Hochschule Merseburg

Fachbereich

Ingenieur- und Naturwissenschaften

Bachelorarbeit

Thema: Populationsmodellierung

Name: Hu Yin

Studiengang: Mechatronik

Matrikel: 20996

Betreuer: Dr. Dariush Ehsani

Prof. Dr. Hartmut Kröner

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Mit der Entwicklung der Gesellschaft sind die Differentialgleichungen mehr in vielen Gebieten verwendet, speziell in Biologie, Mechanik und Finanzmathematik. Mein Thema ist Populationsmodellierung, so ich die Anwendung der Differentialgleichung in Biologie untersuche.

Ich will mit meiner Arbeit einen anschaulichen Überblick überwiegend Lösungsmethoden der Differentialgleichungen und Systeme erster Ordnung geben. Ich erkläre die Lösungsmethoden mit Hilfe von Beispielen. Durch die Schritte der Lösung kann man einfach die Mathematik im Hintergrund verstehen. Ich analysiere die Stabilität der Gleichgewichtspunkte für die Differentialgleichungen.

Es existiert in der Natur sowohl Abhängigkeit als auch Einschränkung zwischen der verschiedenen Population. Zum Beispiel das Wachstum der Population A ist abhängig von reichen natürlichen Ressourcen, und Population B lebt von Population A. Population A ist Beute und B ist Räuber. Um die Beziehung der Anzahl von Räuber und Beute zu analysieren und vorhersagen, etabliere ich Räuber-Beute Modell. Mathematische Modelle können reale Situationen beschreiben und erklären.

In dieser Arbeit wird ich mich hauptsächlich mit Räuber-Beute Modell beschäftigen, die auf Differentialgleichungen beruhen. Mit der Populationsmodellierung kann ich das Wachstum und andere mathematische Eigenschaften der Räuber und Beute beschreiben. Zur graphischen Darstellung von Lösungskurven haben wir die dafür hervorragend geeignete Software Mathematica verwendet. Mathematica ist ein mathematisches symbolisches Berechnungsprogramm, das in vielen Bereichen der Wissenschaft, der Technik, der Mathematik und der Rechentechnik verwendet wird.

2. Hintergrund

2.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Differentialgleichungen erster Ordnung können den Prozess der Veränderung von Gegenstan der Forschung im Laufe der Zeit beschreiben. Wachstumsrate, Steigerung, Zerfall und soweiter stehen mit der Ableitung im Zusammenhang. Um das mathematische Modell zu etablieren, kann man die Differentialgleichungen erster Ordnung benutzen. Die Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

in der f(x, y) eine Funktion zweier Variablen ist. Die Gleichung ist erster Ordnung, weil sie nur die erste Ableitung umfaßt. Differentialgleichung beschreibt die Beziehung zwischen die Ableitung von unbekannter Funktion und unabhängige Veränderliche .

Wir besprechen zwei Methoden, die Differentialgleichungen erster Ordnung lösen können. Die erste Methode ist Trennung der Variable. Trennung der Variablen ist das

Verfahren, das eine partielle Differentialgleichung in zwei oder mehr gewöhnliche Differentialgleichung mit nur eine Variable zerlegen lässt. Gebt es eine Differentialgleichung der Form y' = f (x, y), wobei die Funktion f diese Form f (x, y) = g(x) * h(y) hat. Dann gilt : y'= $\frac{dy}{dx}$ = g(x) * h(y), also $\frac{dy}{h(y)}$ =g(x) * dx

Die Variablen x und y wurden also getrennt. Integriert man beide Seiten, so erhält man die Lösung der DGL.

Beispiel 1: y' = f (x, y) = x * y (also g(x) = x, h(y) = y)

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot K \quad \text{mit} \quad K = \pm e^C$$

Die zweite Methode ist Integrationsfaktoren. Ein Integrationsfaktor ist eine Funktion, die gewählt wird, um die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung zu erleichtern. Wenn die beide Seite der Gleichung mit dem Intergrationsfaktor multiplizieren und umformen, ist die Gleichung einfach zu integrieren. Es gibt die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$$

1. Bestimmen Sie den Integrationsfaktor.

Integrationsfaktor: μ(x) = $e^{\int a(x)dx}$

2. Multiplizieren Sie die Gleichung mit dem Integrationsfaktor.

$$e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + a(x)y\right) = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

3. Umformen Sie die Gleichung wie folgende Form:

$$e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + a(x)y\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int a(x)dx} y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\int a(x)dx} y\right) = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

4. Integrieren Sie die Gleichung:

$$\int \frac{d}{dx}(e^{\int a(x)dx} y)dx = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx$$

$$\Rightarrow e^{\int a(x)dx} y = B(x) + C_1$$, wobei $B(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx - C_1$

5. Dividieren Sie durch den Integrationsfaktor, um die Lösung zu erhalten:

$$y = B(x)e^{-\int a(x)dx} + C_1 e^{-\int a(x)dx}$$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} - 2y = x$

Lösung: 1. μ(x) = $e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

2. $e^{-2x}(\frac{dy}{dx} - 2y) = xe^{-2x}$

3. $\frac{d}{dx}(e^{-2x}y) = xe^{-2x}$

4. $e^{-2x}y = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1$

5. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C_1 e^{2x}$

Wir wissen schon, wie die ersten Ordnung Differentialgleichungen zu lösen sind. Aber viele praktischen Problem beziehen sich auf die Gleichungssysteme, die aus einige unbekante Funktionen und deren Ableitungsgleichung bestehen, nämlich Differentialgleichungssysteme. Die lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ist in der Form

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x) \qquad \text{(Matrix } A \in R^{n\times n}\text{)}$$

Wenn F(x) = 0, $\frac{dY}{dx} = AY$, die als homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten bezeichnet. Wenn F(x) ≠ 0, die als inhomogene lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten bezeichnet.

Um die allgemeinen Lösung der Differentialgleichungssysteme zu erhalten, schreiben wir die Lösung mit dem Ansatz $Y(x) = \vec{v}\, e^{\lambda x}$ (Eigenvektor: $\vec{v}$, Eigenwert der Matrix A: λ)

Wir wählen die Lösung der Form wie $Y(x) = \vec{v}\, e^{\lambda x}$, im Vergleich mit der Lösung von Gleichung $y' = ay$. Die Lösung der Gleichung $y' = ay$ ist $y(x) = K \cdot e^{ax}$.

Die Lösung der Gleichungssysteme ist in zwei Stufen unterteilt. Der erste Schritt ist die Eigenwerte zu finden. Und der zweite Schritt ist gemäß der Eigenwerte in drei Fällen, verschidene Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, wiederholte Eigenwerte, aufzuteilen. Eigenwerte sind die Lösungen, λ, von der Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$.

Fall 1: Verschiedene Eigenwerte

Beispiel: $\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{Y}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 1 \\ 4 & 1-(-1) \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Von der Form des Ansatzs $ve^{\lambda x}$ schreiben wir

Lösung: $Y(x) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-x} \qquad C_1, C_2 \in R$

Fall 2: Komplexe Eigenwerte

Beispiel: $\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} Y$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1+2i$, $\lambda_2 = -1-2i$

Eigenverktor zu $\lambda_1 = -1+2i$

$$\begin{bmatrix} -1-(-1+2i) & 2 \\ -2 & -1-(-1+2i) \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wegen komplexer Eigenwerte mit Euler Formel benutzen wir Sinus und Kosinus.

$$Y_1(x) = e^{-x}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2x)$$

$$Y_2(x) = e^{-x}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 2x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2x)$$

Lösung: $Y(x) = C_1 e^{-x} \begin{bmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{bmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{bmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{bmatrix}$ $\qquad C_1, C_2 \in R$

Fall 3: Wiederholte Eigenwerte

Beispiel: $\dfrac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} Y$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)+1=0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$

Die Lösung ist in der Form $(R_0 + R_1 x)e^{\lambda x}$

Substituieren in die Gleichung $\begin{cases} (A-\lambda E)R_0 = R_1 \\ (A-\lambda E)R_0 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow R_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ R_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

oder $R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{3x}\begin{bmatrix}1-x\\-x\end{bmatrix} \text{ und } e^{3x}\begin{bmatrix}x\\1+x\end{bmatrix}$$

Lösung: $Y(x)=C_1e^{3x}\begin{bmatrix}1-x\\-x\end{bmatrix}+C_2e^{3x}\begin{bmatrix}x\\1+x\end{bmatrix} \qquad C_1,C_2\in R$

Die Lösung der inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme besteht aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung und seine spezielle Lösung.

Beispiel: $\dfrac{dY}{dx}=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}Y+\begin{bmatrix}2e^x\\3x\end{bmatrix}$

Lösung der homogenen Gleichung: $Y_H(x)=C_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}e^{2x}+C_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{3x}$

$$F(x)=\begin{bmatrix}2e^x\\3x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}e^x+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}x$$

Ansatz: $Y_S(x)=\vec{a}e^x+\vec{b}x+\vec{c}$

$$Y_S'(x)=\vec{a}e^x+\vec{b}$$

$$\vec{a}e^x+\vec{b}=A(\vec{a}e^x+\vec{b}x+\vec{c})+\vec{F}(x)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}(\vec{a}e^x+\vec{b}x+\vec{c})+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}e^x+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}x$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

Spezielle Lösung: $Y_S(x)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}e^x+\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{1}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}e^x-x-\frac{5}{6}\\e^x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\end{bmatrix}$

Lösung: $Y(x)=C_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}e^{2x}+C_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{3x}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}e^x-x-\frac{5}{6}\\e^x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\end{bmatrix} \qquad C_1,C_2\in R$

Später sehen wir diese Gleichungen, die für die Modellierung zu verwenden.

2.2 Stabilität der Gleichgewichtspunkte

Die Gleichgewichtspunkte sind die Nullstellen der Ableitungen von den Differentialgleichungen und bei den Nustellen erfolgt keine sichtbaren Änderungen mehr. Wenn die Gleichgewichtspunkte berechnet werden, können wir die Stabilität der Gleichgewichtspunkte urteilen. Wir fassen zwei Fälle der Stabilität zusammen.

Fall 1: Wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, ist der Gleichgewichtspunkt stabil.

Fall 2: Wenn ein Eigenwert von A positiven Realteil hat, ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

A -- die Ableitung(die Matrix) von Vektorfeld an der Nullstelle

Den Beweis für die Fälle der Stabilität kann ich mit der Software Mathematica einfach führen. Jedes Fall will ich ein Beispiel und die Skizze anführen, um die Stabilität zu bestimmen.

Beispiel 1: $\begin{aligned} x_1' &= -x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' &= x_1 - x_2 \end{aligned}$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Gleichgewichtspunkt } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

und nennen die Matrix

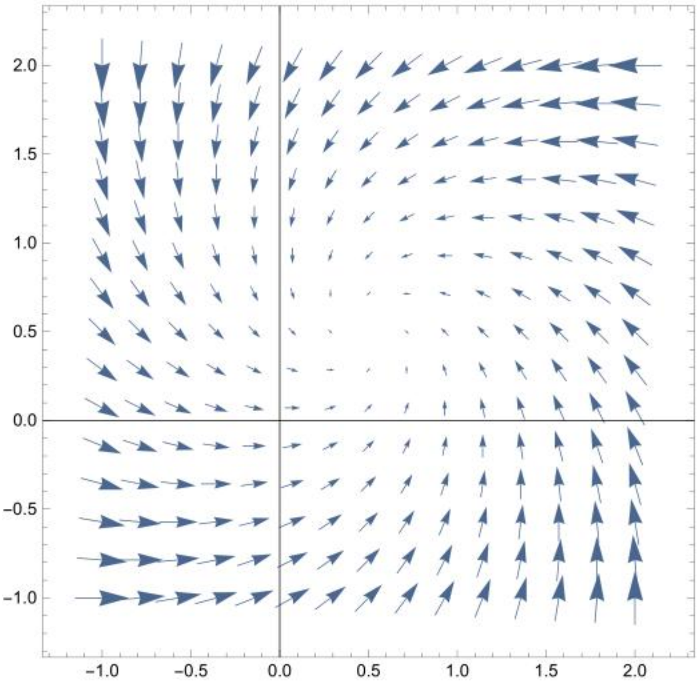
$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \left| \; A - \lambda I \; \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\textit{Eigenwerte } \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$



Von der Skizze können wir sehen, dass die Richtung der Pfeile sich dem Gleichgewichtspunkt nähert, so der Gleichgewichtspunkt stabil ist.

Beispiel 2: $\begin{array}{l} x_1' = x_1 - x_1x_2 \\ x_2' = x_2 + 2x_1x_2 \end{array}$

$$\begin{cases} x_1 - x_1x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_1x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Gleichgewichtspunkt } (0,0)$$

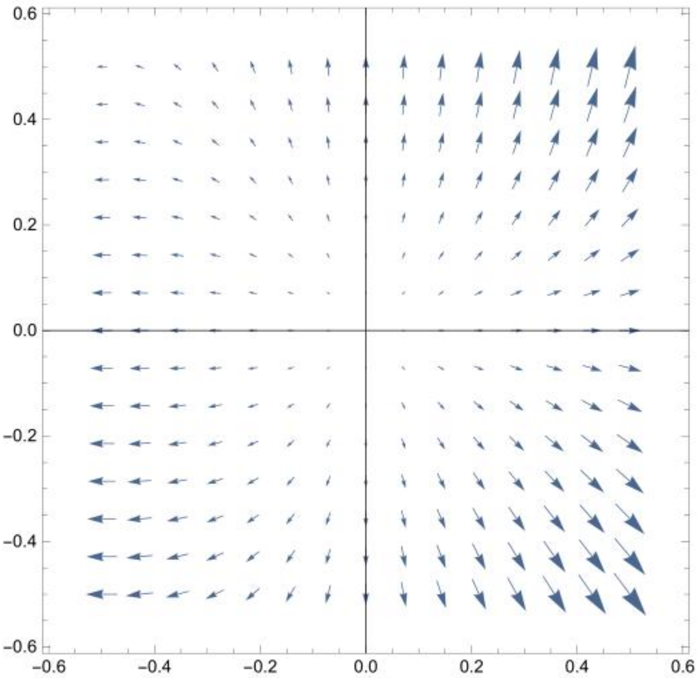
$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ 2x_2 & 1 + 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \left| \; A - \lambda I \; \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\textit{Eigenwerte } \lambda_{1,2} = 1$$



Von der Skizze können wir erkennen, dass die Richtung der Pfeile von dem Gleichgewichtspunkt abweicht, so der Gleichgewichtspunkt instabil ist.

3. Räuber-Beute Modell

Ich wähle Räuber wie zum Beispiel Wölfe und Beute wie Ziegen als der Gegenstand der Forschung. Es gibt drei Fälle für die Wachstumsprognose der Beute. Wir benutzen dann die Ableitung und Differentialgleichungen erster Ordnung, dass die Wachstum beschreiben können.

1) Wachstum der Beute ohne Räuber und Sterben
Wenn ich die Räuberpopulation und Sterben der Beute nicht berücksichtige, kann ich die folgenden Gleichung schreiben.
Gleichung: $x' = \alpha x$
die Gleichung mit den Bezeichnungen:
x -- Anzahl der Beute, zeitabhängig
α -- Wachstumsrate der Beute, wenn keine Räuber vorhanden ist, konstant

Als Beispiel nehme ich $\alpha = 0.1$ und $x(0) = 10$ an, kann ich die Gleichung wie $x' = 0.1x$ schreiben.

$$\frac{dx}{dt} = 0.1x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int 0.1dt$$

$$\ln|x| = 0.1t + C$$

$$e^{\ln|x|} = e^{0.1t+C}$$

$$|x| = e^{0.1t+C}$$

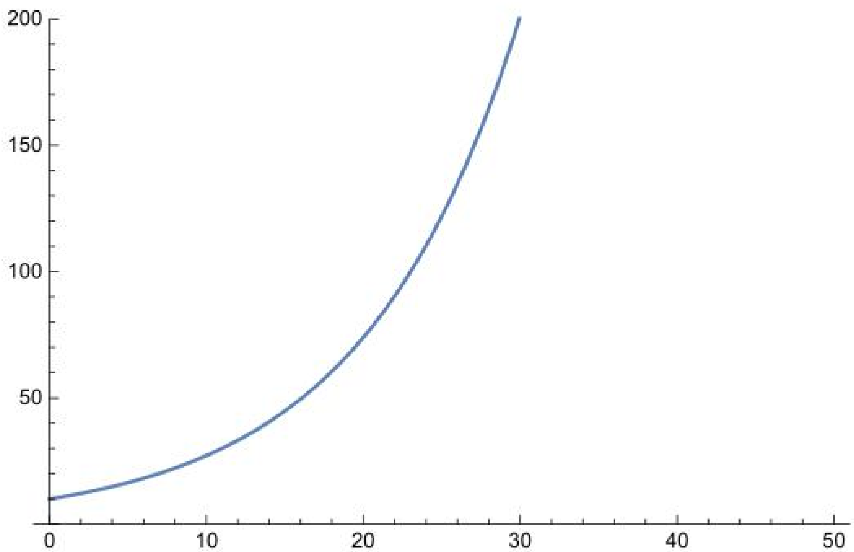
$$x = e^{0.1t} \cdot K \quad \text{mit} \quad x(0) = 10$$

$$\Rightarrow x(t) = 10e^{0.1t}$$

Lösung: $x(t) = 10e^{0.1t}$

Aus der Lösung können wir sehen, dass die Beutepopulation exponentiell und unbeschränkt wächst. Aber ein unendliches Wachstum ist nicht praktisch. In der Realität ist Beuteswachstum begrenzt, weil es nach so viele Beute nicht genug Nahrung gibt.

Skizze mit Mathematica:



2) Wachstum der Beute mit Grenzen

Unendliches Wachstum ist unrealistisch. Wenn die Beute in Abwesenheit der Räuber leben wachsen, gibt es für die Beute begrenzte Ressourcen.

Gleichung: $x' = \alpha x - rx^2$

die Gleichung mit den Bezeichnungen:

x -- Anzahl der Beute, zeitabhängig

α -- Wachstumsrate der Beute, wenn keine Räuber vorhanden ist, konstant

r -- Begrenzte Ressourcen, konstant

Ich nehme $\alpha = 0.1$, $r = 0.01$ und die Anfangsanzahl der Beute $x_0 = 2$ an, so die Gleichung wie $x' = 0.1x - 0.01x^2$ ist.

$$\frac{dx}{dt} = 0.1x - 0.01x^2$$

$$\int \frac{dx}{x - 0.1x^2} = \int 0.1dt$$

$$\int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x-10})dx = \int 0.1dt$$

$$\ln\left|\frac{1}{x}\right| - \ln\left|\frac{1}{x-10}\right| = 0.1t + C$$

$$e^{\ln\left|\frac{x}{x-10}\right|} = e^{0.1t+C}$$

$$\frac{x}{x-10} = e^{0.1t} \cdot K$$

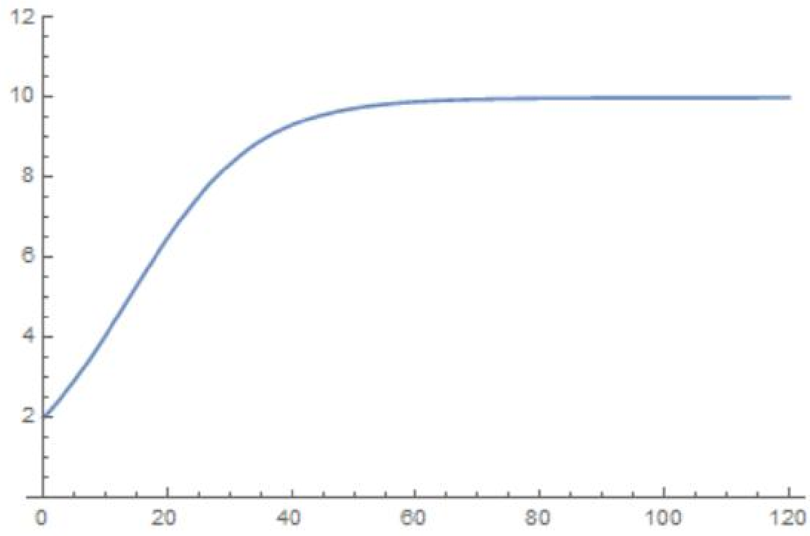
$$x = \frac{10K \cdot e^{0.1t}}{K \cdot e^{0.1t} - 1} \quad \text{mit} \quad x(0) = 2 \quad \Rightarrow K = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{10e^{0.1t}}{4 + e^{0.1t}}$$

Lösung: $x(t) = \dfrac{10e^{0.1t}}{4 + e^{0.1t}}$

Ich habe die Lösung vereinfacht, erhalte ich die Lösung als $x(t) = \dfrac{10}{4e^{-0.1t} + 1}$. Es beweist $x(t) \to 10$ für $t \to \infty$. Zuerst die Beute wachsen schnell. Aber wenn die Anzahl der Beute eine bestimmte Menge erreicht, werden die Anzahl nicht steigen. Viele Beute können nicht gleichzeitig leben, weil die Ressourcen begrenzt sind.

Skizze mit Mathematica:



3) System

Wenn die Beute und Räuber gleichzeitig vorhanden sind, muss ich Gleichungssystem gründen. Das Gleichungssystem beschreibt die Beziehung der Interdependenz und Einschränkung zwischen der Beute und Räuber.

Gleichungssystem: $$\begin{aligned} x' &= ax - bxy \\ y' &= cxy - dy \end{aligned}$$

die Gleichung mit den Bezeichnungen:

x -- Anzahl der Beute, zeitabhängig

y -- Anzahl der Räuber, zeitabhängig

a -- Wachstumsrate der Beute, wenn keine Räuber vorhanden ist, konstant

b -- Sterberate der Beute pro Räuber, konstant

c -- Wachstumsrate der Räuber pro Beute, konstant

d -- Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist, konstant

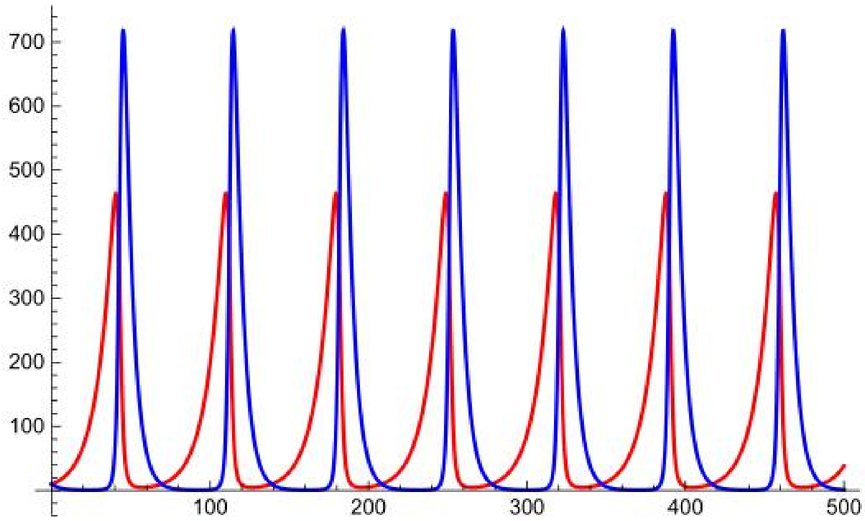
Wenn $a = 0.1$, $b = 0.001$, $c = 0.002$, $d = 0.2$ und beide Anfangswert $x(0) = y(0) = 10$,

erhalte ich die Gleichungssystem $$\begin{aligned} x' &= 0.1x - 0.001xy \\ y' &= 0.002xy - 0.2y \end{aligned}$$.

Um die Lösung des Gleichungssystems zu erhalten, kann man nicht die Matrizen wie im Abschnitt 2 benutzen. Eine Matrix besteht aus die Koeffizient und Konstante von des Gleichungssystem. Aber beide Gleichung sind nicht linear, weil in der Gleichung es xy gibt. Ich benutze Mathematica mit dem Befehl NDSolve das Gleichungssystem zu lösen.

Für $\alpha x > \beta xy$ ist $x' > 0$, so die Anzahl der Beute x wächst. Wenn x steigt, steigt gleichzeitig cxy, deswegen y' und y größer zu werden. Für größeren y-Wert wird bxy größer, x'- und x-Wert kleiner. Dann sind y' und y kleiner, weil cxy kleiner wird. Wenn y kleiner ist, steitgt x. Die Veränderung in der Anzahl der Beute und Räuber ist periodisch.

Skizze mit Mathematica:



Man kann in der Grafik die Änderung der Beutepopulation und Räuberpopulation erkennen. Die rote Linie ist Beute und die blaue Linie ist Räuber. Die Beutepopulation steigt, und wenn es zu viel Beute gibt, steigt dann die Räuber. Je größer die Räuber gibt, je kleiner die Beute werden. Nach der Reduzierung der Beute verringert die Zahl der Räuber, da es zu wenig zum Essen gibt. Die Veränderung von der Anzahl ist zyklisch.

Wir haben die folgende Differentialgleichungen

$$x_1' = ax_1 - bx_1x_2$$
$$x_2' = -cx_2 + dx_1x_2$$

mit der Anzahl der Beute x_1, der Anzahl der Räuber x_2 und den Konstanten a, b, c, d.

Die Anzahl der Beute und der Räuber ist abhängig von der Zeit. Die Konstanten sind all größer als 0. Zur Analyse der Gleichgewichte wollen wir die Zahl der Parameter reduzieren. So ist die neuen Gleichungen $\begin{aligned} x_1' &= ax_1(1-x_2) \\ x_2' &= -cx_2(1-x_1) \end{aligned}$.

Wir berechnen die Nullstellen des Vektorfeldes, weil wir die Gleichgewichte von der Gleichung bestimmen.

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1(1-x_2) \\ -cx_2(1-x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss man zwei Fälle unterscheiden, um die Punkte zu berechnen.

Fall 1: $x_1 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

Fall 2: $1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 1$

$$1 - x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1$$

Wir können die folgende Gleichgewichtspunkte erhalten.

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um die Stabilität der Gleichgewichte zu bestimmen berechnen wir die Ableitung von x_1 und x_2.

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1-x_2) & -ax_1 \\ cx_2 & -c(1-x_1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Df(x^*) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \text{ und } Df(x^+) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

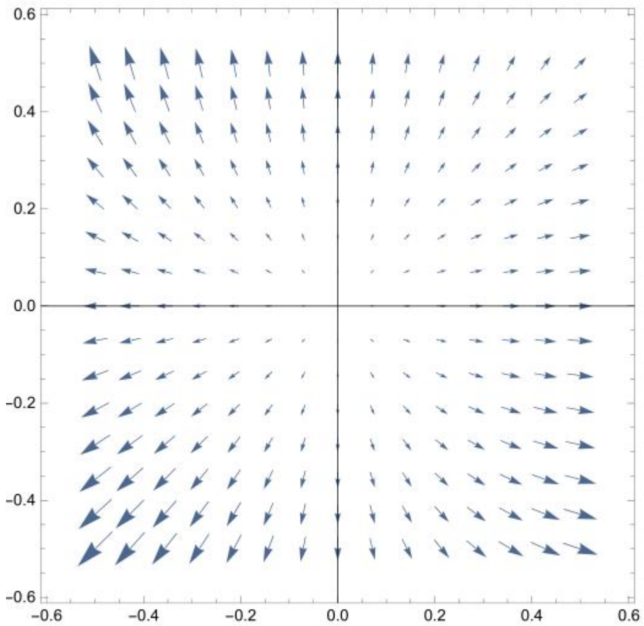
$$\det\left| \; A - \lambda I \; \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a, \lambda_2 = -c$$

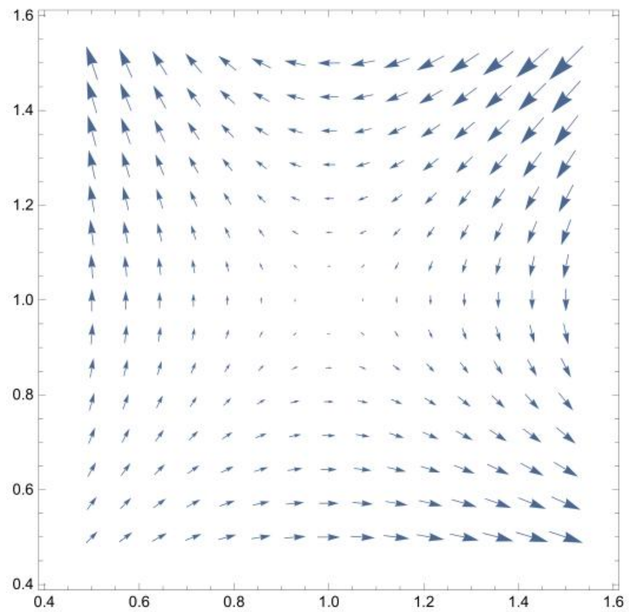
So Eigenwerte in x^* sind a un $-c$. Gleichfalls sind die Eigenwerte für x^+ $\pm\sqrt{-ca}$.

Die Eigenwerte von $Df(x^*)$ ergeben sich a und $-c$. Das Gleichgewicht x^* ist exponentiell instabil, wenn ein Eigenwert von dieser Matrize der positiven Realteil besitz. Die Stabilität können wir einfach mit der Skizze beweisen.

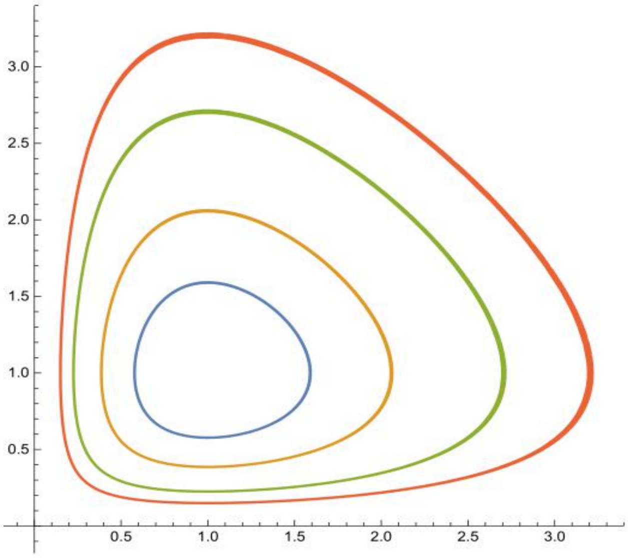


Die Richtung der Pfeile weicht von dem Gleichgewichtspunkt (0,0) ab. Wenn keine Räuber existieren, ist der Anfangswert der Form $x_0 = (x_1, 0)^T$ und wächst die Lösung exponentiell. Die Lösung folgt die Pfeile und läuft von x^* weg. Wenn es keine Beute gibt, ist der Anfangswert der Form $x_0 = (0, x_2)^T$. Die Lösung läuft auch von x^* weg.

Die Eigenwerte von $Df(x^+)$ ergeben sich $\pm\sqrt{-ca}$, welches rein imaginär sind. Jetzt können wir die Stabilität nicht unterscheiden, weil die beide Eigenwerte wegen $ca > 0$ die Realteile 0 besitzen. Aber die Skizze kann die Stabilität bestimmen.



Von der Grafik erkennen wir, dass die x^+ weder exponentiell stabil noch exponentiell instabil ist, weil alle Lösungen weder nah noch fern vom Gleichgewichtspunkt x^+ sind. Gleichfalls bestimmen wir mithilfe der folgenden Abbildung die Stabilität. Die Abbildung zeigt die Lösung mit $a = c = 1$. Die Abszisse ist die Beute und die Ordinate ist die Räuber. Alle Lösungen laufen auf periodischen Bahnen um den Gleichgewichtspunkt, weder konvergieren sie noch laufen sie weg.



Wir haben die numerische Erkenntnis bekommen. Dann beweisen wir mathematisch. Wir sehen die Quatienten von x_1' und x_2'.

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{-cx_2(1-x_1)}{ax_1(1-x_2)}$$

$$ax_1x_2' - ax_1x_2x_2' = -cx_2x_1' + cx_2x_1x_1'$$

$$cx_1' - c\frac{x_1'}{x_1} + ax_2' - a\frac{x_2'}{x_2} = 0$$

Integrieren wir die Gleichung

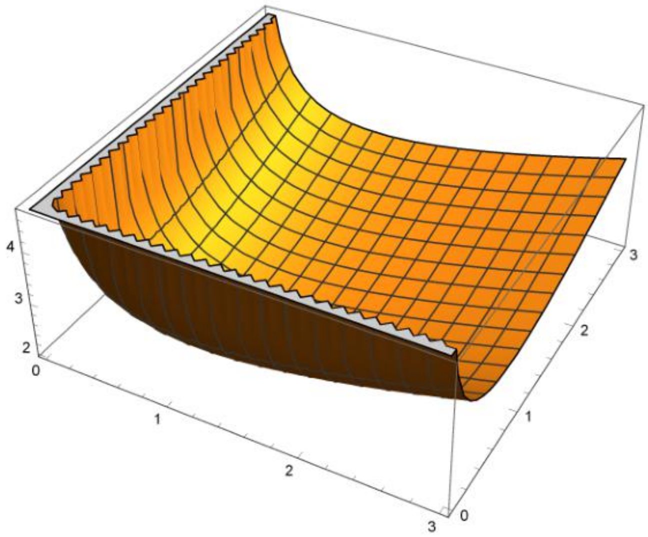
$$\int (cx_1' - c\frac{x_1'}{x_1} + ax_2' - a\frac{x_2'}{x_2})dt$$

Erhalten wir $cx_1 - c\ln x_1 + ax_2 - a\ln x_2 = k(x(0))$

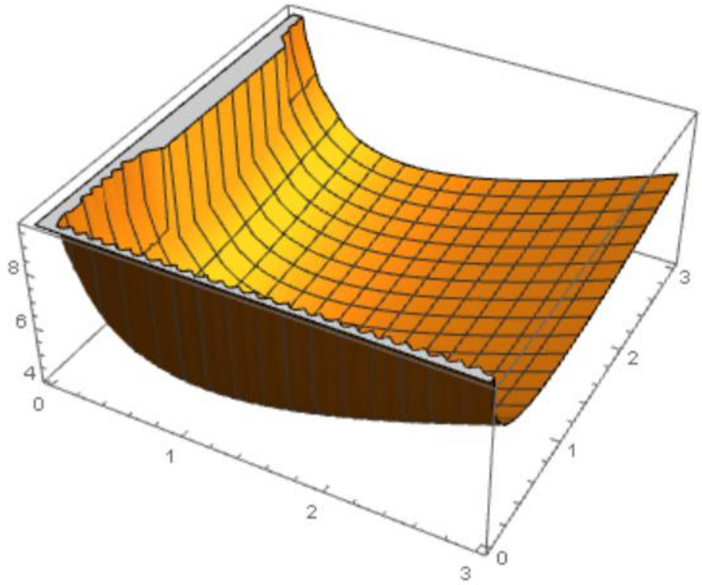
Wir definieren die Funktion V(x) .

$$V(x) = cx_1 - c\ln x_1 + ax_2 - a\ln x_2$$

V heißt erstes Integral des Systems, wenn $\frac{d}{dt}V(x(t;x_0)) = 0$ gilt. Die Höhenlinie ist die Projektionen von der Linien gleicher Höhe in die x, y -Ebene. Die Höhenlinie einer Funktion $V(x)$ mit zwei Variablen ist invariante Menge und kann ich wie folgend als Menge aufschreiben. $V^{-1}(l) := \{x \in D_V \,|\, V(x) = l\}$ Die Linien gleicher Höhe ist die Lösung mit gleicher Anfangswerte von x_1 und x_2 . Das Graph ist 3D-Zeichnung und es kann die Lösung der Gleichung deutlich zeigen. Ich nehme $a = c = 1$ an, kann ich die folgende Abbildung erhalten.

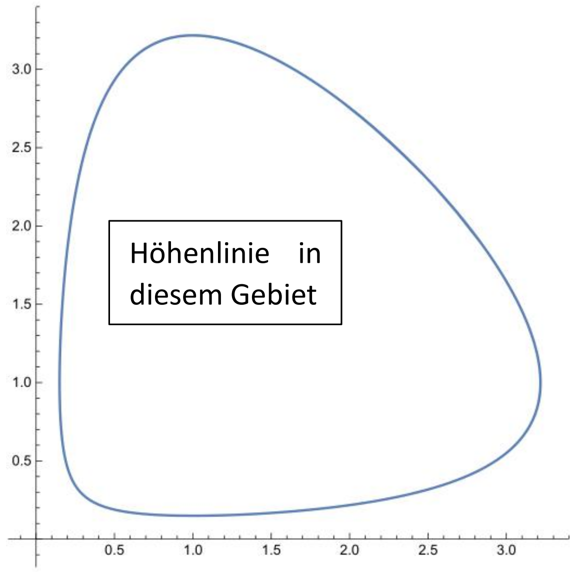


Wenn $a = 1$ und $c = 3$, kann ich eine andere Abbildung wie folgend bekommen.



Von diesen Abbildungen kann ich erfassen, ist das globles Minimum gleich als Wert von $a+c$.

Durch die vorherige Analyse wissen wir, dass die Veränderung in der Anzahl der Beute und Räuber periodisch ist. Das Wachstum der Beute und Räuber ist nicht endlich, so die beide Population in einem beschränkt Gebiet bleiben, wie folgende Abbildung zeigt. Die Höhenlinien ist in diesem Gebiet.



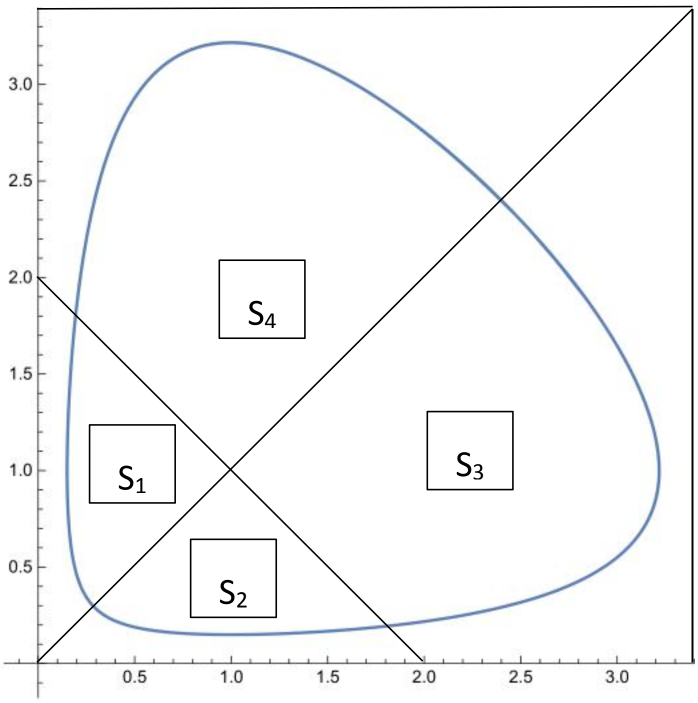
Ich habe die Abbildung der Lösung in die vier Segmente geteilt.

$S_1 = \{x \in V^{-1}(l) | x_1 \le x_2 \le 2 - x_1\}$

$S_2 = \{x \in V^{-1}(l) | x_2 \le x_1 \le 2 - x_2\}$

$S_3 = \{x \in V^{-1}(l) | x_1 \ge x_2 \ge 2 - x_1\}$

$S_4 = \{x \in V^{-1}(l) | x_2 \ge x_1 \ge 2 - x_2\}$



Von der Abbildung können wir den Verlauf der Lösung wissen. Der erste Teil reduziert die Räuber, so $x_2'<0$ ist. Der zweite Teil wächst die Beute, so $x_1'>0$. Gleichfalls ist $x_2'>0$ in der dritte Teil und $x_1'<0$ in der vierte Teil. Die Lösung ist periodisch und der Kreislauf ist in der Reihenfolge $S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_4 \to S_1$. Aus der Gleichung können wir die folgenden Ungleichungen bekommen.

$x_2'<-c\beta\alpha$, wenn $x \in S_1$

$x_1'>a\beta\alpha$, wenn $x \in S_2$

$x_2'>c\beta\alpha$, wenn $x \in S_3$

$x_1'<-a\beta\alpha$, wenn $x \in S_4$

In dieser Ungleichungen ist $|x_1-1| \geq \alpha$ gilt für alle $x \in S_1$ und $x \in S_3$ und $|x_2-1| \geq \alpha$ gilt für alle $x \in S_2$ und $x \in S_4$. Es existiert $\beta > 0$, dass $x_1 > \beta$ und $x_2 > \beta$ für alle $x \in V^{-1}(l)$ sind.

4. Zusammenfassung

Die Differentialgleichungen erster Ordnung können auf andere Modelle anwenden, zum Beispiel Schäfers- Modell und Zellwachstum- Modell. Schäfers- Modell wird den Fischfang beschreibt und erklärt. Wir können die Fangstrategie mithilfe der Modellierung ausarbeiten. Fischpopulation kann mit folgender Differentialgleichung beschreibt. $x^{'}(t) = \lambda x(t)(K - x(t)) - u(t)$ (λ -- Wachstumsrate, K -- Kapazität des Lebensraums, $u(t)$ -- Fangstrategie)

Zellwachstum-Modell findet zur Beschreibung des Wachstums von Zellen und wird die Differentialgleichung wie folgend verwendet. $x^{'}(t) = \lambda x(t)\ln(\frac{K}{x(t)})$

Durch die Modellierung kennen wir uns das Veränderungsgesetzt zweier Population. Von diesem Modell wissen wir, ist es unwahrscheinlich, dass zwei Populationen gleichzeitig ausgestorben sind, aber die Koexistenz von zwei Populationen ist möglich. Das Räuber-Beute Modell wird auch zur Beschreibung der Interaktion zweier Population eingesetzt. Ich habe das Modell nur mit zwei Arten übergelegt und wir können dieses Modell auf den Fall von drei Arten setzen. In der Natur gibt es ökologisches Gleichgewicht System, das periodisch ändert.

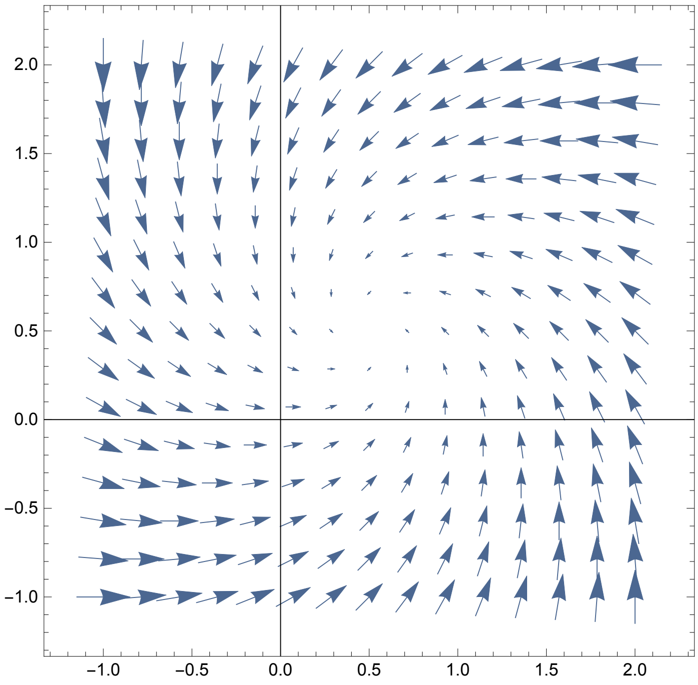
5. Literaturverzeichnis

[1] Dr.Heidrun Günzel: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Oldenbourg Verlag München (2008), Seite 51-62, 205-219
[2] William E. Boyce: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Laurie Rosatone (2009), Seite 31-49, 485-507
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables
[4] Lars Grüne: Modellierung mit Differentialgleichungen, Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Bayreuth (2008), Seite 11-26
[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen
[6] http://www.bb.ustc.edu.cn/jpkc/xiaoji/jswl/Mathematica.pdf

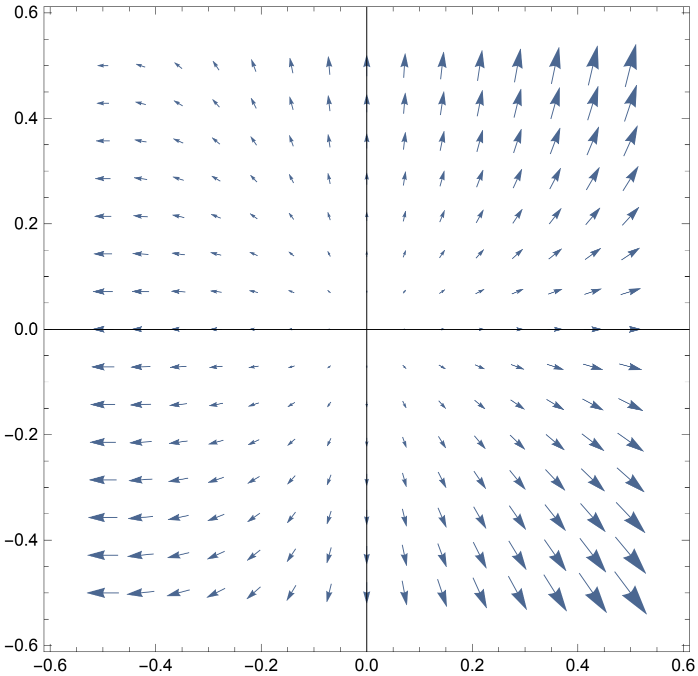
Anhang

Richtungsbild von Differentialgleichungssystem

In[3]:= `VectorPlot[{-x - y + 1, x - y}, {x, -1, 2}, {y, -1, 2}, Axes → True]`
向量图 坐标轴 真

Out[3]=


In[7]:= `VectorPlot[{x - x * y, y + 2 x * y}, {x, -0.5, 0.5}, {y, -0.5, 0.5}, Axes → True]`
向量图 坐标轴 真

Out[7]=


Wachstumsbild der Beute

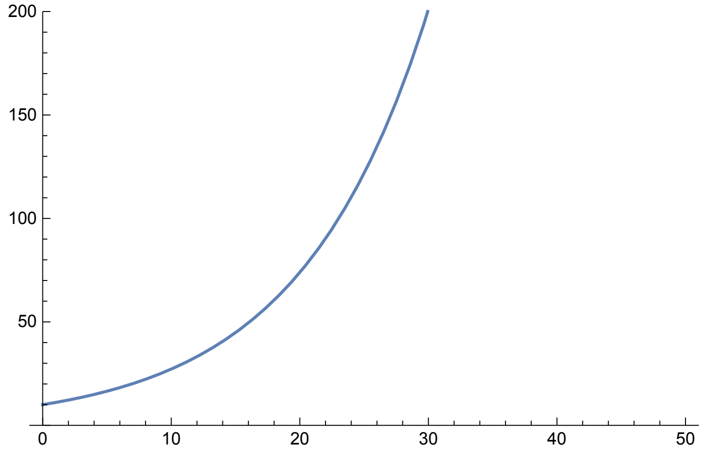
In[1]:=
```
DSolve[{x'[t] == 0.1 x[t], x[0] == 10}, x[t], t]
```
求解微分方程

Out[1]= $\{\{x[t] \to 10.\, e^{0.1\,t}\}\}$

In[2]:=
```
sol = DSolve[{x'[t] == 0.1 x[t], x[0] == 10}, x[t], t]
```
求解微分方程

Out[2]= $\{\{x[t] \to 10.\, e^{0.1\,t}\}\}$

In[9]:=
```
Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 50}, PlotRange → {0, 200}]
```
绘图 计算 绘制范围

Out[9]= 

Wachstumsbild der Beute

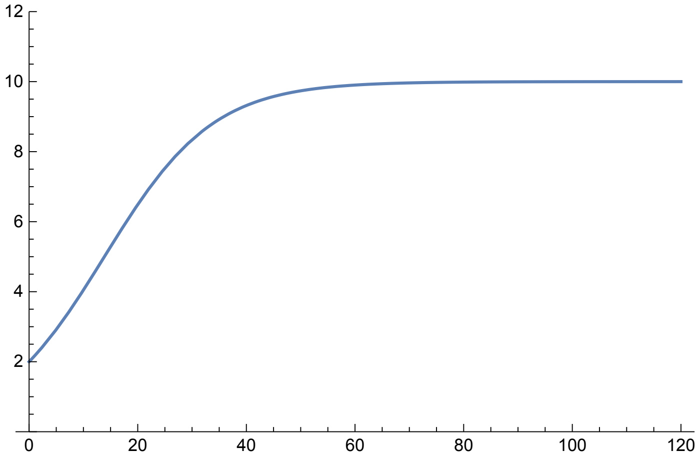
In[1]:=
```
sol = DSolve[{x'[t] == 0.1 x[t] - 0.01 (x[t])^2, x[0] == 2}, x[t], t]
```
求解微分方程

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. ≫

Out[1]= $\left\{\left\{x[t] \to \frac{10. \times 2.71828^{0.1\,t}}{4. + 2.71828^{0.1\,t}}\right\}\right\}$

In[2]:=
```
Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 120}, PlotRange → {0, 12}]
```
绘图 计算 绘制范围

Out[2]=



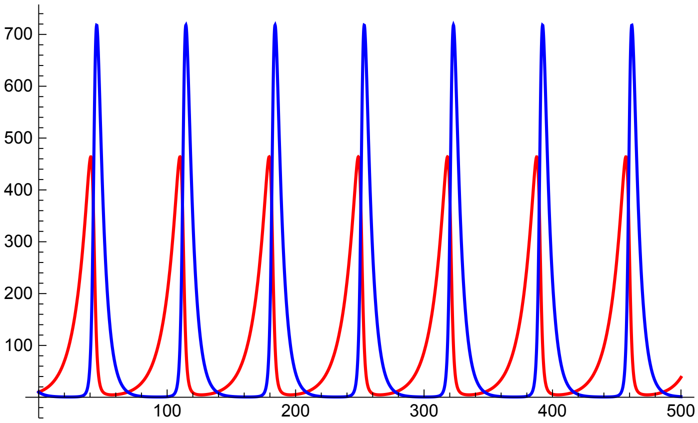
Wachstumsbild der Beute und Räuber

In[13]:=
```
a = 0.1;
b = 0.001;
c = 0.002;
d = 0.2;
soln = NDSolve[{x'[t] == a * x[t] - b * x[t] * y[t],
               数值求解微分方程组
    y'[t] == c * x[t] * y[t] - d * y[t], x[0] == 10, y[0] == 10}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 500}]
```

Out[17]=
```
{{x[t] → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 500.}} Output: scalar ][t],
  y[t] → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 500.}} Output: scalar ][t]}}
```

In[19]:=
```
Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. soln], {t, 0, 500}, PlotRange → All,
绘图  计算                                          绘制范围     全部
 PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 0, 1]}}]
 绘图样式       RGB颜色                RGB颜色
```

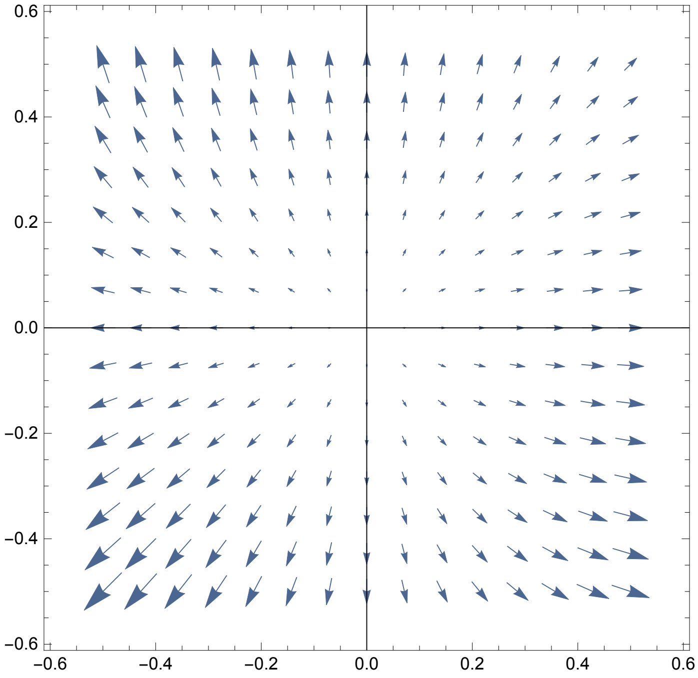
Out[19]=



Richtungsbild von Differentialgleichungssystem

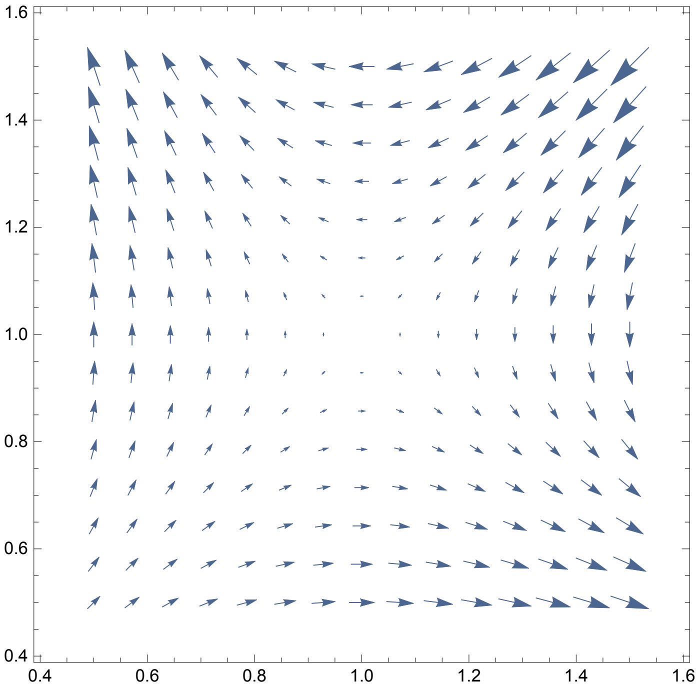
In[3]:=
```
VectorPlot[{x (1 - y), (1 - x) y}, {x, -0.5, 0.5}, {y, -0.5, 0.5}, Axes → True]
```
向量图 坐标轴 真

Out[3]=



In[4]:=
```
VectorPlot[{x (1 - y), (1 - x) y}, {x, 0.5, 1.5}, {y, 0.5, 1.5}, Axes → True]
```
向量图 坐标轴 真

Out[4]=

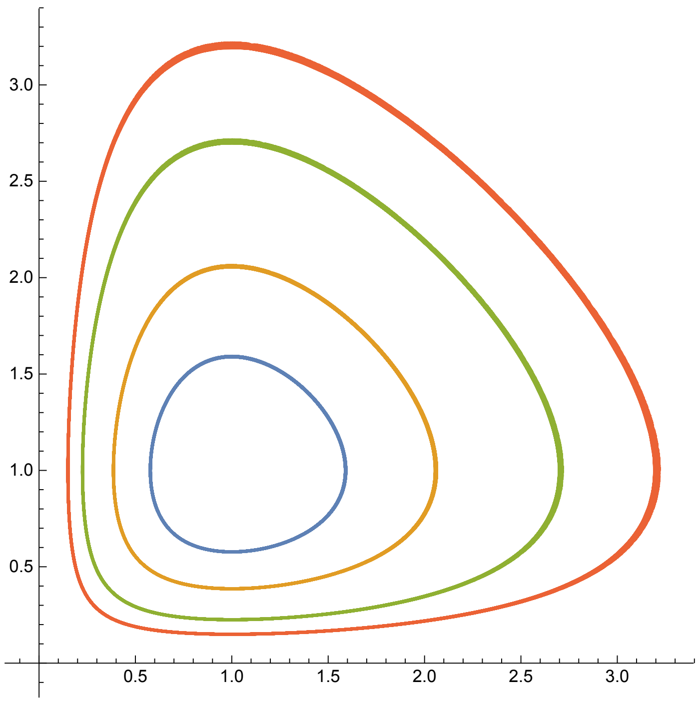


Lösungskurve des Räuber-Beute Modells

```
In[237]:= soln1 = NDSolve[{x'[t] == x[t] - x[t] * y[t], y'[t] == -y[t] + x[t] * y[t],
                  数值求解微分方程组
              x[0] == 1.4, y[0] == 1.4}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 500}];
          soln2 = NDSolve[{x'[t] == x[t] - x[t] * y[t], y'[t] == -y[t] + x[t] * y[t],
                  数值求解微分方程组
              x[0] == 1.7, y[0] == 1.7}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 500}];
          soln3 = NDSolve[{x'[t] == x[t] - x[t] * y[t], y'[t] == -y[t] + x[t] * y[t],
                  数值求解微分方程组
              x[0] == 2.1, y[0] == 2.1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 500}];
          soln4 = NDSolve[{x'[t] == x[t] - x[t] * y[t], y'[t] == -y[t] + x[t] * y[t],
                  数值求解微分方程组
              x[0] == 2.4, y[0] == 2.4}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 500}];

In[241]:= ParametricPlot[{Evaluate[{x[t], y[t]} /. soln1],
          绘制参数图          计算
            Evaluate[{x[t], y[t]} /. soln2], Evaluate[{x[t], y[t]} /. soln3],
            计算                             计算
            Evaluate[{x[t], y[t]} /. soln4]}, {t, 0, 500}, PlotRange → All]
            计算                                          绘制范围     全部
```

Out[241]=

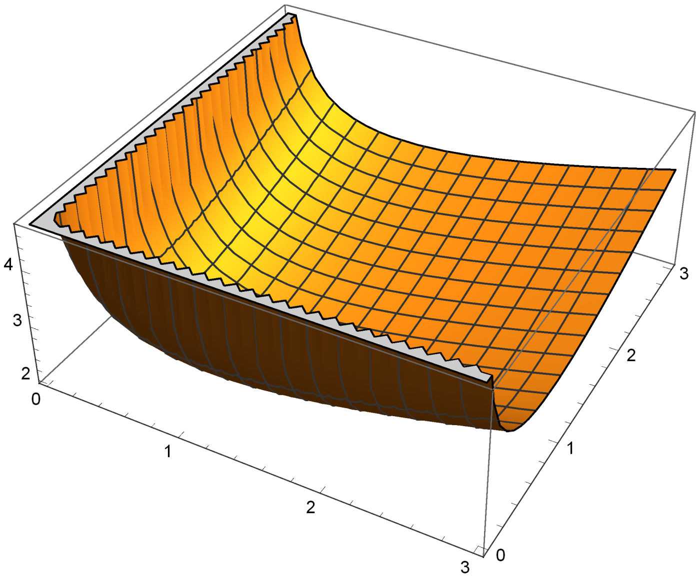


Höhenlinie

In[1]:= `Plot3D[x - Log[x] + y - Log[y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]`

绘制三维图形 对数 对数

Out[1]=



In[2]:= `Plot3D[3 x - 3 Log[x] + y - Log[y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]`

绘制三维图形 对数 对数

Out[2]=