



KONTROLLKARTEN UND IHRE ANWENDUNG IN DER BETRIEBLICHEN PRAXIS

Am Fachbereich
Ingenieur- und Naturwissenschaften

Autor:

Ye Zhou

Matrikel-Nr.: 20100

Betreuer Hochschule Merseburg:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Eckhard Liebscher

Dr.-Ing. habil. Ines Hofmann

Abstract

Im 21. Jahrhundert werden die Anforderungen an die Qualität der Produkte immer höher. Damit ist die Anwendung der Kontrollkarte immer wichtiger. Diese Arbeit befasst sich mit den theoretischen Grundlagen der Kontrollkarten und Prinzipien der Verwendung der Kontrollkarten. Außerdem wird ein Verfahren vorgestellt, wie man mit Mathematica schnell eine einfache Kontrollkarte zeichnen kann. Mit diesem Verfahren kann man vor dem PC die Daten der Produkte oder Bauteile analysieren und bewerten, um die Produktionsprozess besser zu beherrschen.

Schlagworte

Kontrollkarte

Mathematica

Qualität

Qualitätsregelkarte

Qualitätsmanagement

Inhaltsverzeichnis

Anhangsverzeichnis	II
Abbildungsverzeichnis	II
Formelzeichen	IV
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	2
2.1 Prozess	2
2.2 Einführung zur Statistische Prozeßregelung (SPC)	3
2.3 Maschinenfähigkeitsuntersuchung(MFU) und Prozeßfähigkeitsuntersuchung(PFU)	4
2.4 Qualitätsregelkarten	5
2.4.1 Basiskonzept bei der Anwendung von Qualitätsregelkarten	6
2.4.2 Aufgaben von Qualitätsregelkarten	9
2.4.3 Arten von Qualitätsregelkarten	10
2.4.4 Prozeßregelung mit QRK	14
2.5 Normalverteilung	16
2.6 Chi-Quadrat-Verteilung	19
2.7 Irrtumswahrscheinlichkeit und Quantil	20
2.8 Fehler 1. Art und Fehler 2. Art bei der Statistik	21
3. Kontrollkarte für quantitative Merkmale	23
3.1 \bar{x} -Karte	24
3.1.1 \bar{x} -Karte bei bekannter Standardabweichung	24
3.1.2 \bar{x} -Karte bei unbekannter Standardabweichung	30
3.2 S-Karte	34
4 Kontrollkarte für qualitative Merkmal	40
4.1 p-Karte	40
5 Nutzung von Mathematica	47
5.1 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und Quantile der Normalverteilung	47
5.2 Erstellung von Kontrollkarten mit Mathematica	49
5.2.1 die \bar{x} -Karte bei unbekannter Standardabweichung	49
5.2.2 s-Karte	53
5.2.3 p-Karte	56
6 Zusammenfassung	59
Literaturverzeichnis	67
Eidesstattliche Erklärung	68

Anhangsverzeichnis

Anh.1: Durchmesser der Kolbenringe	60
Anh.2: Programme in Mathematica	61

Abbildungsverzeichnis

Abb.2.1.1 Allgemeine Prozessstruktur	2
Abb.2.2.1 Statistische Prozeßregelung (SPC)	3
Abb 2.2.2 Zusammenhang zwischen SPC, MFU, PFU und QRK	4
Abb.2.4.1 Zweiseitige Qualitätsregelkarte ohne auffälligen Stichprobenbefund	6
Abb.2.4.2 Einseitige Qualitätsregelkarte mit auffälligem Stichprobenbefund	7
Abb.2.4.3 Bezeichnung und Abkürzung der Linien in den oberen Bild	7
Abb.2.4.4 Normalverteilung nach Gauß	8
Abb. 2.4.3.1 Typen von Qualitätsmerkmalen	11
Abb.2.4.3.2 Typen gebräuchlicher Regelkarten	13
Abb.2.4.3.3 Produkt- u. Prozessrelevante Prüfmerkmale bei der Herstellung von Formstücken aus duktilem Gusseisen	13
Abb 2.4.3.4 Klassifikationen für Qualitätsregelkarten	14
Abb 2.4.4.1 Analogie Regelkreis-SPC	16
Abb.2.5.1 Dichtefunktion der Normalverteilungen	17
Abb.2.5.2 Verteilungsfunktion der Normalverteilungen	18
Abb.2.6.1 Dichtefunktion der Chi-Quadrat-Verteilung	19
Abb.2.6.2 Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung	20
Abb 2.8.1 Zwei Fehlertypen bei der Anwendung von Qualitätsregelkarten	21
Abb.3.1.1.1 Berechnung w der Warn Grenzen der Normalverteilung in Mathematica	26
Abb.3.1.1.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung mit Mathematica	26
Abb.3.1.1.3 Daten der 25 Untergruppen	28
Abb.3.1.1.4 Mittelwertkarte für die Stichproben des Verpackungsprozesses	29
Abb.3.1.2.1 \bar{a}_j	31
Abb.3.1.2.2 Relevantwerte für das Beispiel Kolbenringe aus Anh.1	33
Abb.3.1.2.3 \bar{x} -Karte aus Beispiel in Anh.1	34
Abb.3.2.1 Chi-Quadrat-Dichte	36
Abb.3.2.2 Berechnung von $\chi^2_{4;1-\alpha_w}$ mit Excel	38
Abb.3.2.3 Berechnung von $\chi^2_{4;1-\alpha_k}$ mit Excel	38

Abb.3.2.4 Berechnung von $\chi_{4;1-\alpha_W}^2$ und $\chi_{4;1-\alpha_K}^2$ mit Mathematica	39
Abb.3.2.5 Diagramm zur S-Karte für das Beispiel Kolbenringe aus Anh.1	39
Abb.4.1.1 Berechnung des Quantils für α_W	42
Abb.4.1.2 Berechnung des Quantils für α_K	42
Abb.4.1.3 Berechnung der Quantile für α_W und α_K	43
Abb.4.1.4 Datenaufzeichnung-Beispiel Rasenmäher	44
Abb.4.1.5 Berechnung der Quantile der Binomialverteilung	45
Abb.4.1.6 Die p-Karte für obenes Beispiel	46
Abb.5.1.1 Befehl „Sc“	48
Abb.5.1.2 die Berechnung von „ ω “	48
Abb.5.1.3 die Ergebnis von „ ω “	48
Abb.5.1.4 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung	49
Abb.5.2.1.1 Eingabe der Daten	50
Abb.5.2.1.2 Berechnung der Durchschnittswerte und Standardabweichungen	50
Abb.5.2.1.3 Berechnung der Entscheidungsgrenzen	51
Abb.5.2.1.4 Entstehung der Entscheidungsgrenzen	52
Abb.5.2.1.5 Linie der verbundenen Datenpunkte	52
Abb.5.2.1.6 Funktion des Befehls „Transpose“	53
Abb.5.2.1.7 Vollendete Mittelwertkarte bei unbekannter Standardabweichung	53
Abb.5.2.2.1 Berechnung von x_w und x_k durch Mathematica	54
Abb.5.2.2.2 Berechnung von Entscheidungsgrenzen durch Mathematica	54
Abb.5.2.2.3 Entstehung der Entscheidungsgrenze	55
Abb.5.2.2.4 Linie der verbundenen Datenpunkte	55
Abb.5.2.2.5 VollendeteS-Karte	55
Abb.5.2.3.1 Eingabe der Daten	56
Abb.5.2.3.2 Berechnung von Entscheidungsgrenzen	56
Abb.5.2.3.3 Linie der verbundenen Datenpunkte	57
Abb.5.2.3.4 Entscheidungsgrenzen	57
Abb.5.2.3.5 Auswahl der defekte Punkte	57
Abb.5.2.3.6 Veränderung der Farbe und Größe der defekten Punkte	58
Abb.5.2.3.7 Vollendete p-Karte	58

Formelzeichen

Symbol	Bezeichnung
a_j	Parameter für die Schätzung der Durchschnittswerte der Standardabweichungen von Untergruppe
a_w und a_k	Quantile der Standard-Normalverteilung
$E(x_n^2)$	Erwartungswert der Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden
$D(x_n^2)$	Varianz der Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden
h_i	Anzahl der fehlerhaften Teile in der Untergruppe i
κ	Parameter für die Kontrollgrenze
K_u	untere Kontrollgrenze
K_o	obere Kontrollgrenze
n_i	Anzahl der geprüften Teile
n_j	Anzahl der Probe der Untergruppe j
\bar{n}_j	Gesamtanzahl der kontrollierten Teile bis zur Untergruppe j
p_0	der vorzugebende Maximalanteil von Ausschussteilen
S	Standardabweichung
\bar{S}	Durchschnittswerte der Standardabweichungen der Untergruppe
ω	Parameter für die Warngrenze
W_u	untere Warngrenze
W_o	obere Warngrenze
\bar{x}	Mittelwert/Durchschnittswerte
\bar{X}_j	Durchschnittswerte der Untergruppe j
$\bar{\bar{X}}$	Durchschnittswerte der \bar{x} der Untergruppe
$\chi_{n_j-1;1-\alpha}^2$	\bar{X} besitzt Chi-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgrad n und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$
z	Standardisierungsvariablen
μ	Erwartungswert
σ	Standardabweichung
σ^2	Varianz
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$\Gamma(r)$	Gammafunktion

1 Einleitung

Im Jahr 1994 wies der rumänisch-amerikanischer Wirtschaftsingenieur Joseph M. Juran, der zu den Wegbereitern des Qualitätsmanagements zählte, in der Jahrestagung der ASQ (the American Society for Quality) auf folgendes hin: Das 20. Jahrhundert geht als „ein Jahrhundert der Produktivität“ in die Annalen ein, das kommende 21. Jahrhundert ist „ein Jahrhundert der Qualität“. Mit der Zeit wird Stimmen seiner Behauptung immer mehr Menschen.

Die Behauptung von Juran basierte auf folgenden Hintergrundinformationen:

1. Die sich schnell entwickelnde Technik ging mit einem Absinken Ausfallraten der Produkte diesen Jahren einher. So sind zum Beispiel die Ausfallraten der elektronischen Produkte von 1×10^{-2} , 1×10^{-3} in der Vergangenheit bis heute auf 1×10^{-6} bzw. 1×10^{-9} abgesunken!
2. Das hat seine Ursache auch in der Weiterentwicklung der Methoden für das Qualitätsmanagement 3σ -Methode zur 6σ -Methode. Mit der 3σ -Methode ist die entsprechende Ausfallrate 2.7×10^{-3} , aber mit der 6σ -Methode ist die entsprechende Ausfallrate 2.0×10^{-9} . Die Unterschied zwischen beiden Methoden ist sehr enorm.

Wenn eine Firma Marktführer werden möchte, muss sie immer strengere Qualitätsanforderungen erfüllen. Im 21. Jahrhundert ist die Qualität der Produkte die „Hauptwaffe“ zwischen Staat und Staat . Ein wichtiges Werkzeug zur Qualitätsverbesserung für Unternehmen ist die Kontrollkarte.

Im dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen und Prinzipien der Verwendung der Kontrollkarten beschrieben. Es wird auch ein einfaches Programm beschrieben, mit dem man mittels Mathematica ein Kontrollkarten zeichnen kann.

2 Grundlagen

2.1 Prozess

Mit der Zeit werden die Anforderungen an die Qualität der Produkten immer höher. Es ist einem Unternehmen immer wichtiger, wie es ständig die Prozesse zur Steigerung von Qualität und Produktivität verbessern kann.

Der Begriff „Prozess“ wird in der Qualitätslehre wie folgt definiert (siehe [Gei 08]):

Prozess: System von Tätigkeiten, das Eingaben in Ergebnisse wandelt.

Diese in der Definition genannten Tätigkeiten stehen in Wechselwirkung und Wechselbeziehung untereinander.

Tätigkeit: Verändern des Zustandes einer Einheit.

Der „Zustand“ bezieht sich auf den Betrachtungszeitpunkt.

Zustand: Beschaffenheit einer Einheit zum Betrachtungszeitpunkt.

Ein Prozess besteht allgemein aus folgenden vier Elementen(Abb.2.1.1)[DGQ 10]:

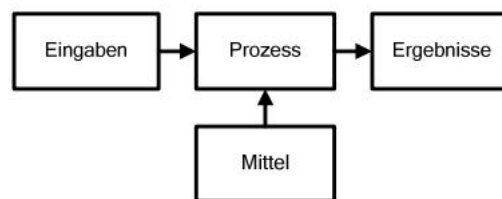


Abb.2.1.1 Allgemeine Prozessstruktur

Man kann einfach sagen, dass die Produkte die Ergebnisse von Prozessen sind.

2.2 Einführung zur Statistische Prozeßregelung (SPC)

Die Statistische Prozeßregelung (SPC, Statistical Prozess Control, Abb.2.2.1) ist ein auf mathematisch-statistischen Grundlagen basierendes Instrument, um einen bereits optimierten Prozeß durch kontinuierliche Beobachtung und gegebenenfalls Korrekturen auch in diesem optimierten Zustand zu erhalten.[Ekb 96] Dazu dienen als wichtigste Hilfsmittel die Qualitätsregelkarten (auch Kontrollkarten genannte). Es gibt verschiedene Arten von Qualitätsregelkarten. Man kann Qualitätsregelkarten anhand geeigneter Kriterien auf verschiedene Weisen klassifizieren.

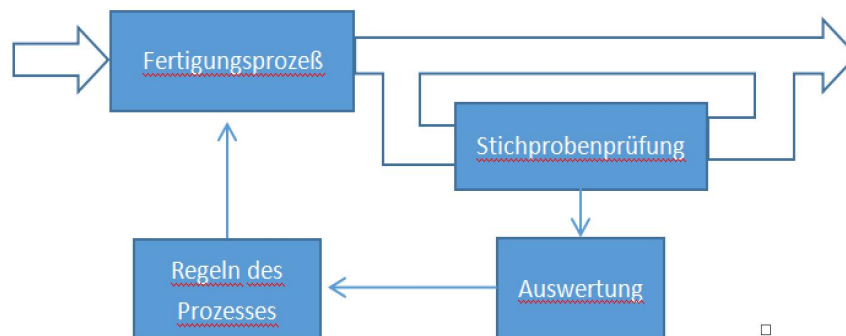


Abb.2.2.1 Statistische Prozeßregelung (SPC)[Wol 95]

Die Statistische Prozeßregelung wurde im Jahr 1924 in Form eines Memorandums von Walter Andrew Shewhart (1891-1967), der die Methoden der Statistik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaftswissenschaften zusammenführte und die Qualitätsregelkarte entwickelte, entwickelt.

Kurz gesagt besteht „die Statistische Prozeßregelung“ aus 2 Teilen, der Prozeßfähigkeitsuntersuchung (PFU) und der Prozeßüberwachung mit Qualitätsregelkarten (QRK). Diese beiden Teile weisen eine enge Beziehung zueinander auf, denn eine QRK baut auf den Ergebnissen der PFU auf. Die Voraussetzung der „Statistischen Prozeßregelung“ besteht darin, dass für die

entsprechende Maschine oder Anlage die Maschinenfähigkeit nachgewiesen ist. Ein fähiger Prozess zur Herstellung eines Merkmal kann nur auf einer Maschine oder Anlage ablaufen, von der die Maschinenfähigkeit nachgewiesen ist. Andererseits wird die MFU in der Praxis aber auch ohne Bezug zu den weiteren SPC-Elementen im Rahmen von Maschinenabnahmen oder auch periodische, qualitativen Überprüfungen der Maschinen eingesetzt[siehe Ger11]. Der Zusammenhang zwischen SPC, MFU, PFU und QRK wird in Abb 2.2.2 gezeigt.

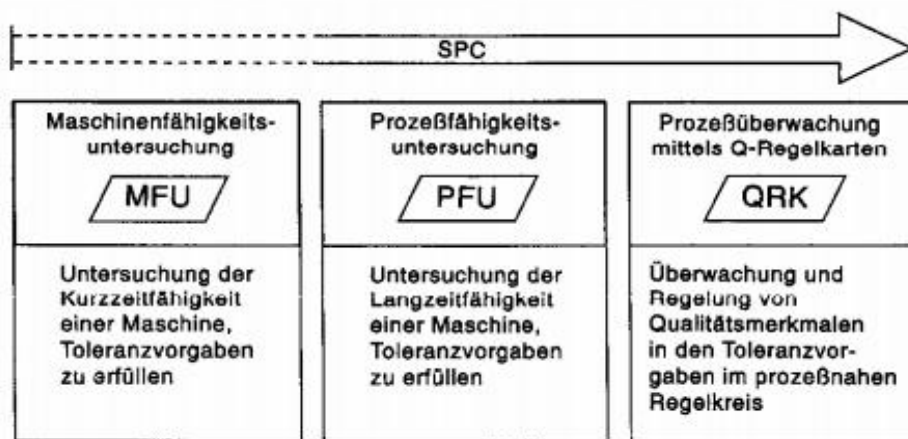


Abb 2.2.2 Zusammenhang zwischen SPC, MFU, PFU und QRK [Ekb 96]

2.3 Maschinenfähigkeitsuntersuchung(MFU) und Prozeßfähigkeitsuntersuchung(PFU)

Eine Maschinenfähigkeitsuntersuchung(MFU) ist eine Kurzzeituntersuchung an Maschinen oder Anlagen hinsichtlich der Erfüllung vorgegebener Qualitätsanforderungen für die gestellte Fertigungsaufgabe. Basis der Bewertung ist eine einzige große Stichprobe aus den gefertigten Erzeugnissen. Der Untersuchungszeitraum ist kurz und beruht lediglich auf einer großen Stichprobe, in der Regel mindestens 50 Werkstücke. Im Sinne einer aufwandsgerechten

Durchführung der Untersuchung werden statistische Verfahren eingesetzt [siehe Ekb 96].

Die Hauptziele der Maschinenfähigkeitsuntersuchungen sind:

1. Untersuchung der aktuellen „Qualitätsfähigkeit der Maschinen, bzw. Anlage“ zur Erfüllung vorgegebener Fertigungsaufgaben.
2. Basis für Freigabeentscheid bei Maschinenabnahmen.

Eine Prozessfähigkeitsuntersuchung(PFU) ist eine Analyse aller an einem Herstellungsprozess beteiligten Einflussfaktoren hinsichtlich ihrer Eignung , die geplante Fertigungsaufgabe innerhalb vorgegebener Qualitätsanforderungen zu erfüllen. Der Untersuchungszeitraum ist wesentlich länger als bei der MFU, denn es soll das Trendverhalten des Prozesses bewertet sollen. Im Sinne einer aufwandsgerechten Durchführung der Untersuchung werden statistische Verfahren eingesetzt.

Die Hauptziele der Prozeßfähigkeitsuntersuchungen sind:

1. Prüfung der Prozeßparameter auf Eignung, bzw. Erfüllungsgrad hinsichtlich der Fertigungsaufgabe.
2. Elimination aller systematischen Prozeßeinflüsse.
3. Minimierung von Prüf- und Fehlerkosten.
4. Verkürzung der Fertigungsdurchlaufzeiten.

2.4 Qualitätsregelkarten

Die Qualitätsregelkarte (QRK) oder Kontrollkarte ist das wichtigste Instrument der Fertigungsüberwachung. Die Hauptfunktion der QRK besteht darin, ein Qualitäts-

merkmal während der laufenden Produktion zu verfolgen und Störungen, d.h. unerwünschte Entwicklungen bei den Qualitätsdaten möglichst frühzeitig aufzudecken[Han 93]. Im weiteren wird meistens die Bezeichnung von Qualitätsregelkarte verwendet. Den Fortgeschrittenen wird der Name Kontrollkarte in der weiteren Forschung empfohlen.

2.4.1 Basiskonzept bei der Anwendung von Qualitätsregelkarten

In Qualitätsregelkarten wird der zeitliche Verlauf der Qualitätsmerkmale bzw. deren Kenngrößen (z.B. Varianz) grafisch dargestellt. Eine QRK enthält eine oder zwei Eingriffsgrenzen, je nachdem, ob bei dem zu verfolgenden Qualitätsmerkmal nur Abweichungen in einer Richtung (Abweichungen nach oben/unten) oder aber in beiden Richtungen für die Fertigung von Bedeutung sind. Entsprechend unterscheidet man zwischen einseitigen QRK(Abb.2.4.2)und zweiseitigen QRK(Abb.2.4.1)[Han93]. In der Mitte befindet sich eine zur Eingriffsgrenz(n)/Kontrollgrenze(n) parallel verlaufende Linie, die den Stichprobenmittelwert charakterisiert.

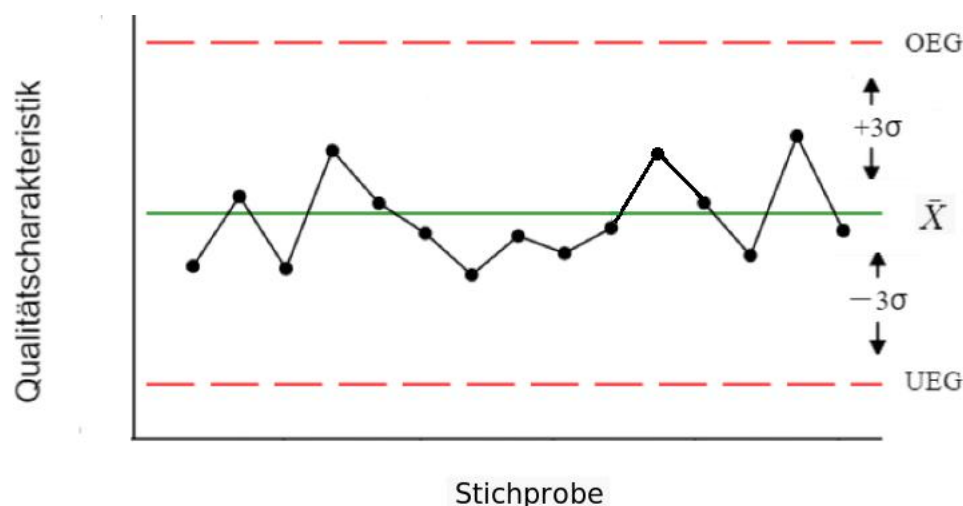


Abb.2.4.1.1Zweiseitige Qualitätsregelkarte ohne auffälligen Stichprobenbefund[Han93]

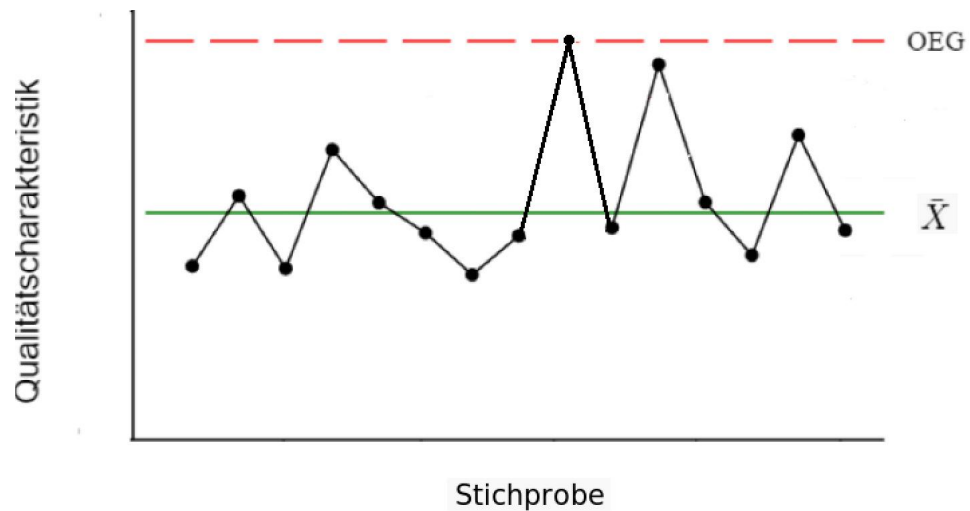


Abb.2.4.1.2 Einseitige Qualitätsregelkarte mit auffälligem
Stichprobenbefund[Han93]

Linienart	Bezeichnung DE	Abkürzung DE
rote, fett Strichline	obere Eingriffsgrenze	OEG
grüne Volllinie	Mittelwert	\bar{X}
rote, fett Strichline	untere Eingriffsgrenze	UEG

Abb.2.4.1.3 Bezeichnung und Abkürzung der Linien in den oberen Bild

Das kartographische Prinzip der QRK basiert auf der Normalverteilung nach Gauß. Man nennt das „3 σ -Regel“. Wie Abb.2.4.4 zeigt sind, im Intervall der Abweichung 3 σ vom Mittelwert 99,73 % aller Messwerte zu finden. Beim normalen Herstellungsprozeß ist es deshalb fast unmöglich, mangelhafte Ware herzustellen. Wenn es passiert, dann kann man davon sprechen, dass der Prozess Probleme hat.

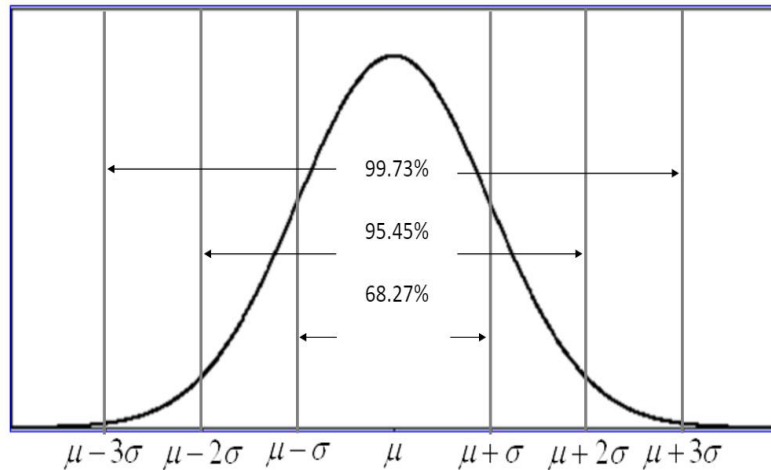


Abb.2.4.1.4 Normalverteilung nach Gauß

Die auf der QRK liegenden Punkte beschreiben den zeitlichen Verlauf der Qualitätsmerkmale bzw. deren Kenngrößen. Man kann durch die Kontrollkarten schnell die Schwankungen der Qualitätskenngrößen erkennen. Wenn keine Werte außerhalb der OEG oder UEG liegen, dann kann man feststellen, dass der Prozess unter statistischer Kontrolle, kurz unter Kontrolle, ist (Abb.2.4.1). Der Fertigungsprozess läuft stabil und ist ungestört. Die Grenzen sind abhängig vom Einfluss des Qualitätsmerkmals auf die Funktionstüchtigkeit des Produktes. Wenn die Qualitätsmerkmale außerhalb der durch die Karte festgelegten Grenzen auftreten, dann kann man davon sprechen, dass der Prozess außerhalb statistischer Kontrolle, kurz außer Kontrolle bzw. gestört ist (Abb.2.4.2). Es gibt folgende Maßnahmen zur Wiederherstellung bzw. Verbesserung der Qualität [Wal 13]:

- Justierung der Werkzeuge vornehmen,
- Werkzeuge auswechseln,
- Wartungsarbeiten durchführen,
- Reparaturen durchführen,
- Materialqualität prüfen und gegebenenfalls andere Materialcharge verwenden,
- Personal schulen.

2.4.2 Aufgaben von Qualitätsregelkarten

Seit Jahrzehnten hat sich die Qualitätsregelkarte als ein wichtiges und erfolgreiches statistisches Instrument bewährt. Sie dient gleichzeitig mehreren Zwecken (siehe [Han 93]):

1. Erhöhung der Produktivität

Mit dem Ziel, die Fertigung unter statistischer Kontrolle zu halten und unerwünschte Entwicklungen des Produktionsprozesses möglichst frühzeitig aufzudecken, setzt man die Qualitätsregelkarte während der laufenden Produktion ein. Wegen der raschen Entdeckung und Behebung von systematischen Störungen trägt die Qualitätsregelkarte zur Vermeidung von Ausschuffertigung und damit zu einer erhöhten Produktivität bei.

2. Analyse der Prozeßfähigkeit

Bevor ein Produkt in Serie geht, muss man feststellen, ob der geplante Fertigungsprozeß die in der Designphase spezifizierten Vorgaben für ein zu überwachendes Qualitätsmerkmal wirklich einhalten kann. Ob ein Produktionsprozeß diese Eigenschaft, die auch als Prozeßfähigkeit bezeichnet wird, besitzt, ist auch qualitativ anhand von Qualitätsregelkarten zu beurteilen.

3. Dokumentation von Qualitätssicherungsmaßnahmen

Von den Zulieferern wird zunehmend verlangt, dass sie ihre internen Qualitätssicherungsbemühungen lückenlos dokumentieren und insbesondere die meist automatisiert geführten Regelkarten für vertraglich vereinbarte Qualitätsaudits über Jahre zur Einsichtnahme bereit halten. Es gibt schon heute in der Automobilbranche keinen Zulieferer mehr, der es sich leisten kann, diese Erfordernisse zu ignorieren.

4.Schutzschild gegen externe Ansprüche

Seit Inkrafttreten des Produkthaftungsgesetzes am 1.1.1990 haben Qualitätsregelkarten für den Produzenten eines Produktes auch die Funktion eines Beweismittels bei Auseinandersetzungen um Gewährleistungs- oder Haftungsansprüche, für die der Geschädigte mangelnde Produktqualität verantwortlich macht. Während früher der Geschädigte einen kausalen Zusammenhang zwischen Qualität und Schadenseintritt belegen musste, muss nun der Beklagte nachweisen, dass ihn keine Schuld trifft. Die umfassende Dokumentation aller angewendeten Online-Qualitätssicherungsverfahren einschließlich der Qualitätsdaten ist geeignet, den zur Abwendung von Ansprüchen erforderlichen Nachweis zu führen.

2.4.3 Arten von Qualitätsregelkarten

Nach den Qualitätsmerkmalstypen kann man die Qualitätsregelkarten in 2 Gruppen einteilen. Es gibt 2 Qualitätsmerkmalstypen: quantitative Merkmale und qualitative Merkmale. Ein quantitatives Merkmal, entsprechend Abb.2.4.3.1, ist beispielsweise der Durchmesser eines geschliffenen Bolzens (kontinuierlich/stetig). Quantitative Merkmale sind direkt mit SPC-Verfahren überwachbar. Ein qualitatives Merkmal ist beispielsweise die Anzahl an Lunkern in Großteilen (diskret). Bevor qualitative Merkmale als SPC-Elemente eingesetzt werden, muss man die fehlerhaften Einheiten (Teil oder Stück) zählen. Nach diesen 2 Qualitätsmerkmalstypen unterscheidet man zwischen Qualitätsregelkarten für die zählende Fertigungsüberwachung und Qualitätsregelkarten für die messende Fertigungsüberwachung. Synonyme sind die Begriffe attributive Qualitätsregelkarte und Qualitätsregelkarte für die Variablen-Prüfung.

Qualitätsmerkmalstyp			
quantitatives Merkmal		qualitatives Merkmal	
Merkmalswert läßt sich definierter Skalenteilung zuordnen.		Merkmalswert läßt sich Skala ohne definierte Abstände zuordnen	
diskret	kontinuierlich	ohne Merkmals- verkörperung	mit Merkmals- verkörperung

Abb. 2.4.3.1 Typen von Qualitätsmerkmalen

In Abb.2.4.3.2 werden einige, in der Praxis besonders häufig anzutreffende Qualitätsregelkarten, die nach quantitativen Merkmalen und qualitativen Merkmalen in 2 Kategorien eingeteilt werden, gezeigt. Hier wird auf einige Typen aus Abb.2.4.3.2 näher eingegangen.

- Mittelwertkarte und Mediankarte (\bar{x} -Karte und \tilde{x} -Karte) [Han93]:

einspurige Qualitätsregelkarte zur Überwachung der Fertigungslage, bei der der Stichprobenmittelwert \bar{x} bzw. der Stichprobenmedian \tilde{x} als Prüfvariable fungiert.

- Standardabweichungskarte und Spannweitenkarte (S-Karte und R-Karte) [Han93]:

einspurige Qualitätsregelkarte zur Überwachung der Fertigungsstreuung, bei der die Stichprobenstandardabweichung S bzw. die Stichprobenspannweite R als Prüfgröße verwendet wird.

- Mittelwert-Standardabweichungskarte (\bar{x} -S-Karte) und Mittelwert-Spannweitenkarte (\bar{x} -R-Karte)[Han93].

zweispurige Qualitätsregelkarte, bei der die Fertigungslage anhand des Stichprobenmittelwerts \bar{x} und die Prozeßstreuung anhand der Stichprobenstandardabweichung S resp. der Stichprobenspannweite R überwacht werden.

Neben den oben beschriebenen Kartentypen sind auch noch andere Kombinationen von prozeßbeschreibenden Kennwerten oder auch anderen Kartentypen für quantitative Merkmale möglich. Im folgenden wird weiter auf einige Kartentypen für qualitative Merkmale, die in der Praxis am gebräuchlichsten sind und vielfach im Rahmen der Sichtprüfung in den Endprüfstellen verwendet werden, eingegangen.

·np-Karte (Fehlerkarte) [Ger11]:

Diese Qualitätsregelkarte beschreibt die absolute Anzahl von fehlerhaften Einheiten bzw. Teilen der Stichprobe, ohne die Anzahl der Fehler pro Einheit zu berücksichtigen (n-Anzahl der Stichproben, p-Fehleranteil je Stichprobe np-das Produkt von n und p).

·p-Karte(Fehleranteilkarte) [Ger11]:

In der p-Karte (p-part,Fehleranteil) wird der prozentuale Anteil fehlerhafter Einheiten bzw. Teile bezogen auf die Anzahl der Einheiten bzw. Teile der Stichprobe ermittelt und als Kennwert geführt.

·c-Karte [Ger11]:

Die c-Karte zeichnet an Stelle der fehlerhaften Einheiten bzw. Teile einer Stichprobe die absolute Anzahl der beobachteten Fehler auf. Sie wird häufig für komplexe Produkte verwendet, an denen die Auftrittswahrscheinlichkeit vieler unterschiedlicher Fehler hoch ist.

· μ -Karte [Ger11]:

In der μ -Karte wird der prozentuale Anteil von Fehlern bezogen auf die Stichprobengröße fortgeschrieben.

gebräuchliche Regelkarten								
quantitative Merkmale			qualitative Merkmale					
Aussagekraft	\bar{X} / S - Karte	Mittelwert-/Standardabweichungs-Karte	fehlerhafte Einheiten	np-Karte	absolute Anzahl fehlerhafter Einheiten der Stichprobe	Anzahl Fehler / Einheit	c-Karte	absolute Anzahl der Fehler in der Stichprobe
	\bar{X} / R - Karte	Mittelwert-/Spannweiten-Karte						
	\tilde{X} / R - Karte	Zentralwert-/Spannweiten-Karte	p-Karte	anteiliger Wert fehlerhafter Einheiten der Stichprobe	u-Karte	anteiliger Wert der Fehler bezüglich einer Stichprobeneinheit		
	\bar{X} - Karte	Urwert-Karte						
	$X_{\min/\max}$ - Karte	Extremwert-Karte						
								Aufwand

Abb.2.4.3.2 Typen gebräuchlicher Regelkarten [Ger11]

Um die Anwendung der verschiedenen Kontrollkarten in der Praxis besser zu zeigen, wird ein Beispiel aus der Herstellung von Formstücken aus duktilem Gusseisen angeführt.

Prozessabschnitt	Prozessschritt	Prüfmerkmale
Weiterbehandlung des Formstückes	Abkühlen in der Form	Kühlzeit
	Werkstoffprüfung (Y-Proben bzw. Formstück)	Brinellhärte, mechanische Eigenschaften, Schallgeschwindigkeit, Mikrogefüge
	Putzen, Sicht- und Maßprüfung	Gussfehler, Wanddicke, Verbindungsmaße
	Dichtheitsprüfung	Dichtheit
	Mechanische Bearbeitung	Prozessparameter
	Sicht- und Maßprüfung	Gussfehler nach Bearbeitung, Bearbeitungsmaße
	Aufbringen der Schutzüberzüge	Aussehen, Beschichtungsdicke, Filmeigenschaften
	Lagerung und Versand	durch Transport bzw. Lagerung verursachte Fehler

Abb.2.4.3.3 Produkt- u. Prozessrelevante Prüfmerkmale bei der Herstellung von Formstücken aus duktilem Gusseisen[E]

In der obigen Abbildung werden die Prüfmerkmale für verschiedene Prozessschritte gezeigt. Für jedes Prüfmerkmal ist eine geeignete Kontrollkarte auszuwählen. Z.B

man kann für Kühlzeit, Brinellhärte, Wanddicke und Beschichtungsdicke die \bar{x} -Karte verwenden, und für Gussfehler kann die c-Karte verwendet werden.

Es gibt noch andere Unterscheidungskriterien für Qualitätsregelkarten. Auf diese wird hier nicht näher eingegangen (siehe Abb.2.4.3.4).

Bezeichnung	Unterscheidungskriterium
QRK für diskret./kont. Merkmale	Art der Merkmalswerte (diskret/kontinuierlich)
Shewhart-/Annahme-QRK	Einbezug von Toleranzen (nein/ja)
Einseitige/zweiseitige QRK	Anzahl der Eingriffsgrenzen (eine/zwei)
Urwert-/einspurige/zweispurige QRK	Lage und Streuung in einer Spur/Lage oder Streuung in einer Spur/Lage und Streuung in zwei Spuren
Univariate/multivariate QRK	Anzahl der Merkmale (eins/mehrere)
Einzelwert-/„Mehrwert-QRK“	Stichprobenumfang ($n = 1 / n > 1$)
QRK mit/ohne Gedächtnis	Berücksichtigung früherer Stichprobendaten (ja/nein)
Shewhart-/QRK für korrel. Daten	Abhängigkeit der Daten (nein/ja)
Shewhart-/Pearson-QRK	Verteilung (normal/schief)

Abb 2.4.3.4 Klassifikationen für Qualitätsregelkarten [Tho 01]

2.4.4 Prozeßregelung mit QRK

Damit ein Prozeß im Sinne des in Abb 2.4.4.1 dargestellten Regelkreises mit Überwachung durch QRK ablaufen kann, ist folgende Vorgehensweise zu empfehlen (siehe [Ekb 96]):

1. Prozeßanalyse

Die Prozeßanalyse nimmt eine Merkmalsbeurteilung vor und schaltet die erkennbaren systematischen Einflüsse aus.

2. Vorlauf

Der Prozeßvorlauf soll erste Aussagen über Prozeßfähigkeit und die Entscheidung zur

Verwendung einer QRK erbringen. Es sind mindestens 125 Meßwerte mit Stichproben vom Umfang $n \geq 3$ zu erfassen. Dabei werden Schätzwerte für Prozeßmittel $\hat{\mu}$ und Momentanstreuung $\hat{\sigma}$ angesetzt. Nach einer grafischen Beurteilung der Prozeßbeherrschung und Festlegung der Verteilungsform erfolgt Einrichtung der QRK.

3. QRK

Berechnen der Langzeitfähigkeitskenngrößen $\hat{\mu}$ und Eintragen $\hat{\sigma}$ der Eingriffsgrenzen in die QRK.

4. Stichproben

Entnahme von regelmäßigen Stichproben. Gebräuchlich ist beispielsweise ein Entnahmezyklus von 20 min bis 1h. Als Stichprobenumfang werden bei der \bar{x} -S-Karte fünf bis sieben Teile und bei der \bar{x} -R-Karte fünf Teile empfohlen.

5. Kennwerte

Die Stichproben werden ausgewertet, in die Qualitätsregelkarte eingetragen und die cp - sowie cp_k -Werte berechnet. Bei Feststellung systematischer Einflüsse ist der Prozeß zu stoppen. Die Einflüsse sind abzustellen. Unter Umständen müssen die Eingriffsgrenzen neu berechnet werden.

6. Interpretation von Merkmalsverläufen

Ein Verdacht auf systematische Störeinflüsse wird insbesondere durch folgende Prozeßverläufe bestätigt:

- Überschreitung der Grenzen(Eingriffs- oder Warngrenzen),
- Auftreten von Folgen(Run, Trend),
- Auftreten bekannter Sonderverläufe(Middle Third, Perioden).

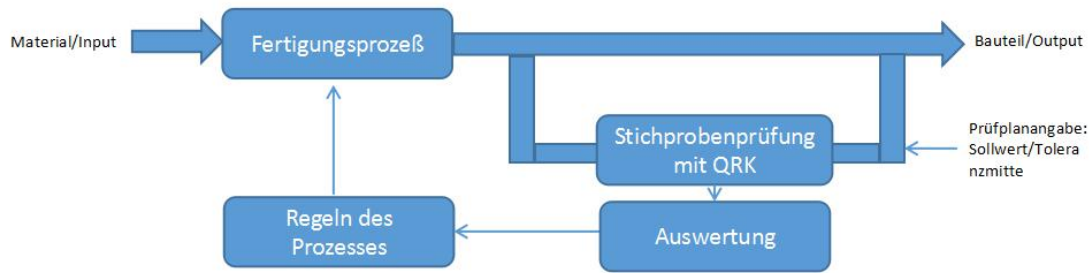


Abb 2.4.4.1 Analogie Regelkreis-SPC

2.5 Normalverteilung

Wenn eine stetige Zufallsvariable X die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern μ und σ^2 besitzt und gleichfalls die Wahrscheinlichkeitsdichte durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.5.1)$$

gegeben ist, dann bedeutet das, dass die Zufallsvariable X die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ besitzt. μ ist der Erwartungswert und σ^2 ist die Varianz. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist auch eine Schreibform der Normalverteilung.

Im Fall $\mu=0$ und $\sigma^2=1$ wird diese Verteilung Standardnormalverteilung genannt. Die

Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (2.5.2)

Die Begriffe Dichtefunktion und Verteilungsfunktion werden kurz vorgestellt. Sie sind beim der Formeln von Entscheidungsgrenzen nützlich.

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte über ein Intervall $[a,b]$ ergibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable mit dieser Dichte einen Wert zwischen a und b annimmt.

Die Dichtefunktion hat folgende drei Eigenschaften:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

3. $P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$

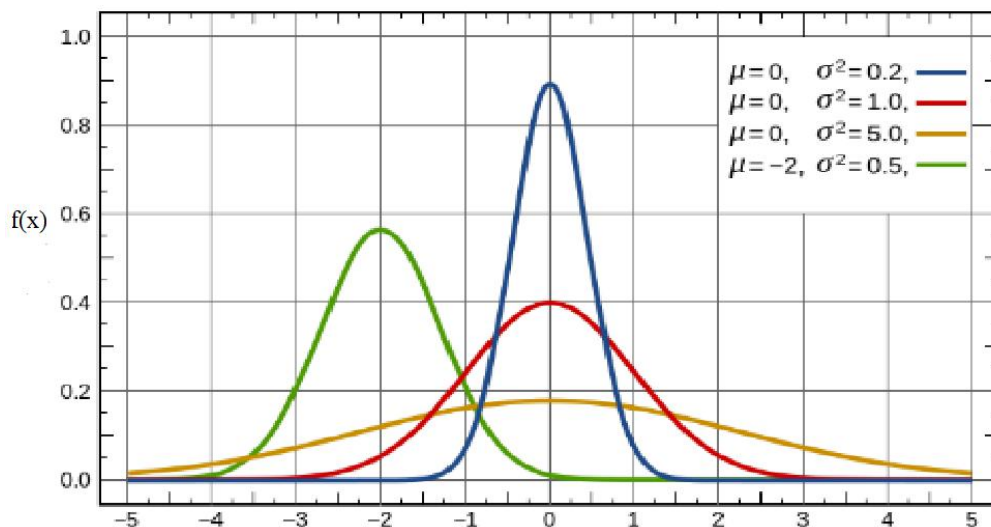


Abb.2.5.1 Dichtefunktion der Normalverteilungen [Wik]

Wie Abbildung 2.5.1 zeigt, wenn $x = \mu$ ist, ist $f(x)$ am größten. Je kleiner σ^2 ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass x in der Nähe von μ liegt. Die von den verschiedenen Linien und der x -Achse gebildeten Flächen sind immer gleich wie 1.

Eine (kumulative) Verteilungsfunktion (Abb.2.5.2) ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine reellwertige Funktion, mit der man die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer reellen Zufallsvariablen beschreiben kann.

Besitzt das Wahrscheinlichkeitsmaß eine Wahrscheinlichkeitsdichte f , so gilt

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx. \tag{2.5.3}$$

Somit hat in diesem Fall die Verteilungsfunktion die Darstellung

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx . \quad (2.5.4)$$

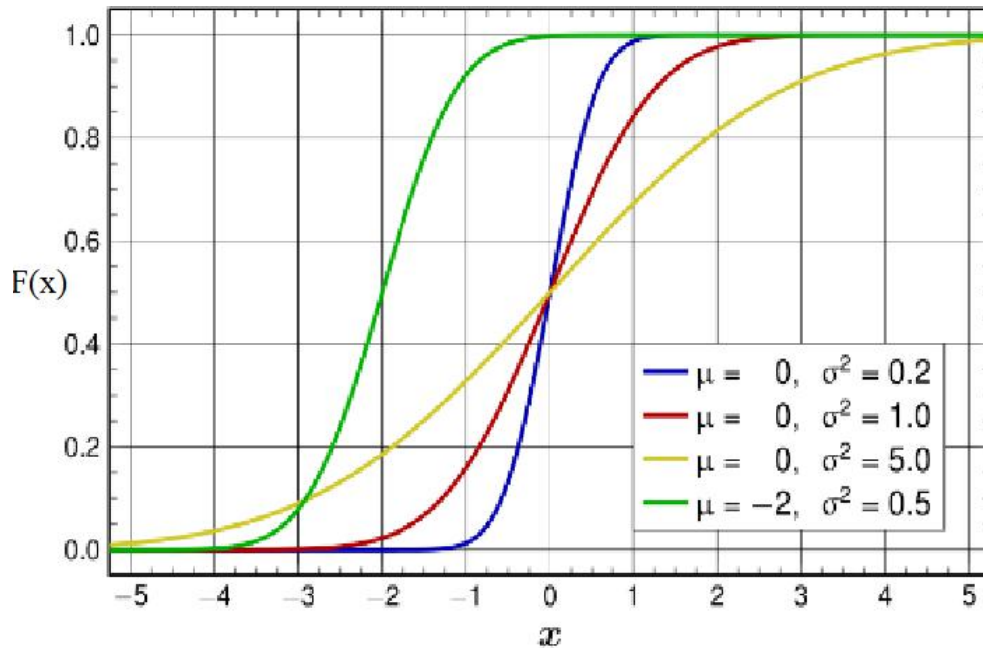


Abb.2.5.2 Verteilungsfunktion der Normalverteilungen [Wik]

Wie Abbildung 2.5.2 zeigt, für die Verteilungsfunktion gilt:

$0 \leq F(x) \leq 1$; $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. $F(x)$ ist eine wachsende Funktion.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist durch $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

gegeben.

Mit der Substitution $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ folgt:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (2.5.5)$$

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.5.6)$$

Weiter ist

$$P(x \in [a, b]) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (2.5.7)$$

2.6 Chi-Quadrat-Verteilung

Die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden beschreibt die Verteilung der Summe n stochastisch unabhängiger quadrierter standardnormalverteilter Zufallsvariablen:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi_n^2, \text{ mit } Z_k \sim N(0,1) \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Die Dichte f_n der χ_n^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden hat die Form:

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0;$$
$$f_n(x) = 0, \quad x \leq 0.$$

Dabei steht $\Gamma(r)$ für die Gammafunktion.

Der Erwartungswert der Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden ist

$$E(x_n^2) = n.$$

Die Varianz der Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden ist

$$D(x_n^2) = 2n.$$

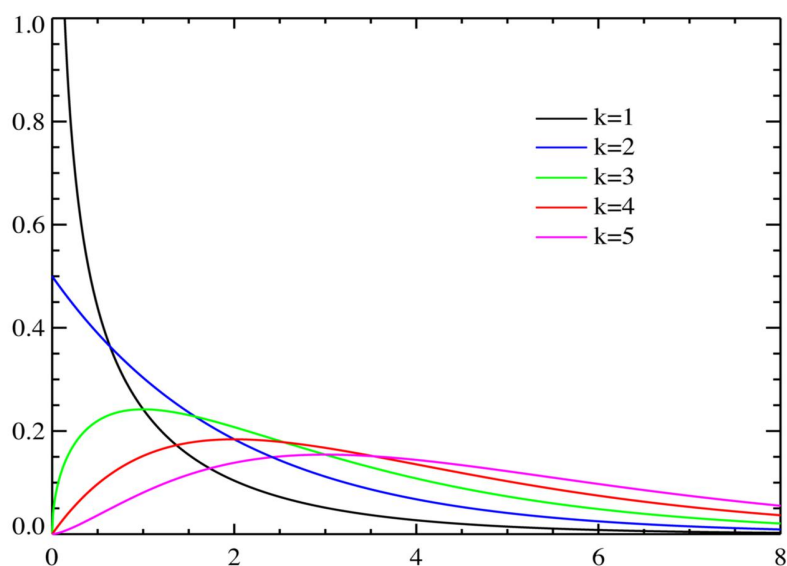


Abb.2.6.1 Dichtefunktion der Chi-Quadrat-Verteilung [Wik]

Wie Abbildung 2.6.1 zeigt, liegt die Chi-Quadrat-Verteilung immer im ersten Quadrant. Mit Zunahme des Wertes von n wird die Chi-Quadrat-Verteilung immer näher an der Normalverteilung sein und sich in Richtung der positive Unendlichkeit ausdehnen.

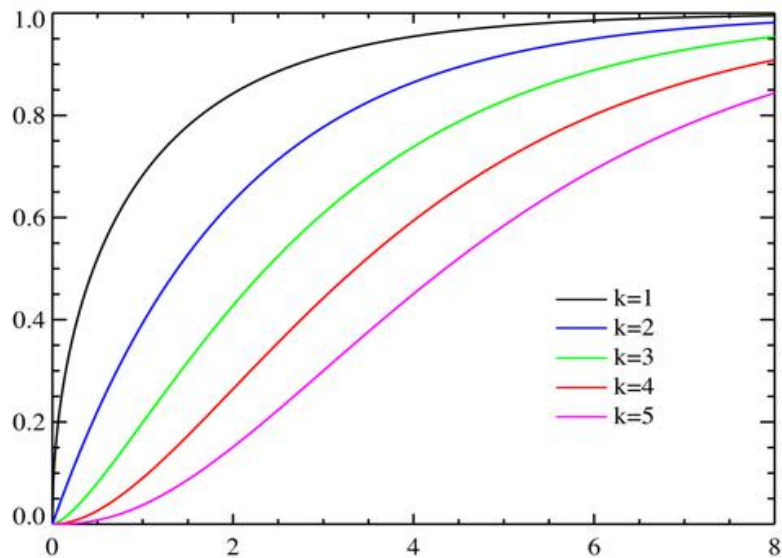


Abb.2.6.2 Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung [Wik]

Wie Abbildung 2.6.2 zeigt, sind die Eigenschaften ähnlich wie bei der Standardnormalverteilung:

Für die Verteilungsfunktion gilt: $0 \leq F(x) \leq 1$; $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

$F(x)$ ist eine wachsende Funktion.

2.7 Irrtumswahrscheinlichkeit und Quantil

Die Irrtumswahrscheinlichkeit bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit der im Rahmen eines „Hypothesentests“ die „Nullhypothese“ fälschlicherweise verworfen werden kann, obwohl sie eigentlich richtig ist. Es wird daher auch als Signifikanzniveau

bezeichnet. Die entsprechende Notation ist α . $1-\alpha$ bedeutet Konfidenzintervall, es zeigt die Zuverlässigkeit der Schätzung des Intervalls.

Wenn die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable X $F(x)$ und $p(x)$ sind, bezeichnet man X von $F(X)=p$ für jede p ($0 < p < 1$) als Quantil dieser Verteilung. Einfach gesagt ist ein Quantil ein Punkt in der Verteilungsfunktion. Eine Seite des Punktes entspricht der Wahrscheinlichkeit p .

2.8 Fehler 1. Art und Fehler 2. Art bei der Statistik

Beim Einsatz von Qualitätsregelkarten treten häufig zwei Fehlertypen auf (siehe Abb.2.8.1):

Realer Zustand	Entscheidung	Fehlertyp
Prozess ist unter Kontrolle, Hypothese H_0 gilt	Hypothese H_1 gilt	Fehler 1.Art, blinder Alarm
Prozess ist außer Kontrolle, Hypothese H_1 gilt	Hypothese H_0 gilt	Fehler 2.Art, unterlassener Alarm

Abb 2.8.1 zwei Fehlertypen bei der Anwendung der Qualitätsregelkarten [Wahl 13]

Ein blinder Alarm tritt auf, wenn der Prozess stabil läuft, in der Karte dennoch ein Wert außerhalb der Kontrollgrenzen liegt. Die (recht kleine) Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses Fehlers 1.Art entspricht dem Signifikanzniveau des zugehörigen Tests, welches Nutzer festlegt. Diese Fehler 1. Art führen dazu, dass man die Gründe

für nicht existierende Probleme vergebens sucht und sich die Kosten erhöhen.

Beim unterlassenen Alarm, dem Fehler 2. Art, ist der Prozess außer Kontrolle geraten, ein Alarm unterbleibt allerdings. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich allerdings praktisch nicht bestimmen, weil sie vom unbekanntem μ abhängt.

Für die Anwendung der Qualitätsregelkarte betrachtet man nur Fehler 1. Art. Für die „ 3σ -Regel“ ist die Wahrscheinlichkeit der Fehler 1. Art 0,3%. Es ist normalerweise nicht praktikabel, Verluste durch des Fehlers 2. Art sinnvoll zu schätzen.

3. Kontrollkarte für quantitative Merkmale

Im diesem Abschnitt wird über Kontrollkarten für quantitative Merkmale diskutiert und einige konkrete Beispiele analysiert. Diese Kontrollkarten stellen eine typische Anwendung für Qualitätsregelkarten im Rahmen der Prozess-Steuerung dar. Jede Kontrollkarte kann zwei verschiedene Situationen aufweisen:

- a) Standardabweichung ist bekannt;
- b) Standardabweichung ist unbekannt.

Kontrollkarten für quantitative Merkmale sind aus folgenden Gründen vorteilhaft:

- a) Die meisten Prozesse und ihre Output haben messbare Eigenschaften, so dass die Kontrollkarte für quantitative Merkmale viele Einsatzmöglichkeiten besitzt.
- b) Im Vergleich zum einfachen „Ja--Nein Entscheid“ besitzen eine quantitative Merkmale mehrere Informationen.
- c) Kontrollkarten spiegeln den Prozessverlauf wieder, und beschreiben die „Prozessfähigkeit“ bildlich.
- d) Die Prüfkosten für ein quantitatives Merkmal sind zwar normalweiser höher als die Kosten für eine „Ja--Nein“ Prüfung (qualitatives Merkmal). Die Untergruppe des quantitativen Merkmals ist aber immer viel kleiner als die Untergruppe des qualitativen Merkmals. Deshalb ist sie effektiver. Es führt manchmal dazu, dass die Gesamtmesskosten und die Zeitintervalle zwischen Teilefertigung und Korrekturmaßnahmen gesenkt werden.

Kontrollkarten für quantitative Merkmale können gleichzeitig den Dispersionsgrad (Variationen zwischen den Produkten) und die Position (normale Fall des Prozesses) den Prozess zu beschreiben. Aus diesem Grund benutzt man meistens paarige Kontrollkarten für quantitative Merkmale. Eine bezieht sich auf die Position und eine andere ist auf den Dispersionsgrad.

Um die Prozeßfähigkeit besser zu analysieren und die Genauigkeit der Qualitätsregelkarten zu erhöhen, kann man Warngrenzen und Eingriffsgrenzen paarig verwenden.

In nächsten Abschnitt wird ausführlich über die \bar{x} -Karte und S-Karte diskutiert. Durch Ableiten können mit Mathematica die Formeln und entsprechende Koeffizienten bewiesen werden.

3.1 \bar{x} -Karte

3.1.1 \bar{x} -Karte bei bekannter Standardabweichung

Die \bar{x} -Karte, auch Mittelwertkarte genannt, verwendet den Stichprobenmittelwert als Prüfvariable, also die Durchschnittszahl einer n-elementigen Stichprobe aus der laufenden Produktion.

Zunächst wird die Untergruppe j mit $X_{ji} \sim N(\mu, \sigma^2)$ für $i=1\dots n_j$ betrachtet. i ist die Nummer des Messwerts der jeweiligen Messung.

Der Sollwert μ_0 und die Standardabweichung σ werden für das zu betrachtende Qualitätsmerkmal als bekannt vorausgesetzt. Die Vorgehensweise zur Entscheidungsfindung bei der Mittelwertkarte entspricht der beim statistischen Test zur Hypothese.

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Die Nullhypothese H_0 ist bezüglich μ unter Kontrolle, H_1 ist bezüglich μ außer Kontrolle .

Bekanntermaßen gilt für die Mittelwerte:

$E(\bar{X}_j) = \mu$ --Erwartungswert, $D(\bar{X}_j) = \frac{\sigma^2}{n_j}$ --Varianz, und $\bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_i$ sind ebenso

wie die Messwerte x_i normalverteilt, also $\bar{X}_j \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n_j})$, je größer n_j ist, desto näher

liegt \bar{X}_j an μ . Mit der Standardisierungsvariablen $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ergibt sich die

Standardnormalverteilung $Z = \frac{\bar{X}_j - \mu}{\sigma} \sqrt{n_j} \sim N(0,1)$ mit dem

Erwartungswert $\mu = 0$ und der Standardabweichung $\sigma = 1$.

Bei $H_0: \mu = \mu_0$ ergibt sich :


$$P\left\{-x \leq \frac{\bar{X}_j - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n_j} \leq x\right\} = P\left\{\mu_0 - \frac{x\sigma}{\sqrt{n_j}} \leq \bar{X}_j \leq \mu_0 + \frac{x\sigma}{\sqrt{n_j}}\right\} = F\left(\mu_0 + \frac{x\sigma}{\sqrt{n_j}}\right) - F\left(\mu_0 - \frac{x\sigma}{\sqrt{n_j}}\right)$$

$$= \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1 \quad (3.1.1.1)$$

Hierbei ist Φ die Verteilungsfunktion(2.5.6) der Standardnormalverteilung.

Wenn in der oberen Formel die Wahrscheinlichkeit mit 0.95 festgelegt wird, erhält man mit Mathematica die so genannten Warngrenzen:

$$2\Phi(w) - 1 = 0.95 \Rightarrow w = 1.95996 \approx 1.96$$

 Berechnung der w der Warngrenzen.nb

(+)

$$Sc = \Phi[x_] := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \star \pi}} \star e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

```
Solve[2 Φ[w] - 1 = 0.95, w]
```

Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. »

```
{{w -> 1.95996}}
```

Abb.3.1.1.1 Berechnung w der Warngrenzen der Normalverteilung mit Mathematica

Bei Verwendung des Wertes w=2 beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$$2\Phi(w) - 1 = 0.9545$$

 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung.nb

(+)

$$Sc = \Phi[x_] := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \star \pi}} \star e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

```
w = 2
```

```
N[2 Φ[w] - 1]
```

```
2
```

```
0.9545
```

Abb.3.1.1.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung mit Mathematica

Für $\kappa = 3$ kann nun auf die so genannten Kontrollgrenzen oder Eingriffsgrenzen gefolgert werden. Die Wahrscheinlichkeit ist nun:

$$2\Phi(\kappa) - 1 = 0.9973$$

Damit tritt der blinde Alarm mit Wahrscheinlichkeit 0.0027 auf. Alternativ kann der Wert $\kappa = 2.576$ verwendet werden, dann ist

$$2\Phi(\kappa) - 1 = 0.990005 \approx 0.99$$

Der blinde Alarm tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.01 auf.

Nachfolgend werden unter Berücksichtigung der oberen Formeln (3.1) die Entscheidungsgrenzen, Lauf- und Entscheidungsregeln zur Mittelwertkarte zusammengefasst:

Vorgabewerte: $\mu_0, \sigma, \omega, \kappa$

Entscheidungsgrenzen:

$$\begin{aligned} W_u &= \mu_0 - \frac{\omega\sigma}{\sqrt{n_j}}, W_o = \mu_0 + \frac{\omega\sigma}{\sqrt{n_j}} \\ K_u &= \mu_0 - \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{n_j}}, K_o = \mu_0 + \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{n_j}} \end{aligned} \quad (3.1.1.2)$$

W_u : untere Warngrenze W_o : obere Warngrenze

K_u : untere Kontrollgrenze K_o : obere Kontrollgrenze

Für die Formeln (3.1.1.2) werden die Werte $\omega = 1.96$ und $\kappa = 3$ geschlagen.

Entscheidungsregel:

- Falls \bar{X}_j zwischen K_u und W_u oder K_o und W_o liegt, dann soll man das als eine Warnung ansehen.
- Falls \bar{X}_j zwischen K_u und K_o liegt, dann ist der Prozess für die Untergruppe j unter Kontrolle.
- Falls \bar{X}_j außerhalb der Eingriffsgrenzen K_u und K_o liegt, dann ist der Prozess für die Untergruppe j außer Kontrolle.

Laufregeln: Falls

- für zwei von drei aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j < W_u$ gilt oder für diese $\bar{X}_j > W_o$ gilt, bzw.

b) für vier von fünf aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n_j}}$ gilt oder für

diese $\bar{X}_j < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n_j}}$ gilt, bzw.

c) für acht aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j > \mu_0$ gilt oder für diese $\bar{X}_j < \mu_0$ gilt, dann wird signalisiert, dass der Prozess außer Kontrolle ist [Wal 13].

Zur besseren Veranschaulichung der spezifischen Eigenschaften der Mittelwertkarte und ihrem Prinzip wird nachfolgend ein konkretes Beispiel erläutert.

Beispiel: Verpackungsprozess von Tee.

Ein Produktionsleiter von einem Tee-Unternehmen hofft, dass durch die Steuerung des Verpackungsprozesses das durchschnittliche Gewichte jeder Tee-Packung 100.6g beträgt. Für einen ähnlichen Verpackungsprozess wurde eine Standardabweichung 1.4g ermittelt. Die folgende Tabelle zeigt die Durchschnittswerte \bar{X} von 25 Untergruppen. Pro Untergruppe wurden $n_j = 5$ Datenwerte erfasst.

j	\bar{X}	j	\bar{X}	j	\bar{X}	j	\bar{X}	j	\bar{X}
1	100.6	6	99.5	11	100.1	16	99.6	21	100.1
2	101.3	7	100.4	12	99.6	17	99.3	22	100.4
3	99.6	8	100.5	13	99.2	18	99.9	23	100.1
4	100.5	9	101.1	14	99.4	19	100.5	24	99.9
5	99.9	10	100.3	15	99.4	20	99.5	25	99.7

Abb.3.1.1.3 Daten der 25 Untergruppen

Die Standardwerte sind bekannt $\mu_0 = 100.6, \sigma = 1.4$. Für w und k werden folgende

Werte verwendet: $\omega = 1.96, \kappa = 3$. Durch die Formeln (3.1.1.2) können die entsprechenden Entscheidungsgrenzen berechnen werden.

$$\text{Mittelwert} = \mu_0$$

$$= 100.6 \text{g}$$

Kontrollgrenzen:

$$K_u = \mu_0 - \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{n_j}}$$

$$= 100.6 - \frac{3 \times 1.4}{\sqrt{5}}$$

$$= 98.7217 \text{g}$$

$$K_o = \mu_0 + \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{n_j}}$$

$$= 100.6 + \frac{3 \times 1.4}{\sqrt{5}}$$

$$= 102.478 \text{g}$$

Warngrenzen:

$$W_u = \mu_0 - \frac{\omega\sigma}{\sqrt{n_j}}$$

$$= 100.6 - \frac{1.96 \times 1.4}{\sqrt{5}}$$

$$= 99.3728 \text{g}$$

$$W_o = \mu_0 + \frac{\omega\sigma}{\sqrt{n_j}}$$

$$= 100.6 + \frac{1.96 \times 1.4}{\sqrt{5}}$$

$$= 101.827 \text{g}$$

Auf Grundlage dieser Wert kann in Mathematica nun die entsprechende Mittelwertkarte gezeichnet werden.

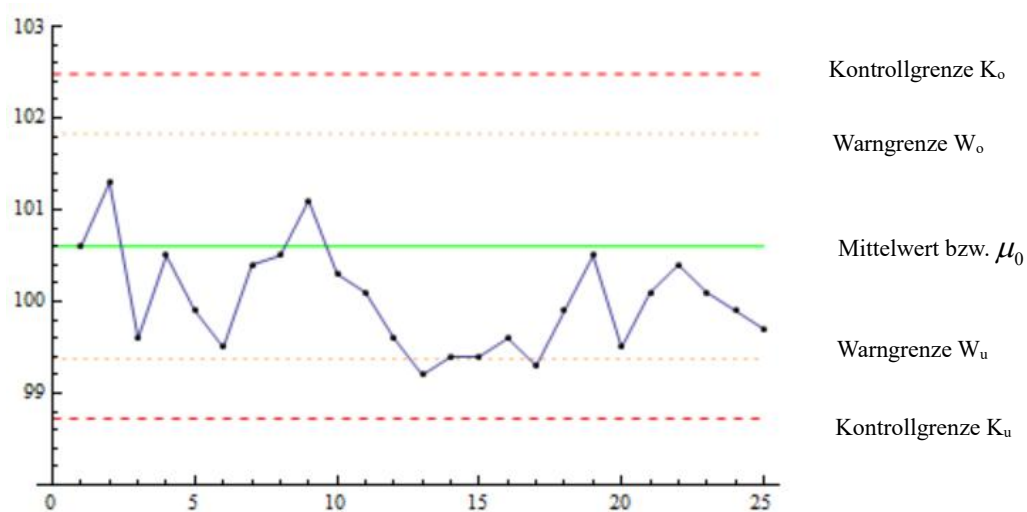


Abb.3.1.1.4 Mittelwertkarte für die Stichproben des Verpackungsprozesses (siehe Abbildung 3.1.1.3)

Nach der Laufregel c) kann man sofort feststellen, dass der Verpackungsprozess „außer Kontrolle“ ist, weil in der Mittelwertkarte für 16 aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j < \mu_0$ gilt. Im nächsten Schritt sind die Gründe, die die lange Sequenz niedriger Mittelwerte verursachen, zu ermitteln und zu beseitigen. Entsprechend den Maßnahmen welche im Abschnitt (2.4.1) vorgeschlagen wurden, kann man nun gezielte Entscheidungen treffen.

3.1.2 \bar{X} -Karte bei unbekannter Standardabweichung

In vielen Situationen ist die Standardabweichung σ nicht bekannt und muss durch einen Schätzer ersetzt werden.

Die Anwendung dieses Typs von Regelkarten erfolgt normalerweise in zwei Varianten (vgl. MONTGOMERY(2009),S.198):

Variante 1: Die Daten zum Qualitätsmerkmal werden für mehrere Blöcke gesammelt und im Nachhinein ausgewertet.

Variante 2: Die Werte des Qualitätsmerkmals werden online überwacht und die Entscheidungen hinsichtlich der Qualität der Produkte werden unmittelbar getroffen.

Für Variante 1 kann man nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{X}} &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \bar{X}_j, \text{ oder alternativ } \bar{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}, \quad n = \sum_{j=1}^T n_j, \\ \bar{S} &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T S_j, \text{ oder alternativ } \bar{S}^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_{ji} - \bar{X}_j \right)^2} \end{aligned} \quad (3.1.2.1)$$

die entsprechende Schätzwerte berechnen.

Für Variante 2 verwendet man für die Schätzung:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \bar{X}_i, \quad \bar{S}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j S_i \quad (3.1.2.2)$$

Man berücksichtigt, dass \bar{S} und \bar{S}_j keine erwartungstreuen Schätzer für σ sind und die Standardabweichungen S der χ^2 -Verteilung unterliegen. Die Parameter wird dann wie $\sigma = \frac{\bar{S}_j}{a_j}$ geschätzt.

Die nachstehende Abbildung gibt einige Werte für a_j an.

j	2	3	4	5	6	7	8
a_j	0.79788	0.88623	0.92132	0.93999	0.95153	0.95937	0.96503
j	9	10	15	20	40	100	200
a_j	0.96931	0.97266	0.98232	0.98693	0.99361	0.99748	0.99874

Abb.3.1.2.1 a_j [Wal 13]

Man ersetzt die Größe σ durch $a_j^{-1} \bar{S}_j$ in den Formeln (3.2). Damit kann man die resultierenden Entscheidungs- und Laufregeln für die Mittelwertkarte bei unbekannter Standardabweichung zusammenfassen (Empfehlung: $\omega=1.96$ $\kappa=3$).

Entscheidungsgrenzen:

$$W_u = \mu_0 - \frac{\omega \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}, W_o = \mu_0 + \frac{\omega \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}} \quad (3.1.2.3)$$

$$K_u = \mu_0 - \frac{\kappa \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}, K_o = \mu_0 + \frac{\kappa \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}$$

W_u : untere Warngrenze

W_o : obere Warngrenze

K_u : untere Kontrollgrenze

K_o : obere Kontrollgrenze

Entscheidungsregel: a) Falls \bar{X}_j zwischen K_u und W_u oder K_o und K_o liegt, dann soll man das als eine Warnung für die Untergruppe j ansehen.

b) Falls \bar{X}_j zwischen K_u und K_o liegt, dann ist der Prozess für die Untergruppe j bezüglich μ unter Kontrolle.

c) Falls \bar{X}_j außerhalb von K_u und K_o liegt, dann ist der Prozess für die Untergruppe j außer Kontrolle.

Laufregeln: Falls

a) für zwei von drei aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j < W_u$ gilt oder für diese $\bar{X}_j > W_o$ gilt, oder

b) für vier von fünf aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j > \mu_0 + \frac{\bar{S}_j}{\bar{a}_j \sqrt{n_j}}$ gilt oder

für diese $\bar{X}_j < \mu_0 - \frac{\bar{S}_j}{\bar{a}_j \sqrt{n_j}}$ gilt, oder

c) für acht aufeinander folgende Untergruppen $\bar{X}_j > \mu_0$ gilt oder für diese $\bar{X}_j < \mu_0$ gilt, dann wird signalisiert, dass der Prozess außer Kontrolle ist [Wal 13].

Auch soll ein konkretes Beispiel zur Mittelwertkarte bei unbekannter Standardabweichung erläutert werden. Die Tabelle im Anh.1 enthält die Messungen des inneren Durchmessers in mm bei der Produktion von Kolbenringen für Fahrzeugmotoren. Die Stichproben bezogen auf 30.

Hier ist $n=5$ und $a_5=0.93999$. Auch hier werden die Werte: $\omega = 1.96, \kappa = 3$ verwendet.

Der Sollwert ist $\mu_0=74$ und unter Nutzung der Formeln nach (3.1.2.2) und (3.1.2.3) wurde die Abbildung 3.1.2.2 erstellt.

μ_0	$\bar{\bar{X}}_j$	\bar{S}_j	W_u	K_u	W_o	K_o
74	74.0011	0.0094	73.9912	73.9866	74.0088	74.0134

Abb.3.1.2.2 Relevante Werte für das Beispiel Kolbenringe aus Anh. 1

Durchschnittswerte der

Durchschnittswerte der

Mittelwerte der Untergruppen:

Standardabweichungen der Untergruppen:

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \bar{X}_i$$

$$= 74.0011 \text{ mm}$$

$$\bar{S}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j S_i$$

$$= 0.0094 \text{ mm}$$

Kontrollgrenzen:

$$K_u = \mu_0 - \frac{\kappa \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}$$

$$= 74 - \frac{3 \times 0.0094}{0.93999 \times \sqrt{5}}$$

$$= 73.9866 \text{ mm}$$

$$K_o = \mu_0 + \frac{\kappa \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}$$

$$= 74 + \frac{3 \times 0.0094}{0.93999 \times \sqrt{5}}$$

$$= 74.0134 \text{ mm}$$

Warngrenzen:

$$W_u = \mu_0 - \frac{\omega \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}$$

$$= 74 - \frac{1.96 \times 0.0094}{0.93999 \times \sqrt{5}}$$

$$= 73.9912 \text{ mm}$$

$$W_o = \mu_0 + \frac{\omega \bar{S}_j}{a_j \sqrt{n_j}}$$

$$= 74 + \frac{1.96 \times 0.0094}{0.93999 \times \sqrt{5}}$$

$$= 74.0088 \text{ mm}$$

In Mathematica wurde die entsprechende Mittelwertkarte gezeichnet (Abb.3.1.2.3).



Abb.3.1.2.3 \bar{x} -Karte aus Beispiel in Anh.1

Durch die Beobachtung kann man feststellen, dass dieser Produktionprozess von Kolbenringen für Fahrzeugmotoren nach den Laufregeln nun unter Kontrolle ist. Aber muss man auch beachten, dass für Untergruppen 1,14,20 und 26 vier Warnungen ausgegeben werden.

3.2 S-Karte

Die S-Karte stellt dazu ein Hilfsmittel zur Überwachung der Prozessvariabilität die durch die Standardabweichung dar. Die Überwachung der Prozessvariabilität ist neben der Überwachung der Prozesslage auch eine wichtige Aufgabe der Prozesskontrolle, weil größer werdende Schwankungen des Qualitätsmerkmals (z.B. beim locker sitzenden Werkzeug) auch eine Ursache unerwünschter Störungen im Prozess sein können. Die Vorgehensweise bei der S-Karte entspricht dem statistischen Test zur Hypothese.

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

wobei σ^2 ein vorgegebener Wert für die Varianz ist.

Wir betrachten die Untergruppe j mit $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$. Selbstverständlich ergibt

$\frac{X_j - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (Standardnormalverteilung). Nach der Definition

der Chi-Quadrat-Verteilung „Wenn X_j Standardnormalverteilung besitzt, besitzt X_j^2 Chi-Quadrat-Verteilung“ kann man feststellen:

$$\sum \frac{(X_j - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_j}^2 \quad (3.2.1)$$

$$S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \times \sum (X_j - \bar{X})^2, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n_j} \times \sum (X_j - \mu)^2 \quad (3.2.2)$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} (n_j - 1) \times \frac{S_j^2}{\sigma^2} &= \left[(n_j - 1) \times \frac{1}{n_j - 1} \times \sum (X_j - \bar{X})^2 \right] / \sigma^2 \\ &= \sum (X_j - \bar{X})^2 / \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Im Vergleich zu der Formel (3.2.1) ist das Probenmittel in der Formel (3.2.3) \bar{X} und der entsprechende Freiheitsgrad $n_j - 1$. Wenn man μ in der Formel (3.2.1) durch \bar{X} ersetzt, sollte n_j auch entsprechend durch $n_j - 1$ ersetzt werden. Dann ergibt sich:

$$\frac{(n_j - 1) S_j^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_j - 1}^2 \quad (3.2.4)$$

Gesucht wird nun ein (Konfidenz-)Intervall $(0, a]$, in dem S_j mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ liegt (wie Abb.3.2.1). Dafür erhält man:

$$P\{S_j \leq a\} = P\left\{ \frac{(n_j - 1) S_j^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n_j - 1) a^2}{\sigma^2} \right\} = 1 - \alpha \quad (3.2.5)$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$\frac{(n_j - 1)a^2}{\sigma^2} = \chi_{n_j - 1; 1 - \alpha}^2 \quad (3.2.6)$$

Daraus folgt das Intervall $(0, a]$ mit

$$a = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{n_j - 1; 1 - \alpha}^2}{n_j - 1}} \quad (3.2.7)$$

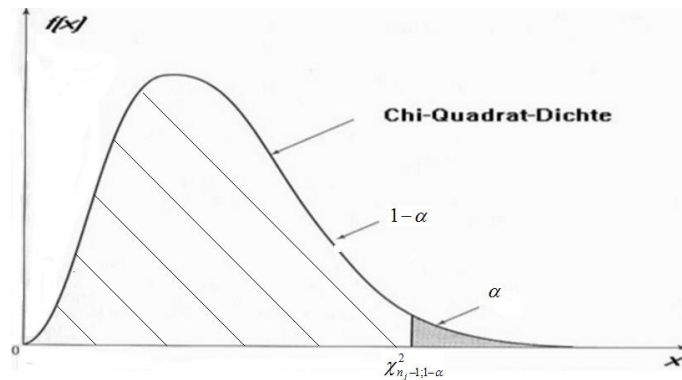


Abb.3.2.1 Chi-Quadrat-Dichte

Weil kleine Varianzen nicht stören und keinen Hinweis auf unerwünschte Veränderungen geben, kann man einfach einseitige Grenzen durch zweiseitige Grenzen ersetzen. Wenn diese Standardabweichung unbekannt ist, dann wird der Schätzer, wie oben beschrieben verwendet: σ_0 wird durch $a_j^{-1} \bar{S}_j$ oder wenn eine Untersuchung mit T Untergruppen vorangegangen ist, durch $a_T^{-1} \bar{S}$ ersetzt.

Nun kann man die Entscheidungsgrenzen mit den Vorgabewerten $\sigma_0, \alpha_W, \alpha_K$ feststellen

Entscheidungsgrenzen:

$$W_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n_j - 1; 1 - \alpha_W}^2}{n_j - 1}}, K_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{n_j - 1; 1 - \alpha_K}^2}{n_j - 1}} \quad (3.2.8)$$

Als Vorgabewerte werden hier vorgeschlagen: $\alpha_w=0.05$ für die Warngrenzen und $\alpha_K=0.0027$ für die Kontrollgrenzen. Anhand Abb.2.4.4 ist ersichtlich, dass unter Berücksichtigung von Kontrollgrenzen $\alpha_w=0.05$ und $\alpha_K=0.0027$ die Warngrenzen und Kontrollgrenzen den Bereichen wie in der Mittelwertkarte, d.h. $\mu \pm 1.96\sigma$ und $\mu \pm 3\sigma$ entsprechen.

Zusammenfassend gelten folgende über Entscheidungsregeln für die S-Karte:

Entscheidungsregel:

Gilt $W_o < S_j < K_o$, dann wird eine Warnung für die Untergruppe j ausgegeben.

Gilt $S_j \leq K_o$, dann signalisiert die Karte, dass der Prozess bezüglich der Standardabweichung für die Untergruppe j unter Kontrolle, anderenfalls außer Kontrolle ist.

Nachfolgend wird das Beispiel zu den Kolbenringen aus Anhang A weiter betrachtet.

Weil σ_0 unbekannt ist, wird σ_0 durch $a_j^{-1}\bar{S}_j$ ersetzt. Als Vorgabewerte werden $\alpha_w=0.05$ und $\alpha_K=0.0027$ verwendet.

$$\bar{S}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j S_i = 0.0094 \text{ mm.}$$

$$a_j^{-1}\bar{S}_j = \frac{1}{0.93999} \times 0.0094 = 0.01 \text{ mm}$$

Durch den Befehl CHIINV(Wahrscheinlichkeit, Freiheitsgrad) in Excel kann

$\chi_{4;1-\alpha_w}^2 = 9.4877$, $\chi_{4;1-\alpha_K}^2 = 16.2512$ berechnet werden.

A1		fx	=CHIINV(0.05, 4)		
	A	B	C	D	E
1	9.487729037				

Abb.3.2.2 Berechnung von $\chi_{4;1-\alpha_W}^2$ mit Excel

B1		fx	=CHIINV(0.0027, 4)		
	A	B	C	D	E
1		16.25117115			

Abb.3.2.3 Berechnung von $\chi_{4;1-\alpha_K}^2$ mit Excel

Alternativ kann man auch durch die folgenden Programme in Mathematica zu diesen Ergebnissen bekommen (siehe Abb.3.2.4).

```
xw = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.95]
9.48773

xk = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.9973]
16.2512
```

Abb.3.2.4 Berechnung von $\chi_{4;1-\alpha_W}^2$ und $\chi_{4;1-\alpha_K}^2$ mit Mathematica

Die Kontrollgrenzen können nach den Formeln (3.2.8) ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
 W_0 &= a_j^{-1} \bar{S}_j \sqrt{\frac{x_{n_j-1;1-\alpha_W}^2}{n_j-1}} & K_o &= a_j^{-1} \bar{S}_j \sqrt{\frac{x_{n_j-1;1-\alpha_K}^2}{n_j-1}} \\
 &= 0.01 * \sqrt{\frac{9.4877}{5-1}} & &= 0.01 * \sqrt{\frac{16.2512}{5-1}} \\
 &= 0.0154 & &= 0.0202
 \end{aligned}$$

In Mathematica kann nun man die entsprechende S-karte gezeichnet werden.

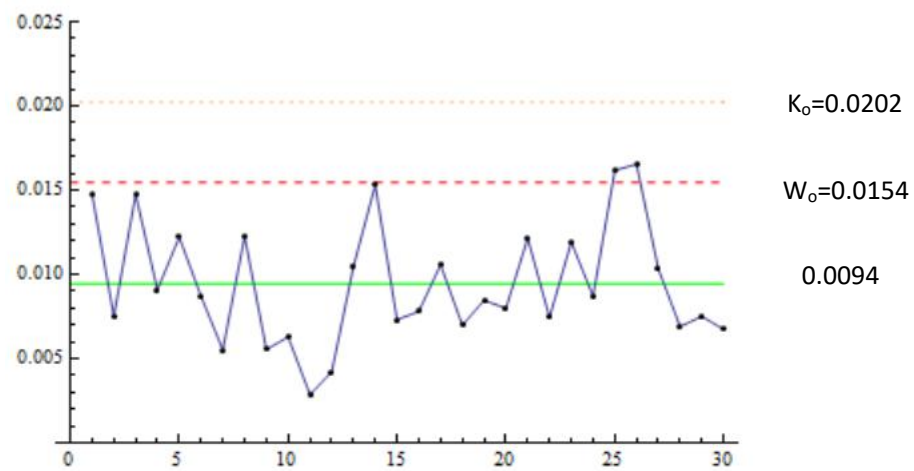


Abb.3.2.5 Diagramm zur S-Karte für das Beispiel Kolbenringe aus Anh.1

Anhand dieses Diagramms kann man feststellen, dass für die Untergruppen 14, 25 und 26 drei Warnungen ausgegeben werden. Im wesentlichen ist der Prozess bezüglich der Standardabweichung aber unter Kontrolle ist.

4 Kontrollkarte für qualitative Merkmale

Ein qualitatives Merkmal ist ein Merkmal, das nur zwei Werte annimmt: das Produkt genügt den vorgegebenen Qualitätsanforderungen oder es genügt ihm nicht. Nur diese Information geht für jedes geprüfte Teil in die Berechnung ein. Wichtig ist hier, dass die Bedingungen dafür, dass ein Produkt qualitätsgerecht ist, genau zu definieren sind. Bei einigen Typen von Produkten werden Sichtkontrollen durchgeführt z.B. bei der Bewertung der Qualität von Glas für Flaschen oder der Qualität von Stoff für Kleidungsstücke. Es kann auch ein stetiges Qualitätsmerkmal herangezogen werden um zu entscheiden, ob ein Produkt qualitätsgerecht ist oder nicht. Der Datenwert des stetigen Merkmals wird dann aber nicht erfasst.

4.1 p-Karte

Mit p wird der Anteil der defekten Teile in der Grundgesamtheit bezeichnet. Die Größe entspricht der Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl ein defektes Produkt zu finden. Der geschätzte Anteil defekter Teile in der i -ten Untergruppe beträgt:

$$\hat{p}_i = \frac{h_i}{n_i} \quad (i = 1, \dots, T) \quad (4.1.1)$$

wobei h_i hier die Anzahl der fehlerhaften Teile in der Untergruppe i und n_i die Anzahl der geprüften Teile ist.

Die p -Karte stellt nun den zeitlichen Verlauf der Werte \hat{p}_i einschließlich der Warn- und Kontrollgrenzen grafisch dar. h_i besitzt eine Binomialverteilung mit den Parametern n_i und p , also:

$$P\{h_i = x\} = \binom{n_i}{x} p^x (1-p)^{n_i-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n_i \quad (4.1.2)$$

mit:

$$\binom{n_i}{x} = \frac{n_i!}{x!(n_i - x)!} \quad (4.1.3)$$

Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist:

$$E(h_i) = \sum_{x=0}^{n_i} x \binom{n_i}{x} p^x (1-p)^{n_i-x} = n_i p \quad (4.1.4)$$

Die Varianz der Binomialverteilung ist:

$$D(h_i) = \sum_{x=0}^{n_i} [x - E(h_i)]^2 \binom{n_i}{x} p^x (1-p)^{n_i-x} = n_i p (1-p) \quad (4.1.5)$$

Mit $\hat{p}_i = \frac{h_i}{n_i}$ ergibt sich:

$$P\left\{\hat{p} \leq a\right\} = P\left\{\frac{h_i}{n_i} \leq a\right\} = P\{h_i \leq n_i a\} = \sum_{x=0}^{n_i a} \binom{n_i}{x} p^x (1-p)^{n_i-x} \quad (4.1.6)$$

$$\mu_p = E\left(\hat{p}\right) = E\left(\frac{h_i}{n_i}\right) = \frac{1}{n_i} E(h_i) = \frac{1}{n_i} n_i p = p \quad (4.1.7)$$

$$\sigma_p^2 = D\left(\hat{p}\right) = D\left(\frac{h_i}{n_i}\right) = \frac{1}{n_i^2} D(h_i) = \frac{1}{n_i^2} n_i p (1-p) = \frac{p(1-p)}{n_i} \quad (4.1.8)$$

Wenn n_i groß genug ist, kann man hier einer Approximation durch eine Normalverteilung verwenden, also:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\frac{h_i}{n_i} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}} = \frac{h_i - n_i p}{\sqrt{n_i p(1-p)}} \sim N(0,1) \quad (4.1.9)$$

Wenn $n_i \geq 25$ ist, ist die Approximation nutzbar. Damit erhält man:

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{h_i - n_i p}{\sqrt{n_i p(1-p)}} \leq x\right\} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} P\left\{\frac{h_i}{n_i} \leq p + x \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}\right\} = \Phi(x) \quad (4.1.10)$$

für $i = 1 \dots T$.

Mit dieser Beziehung können die Warn- und Kontrollgrenzen, wie im Kapitel 3, bestimmt werden. Hier sind einseitige Kontrollkarten zu bevorzugen, da kleine

Fehlerhäufigkeiten eher günstig für den Anwender sind und nicht zu Fehlermeldungen der Karte führen sollten.

Die Vorgehensweise bei der p-Karte entspricht dem Prüfen der Hypothese

$$H_0 : p \leq p_0, H_1 : p > p_0,$$

wobei p_0 der vorzugebende Maximalanteil von Ausschussteilen ist.

Wenn p_0 unbekannt ist, kann es für die Entscheidung zur Untergruppe $j > 1$ durch den Schätzer \bar{p}_j ersetzt werden:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^j h_i, \quad \bar{n}_j = \sum_{i=1}^j n_i. \quad (4.1.11)$$

wobei \bar{n}_j die Gesamtanzahl der kontrollierten Teile bis zur Untergruppe j ist. Man kann auch $\bar{p} = \bar{p}_T$ aus einer vorangegangenen Analyse anstelle von p_0 verwenden.

Zur Ermittlung der Warn- und Kontrollgrenzen sind in der Folge die entsprechenden Irrtumswahrscheinlichkeiten α_W und α_K zu bestimmen. Empfohlen werden hier: $\alpha_W = 0.05$, $\alpha_K = 0.0027$.

Durch den Befehl „=NORMSINV(1- α)“ in Excel können die α_W und α_K entsprechenden Quantile der Standard-Normalverteilung berechnet werden:

$$\omega = z_{1-\alpha_W} = 1.64485, \quad \kappa = z_{1-\alpha_K} = 2.78215.$$

A1		fx	=NORMSINV(1-0.05)		
	A	B	C	D	E
1	1.644853627				

Abb.4.1.1 Berechnung des Quantils für α_W

B1		fx	=NORMSINV(1-0.0027)		
	A	B	C	D	E
1		2.782150454			

Abb.4.1.2 Berechnung des Quantils für α_K

Auch mit Mathematica können die Quantile der Standard-Normalverteilung sehr bequem berechnet werden.

```
Quantile.nb
+
Quantile[NormalDistribution[0, 1], 0.95]
1.64485
Quantile[NormalDistribution[0, 1], 0.9973]
2.78215
```

Abb.4.1.3 Berechnung der Quantile für α_W und α_K

Es folgt Zusammenfassung für das Verfahren der p-Karte.

Vorgabewerte: ω, κ, p_0 .

Entscheidungsgrenzen:

$$W_o = p_0 + \omega \sqrt{\frac{1}{n} p_0(1-p_0)}, \quad K_o = p_0 + \kappa \sqrt{\frac{1}{n} p_0(1-p_0)} \quad (4.1.12)$$

Entscheidungsregel: Gilt $W_o < \hat{p}_j < K_o$, dann wird eine Warnung für die Untergruppe j ausgegeben. Gilt $\hat{p}_j \leq K_o$, dann signalisiert die Karte, dass der Prozess für die Untergruppe j unter Kontrolle, anderenfalls außer Kontrolle ist.

Die konkrete Anwendung der p-Karte wird im folgenden Beispiel erklärt.

Ein Hersteller verwendet p-Karte, um Rasenmäher zu kontrollieren. Dieses Unternehmen nimmt 40 Stichproben pro Tag. Die Anzahl der gefundenen, fehlerhafte Produkte je Tag sind in der Abb.4.1.4 zusammengestellt.

Tag	Anzahl fehlerhafter Produkte	\hat{p}_j
1	5	0.125
2	2	0.05
3	0	0
4	1	0.025
5	2	0.05
6	1	0.025
7	0	0
8	8	0.2
9	0	0
10	1	0.025

Abb.4.1.4 Datenaufzeichnung- Beispiel Rasenmäher (40 Stichproben pro Tag)

Auf Basis dieser Daten wurden nach den Formeln (4.1.11) und (4.1.12) die Entscheidungsgrenzen unter Verwendung von $\omega = 1.64485$ und $\kappa = 2.78215$ berechnet:

$$\bar{p}_j = p_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^j n_i} \sum_{i=1}^j h_i = \frac{5+2+0+1+2+1+0+8+0+1}{10 \times 40} = 0.05$$

$$\omega_o = p_0 + \omega \sqrt{\frac{1}{n} p_0 (1 - p_0)}$$

$$= 0.05 + 1.64485 \times \sqrt{\frac{1}{40} 0.05 \times (1 - 0.05)}$$

$$= 0.10668$$

$$\kappa_o = p_0 + \kappa \sqrt{\frac{1}{n} p_0 (1 - p_0)}$$

$$= 0.05 + 2.78215 \times \sqrt{\frac{1}{40} 0.05 \times (1 - 0.05)}$$

$$= 0.14587$$

Durch das Quantil der Binomialverteilung kann auch die Genauigkeit von ω und κ überprüft werden. Die Quantile der Binomialverteilung lassen sich bequem mit Mathematica berechnen.

Für dieses Beispiel entnehmen wir $\bar{p}_j = p_0 = 0.05$ und $n = 40$. Dann können wir mit dem Befehl „Quantile[BinomialDistribution[n,p], 1- α]” die Quantile der Binomialverteilung berechnen.



The screenshot shows a Mathematica notebook titled "Quantile der Binomialverteilung.nb". It contains two code cells. The first cell has the code `Quantile[BinomialDistribution[40, 0.05], 1 - 0.05]` and the result `4`. The second cell has the code `Quantile[BinomialDistribution[40, 0.05], 1 - 0.0027]` and the result `7`.

Abb.4.1.5 Berechnung der Quantile der Binomialverteilung

Aus der Formel (4.1.6) können wir entnehmen: $n_i a = Q$, $a = \frac{Q}{n_i}$. Dabei ist hier

$n_i = 40$. Es gilt: $a = \frac{Q}{n_i} = \frac{4}{40} = 0.1$, $a = \frac{Q}{n_i} = \frac{7}{40} = 0.175$. In Bezug auf die

berechneten Ergebnisse von $\omega_o = 0.10668$ und $\kappa_o = 0.14587$ kann festgestellt werden, dass die Ergebnisse für Warngrenze und Kontrollgrenze befriedigend sind. Die Abweichung von ω_o kann man vernachlässigen. Weil wir $\kappa_o = 0.14587$ zur Bestimmung der Kontrollgrenzen benutzen, wird die Genauigkeit der Kontrollgrenzen in diesem Fall erhöht.

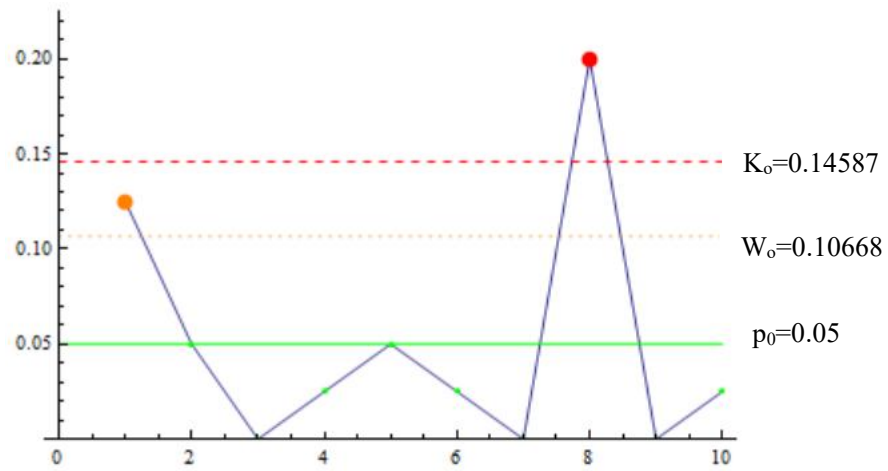


Abb.4.1.6 Die p-Karte für das Beispiel Rasenmäher

Anhand des Kurvenverlaufs (Abb.4.1.6) kann festgestellt werden, dass das Ergebnis von Tag 8 im Bereich „außer Kontrolle“ liegt.

5 Nutzung von Mathematica

Mathematica ist ein kommerzielles Softwarepaket des Unternehmens Wolfram Research und stellt eines der meistbenutzten mathematisch-naturwissenschaftlichen Programmpakete dar. Der Autor und Unternehmensbegründer Stephen Wolfram begann die Entwicklungsarbeit im Jahre 1986, die erste Version von Mathematica wurde 1988 herausgebracht.

Mathematica ist weit in den Bereichen Wissenschaft, Ingenieurwissenschaften, Mathematik, Informatik usw. verwendet. Die Benutzung des Programmes erfolgt in der Regel durch das Notebook, welches die Ein/Ausgabe formatiert darstellt. Das Notebook verfügt außerdem über Funktionen einer Textverarbeitung und erlaubt das Darstellen und Manipulieren von Grafiken. Ein besonderes Merkmal ist auch die umfangreiche Unterstützung mathematischer Sonderzeichen, die in Mathematica (im Gegensatz zu klassischen Programmiersprachen) an jeder Stelle (auch als Variablenamen) genutzt werden können. Hier wird einige einfache Verfahren erzählt, mit den kann man die die bekannte Datei entsprechende Kontrollkarte durch Mathematica darstellen.


5.1 Berechnung von Quantile und Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung

Im Kapitel 3 wurden bei der Anleitung der Entscheidungsgrenzen die Quantile der Normalverteilung mit Mathematica berechnet. Die entsprechenden Schritten sind:

1.Öffnen von Mathematica und „a new notebook create“.(File→New→Notebook)

2.Definieren von $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}}$ mit dem Befehl „Sc“ und drucken

von „shift+Enter“ zur Eingabe.

 Berechnung der Quantile der Normalverteilung.nb *

$$Sc = \Phi[x_] := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \star \pi}} \star e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Abb.5.1.1 der Befehl „Sc“

3. Eingabe der Wahrscheinlichkeit in die Formel (3.1.1.1), z.B 0.95. Lösen der Formel (Ursprung von Formel (2.5.7)) durch Verwendung des Befehls „Solve“ mit „Shift +Enter“.

Achtung:

In Mathematica bedeutet das Symbol „=“, dass den Variablen Werte zuzuweisen sind. Hier wird das Symbol „==“ verwendet, dass logische Gleichheit bedeutet. Damit das Programm zu laufen beginnt wird die Kombination von „shift+Enter“ verwendet.

 Berechnung der Quantile der Normalverteilung.nb

+

$$Sc = \Phi[x_] := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \star \pi}} \star e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

```
Solve[2 Φ[w] - 1 == 0.95, w]
```

Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some

solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

```
{{w -> 1.95996}}
```

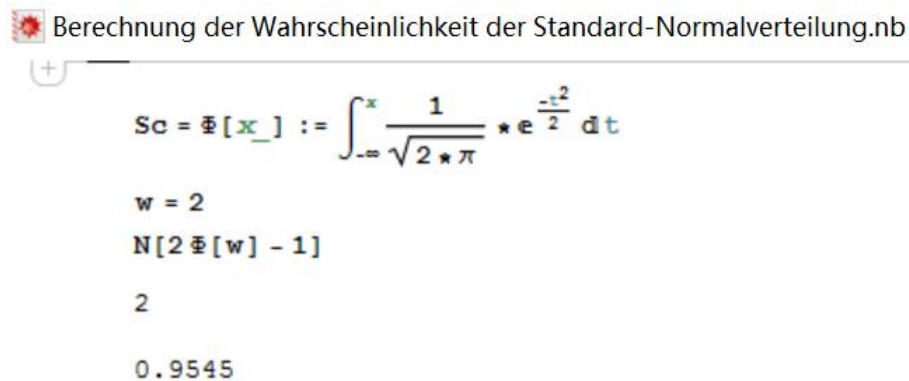
Abb.5.1.2 die Berechnung von „w“

4.Sofort erhält man das Ergebnis:

```
{{w -> 1.95996}}
```

Abb.5.1.3 die Ergebnis von „w“

Mit den gegebenen Quantilen kann man auch die Wahrscheinlichkeit berechnen. Der Befehl „N[]“ (siehe Abb.5.1.4) hat die Aufgabe, die Ergebnisse in Form numerischer Werte auszugeben.



Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung.nb

$$Sc = \Phi[x_] := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

w = 2
N[2 Φ [w] - 1]
2
0.9545

Abb.5.1.4 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung

5.2 Erstellung von Kontrollkarten mit Mathematica

5.2.1 die \bar{x} -Karte bei unbekannter Standardabweichung

In Mathematica können auch die Kontrollkarte gezeichnet werden. Jetzt werden die Schritte der Zeichnung von Kontrollkarte beschrieben. Grundlage ist wieder das Beispiel aus dem Anhang A mit der MittelwerteKarte mit unbekannter Standardabweichung, das relativ kompliziert und repräsentativ ist. Hier wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie man die Daten in Mathematica in einer bestimmten Form eingeben kann. Dieser Schritt ist die Voraussetzung vor allem. Weil die Daten des Beispiels aus dem Anhang A in Excel-Format vorliegen mussten diese wieder

in „txt“ umgewandelt werden. Nach Öffnen von Mathematica mit dem Befehl „Readlist“ können die txt-Daten in Mathematica automatisch eingelesen werden. Wie Abb.5.2.1 zeigt, soll man hier die Adresse der Daten im Computer in Klammern angeben.

```

daten = ReadList["C:\daten.txt", Number, RecordLists -> True]

{{1, 74.03}, {1, 74.002}, {1, 74.019}, {1, 73.992}, {1, 74.008}, {2, 73.995}, {2, 73.992}, {2, 74.001}, {2, 74.011}, {2, 74.004}, {3, 73.988},
{3, 74.024}, {3, 74.021}, {3, 74.005}, {3, 74.002}, {4, 74.002}, {4, 73.996}, {4, 73.993}, {4, 74.015}, {4, 74.009}, {5, 73.992},
{5, 74.007}, {5, 74.015}, {5, 73.989}, {5, 74.014}, {6, 74.009}, {6, 73.994}, {6, 73.997}, {6, 73.985}, {6, 73.993}, {7, 73.995},
{7, 74.006}, {7, 73.994}, {7, 74}, {7, 74.005}, {8, 73.985}, {8, 74.003}, {8, 73.993}, {8, 74.015}, {8, 73.988}, {9, 74.008},
{9, 73.995}, {9, 74.009}, {9, 74.005}, {9, 74.004}, {10, 73.998}, {10, 74}, {10, 73.99}, {10, 74.007}, {10, 73.995}, {11, 73.994},
{11, 73.998}, {11, 73.994}, {11, 73.995}, {11, 73.99}, {12, 74.004}, {12, 74}, {12, 74.007}, {12, 74}, {12, 73.996}, {13, 73.983},
{13, 74.002}, {13, 73.998}, {13, 73.997}, {13, 74.012}, {14, 74.006}, {14, 73.967}, {14, 73.994}, {14, 74}, {14, 73.984}, {15, 74.012},
{15, 74.014}, {15, 73.998}, {15, 73.999}, {15, 74.007}, {16, 74}, {16, 73.984}, {16, 74.005}, {16, 73.998}, {16, 73.996}, {17, 73.994},
{17, 74.012}, {17, 73.986}, {17, 74.005}, {17, 74.007}, {18, 74.006}, {18, 74.01}, {18, 74.018}, {18, 74.003}, {18, 74}, {19, 73.984},
{19, 74.002}, {19, 74.003}, {19, 74.005}, {19, 73.997}, {20, 74}, {20, 74.01}, {20, 74.013}, {20, 74.02}, {20, 74.003}, {21, 73.982},
{21, 74.001}, {21, 74.015}, {21, 74.005}, {21, 73.996}, {22, 74.004}, {22, 73.999}, {22, 73.999}, {22, 74.006}, {22, 74.009},
{23, 74.01}, {23, 73.989}, {23, 73.99}, {23, 74.009}, {23, 74.014}, {24, 74.015}, {24, 74.008}, {24, 73.993}, {24, 74}, {24, 74.01},
{25, 73.982}, {25, 73.984}, {25, 73.995}, {25, 74.017}, {25, 74.013}, {26, 74.012}, {26, 74.015}, {26, 74.03}, {26, 73.986}, {26, 74},
{27, 73.995}, {27, 74.01}, {27, 73.99}, {27, 74.015}, {27, 74.001}, {28, 73.987}, {28, 73.999}, {28, 73.985}, {28, 74}, {28, 73.99},
{29, 74.008}, {29, 74.01}, {29, 74.003}, {29, 73.991}, {29, 74.006}, {30, 74.003}, {30, 74}, {30, 74.001}, {30, 73.986}, {30, 73.997}}

```

Abb.5.2.1. 1 Eingabe der Daten

Man kann mit dem Befehl „Mean“ die Durchschnittswerte der Untergruppen und mit dem Befehl „StandardDeviation“ die Standardabweichungen der Untergruppen in Mathematica berechnen. Weil jede Untergruppe aus 5 Messwerten besteht, soll man mit dem Befehl „Partition“ die Daten in nicht überlappende Teillisten der Länge 5 verteilen. Außerdem soll man mit dem Befehl „Last“ das letzte Element jeder Liste extrahieren, da das erste Element in der Liste die Nummer der Untergruppe bedeutet.

```

μ0 = Mean[{Mean@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]]
{74.0011}

Sj = Mean[{StandardDeviation@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]]
{0.00943346}

```

Abb.5.2.1. 2 Berechnung der Durchschnittswerte und Standardabweichungen

Hier werden die Formeln (3.1.2.2) und (3.1.2.3) zur Berechnung der Kontrollgrenzen und Warngrenzen verwendet. Man soll hier die Formeln und benötigten Werte eingeben.

```
n = 5
aj = 0.93999
ω = 1.96
κ = 3
Wu = μ0 - ω * Sj / (aj * Sqrt[5])
Wo = μ0 + ω * Sj / (aj * Sqrt[5])
Ku = μ0 - κ * Sj / (aj * Sqrt[5])
Ko = μ0 + κ * Sj / (aj * Sqrt[5])

5
0.93999
1.96
3
{73.9923}
{74.0099}
{73.9876}
{74.0146}
```

Abb.5.2.1. 3 Berechnung der Entscheidungsgrenze

Mit den berechneten Ergebnissen kann man die Entscheidungsgrenzen bilden. Wie das folgende Bild zeigt, bedeutet der Befehl „Plot[f,{x,x_{min},x_{max}}]“: Erzeuge eine Funktion f von x aus $[x, \min]$ bis $[x, \max]$. Mit dem Befehl „PlotStyle“ kann man die spezifischen Formen der Objekte stellen. Der Befehl „PlotRange“ ist eine Option für die Grafikfunktionen, welcher Koordinatenbereich in einer Funktion angegeben wird.

```
p1 = Plot[{Ku, Wu,  $\mu$ 0, Wo, Ko}, {x, 0, 30}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}, {Dotted, Orange}, {Dashed, Red}},
PlotRange -> {73.98, 74.02}]
```

Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >

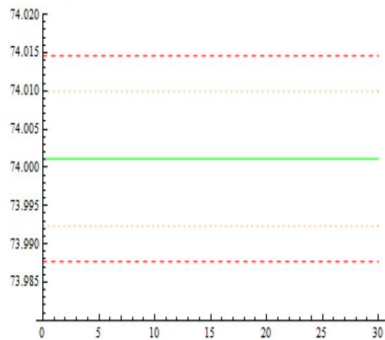


Abb.5.2.1. 4 Entstehung der Entscheidungsgrenze

Der in der folgenden Abbildung 5.2.8 verwendete Befehl „Transpose“ dient dazu, dass alle einzelnen Teillisten in einer gesamten Liste vereinigt werden (wie Abb.5.2.9 zeigt). ListLinePlot[... , Mesh->All, MeshStyle->Black] hat die Funktion, zugrunde liegenden Datenpunkte mit schwarzer Farbe anzuzeigen .

```
p2 = ListLinePlot[Transpose[{{Mean@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]}], Mesh -> All, MeshStyle -> Black, PlotRange -> {73.98, 74.02}]
```

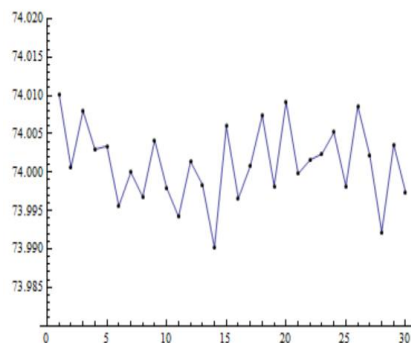


Abb.5.2.1. 5 Linie der verbundenen Datenpunkte

```

{Mean@#} & /@Partition[Last /@ daten, 5]
{{74.0102}, {74.0006}, {74.008}, {74.003}, {74.0034}, {73.9956},
{74.}, {73.9968}, {74.0042}, {73.998}, {73.9942}, {74.0014},
{73.9984}, {73.9902}, {74.006}, {73.9966}, {74.0008}, {74.0074},
{73.9982}, {74.0092}, {73.9998}, {74.0016}, {74.0024}, {74.0052},
{73.9982}, {74.0086}, {74.0022}, {73.9922}, {74.0036}, {73.9974}}

Transpose[{Mean@#} & /@Partition[Last /@ daten, 5]]
{{74.0102, 74.0006, 74.008, 74.003, 74.0034, 73.9956, 74., 73.9968,
74.0042, 73.998, 73.9942, 74.0014, 73.9984, 73.9902, 74.006, 73.9966,
74.0008, 74.0074, 73.9982, 74.0092, 73.9998, 74.0016, 74.0024,
74.0052, 73.9982, 74.0086, 74.0022, 73.9922, 74.0036, 73.9974}}

```

Abb.5.2.1. 6 Funktion des Befehls „Transpose“

Nach Zusammensetzung der berechneten Ergebnisse erhält man die vollendete Mittelwertkarte (Abb.5.2.1.7) bei unbekannter Standardabweichung.

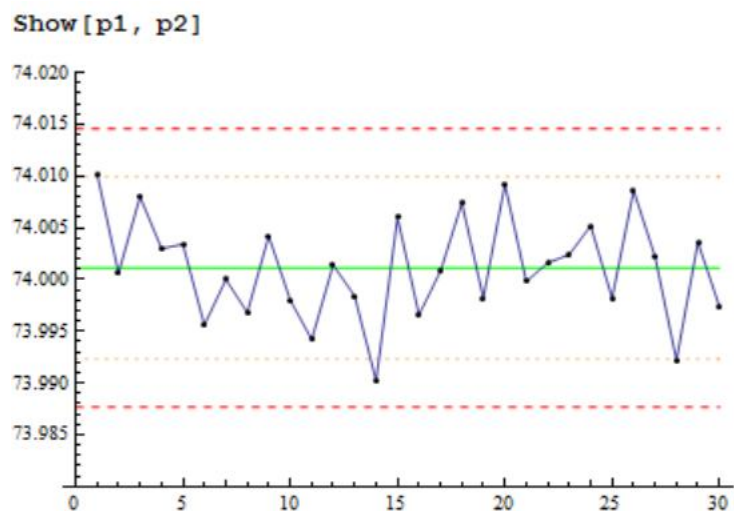


Abb.5.2.1. 7 Vollendende Mittelwertkarte bei unbekannter Standardabweichung

5.2.2 S-Karte

Um die Entscheidungsgrenze der S-Karte zu bestimmen, muss man die Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung bestimmen. In Mathematica kann man mit dem

Befehl „Quantile“ die benötigte Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung sofort berechnen.

```
xw = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.95]
9.48773

xk = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.9973]
16.2512
```

Abb.5.2.2. 1 Berechnung von x_w und x_k durch Mathematica

Man gibt nach den Formeln (3.2.8) die benötigte Werte in Mathematica ein und die Zahlenwerte für die Entscheidungsgrenze der S-Karte werden berechnet. S_j wird mit dem gleichen Verfahren wie in Abb.5.2.1.2 berechnet.

```
aj = 0.93999
nj = 5
Wo = Sj / aj * Sqrt[xw / (nj - 1)]
Ko = Sj / aj * Sqrt[xk / (nj - 1)]

0.93999

5

{0.0154561}

{0.0202283}
```

Abb.5.2.2. 2 Berechnung von Entscheidungsgrenzen durch Mathematica
für die S-Karte

Mit der gleichen Verfahren wie in Abb.5.2.1.4 und Abb.5.2.1.5 gezeigt ist das Diagramm der Linie der verbundene Datenpunkte für die s-Karte und das Diagramm der Entscheidungsgrenze in Mathematica darzustellen. Man braucht sich nur für den passenden Koordinatenbereich zu entscheiden.

```
p1 = Plot[{Wo, Ko, Sj}, {x, 0, 30}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}},
PlotRange -> {0, 0.025}]
```

Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>

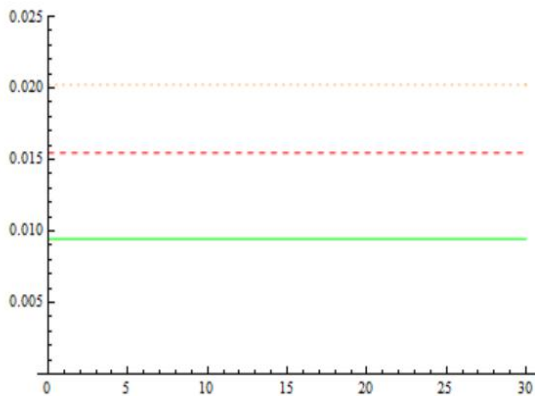


Abb.5.2.2. 3 Entstehung der Entscheidungsgrenze

```
p2 = ListLinePlot[Transpose[{StandardDeviation@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]], Mesh -> All, MeshStyle -> Black, PlotRange -> {0, 0.025}]
```

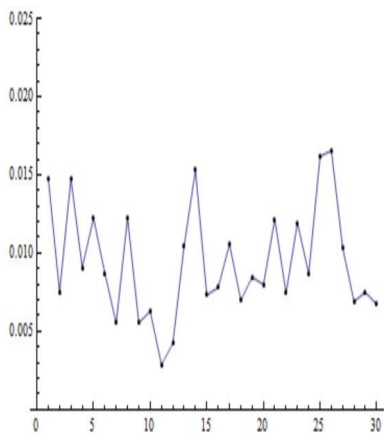


Abb.5.2.2. 4 Linie der verbundenen Datenpunkte

Schließlich setzt man wieder die alle Bilder von oben zusammen und erhält die vollendete S-Karte.

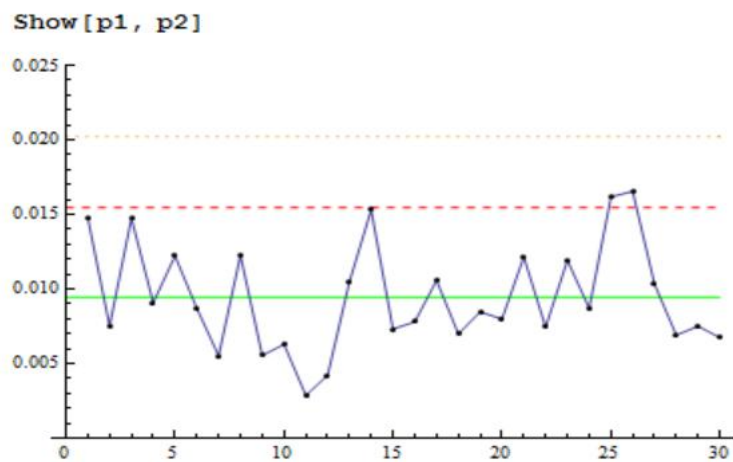


Abb.5.2.2. 5 Vollendete S-Karte

5.2.3 p-karte

Um die Daten für p-Karte in Mathematica einzugeben, kann man gleichfalls die in Abb.5.2.1 gezeigten Verfahren zur Eingabe der Daten verwenden.

 p Karte.nb *

```
daten = ReadList["C:\p-Karte.txt", Number, RecordLists -> True]
{{1, 0.1}, {2, 0.075}, {3, 0}, {4, 0.025}, {5, 0.05}, {6, 0.025}, {7, 0}, {8, 0.2}, {9, 0}, {10, 0.025}}
```

Abb.5.2.3. 1 Eingabe der Daten

Mit den Formeln (4.1.12) und berechneten Quantilen in Abb.4.1.3 kann man die entsprechenden Zahlenwerte für die Warngrenze und Kontrollgrenze durch Mathematica berechnen.

```
p0 = Mean[{Mean@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 2]]
n = 40
omega = 1.64485
kappa = 2.78215
Wo = p0 + omega * Sqrt[1 / n * p0 * (1 - p0)]
Ko = p0 + kappa * Sqrt[1 / n * p0 * (1 - p0)]
{0.05}
40
1.64485
2.78215
```

Abb.5.2.3. 2 Berechnung von Entscheidungsgrenze

Mit der gleichen Verfahren wie in Abb.5.2.1.4 und Abb.5.2.1.5 ist das Diagramm der Linie der verbundene Datenpunkte für die p-Karte und das Diagramm der Entscheidungsgrenze in Mathematica darzustellen. Hier kann man auch mit „Grün, Orange, Rot“ die in verschiedenen Gebieten liegenden Punkte bezeichnen, damit die Punkte in der Kontrollkarte anschaulich zu sehen sind.

```
p1 = ListLinePlot[{daten}, Mesh → All, MeshStyle → Green, PlotRange → {0, 0.225}]
```

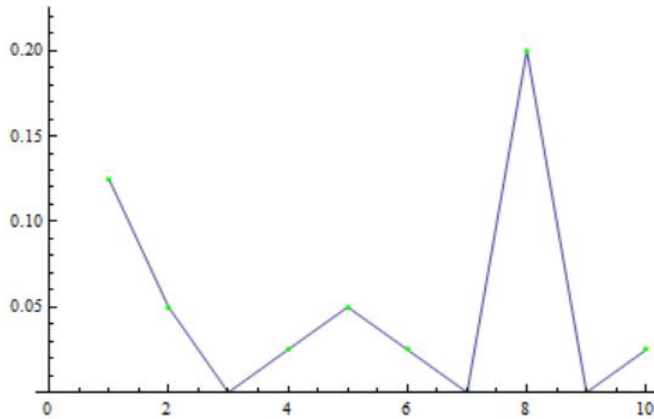


Abb.5.2.3. 3 Linie der verbundenen Datenpunkte

```
p2 = Plot[{Ko, Wo, p0}, {x, 0, 10}, PlotStyle → {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}}, PlotRange → {0, 0.225}]
```

Graphics::gprim : Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>

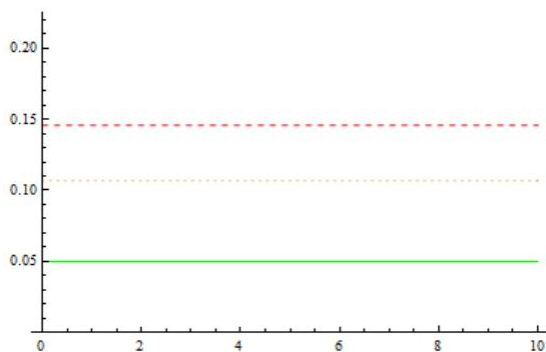


Abb.5.2.3. 4 Entscheidungsgrenzen

Um die Punkte, die „außer Kontrolle“ sind, in der Kontrollkarte besonders zu kennzeichnen, kann man zuerst mit dem in der folgenden Abbildung 5.2.3.5 gezeigten Befehl diese „defekten“ Punkte in Mathematica auswählen. Weiterhin kann man noch mit den Befehlen „AbsolutePointSize“ und „Graphics“ (siehe Abbildung 5.2.3.6) die Farbe und Größe der „defekten“ Punkte verändern. Die Nummer in der Klammer entspricht den verschiedenen Größen der Punkte.

```
points = Select[daten, #[[2]] > First@Ko &]
{{8, 0.2}}
```

Abb.5.2.3. 5 Auswahl der defekte Punkte

```
p3 = Graphics[{Red, {AbsolutePointSize[8], Point[{points}]}}]
```



Abb.5.2.3. 6 Veränderung der Farbe und Größe der defekten Punkte

In ähnlicher Weise kann man auch die zwischen K_o und W_o liegende Punkte auswählen und mit oranger Farbe kennzeichnen.

Schließlich setzt man wieder die alle oben erstellten Bilder zusammen und erhält die vollendete p-Karte.

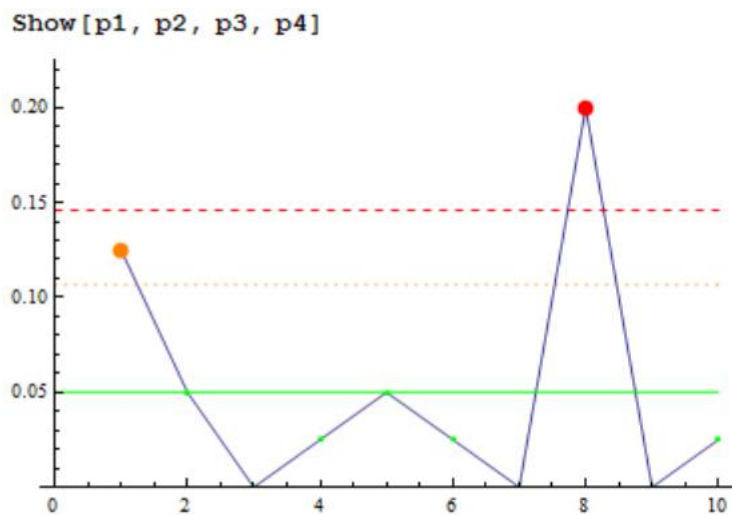


Abb.5.2.3. 7 Vollendete p-Karte

6 Zusammenfassung

Die Hauptziel meiner Bachelorarbeit bestand darin, das Wissen zu verschiedenen Kontrollkarten zusammenzutragen und am eigenen Laptop Dateien aus der Praxis zu analysieren um daraus Kontrollkarten in Mathematica erstellen zu können.

In meiner Bachelorarbeit werden zuerst der Ursprung, die Arten, die Funktion und die Verwendung der Kontrollkarte(Qualitätsregelkarte) als Grundlagen vorgestellt. Dabei wurden besonders für die \bar{x} -Karte bei bekannter Standardabweichung, die \bar{x} -Karte bei unbekannter Standardabweichung, die s-Karte und für die p-Karte die statistischen Grundlagen, und die Ableitung der wichtigen Formeln für Entscheidungsgrenzen hervorgehoben. Schließlich wurden anhand verschiedener Beispiele aus der Praxis die Programme in Mathematica für diese vier verschiedenen Kontrollkarte dargestellt.

Zukünftig ist es empfehlenswert auch noch für weitere Typen von Kontrollkarten Programme in Mathematica zu erstellen.

Anhang

Anh.1:Durchmesser der Kolbenringe

Quelle: Montgomery: Statistical Quality Control (2009), Beispiel 6-4, S. 256.

Messungen des inneren Durchmessers in mm, Variable durchm, bei der Produktion von Kolbenringen für Fahrzeugmotoren.

Die Variable stichpr gibt die Nummer der Stichprobe an.

stichpr	durchm	stichpr	durchm	stichpr	durchm	stichpr	durchm	stichpr	durchm	stichpr	durchm
1	74.03	6	74.009	11	73.994	16	74	21	73.982	26	74.012
1	74.002	6	73.994	11	73.998	16	73.984	21	74.001	26	74.015
1	74.019	6	73.997	11	73.994	16	74.005	21	74.015	26	74.03
1	73.992	6	73.985	11	73.995	16	73.998	21	74.005	26	73.986
1	74.008	6	73.993	11	73.99	16	73.996	21	73.996	26	74
2	73.995	7	73.995	12	74.004	17	73.994	22	74.004	27	73.995
2	73.992	7	74.006	12	74	17	74.012	22	73.999	27	74.01
2	74.001	7	73.994	12	74.007	17	73.986	22	73.99	27	73.99
2	74.011	7	74	12	74	17	74.005	22	74.006	27	74.015
2	74.004	7	74.005	12	73.996	17	74.007	22	74.009	27	74.001
3	73.988	8	73.985	13	73.983	18	74.006	23	74.01	28	73.987
3	74.024	8	74.003	13	74.002	18	74.01	23	73.989	28	73.999
3	74.021	8	73.993	13	73.998	18	74.018	23	73.99	28	73.985
3	74.005	8	74.015	13	73.997	18	74.003	23	74.009	28	74
3	74.002	8	73.988	13	74.012	18	74	23	74.014	28	73.99
4	74.002	9	74.008	14	74.006	19	73.984	24	74.015	29	74.008
4	73.996	9	73.995	14	73.967	19	74.002	24	74.008	29	74.01
4	73.993	9	74.009	14	73.994	19	74.003	24	73.993	29	74.003
4	74.015	9	74.005	14	74	19	74.005	24	74	29	73.991
4	74.009	9	74.004	14	73.984	19	73.997	24	74.01	29	74.006
5	73.992	10	73.998	15	74.012	20	74	25	73.982	30	74.003
5	74.007	10	74	15	74.014	20	74.01	25	73.984	30	74
5	74.015	10	73.99	15	73.998	20	74.013	25	73.995	30	74.001
5	73.989	10	74.007	15	73.999	20	74.02	25	74.017	30	73.986
5	74.014	10	73.995	15	74.007	20	74.003	25	74.013	30	73.997

Anh.2: Programm in Mathematica

Berechnung der Wahrscheinlichkeit

 Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung.nb



$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$


w = 2

N[2 Φ[w] - 1]

2

0.9545

Berechnung der Quantil

 Quantile.nb



Quantile[NormalDistribution[0, 1], 0.95]

1.64485

Quantile[NormalDistribution[0, 1], 0.9973]

2.78215

xw = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.95]

9.48773

xk = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.9973]

16.2512

\bar{X} -Karte bei bekannter Standardabweichung

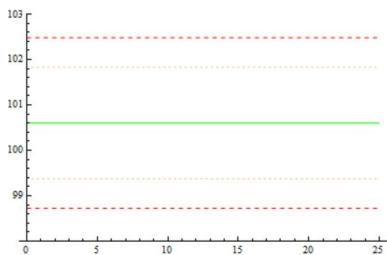
```
daten = ReadList["C:\Daten für Mittelwertkarte bei bekannter Standardabweichung.txt", Number, RecordLists -> True]
{{1, 100.6}, {2, 101.3}, {3, 99.6}, {4, 100.5}, {5, 99.9}, {6, 99.5}, {7, 100.4}, {8, 100.5},
 {9, 101.1}, {10, 100.3}, {11, 100.1}, {12, 99.6}, {13, 99.2}, {14, 99.4}, {15, 99.4}, {16, 99.6}, {17, 99.3},
 {18, 99.9}, {19, 100.5}, {20, 99.5}, {21, 100.1}, {22, 100.4}, {23, 100.1}, {24, 99.9}, {25, 99.7}}
```

```
 $\sigma = 1.4$ 
 $\mu_0 = 100.6$ 
 $\omega = 1.96$ 
 $\kappa = 3$ 
 $n_j = 5$ 
 $Wu = \mu_0 - \omega \cdot \sigma / \text{Sqrt}[n_j]$ 
 $Wo = \mu_0 + \omega \cdot \sigma / \text{Sqrt}[n_j]$ 
 $Ku = \mu_0 - \kappa \cdot \sigma / \text{Sqrt}[n_j]$ 
 $Ko = \mu_0 + \kappa \cdot \sigma / \text{Sqrt}[n_j]$ 
```

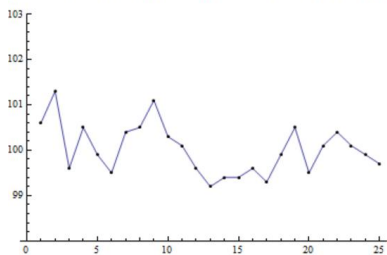
```
1.4
100.6
1.96
3
5
99.3728
101.827
98.7217
102.478
```

```
p1 = Plot[{Ku, Wu,  $\mu_0$ , Wo, Ko}, {x, 0, 25}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}, {Dotted, Orange}, {Dashed, Red}},
 PlotRange -> {98, 103}]
```

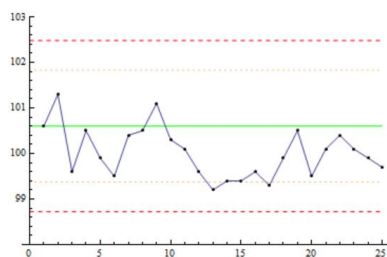
Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>



```
p2 = ListLinePlot[daten, Mesh -> All, MeshStyle -> Black, PlotRange -> {98, 103}]
```



```
Show[p1, p2]
```



\bar{x} -Karte bei unbekannter Standardabweichung

```

daten = ReadList["C:\Mittelwertkarte.txt", Number, RecordLists -> True]

{{1, 74.03}, {1, 74.002}, {1, 74.019}, {1, 73.992}, {1, 74.008}, {2, 73.995}, {2, 73.992}, {2, 74.001}, {2, 74.011}, {2, 74.004}, {3, 73.988},
{3, 74.024}, {3, 74.021}, {3, 74.005}, {3, 74.002}, {4, 74.002}, {4, 73.996}, {4, 73.993}, {4, 74.015}, {4, 74.009}, {5, 73.992},
{5, 74.007}, {5, 74.015}, {5, 73.989}, {5, 74.014}, {6, 74.009}, {6, 73.994}, {6, 73.997}, {6, 73.985}, {6, 73.993}, {7, 73.995},
{7, 74.006}, {7, 73.994}, {7, 74}, {7, 74.005}, {8, 73.985}, {8, 74.003}, {8, 73.993}, {8, 74.015}, {8, 73.988}, {9, 74.008},
{9, 73.995}, {9, 74.009}, {9, 74.005}, {9, 74.004}, {10, 73.998}, {10, 74}, {10, 73.99}, {10, 74.007}, {10, 73.995}, {11, 73.994},
{11, 73.998}, {11, 73.994}, {11, 73.995}, {11, 73.99}, {12, 74.004}, {12, 74}, {12, 74.007}, {12, 74}, {12, 73.996}, {13, 73.983},
{13, 74.002}, {13, 73.998}, {13, 73.997}, {13, 74.012}, {14, 74.006}, {14, 73.967}, {14, 73.994}, {14, 74}, {14, 73.984}, {15, 74.012},
{15, 74.014}, {15, 73.998}, {15, 73.999}, {15, 74.007}, {16, 74}, {16, 73.984}, {16, 74.005}, {16, 73.998}, {16, 73.996}, {17, 73.994},
{17, 74.012}, {17, 73.986}, {17, 74.005}, {17, 74.007}, {18, 74.006}, {18, 74.01}, {18, 74.018}, {18, 74.003}, {18, 74}, {19, 73.984},
{19, 74.002}, {19, 74.003}, {19, 74.005}, {19, 73.997}, {20, 74}, {20, 74.01}, {20, 74.013}, {20, 74.02}, {20, 74.003}, {21, 73.982},
{21, 74.001}, {21, 74.015}, {21, 74.005}, {21, 73.996}, {22, 74.004}, {22, 73.999}, {22, 73.99}, {22, 74.006}, {22, 74.009},
{23, 74.01}, {23, 73.989}, {23, 73.99}, {23, 74.009}, {23, 74.014}, {24, 74.015}, {24, 74.008}, {24, 73.993}, {24, 74}, {24, 74.01},
{25, 73.982}, {25, 73.984}, {25, 73.995}, {25, 74.017}, {25, 74.013}, {26, 74.012}, {26, 74.015}, {26, 74.03}, {26, 73.986}, {26, 74},
{27, 73.995}, {27, 74.01}, {27, 73.99}, {27, 74.015}, {27, 74.001}, {28, 73.987}, {28, 73.999}, {28, 73.985}, {28, 74}, {28, 73.99},
{29, 74.008}, {29, 74.01}, {29, 74.003}, {29, 73.991}, {29, 74.006}, {30, 74.003}, {30, 74}, {30, 74.001}, {30, 73.986}, {30, 73.997}}

mu0 = Mean[Mean@#] & /@ Partition[Last /@ daten, 5]
{74.0011}

Sj = Mean[StandardDeviation@#] & /@ Partition[Last /@ daten, 5]
{0.00943346}

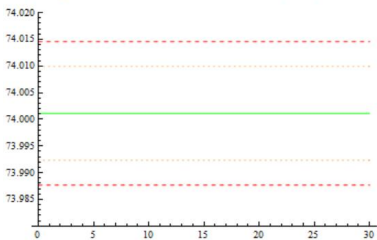
n = 5
aj = 0.93999
omega = 1.96
kappa = 3
Wu = mu0 - omega * Sj / (aj * Sqrt[5])
Wo = mu0 + omega * Sj / (aj * Sqrt[5])
Ku = mu0 - kappa * Sj / (aj * Sqrt[5])
Ko = mu0 + kappa * Sj / (aj * Sqrt[5])

5
0.93999
1.96
3
{73.9923}
{74.0099}
{73.9876}
{74.0146}

p1 = Plot[{Ku, Wu, mu0, Wo, Ko}, {x, 0, 30}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}, {Dotted, Orange}, {Dashed, Red}},
PlotRange -> {73.98, 74.02}]

```

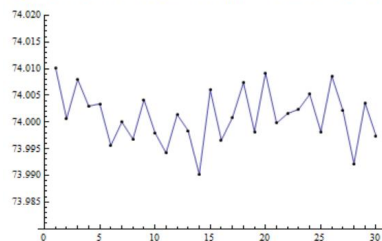
Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>



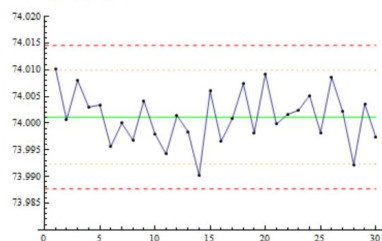
```

p2 = ListLinePlot[Transpose[Mean@#] & /@ Partition[Last /@ daten, 5], Mesh -> All, MeshStyle -> Black, PlotRange -> {73.98, 74.02}]

```



```
Show[p1, p2]
```



s-Karte

```

daten = ReadList["C:\daten.txt", Number, RecordLists -> True]
{{1, 74.03}, {1, 74.002}, {1, 74.019}, {1, 73.992}, {1, 74.008}, {2, 73.995}, {2, 73.992}, {2, 74.001}, {2, 74.011}, {2, 74.004}, {3, 73.988},
{3, 74.024}, {3, 74.021}, {3, 74.005}, {3, 74.002}, {4, 74.002}, {4, 73.996}, {4, 73.993}, {4, 74.015}, {4, 74.009}, {5, 73.992},
{5, 74.007}, {5, 74.015}, {5, 73.989}, {5, 74.014}, {6, 74.009}, {6, 73.994}, {6, 73.997}, {6, 73.985}, {6, 73.993}, {7, 73.995},
{7, 74.006}, {7, 73.994}, {7, 74}, {7, 74.005}, {8, 73.985}, {8, 74.003}, {8, 73.993}, {8, 74.015}, {8, 73.988}, {9, 74.008},
{9, 73.995}, {9, 74.009}, {9, 74.005}, {9, 74.004}, {10, 73.998}, {10, 74}, {10, 73.99}, {10, 74.007}, {10, 73.995}, {11, 73.994},
{11, 73.998}, {11, 73.994}, {11, 73.995}, {11, 73.99}, {12, 74.004}, {12, 74}, {12, 74.007}, {12, 74}, {12, 73.996}, {13, 73.983},
{13, 74.002}, {13, 73.998}, {13, 73.997}, {13, 74.012}, {14, 74.006}, {14, 73.967}, {14, 73.994}, {14, 74}, {14, 73.984}, {15, 74.012},
{15, 74.014}, {15, 73.998}, {15, 73.999}, {15, 74.007}, {16, 74}, {16, 73.984}, {16, 74.005}, {16, 73.998}, {16, 73.996}, {17, 73.994},
{17, 74.012}, {17, 73.986}, {17, 74.005}, {17, 74.007}, {18, 74.006}, {18, 74.01}, {18, 74.018}, {18, 74.003}, {18, 74}, {19, 73.984},
{19, 74.002}, {19, 74.003}, {19, 74.005}, {19, 73.997}, {20, 74}, {20, 74.01}, {20, 74.013}, {20, 74.02}, {20, 74.003}, {21, 73.982},
{21, 74.001}, {21, 74.015}, {21, 74.005}, {21, 73.996}, {22, 74.004}, {22, 73.999}, {22, 73.99}, {22, 74.006}, {22, 74.009},
{23, 74.01}, {23, 73.989}, {23, 73.99}, {23, 74.009}, {23, 74.014}, {24, 74.015}, {24, 74.008}, {24, 73.993}, {24, 74}, {24, 74.01},
{25, 73.982}, {25, 73.984}, {25, 73.995}, {25, 74.017}, {25, 74.013}, {26, 74.012}, {26, 74.015}, {26, 74.03}, {26, 73.986}, {26, 74},
{27, 73.995}, {27, 74.01}, {27, 73.99}, {27, 74.015}, {27, 74.001}, {28, 73.987}, {28, 73.999}, {28, 73.985}, {28, 74}, {28, 73.99},
{29, 74.008}, {29, 74.01}, {29, 74.003}, {29, 73.991}, {29, 74.006}, {30, 74}, {30, 74.001}, {30, 73.986}, {30, 73.997}}

```

```

Sj = Mean[{StandardDeviation@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]]
{0.00943346}

```

```

xw = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.95]
9.48773

```

```

xk = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.9973]
16.2512

```

```

aj = 0.93999
nj = 5
Wo = Sj / aj * Sqrt[xw / (nj - 1)]
Ko = Sj / aj * Sqrt[xk / (nj - 1)]
0.93999

```

```

5
{0.0154561}
{0.0202283}

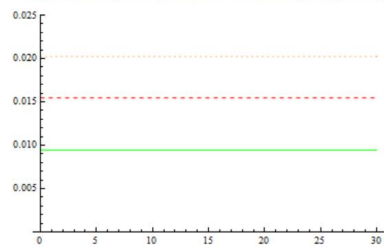
```

```

p1 = Plot[{Wo, Ko, Sj}, {x, 0, 30}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}},
PlotRange -> {0, 0.025}]

```

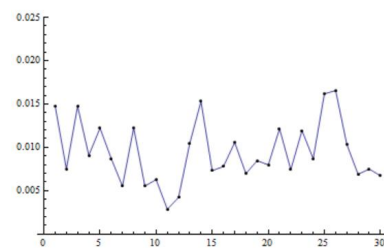
Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>



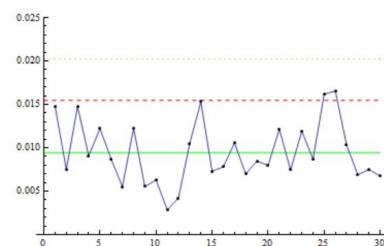
```

p2 = ListLinePlot[Transpose[{StandardDeviation@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 5]], Mesh -> All, MeshStyle -> Black, PlotRange -> {0, 0.025}]

```



```
Show[p1, p2]
```



p-Karte

```
daten = ReadList["C:\p-Karte.txt", Number, RecordLists -> True]
{{1, 0.125}, {2, 0.05}, {3, 0}, {4, 0.025}, {5, 0.05}, {6, 0.025}, {7, 0}, {8, 0.2}, {9, 0}, {10, 0.025}}

p0 = Mean[{Mean@#} & /@ Partition[Last /@ daten, 2]]
n = 40
 $\omega$  = 1.64485
 $\kappa$  = 2.78215
Wo = p0 +  $\omega$  * Sqrt[1/n * p0 * (1 - p0)]
Ko = p0 +  $\kappa$  * Sqrt[1/n * p0 * (1 - p0)]

{0.05}

40

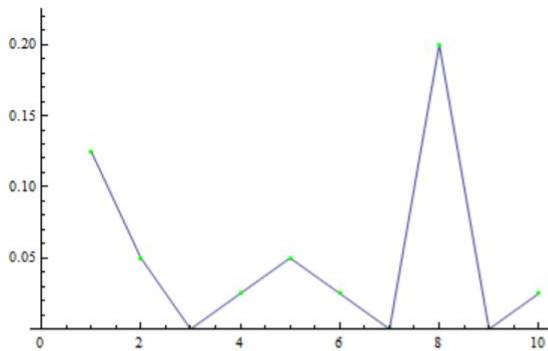
1.64485

2.78215

{0.106682}

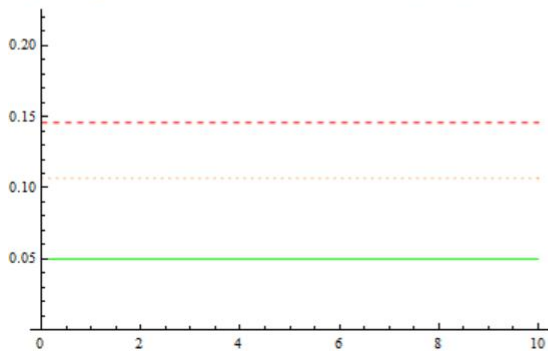
{0.145873}
```

```
p1 = ListLinePlot[{daten}, Mesh -> All, MeshStyle -> Green, PlotRange -> {0, 0.225}]
```



```
p2 = Plot[{Ko, Wo, p0}, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {{Dashed, Red}, {Dotted, Orange}, {Full, Green}},
PlotRange -> {0, 0.225}]
```

Graphics::gprim: Full was encountered where a Graphics primitive or directive was expected. >>



```

points = Select[daten, #[[2]] > First@Ko &]
p3 = Graphics[{Red, {AbsolutePointSize[8], Point[{points}]}]}]
{{8, 0.2}}

```



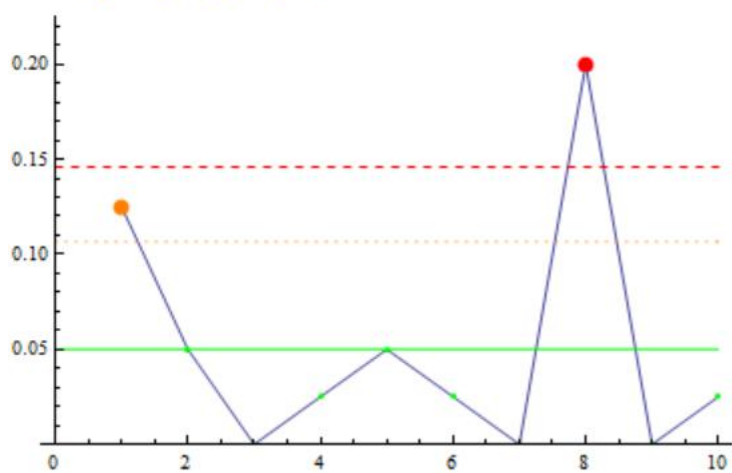
```

points2 = Select[daten, First@Ko > #[[2]] > First@Wo &]
p4 = Graphics[{Orange, {AbsolutePointSize[8], Point[{points2}]}]}]
{{1, 0.125}}

```



```
Show[p1, p2, p3, p4]
```



Literaturverzeichnis

[DGQ 10]

Deutsche Gesellschaft für Qualität e.V. (Hrsg): Prozessmanagement und -kennzahlen. Berlin: Beuth Verlag(2010)

[E]

E-book Gussrohrsysteme, Kapitel 4 Qualitätsmanagement

[Ekb 96]

Ekbert, Hering Prof.Dr.Dr.; Jürgen, Triemel Dr.; Hans-Peter, Blank Prof.: *Qualitätsmanagement für Ingenieure*; VDI Verlag, Düsseldorf (1996)

[Ger 99]

Gerd F. Kamiske; Jörg-Peter Brauer: *Qualitätsmanagement von A bis Z: Erläuterungen moderner Begriffe des Qualitätsmanagements*; 3.Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien(1999)

[Gei 08]

Geiger, W.; Kotte, W: *Handbuch Qualität, Grundlagen und Element des Qualitätsmanagements: Systeme-Perspektiven*, 5.Auflage, Wiesbaden: Vieweg +Teubner Verlag(2008)

[Ger 11]

Gerhard ,Linß Prof.Dr.: *Qualitätsmanagement für Ingenieure*; 3.Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien(2011)

[Han 93]

Hans-Joachim, Mittag Dr.: *Qualitätsregelkarten*; Carl Hanser Verlag, München Wien(1993)

[Mon 09]

Montgomery,D.C.: *Statistical Quality Control. A Modern Introduction*. John Wiley Sons, 6. Auflage(2009).

[Tho 01]

Thomas, Gerboth: *Statistische Prozessregelung bei administrativen Prozessen im Rahmen eines ganzheitlichen Prozesscontrollings*, Hausarbeit August 2001, TU Berlin(2001)

[Wal 13]

Waltraud, Kahle apl.Prof.; Eckhard, Liebscher Prof.Dr.: *Zuverlässigkeitsanalyse und Qualitätssicherung*; Oldenbourg Verlag, München (2013)

[Wik]

Wikipedia

[Wol 95]

Wolfgang,Timischl Dr.: *Qualitätssicherung: statistische Methoden*; Carl Hanser Verlag, München Wien(1995)

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbstständig ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt zu haben. Die aus anderen Werken wörtlich entnommenen Stellen oder dem Sinn nach entlehnten Passagen sind durch Quellenangaben kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift