglich.

9.4 Diskussion des Bauteilkonzepts

Um die Auswirkungen von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die Ermüdungslebensdauer eines realen Bauteils abschätzen zu können, wird in Kapitel 8 ein konzeptionelles Bauteilkonzept entwickelt. Es wird die mehrachsige Formulierung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells erläutert und ein inkrementelles Werkstoffmodell eingeführt, das die Modellierung von komplexen mehrachsigen Spannungszuständen in einer FEM Simulation erlaubt.

Das 2LVP Modell hat gegenüber den anderen in Abschnitt 8.2.2 erwähnten Werkstoffmodellen einen großen Vorteil im Hinblick auf die probabilistische Betrachtung der Lebensdauer. Da die Spannungsantwort des viskosen Layers bei dehnungskontrollierter Modellberechnung unabhängig von den Spannungen im plastischen Layer ist, kann die Probabilistik vollständig in das plastische Modellverhalten verschoben werden. Durch diese Annahme reduziert sich bei deterministischer Beschreibung der viskosen Modelleigenschaften die Anzahl der unbekanntenen Werkstoffkennwerte auf vier, sodass weiterführende Schritte innerhalb des konzeptionellen Ansatzes möglich werden.

Die Kennwertbestimmung des viskosen Layers erfolgt erfahrungsbasiert und ist demnach nicht objektiv. Obwohl die Spannungsantworten der beiden Layer voneinander unabhängig sind, beeinflussen die gewählten Kennwerte zur Beschreibung der viskosen Modelleigenschaften die Kennwertbestimmung für die Kennwerte des plastischen Layers. Zwar kann eine Validierung der erfahrungsbasiert ermittelten Kennwerte durch TMF Versuche erfolgen, jedoch sollten nicht-objektive Eingriffe in die Kennwertermittlung bei der Untersuchung von Kennwertstreuung vermieden werden, da nur sehr schwer abgeschätzt werden kann, wie sie sich auf das Endergebnis der Untersuchung auswirken. Dies ist auch im Rahmen dieser Arbeit der Fall. Die Vereinfachung des 2LVP Modells durch die subjektive Bestimmung der Kennwerte des viskosen Layers ermöglicht weiterführende Untersuchungen und die vollständige Ausarbeitung des Bauteilkonzepts.

Bei der Auswertung der LCF Versuche erfüllen trotz der Vereinfachung des 2LVP Modells nur

sehr wenige der ermittelten Modellkennwerte die Robustheitsanforderungen. Eine statistische Auswertung kann basierend auf diesen Ergebnisse nicht erfolgen. Um dennoch die Streuung der Werkstoffeigenschaften in den Kennwerten des 2LVP Modells abbilden zu können werden synthetische Versuchsdaten mithilfe streuender Ramberg-Osgood Werkstoffkennwerte herangezogen (siehe Abschnitt 8.6.2). Für diese Kennwerte liegen teilweise die statistischen Informationen über die Streuung vor. Je nach untersuchter Prüftemperatur werden 2LVP Kennwerte anhand synthetischer Ramberg-Osgood Versuchsdaten ermittelt oder Ramberg-Osgood Kennwerte anhand einer 2LVP Modellantwort angepasst. Hierbei muss beachtet werden, dass die beiden Modelle die nichtlineare Verformung nicht identisch modellieren. Während im 2LVP Modell die Lösung der Differentialgleichung zur Entwicklung der Rückspannung (siehe Gleichung (8.13)) im isothermen Fall auf eine Exponentialfunktion führt, entwickelt sich die Festigkeit im Ramberg-Osgood Modell gemäß eines Potenzansatzes. Es resultiert ein Modellfehler. Er führt dazu, dass zwischen den beiden Modellen stets eine Abweichung auftritt. Diese Abweichung bewirkt, dass auch die für die Anpassung herangezogene Dehnschwingbreite, die vom Anwender gewählt werden kann, einen Einfluss auf das Anpassungsergebnis hat, sodass objektive Ergebnisse bei dieser Methodik nur in Verbindung mit festgelegten temperaturabhängigen Dehnschwingbreiten realisierbar sind. Wie groß der wechselseitige Einfluss der Dehnschwingbreite auf das Ergebnis der Kennwertbestimmung ist, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit untersucht.

Die Monte-Carlo Simulation der Bauteilgeometrie in ABAQUS stellt im Bauteilkonzept den letzten Schritt der Untersuchung dar. Unter Verwendung der streuenden Werkstoffkennwerte gelingt sie mit plausiblen Ergebnis. Der Vergleich der Ergebnisse des Bauteilkonzepts mit den Ergebnissen der probabilistischen Auswertung des Lebensdauermodells basierend auf LCF Versuchen ist in Abbildung 8.32 dargestellt. Die probabilistische Auswertung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells basierend auf den LCF Versuchen führt zu einem deutlich größeren Streuband in der Lebensdauer als die Simulation eines thermomechanisch belasteten Bauteils bei streuenden Werkstoffeigenschaften. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass die unmittelbare Vergleichbarkeit zwischen beiden Ergebnissen nicht gewährleistet ist, da in die Bauteilsimulation keinerlei mikrostrukturelle Effekte eingehen. Während sich die Größen, die den Kennwert A des Lebensdauermodells beeinflussen, zwischen den einzelnen LCF Versuchen unterscheiden und somit zur Streuung in A beitragen, bleibt A bei der Auswertung der Simulationen konstant. Weiterhin stammen die Informationen zur Kennwertstreuung aus Werkstoffproben, die möglicherweise andere Mikrostrukturen aufweisen, als sie sich am Bauteil einstellen. Wie sich eine Änderung der Mikrostruktur auf die Kennwertstreuung auswirkt, kann basierend auf den im Rahmen dieser Arbeit vorliegenden Versuchsumfängen nicht untersucht werden und es muss kritisch hinterfragt werden, ob ein einfacher Transfer der Streuungsinformationen, die anhand von Werkstoffproben mit beliebiger Mikrostruktur ermittelt werden, in die Bauteilsimulation sinnvoll ist. Weiterführende Ergebnisse in dieser Fragestellung könnten durch Werkstoffproben gewonnen werden, die direkt aus dem für die Ermüdungslebensdauer kritischen Bereich eines Bauteils stammen.

Für die probabilistische Lebensdauerbewertung des unter thermomechanischer Belastung stehenden Schaufelradausschnitts werden Kennwertsätze unterschiedlicher Prüftemperatur

ren über die relative Größe ihrer E-Moduln miteinander kombiniert (siehe Abschnitt 8.6.2). Diese Annahme ist bei dem im Rahmen dieser Arbeit vorliegenden Versuchsumfang für die Anwendung der probabilistischen Betrachtungsweise zwingend erforderlich, um das Werkstoffverhalten des Simulationsmodells in dem geforderten Temperaturbereich sinnvoll zu definieren. Wünschenswert wären Versuchsdaten, die es erlauben, alle Kennwerte anhand einer Probe zu bestimmen.

10. Zusammenfassung

In thermomechanisch hochbelasteten Bauteilen wie Turbinenkomponenten oder Kraftwerksleitungen können lokalisiert plastische Verformungen auftreten, die zur Werkstoffermüdung und zur Rissentstehung führen und somit die Lebensdauer der Bauteile begrenzen. Zur Abschätzung der im Werkstoff durch mechanische Belastung und thermische Dehnungsbehinderung hervorgerufenen Beanspruchungen kommen im Auslegungsprozess von hochbelasteten Komponenten FE Simulationen zum Einsatz. In diesen wird im Allgemeinen das reale Werkstoffverhalten durch ein deterministisches Werkstoffmodell beschrieben, dessen Werkstoffkennwerte anhand von Versuchsdaten ermittelt werden. In der Realität weisen Werkstoffeigenschaften jedoch Streuungen auf. Diese beeinflussen die im Werkstoff resultierenden Spannungen, seine Festigkeit und damit auch die Werkstoffermüdung sowie seine Ermüdungslebensdauer. Diese Informationen gehen bei einer deterministischen Betrachtungsweise des Werkstoffverhaltens verloren.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Methodik erarbeitet, die basierend auf den Versuchsdaten von zwei metallischen Werkstoffen die Auswirkungen von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die Ermüdungslebensdauer abschätzt. Für die Nickelbasislegierung MAR M247 und den niobstabilisierten austenitischen Stahl X6 CrNiNb 18-10 liegen zahlreiche LCF Ermüdungsversuche vor. Es wird ein mechanismenbasiertes Lebensdauermodell verwendet, welches einen Schädigungsparameter nutzt, der aus der Bruchmechanik abgeleitet ist und sich aus den Werkstoffkennwerten des zyklischen Ramberg-Osgood Verfestigungsgesetzes und den Beanspruchungsgrößen im Belastungszyklus berechnen lässt. Es beschreibt das Risswachstum von kurzen Ermüdungsrissen, indem es die Rissöffnungsverschiebung mit der Zunahme der Risslänge pro Belastungszyklus korreliert.

In einem ersten Schritt werden die vorliegenden Versuche ausgewertet und eine Methodik vorgestellt, die es erlaubt objektiv Werkstoffkennwerte zu ermitteln. Durch ein gradientenbasiertes Optimierungsverfahren erfolgt die Kennwertbestimmung automatisiert. Um sicherzustellen, dass Störgrößen wie zum Beispiel das Messwertrauschen nur einen begrenzten Einfluss auf die ermittelten Werkstoffkennwerte haben, wird im Rahmen dieser Arbeit ein Robustheitskriterium definiert. Es ermöglicht eine Bewertung der Werkstoffkennwerte und stellt sicher, dass lediglich robuste Kennwerte genutzt werden, um die Streuung der Werkstoffkennwerte durch statistische Verteilungshypothesen zu quantifizieren. Bei der Auswertung der LCF Versuche der Nickelbasislegierung reduziert die Anwendung des Robustheitskriteriums die Anzahl der nutzbaren Versuche erheblich. Die Streuungscharakteristika der untersuchten Werkstoffkenn-

werte können sich unterscheiden und sind im Vorfeld nicht bekannt. Um dennoch eine gute statistische Beschreibung der ermittelten Stichproben zu ermöglichen, werden durch die MLM Verteilungshypothesen von vier Verteilungstypen formuliert. Die Bewertung der Hypothesen erfolgt anhand des Anderson-Darling Parameters im Rahmen eines Hypothesentests. Es kann gezeigt werden, dass sich die Kennwertstreuung nahezu in allen Fällen gut durch statistische Verteilungshypothesen beschreiben lässt.

Für die Auswertung des mechanismenbasierten Lebensdauermodells werden im Rahmen dieser Arbeit vier unterschiedliche Betrachtungsweisen realisiert, die für beide untersuchten Werkstoffe umsetzbar sind und für einen Ergebnisvergleich herangezogen werden können. In zwei deterministischen Auswertungen wird das Streuband in der Lebensdauerabschätzung unter Verwendung von individuellen Werkstoffkennwerten und unter Verwendung von mittleren Werkstoffkennwerten untersucht. Weiterhin werden zwei probabilistische Auswertungen des Lebensdauermodells umgesetzt. In einer Monte-Carlo Simulation werden zufällige Werkstoffkennwerte aus den bereits bekannten Verteilungshypothesen gezogen, die die Kennwertstreuung beschreiben. In der ersten probabilistischen Auswertung erfolgt diese Ziehung ohne Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Kennwerten. In der zweiten probabilistischen Auswertung des Lebensdauermodells werden die Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten ermittelt und durch einen im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus berücksichtigt. Die Auswertung erfolgt sodann mit statistisch verteilten, korrelierten Werkstoffkennwerten. Die aus den Auswertemethoden folgenden Unsicherheiten im Lebensdauermodell werden durch statistische Verteilungshypothesen quantifiziert. Für beide Werkstoffe ergibt sich ein um circa Faktor zwei verbreitertes Streuband in der Lebensdauer beim Vergleich der probabilistischen Auswertungen mit den deterministischen Auswertungen. Die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Werkstoffkennwerten hat dabei einen relativ geringen Einfluss auf das Streuband in der Ermüdungslebensdauer.

In einem weiteren Schritt wird in der vorliegenden Ausarbeitung ein Konzept zur Umsetzung einer probabilistischen Lebensdauerbewertung auf Bauteilebene ausgearbeitet. Mit dem 2LVP Werkstoffmodell wird ein in ABAQUS standardmäßig zur Verfügung stehendes Werkstoffmodell für die Beschreibung von mehrachsigen Spannungszuständen herangezogen. Durch eine Kombination aus erfahrungsbasierter und gradientenbasierter Kennwertbestimmung werden die Kennwerte zur Beschreibung des zeitabhängigen Modellverhaltens ermittelt. Die aus den Kennwerten des Ramberg-Osgood Modells bekannte Streuung kann nun dazu genutzt werden, die Streuung der restlichen Kennwerte des 2LVP Modells abzuschätzen. Durch die FE Simulation eines thermomechanisch beanspruchten Schaufelradausschnitts im Rahmen einer Monte-Carlo Simulation können die Auswirkungen von streuenden 2LVP Werkstoffkennwerten auf die ermittelten Bauteillebensdauer untersucht und statistisch ausgewertet werden. Die Ergebnisse dieser Studie können zur Abschätzung des Einflusses von streuenden Werkstoffeigenschaften auf die Bauteillebensdauer dienen.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Mücke und A. Joksch. Probabilistische Design-Methoden und ihre Anwendung bei der strukturmechanischen Auslegung von Turbinenschaufeln. *Technische Mechanik*, (Heft Nr. 1):61–72, 2000.
- [2] S. Esakki Muthu, R. V.Prakash, R. K. Mishra und A. Sakthivel. Thermo-mechanical fatigue life assessment of a gas turbine rotor through reliability approach. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, (Volume 18):1361–1368, 2018.
- [3] S. P. Zhu, S. Foletti und S. Beretta. Probabilistic framework for multiaxial LCF assessment under material variability. *International Journal of Fatigue*, (Volume 103):371–385, 2017.
- [4] D. Sandberg, R. Mansour und M. Olsson. Fatigue probability assessment including aleatory and epistemic uncertainty with application to gas turbine compressor blades. *International Journal of Fatigue*, (Volume 95):132–142, 2017.
- [5] M. Naderi, S. H. Hoseini und M. M. Khonsari. Probabilistic simulation of fatigue damage and life scatter of metallic components. *International Journal of Plasticity*, (Volume 43):101–115, 2013.
- [6] J. Fingerhuth, I. Varfolomeev, S. Moroz et al. Bewertung der Ermüdungsfestigkeit unter Berücksichtigung zyklischer Ver- und Entfestigungsvorgänge. Teilprojekt: Rechnerische Untersuchungen: IWM, Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik IWM, BMBF Forschungsbericht. (Abschlussbericht):1–73, 2013.
- [7] C. Elsässer et al. J. Fingerhuth, S. Eckmann. Thermische Ermüdung in Kraftwerk-komponenten - Lebensdauerbewertung mit atomistischen und schädigungsmechanischen Werkstoffmodellen: Abschlussbericht, Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik IWM, BMBF Forschungsbericht, 2013.
- [8] C. Laird und G. Smith. Crack propagation in high stress fatigue. *Philos Mag*, (Volume 7):847–857, 1962.
- [9] S. Serrano, A. Scholz, F. Müller et al. *TMF-Rissverhalten: Rissverhalten unter anisothermen Beanspruchungsbedingungen - Berechnungsverfahren für Nickelbasislegierungen: Abschlussbericht zum FVV-Forschungsvorhaben R 552*. Number 945-2011, IGF-Nr. 15525 N. 2011.

- [10] S. Eckmann und C. Schweizer. Characterization of fatigue crack growth, damage mechanisms and damage evolution of the nickel-based superalloys MAR-M247 CC (HIP) and CM-247 LC under thermomechanical fatigue loading using in situ optical microscopy. *International Journal of Fatigue*, (Volume 99):235–241, 2017.
- [11] C. Schweizer. *Physikalisch basierte Modelle für Ermüdungsrisswachstum und Anrisslebensdauer unter thermischen und mechanischen Belastungen*, Karlsruhe, Institut für Technologie, Fak. Maschinenbau, Dissertation, 2013. Heft 76 in Schriftenreihe Werkstoffwissenschaft und Werkstofftechnik. Shaker, 2013.
- [12] T. Seifert. *Computational methods for fatigue life prediction of high temperature components in combustion engines and exhaust systems*, Karlsruhe, Dissertation, 2008. Heft 41 in Schriftenreihe Werkstoffwissenschaft und Werkstofftechnik. Shaker, Aachen, 2008.
- [13] J. Rösler, H. Harders und M. Bäker. *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 5., aktualisierte und erweiterte Auflage, 2016.
- [14] W. H. Press. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Univ. Press, Cambridge, 2. edition, reprinted with corr. to software version 2.10 edition, 2002.
- [15] R. B. Schnabel und J.R. Dennis. *Numerical Methods for unconstrained Optimization and nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Clis, New Jersey, 1983.
- [16] D.G. Luenberger. *Linear and nonlinear Programming, Second Edition*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [17] T. Seifert, T. Schenk und I. Schmidt. Efficient and modular algorithms in modeling finite inelastic deformations: objective integration, parameter identification and substepping techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (Volume 196):2269–2283, 2007.
- [18] D.P. Bertsekas. Projected newton methods for optimization with simple constraints. *SIAM Journal of Constraint Optimization*, (Volume 2):221–246, 1982.
- [19] K. Bosch. *Großes Lehrbuch der Statistik*. Oldenbourg, München, Erste Auflage, 1996.
- [20] H.-D. Tietz. *Technische Keramik*. Springer, Berlin, 1994.
- [21] R. B. D’Agostino. *Goodness-of-Fit Techniques*, volume 68 of *Statistics*. Dekker, New York, 5. print edition, 1986.
- [22] W. Kahle und E. Liebscher. *Zuverlässigkeitsanalyse und Qualitätssicherung*. De Gruyter, München, 2013.
- [23] R. A. Lockhart und M. A. Stephens. Estimation and tests of fit for the three-parameter weibull distribution. *Journal of the Royal Statistical Society*, (Volume 3):491–500, 1994.
- [24] L.C. Tang. *Six Sigma: Advanced Tools for black Belts and Master Black Belts*. Wiley, Chichester, England, First Edition, 2006.

- [25] K. Bosch. *Statistik: Wahrheit und Lüge*. R. Oldenbourg Verlag, München, Erste Auflage, 2002.
- [26] T. Elser. *Statistik für die Praxis: Vom Problem zur Methode*. Wiley-VCH, Weinheim, Erste Auflage, 2004.
- [27] D. P. Landau und K. Binder. *A Guide to Monte Carlo Simulations in statistical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2015.
- [28] R. Mücke und A. Heger. Probabilistische Methoden in der strukturmechanischen Auslegung großer stationärer Gasturbinen: 1. Dresdner Probabilistik-Workshop, 9.-10. Oktober 2008. 2008.
- [29] G. van Rossum. Python 2.7.15 documentation - 9.6. random - generate pseudo-random numbers, python software foundation, 06.2018.
- [30] M. Matsumoto und T. Nishimura. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1):3–30, 1998.
- [31] R. Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanzderivaten: Computational Finance*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, 2. Auflage, 2017.
- [32] H.-J. Maier, T. Niendorf und R. Bürgel. *Handbuch Hochtemperatur-Werkstofftechnik: Grundlagen, Werkstoffbeanspruchungen, Hochtemperaturlegierungen und -beschichtungen*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 5., überarbeitete und erweiterte Auflage, 2015.
- [33] K. N. Smith, P. Watson und T.H. Topper. A stress-strain function for the fatigue of materials. *Journal of Materials, JMLSA*, (Volume 4):767–778, 1970.
- [34] A. Ince und G. Glinka. A modification of morrow and smith-watson-topper mean stress correction models. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, (Volume 34):854–867, 2011.
- [35] R. L. Meltzer, Y. R. Fiorini, R. T. Horstman, I. C. Moore, A. L. Batik und W. J. Ostergren. A damage function and associated failure equations for predicting hold time and frequency effects in elevated temperature, low cycle fatigue. *Journal of Testing and Evaluation*, (Volume 4):327–339, 1976.
- [36] H. Sehitoglu. Thermo-mechanical fatigue life prediction methods. *Advances in fatigue lifetime predictive techniques*, (ASTM STP 1122):47–76, Philadelphia, 1992.
- [37] H. Sehitoglu und D. A. Boismier. Thermo-mechanical fatigue of MAR-M247: part II, life prediction. *Journal of Engineering Material Technology*, (Volume 112):80–89, 1990.
- [38] G. Ebi, H. Riedel und P. Neumann. Fatigue life prediction based on microcrack growth. *Proceedings of the sixth European conference on fracture*, (ECF 6):1587–1598, 1986.

- [39] J. Hoffmeyer, R. Döring, T. Seeger und M. Vormwald. Deformation behaviour, short crack growth and fatigue lives under multiaxial nonproportional loading. *International Journal of Fatigue*, (Volume 28):508–520, 2006.
- [40] H. Riedel. *Fracture at high Temperatures*. Springer-Verlag, Berlin, first edition, 1987.
- [41] D.M. Nissley. Thermomechanical fatigue life prediction in gas turbine superalloys: a fracture mechanics approach. *AIAA*, (Volume 33):1114–1120, 1995.
- [42] C. Schweizer, T. Seifert und H. Riedel. Simulation of fatigue crack growth under large scale yielding conditions. *Journal of Physics: Conference Series*, (Volume 240), 2010.
- [43] R.M.N. Pelloux. Crack extension by alternating shear. *Engineering Fracture Mechanics*, (Volume 4):697–704, 1970.
- [44] C. F. Shih. Relationships between the J-Integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (Volume 29):305–326, 1981.
- [45] C. Schweizer, T. Seifert, B. Nieweg, P. von Hartrott und H. Riedel. Mechanisms and modelling of fatigue crack growth under combined low and high cycle fatigue loading. *International Journal of Fatigue*, (Volume 33):194–202, 2011.
- [46] W. Schmitt, R. Mohrmann, H. Riedel und A. Dietsche. *Modelling the fatigue life of automobile components: Fatigue 2002, Seite 781-788: Proceedings of the Eighth International Fatigue Congress held 3 - 7 June 2002, Stockholm, Sweden*. EMAS Engineering Materials Advisory Services, Cradley Heath, West Midlands, 2002.
- [47] C. Schweizer, T. Seifert, M. Schlesinger und H. Riedel. Korrelation zwischen zyklischer Rissspitzenöffnung und Lebensdauer: Bruchvorgänge, Bruchmechanik und Bauteilsicherheit: Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik. (39. DVM Arbeitskreis):237–364, 2007.
- [48] P. von Hartrott, T. Seifert und S. Dropps. TMF life prediction of high temperature components made of cast iron HiSiMo: Part I: Uniaxial tests and fatigue life model. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, (Volume 7):439–445, 2014.
- [49] T. Seifert und H. Riedel. Mechanism-based thermomechanical fatigue life prediction of cast iron. Part I: Models. *International Journal of Fatigue*, (Volume 32):1358–1367, 2010.
- [50] V. Kumar, M.D. German und C.F. Shih. *An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis: Technischer Bericht, Report NP-1931 on Project 1237-1 for Electric Power Research Institute*. Palo Alto, Californien, 1983.
- [51] H.H. Heitmann, H. Vehoff und P. Neumann. Life prediction for random load fatigue based on the growth behavior of microcracks. (ICF 6 Volume 5):599–606, 1984.
- [52] D. Gross und T. Seelig. *Bruchmechanik*. Springer Berlin, 6. Auflage, 2016.

- [53] M.Y. He und J.W. Hutchinson. The penny-shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of power-law material. *Journal of Applied Mechanics*, (Volume 48):830–840, 1981.
- [54] W. Ramberg und W.R. Osgood. Description of stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee For Aeronautics*, 1943(902):1–13, 1943.
- [55] J. W. Hutchinson. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):13–31, 1968.
- [56] J. R. Rice und G.F. Rosengren. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (Volume 16):1–12, 1968.
- [57] T. Seifert und I. Rekun. *Fortschritte der Kennwertermittlung für Forschung und Praxis*. Stahleisen, Tagung Werkstoffprüfung 2006, 07. und 08. Dezember 2006, Bad Neuenahr, Düsseldorf, 2006.
- [58] J. Tong. The description of cyclic plasticity and viscoplasticity of waspaloy using unified constitutive equations. *International Journal of Fatigue*, (Volume 25):413–420, 2003.
- [59] R. Mahnken und E. Stein. Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *International Journal of Plasticity*, (Volume 12):451–479, 1996.
- [60] A. F. Fossum. Parameter estimation for an internal variable model using nonlinear optimization and analytical/numerical response sensitivities. *Journal of Engineering Materials and Technology*, (Volume 119):337–345, 1997.
- [61] R. Kreißig, U. Benedix und U.-J. Görke. Statistical aspects of the identification of material parameters for elasto-plastic models. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, (Volume 71):123–134, 2001.
- [62] T. Seifert und I. Rekun, 14th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing. *Determination of stable and robust material properties for the assessment of thermomechanically loaded components of rocket engines with viscoplastic equations*. Toulouse, France, 2016.
- [63] F. Vöse, M. Becker, A. Fischerswörning-Bunk und H.-P. Hackenberg. An approach to life prediction for a nickel-base superalloy under isothermal and thermo-mechanical loading conditions. *International Journal of Fatigue*, (Volume 53):49–57, 2013.
- [64] J. Lüken und Dr. H. Schimmelpfennig. Signifikanz und Stichprobenumfang. *Planung & Analyse*, (Volume 6/2012):20, 2012.
- [65] C. O. Frederick und P.J. Armstrong. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*, (Volume 24):1–26, 2007.

- [66] J.L. Chaboche. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchtting effects. *International Journal of Fatigue*, (Volume 7):661–678, 1991.
- [67] J.L. Chaboche. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, (Volume 5):247–302, 1989.
- [68] N. Ohno und J.-D. Wang. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part II: Application to experiments of ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*, (Volume 9):391–403, 1993.
- [69] N. Ohno und J.-D. Wang. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: Formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*, (Volume 9):375–390, 1993.
- [70] M. Becker und H.-P. Hackenberg. A constitutive model for rate dependent and rate independent inelasticity. application to IN718. *International Journal of Plasticity*, (Volume 27):596–619, 2011.
- [71] DASSAULT SYSTEMES. *Abaqus 6.2016: Analysis Users Guide: Documentation*. 2016.
- [72] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik*. Springer Berlin, Berlin, 4. Auflage, 2018.
- [73] J.-B. Du Prel, G. Hommel, B. Röhrig und M. Blettner. Confidence interval or p-value?: part 4 of a series on evaluation of scientific publications. *Deutsches Arzteblatt international*, (Volume 106):335–339, 2009.