

# Metaphern in der Mathematik – die Bildlichkeit des abstrakten Denkens

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Philosophie (Dr. phil.),

genehmigt durch die

Fakultät für Humanwissenschaften

der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von Martin Raschauer

geb. am 03.09.1982 in Magdeburg

Gutachterin: HD Dr. Kirsten Sobotta

Gutachter: Prof. Dr. Armin Burkhardt

Eingereicht am: 07.05.2012

Verteidigung der Dissertation am: 10.07.2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Sprachwissenschaftliche und sprachphilosophische Grundlagen</b>	<b>5</b>
<b>2 Sprachwissenschaft und Mathematik</b>	<b>7</b>
2.1 Zum Verhältnis von Sprachwissenschaft und Mathematik . . . . .	7
2.2 Mathematik als Sprache? . . . . .	14
2.3 Zum Begriff der Notation . . . . .	19
2.4 Eidetischer und operativer Sinn . . . . .	25
<b>3 Metapherntheorie</b>	<b>33</b>
3.1 Überblick . . . . .	33
3.2 Zwei einfache Typologien von Metapherntheorien . . . . .	36
3.3 Die erste Metapherntheorie: Aristoteles . . . . .	39
3.4 Grundlagen der kognitiven Metapherntheorie . . . . .	47
3.4.1 Kognitionswissenschaft und kognitive Linguistik . . . . .	47
3.4.2 Kognitive Semantik, Schematheorie und Idealisierte kognitive Modelle . . . . .	52
3.4.3 Konzeptuelle Metaphern . . . . .	59
3.5 Neun Thesen . . . . .	70
3.5.1 Ubiquitäts-These . . . . .	71
3.5.2 Notwendigkeits-These . . . . .	72

3.5.3	Domänen-These . . . . .	76
3.5.4	Modell-These . . . . .	78
3.5.5	Unbewusstheits-These . . . . .	80
3.5.6	Unidirektionalitäts-These . . . . .	87
3.5.7	Kreativitäts-These . . . . .	102
3.5.8	Invarianz-These . . . . .	109
3.5.9	Fokussierungs-These . . . . .	118
3.6	Typologien konzeptueller Metaphern . . . . .	122
3.7	Kritische Anmerkungen . . . . .	128
3.7.1	Terminologie . . . . .	129
3.7.2	Bedeutung und Konzept . . . . .	133
3.7.3	Zirkuläre Argumentation . . . . .	140
3.7.4	Relativierung der Kritik . . . . .	146
3.8	Metapher und Analogie . . . . .	148
3.9	Metapher, Analogie und Modell . . . . .	161
3.10	Metaphern in der Mathematik . . . . .	165
3.10.1	Die Arbeiten von George Lakoff und Rafael E. Núñez	169
3.10.2	Die Sprache der Mathematik bei Solomon Marcus .	175
3.10.3	Mathematik aus didaktischer Perspektive bei David Pimm . . . . .	179
3.10.4	Fazit: Zwei Typen mathematischer Metaphern . . .	184
3.11	Schwierigkeiten beim Metapherngebrauch . . . . .	185
3.12	Methodologische Bemerkungen . . . . .	192
<b>II</b>	<b>Mengenlehre</b>	<b>197</b>
<b>4</b>	<b>Einleitung</b>	<b>199</b>
<b>5</b>	<b>Das Behältniskonzept</b>	<b>207</b>

5.1	Grundlagen . . . . .	207
5.2	Semantik versus Kognition am Beispiel der deutschen Präposition <i>in</i> . . . . .	211
5.3	Eine fest eingebaute Logik? . . . . .	221
<b>6</b>	<b>Zum Mengenbegriff</b>	<b>233</b>
6.1	Vokabular . . . . .	233
6.2	Der intuitive Ansatz . . . . .	236
6.3	Die Grenzen der Intuition . . . . .	253
6.4	Teilmengenrelation und Venn-Diagramme . . . . .	263
6.5	Elementare Operationen . . . . .	272
6.6	Transitive Mengen und ein Modell der natürlichen Zahlen	284
6.7	Funktionen und geordnete Paare . . . . .	288
6.8	Äquivalenzrelationen . . . . .	311
6.9	Zwischenfazit . . . . .	321
<b>7</b>	<b>Transfinite Kardinalzahlen</b>	<b>329</b>
7.1	Cantors zentrale Metapher? . . . . .	329
7.2	Resultate über Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese	338
<b>8</b>	<b>Paradoxien und ZFC</b>	<b>343</b>
8.1	Paradoxien . . . . .	343
8.2	Das Axiomensystem ZFC . . . . .	347
<b>9</b>	<b>Singuläre Metaphern</b>	<b>353</b>
<b>10</b>	<b>Rück- und Ausblick</b>	<b>361</b>
10.1	Der Ausgangspunkt der Arbeit . . . . .	362
10.2	Ergebnisse im Überblick . . . . .	366
10.3	Analogie und Metapher . . . . .	370
10.4	Metaphern als wahrnehmbare Zeichenphänomene? . . . . .	375

10.5 Identifizierung von Metaphern . . . . . 384

**III Literatur** **397**

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zum sich rhizomartig immer weiter ausbreitenden Metapherndiskurs, der insbesondere unter dem kognitiven Paradigma eine Reintegration der zerklüfteten Wissenschaftslandschaft über alle Einzeldisziplinen hinweg unter ein gemeinsames Prinzip verspricht. Inwieweit diese Verheißung erfüllbar ist, wird anhand der Wissenschaft der Mathematik, genauer anhand der Mengenlehre, untersucht.

Im ersten Teil der Untersuchung wird zunächst die hybride Natur der mathematischen Sprache erörtert, indem zwischen einem mathematischen Register und der formalen Notation unterschieden wird, und hinsichtlich ihrer Konsequenzen, die eine angemessene Metaphernanalyse in der Mathematik zu respektieren hat, befragt. Daran anschließend werden wesentliche Merkmale der kognitiven Metapherntheorie dargestellt, konkurrierenden Theorien gegenübergestellt und kritisch hinterfragt. Unter anderem kann erneut bestätigt werden, dass die kognitive Metapherntheorie entgegen ihrem Selbstverständnis nicht radikal mit der Tradition der Metapherntheorien bricht, sondern im Gegenteil viele Gedanken, die letztendlich bis zu Aristoteles zurückreichen, aufnimmt. Ihre wirkliche Neuerung ist die Verschiebung des Metaphernbegriffs von der linguistischen auf die epistemologische Ebene. Sie eröffnet eine neue Dimension, die Systematisierung metaphorischer Projektionen zu beschreiben. Allerdings wird sie mit einem zumeist nur unzureichend reflektierten Verhältnis von sprachlicher Bedeutung und konzeptueller Struktur sowie einem vereinfachenden Repräsentationsmodell von Sprache erkaufte. Weitere Kritikpunkte betreffen die teilweise willkürlich wirkende Terminologie und die Gefahr einer zirkulären

lären Argumentation, von sprachlichen Daten auf konzeptuelle Metaphern zu schließen, die dann lediglich wieder mit weiteren sprachlichen Daten untermauert werden. Als Beitrag zur Forschungsdiskussion wird versucht, die zu Gunsten von Invarianz-These und Schema-Theorie ausgeschlossene Analogie an die Theorie konzeptueller Metaphern heranzuführen. Damit wird einerseits der Anschluss an die immer noch einflussreiche aristotelische Metaphertheorie gesucht und andererseits wird die wichtige Erkenntnis, dass Metaphern Inferenzmuster aus einem Bereich in einen anderen übertragen können, in einen größeren Zusammenhang eingeordnet. Anschließend werden Untersuchungen, die sich speziell mit Metaphern in der Mathematik beschäftigen, besprochen. Dabei zeigt sich, wie sich durch ganz verschiedene theoretische Ansätze ein gemeinsames Prinzip zieht: die Unterscheidung von Metaphern nach der Herkunft in zwei prinzipiell verschiedene Metapherentypen. Abschließend wird auf einige Schwierigkeiten und Gefahren des Metapherngebrauchs eingegangen, die verdeutlichen, dass Metaphern Erkenntnisse nicht nur ermöglichen, sondern teilweise auch blockieren können.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit Metaphern in der Mathematik am Beispiel des Bereichs der Mengenlehre. Hierfür werden die umfangreichen Analysen mathematischer Ideen unter dem Paradigma der kognitiven Metaphertheorie von Lakoff/Núñez aufgegriffen, kritisch begleitet, erweitert und, wo es nötig ist, korrigiert. Dass sich diese Untersuchung dabei entlang der Ränder dessen, was üblicherweise von einer sprachwissenschaftlichen Arbeit erwartet wird, bewegt, ist nach unserer Überzeugung eine Notwendigkeit, die aus der hybriden Natur der mathematischen Sprache, eine natürliche und eine formale Sprache zu verbinden, folgt. Der konkreten Metaphernanalyse vorgelagert ist ein Abschnitt zum Behälter-Schema, seiner inneren Struktur, seiner Verknüpfung mit der deutschen Präposition *in* und der kontroversen Frage, ob es über eine eingebaute „Logik“



verfügt. Gerade der letzte Aspekt verdient besondere Aufmerksamkeit, da sich, falls eine derartige Logik tatsächlich existieren sollte und Mengen ferner als Behälter konzeptualisiert werden, jedes in dieser Logik gültige Inferenzmuster auf Mengen vererben müsste. Diese Untersuchung kommt allerdings zu dem Schluss, dass diese Logik in der Form, wie sie in der kognitiven Metapherntheorie dargestellt wird, in vielen Fällen unplausibel ist. So soll ein Satz dieser Logik die uneingeschränkte Transitivität der Enthaltenseins-Relation legitimieren, die sich auf alle als Behälter konzeptualisierten Bereiche übertrage. Für Mengen ist dies aber offensichtlich falsch, da hier Element- und Teilmengenrelation unterschieden werden müssen, von denen nur die Teilmengenrelation grundsätzlich transitiv ist. Spezielle Mengen, bei denen auch die Element-Relation transitiv ist, können zur Konstruktion eines mengentheoretischen Modells der natürlichen Zahlen und weiter zur Definition der Ordinalzahlen herangezogen werden. Als nicht weniger problematisch erweisen sich viele weitere Einzelanalysen mengentheoretischer Konzepte von Lakoff/Núñez. Bereits ihre Grundannahme einer theoriekreativen Behälter-Metaphorik ist nach unseren Ergebnissen nicht haltbar. Damit wird allerdings nicht behauptet, dass die Behälter-Metaphorik in der Mengenlehre gänzlich zu vernachlässigen wäre, sondern nur, dass sie meist als ein didaktisches Hilfsmittel eingesetzt wird, um bestimmte Aspekte an Mengen oder Operationen mit Mengen anschaulich zu machen. Des Weiteren ist das für die Mengenlehre grundlegende Extensionalitätsprinzip mit der Behälter-Metaphorik nur schwer vereinbar, so dass eine einseitige Strukturierung des Mengenkonzepts durch das Behälter-Schema ausgeschlossen werden muss. Bei anderen mengentheoretischen Konzepten ist die Annahme einer metaphorischen Strukturierung gänzlich verfehlt: So basiert das mengentheoretische Modell des geordneten Paares auf einer Analogie, die nicht metaphorisch genutzt wird. Ebenso verhält es sich mit den Mengenoperationen, deren Analogiebasis sich sogar zu

einem Modell ausweitet. Schließlich erweist sich Cantors zentrale Idee, nach der zwei Mengen dann *gleichmächtig* genannt werden, wenn zwischen ihnen eine Bijektion existiert, als eine konzeptuelle Metonymie, da ein Verfahren des Mengenvergleichs als für das ganze Konzept repräsentativ ausgezeichnet wird. Schließlich gibt es eine Reihe singulärer sprachlicher Metaphern, d. h. Metaphern, die nicht auf einem kognitiven Modell basieren, von denen ein paar wenige exemplarisch analysiert werden.

In der Summe kommt diese Arbeit zu dem Ergebnis, dass die Analyse mathematischer Ideen von Lakoff/Núñez mit Methoden der kognitiven Metaphertheorie teilweise Züge einer sich selbsterfüllenden Prophezeiung annimmt, die den Leser vor die undankbare Aufgabe stellt, die tatsächlich relevanten konzeptuellen Metaphern von den „erzwungenen“ zu trennen. Für den Bereich der Mengenlehre wurde dies hier versucht, mit dem ernüchternden Ergebnis, dass konzeptuelle Metaphern für den Aufbau der Theorie eine weit weniger dominante Rolle spielen, als von Seiten der kognitiven Metaphertheorie angenommen wird. Stattdessen erscheint es lohnenswert sowohl für zukünftige Untersuchungen mathematischer Ideen als auch für die kognitive Metaphertheorie im Allgemeinen, die Theorie wieder für den Analogiebegriff zu öffnen, wie es in der didaktischen Literatur schon lange gang und gäbe ist. Als positiver Nebeneffekt könnte zusätzlich die Versöhnung mit der aristotelischen Metaphertheorie verbucht werden.

# 1 Einleitung

Wenn man sich Wissenschaft als ein kolossales Gebäude voller verwinkelter Etagen, Gänge und Zimmer vorstellt, dann nimmt man Sprachwissenschaft und Mathematik gewöhnlich als weit voneinander entfernte, in getrennten Flügeln residierende Disziplinen wahr. Begegnen können sie sich, wenn die Sprachwissenschaft die Mathematik oder umgekehrt die Mathematik die Sprachwissenschaft besucht. Diese Arbeit möchte einen Beitrag zu einer solchen Begegnung leisten, indem versucht wird, sich über einige Aspekte, wie Metaphern in der Mathematik funktionieren, Klarheit zu verschaffen. Dazu wird ein Treffen beider Disziplinen auf dem Boden der kognitiven Metaphertheorie arrangiert, die verspricht, den Metaphernbegriff von jahrtausendealtem Ballast zu entrümpeln und ihn mit den Erkenntnissen der Kognitionswissenschaften auszustatten, sodass ein Instrument geschaffen wird, um den gedanklichen Kern der menschlichen Mathematik freizulegen.

So sehr die schiere Menge an Literatur zur Metapher, insbesondere der neuen Flut, die seit den 1970er Jahren über fast alle Disziplinen hinweg hohe Wogen schlägt, jedes Fassungsvermögen sprengt, so wenige Untersuchungen gibt es zu Metaphern in der Mathematik. Zwar konnte insbesondere die Fachsprachenforschung wichtige Impulse zur Erforschung der mathematischen Fachsprache beitragen, aber meist unter Verwendung eines auf natürliche Sprachen ausgerichteten Sprachbegriffs. Im ersten Abschnitt des ersten Teils dieser Arbeit wird dieser Faden der Fachsprachenforschung aufgenommen, indem von einem weiten Sprachbegriff ausgehend, der formale Sprachen mit berücksichtigt, besonderes Augenmerk auf die hybride

Natur der mathematischen Sprache, d. h. die Verbindung einer natürlichen mit einer künstlichen Sprache, gerichtet wird. Für die natürlichsprachliche Komponente wird der Registerbegriff und für die formale Seite der Notationsbegriff eingesetzt. Über allem schwebt die grundsätzliche Frage, welche Konsequenzen für eine Analyse von Metaphern in der Mathematik gezogen werden müssen, wenn der Titel der Dissertation ernst genommen und Mathematik nicht auf die Terminologie in einem Teilgebiet einer natürlichen Sprache verkürzt werden soll. An diese Präliminarien schließt sich die Darstellung der Theorie der konzeptuellen Metaphern an, der als Kontrastfolie und Vergleichsbasis die erste Metaphertheorie vorausgeschickt wird. Da eine ausführliche Darstellung allein des kognitiven Ansatzes den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werden wesentliche Kernpunkte der kanonischen Texte von Lakoff/Johnson/Turner in Form von neun Thesen vorgestellt, anderen Positionen gegenübergestellt und kritisch hinterfragt. Die Grundlagen der kognitiven Metaphertheorie schließt eine Darstellung verschiedener Typologisierungen konzeptueller Metaphern und eine Kritik ihrer Terminologie, ihrer Bedeutungskonzeption und ihrer Methodik der Metaphernanalyse ab. Mit dem Versuch, den in der kognitiven Metaphertheorie gemiedenen Analogiebegriff zu rehabilitieren, und der Diskussion des Modellbegriffs wird der Kernbereich systematisch überschritten und gleichzeitig der Anschluss an die aristotelische Metaphertheorie gesucht. Anschließend werden unterschiedliche Perspektiven auf Metaphern speziell in der Mathematik vorgestellt, die vom kognitiven bis hin zu einem didaktisch motivierten Ansatz reichen. Bei aller Verschiedenheit dieser Arbeiten wird sich ein allen gemeinsames Prinzip – die Unterscheidung zweier Metapherentypen – herauskristallisieren. Den didaktischen Impuls beibehaltend stehen am Ende des theoretischen Abschnitts Hinweise auf Schwierigkeiten und Gefahren bei der Metaphernverwendung, die zeigen, dass Metaphern Erkenntnis nicht nur ermöglichen, sondern möglicherweise auch blockieren

können.

Mit dem theoretischen Apparat ausgestattet kann sich der praktische Teil mit der Beschreibung von Metaphern im Bereich der Mengenlehre beschäftigen. Dazu werden die umfangreichen Analysen mathematischer Ideen unter dem Paradigma der kognitiven Metaphertheorie von Lakoff/Núñez aufgegriffen, kritisch begleitet, erweitert und, wo es nötig ist, korrigiert. Dabei bewegt sich diese Arbeit mit voller Absicht an den Rändern der Linguistik. Für die Augen einer Sprachwissenschaftlerin oder eines Sprachwissenschaftlers vielleicht ungewohnt wird die natürliche Sprache nur einen Teilgegenstand der Untersuchung ausmachen, da viele Elemente der Notation mit aufgegriffen werden. Der konkreten Metaphernanalyse vorgelagert ist ein Abschnitt zu dem in der kognitiven Metaphertheorie wohl meist diskutierten Vorstellungs-Schema, dem Behälter-Schema, das für die Konzeptualisierung des Mengenkonzepts grundlegend sein soll. Es werden seine innere Struktur, seine Verknüpfung mit der deutschen Präposition *in* und die kontroverse Frage, ob es über eine eingebaute „Logik“ verfügt, besprochen. Gerade der letzte Aspekt verdient besondere Aufmerksamkeit, da, falls diese Logik tatsächlich existieren sollte und Mengen als Behälter verstanden werden, jedes in dieser Logik gültige Inferenzmuster auf Mengen vererbt werden müsste. Die Beschreibung von Metaphern in der Mengenlehre gliedert sich in zwei Abschnitte. In einem ersten Durchgang wird die als *naiv* bezeichnete Mengenlehre der ersten Generation in der Nachfolge ihres Gründers Georg Cantor untersucht. Zu Beginn wird von Cantors berühmter Definition des Mengenbegriffs ausgehend die Frage aufgeworfen, ob eine Behälter-Metaphorik ausreicht, um zumindest die zentralen Konzepte zu begreifen. Unter anderem an der leeren Menge, der Teilmengenrelation, Venn-Diagrammen, elementaren Mengenoperationen und Funktionen wird versucht nachzuweisen, dass die Antwort *nein* lauten muss. Als Alternative zu konzeptuellen Metaphern werden Analogieprozesse ausge-

wiesen, die in einigen Fällen wie der mengentheoretischen Interpretation der natürlichen Zahlen bis zu einem vollen Modell führen. Auf die Beschreibung der Grundkonzepte der Mengenlehre folgt eine Analyse dessen, was bei Lakoff/Núñez *Cantors zentrale Metapher* genannt wird, hier aber als konzeptuelle Metonymie erkannt wird. Im zweiten Abschnitt werden einige Paradoxien der Mengenlehre besprochen, die historisch als Katalysator bei der Entwicklung der formalen, sich auf ein Axiomensystem stützenden Mengenlehre gewirkt haben. Das heute verbreitetste Axiomensystem ZFC wird anschließend kurz dargestellt. Die gesamte Untersuchung endet schließlich mit der exemplarischen Analyse einiger singulärer sprachlicher Metaphern, d. h. Metaphern, die nicht auf einem kognitiven Modell basieren.

An diesem einleitendem Überblick wird schon deutlich, mit welcher Skepsis dem eingangs skizzierten Unterfangen der kognitiven Metapherntheorie, einen neuen den Alltag und alle Wissenschaften überspannenden Metaphernbegriff zu kreieren, begegnet wird. Die Irritation gründet dabei auf der Überzeugung, dass die Mathematik nicht mit einer Menge von Konzepten gleichzusetzen ist, da es ansonsten nicht von Belang wäre, in welcher Form – einer natürlichen Sprache, einer formalen Notation oder einem Diagramm – diese Konzepte veräußert werden. Ganz streng genommen, wäre es dann sogar möglich, dass sich diese Konzepte niemals irgendwo außerhalb des mentalen Innenraums manifestieren. Auch gegen diesen Solipsismus hofft diese Arbeit, Anregungen zu Modifikationen der kognitiven Metapherntheorie geben zu können, die zu einer stärkeren Wertschätzung der symbolischen Formen führen, in denen Metaphern überhaupt prozessiert werden.

# **Teil I**

## **Sprachwissenschaftliche und sprachphilosophische Grundlagen**





## 2 Sprachwissenschaft und Mathematik

### 2.1 Zum Verhältnis von Sprachwissenschaft und Mathematik

Die Sprache unter einem im weitesten Sinne mathematischen Blickwinkel im weitesten Sinne zu betrachten, hat eine lange Geschichte, die sich bis zur aristotelischen Syllogistik zurückverfolgen lässt. Dort wird wie in anderen logischen Systemen auch das Ziel verfolgt, die Gültigkeit bestimmter Schlussfolgerungsmuster unabhängig von Erfahrungswerten überprüfbar zu machen, indem versucht wird, das inhaltliche Argumentieren auf eine abstrakte logische Form zurückzuführen. Alle späterem diesbezüglichen Anstrengungen, über Leibniz' Versuch, eine Universalsprache zu entwickeln bis hin zur Prädikatenlogik von Frege und Peirce, sind stets geprägt vom Anspruch, den Vagheiten natürlicher Sprachen, wozu auch Metaphern beitragen, ein rigoroses Kalkül entgegenzustellen, um wahre von falschen Aussagen letztendlich allein durch systematische Berechnungen scheiden zu können. Im Vorwort seiner „Begriffsschrift“ schreibt Frege dazu:

Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt

sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle anderen unbrauchbar. (Frege 1879: v)

In gewisser Weise artikuliert sein Vergleich zwischen dem menschlichen Auge und einem Mikroskop eine Grundidee der Fachsprachenforschung, dass sich der Wirkungsbereich einer Fachsprache auf einen begrenzten Weltausschnitt beschränkt, in der sie der Gemeinsprache überlegen ist. Das System einer formalen Logik ist in diesem Bild das stärkste zur Verfügung stehende Mikroskop, mit dessen Hilfe man sich auf ganz bestimmte Details konzentrieren kann, darüber aber das Gesamtbild aus dem Blick verliert.

Eine größere Welle des Imports mathematischen Gedankenguts in die Linguistik setzt mit der Entwicklung der Computertechnologie in den 1930er und 40er Jahren ein. Aus dem erfolgreichen Bemühen, verschlüsselte Nachrichten vor allem während des Zweiten Weltkriegs zu dechiffrieren, gehen erste ernsthafte Überlegungen um die Möglichkeiten maschineller Sprachverarbeitung hervor. Die sich herausbildende mathematische Linguistik spaltet sich schließlich in zwei Lager: Eine Richtung setzt überwiegend auf stochastische Methoden, wohingegen die andere symbolische Ansätze favorisiert (vgl. Carstensen/Christian Ebert/Cornelia Ebert u. a. 2010: 18). Vor allem die zweite Richtung wurde dank der generativen Grammatik Chomskys und der formalen Semantik Montagues in den 1960er und 70er Jahren stark aufgewertet. Der Grundgedanke von Chomsky und Montague, natürliche und künstliche Sprachen als im Prinzip gleichartig zu betrachten, gestattet es, Methoden der oben genannten mathematischen Logik systematisch auch auf natürliche Sprachen anzuwenden. Mit der Weiterentwicklung der Computertechnik und der Informatik sind heute schließlich auch stochastische Methoden besonders in der Korpuslinguistik wieder stärker gefragt.

In der umgekehrten Richtung liegt die Anwendung linguistischer Methoden auf mathematische Phänomene. Eine frühe deutschsprachige Arbeit zu diesem Thema stammt von Kästner (1791), der sich unter anderem mit der mathematischen Fachsprache hinsichtlich ihrer Terminologie am Beispiel der Geometrie auseinandersetzt. Auch wenn er selbst den Terminus *Fachsprache* noch nicht verwendet, kann sein philologischer Zugang doch als ein früher Beitrag zur Fachsprachenforschung aufgefasst werden. Seiner Ansicht nach verstehen sich Mathematiker, wenn sie sich über einen Fachgegenstand verständigen, immer richtig, im Gegensatz zu Philosophen, die ständig im Streit über Begriffe liegen. Er fragt daher, was das charakteristische an der mathematischen Sprache sei, dass die Kommunikation immer so reibungslos gelinge und was man von ihr für eine allgemeine Wissenschaftssprache lernen könne (vgl. ebd.: 257). Er kommt zu folgendem Schluss:

Sparsamkeit in Kunstwörtern, Bildung derselben, dadurch sie schon einigermaßen verständlich werden, genaue Bestimmung Gebrauch in immer ungeänderter Bedeutung, das sind einige von den Eigenschaften der mathematischen Sprache. (ebd.: 269)

Zwar ist die Konstanz der Bedeutung mathematischer Termini anzuzweifeln, da Fachwörter genau wie allgemeinsprachliche Wörter auch historischen Veränderungen unterworfen sind. Beispielsweise bedienen sich neue mathematische Teilgebiete immer wieder an etablierter Terminologie, wodurch die Bedeutung von Lexemen wie *Basis*, *Grad* oder *Faktor* je nach betreffendem Gebiet erheblich variieren kann und zu neuen Teilbedeutungen führt (vgl. Eisenreich 1998: 1222). Dagegen können Verständlichkeit und Exaktheit durch Definition sehr wohl als wichtige Charakteristika der mathematischen Fachsprache angesehen werden.

Parallel zur Entwicklung der Fachsprachenforschung beginnt man sich auch aus pädagogisch-didaktischen Überlegungen heraus mit der Mathematik unter sprachwissenschaftlichen Fragestellungen zu befassen. Eine Ar-

beit aus diesem Umfeld, die das Verhältnis von Sprache und Sprachwissenschaft zur Mathematik mit dem Ziel, Konsequenzen für den Mathematikunterricht abzuleiten, systematisch auslotet, ist Austin/Howson (1979). Ursprünglich sei lediglich eine kommentierte Bibliographie über den damals aktuellen Forschungsstand zum Verhältnis von Sprache und Mathematikunterricht geplant gewesen, aber aus Sorge um eine möglicherweise zu einseitige Darstellung habe man sich entschieden, einen Aufsatz voranzuschicken, der einen Überblick über aktuelle Forschungsbereiche geben, aber auch über die aktuelle Debatte hinaus systematisch weitere Ansatzpunkte für Forschungsvorhaben aufzeigen sollte (vgl. ebd.: 161). Der Text leitet mit einer Begründung dafür ein, warum natürliche Sprachen für den Mathematikunterricht relevant sind: Er verweist dazu auf die Notwendigkeit zur Kommunikation im Lernprozess, die gerade auch im Mathematikunterricht zu einem großen Teil durch eine natürliche Sprache erfolgt und erfolgen muss. Das ist im Grunde weder eine neue noch eine tiefgehende Einsicht, jedoch wird durch sie der Linguistik eine wichtige Rolle als Methodenreservoir zur Analyse und Optimierung von Lehr- und Lernprozessen zugesprochen. Weiterhin werden Gemeinsamkeiten in der Geschichte der Disziplinen Pädagogik und Linguistik aufgezeigt und im Angesicht vergleichbarer Herausforderungen wird für gemeinsame, interdisziplinäre Anstrengungen plädiert. Weil diese Aspekte für die sich anschließende Diskussion der mathematischen Fachsprache von Interesse sind, soll der Aufsatz an dieser Stelle eingehender betrachtet werden.

Der Rahmen einer Zusammenarbeit von Sprachwissenschaft und Mathematikdidaktik wird durch drei Felder abgesteckt (vgl. ebd.: 163f):

1. die Sprache des Lerners
2. die Sprache des Lehrers
3. die Sprache(en?) der Mathematik

Unter den ersten Punkt fallen zunächst alle Auswirkungen, die aus einer Diskrepanz zwischen der Sprache des Lernalters und der Standardsprache im Unterricht resultieren. In vielen Entwicklungsländern sei es üblich gewesen, den Unterricht in einer europäischen Sprache bzw. in einer nicht vom Lerner beherrschten Amtssprache zu halten. Aber auch in Industrieländern könne diese Form der Mehrsprachigkeit zum Problem werden, wenn der Unterrichtssprache eine Minderheitensprache oder ein Dialekt auf Seiten der Lernenden gegenüber stehe. Dieses durch Mehrsprachigkeit verursachte Problemfeld trifft natürlich nicht nur die Mathematik, sondern jedes andere Unterrichtsfach gleichermaßen. Darüber hinaus haben Sprache und Kultur auch Einfluss auf Denkstrukturen und somit auf die Konzeptbildung. Mathematik, das heißt aber zumeist Mathematik des Abendlandes, einer Kulturgemeinschaft mit sprachgeschichtlich verwandten Sprachen. Weicht nun etwa das mathematische Register einer Sprache erheblich von den europäischen Sprachen in Umfang und Differenzierungsgrad ab, so ist die Entwicklung mathematischer Konzepte nachhaltig verändert. Fehlt zum Beispiel im Numerussystem einer Sprache ein Lexem zur Bezeichnung der Zahl Null, dann wird die Aneignung dieses Konzeptes erschwert. So müssen entweder Wörter aus einer fremden Sprache importiert oder Elemente des bestehenden Lexikons auf mathematische Gegenstände übertragen werden. Um auf der Basis eines bestehenden Lexikons alten Lexemen neue Bedeutungen zu geben, die dann die Lücken im mathematischen Register füllen, bietet sich gerade das metaphorische Verfahren an. Mit ihm kann ein abstrakter mathematischer Gegenstand so bezeichnet werden, dass ein konkreter, bekannter und erfahrungsnaher Gegenstand oder Sachverhalt assoziiert wird. Liegt einer Metapher dann nicht nur eine oberflächliche Ähnlichkeit sondern eine ausgedehnte Analogie zugrunde, können auch Schlussfolgerungen über Eigenschaften und Verhalten des mathematischen Gegenstandes abgeleitet werden. Pimm (2004: 94) diskutiert das Beispiel, dass es in

Swahili kein Wort zur Bezeichnung der Diagonale in einer geometrischen Figur gab und man sich als Bezeichnung für das existierende Wort *ulalo* mit der Bedeutung ‚die Längste von allen‘ entschieden habe. Die metaphorische Übertragung basiert somit auf der Eigenschaft der Diagonalen, in vielen geometrischen Polygonen die längste aller Strecken zu sein. Jedoch können in nicht konvexen Polygonen Fälle auftreten, bei denen eine Seite länger ist als jede Diagonale, sodass die Übertragung zum unerwünschten Ausschluss dieser Strecken aus der neuen mathematischen Kategorie *ulalo* führen kann. Die durch eine Metapher erzeugte Neukategorisierung vermag das Verstehen also auch zu erschweren. Die Notwendigkeit, neue Bezeichnungen zu finden, trifft nun nicht allein auf das Swahili zu, wie schon das deutsche Wort *Diagonale* selbst zeigt. Auch das mathematische Register des Deutschen enthält zahlreiche Übertragungen aus der Alltagssprache (z. B. *Kreis, Raum, Winkel, Vereinigung*) wie auch Entlehnungen aus Fremdsprachen (z. B. *bijektiv, disjunkt, antisymmetrisch, Tangente*).

Im zweiten Feld wechselt die Perspektive von der Sprache der Lernenden hin zur Sprache der Unterrichtsmaterialien und der Lehrenden. Zunächst stehen Fragen zur Lesbarkeit von mathematischen Texten im Vordergrund: Was ist Lesbarkeit, wie kann man sie messen und welche Möglichkeiten gibt es Lesehindernisse abzubauen? Wie nicht-mathematische Texte auch profitieren mathematische Texte von der Entwicklung einer allgemeinen Lesekompetenz. Darüber hinaus stellen mathematische Texte wegen der Dichte und Kürze ihrer Darstellung und der Verwendung von Elementen einer formalen Sprache besondere Anforderungen an Lesende aber auch an die Produzenten solcher Texte (vgl. Austin/Howson 1979: 174). Neben den schriftlichen Formen steht das mündliche Unterrichtsgespräch, zu dessen Beschreibung sich Methoden aus der Gesprächslinguistik anbieten, die verstärkt Aufmerksamkeit auf Aspekte der Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden lenken.

War bis hierher immer von der Mathematik „in“ einer Sprache die Rede, so könnte mit dem letzten Punkt die Diskussion auf Mathematik „als“ einer Sprache umschwenken. Diese Position halten Austin und Howson allerdings für nicht tragfähig:

Mathematics is not a language – a means of communication – but an activity and a treasure house of knowledge acquired over many centuries. The activity can be engaged in, and the results codified, using a variety of languages – ranging from the vernacular to that of Whitehead and Russell’s *Principia Mathematica*. (ebd.: 176)

Mathematik wird hier als etwas Außersprachliches konzipiert, über das sich in einer Sprache – natürlicher oder formaler Art – sprechen lässt. Die formale Komponente sei dabei nicht mehr als eine abkürzende Schreibweise, die größtenteils von Sprechern weniger nahe miteinander verwandter Sprachen geschaffen wurde (vgl. ebd.: 176). Die Struktur einer mathematischen Formel ist für diese Sprachen größtenteils syntaktisch isomorph zur sprachlichen Langform ( $2 + 3 = 5$  entspricht *Zwei plus drei ist fünf*). Weicht die Syntax einer Sprache jedoch davon ab, geht diese Strukturähnlichkeit verloren. Das ist beispielsweise für das Japanische der Fall, da dort unter anderem die Grundwortstellung *SOP* keine isomorphe Übertragung zulässt. Die Vorstellung, dass die formale Komponente die Kurzform einer natürlichsprachlichen Langform ist, wird jedoch schon problematisch, wenn man bedenkt, dass es Elemente wie Klammersausdrücke gibt, die kein einfaches Pendant haben. Dennoch stellt der Text ebenfalls fest, dass mit algebraischen Ausdrücken rein syntaktisch operiert werden kann unabhängig von ihrer Semantik und dass auch in europäischen Sprachen keine durchgängige Isomorphie zwischen formaler und natürlichsprachlicher Form existiere (vgl. ebd.: 177).

Fünfundzwanzig Jahre später blickt Pimm (2004) auf den Artikel von Austin und Howson zurück und sieht sich in gleicher Weise veranlasst, einen Überblick über die Forschungslage im Schnittfeld von Linguistik und

Mathematikunterricht zu geben. Quantitativ kann er ein enormes Wachstum dieses Bereichs und qualitativ den Einsatz neuer sprachwissenschaftlicher Methoden, insbesondere von Ansätzen im Umfeld der pragmatischen Wende, verzeichnen. Er selbst stellt einige Entwicklungen aus dem Feld der pragmatischen Diskursanalyse vor, so etwa zu Themen wie Deixis, Hecken-  
ausdrücken, Höflichkeit oder der temporalen Struktur in mathematischen Texten.

Insgesamt kommen also die stärksten Impulse, Mathematik unter sprachwissenschaftlichen Gesichtspunkten zu betrachten, aus der Faschsprachenforschung und der Mathematikdidaktik. Berücksichtigt man ferner das gestiegene Interesse an den kognitiven Funktionen von Metaphern, dann gewinnen Metaphern für die Konstitution eines Faches und für die darin ablaufenden Forschungs-, Kommunikations-, Lehr-, und Lernprozesse enorme Relevanz. Man kann die These wagen, dass wissenschaftliche Theorien nicht nur mittels metaphorischer Sprache vermittelt werden, sondern sogar selbst metaphorisch konstruiert sind. Bevor versucht wird, Argumente für diese These bezogen auf die Mathematik zu finden, soll die Frage, ob Mathematik als Sprache betrachtet werden kann, die von Austin und Howson verneint wurde, noch einmal aufgerollt werden.

### 2.2 Mathematik als Sprache?

Austin/Howson (1979: 176) haben es abgelehnt, von der Mathematik als einer Sprache zu sprechen, mit der Begründung, die Mathematik sei kein Mittel der Kommunikation und falle damit aus der Kategorie der Sprachen hinaus, denn ein notwendiges Merkmal, damit etwas als Sprache klassifiziert werden könne, bestehe gerade seiner kommunikativen Funktion. Pimm (1987: 2f) erinnert jedoch daran, dass die Äußerung *Mathematik ist eine Sprache* nicht zwangsläufig als wörtliches Urteil über die Kategorienzu-



gehörigkeit der Mathematik verstanden werden müsse, sondern metaphorisch wie *Achilles ist ein Löwe* interpretiert werden könne. Auch dort liegt ein semantischer „Fehler“ vor: Der mythische Held Achilles gehört offensichtlich nicht in die Kategorie der Löwen und doch wird ihm genau das prädiert. Da er aber über einige Eigenschaften wie Mut oder Angriffslust verfügt, von denen angenommen wird, dass auch typische Löwen sie haben, verbindet beide eine Ähnlichkeit. Um nun *Mathematik ist eine Sprache* metaphorisch zu verstehen, könnte man also nach Ähnlichkeiten zwischen der Mathematik und prototypischen Sprachen suchen, also nach Merkmalen, die sowohl auf die Mathematik als auch auf einige Vertreter der Klasse der Sprachen zutreffen, die aber vielleicht unter den definierenden Merkmalen des Sprachbegriffs nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die Äußerung wäre als Anweisung zu verstehen, die Mathematik unter einem von unserem Wissen über Sprachen erzeugten Blickwinkel zu betrachten. Im Gegensatz zur metaphorischen Äußerung über Achilles ist hier das Spektrum möglicher Interpretationen wesentlich breiter, da die Vorstellungen über das, was Mathematik auf der einen und Sprache auf der anderen Seite ausmacht, stark divergieren. So wird etwa die Position zum ontologischen Status mathematischer Gegenstände – Platonismus, Konstruktivismus oder Formalismus (vgl. Leopold 1991: 248f) –, der man sich zurechnet, die Interpretation beeinflussen, ebenso wie die Ansicht, ob man unter Sprache vorrangig ein System, eine Fähigkeit oder eine Tätigkeit versteht. Während Platoniker von der absoluten Existenz mathematischer Gegenstände unabhängig vom Menschen überzeugt sind und Sprache für sie die Rolle eines vermittelnden Mediums übernimmt, das aber letztendlich nicht unbedingt notwendig ist, da man mathematische Gegenstände auch irgendwie rein denkend beschauen kann, vertreten extreme Formalisten den Standpunkt, dass es mathematische Gegenstände an sich überhaupt nicht geben kann, sondern nur Zeichen. Konstruktivisten stehen in gewisser Weise da-

zwischen und vereinen Aspekte des Platonismus und Formalismus, indem sie die Existenz mathematischer Gegenstände zwar anerkennen, sie aber nicht absolut setzen, sondern sie nur als Produkt einer semiotischen Begriffsbildung zulassen.

Ein erster Ansatzpunkt, um das Verhältnis von Mathematik und Sprache näher zu beleuchten, ist die einfache Feststellung, dass in der Lehre und Forschung sowohl von mathematischen Experten als auch von Laien Ausdrücke einer natürlichen Sprache gebraucht werden, um mathematische Inhalte zu kommunizieren. Die Mathematik hat also eine eigene Fachsprache. Zur Bezeichnung dieses Aspekts der Mathematik möchten wir den Terminus *Register* aus der Fachsprachenforschung verwenden. Bekannt ist Hallidays Definition als „language variety according to use“ in Abgrenzung zum Dialektbegriff i. w. S. als „language variety according to user“ (Halliday/McIntosh/Stevens 1964: 87). Nach Lüttich-Hess (1998: 210f) können wenigstens drei Dimensionen des Registerbegriffs unterschieden werden: Die erste Dimension, „field of discourse“, betrifft einmal das Thema, über das gesprochen wird, sowie das diesem Thema übergeordnete Sachgebiet, aber auch den Texttyp. Die zweite Dimension, „mode of discourse“, bezieht sich auf das Medium der Kommunikation. Zunächst ist damit die basale Unterscheidung zwischen mündlicher und schriftlicher Sprache gemeint und differenzierter dann die Art und Weise, wie man sich verständigt, d. h. die Textsorte, allerdings immer in Bezug auf die Materialität des genutzten Mediums. In der dritten Dimension, „style of discourse“, wird schließlich das Verhältnis der an der Kommunikation Teilnehmenden erfasst, etwa ob sich Experten untereinander unterhalten oder ein Experte mit einem Laien. Zwar sind alle Dimensionen recht vage und überschneiden sich zum Teil, dennoch wird deutlich, dass der Registerbegriff den thematischen Bezug auf ein Fach mit den im Fach tätigen Gruppen und ihren Texten zusammenbringt. Deshalb ist ein Register mehr als nur ein Sammelbecken

für lexikalische Einheiten. Implizit ist immer der Bezug zu einer Gemeinsprache mitzudenken (vgl. Ammon 1998: 221f), denn selbst wenn alle drei Dimensionen weitgehend konstant gehalten werden, macht es einen Unterschied, ob man ein Register relativ zum Deutschen oder zum Englischen betrachtet. Im Folgenden interessiert uns dasjenige Register des Deutschen, dessen „field“ die Mathematik, genauer die Mengenlehre, ist, dessen „mode“ schriftliche Lehrbuchtexte und Aufsätze in Fachzeitschriften einschließt und dessen „style“ sowohl die Kommunikation zwischen Experten als auch zwischen Experten und Laien im Umfeld der Mathematiklehre umfasst. Es wird als *mathematisches Register des Deutschen* bezeichnet.

Mit dem Registerbegriff ist die natürlichsprachliche Kommunikation in der Mathematik erfasst. Mit gutem Recht kann man nun die Terminologie des mathematischen Registers des Deutschen auf metaphorische Bildungen untersuchen. Jedoch ist damit die Frage nach dem Sprachcharakter der Mathematik nur zu einem Teil beantwortet. Bei anderen Wissenschaften wie der Chemie oder der Physik käme man vielleicht nie auf die Idee, sie als *Sprachen* bezeichnen zu wollen, obwohl auch sie über eigene Register verfügen. Selbst wenn man sagt, dass die Mathematik in großem Umfang von einer formalen Sprache Gebrauch mache, ist das zunächst kein guter Hinweis, denn das trifft ebenso auf Physik und Chemie zu. Jedoch würde kein Physiker oder Chemiker wie ein Formalist behaupten, ihr Gegenstand wäre mit den Zeichen zu identifizieren. Insofern hat die formale Sprache in der Mathematik, auch wenn man sich den radikalen Formalisten nicht anschließt, einen besonderen Status. Doch warum sollte dies eine Metaphernanalyse auch nur am Rande berühren?

Betrachten wir dazu als Beispiel die Definition des Primzahlbegriffs auf drei verschiedenen Ebenen:

---

(1) Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die größer als eins und ausschließlich durch sich selbst und eins teilbar ist.

---

(2) Ein  $x \in \mathbb{N}$  heißt *Primzahl*, wenn  $x \neq 1$  und für alle  $y$  mit  $y|x$   $y = 1$  oder  $y = x$  ist.

---

(3)  $\text{prim}(x) := \neg(x = s(0)) \wedge \forall y (\exists z (y \times z = x) \rightarrow (y = s(0) \vee y = x))$

---

Auf der ersten Ebene werden ausschließlich natürlichsprachliche Ausdrücke des mathematischen Registers des Deutschen verwendet, die entweder wie die syntaktischen Wörter *ausschließlich*, *durch* und *sich* ihre allgemeinsprachliche Bedeutung vollständig behalten haben oder deren Bedeutung sich verändert hat. So ist das Wort *teilbar* zumindest aus sprachhistorischer Perspektive eine metaphorische Übertragung der Bedeutung ‚in Teile zerlegbar‘ auf die multiplikative Kombination natürlicher Zahlen. Unter pragmatischer Betrachtung verliert die Konjunktion *und* die Implikaturen der Sukzessivität und Konnexität und reduziert sich auf die logische Konjunktion. Weiterhin ist über das Einzelwort hinausgehend die Existenzpräsupposition dieser Definition, dass eine Primzahl existiert, gestrichen und muss erst bewiesen werden. Auf der zweiten Ebene, die man als *mathematische Umgangssprache* bezeichnen könnte, verbinden sich Elemente des mathematischen Registers mit Elementen einer formalen Sprache zu einer hybriden Form. Die letzte Ebene schließlich ist gänzlich frei von natürlichsprachigen Ausdrücken und vollständig in der Prädikatenlogik erster Stufe der Peano-Arithmetik formuliert. Hier sind Syntax und Semantik

voneinander getrennt: Zunächst ist (3) nur eine nach den geltenden syntaktischen Regeln dieser Prädikatenlogik gebildete Formel, ihre semantische Interpretation ist davon unabhängig. Sie muss daher nicht zwingend in Bezug auf die üblichen natürlichen Zahlen wie (1) und (2) gelesen werden, da die Peano-Arithmetik verschiedene nicht zu einander isomorphe Modelle hat, die sie erfüllen. Für Lehrbuchtexte und mathematische Aufsätze ist, wenn sie nicht im Rahmen der mathematischen Logik verfasst wurden, die mittlere Ebene charakteristisch. Eine Metaphernanalyse steht nun vor dem Problem, dass Metaphern, die auf der ersten Ebene identifiziert wurden, auf der zweiten Ebene verschwunden sein können. So wird die Beziehung zweier ganzer Zahlen, bei Division den Rest Null zu lassen, auf der ersten Ebene metaphorisch durch das Wort *teilbar* bezeichnet, auf der zweiten Ebene jedoch durch das Zeichen  $|$ , das nicht metaphorisch gebraucht ist. Diese Ersetzbarkeit stellt die Ansicht vieler Metaphertheorien in Frage, dass Metaphern ein notwendiger, erkenntnisrelevanter Bestandteil jeder natürlichen Sprache seien, die nicht ohne Sinnverlust durch etwas Wörtliches substituiert werden können. Besonders brisant wird das Problem, wenn man bedenkt, dass mit der axiomatischen Mengenlehre die gesamte Mathematik in die prädikatenlogische Sprache der Mengenlehre übersetzt werden könnte.

Somit erhält Pimms metaphorische Beschreibung der Mathematik als Sprache mit dem Registerbegriff eine tragfähige Basis, die aber noch durch den Begriff der Notation verstärkt werden soll.

### 2.3 Zum Begriff der Notation

Da Metaphern immer mit Bedeutung, Sinn, Begriffen oder Konzepten zu tun haben, könnte man dazu neigen, sie medienneutral zu konzipieren: Ob man nun *Hans kocht vor Wut* liest oder hört, mache keinen Unterschied

für die Metapherninterpretation. Selbst ein Comic von Hans, der ihn mit hochrotem Gesicht, während aus seinen Ohren Dampf schießt, zeigt, könne dann als Ausdruck derselben Metapher gewertet werden. Insbesondere die kognitive Metaphertheorie versteht Metaphern als mentale Muster, die in verschiedenen Situationen und in verschiedenen Medien realisiert werden können. Für das Beispiel des vor Wut kochenden Hans kann der allen Instantiierungen gemeinsame Typ als WUT IST EINE HEISSE FLÜSSIGKEIT IN EINEM BEHÄLTER beschrieben werden (vgl. Kövecses 1986: 11ff; Lakoff 1987: 380ff). Eine Metapher gleich in welchem Medium zu produzieren oder zu verstehen, heißt damit, ein abstraktes Muster zu realisieren oder zu erkennen.

Die Vorstellung, dass es keinen prinzipiellen Unterschied mache, ob *Hans kocht vor Wut* nun mündlich oder schriftlich hervorgebracht werde, hängt möglicherweise auch mit einem Schriftverständnis zusammen, das Schrift primär als fixierte Sprache, also als ein Medium, dessen Inhalt die Lautsprache ist, versteht.<sup>1</sup> In den „Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft“ liest man dazu:

Sprache und Schrift sind zwei verschiedene Systeme von Zeichen; das letztere besteht nur zu dem Zweck, um das erstere darzustellen. Nicht die Verknüpfung von geschriebenem und gesprochenem Wort ist Gegenstand der Sprachwissenschaft, sondern nur das letztere, das gesprochene Wort allein ist ihr Objekt. (Saussure 2001: 28)

Die Bedeutung eines schriftlichen Sprachzeichens sei somit nichts anderes als das ihm zugeordnete gesprochene Sprachzeichen. Steht also *Hans kocht vor Wut* geschrieben, dann verbindet ein Leser damit zuerst eine gesprochene Äußerung, um diese anschließend metaphorisch zu interpretieren. Dass

---

<sup>1</sup> Für eine kritische Bewertung des „phonographischen Schriftverständnisses“ bieten die Arbeiten von Sybille Krämer einen möglichen Ausgangspunkt, so etwa in Krämer (2000: 34f), Krämer (2003: 158f) oder Krämer (2005: 24f). Für einen allgemeinen Überblick zur wechselhaften Geschichte des Verhältnisses von Logozentrismus und Sprachwissenschaft siehe Dürscheid (2006: 13ff).

diese Sichtweise zu kurz greift, zeigt sich an der Äußerung *Hans' „Akku“ ist leer*, bei deren „Übersetzung“ in gesprochene Sprache die Anführungszeichen verloren gehen, da sie dort kein direktes lexikalisches Analogon haben. Damit wird aber eine metaphorische Interpretation im Sinne von ‚Hans ist erschöpft und müde‘ gegenüber der wörtlichen Bedeutung ‚die wiederaufladbare Batterie von Hans ist leer‘ zumindest unwahrscheinlicher, wenn kein Kontext gegeben ist. Noch deutlicher tritt die Asymmetrie zwischen Geschriebenem und Gesprochenem zu Tage, sobald mathematische Symbole ins Blickfeld geraten:

$$2,69 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}$$

Kann man behaupten, die Bedeutung dieser Kettenbruchdarstellung wäre äquivalent zur Bedeutung von *Zweikommasechsneun ist gleich zwei plus eins durch eins plus eins durch zwei plus eins durch vier plus eins durch zwei plus ein drittel*? Die Verbalisierung gibt die zweidimensionale Struktur des Kettenbruchs nicht angemessen wieder.

Spätestens mit der in Koch/Krämer (2009: 11) diagnostizierten „medienkritischen Wende“ im Laufe der 1960er Jahre beginnt sich die Auffassung durchzusetzen, dass Sprache und Schrift nicht in einem einfachen Korrespondenzverhältnis zueinander stehen und dass Medien zumeist mehr sind als externe Übermittlungssysteme von medienunabhängigen Inhalten (vgl. Fehrmann/Linz 2004: 81). Befreit vom Nimbus des sekundären Zeichensystems kann die Schrift gleichberechtigt und autonom neben die mündliche Sprache treten. Nun rückt die Frage ins Zentrum, „welche Merkmale die gesprochene, welche die geschriebene Sprache trägt und in welchem Verhältnis diese beiden Realisationsformen von Sprache stehen“ (Dürscheid 2006: 23). Schrift wird zu der anderen Form von Sprache neben der gesprochenen Sprache und deshalb wird das, was Schrift charakterisiert, auch im

Kontrast zur mündlichen Sprache bestimmt (vgl. Krämer 2005: 35; Harris 1996: 1559). Damit ist zwar das Problem der Zeichen, die kein Analogon in der mündlichen Sprache haben, gelöst, die formale Sprache der Mathematik bleibt aber immer noch außen vor.

In der Entkopplung von Schrift und Sprache kann aber die Chance für ein alternatives Schriftkonzept liegen: „Schriften sind auch Sprachen; aber sie sind eben nicht *nur* Sprachen“ (Krämer 2005: 24). Es macht also einen Unterschied, ob jemand *Zwei plus zwei macht vier* oder  $2 + 2 = 4$  schreibt. Die Gleichung ist nicht auf eine praktische Kurzform einer natürlichsprachlichen Langform zu reduzieren. Dies gehört auch zu den Einsichten der Kulturwissenschaften:

Die Mathematik benötigt eine besondere Schrift, weil es ohne diese besondere Schrift die Mathematik überhaupt nicht gäbe. Oder anders herum gesagt: Die Art von Mathematik, die es gibt, hängt ganz wesentlich von der verwendeten Schreibweise ab. (Heiden 2002: 251)

In diesem Sinne ist die Mathematik also eine Sprache bzw., genauer gesagt, eine Schrift. Ansonsten gäbe es nur einen graduellen aber keinen prinzipiellen Unterschied zwischen der besonderen Schrift und jeder anderen Schreibweise und man könnte, überspitzt formuliert, jedes mathematische Phänomen vollständig in einer natürlichen Sprache formulieren, was, wie am Beispiel des Kettenbruchs deutlich wurde, jedoch nur eingeschränkt möglich ist. Um der Besonderheit dieser Schrift und ihrer Eigenständigkeit gegenüber der gesprochenen Sprache gerecht zu werden, verwenden wir den Begriff *Notation*.

Um dem Notationsbegriff eine erste theoretische Basis zu verleihen, greifen wir den in Goodman (1995) entwickelten Ansatz auf. Goodman suspendiert zunächst die Unterscheidung von Zeichen nach ihren physikalischen Eigenschaften in schriftliche und mündliche als zweitrangig und fragt stattdessen nach den Merkmalen, die ein Zeichensystem haben muss, um als



*Notation* bezeichnet werden zu können. Ein Symbolsystem besteht nach Goodman (ebd.: 139) aus einem Symbolschema, einem Bezugnahmegebiet und einer Korrelation zwischen beiden. Damit sich ein Symbolsystem *Notation* nennen darf, muss sein Symbolschema gewisse syntaktische Erfordernisse und das Bezugnahmegebiet zusammen mit der Korrelation müssen gewisse semantische Erfordernisse erfüllen. Im Folgenden beschränken wir die Erörterung auf den syntaktischen Bereich, da sich erstens ein und dasselbe Symbolschema auf ganz verschiedene Dinge beziehen kann und andererseits die semantischen Bedingungen fast analog zu den syntaktischen definiert sind.

Jedes Symbolschema besteht aus Charakteren, damit sind Zeichen gemeint, und Kombinationsregeln, um weitere Charaktere zu bilden. Charaktere werden bei Goodman als Klassen von Realisierungen, die er *Marken* nennt, eingeführt.<sup>2</sup> Alle Marken desselben Charakters sind syntaktisch äquivalent und daher untereinander austauschbar, sie sind „echte Kopien“ oder „Replikas“ voneinander (vgl. ebd.: 128). Damit ist nicht gesagt, dass alle Marken eines Charakters vollkommen identisch sein müssen; sie können einander ähnlich sein, aber selbst das wird im Allgemeinen nicht gelten, wie die Buchstaben *a* und *A* zeigen, die keine naheliegende Ähnlichkeit aufweisen, aber dennoch zum selben Charakter gehören. Die Kopie-von-Relation sollte auf allen Marken reflexiv, symmetrisch und transitiv sein, womit dann eine Äquivalenzrelation vorliegt und die Charaktere den Äquivalenzklassen entsprechen. Goodman nennt diese erste Eigenschaft *Charakter-Indifferenz* oder *Disjunktivität*. Aus dem Vorliegen einer Äquivalenzrelation folgt nämlich, dass alle Charaktere paarweise disjunkt sind, sodass also jede Marke zu genau einem Charakter gehört. Als Beispiel für ein Symbolschema, das die Disjunktivität verletzt, stelle man sich Marken in Form

---

<sup>2</sup> *Marke* verwendet Goodman für jede sinnlich wahrnehmbare Spur und ferner noch *Inskription* für jede Marke, die zu einem Charakter gehört. Auf diese terminologische Unterscheidung wird hier verzichtet.

von Quadraten vor und die zwei Charaktere ‚Marken mit einer Seitenlänge ab 5 cm‘ und ‚Marken mit einer Seitenlänge zwischen 7 cm und 12 cm‘. Dann gehört eine Marke mit der Seitenlänge 9 cm zu beiden Charakteren und das Symbolschema ist demnach nicht disjunkt.

Einerseits erscheint die Disjunktivität als eine selbstverständliche Voraussetzung, welche die meisten Symbolsysteme erfüllen, sonst wären Zweifel eine ständige Begleiterscheinung. Andererseits ist es doch in der Praxis teilweise nicht immer ganz einfach, eine konkrete Marke einem Charakter zuzuordnen. Man denke dabei etwa an schwer zu lesende Handschriften. Daraus ergibt sich eine zweite syntaktische Forderung, die Goodman *Endliche Differenzierung* oder *Artikulation* nennt und so definiert:

*Für jede zwei Charaktere  $K$  und  $K'$  und jede Marke  $m$ , die nicht tatsächlich zu beiden gehört, ist die Bestimmung, daß entweder  $m$  nicht zu  $K$  gehört oder  $m$  nicht zu  $K'$  gehört, theoretisch möglich. (Goodman 1995: 132)*

Dies impliziert nicht die stärkere Forderung, dass zu einer Marke immer entschieden werden kann, zu welchem Charakter sie gehört, sondern lediglich dass für jede Marke zumindest theoretisch entschieden werden kann, zu welchem von zwei Charakteren sie nicht gehört. Man erhält also ein Ausschlussverfahren, das iterativ angewendet die Zahl der in Frage kommenden Charaktere verkleinert. Was genau *theoretisch* heißt wird von Goodman nur dahingehend präzisiert, dass „jegliche logisch und mathematisch begründete Unmöglichkeit [...] ausgeschlossen“ (ebd.: 132) ist. Da dies aber nur die offensichtlich unmöglichen Fälle betrifft und da ferner nicht ausgeführt wird, wie ein Differenzierungsverfahren aussehen darf, bleibt dieses Kriterium undeutlich (vgl. Fischer 2009: 89). Das Attribut *endlich* schließt weiterhin nicht aus, dass endlich differenzierte Schemata nicht auch über unendlich viele Charaktere verfügen können. Verletzt wird die endliche Differenziertheit erst dann, wenn ein unendliches Schema zusätzlich auch dicht ist, sodass zwischen zwei Charakteren immer ein dritter liegt und

dieser dritte Charakter von den beiden anderen weniger unterscheidbar ist als diese voneinander (vgl. Goodman 1995: 133).

Beide syntaktische Forderungen sind voneinander unabhängig, sodass sich insgesamt vier mögliche Kombinationen ergeben. Als Illustration werden gerne verschiedene Typen von Uhren genommen: So sind digitale Uhren, welche die Zeit durch Zusammensetzungen der Ziffern 0 bis 9 darstellen, sowohl disjunkt als auch endlich differenziert, analoge Uhren, deren Zeiger sich kontinuierlich bewegen, sind dagegen zwar noch disjunkt, aber nicht mehr endlich differenziert. Von diesen beiden Uhrentypen werden die syntaktischen Erfordernisse einer Notation nur durch den ersten Typ erfüllt, ebenso wie auch „durch unsere vertrauten alphabetischen, numerischen, binären, telegraphischen und elementaren musikalischen Notationen“ (ebd.: 137).

Die beiden goodmanschen Kriterien verleihen dem Notationsbegriff lediglich eine rudimentäre Struktur, der im Folgenden stärkere Kontouren mit Blick auf die besondere Schrift der Mathematik zu verleihen sind. Dazu wählen wir einen Ansatz, der wie bei Goodman nicht die natürlichen Sprachen ins Zentrum der Betrachtung rückt.

## 2.4 Eidetischer und operativer Sinn

Klaus (1963) trifft eine für den Notationsbegriff interessante Unterscheidung zwischen zwei Arten von Sinn, die Zeichen haben können. Dabei versteht er unter dem Terminus *Sinn* „das, was für ein Zeichen in einem gegebenen Zeichensystem insgesamt festgelegt ist, was es mit dem Zeichen auf sich hat“ (ebd.: 92). Ähnlich dem strukturalistischen Modell von Sprache als einem System von Zeichen, in dem jedes Zeichen durch syntagmatische und paradigmatische Beziehungen zu allen anderen Zeichen in Verbindung steht, trägt ein Zeichen bei Klaus Sinn in Relation zu allen

anderen Elementen eines größeren Ganzen, dem es angehört. Klaus erklärt dann einen „operativen“ und einen „eidetischen“ Sinn folgendermaßen:

Der operative Sinn eines Zeichens ergibt sich aus den syntaktischen Beziehungen und Regeln, die in einer Sprache gelten und festlegen, wie Zeichen zu Ausdrücken zusammengesetzt und diese Ausdrücke umgeformt werden können. [...] Der eidetische Sinn (von „eidos“ = Begriff, Idee usw.) ergibt sich aus den Bedeutungs- und Bezeichnungsregeln, die die in einer Sprache geltenden Beziehungen eines Zeichens zu den Begriffen und den durch diese Begriffe abgebildeten Objekten festlegen. (Klaus 1963: 92)

Während also der eidetische Sinn zur Semantik und Sigmatik<sup>3</sup> gehört, wird der operative Sinn der Syntax zugeschlagen. Klaus zufolge verfügen zu Anfang viele künstliche Sprachen nur über Zeichen mit einem operativen aber keinem eidetischen Sinn, jedoch müsse der eidetische Sinn später folgen, sonst verkäme ein Kalkül zum bloßen Spiel mit Zeichenformen. Der umgekehrte Fall, d. h. Zeichen mit eidetischem, aber ohne operativen Sinn, sei nach Klaus indes unmöglich, denn aus der Kenntnis des eidetischen Sinns eines Zeichens ergebe sich in einem entsprechenden syntaktischen System immer auch ein operativer Sinn. Gerade die Mathematik bringe nun Reihenweise Zeichensysteme mit zunächst ausschließlich operativem Sinn hervor. Insbesondere bei der Erweiterung eines mathematischen Bereichs werde häufig vorerst allein der operative Sinn bestimmter Elemente erweitert (vgl. ebd.: 93). Betrachten wir dazu als Beispiel die Zahlenbereichserweiterung der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen. Es seien also die ganzen Zahlen als wohldefiniert vorausgesetzt:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

---

<sup>3</sup> Bei Klaus wird mit *Sigmatik* der Aspekt der allgemeinen Semiotik bezeichnet, der die Beziehungen zwischen Zeichen und den durch sie bezeichneten Gegenständen und Sachverhalten der Wirklichkeit untersucht. Sie kann deshalb auch als *Referenztheorie* bezeichnet werden. Häufig wird die Sigmatik nicht als eigenständiger Bereich, sondern als Teil der Semantik konzipiert.

Dann definiert man eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , d. h. auf allen Paaren ganzer Zahlen mit Ausnahme der Null für das zweite Element, durch:  $(a, b) \sim (c, d)$  falls  $a \cdot d = c \cdot b$ . Das Paar  $(a, b)$  ist als Bruch  $\frac{a}{b}$  zu lesen. Die Menge aller Brüche wird  $\mathbb{Q}$  genannt:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Schließlich definiert man auf dieser Menge die üblichen Verknüpfungen und eine lineare Ordnung, sodass die Struktur der ganzen Zahlen fortgesetzt wird, wenn man  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$  identifiziert. Die Notwendigkeit einer Erweiterung der ganzen Zahlen lässt sich durch die Überlegung motivieren, dass die ganzen Zahlen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen sind, denn jede dieser Operationen auf zwei ganzen Zahlen liefert wieder eine ganze Zahl. Die Division jedoch kann aus dieser Menge herausführen. Um auch Abgeschlossenheit bezüglich der Division zu erreichen, betrachtet man Paare ganzer Zahlen, aus denen man mittels der obigen Äquivalenzrelation Klassen bildet. In dieser Weise erhält man eine Struktur  $\mathbb{Q}$ , für die  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  gilt, die weiter alle Operationen und die Ordnung von  $\mathbb{Z}$  erhält und schließlich abgeschlossen gegenüber der Division ist. Diese Konstruktion ist formal motiviert und wird formal durchgeführt, ohne eine Semantik zu berücksichtigen. Erst danach werden diese neu gewonnenen rationalen Zahlen dann eidetisch interpretiert, etwa als Bruchzahlen, die Teile eines Ganzen bezeichnen. Hier muss hinzugefügt werden, dass dieser formale Ansatz, neue Strukturen zu generieren, wohl vor allem in der Mathematik als Wissenschaft vorherrscht, während in der Schulmathematik häufig der umgekehrte Weg gegangen wird und man vom eidetischen Sinn ausgeht. Ebenfalls wird nicht behauptet, dass die rationalen Zahlen auf diese Weise historisch entwickelt wurden, jedoch ist es heute ein gängiges Konstruktionsverfahren und bezieht daher seine Relevanz.

Insgesamt scheint Klaus' Unterscheidung nicht allzu neu zu sein, werden doch in der Sprachwissenschaft schon weitaus länger folgende ähnliche Begriffspaare verwendet:

---

Autosemantika	–	Synsemantika
Begriffs- oder Inhaltswörter	–	Funktionswörter
Vollwörter	–	Strukturwörter
lexikalische Bedeutung	–	grammatische Bedeutung

---

Hinter diesen Unterscheidungen steht die Frage, ob es zwei prinzipiell verschiedene Arten von Wortbedeutung gibt. Mit einer positiven Antwort verbindet sich auch der Wunsch, auf dieser Unterscheidung zwei grundsätzlich voneinander getrennte Wortklassen zu definieren. Um nun Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Klaus' Begriffspaar und den oben genannten Begriffen herauszuarbeiten, beschränken wir uns auf das Begriffspaar *Auto-/Synsemantikon* und werden im Folgenden kurz wesentliche Eigenschaften, die mit diesen beiden Begriffen assoziiert werden, diskutieren. Wir orientieren uns dabei an der Darstellung in Brauße (1994).

Autosemantische Wörter verfügen sowohl über eine lexikalische als auch über eine grammatische Bedeutung. Für die Grammatikschreibung folgt daraus, dass beispielsweise in einer Unifikationsgrammatik Lexeme meist mit einem Eintrag für ihre Lautstruktur und einem Eintrag für ihren Inhalt, der sich in einen semantischen und einem syntaktischem Aspekt aufgliedert, repräsentiert werden. Durch ihre lexikalische Bedeutung kann mit Autosemantika aus der außersprachlichen Wirklichkeit etwas ausgegliedert werden. Typische Vertreter sind Repräsentanten der Wortarten Substantiv, Verb, Adjektiv oder Adverb. Dies umreißt eine weite Begriffsauffassung, neben der auch eine enge Verwendung findet, die mit einem entsprechend

weiten Synsemantikon-Begriff einhergeht. Autosemantische Wörter i. e. S. haben an und für sich Bedeutung, sodass man auch beim isolierten Nennen eines Autosemantikons ohne jeden Kontext immer eine vollständige Bedeutung angeben kann. Ein Wort wie *Mitglied* gehört dann nicht mehr zu den Autosemantika i. e. S., weil es an und für sich nur eine eingeschränkte Bedeutung mit Leerstellen aufweist und nach einer Ergänzung verlangt, etwa in Form von *Mitglied des Bundestags* oder dergleichen. In diesem Fall trennen die beiden Begriffe *Auto-* und *Synsemantikon* nicht mehr zwischen zwei Gruppen von Wortarten, sondern verlaufen innerhalb einzelner Wortarten. Zudem ist zu beachten, dass die Unterscheidung hier auf Seiten des Sprachsystems diskutiert wurde. Auf der Ebene der parole ist ein Imperativ wie *Kauft!* autosemantisch, während *kaufte* synsemantisch ist, da ihm valenznotwendige Ergänzungen fehlen, ohne die seine Bedeutung lückenhaft bleibt.

Die Synsemantika auf der anderen Seite lassen sich von den Autosemantika abgrenzen: Sie besitzen nur grammatische Bedeutung, gliedern deshalb nichts aus der außersprachlichen Welt aus, können also auch nicht referieren und verweisen auf keine Begriffe. Typische Vertreter sind dann Wörter der Wortarten Präposition oder Konjunktion. Dass diese Bestimmung problematisch ist, wird schon an einer Präposition wie *auf* deutlich, deren Bedeutung sicherlich mehr umfasst als die grammatische Informationen, dass sie eine Nominalphrase im Dativ oder Akkusativ regiert, zumal diese Kasusunterscheidung direkt mit einer semantischen Unterscheidung zusammenhängt. Einer anderen Vorstellung zufolge können Synsemantika zwar keine Konzepte bezeichnen, dienen aber dazu zwischen diesen Relationen herzustellen. So vermittele beispielsweise die Konjunktion *und* eine Aneinanderreihung der von zwei autosemantischen Einheiten bezeichneten Begriffe, die Konjunktion *aber* einen Gegensatz.

Obwohl die Begriffe nicht einheitlich gebraucht werden, zeigt sich doch, dass in der Regel eine Hierarchie zwischen ihnen mitgedacht wird: Die autosemantischen Wörter sind gegenüber den synsemantischen primär, was sich schon an der Bildung von *syn-semantikon*, wörtlich *Mit-Bezeichner*, zeigt, also ein Wort, das nur zusammen mit einem Vollwort seine Funktion wahrnehmen kann. Synsemantika sind daher in gewisser Weise defizitär, weil ihnen eine Bedeutungskomponente fehlt. Zudem ist es erwiesen oder wird in anderen Fällen als plausibel angenommen, dass viele synsemantische Wörter durch Verblässen der lexikalischen Bedeutung aus Autosemantika entstanden sind, z. B. Präpositionen aus Adverbien. Autosemantika werden daher stellenweise auch als *eigentliche Wörter* bezeichnet.

Klaus' Begriffspaar unterscheidet sich davon in folgenden Punkten: Erstens ist das Paar *operativ/eidetisch* auf Zeichen im Allgemeinen bezogen und nicht auf natürlichsprachliche Wörter beschränkt. Zweitens vermeidet es Klaus, eine Hierarchie zwischen den Begriffen zu konstruieren:

Es mag also so aussehen, als sei eben dieser eidetische Sinn letztlich das dem operativen Sinn von Zeichenreihen Übergeordnete. Aber andererseits zeigt uns die Praxis, daß wir den eidetischen Sinn wissenschaftlicher Gedankenkomplexe vielfach erst im Prozeß der Handhabung des operativen Sinns richtig erfassen. (Klaus 1963: 98)

Zusätzlich gestattet er, wie oben an der Konstruktion der rationalen Zahlen verdeutlicht, eine Umkehrung der Chronologie von Auto- und Synsemantika, sodass Zeichen mit ausschließlich operativer Bedeutung nachträglich eine eidetische Interpretation zugewiesen werden kann. Schließlich hebt die Bezeichnung *operativ* das mechanisch Prozesshafte an der Zeichenbenutzung nach syntaktischen Regeln hervor.

Der Begriff des operativen Sinns rückt so in die Nähe zum Begriff der operativen Schrift bei Sybille Krämer, da sich das Adjektiv *operativ* in beiden Fällen auf die Möglichkeit, Zeichen nach formalen Regeln zu manipulieren,



bezieht. Die Zeichentransformationen greifen dabei zwar auf die syntaktische Form der Zeichen zurück und erfolgen so unabhängig eventueller semantischer Interpretationen, jedoch mit dem Ziel semantische Argumentationen syntaktisch nachzubilden:

Es ist ein typisches Kennzeichen der Entwicklung abstrakter Bereiche in den Wissenschaften, daß von der Bearbeitung der Dinge zur Verarbeitung von Gedanken über die Dinge übergegangen wird, daß das Operieren mit Gedanken durch Manipulieren mit Zeichen ersetzt wird. (ebd.: 20)

Krämer folgert darüber hinaus, dass Kalküle, weil Zeichenformen schrittweise umgewandelt werden, stabil sein müssen und daher bevorzugt im Medium der Schrift repräsentiert werden. Wie Klaus weist auch sie darauf hin, dass die Zeichen irgendwann interpretierbar werden müssen, denn nur so seien sie für das wissenschaftliche Problemlösen von Belang. Allerdings lassen sich kalkülmäßige Manipulation und Interpretation trennen. Mit Klaus gesprochen heißt das, dass etwa beim Rechnen mit Zahlen ihr operativer Sinn völlig ausreicht und man den eidetischen problemlos, zumindest zeitweise, vergessen kann. So muss man, um zwei arabische Zahlen miteinander multiplizieren zu können, das Einmaleins der Zahlen Null bis Neun kennen und einen entsprechenden Algorithmus. Ob die Zahlen dabei als Entfernungen, Zeitangaben oder Kontostände interpretiert werden, kann für die Berechnung vernachlässigt werden. Krämer gelangt so zur Metaphorisierung des Kalküls als „symbolische Maschine“ (Krämer 2005: 45), die zunächst auf dem Papier rechnet. Schließlich wird diese maschinelle Verarbeitung aus dem Zeitalter der Gutenberg-Galaxis dem Computer übertragen, der nichts weiter kann, als Zeichen ihrem operativen Sinn nach zu verändern, zum eidetischen hat er keinen Zugang.

Von Goodman bekamen wir das Grundgerüst unseres Notationsbegriffs und Klaus steuert nun den Oberbau hinzu. Die mathematische Notation ist unabhängig von natürlichen Sprachen als ein Medium zu denken, in

dem Zeichen entsemantisiert allein nach syntaktischen Regeln manipuliert werden können. Sie erfüllt damit mehr als nur eine reine Darstellungsfunktion, sie ist „zugleich ein Werkzeug des Geistes, eine Denktechnik und ein Intelligenzverstärker“ (Krämer 2003: 171). Die Konsequenzen einer Entsemantisierung für eine Metaphernanalyse wie auch für die Metapherntheorie liegen auf der Hand: Wenn die Semantik für bestimmte Handlungen entbehrlich ist, dann sind es die Metaphern ebenfalls. Dazu erinnere man sich des Modells der drei Ebenen, auf denen mathematisch argumentiert werden kann. Zwar werden mathematische Argumentationen selten vollständig formalisiert geführt oder an eine Maschine delegiert, wie dies auf der letzten Ebene möglich wäre, deshalb kann diese Funktion der Notation jedoch nicht zur Nebensache reduziert werden, da auf der mittleren Ebene natürliche Sprache und Notation zu einer hybriden Form zusammenkommen. Eine Lösung bietet die kognitive Metapherntheorie an, deren Vorschlag in den folgenden Kapiteln untersucht wird.

## 3 Metaphertheorie

### 3.1 Überblick

In Abwandlung eines berühmten Satzes aus der Metaphertheorie lässt sich zum Verhältnis von Linguistik und Metapher sagen: Die Metapher ist der allgegenwärtige Gegenstand der Sprachwissenschaft. Das trifft so im Prinzip auch auf viele andere Disziplinen wie Philosophie, Psychologie, Literaturwissenschaft oder die Kognitionswissenschaften zu. Dabei sah es mit dem metaphorischen „Schiffbruch‘ der Rhetorik“ (Haverkamp 1996: 3) noch so aus, als würde die Geschichte der Metapher dort ihr Ende finden. Jedoch gelang es der Metapher nicht nur, vor allen anderen Tropen und Figuren das rettende Ufer zu erreichen, sondern sogar anschließend unter eigener Flagge weiterzusegeln.

Besonders seit den 1970er Jahren intensiviert sich erneut die Auseinandersetzung mit der Metapher, in deren Folge eine unüberschaubare und bis heute wachsende Fülle an Theorien und empirischen Untersuchungen entsteht.<sup>1</sup> Darunter markiert das Buch „Metaphors we live by“ von George Lakoff und Mark Johnson die Geburt der kognitiven Metaphertheorie. Die Autoren möchten ihre Metaphertheorie darüber hinaus gerne als ein alles umwerfendes und kein Stein auf dem anderen lassendes Ereignis verstanden wissen. Eines haben sie ohne Zweifel erreicht:

Wer am Beginn des 3. Jahrtausends über Metaphern sprechen will, kann an Lakoff und seinen Mitstreitern nicht vorübergehen. (Coenen 2002: 207)

---

<sup>1</sup> Für einen Teilüberblick über verschiedene Metaphertheorietypen und eine aktuelle deutschsprachige Bibliographie siehe Rolf (2005).

Sie haben jedoch auch einen äußerst zweifelhaften Mythos genährt, der sich beispielsweise in folgender Einschätzung von Sford zu Metaphertheorien vor der kognitiven Wende niederschlägt:

After all, metaphor has always been regarded as belonging almost exclusively to the domain of poetry and literary prose; and even if detected in other kinds of text, it was considered as a marginal phenomenon, a curiosity rather than anything that should be taken seriously. (Sford 1997: 340)

Erst mit der kognitiven Metaphertheorie, so könnte man fortsetzen, habe man sich endgültig vom Irrglauben, Metaphern taugten nur in der Dichtung als ausschmückendes Ornament, befreit und endlich ihr volles Potential für den alltäglichen Sprachgebrauch und darüber hinausgehend für jedwedes Denken und Handeln erkannt. Alles, was zuvor gewesen war, habe die Metapher in ihrer kognitiven Reichweite völlig unterschätzt und als Randphänomen abgefertigt, das zwar in der Dichtung seinen Stellenwert habe, aber überall dort, wo man genau und präzise arbeiten müsse und es auf Wahrheit ankomme, vermieden werden müsse, um nicht Opfer vager Interpretationen zu werden. Von älteren Arbeiten, die zumindest Teile der kognitiven Metaphertheorie vorweggenommen haben, nennt Sford (ebd.: 342f) lediglich Black ([1954] 1996) und Reddy (1993), weil sie unter den Ersten gewesen seien, die auf die Fähigkeit von Metaphern, neue Bedeutungen zu generieren, verwiesen und so einen Beitrag zur Überwindung des in ihren Augen bis dahin allein auf die schmückende Funktion fixierten Metapherndiskurses geleistet haben. Diesem Mythos vom Übergangslosen Bruch in der Geschichte des Metaphernbegriffs ist in mehrerlei Hinsicht zu widersprechen: Burkhardt (1987: 45f) zum Beispiel zeigt, wie schon Bühler (1982) oder Weinrich (1967) Ideen, die sich die kognitive Metaphertheorie gerne selbst zuschreibt, entwickelt hatten, bevor diese von Lakoff und Johnson neu entdeckt wurden. Nun könnte man die Unkenntnis dieser Arbeiten mit dem Argument verteidigen, es handele sich bei beiden Autoren um

europäische Wissenschaftler, deren Gedanken zur Metapher schon hierzulande nicht immer unbedingt zum metaphortheoretischen Standardwerk gehörten und die man aus amerikanischer Perspektive dann einfach übersehen habe. Jedoch trägt Jäkel (2003: 113f) eine detaillierte Auflistung von Vorläufern der kognitiven Metaphertheorie zusammen, von denen er besonders Benjamin Lee Whorf und John Locke hervorhebt, die Lakoff und Johnson bekannt gewesen sein müssen. Insgesamt ist kognitive Metaphertheorie also weniger ein radikaler Umwurf aller vorherigen Positionen als vielmehr die Fortsetzung der über zweitausendjährigen Geschichte des Metaphernbegriffs, über deren Ausgang auch mit „Metaphors we live by“ noch längst nicht entschieden ist.

Am Anfang dieser Geschichte steht Aristoteles, der manchmal als erster Ansatzpunkt einer Metaphertheorie gewählt, häufig aber nur als Vertreter einer als überholt angesehenen traditionellen Rhetorik zitiert wird, um ihm allerlei Versäumnisse vorzuwerfen und um sich dann zügig von ihm zu distanzieren. Bevor die kognitive Metaphertheorie ausführlich dargestellt und bewertet wird, soll die dort geschmähte aristotelische Konzeption betrachtet werden, denn es lässt sich durchaus behaupten, dass sich Lakoff/Johnson/Turner gar nicht so weit von ihr entfernt haben, wie sie es vorgeben. Durch die folgende Darstellung könnte der Eindruck erweckt werden, dass die Geschichte der Metaphertheorien bei Aristoteles anfängt, sich mit Quintilian und der lateinischen Rhetorik fortsetzt, dann scheinbar für anderthalb Jahrtausende einen Blackout erlebt, bis plötzlich im Laufe des 20. Jahrhunderts das Licht wieder angeht. Das ist zwar fraglos falsch, jedoch wird der Zwischenbereich hier zugunsten einer intensiveren Gegenüberstellung zweier Theorien ausgespart.

Bevor nun Aristoteles zu Wort kommt, sollen kurz zwei einfache Typologien von Metaphertheorien diskutiert werden, die helfen auch Aristoteles einzuordnen.

## 3.2 Zwei einfache Typologien von Metaphertheorien

Zunächst lassen sich Metaphertheorien nach der Art des verwendeten Metaphernbegriffs unterscheiden, ob er weit oder eng und ob er attributiv oder relational gebraucht wird (vgl. Lieb [1967] 1996: 340ff). Die erste Unterscheidung nach der Extension versteht sich als Frage, ob die Nachbarbegriffe *Metonymie* und *Synekdoche* als Hyponyme oder Kohyponyme zu *Metapher* aufgefasst werden. Im Laufe seiner Begriffsgeschichte hat sich der Umfang des Metaphernbegriffs mehrfach geändert: Nachdem Aristoteles einen weiten Metaphernbegriff verwendet hatte, ging die lateinische Rhetorik in der Folge zu einem engeren über und ordnete die Metapher in ein System von Tropen ein, bis im 20. Jahrhundert auch wieder der weite Metaphernbegriff in Mode kam. Die zweite Unterscheidung betrifft die Frage, ob der verwendete Begriff eine Eigenschaft eines Wortes, einer Äußerung oder eine Relation zwischen Wörtern, Bedeutungen oder Gegenständen bezeichnet. Wird die Metapher etwa als uneigentlicher Gebrauch eines Wortes definiert, dann liegt ein attributiver Begriff vor; er bezeichnet eine Eigenschaft der Verwendung eines Wortes. Sagt man dagegen, die Metapher sei die Anwendung eines Wortes auf einen Gegenstand, zu dem es eigentlich nicht gehöre, so ist dies ein relationaler Begriff, da hier die dreistellige Relation zwischen einem Wort und zwei Gegenständen, nämlich dem Gegenstand, den das Wort üblicherweise bezeichnet, und dem Gegenstand, auf den das Wort im vorliegenden Fall angewendet wird, als *Metapher* bezeichnet wird. Diese beiden Unterscheidungen ergeben formal zwei mal zwei verschiedene Begriffstypen, nach denen sich eine Metaphertheorie klassifizieren lässt. Zumeist werden aber Mischformen anzutreffen sein, weil sich ein relationaler Begriff zu einem attributiven „kürzen“ lässt. So bestimmt Aristoteles den Metaphernbegriff zunächst relational als dreistellige Beziehung zwischen zwei Begriffen und einem Wort, verwendet ihn später aber ebenso attributiv für die Eigenschaft eines Wortes in eben die-

ser Relation zu stehen.

Eine andere, zwar stark reduzierte aber zugleich äußerst einflussreiche Typologie der Metapherntheorien hat Black ([1954] 1996: 60ff) entworfen. Er unternimmt keine logische Klassifikation von Begriffstypen, sondern fragt nach der Art und Weise, wie eine Theorie erklärt, was eine metaphorische Äußerung bedeutet und wie man zu dieser Bedeutung gelangt. So ergeben sich bei ihm lediglich drei Typen: Substitutions-, Vergleichs- und Interaktionstheorien.

Einer Theorie der Substitution zufolge ersetzt ein metaphorischer Ausdruck in einer Äußerung einen wörtlichen Ausdruck. Dabei unterscheidet sich die metaphorische Äußerung in ihrer Bedeutung nicht von ihrer korrespondierenden wörtlichen Äußerung, sondern nur in der Weise, wie man zu dieser Bedeutung gelangt: Wörtlich gebrauchte Ausdrücke versteht man direkt Kraft einer bestehenden Konvention, bei den metaphorisch gebrauchten Ausdrücken muss die eigentlich gemeinte Bedeutung – also die wörtliche Bedeutung des Ersetzten – erst erschlossen werden. Anstatt also beispielsweise wörtlich *Frank ist aggressiv* zu sagen, entscheidet sich ein Sprecher metaphorisch *Frank ist ein Gorilla* zu äußern und es ist am Hörer, die Substitution rückgängig zu machen, um hinter die gemeinte Bedeutung zu kommen. Wer metaphorisch spricht, gibt seinem Rezipienten eine Aufgabe, die er zu lösen hat: „Das Verstehen einer Metapher gleicht dem Entziffern eines Codes oder dem Auflösen eines Rätsels“ (ebd.: 63). Bei der Ver- und Entschlüsselung bedienen sich Sprecher und Hörer einer Ähnlichkeit oder Analogie zwischen den beiden Gegenständen, die durch das Ersetzte und das Ersetzende wörtlich bezeichnet werden.

Von Vergleichstheorien dagegen wird behauptet, „daß eine Metapher in der *Darstellung* der zugrundeliegenden Analogie oder Ähnlichkeit besteht“ (ebd.: 66). Diese Theorien bilden eine Teilmenge der Substitutionstheorien, da sie annehmen, jede metaphorische Äußerung ließe sich durch einen

in der Bedeutung äquivalenten wörtlichen Vergleich ersetzen. Um *Frank ist ein Gorilla* zu verstehen, muss diese metaphorische Äußerung in den wörtlichen Vergleich *Frank ist wie ein Gorilla* durch Hinzufügen der Vergleichspartikel *wie* umgewandelt werden. Metaphern sind demnach elliptische Vergleiche, bei denen den Vergleich explizit anzeigende Wörter vom Sprecher gestrichen worden sind und vom Hörer wieder ergänzt werden müssen. Dieser für das Verstehen notwendige Anreicherungsprozess einer metaphorischen Äußerung zu einem vollen Vergleich ist aber, wie Schroeder (2004: 72ff) zeigt, kein mechanisch durchzuführender Vorgang, bei dem immer nur eine Vergleichspartikel zu ergänzen wäre, weshalb die Bezeichnung *Ellipse* auch unglücklich gewählt ist. Speziell dann, wenn eine Analogie zugrunde liegt, müssen möglicherweise noch weitere Glieder der Analogie hinzugefügt werden, die in der Metapher nicht genannt wurde.

Diese beiden Theorietypen hält Black für unzureichend und entwirft eine alternative Theorie, die er *Interaktionstheorie* nennt. Ohne seine Theorie an dieser Stelle ausführlich darzulegen, läuft es darauf hinaus, dass ein metaphorisch gebrauchtes Wort – der Fokus – in einer Äußerung, – dem Rahmen – „eine neue Bedeutung gewinnt, die weder genau seiner Bedeutung im wörtlichen Gebrauch noch genau der Bedeutung eines wörtlichen Substituts entspricht“ (Black [1954] 1996: 69). Diese neue Bedeutung wird durch eine Interaktion, ein Zusammenwirken zweier Vorstellungen, die in der metaphorischen Äußerung mit den wörtlichen Bedeutungen assoziiert werden, erzeugt. Die Interaktionstheorie sei weder mit der Vergleichstheorie noch mit der Substitutionstheorie verträglich, da Black davon ausgeht, dass es im Allgemeinen keinen wörtlichen Ausdruck gebe, der sich an die Stelle einer metaphorischen Äußerung einsetzen ließe. In einem späteren Aufsatz macht er aber das Zugeständnis, dass jede Metapher eine Ähnlichkeit oder Analogie vermittele und die Vergleichstheorie in diesem Punkt also richtig liege (vgl. Black [1977] 1996: 396).



Pielenz ergänzt diese Dreiteilung mit dem Kriterium, „ob das Verstehen und Erzeugen von Metaphern als ein *kognitiver Prozeß* aufgefaßt wird“ (Pielenz 1993: 59ff). Bejaht eine Theorie diese Frage, dann nennt er sie „konstruktivistisch“, ansonsten heißt sie „nicht-konstruktivistisch“. Darin ist, kaum versteckt, eine Wertung zu erkennen: Konstruktivistische Theorien sind die angemessenen Theorien, da sie Metaphern als Ergebnis kognitiver Konstruktionsprozesse begreifen, während nicht-konstruktivistische Theorien die Metapher als abweichenden, unredlichen Sprachgebrauch ohne jeden kognitiven Effekt diffamieren, den man von objektiver Wissenschaft besser fern halte. Substitutions- und Vergleichstheorien zählt Pielenz zum zweiten, schlechten Typ, wogegen er Interaktionstheorien zur ersten Sorte rechnet.

Die Frage, welchem dieser drei Typen nun die aristotelische Metapherntheorie zuzuordnen ist, wird ganz unterschiedlich beantwortet: Vielfach wird davon ausgegangen, es handele sich um die erste Substitutionstheorie (vgl. Kurz 1993: 7ff), sie wird aber auch als Vergleichstheorie (vgl. Eggs 2001: Sp. 1103) oder schließlich als eine Art hybride Form (vgl. Burkhardt 1990: 311) klassifiziert. Diese Frage ist keine terminologische Spielerei, da die Klassifizierung wertend gebraucht wird. Kann man einer Theorie nachweisen, dass sie dem Substitutionsgedanken anhängt, berechtigt dies, sie zu verwerfen.

### 3.3 Die erste Metapherntheorie: Aristoteles

Debatin fasst die Ambivalenz, die der aristotelischen Metapherntheorie entgegengebracht wird, so zusammen:

Einerseits hebt sie [die aristotelische Metapherntheorie] die schöpferische und kognitiv-praktische Erkenntnisfunktion und damit einen zentralen rationalen Aspekt der Metapher hervor, andererseits hat sie mit der Eingrenzung der Metapher auf den Bereich der Rhetorik und der Ästhetik und mit

ihrer ontologischen Wortsemantik die Um- und Abwertung der Metapher und ihren späteren Ausschluss aus dem rationalen Diskurs möglich gemacht. (Debatin 1995: 14/15)

Am Anfang dieser fast schon mythisch aufgeladenen Geschichte von der Schöpfung und Irreführung eines Begriffs steht die berühmte Definition in Kapitel 21 der „Poetik“ zur sprachlichen Ausgestaltung einer Tragödie:

Eine Metapher ist die Übertragung eines Wortes (das somit in uneigentlicher Bedeutung verwendet wird), und zwar entweder von der Gattung auf die Art oder von der Art auf die Gattung, oder von einer Art auf eine andere, oder nach den Regeln der Analogie. (Aristoteles 2006: Poet. 21; 67)

Bemerkenswert an dieser Bestimmung ist zunächst, dass der von Aristoteles verwendete griechische Terminus *μεταφορά* als Wortbildung zum Verb *μεταφέρω* mit der Bedeutung ‚anderswohin tragen, übertragen‘ von Beginn an selbst eine Metapher – eine Meta-Metapher – ist, da das Wort vom Bereich des Transports physischer Gegenstände auf die Sprache übertragen ist. Das Sprechen über Metaphern ist demnach von Anfang an selbst metaphorisch und es ist zu einem Gemeinplatz der Metaphertheorie geworden, dass es auch gar nicht anders möglich ist, als über Metaphern nur wieder in Metaphern zu sprechen. Aristoteles’ Theorie wurde häufig negativ bewertet, weil man ihn beschuldigt hat, der Begründer des wenig beliebten Theorietyps der Substitutionstheorien zu sein. Die Einordnung der aristotelischen Metaphertheorie ist jedoch allein deshalb schon kontrovers, weil der altgriechische Text verschieden übersetzt werden kann. Für die Frage nach dem Theorietyp ist insbesondere das Adjektiv *ἄλλότριος* mit der Bedeutung ‚fremd, einem anderen gehörig‘ entscheidend. In der Übersetzung von Manfred Fuhrmann, der wir hier folgen, ist es nur implizit durch das Wort *Übertragung* wiedergegeben, das die Bewegung eines Objekts von einem Bereich in einen anderen bezeichnet. Das kann im Sinne einer Substitution gelesen werden, bei der ein Wort von seinem eigentlichen Bereich

in einen anderen übertragen wird und dort das eigentliche Wort – *verbum proprium* in der lateinischen Rhetorik – ersetzt. Eggs hält diese Übersetzung, eben gerade weil sie diese Interpretation zulässt, für verfälschend, und möchte die Stelle stattdessen durch „das Übertragen [...] eines *anderen* Wortes“ (Eggs 2001: 1103) übersetzen. Dann komme seiner Ansicht nach Aristoteles’ begriffsrealistische Sprachauffassung besser zur Geltung und man könne nachvollziehen, dass es um die Übertragung eines Wortes von der Sache, die es konventionell bezeichnet, auf eine andere Sache gehe und nicht um die Ersetzung eines Wortes durch ein anderes. Dass Aristoteles die Metapher tatsächlich von den Begriffen her zu denken scheint, wird durch seine ersten drei Typen, die entlang einer Begriffspyramide funktionieren, bestätigt. Mit Eggs vergleichbar ist die Übersetzung, die sich bei Bühler in einer Fußnote findet: „Metapher ist Einführung eines fremdartigen Wortes [...]“ (Bühler 1982: 342, Anm. 1). Auch hier bezeichnet der Terminus *Metapher* eine Relation zwischen zwei Begriffen und einem Wort. Wenn man die aristotelische Metapherntheorie wenigstens provisorisch als *Übertragungstheorie* bezeichnen würde, könnte man sich dem Streit der Zuordnung ein Stück weit entziehen, zumal der Begriff der Übertragung, wie Lieb schreibt, eine Substitution nicht aus-, sondern einschließt:

Wenn [...] „Ersetzung“ eines Zeichens durch ein anderes vorliegt, dann liegt stets auch „Übertragung“ eines Zeichens von etwas auf etwas anderes vor (das Umgekehrte gilt nicht ohne weiteres). In diesem Sinne lassen sich alle „Ersetzungs“-Begriffe auf „Übertragungs“-Begriffe zurückführen. (Lieb [1967] 1996: 349)

Ebenso wäre damit die Ansicht, Aristoteles habe eine Vergleichstheorie vertreten, bedient, da man immer sagen könnte, dass der Übertragung ein Vergleich, im Sinne einer Analogie, zugrunde liege.

Trotz der Fragwürdigkeiten, die eine Klassifizierung als reine Substitutionstheorie mit sich bringt, dominiert diese Vorstellung jedoch im Umfeld der kognitiven Metapherntheorie. So findet sich auch bei Jäkel, der zwar

die Kritik von Lakoff/Johnson am aristotelischen Modell für zu pauschal und undifferenziert hält (vgl. Jäkel 2003: 90), dennoch folgende Passage:

Die Metapher ist demnach eine Redefigur des "uneigentlichen" Sprechens, abweichend vom normalen Sprachgebrauch. Dabei findet eine Ersetzung (engl. *substitution*) des eigentlich Gemeinten [...] durch einen anderen Ausdruck statt, der durch Übertragung (*transposition*) aus seinem eigentlichen Bereich "entliehen" wird. (ebd.: 86)

Sein Hauptargument, um diese nach Eggs gewagte Interpretation zu stützen, bezieht sich maßgeblich auf eine Stelle aus der „Poetik“, die Jäkel jedoch nur sehr stark gekürzt zitiert und deren Kontext er ganz verschweigt.<sup>2</sup> Die betroffene Passage lautet vollständig:

Wenn man nämlich die Glossen und Metaphern und die übrigen Arten durch die üblichen Wörter ersetzt, dann kann man erkennen, daß wir richtig urteilen. (Aristoteles 2006: Poet. 22; 75)

Bei Jäkel bleibt davon nur „die Metaphern ... durch die üblichen Wörter ersetzt“ (Jäkel 2003: 87) übrig. So zitiert, entsteht tatsächlich der Eindruck, als könnten Metaphern jederzeit durch die üblichen Wörter ersetzt werden, als könnte ihre Bedeutung mittels einer Äußerung, die nur wörtliche Ausdrücke enthält, paraphrasiert werden, womit der Substitutionsgedanke offen zu Tage treten würde. Durch die Kürzung geht allerdings die Konditionalsatzkonstruktion verloren, zu der das Zitat gehört. Liest man den vollständigen Satz, erkennt man, dass die Ersetzung der Metaphern durch die üblichen Wörter ein Urteil, also eine vorher gefasste These, bestätigen soll. Gegenstand dieses Urteils ist aber nicht die Frage, ob Metaphern sich verlustfrei in wörtliche Ausdrücke überführen lassen, sondern die Suche nach dem rechten Stil, der sich für Aristoteles dann einstellt, wenn die

---

<sup>2</sup> Lakoff/Johnson verzichten sogar ganz auf Textbelege und folgern mit Hilfe ihrer eigenen Theorie der konzeptuellen Metaphern über Aristoteles' Sprachkonzeption: „[...] if a metaphorical linguistic expression [...] was to have any meaning at all, it had to be some other literal meaning. That's the only kind of meaning there is for Aristotle.“ (Lakoff/Johnson 1999: 383)

sprachliche Form „klar und zugleich nicht banal“ (Aristoteles 2006: Poet. 22; 71) ist. Er gliedert daraufhin die sprachlichen Mittel in zwei Gruppen, wovon die eine Klarheit aber auch Banalität erzeuge, während die andere Exotik zu Lasten der Klarheit hervorrufe:

Denn die eine Gruppe bewirkt das Ungewöhnliche und Nicht-Banale, nämlich die Glosse, die Metapher, das Schmuckwort und alle übrigen genannten Arten; der übliche Ausdruck hingegen bewirkt Klarheit. (ebd.: Poet. 22; 73)

Aristoteles geht es um den angemessenen Gebrauch von Metaphern und Glossen, um das richtige Mischungsverhältnis von Ungewöhnlichem und Üblichem. Zu viel des Ungewöhnlichen und es entstehe im Falle der Metapher ein Rätsel und im Falle der Glosse ein Barbarismus, also ein unverständlicher Dialektausdruck, zu wenig des Ungewöhnlichen mache die Dichtung dagegen langweilig. An einem Beispiel will er demonstrieren, wie welches sprachliche Mittel wirkt, was passiert, wenn das Mischungsverhältnis verändert wird. Dies bildet dann den Kontext, in den das Zitat gehört. Hier sind also mit der Phrase *die üblichen Wörter* nicht wörtliche Ausdrücke, die den Metaphern entsprechen, gemeint, sondern allgemein Wörter, die nicht metaphorisch gebraucht sind. Aristoteles behauptet also keineswegs an dieser Stelle, dass sich Metaphern verlustfrei durch wörtliche Ausdrücke substituieren ließen, sondern vergleicht nur die Wirkung von unmetaphorischer und metaphorischer Rede in Bezug auf die Dichtkunst im Allgemeinen.

Die Übertragung eines Wortes kann nun nach Aristoteles auf vier verschiedene Weisen erfolgen, die sich in zwei Gruppen sortieren lassen. Die ersten drei Formen gehen alle Kombinationsmöglichkeiten von Übertragungen zwischen Gattung und Art durch. So ist z. B. in *Mein Schiff steht still* das Verb *stillstehen* von der Gattung auf die Art, nämlich auf das Vor-Anker-Liegen, übertragen. Von den begriffslogischen Möglichkeiten unterscheidet sich die Metapher gemäß der Analogie. Über sie schreibt Aristo-

teles:

Unter einer Analogie verstehe ich eine Beziehung, in der sich die zweite Größe zur ersten ähnlich verhält wie die vierte zur dritten. (Aristoteles 2006: Poet. 21; 69)

Meistzitiertes Beispiel ist die Analogie vom Lebensabend, in der sich das Alter zum Leben verhält wie der Abend zum Tag und der Dichter deshalb entweder den Abend *Alter des Tages* oder das Alter *Abend des Lebens* nennen kann, indem er statt der zweiten die vierte oder statt der vierten die zweite Größe verwendet und gegebenenfalls die Sache ergänzt, auf die übertragen wurde, oder ein Merkmal der Sache verneint, von der übertragen wurde. Mit diesen vier Typen vertritt Aristoteles einen weiten Metaphernbegriff, der mit der Übertragung von der Art auf die Gattung und umgekehrt von der Gattung auf die Art zwei Formen umfasst, die nach ihm als Metonymie bzw. als Synekdoche aufgefasst werden.<sup>3</sup> Die verbleibenden beiden Formen reflektieren zwei Grundbedingungen für die Übertragung eines Wortes, dass nämlich die Begriffe gleichrangig sein und dass sie aus heterogenen Bereichen stammen müssen (vgl. Eggs 2001: 1105). Beides ist bei den ersten beiden Formen nicht der Fall, da eine Art und eine Gattung niemals gleichrangig sind, aber immer dem gleichen Bereich angehören. Schon in der „Poetik“ fällt auf, dass sich Aristoteles vorrangig der Metapher gemäß der Analogie zuwendet, und in der Rhetorik schreibt er schließlich: „Von den vier Arten der Metapher ist die durch Analogie gebildete die beliebteste [...]“ (Aristoteles 2007: Rhet. III, 10; 174).

Aristoteles' Definition legt zunächst die „lexis“ als Ort der Metapher fest, womit modern gesprochen die lexikalische Semantik zuständig wird, da es

---

<sup>3</sup> Dieser Auffassung widerspricht Le Guern (1973: 31ff). Er argumentiert, dass, wenn ein eine Gattung oder eine Art bezeichnendes Wort nicht wörtlich gebraucht werde, keine Synekdoche, sondern tatsächlich wie von Aristoteles bestimmt eine Metapher vorliege, weil dann eine Übertragung stattfindet, man also sowohl Herkunfts- als auch Zielbegriff vor Augen habe, wohingegen dies bei der Synekdoche nicht der Fall sei.

nicht um Wörter im Gebrauch, sondern um Wörter im Lexikon mit kontextunabhängiger Bedeutung geht (vgl. Jost 2007: 272). Der Grund dafür liegt im erwähnten Begriffsrealismus, der Begriffe als von Wörtern bzw. Zeichen unabhängige Entitäten konzeptualisiert, die untereinander durch Analogien, Ähnlichkeiten und dergleichen verbunden sind „und die Sprache gibt mit der Metapher nur den mehr oder weniger schönen Wortleib dazu“ (Weinrich [1976] 1996: 331). Dies offenbart das unzureichende Semantikmodell, von dem Debatin gesprochen hat, „ein topo-logisches Modell der Sprache“ (Kurz 1993: 9), demzufolge jedes Wort seinen angestammten Platz hat. Die negative Tendenz fortsetzend kann die Metapher dann als Wegzerren eines Wortes von dem Ort, an den es gehört, zu einem anderen Ort, gesehen werden, an dem es „de-platziert, unernst und, weil nicht mehr eindeutig, ungenau und zweideutig“ (ebd.: 9) wirkt. Diese Auslegung steht jedoch im krassen Gegensatz zu Aristoteles’ Überzeugung, dass, gute Metaphern zu bilden, ein Zeichen von Begabung sei und dass einzig Metaphern neben den üblichen Wörtern in Prosareden anwendbar seien (vgl. Aristoteles 2006: Poet. 22; 75f und Aristoteles 2007: Rhet. III, 2; 155f). Aus dieser „Zweitstellung“ der Sprache leitet Richards schließlich ab, Aristoteles habe die Metapher zum schmückenden Beiwerk degradiert, „als eine Art fröhliche Wortspielerei behandelt“ (Richards [1936] 1996: 32). Gegen alle diese Unterstellungen sprechen allerdings schon die Überlegungen, die Aristoteles zur Herkunft der Dichtkunst ganz zu Beginn seiner Poetik anstellt: Ebenso wie Platon versteht er jede Dichtung als Nachahmung, im Unterschied zu Platon bewertet Aristoteles ihre Funktion aber positiv, weil sie die Freude des Menschen an der Nachahmung stillt, deren Ursache er folgendermaßen erklärt:

Ursache hiervon ist Folgendes: Das Lernen bereitet nicht nur den Philosophen größtes Vergnügen, sondern in ähnlicher Weise auch den übrigen Menschen [...] Sie freuen sich also deshalb über den Anblick von Bildern, weil sie beim Betrachten etwas lernen und zu erschließen suchen [...] (Aristoteles

2006: Poet. 4; 11/12)

Freude macht, was Erkenntnis verschafft, weshalb alles, was Aristoteles an Anweisungen zur einer guten Dichtkunst gibt, letztendlich dem Ziel dient, einen kognitiven Prozess beim Rezipienten anzuregen, der ihm Freude bereitet. Deshalb steht die Metapher schon in der „Poetik“ von Anfang an im Dienste einer Erkenntnisfunktion. Für spätere Abwertungen der Metapher ist daher Aristoteles kaum verantwortlich zu machen.

Dennoch wird Aristoteles gern zum Übeltäter stilisiert, der zwar den Metaphernbegriff eingeführt, ihn aber gleichzeitig auf einen falschen Weg geführt habe. So liest man bei Drewer:

Der Ursprung für die Verurteilung der Metapher liegt bereits bei Aristoteles, der in der *Rhetorik* und der *Poetik* die Verwendung der Metapher auf den literarisch-rhetorischen Bereich beschränkte und davor warnte, sie auch in der Wissenschaft einzusetzen. (Drewer 2003: 38/39)

Dieser Vorwurf, Aristoteles würde die Metapher zum Schutz der Wissenschaft auf den literarisch-rhetorischen Bereich beschränken, ist absurd, denn womit sollten sich „Poetik“ und „Rhetorik“ denn sonst beschäftigen, wenn nicht eben mit Poetik und Rhetorik? Selbstverständlich spricht Aristoteles also von der stilistischen Wirkung der Metapher in der Dichtung und in öffentlichen Reden. Man kann nicht erwarten, er müsse doch ihre Rolle in der Wissenschaftssprache darlegen, wenn es ihm um ganz andere Anwendungsbereiche geht. Zumal Aristoteles sehr wohl die Ubiquität der Metapher sieht, was ihn von jedem Vorwurf einer Einschränkung ihres Geltungsbereiches freispricht:

Alle unterhalten sich ja in Metaphern und mittels Ausdrücken mit eigentümlicher und vorherrschender Bedeutung. (Aristoteles 2007: Rhet. III, 2; 156)

Eine generelle Warnung davor, die Metapher in der Wissenschaft einzusetzen, ist uns bei Aristoteles nicht bekannt. Möglicherweise spielt Drewer



auf eine Stelle der „Topik“ an, in der es tatsächlich so aussieht, als würde Aristoteles die Metapher als zu undeutlich verwerfen. Wir kommen darauf in Kapitel 3.11 zurück.

## 3.4 Grundlagen der kognitiven Metaphertheorie

Wie angekündigt wird nun von der Antike in die 80er Jahre des 20. Jahrhunderts gesprungen.

### 3.4.1 Kognitionswissenschaft und kognitive Linguistik

Die kognitive Metaphertheorie ist eingebettet in die kognitive Linguistik und diese ist ihrerseits ein Teil des umfassenderen Paradigmas der Kognitionswissenschaften. An dieser Stelle kann es nur darum gehen, einen kurzen Abriss wesentlicher Kernpunkte dieser Rahmentheorie zu geben.

Die Kognitionswissenschaft ist als interdisziplinäre Forschungsrichtung in der Mitte der 1950er Jahre entstanden und umfasst so heterogene Arbeitsfelder wie Anthropologie, Psychologie, Informatik, Linguistik, Neurowissenschaften und weitere mehr, wobei sie sich u. a. mit Gedächtnis, Gehirn, visueller Wahrnehmung, Emotionen, Spracherwerb, Sprachproduktion und Sprachverstehen beschäftigt. Sie begreift sich selbst als Gegenbewegung zum Behaviorismus, der sich verstärkt auf beobachtbares Verhalten und Stimulus-Response-Modelle konzentriert und sich den Geist als „black-box“ vorgestellt hatte, über dessen Bewusstseinsinhalte zu sprechen reiner Spekulation gleichkomme. Dieser Paradigmenwechsel wird zuweilen als „kognitive Wende“ betitelt.

Wenn man den kleinsten gemeinsamen Nenner der diversen Strömungen, die zu den Kognitionswissenschaften gezählt werden, darin sehen möchte, dass sich diese mit der menschlichen Kognition beschäftigen, so ist dies eine nachvollziehbare, aber dennoch ungünstige Bestimmung, da die Ein-

heitlichkeit, die der Begriff *Kognition* suggeriert, kaum zutreffend ist:

Tatsächlich sind die theoretischen und methodologischen Differenzen [...] so groß, daß von einer einheitlichen Forschungsrichtung nicht gesprochen werden kann. Allenfalls läßt sich ein unübersichtliches Diskursfeld ausmachen, das sich um den noch ungeklärten Begriff der Kognition gruppiert. (Linz 2002: 11)

Der Kognitionsbegriff, der in seiner Vielschichtigkeit dem Sprachbegriff in kaum etwas nachsteht, kann zumindest dahingehend etwas präzisiert werden, dass er so verschiedene Phänomene wie Wahrnehmung, Emotionen, Konzepte, Bilder, Kommunikation und Interaktion einschließt (vgl. Bußmann 2008: 341f). Davon ausgehend lassen sich mehrere Grundtendenzen unterscheiden.

Lakoff/Johnson (1999: 11f) zufolge werde *kognitiv* entweder in einem weiten, alle Arten mentaler Operationen und Strukturen umfassenden Sinne gebraucht oder aus der philosophischen Tradition kommend auf propositionale Strukturen eingeschränkt. Gegen diese Einschränkung spreche nach Ansicht der Autoren die Dominanz des unbewussten Denkens (mit 95 Prozent) gegenüber dem bewussten unter allen Denkprozessen (ebd.: 13). Daher setzt die kognitive Metaphertheorie auf den weiten Kognitionsbegriff und verweist häufig auf die Notwendigkeit, auch unbewusste, nicht-propositionale mentale Strukturen in der Sprache allgemein und speziell bei Metaphern mit zu berücksichtigen. Aus dieser weiten Perspektive folgen veränderte Anforderungen an die Methoden der Metaphernanalyse, wenn gewährleistet werden soll, dass auch unbewusste, nicht-propositionale Wissenstrukturen zu ihrem Recht kommen. Inwiefern das Vorgehen der kognitiven Metaphertheorie diesen Anspruch tatsächlich einzulösen vermag, ist jedoch Gegenstand heftiger Kontroversen.

Quer dazu verläuft eine Trennung der Kognitionswissenschaften in ein „Computer-“ und ein „Humanparadigma“ (Radden 1997: 69f). Auf der einen Seite wird das menschliche Denken als Maschine verstanden, das

Informationen vor allem algorithmisch verarbeitet und das somit mittels mathematischer Modelle beschrieben und schließlich durch einen Computer simuliert werden kann. Ganz pauschal gesagt, sind beispielsweise Chomsky und Montague Vertreter des Computerparadigmas. Demgegenüber steht die Position, die Kognition nicht ausschließlich als autonomen Denkapparat, sondern als Bestandteil eines ganzen Menschen mit seiner Erfahrung, seiner Wahrnehmung, seiner Sprache und insbesondere seinem Körper zu betrachten. Dort hält man es für eine Illusion, die Kognition von diesen Aspekten isolieren zu können, bis so etwas wie ein reines unbedingtes Denken übrig bleibe. Auch wenn das Humanparadigma in der kognitiven Metaphertheorie hochgehalten wird, profitieren die Kognitionswissenschaften durch den Einsatz der Computer-Metaphorik doch ganz erheblich vom anhaltend hohen Ansehen der Informatik, das sicher nicht unbeteiligt ist an der hohen Akzeptanz des kognitiven Paradigmas und seinem Einzug in die Linguistik (vgl. Drewer 2003: 67; Debatin 1997; Pielenz 1993: 77).

Diese Dimensionen geben nur Richtungen an, wo man sich auf dem weiten Feld der Kognitionswissenschaften positionieren kann, und sind keine Demarkationslinien, die unversöhnliche Gegensätze trennen.

Für die kognitive Linguistik ist zunächst einmal wesentlich, dass sie immer bestrebt ist, das Phänomen der Sprache in das Netz der Facetten der Kognition einzuordnen und Beziehungen deutlich zu machen (vgl. Radden 2008: 387). Nun ist die Beschäftigung mit dem Zusammenhang von Sprache und Denken alles andere als neu. Die Skala der Konzeptionen möglicher Positionen reicht von einer rigorosen Trennung beider Bereiche bis hin zu vielfältigen Ausprägungen der Sapir-Whorf-Hypothese, die einen sprachlichen Relativismus des Denkens postuliert. Wo sich die kognitive Metaphertheorie platziert, wird etwa hier bei Johnson deutlich:

One crucial consequence of this view of embodiment is that the body is not merely a text! However much my body is “culturally inscribed”, it never reduces merely to a social experience. [...] We try to understand language,

and meaning in general, as grounded in the nature of our bodily experience and activity. (Johnson 1992: 348)

Der Mensch sei also nicht auf einen „Text“ reduzierbar. Mit anderen Worten: Für Johnson ist es eine ungerechtfertigte Verkürzung, den Menschen mit seinen symbolischen Praktiken zu identifizieren. Nicht die Sprache, sondern zuallererst körperliche Erfahrungen prägen für ihn das Denken. Sprache komme erst in einem zweiten Schritt sowohl aus phylo- als auch aus ontogenetischer Perspektive hinzu und bilde dann diese so erzeugten konzeptuellen Strukturen ikonisch ab. Die Sapir-Whorf-Hypothese wird demnach zurückgewiesen.

Jäkel (2003: 19) weist in einem kurzen Überblick vor allem drei Aspekte des kognitiv-linguistischen Ansatzes als relevant für die kognitive Metaphertheorie aus:

- Die kognitive Linguistik hat eine empirische Basis.
- Die Annahme einer autonomen Syntax gegenüber der Semantik wird aufgegeben.
- Das Ideal absoluter Vorhersagbarkeit wird fallengelassen.

Jeder dieser Punkte kann als Negation einer Prämisse aus der generativen Theorie gelesen werden. Damit artikulieren sich zugleich auch die Vorwürfe, welche dem generativen Ansatz von Seiten der Vertreter der kognitiven Metaphertheorie gemacht werden: Sie kritisieren die einseitige Ausrichtung auf die Syntax und das mit dem Computerparadigma verbundene formal-computationale Sprachmodell (vgl. Linz 2004: 255), in dem die Gleichung „Sprache = Grammatik = Kompetenz“ (Krämer 2001: 43) gilt. Damit ist der Gegner im eigenen „Haus“ ausgemacht, von dem man sich abrenzen

möchte.<sup>4</sup> Der Erfolg dieser Bemühungen um Abgrenzung lässt sich daran ablesen, dass, obwohl die von Chomsky dominierte generative Sprachwissenschaft auch als Teil der kognitiven Linguistik verstanden werden kann, man heute, wenn von kognitiver Linguistik oder kognitiver Grammatik die Rede ist, meistens die Richtung, die sich vom generativen Paradigma abgrenzt, meint.<sup>5</sup> Der von Jäkel genannte Bezug auf eine empirische Basis ist als Abgrenzungskriterium jedoch nicht so eindeutig. Denn natürlich muss auch ein generativer Ansatz vom Sprachgebrauch ausgehen, da die zu untersuchende Kompetenz immer nur von ihrer Realisierung als Performanz aus zugänglich ist. Das hat sie mit der kognitiven Linguistik gemeinsam, da auch kognitive Strukturen und Vorgänge, wenn man bildgebende Verfahren vernachlässigt, nur in ihrer „Außenverwendung“ sichtbar werden. Der zentrale Unterschied ist jedoch, dass der *Performanz* genannte Sprachgebrauch nicht mit dem Sprachgebrauch als empirische Tatsache zusammenfällt, die, wie es schon Saussure über die menschliche Rede geschrieben hat, zu uneinheitlich ist, sondern als Idealisierung gedacht wird, d. h. als Äußerung eines idealen Sprechers, der den Regeln der Kompetenz ohne Ausnahmen folgt.<sup>6</sup> Von einer kognitiven Linguistik, die den tatsächlichen Sprachgebrauch ins Zentrum rücken will, wäre also zu erwarten, dass sie versucht, die starre Beziehung von Regel und Anwendung und das Ideal absoluter Vorhersagbarkeit zu überwinden, wie es Jäkel denn auch annimmt. Dass sie dabei teilweise hinter diesen Ansprüchen zurückbleibt und der intensiv bekämpften generativen Dichotomie von Kompetenz/Performanz doch näher steht, lässt sich schon an ihrem Sprachmodell erahnen. Um

---

<sup>4</sup> Weiterhin wendet sich die kognitive Linguistik auch gegen Sprachtheorien, die sich dem Logizismus verpflichtet fühlen und Bedeutung über den Wahrheitsbegriff beschreiben möchten, gegen Strömungen des klassischen Strukturalismus und schließlich gegen poststrukturalistische und dekonstruktivistische Richtungen (vgl. Willems 1997: 19f).

<sup>5</sup> Nach Wildgen (2008: 19) vollzieht sich die Spaltung der kognitiven Linguistik in den 1970er Jahren.

<sup>6</sup> Zur Paradoxie in der Dichotomie von Kompetenz und Performanz siehe Krämer (2001: 52ff).

Zugriff auf die Kognition zu erhalten, wird zwar konkreten Äußerungen verstärkt Aufmerksamkeit gewidmet, auch authentischen Sprachbeispielen in korpuslinguistischen Studien, allerdings mit dem Ziel, kognitive Vorgänge „dahinter“ zu entschlüsseln, sodass der Sprachgebrauch zum Material wird, das als „Fenster zum Geist“ (vgl. Gibbs 1996: 310) Einblicke erlaubt. Der Sprachgebrauch erscheint so zwar nicht mehr durch eine sprachliche Kompetenz bestimmt, wird nun jedoch durch das konzeptuelle System geregelt bzw., wie man besser sagt, „motiviert“ (vgl. Radden 2008: 388; Lakoff 1987: 107ff; Johnson 1992: 353ff).

#### 3.4.2 Kognitive Semantik, Schematheorie und Idealisierte kognitive Modelle

Nach dem metaphortheoretischen Erdbeben ausgelöst durch „Metaphors We Live By“ folgt eine bis heute nicht abschwellende Flut von Publikationen, die dem Gebiet immer neue Facetten hinzufügen und nach und nach versuchen, die damals aufgeworfenen Fragen zu beantworten und viele der Vagheiten auszuräumen.

In Lakoff (1987) wird erstmals systematisch eine kognitive Semantik hinter der kognitiven Metaphertheorie entwickelt.<sup>7</sup> Ausgangspunkt ist Lakoffs Ablehnung eines Objektivismus, es gäbe einen Standpunkt außerhalb der Realität – einen „god’s eye view“ –, von dem aus sich die Welt unabhängig vom eigenen Standpunkt beobachten ließe (vgl. Wildgen 2008: 68). Gegen den „Mythos des Objektivismus“ (vgl. Lakoff/Johnson 2003: 186ff)

---

<sup>7</sup> Wenn in dieser Arbeit die Bezeichnungen *kognitive Linguistik* oder *kognitive Semantik* gebraucht werden, so ist mit ihnen immer die Richtung um Lakoff/Johnson/Turner gemeint. Obwohl damit eine Vereinnahmung des linguistischen Teilgebiets durch diese Schule droht und die drei Autoren sich auch nur unsystematisch an die Kognitionswissenschaften anlehnen (vgl. Wildgen 2008: 70), so kann die Bedeutung der kognitiven Metaphertheorie für die Entwicklung der kognitiven Linguistik als Teilgebiet der allgemeinen Linguistik kaum geleugnet werden (vgl. Steen/Dorst/Herrmann u. a. 2010: 766). Um die Abgrenzung deutlicher hervortreten zu lassen, bevorzugen es andere Autoren, entweder die englische Bezeichnung *Cognitive Linguistics* beizubehalten oder auf die Variante *Kognitive Linguistik* mit Großschreibung auszuweichen.

setzt er eine – an Kant angelehnte – Auffassung, die den Menschen in seiner körperlich-biologischen Existenzweise als Bedingung der Möglichkeit für Wahrnehmung, Denken und Sprache einsetzt und sie als Bestandteil der physischen Umwelt zur Grundlage der Kognitionswissenschaften und damit auch zur Grundlage des Bedeutungsbegriffs erhebt:

[...] experiential realism characterizes meaning in terms of *embodiment*, that is, in terms of our collective biological capacities and our physical and social experiences as being functioning in our environment [...] Experientialism claims that conceptual structure is meaningful because it is *embodied*, that it arises from, and is tied to, our preconceptual bodily experiences. (Lakoff 1987: 267)

Nach dieser Vorstellung – englisch *experiential realism*, *experientialism*, *embodiment* und deutsch *Erfahrungsrealismus* oder *verkörperter Geist* genannt – bilden sich Konzeptstrukturen in der aktiven, durch den Körper vermittelten Auseinandersetzung des Menschen mit seiner Umwelt aus. Embodiment ist der Versuch, das seit Descartes bestehende Leib-Seele-Problem zu überwinden, indem bestimmte mentale Aspekte auf körperliche Erfahrungen zurückgeführt werden (vgl. Hampe 2005a: 4f). Wäre unser Körper anders beschaffen, verfügten wir etwa über ein Organ um elektrische Felder wahrzunehmen, dann hätte dies Auswirkungen auf unser konzeptuelles System und damit auch auf unsere Sprache. Radden (1997: 74f) weist in diesem Zusammenhang auf die besondere Stellung der Erfahrung beim Erlernen von Wortbedeutungen während des Erstspracherwerbs hin, bei dem ein Kind zum Aufbau seiner Konzepte zu Beginn einzig seine Erfahrungen mit der Umwelt nutzen könne.

Der Begriff *Erfahrung* wird hier in einem weitem Sinne gebraucht, der wenigstens solche Aspekte wie Wahrnehmung, Emotion, Geschichte, Sprachlichkeit, Handlungen von Einzelpersonen oder von Gemeinschaften in sozialen Kontexten u. v. m. umfasst (vgl. Johnson 1987: xvi; Lakoff 1987: xv). Die Umsetzung von Erfahrungen in Konzepte erfolgt jedoch nicht immer

direkt, sondern wird zum Teil von einer Menge kultureller Hintergrundannahmen geleitet (vgl. Lakoff/Johnson 2003: 57). Einer Hochzeit beizuwohnen ist beispielsweise eine stärker kulturabhängige Erfahrung als etwa das basale räumliche Konzept OBEN, das sich aus der aufrechten Haltung ergibt und daher universell für alle Menschen, gleich welcher Kultur sie angehören, ist. Damit ist *Embodiment* eher in einem weiten auch kulturelle Spezifika umfassenden Sinne zu verstehen.

Grundlegende konzeptuelle Strukturen, die universell aus der sensomotorischen Interaktion des Menschen mit seiner Umwelt entstehen, werden erstmals in Johnson (1987) und Lakoff (1987) als *Vorstellungs-Schemata* (*image schema/image schematic models*) bezeichnet:<sup>8</sup>

An image schema is a recurring, dynamic pattern of our perceptual interactions and motor programs that gives coherence and structure to our experience. [...] I call these patterns “image schemata,” because they function primarily as abstract structures of images. They are gestalt structures, consisting of parts standing in relations and organized into unified wholes, by means of which our experience manifests discernible order. (Johnson 1987: xiv, xix)

Vorstellungs-Schemata stehen als kognitive Grundbausteine an der Basis des konzeptuellen Systems, über der sich alle komplexeren Konzepte erheben. Sie existieren unter der Bewusstseinschwelle und sind sofort verständlich, ohne eine längere Interpretation zu erfordern. In seiner Struktur ist ein Vorstellungs-Schema eine Gestalt, ein holistisches Ganzes, bei dem die Bedeutung des Ganzen die Summe der Bedeutungen seiner Teile übersteigt. Hier klingt Bühler (1982: 349) als Vorläufer an, der schon versucht hat, den

---

<sup>8</sup> Jäkel (2003: 30) kritisiert die häufig zu findende deutsche Übersetzung *Bild-Schema* als irreführend, da es nicht immer um Bilder gehe, sondern vorrangig um Vorstellungen, die nicht zwangsläufig visuell sein müssten, ja nicht einmal propositional. Wir stimmen ihm zu und übersetzen in dieser Arbeit mit *Vorstellungs-Schema*. Ginge man diesen Weg jedoch konsequent zu Ende, dann hieße diese Nicht-Propositionalität auch, dass die Vorstellungs-Schemata in Sprache nicht beschreibbar wären. Daran hält sich die kognitive Metaphertheorie freilich nicht. Für sie bleibt zumindest eine Approximation der Schemata mittels Sprache möglich.



psychologischen Begriff der Gestalt für die Metaphertheorie nutzbar zu machen, indem er Über- wie Untersummativität der Metapher herausstellte. Weiterhin soll in diese Gestaltstruktur eine eigene Logik eingeschrieben sein, d. h., es gibt bestimmte Sätze, die ihre evidente Gültigkeit aus einem Vorstellungs-Schema beziehen.

In Lakoff (1987: 267ff) werden u. a. folgende Schemata diskutiert: CONTAINMENT/CONTAINER, PATH/SOURCE-PATH-GOAL, LINK, PART-WHOLE, CENTER-PERIPHERY, BALANCE, UP-DOWN, FRONT-BACK. Ein besonders ausführliches Inventar möglicher Vorstellungs-Schemata findet sich in Jäkel (2003: 288ff). Auch wenn die Liste, was als Vorstellungs-Schema akzeptiert wird, von Autor zu Autor und Arbeit zu Arbeit variiert, werden das Behälter- und das Weg-Ziel-Schema fast immer genannt. Das Behälter-Schema ergibt sich aus der Erfahrung des eigenen Körpers als einem Behälter, dessen Innenraum durch die Grenzfläche der Haut von der äußeren Umwelt getrennt ist. Die relativ „arme“ Struktur dieses Schemas zeigt sich daran, dass es sich aus lediglich aus drei abstrakten Komponenten – Innen, Außen und Rand – konstituiert, die aber zu einer Gestalt verwoben sind, in der ein Aspekt nicht ohne Bezug zu den anderen Aspekten verstanden werden kann.

Die Vorstellungs-Schemata verheißen als „universelle kognitive Atome“ die Möglichkeit, komplexe Konzepte als Kombinationen und Elaborationen dieser Grundeinheiten zu analysieren und sprach- bzw. kulturvergleichend ihre Verwendungen herauszuarbeiten. Auf theoretischer Ebene mangelt es jedoch, wie Hampe schreibt, an eindeutigen Kriterien, wann eine Konzeptstruktur zu den Vorstellungs-Schemata zu rechnen ist und wann nicht:

Neither the original characterization, nor the entire subsequent research to date can thus be said to have provided the Cognitive-Linguistics community with a set of clear-cut criteria to set image-schematic representations apart from other basic or schematic concepts. (Hampe 2005a: 3)

Auf einer höheren Ebene des konzeptuellen Systems wird Wissen in Form von „Idealized Cognitive Models“ (ICMs) organisiert. Dieser zentrale Begriff aus Lakoff (1987: 68ff) verbindet Frames, Vorstellungsschemata sowie metaphorische und metonymische Abbildungen in eine kognitive Gestaltstruktur, die beiläufig Kategorien und Prototypeneffekte erzeugt. ICMs gehen dem Sprechen voraus und bestimmen in einer Situation etwa die Wortwahl. Die kognitive Semantik der ICMs ist jedoch weniger eine eigenständige Theorie als vielmehr „ein Sammelbecken sehr unterschiedlicher Konzepte für eine semantische Beschreibung natürlicher Sprachen“ (Wildgen 2008: 76), weshalb man am besten Lakoff folgt und die Erklärung, was ICMs genau sind, an einem Beispiel vornimmt. Ein charakteristisches Beispiel ist die Kategorie *Junggeselle*, die in Bezug auf ein ICM definiert ist, das eine Gesellschaft, in der die Einnahme und ein bestimmtes Heiratsalter die Regel sind, voraussetzt (Lakoff 1987: 70). *Junggeselle* umfasst vor diesem Hintergrund einfach alle unverheirateten erwachsenen Männer. Dieses Modell ist „idealisiert“, da es von konkreten Fällen abstrahiert und ein abstraktes Gerüst zur Verfügung stellt, um entscheiden zu können, ob eine Person unter den Begriff *Junggeselle* fällt oder nicht. In einigen Situationen, in denen das ICM zur Welt passt, ist dies leicht möglich, in anderen Situationen, wenn man sich etwa fragt, ob der Papst ein Junggeselle ist, müssen mehrere ICMs gegeneinander abgewogen werden. Dadurch können Prototypeneffekte entstehen.

Die skizzierten Grundlagen der kognitiven Semantik leiden insgesamt unter einem fundamentalen Makel: Der ständig verwendete und grundlegende Terminus *Konzept* bleibt seltsam vage und ohne scharfe Kontouren. Es ist eine ausgewiesene Schwäche dieser Theorie, dass sie einen für sie so entscheidenden Begriff weder konsequent gebraucht noch explizit definiert (vgl. Andreeva 2011: 12). Für Teubert „ist es beunruhigend zu sehen, dass es unter Kognitiven Linguisten darüber, was mentale Konzepte wirklich

sind, kaum einen gemeinsamen Nenner gibt“ (Teubert 2006: 292). Viele Fragen sind seiner Ansicht nach ungeklärt: Sind Konzepte holistisch oder zusammengesetzt? Sind sie angeboren oder werden sie erlernt? Wie verhalten sie sich zu Wörtern? Sind sie eine bilaterale Einheit aus Form und Inhalt oder sind sie nur Inhalt? Ergänzen kann man die Frage, ob Konzepte individuell im Gedächtnis jedes einzelnen Sprechenden liegen oder kollektiver Besitz einer Gemeinschaft sind. Über diese durchaus berechtigte Kritik darf aber nicht vergessen werden, dass Teubert hier nicht zuletzt auch Werbung für die Korpuslinguistik macht, in der sich Bedeutung „auch ohne Rekurs auf mentale Konzepte erklären“ (ebd.) ließe. Außerdem muss eine Pluralität an Begriffsbestimmungen nicht zwangsläufig etwas Negatives sein. Weder für den Wort-, den Satz- noch den Textbegriff gibt es die eine anerkannte Definition und dabei handelt es sich gerade bei diesen Phänomenen um die grundlegenden Einheiten, mit denen in der Sprachwissenschaft tagtäglich gearbeitet wird. Warum sollte es mit dem Konzeptbegriff anders sein? Dennoch ist das wiederum kein Freibrief, auf eine Definition gänzlich zu verzichten oder sich mit unspezifischen Allgemeinplätzen zufriedenzugeben.

Innerhalb des kognitiven Paradigmas begegnet man diesen Vorwürfen naturgemäß mit mehr Gelassenheit. Allerdings sind Aussagen wie „In general, concepts are elements of cognitive models“ (Lakoff 1987: 286) tatsächlich wenig hilfreich, weil der Begriff *cognitive model* unter einer ähnlichen Unbestimmtheit leidet. Im Folgenden werden drei präzisere Bestimmungen des Konzeptbegriffs aus der Literatur vorgestellt. In einer aktuellen Einführung in die Metaphertheorie mit einem im weitesten Sinne kognitiven Unterbau ist zu lesen:

**Konzepte** sind [...] mentale Organisationseinheiten, in denen wir Wissen speichern. Mithilfe von Kategorienkonzepten werden Informationen nach Klassen mit bestimmten Eigenschaften eingeteilt. Diese Einteilung gestattet uns, die riesigen Informationsmengen, mit denen wir ständig zu tun

haben, ökonomisch zu speichern und zu verarbeiten. Der grundlegende Prozess der Bildung von geistigen, intern gespeicherten Repräsentationen wird allgemein als **Konzeptualisierung** bezeichnet. Das Resultat einer Konzeptualisierung ist somit die geistige Vorstellung, die wir uns von etwas gemacht haben. (Skirl/Schwarz-Friesel 2007: 7f)

Dieser Erklärung zufolge haben Konzepte mit Begriffen gemeinsam, dass sie die Dinge der Welt in Klassen zusammenfassen, sie nach bestimmten Kriterien einteilen. Sie sind nicht angeboren, sondern werden durch Abstraktion von Gegenständen oder Sachverhalten erworben. Warum man den Terminus *Konzept* nicht einfach durch *Begriff* ersetzen sollte, wird nur indirekt deutlich, indem die Rolle der Sprache nicht erwähnt wird. Während Begriffe immer sprachgebunden auftreten, sind Konzepte sprachunabhängiger. Vergleichbar definiert auch Schwarz:

Konzepte werden in den Kognitiven Wissenschaften übereinstimmend als die strukturellen Bausteine der menschlichen Kognition betrachtet. Sie stellen die grundlegenden Organisations- und Speichereinheiten unserer Kognition dar. Konzeptuelle Einheiten repräsentieren unser Wissen über die Welt in einem weitgehend abstrakten Format und ermöglichen eine effiziente Verarbeitung von Umweltreizen durch Kategorisierung. (Schwarz 2002: 277)

Durch ihren recht allgemeinen Charakter bleibt diese Definition in einigen Punkten unscharf: Wie erwirbt man Konzepte? Gibt es eine Menge einfacher Grundkonzepte, auf die alle anderen Konzepte aufbauen? Welche interne Struktur haben Konzepte; sind sie bildhaft, symbolisch oder geometrisch? Deutlich wird aber, dass in Konzepten semantisches und enzyklopädisches Wissen zusammengefasst sind. Sie ermöglichen es uns, Gegenstände, Situationen oder Handlungen zu kategorisieren und entsprechend auf sie zu reagieren. Insofern ist das Wort *Begriff* nicht synonym mit *Konzept* zu verwenden, das Erste bezeichnet einen bestimmten Teil des Zweiten, nämlich die sprachgebundene Bedeutung.<sup>9</sup> Folgende Definition schließlich

---

<sup>9</sup> Coenen (2002: 216) übersetzt das Lakoffsche *concept* daher mit *Sachvorstellung*.

legt Wert darauf, dass Konzepte kollektiver und kein individueller Besitz sind und dass Konzepte zwar nicht angeboren sind, wohl aber die Prinzipien, nach denen sie erzeugt werden:

Concepts [...] are considered as abstract and collective entities in contrast to individual mental images, ideas or thoughts. They are relatively stable [...] and highly structured. The principles of structuring concepts are part of the human cognitive endowment, they are innate. (Harras 2000: 14)

Zusätzlich wird auf das Problem hingewiesen, dass Konzepte eher statisch oder stärker dynamisch konzipiert werden können. Ansätze, die Konzepte dem Individuum zuordnen, werden eher zu einem dynamischen Begriff neigen, als Ansätze, die sie als kollektive Muster verstehen.

#### 3.4.3 Konzeptuelle Metaphern

Die vorangegangenen Erläuterungen zu den theoretischen Rahmenbedingungen der kognitiven Metaphertheorie sind ihrer Entstehung chronologisch nachgeordnet. Am Anfang steht 1980 die Theorie der konzeptuellen Metaphern durch Lakoff/Johnson, die in der Folgezeit vielfache Änderungen und ausführlichere Darstellungen erfahren hat, etwa in Johnson (1987), Lakoff (1987; 1990; 1993), Lakoff/Turner (1989) oder Lakoff/Johnson (1999). Statt ihre vollständige Entwicklung nachzuzeichnen, sollen hier nur ihre wesentlichen Grundzüge nach den „kanonischen“ Arbeiten dargestellt werden.

Sowohl Lakoff/Johnson (2003) als auch Lakoff (1993) beginnen mit der schon fast klassisch gewordenen Behauptung, alle ihnen im Laufe von über 2000 Jahren vorausgegangenen Metaphertheorien bis zurück zu Aristoteles hätten das Wesen der Metapher immer grundsätzlich missverstanden. Im Nachwort zu „Metaphors We Live By“ aus dem Jahr 2003 werden vier falsche Annahmen aufgezählt, welche von Anfang an durch den Metapherndiskurs irren sollen:

There are four major historical barriers to understanding the nature of metaphorical thought and its profundity, and these amount to four false views of metaphor. In the Western tradition, they all go back at least as far as Aristotele. The first fallacy is that metaphor is a matter of words, not concepts. The second is that metaphor is based on similarity. The third is that all concepts are literal and that none can be metaphorical. The fourth is that rational thought is in no way shaped by the nature of our brains and bodies. (Lakoff/Johnson 2003: 244)

Den ersten und dritten Kritikpunkt kann man so zusammenfassen, dass die Metapher traditionell als Phänomen auf der linguistischen Ebene bestimmt wurde, wohingegen Lakoff/Johnson sie auf der epistemologischen verankern möchten. Ironischerweise ist Aristoteles dieser Position mit seinem Begriffsrealismus nicht allzu fern. Ihre Ablehnung der Ähnlichkeit bzw. der Analogie wirkt zunächst befremdend, hatte Aristoteles doch sehr einleuchtend die Metapher vom Lebensabend mit Hilfe einer Analogie erklärt. Lakoff/Johnson (ebd.: 147ff) bestreiten nun nicht, dass Metaphern etwas mit Analogien zu tun haben können, nur seien diese Ähnlichkeitswahrnehmungen das Resultat einer metaphorischen Projektion auf der Konzeptebene und nicht deren Ursache. Sie greifen damit, freilich ohne dies kenntlich zu machen, die Vermutung von Black ([1954] 1996: 68) auf, dass eine Metapher Ähnlichkeit schaffe, statt eine bereits vorher existierende Ähnlichkeit lediglich zu formulieren. Dass wir Leben und Tag als analog betrachten, ist dann ein Nebeneffekt einer Metapher auf Konzeptebene, die das Konzept LEBEN mit dem Konzept TAG verknüpft. Der letzte Punkt schließlich artikuliert den schon angesprochenen Grundgedanken des verkörperten Geistes. Zu diesen vier Trugschlüssen komme schließlich noch der Irrglaube hinzu, dass Metaphern eine Form des Redeschmucks seien, der literarischen Texten zu einem poetischem Stil ver helfe (vgl. Lakoff/Johnson 2003: 3; Lakoff 1993: 202). Akzeptiert man alle diese Annahmen, dann folge, dass Metaphern in der Alltags- und Fachsprache nicht nur einfach

nicht vorkommen, sondern dort auch unerwünscht seien und dass sie weiter ein Phänomen an der sprachlichen Oberfläche seien, das weder Denken noch Handeln tangiere. Dem halten Lakoff/Johnson entgegen:

We have found, on the contrary, that metaphor is pervasive in everyday life, not just in language but in thought and action. (Lakoff/Johnson 2003: 3)

Dass die Unterstellung, die Metapher würde auf die Dichtung beschränkt, eine ungerechtfertigte Pauschalisierung ist, wurde schon an Aristoteles hinlänglich deutlich. Wahrscheinlich dominiert im Alltagsverständnis die Vorstellung von der Metapher als einem sprachlichen Mittel für eine ausgefallene Rhetorik und zum Ausdruck originellen poetischen Könnens (vgl. Jäkel 2003: 21). Auch im Deutschunterricht hinkt der Metaphernbegriff seinen Möglichkeiten sicherlich vielfach hinterher.<sup>10</sup> Die Schuld an dieser Situation kann aber nicht einseitig auf eine traditionelle Metaphertheorie abgewälzt werden, zumal bei der Fülle an Theorien auch überhaupt nicht klar ist, was *traditionell* genau bezeichnet. Wenn Lakoff/Johnson die Alltagssprachlichkeit und Allgegenwärtigkeit der Metapher – ihre Ubiquität – stark machen, wiederholen sie im Prinzip nur, was auch schon Aristoteles, Hermann Paul<sup>11</sup> oder Wilhelm Stählin<sup>12</sup>, um nur einige zu nennen, festgestellt haben. Das schmälert ihre Leistung nicht, kann aber eben auch nicht als Abgrenzungskriterium herhalten. Aristoteles aber vorzuwerfen, er habe einen völlig falschen Metaphernbegriff in die Welt gesetzt, erscheint

---

<sup>10</sup> Vergleiche dazu diese Einschätzung zur Situation aus dem Jahr 2009: „Die Entwicklungen und Diskussion der Metaphertheorie kommen in der Schule nicht an. Hier gibt man sich nach wie vor mit einem tradierten Substitutionsbegriff der Metapher zufrieden“ (Katthage 2009: 21/22).

<sup>11</sup> „Die Metapher ist eben etwas, was mit Notwendigkeit aus der menschlichen Natur fließt und sich geltend macht nicht bloss in der Dichtersprache, sondern vor allem auch in der volkstümlichen Umgangssprache, die immer zu Anschaulichkeit und drastischer Charakterisierung neigt.“ (Paul 1960: 94/95)

<sup>12</sup> „Und zwar sind die Metaphern als solches sprachliches Ausdrucksmittel einfach notwendig. Sie sind nicht ein ›Schmuck der Rede‹, so wie ein Ring die Hand schmückt, die doch ohne den Ring nicht minder vollkommen wäre, sondern ein Schmuck der Rede, so wie die Augen das Gesicht schmücken und unmöglich darin fehlen dürften.“ (Stählin 1914: 354)

absurd. Überhaupt wirkt der Versuch der kognitiven Metaphertheorie, sich von allen anderen Metaphertheorien loszusagen, indem diese als obsolet charakterisiert werden, überzogen.<sup>13</sup> Was sie *konzeptuelle Metapher* nennt ist eben etwas anderes als das, was Aristoteles unter *Metapher* versteht. Daraus folgt aber keineswegs, dass der eine Begriff „richtig“ und der andere „falsch“ sein müsse. Hier laufen Lakoff/Johnson in die eigene Objektivismusfalle, die sie sonst anderen stellen.

Die eigentliche Innovation der kognitiven Metaphertheorie ist, dass sie durch Verschiebung des Metaphernbegriffs auf die epistemologische Ebene ein Modell anbietet, um systematische Zusammenhänge zwischen einzelnen sprachlichen Metaphern beschreiben und erklären zu können. An englischen Sprachbeispielen zum Thema Liebesbeziehung zeigt Lakoff, dass über eine Beziehung unter Verwendung von Reiseausdrücken gesprochen wird, wobei die Liebenden Reisenden entsprechen, die ein gemeinsames Ziel verfolgen, auf das sie sich zusammen mithilfe ihrer Beziehung, die ihnen als Fahrzeug dient, zubewegen. Auf dem Weg können Gefahren lauern, die sie zwingen anzuhalten, auszusteigen oder die Fahrt zu beenden, was einem Abbruch der Beziehung entspricht. Auch im Deutschen sind vergleichbare metaphorische Äußerungen anzutreffen:

***Liebe als Reise***

- so *weit* sind wir *gekommen*.
- wir können nicht mehr *zurück*.
- sie sind in einer *Sackgasse* *gelandet*.
- es war ein langer und harter *Weg*.
- doch wir sind glücklich im *Ziel*.

(Pielenz 1993: 74)

Äußert jemand *Wir sind in einer Sackgasse* über den Status seiner Be-

---

<sup>13</sup> Der Titel „The Contemporary Theory of Metaphor“ von Lakoff (1993) spiegelt diese Hybris, „die zeitgemäße Theorie der Metapher“ zu entwerfen, nur allzu deutlich wieder.



ziehung muss ein Rezipient auf sein Wissen über Reisen zugreifen.<sup>14</sup> Er weiß, dass *Sackgasse* eine ‚Straße, die nur eine Zufahrt hat u. am Ende nicht weiterführt‘ (DUW: 1484) bezeichnet und er weiß ferner über Sackgassen, dass die Fahrenden handeln müssen, um dieser Lage entrinnen und die Reise fortsetzen zu können. Dazu ist das Fahrzeug zu wenden und in umgekehrter Richtung zurückzufahren, um dann einen anderen Weg einzuschlagen. Außerdem muss es eine Ursache in der Vergangenheit geben, warum man jetzt in der Sackgasse steckt. Vielleicht kannten die Insassen die Strecke nicht und haben sich verfahren. Das Wissen über Sackgassen, wie man in sie gerät und wie man sich aus ihnen löst, wird auf die Liebesbeziehung übertragen: Die Beziehung steckt fest, bevor sie ihr Ziel erreichen konnte. Die Liebenden müssen zu einem früheren Punkt ihrer Beziehung zurückkehren und sie neu bewerten oder die Beziehung abbrechen. Man erkennt, wie Liebesbeziehungen nicht nur mit Lexemen und Phraseologismen, die für Reisen typisch sind, beschrieben werden, sondern wie auch Schlussfolgerungsmuster, die für Autofahrten anerkannt sind, übertragen werden. Aus diesem systematischen Auftreten sprachlicher Metaphern wird geschlussfolgert, dass dahinter mehr, als nur eine übliche Weise über Liebesbeziehungen zu reden, stehen müsse. Es sei vielmehr so, dass die Konzepte LIEBE und REISE selbst im konzeptuellen System miteinander verbunden seien.<sup>15</sup> Von weiteren Beispielen abstrahierend gelangt man schließlich zu folgender Neuausrichtung des Metaphernbegriffs:

Metaphor is fundamentally conceptual, not linguistic, in nature. Metaphorical language is a surface manifestation of conceptual metaphor. (Lakoff 1993: 244)

Die sprachliche Metapher wird so zu einem Sekundärphänomen – der Realisierung einer konzeptuellen Metapher. Pielenz (vgl. 1993: 71) spricht des-

---

<sup>14</sup> Vgl. dazu die Analyse des Beispiels *We're stuck* in Lakoff (ebd.: 207f).

<sup>15</sup> Bezeichnungen für Konzepte und konzeptuelle Metaphern werden in Kapitälchen gesetzt.

halb auch von einem „type/token-Verhältnis“ zwischen konzeptuellen und sprachlichen Metaphern. Als types sind konzeptuelle Metaphern bisher aber nicht mehr als Abstraktionen aus einer Reihe einzelner metaphorischer Äußerungen. Über ihren Nutzen als theoretische Konstruktionen hinaus, werden sie in einem zweiten Schritt mit einer Ontologie versehen: „[...] Metaphern sind physisch im Gehirn vorhanden“ (Lakoff/Wehling 2009: 17). Indem man also analysiert, wie über ein bestimmtes Thema gesprochen wird, sollen sogar Rückschlüsse auf physische Gehirnzustände möglich sein. Diese Trennung der Metapher in einen linguistischen und einen kognitiven Teil spaltet die Terminologie: Mit *Metapher* wird in der kognitiven Metaphertheorie die Konzeptverbindung bezeichnet und für ihre sprachlichen Realisierungen wird *metaphoric expression* verwendet. Dem schließen wir uns in dieser Arbeit nicht an.<sup>16</sup> Hier wird der type durch *konzeptuelle Metapher*, *kognitives Metaphernmuster* oder *Metaphernmodell* und das token durch *sprachliche Metapher* oder *metaphorische Äußerung* bezeichnet, wobei eine explizite Unterscheidung immer dann unterbleibt, wenn der Kontext ohnehin nur eine Interpretation zulässt.

Quer dazu verläuft Kövecses' Unterscheidung dreier Ebenen, auf denen konzeptuelle und sprachliche Metaphern wirken: die supra-individuelle, die individuelle und die sub-individuelle Ebene (vgl. Kövecses 2011: 25). Auf der höchsten Stufe, der supra-individuellen Ebene, befinden sich hochgradig dekontextualisierte, konventionelle Metaphern. Sie ist der primäre Untersuchungsort der kognitiven Metaphertheorie, der Ort an dem konzeptuelle Metaphern rekonstruiert werden. Eine Stufe tiefer auf der individuellen Ebene steht der einzelne Mensch mit seinem individuellen konzeptuellen System und seinem idiosynkratischen Sprachgebrauch, die beide an den Metaphern der supra-individuellen Ebene teilhaben. Kövecses (ebd.: 26) hebt hervor, dass es keine Eins-zu-eins-Entsprechung zwischen

---

<sup>16</sup> Siehe dazu die Terminologiekritik in Kapitel 3.7.1

den Metaphern der supra- und denen der individuellen Ebene geben müsse. Was für Kinder offensichtlich ist, da konzeptuelle Metaphern erworben werden müssen und nicht angeboren sind, gelte für die Menschen einer Kulturgemeinschaft allgemein: Einzelne Personen wie auch ganze soziale Gruppen können sich erheblich in den von ihnen gebrauchten Metaphern von anderen Personen und Gruppen unterscheiden. Ebenfalls haben Kontexte einen Einfluss auf die Wahl einer Metapher aus dem Pool auf der supra-individuellen Ebene. Diese mittlere Ebene sei außerdem der Ort, an dem neue Metaphern geschaffen werden, die, wenn sie sich weit genug verbreiten, auf die supra-individuelle Ebene aufsteigen können. Die sub-individuelle-Ebene schließlich „is the level at which the conceptualization [...] is made natural and motivated for speakers.“ (ebd.: 26) Dort greift das Embodiment, die Korrelation von körperlichen Erfahrungen, weshalb man dort u. a. kulturunabhängige, anthropologisch universelle Metaphern findet.

Eine konzeptuelle Metapher operiert im konzeptuellen System und verknüpft dort zwei verschiedene<sup>17</sup> konzeptuelle Bereiche miteinander. Dabei wird ein Ursprungsbereich *Y* auf einen Zielbereich *X* abgebildet, durchaus im Sinne des mathematischen Funktionsbegriffes, wobei Entitäten aus *Y* zu Entitäten aus *X* korrespondieren und so eine systematische Zuordnung ausgebildet wird. Im Beispiel der als Reise verstandenen Liebesbeziehung wird das Konzept REISE auf das Konzept LIEBE abgebildet, wodurch Sachwissen, Bewertungen und Schlussfolgerungsmuster vom Ursprungs- auf den Zielbereich übertragen werden. Als abkürzende, mnemotechnische Schreibweise wird diese konzeptuelle Metapher als LIEBE IST EINE REISE oder LIEBE ALS REISE und allgemein als X IST/ALS Y notiert. Dabei ist zu beachten, dass diese Kurzform nur als Gedächtnisstütze gedacht ist. Die

---

<sup>17</sup> Wann zwei Konzepte „verschieden“ sind, ist allerdings kontrovers. So werden in der aktuellen Forschung einige konzeptuelle Metaphern als konzeptuelle Metonymien analysiert, weil die Heterogenität der Bereiche zweifelhaft ist.

eigentliche damit bezeichnete konzeptuelle Metapher entspricht einer Menge von Korrespondenzen zwischen Ursprungs- und Zielbereich (vgl. Lakoff 1993: 207). Dazu merkt Jäkel (2003: 25) an, dass es Fälle geben kann, in denen der Kurzform ein metaphorisches Sprichwort gegenübersteht, wie in *Zeit ist Geld* zu ZEIT IST GELD, wo also die Kurzform selbst ein Exemplar der bezeichneten konzeptuellen Metapher darstellt. Im Allgemeinen wird dies aber nicht der Fall sein und man sollte zwischen dem Namen einer konzeptuellen Metapher und der Metapher selbst streng unterscheiden.

Die angesprochene Metaphorisierung der konzeptuellen Metapher als mathematische Abbildung wird später von Lakoff/Johnson wieder zurückgenommen, weil sie einem wesentlichen Aspekt nicht gerecht werde:

Mathematical mappings do not create target entities, while conceptual metaphors often do. (Lakoff/Johnson 2003: 252)

Durch die konzeptuelle Metapher LIEBE IST EINE REISE wird die Vorstellung erzeugt, eine Liebesbeziehung müsse ein Ziel haben, etwas worauf sich die Partner verständigt haben und worauf sie hinarbeiten. In Kulturen, in denen diese Metapher nicht üblich ist, könnte Liebe unter Umständen konventionell als durativer Vorgang ohne konkretes Ziel betrachtet werden. Konzeptuelle Metaphern sind also in der Lage die Struktur von Konzepten zu modifizieren, indem sie in den Zielbereich neue Entitäten einfügen. Die Modellierung als mathematische Funktion setzt dagegen bereits zwei fertige Bereiche voraus und ordnet vorhandene Elemente bloß einander zu.<sup>18</sup> Als alternatives Modell, das Veränderungen im Zielbereich berücksichtigt, schlagen Lakoff/Johnson das schon von Bühler u. a. bekannte Projektionsmodell vor. Analog zur Kombination zweier Folien auf einem Overheadprojektor wird der Ursprungs- auf den Zielbereich gelegt, sodass man den

---

<sup>18</sup> Als Einschränkung ist anzumerken, dass eine mathematische Funktion zwar keine Elemente in den Wertebereich einführen, dort aber eine Struktur induzieren kann: Ist z. B.  $\langle M, < \rangle$  eine Wohlordnung und existiert ein bijektives  $f: M \rightarrow N$  für eine weitere Menge  $N$ , so lässt sich auch  $N$  wohlordnen, indem man für  $x, y \in N$  setzt:  $x < y$  falls  $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ . Die Abbildung  $f$  erzeugt also auf der Menge  $N$  eine Wohlordnung.

Zielbereich „durch“ den Ursprungsbereich sieht (vgl. ebd.: 253). Doch auch diese Metapher der Metapher hat unerwünschte Implikationen, da sie suggeriert, der komplette Ursprungsbereich würde auf den kompletten Zielbereich projiziert, wobei es doch meistens nur Konzeptteile sind. In diesem Punkt eignet sich die Abbildungsmetaphorik wieder besser, da dort nur ein Ausschnitt des Ursprungsbereichs dem Zielbereich zugeordnet werden muss. Die vorerst letzte Wendung hat der Metaphernbegriff durch die Einbeziehung der Neurowissenschaften erfahren: Die konzeptuelle Metapher wird zu einem neuronalen Phänomen erklärt und die mentale Verbindung zweier Domänen soll sich physisch als neuronale Verschaltung realisieren.<sup>19</sup> Damit schließt sich der Kreis zur angesprochenen Ontologisierung der Metapher als physisches Phänomen.

Wie werden die in einer Kulturgemeinschaft etablierten Metaphernmodelle identifiziert? Solange die Neurowissenschaften noch nicht in der Lage sind, konzeptuelle Metaphern direkt zu messen, muss die kognitive Metaphertheorie einen indirekten Ansatz verfolgen. Vor allem aus sprachlichen Daten werden konzeptuelle Metaphern rekonstruiert:

Since metaphorical expressions in our language are tied to metaphorical concepts in a systematic way, we can use metaphorical linguistic expressions to study the nature of metaphorical concepts and to gain an understanding of the metaphorical nature of our activities. (ebd.: 7)

Auf diese Weise gewinnt man neben der konzeptuellen Metapher *LIEBE IST EINE REISE* eine ganze Liste an Möglichkeiten, eine Liebesbeziehung zu konzeptualisieren:

---

<sup>19</sup> Diese Neuausrichtung wird hier kaum weiter verfolgt. Es sei daher nur auf Lakoff/Johnson verwiesen, die eine neuronale Theorie der Metapher heraufziehen sehen: „In the neural theory of metaphor, therefore, the terms map and projection take on a whole new meaning. The maps or mappings are physical links: neural circuitry linking neuronal clusters called *nodes*. The *domains* are highly structured neural ensembles in different regions of the brain.“ (Lakoff/Johnson 2003: 256)

---

LIEBE IST EINE ELEKTROMAGNETISCHE KRAFT

Der *Funke* sprang über. Ich fühle mich von ihr *angezogen*.

LIEBE IST EIN PATIENT

Diese Beziehung ist doch *krank*. Sie führen eine *gesunde* Beziehung.

LIEBE IST WAHNSINN

Ich bin *verrückt* nach ihr. Sie hat ihn *um den Verstand gebracht*.

LIEBE IST MAGIE

Sie hat mich in ihren *Bann* gezogen. Die *Magie* ist weg.

LIEBE IST KRIEG

Er hat sie *erobert*. Sie *kämpfte* um ihn und *gewann*.

LIEBE IST EINE SCHARFE WAFFE

Ihre Trennung hat *tiefe Wunden* geschlagen. Eine Liebe hinterlässt *Narben*.

---

Tabelle 2: Vgl. Lakoff/Johnson 2003: 49; Pielenz 1993: 73/74

Kövecses (2000: 26f) zählt insgesamt 22 verschiedene Varianten auf, Liebe zu konzeptualisieren. Es fällt auf, dass in vielen dieser Metaphern kein Lexem, das unmissverständlich zum Bereich der Liebesbeziehungen gehört, auftritt. Mit einigen dieser Metaphern „in absentia“ könnten ebenso gut andere Arten von Beziehungen thematisiert werden. In diesem Sinne ist auch die konzeptuelle Metapher LIEBE IST EINE REISE eine konkretere Variante der allgemeineren Metapher EIN ZIELGERICHTETES LEBEN IST EINE REISE (vgl. Lakoff/Johnson 1999: 64). Wenn das individuelle Leben einer Person als Reise konzeptualisiert wird, so ist es nachvollziehbar, dass dies auch für das gemeinsame Leben zweier Personen zutrifft und sich beide zusammen auf eine Reise mit einem von beiden geteilten Ziel begeben. Es stellt sich die Frage, ob die anderen Konzeptualisierungen auch auf abs-

traktere Muster zurückgeführt werden können oder ob sogar eine einzelne konzeptuelle Metapher existiert, aus der sich alle ableiten lassen.

Weiterhin lässt sich fragen, warum Liebe nun durch genau diese Konzepte verstanden wird. Eine Teilantwort darauf gibt der Erfahrungsrealismus. Zur Illustration betrachten wir ein anderes Beispiel: Krankheiten, deren Auslöser für uns mit bloßem Auge unsichtbare Bakterien oder Viren sind, werden konventionell als militärische Auseinandersetzungen zwischen der menschlichen „Immunabwehr“ und „eindringenden“ Erregern verstanden (vgl. Steudel-Günther 1995: 270f). Das weite Feld physischer Auseinandersetzungen, das auch zur Konzeptualisierung von Argumentationen genutzt wird, liefert so ein Modell für das Verständnis des abstrakten Bereichs der Immunantwort als Krieg zwischen einer sich verteidigenden und einer angreifenden Partei. Speziell für die Krankheit Krebs diskutiert Sontag (2005: 56ff), wie Tumore als Invasion bösartiger, aggressiver Zellen erscheinen, die Kolonien bilden und sich über das ganze Körperterritorium auszubreiten drohen. Eine konsequente Behandlung dieser Erkrankung kann demnach nur in einem groß angelegten Gegenangriff bestehen, mit dem Ziel die außer Kontrolle geratenen Zellen zu zerstören. Dass dabei Kollateralschäden an gesunden Zellen auftreten können, wird durch die Kriegsmetaphorik sanktioniert und ist daher in Kauf zu nehmen. Den Grund, warum Krankheiten nun ausgerechnet als Kriege konzeptualisiert werden, kann mit der menschlichen Daseinsweise begründet werden: Die konzeptuellen Domänen, die uns als Ursprungsbereiche für Übertragungen zur Verfügung stehen, sind nicht zufällig gewählt, sondern das Resultat direkter, also vor allem körperlicher Erfahrungen:

Our bodily experience determines the kinds of metaphoric source domains that define the content of our conceptual systems and the way we reason with them; (Johnson 1992: 356)

Zu irgendeinem Zeitpunkt in der Ontogenese verschmelzen zwei Erfahrun-

gen, z. B. weil sie in etwa gleichzeitig wahrgenommen werden, und die Domänen, denen sie angehören, werden fortan im Gehirn dauerhaft verknüpft. Da nun die meisten Menschen ähnliche Erfahrungen machen, stimmen sie auch weitestgehend in ihren konzeptuellen Metaphern überein. Die tiefere Ursache der Metaphorisierung von Krankheit als Krieg könnte etwa so hergeleitet werden: Wer krank ist, fühlt sich schwach, will sich eventuell hinlegen, braucht Ruhe und muss gepflegt werden, als ob er in einer physischen Auseinandersetzung verletzt worden wäre. Beide Situationen sind mit ähnlichen Erfahrungen verbunden und führen so zu einer neuronalen Konditionierung, bei der die Erfahrung einer Krankheit automatisch die andere Erfahrung aufruft. Alle sprachlichen Metaphern, mit denen Krankheiten als physische Konflikte beschrieben werden, folgen der auf konzeptueller Ebene angelegten Verknüpfung der beiden Bereiche.

### 3.5 Neun Thesen

Die Grundlagen der kognitiven Metaphertheorie sind damit knapp umrissen. Weitere wesentliche Aspekte sollen in Form von neun Thesen diskutiert werden. Die Darstellung orientiert sich grob an Jäkel (2003: 40f), jedoch werden die Thesen in einer anderen Reihenfolge angeordnet und anders gewichtet. Außerdem wird die Diachronie-These entfernt, da dieser Aspekt in dieser Arbeit nicht betrachtet wird, und dafür die Unbewusstheits-These eingesetzt. Einige der Thesen sind redundant: Beispielsweise folgt die Ubiquitäts- aus der Notwendigkeits-These und die Domänen- aus der Modell-These. Im Zentrum der folgenden Auseinandersetzung stehen dann Unidirektionalitäts- und Invarianz-These, da sie die stärksten Behauptungen mit den weitreichendsten Konsequenzen der kognitiven Metaphertheorie ausmachen.

Die Darstellung jeder These enthält einen Überblick der maßgeblichen



Argumente, welche die kognitive Metaphertheorie für ihre Gültigkeit vorbringt. Das wird in erster Linie immer die konzeptuellen Metaphern und nur in der Folge auch die zugehörigen sprachlich realisierten Metaphern betreffen. Zur Unterstützung der jeweiligen Position und um noch einmal zu zeigen, dass die meisten Thesen in der ein oder anderen Form schon weitaus länger in Umlauf sind, werden immer wieder auch andere Metaphertheoretiker zur Sprache kommen, mit denen dann insbesondere stärker auf die sprachliche Seite der Metapher Bezug genommen werden kann. Wird ein Aspekt in der Metaphertheorie besonders kontrovers diskutiert, lassen wir auch Argumente, die gegen diese These sprechen, bereits einfließen. Das greift teilweise auf die dann folgende kritische Auseinandersetzung, bei der die Thesenliste als Grundlage dienen soll, voraus.

### 3.5.1 Ubiquitäts-These

Egal ob Alltags- oder Fachsprache, ganz gleich in welchem Diskurs man auch sucht, Metaphern finden sich überall. Nicht einmal der vorhergehende Satz kommt ohne sie aus. Man nehme nur die dort enthaltene unauffällige Präposition *in*. Sie lässt einen Diskurs als Behälter erscheinen, als ein Gefäß, in dessen Innenraum alle Äußerungen zu einem bestimmten Thema aufbewahrt sind. Der Diskurs wird so unabhängig von den Menschen, welche ihn hervorbringen und am Leben erhalten; er gerinnt zu einem eigenständigen Objekt mit einem festen Platz in der Welt. Diese Konzeptualisierung gehört zu den in Reddy (1993) beschriebenen Erweiterungen der „conduit metaphor“. Es sind nun gerade derart konventionelle, an anderer Stelle als *tot* bezeichnete Metaphern, die man ganz selbstverständlich, ohne dass es einem bewusst wäre, ständig verwendet. Wer eine Sprache erlernt, lernt sie automatisch mit. Neu an dieser Sichtweise ist erst einmal nicht, dass man meint, Metaphern seien ubiquitär. Obwohl die kognitive Metaphertheorie ihren Vorgängern unterstellt, sie würden die Metapher zum

optionalen Redeschmuck abwerten, ist ihnen die Ubiquität lange bekannt. Der Befund der Allgegenwärtigkeit kann daher als weitestgehend akzeptiert gelten. Tatsächlich neu ist, dass in der kognitiven Metaphertheorie die Ubiquität deutlich weiter gefasst wird als etwa noch bei Richards, der die Metapher „das allgegenwärtige Prinzip der Sprache“ (Richards [1936] 1996: 33) nennt. Die Allgegenwärtigkeit bezieht sich auf konzeptuelle Metaphern und meint damit, dass die Metapher nicht nur in der Sprache, sondern auch im Denken und Handeln, mithin in allen Bereichen, die auf das konzeptuelle System zugreifen, allgegenwärtig ist. Wenn man bereits metaphorisch denkt, dann muss jede Veräußerung dieses Denkens zwangsläufig ebenfalls metaphorisch sein. Die sprachliche Metapher ist hier nur noch eine Möglichkeit der Realisierung unter anderen.

#### 3.5.2 Notwendigkeits-These

Die Ubiquitäts-These ist eine empirische Feststellung, dass alle Menschen allenthalben Metaphern gebrauchen. Sie macht noch keine Aussage darüber, ob es nicht auch anders ginge, ob es also nicht wenigstens prinzipiell eine metaphernfreie Sprache bzw. ein metaphernfreies Denken geben könnte. Erst mit der Notwendigkeits-These entscheidet sich diese Frage: Der Mensch ist auf Metaphern angewiesen; sie sind für ihn unverzichtbar. Zugespitzt formuliert, macht der Metapherngebrauch den Menschen zum Menschen; er definiert ihn.

Primär bezieht sich diese Notwendigkeit natürlich wieder zuerst auf die konzeptuellen Metaphern als kognitive Instrumente, die an der Konstruktion abstrakter Konzepte beteiligt sind und so abstraktes Denken ermöglichen, und erst danach auch auf die sprachliche Ebene. Das heißt jedoch nicht, dass sämtliche Konzepte metaphorisch wären. Ein Reservoir nicht-metaphorischer Konzepte muss vorhanden sein, aus dem sich Ursprungsbe-  
reiche für metaphorische Übertragungen auf abstrakte Konzepte speisen.

Zu den nicht-metaphorischen Konzepten gehören etwa die Vorstellungsschemata oder Kategorien einer mittleren Ebene („basic-level“) wie TISCH oder STUHL, die basalen menschlichen Erfahrungen entsprechen (vgl. Lakoff/Johnson 1999: 27). Ebenso sind räumliche Konzepte wie OBEN/UNTEN, VORN/HINTEN usw. nicht-metaphorisch. Ein Denken, das nur diese nicht-wörtlichen Konzepte heranzieht, sei zwar grundsätzlich möglich, werde aber kaum eingesetzt. Zum einen weil es nur minimale und sehr einfache Schlussfolgerungen erlauben würde und zum anderen weil jeder Mensch in seiner Ontogenese automatisch konzeptuelle Metaphern erwerbe, ohne die Wahl zu haben, sie anzunehmen oder abzulehnen (vgl. ebd.: 58f). Im Lichte der jüngsten Neuorientierung der kognitiven Metaphertheorie zur einer Theorie der neuronalen Metaphern gewinnen Ubiquitäts- und Notwendigkeits-These noch einmal zusätzlich an Schärfe. Sollten konzeptuelle Metaphern tatsächlich ein physischer Teil des Gehirns sein, hat der Mensch nicht mehr die freie Wahl, ob er metaphorisch Denken und Sprechen möchte oder nicht (vgl. Lakoff/Johnson 2003: 257). Er muss den Pfaden folgen, die in seinem Nervensystem vorgezeichnet sind:

Der Gebrauch von Metaphern ist unvermeidbar. Wir können uns nicht den physischen Beschaffenheiten unseres Gehirn widersetzen und sagen: »Ich werde nicht in dieser Metapher denken!« Es passiert automatisch. (Lakoff/Wehling 2009: 20)

*Notwendigkeit* meint dann ‚physische Tatsache‘.

Selbst wenn es für sehr einfache Konzepte prinzipiell möglich erscheint, ohne Metaphern auszukommen, werden sie unverzichtbar, sobald über abstraktere Konzepte nachgedacht werden soll. Ein Beispiel dafür, welche scheinbar einfachen Konzepte schon unter das Adjektiv *abstrakt* fallen, ist die bekannte metaphorische Äußerung *Sally ist ein Eisklotz*, die etwa durch *Sally ist emotional kalt* paraphrasiert werden kann, was jedoch noch immer nur metaphorisch über die konventionelle Verbindung von Emotionalität

und Temperatur zu verstehen ist. Bereits das Sprechen über Emotionen ist auf Metaphern angewiesen. Wären aus irgendeinem Grund alle konzeptuellen Metaphern plötzlich verschwunden, dann wäre Sallys emotionaler Zustand nicht mehr mittelbar und möglicherweise gäbe es überhaupt keine Emotionskonzepte mehr. Bestimmte Domänen wie etwa Gefühle oder auch Sinneseindrücke<sup>20</sup> können gar nicht anders als metaphorisch erschlossen werden.

Wenn auch einsichtig ist, dass metaphorisch gesprochen und gedacht werden muss, sind die auf das Ziel projizierten Ursprungsbereiche dagegen höchst unterschiedlich. Die Notwendigkeits-These im kognitiven Sinne bezieht sich daher auf das konzeptuelle System als Ganzes und nicht speziell auf einzelne Metaphern. Emotionen müssen metaphorisch konzeptualisiert werden, aber es besteht kein Zwang dafür den Bereich der Temperatur zu verwenden. Bei einigen Metaphern hat man sogar den Eindruck, womöglich ganz gut auf sie verzichten zu können, während andere viel zwingender erscheinen. Das korrespondiert zu der Beobachtung, dass einige Metaphern wie MEHR IST OBEN wahrscheinlich universell sind, andere wie ZEIT IST EINE WERTVOLLE RESSOURCE dagegen stärker kulturspezifisch. Gelänge es, die allen Kulturen gemeinsamen konzeptuellen Metaphern zu ermitteln und wäre diese Schnittmenge nicht leer, so hätte man gute Kandidaten für anthropologisch unentbehrliche Metaphern an der Hand.

Wie die Ubiquität ist auch die Notwendigkeit der Metapher bereits länger Gegenstand der Metaphertheorie. Aristoteles schreibt zwar nicht direkt über sie, begründet seine Wertschätzung der sprachlichen Metapher aber sowohl für die Dichtkunst als auch für die Prosarede mit einem Argument, das ihr kognitives Potential betont:

Müheles etwas dazuzulernen bereitet von Natur aus allen Menschen Freu-

---

<sup>20</sup> Beispielhaft ist hier die Synästhesie als spezielle Metapher zu nennen, wie etwa die Kopplung der Wahrnehmungsbereiche Hören und Sehen, die, wie Störel (1997) zeigt, auch in der Musikwissenschaft dominiert.

de, es sind aber Worte, die etwas vermitteln, so daß gerade die Worte, die uns neue Erkenntnis verschaffen, die angenehmsten sind. [...] So bewirkt am ehesten die Metapher dies [...] (Aristoteles 2007: Rhet. III, 10; 172/173)

Wenn es der Natur des Menschen entspricht, stets etwas Neues zu lernen, Wissen zu erwerben, und die Metapher das wirkungsvollste Mittel ist, dies zu erreichen, dann muss die sprachliche Metapher folglich notwendig sein.

Als Korollar aus der kognitiven Notwendigkeit erhält man, dass metaphorische Äußerungen zumeist nicht durch wörtliche Paraphrasen ersetzbar sind, sonst wären gemäß der kognitiven Semantik auch die Konzepte wörtlich erfassbar, was für abstrakte Konzepte im Allgemeinen nicht zutrifft. Daraus folgt andererseits nicht, wie Davidson (2007: 245ff) in seiner Theorie der Metapher annimmt, dass metaphorische Äußerungen über gar keinen „cognitive content“, d. h. keine propositionale Bedeutung, verfügen und deshalb nicht paraphrasierbar sind. Der „Inhalt“ einer sprachlichen Metapher ist nach Lakoff/Johnson gerade die Verknüpfung zweier kognitiver Domänen.

Dass gerade abstrakte Sachverhalte meist metaphorisch beschrieben werden, ist nicht neu. Auch Stählin erkennt diese Funktion der Metapher an, hält sie allein aber nicht für ausreichend, den allgegenwärtigen Metapherngebrauch vollständig zu erklären:

Es genügt nicht, darauf hinzuweisen, daß ursprünglich alle abstrakten Ausdrücke Metaphern von sinnlichen Gegenständen seien. Auch wenn man nur die Gegenwart in Betracht zieht, ist der menschliche Geist viel zu kunstvoll in seinen Schöpfungen, viel zu fein organisiert in seinem Verstandes- und Gefühlsleben, als daß für jedes seiner Gebilde ein eigener sprachlicher Ausdruck vorhanden sein könnte. (Stählin 1914: 354)

In der hier gebrauchten Terminologie heißt dies, dass die Notwendigkeit konzeptueller Metaphern die Ubiquität der sprachlicher Metaphern nicht vollständig begründen kann. Man könnte etwa für Sallys Gemütszustand

ein neues Wort schöpfen, um ihn damit ganz unmetaphorisch zu beschreiben. Auf der kognitiven Ebene bliebe die Verbindung von Emotion und Temperatur bestehen, die aber sprachlich kein Korrelat mehr hätte. Von Fachsprachen abgesehen ist die Schöpfung gänzlich neuer Wörter in der Gemeinsprache jedoch eher die Ausnahme als die Regel. Zur Bezeichnung der unentwegt neu entstehenden Gegenstände und Sachverhalte wird zumeist auf das bestehende Inventar zurückgegriffen. Die sprachliche Metapher ist dann eines der Verfahren, um lexikalische Lücken zu schließen, ohne eine völlig neue sprachliche Form bilden zu müssen. Sie ist somit ein wichtiges, ein notwendiges Instrument der Sprachökonomie, um mit möglichst wenigen sprachlichen Elementen möglichst viel ausdrücken zu können, um schließlich, damit wird ihre kognitive Erkenntnisfunktion wieder hereingeholt, „die Grenzen des Sagbaren zu transzendieren“ (Burkhardt 1987: 41). Im Verlauf der Lexikalisierung einer sprachlichen Metapher entstehen so polyseme Ausdrücke mit verschiedenen aber zusammenhängenden Bedeutungen. Insofern hat Stählin recht, wenn er resümiert:

Jedenfalls ist die Metapher in der eigentümlichen Art ihrer Wirkung ein klassisches Beispiel für die kunstvolle Arbeitsweise der Sprache. (Stählin 1914: 355)

Sowohl Ubiquitäts- als auch Notwendigkeits-These können somit als *kanonische Annahmen* bezeichnet werden, denen die meisten Metaphertheorien wenn auch aus durchaus sehr unterschiedlichen Gründen zustimmen würden.

#### 3.5.3 Domänen-These

Ein Teil der Metaphertheorien konzentriert sich vorrangig auf einzelne Sprachäußerungen und versucht dort, das Spezifische genau dieser Sprachverwendungen zu beleuchten. Zu diesen „lokalistischen“, sich am Wort,

Satz oder an der Äußerung orientierenden Theorien, die in dieser Arbeit mit betrachtet werden, gehören im Großen und Ganzen die aristotelische Metaphertheorie, Stählin (ebd.), Bühler (1982), Black ([1954] 1996; [1977] 1996), Searle (1982) oder Coenen (2002). Ihnen gegenüber stehen „Domänen-Theorien“, die von einer großräumigen Verbindung ganzer Bereiche, egal ob diese nun kognitiver oder linguistischer Natur sind, ausgehen, in die einzelne metaphorische Äußerungen eingebettet sind.

Die kognitive Metaphertheorie ist eine Domänen-Theorie, geht aber noch einen Schritt weiter und verwendet den Metaphernbegriff zur Bezeichnung dieser Bereichsverbindungen:

In the cognitive linguistic view, metaphor is defined as understanding one conceptual domain in terms of another conceptual domain. (Kövecses 2002: 4)

Unter den Domänen-Theorien ist sie sicherlich die prominenteste, aber mitnichten die einzige Theorie (vgl. Gentner/Bowdle/Wolff u. a. 2001: 204ff; Jäkel 2003: 113ff). So verweist bereits Paul (1960: 96ff) auf systematische Übertragungen sprachlicher Ausdrücke, etwa von räumlichen auf zeitliche Verhältnisse und auf geistige Vorgänge, von einem Sinneseindruck auf einen anderen oder von menschlichen Eigenschaften und Tätigkeiten auf Unbelebtes. Die letzten beiden Übertragungsarten sind als Synästhesie und Personifikation bzw. Anthropomorphisierung schon seit der Antike bekannt. Paul bleibt aber in der aristotelischen Tradition, die Metapher als „eines der wichtigsten Mittel zur Schöpfung von Benennungen für Vorstellungskomplexe“ (ebd.: 94) und damit als lokales Wort- bzw. Phrasengebrauchsverfahren zu betrachten, wohingegen er die globale Verbindung zweier Bereiche als *Analogie* bezeichnet. Dagegen wird in der kognitiven Metaphertheorie viel stärker angenommen, dass metaphorische Äußerungen fast ausschließlich durch Aktivierung einer globalen konzeptuellen Metapher verstanden werden. Während also bei Paul Analogien eine Möglich-

keit unter anderen sind, Metaphern zu begründen, sind bei Lakoff (fast) alle sprachlichen Metaphern von ihren kognitiven Mustern abhängig. Dies beinhaltet auch eine Wertung: Nur metaphorische Äußerungen, die sich auf konzeptuelle Metaphern zurückführen lassen, seien systematisch und erschließen dem Sprachbenutzer eine Domäne durch eine andere, während isoliert auftretende sprachliche Metaphern singulär und idiosynkratisch seien, damit ohne kognitiven Effekt und damit für eine auf kognitive Muster angelegte Metaphernanalyse zu vernachlässigen.

Einen Einwand gegen Domänen-Theorien stellen auf den ersten Blick Schöpfungen besonders kreativer Metaphern dar, die sich erst zu einem kognitiven Modell verfestigen müssen und bis dahin von einer Domänen-Theorie nicht erfasst werden. So vertritt Black die Ansicht, die alleinige Konzentration auf dekontextualisierte Metaphernmodelle – er spricht vom Metaphernthema – sei nur von geringem Wert, da jede metaphorische Aussage gegen bestimmte Regeln verstoße:

es kann keine Regeln für die „kreative“ Verletzung von Regeln geben. Und aus diesem Grund kann es auch kein *Lexikon* für Metaphern geben [...] (Black [1977] 1996: 387/388)

Für metaphorische Äußerungen ist ein solches Lexikon wohl in der Tat unmöglich, für Metaphernmodelle jedoch hat Lakoff eines begonnen.<sup>21</sup> Die Herausforderung kreativer Metaphern an die Domänen-These versucht die Kreativitäts-These in den Griff zu bekommen.

#### 3.5.4 Modell-These

Die Domänen-These voraussetzend behauptet die Modell-These viel stärker, dass konzeptuelle Metaphern mentale Modelle ausbilden, die eine erkenntnistiftende Funktion haben, indem sie einen unbekanntem Erfahrungsbereich durch einen bekannten systematisch kognitiv erschließen:

---

<sup>21</sup> Siehe dazu <http://cogsci.berkeley.edu/lakoff/> – Zugriff am 15.10.2011



The primary function of metaphor is to provide a partial understanding of one kind of experience in terms of another kind of experience. (Lakoff/Johnson 2003: 154)

Der Zielbereich  $X$  einer Metapher ist dabei zumeist abstrakt und erfahrungsfern, während der Ursprungsbereich  $Y$  konkret und erfahrungsnah ist, so dass die Metapher den Bereich  $X$  durch  $Y$  verstehbar macht und man von einer explanatorischen Funktion sprechen kann:

Aufgrund der erklärenden Wirkung der Metapher hat der konzeptuelle Zielbereich die Stellung eines Explanandums, der Herkunftsbereich dient als Explanans. (Drewer 2003: 6)

Konzeptuelle Metaphern rücken so in die Nähe von mentalen Modellen: Beide reduzieren die Komplexität abstrakter Bereiche, indem sie zur Erklärung eines Konzeptteils auf einen konkreteren Bereich zurückgreifen, so Wissen generieren, organisieren und speichern, das Erklärungen über den abstrakten Bereich liefert, Inferenzen sowie Bewertungen erlaubt und Voraussagen möglich macht (vgl. Jäkel 2003: 32; Drewer 2003: 55). Andere Funktionen wie Persuasion oder Emotionalisierung (vgl. Skirl/Schwarz-Friesel 2007: 60ff), ebenso wie Unterhaltung, Kreativität oder ästhetischer Reiz (vgl. Kohl 2007a: 64ff) sind dieser Hauptfunktion untergeordnet. Im Rahmen des Embodiments heißt dies, dass direkte körperliche Erfahrungen in Konzeptstrukturen münden, die durch konzeptuelle Metaphern vermittelt Modelle zum indirekten Verstehen erfahrungsferner Konzepte bereitstellen.<sup>22</sup>

Mit Lakoffs Terminus *Idealized Cognitive Models* für die Einheiten, in denen Wissen organisiert ist, wird der Modellbegriff nicht nur für Metaphern, sondern für das gesamte konzeptuelle System entscheidend. Lakoff (1987: 118ff) weist ferner auf die Nähe zum Begriff der Theorie hin:

---

<sup>22</sup> Zum Begriffspaar *direkt/indirekt*: „Abstract conceptual structures are indirectly meaningful; they are understood because of their systematic relationship to directly meaningful structures.“ (Lakoff 1987: 268)

Im Alltag führen ICMs zu Alltagstheorien („folk theories“) über die im alltäglichen Leben relevanten Gegenstände und Sachverhalte. Sie erzeugen Commonsense-Wissen beispielsweise zum Metabolismus, zur Elektrizität, aber auch zu linguistisch relevanten Phänomenen wie dem Wort oder der Bedeutung. Wissenschaftlich gesehen können diese Alltagstheorien unplausibel oder nachprüfbar falsch sein, das ändert jedoch nichts an ihrem Modellstatus. Jedoch wird nicht klar, ob konzeptuelle Metaphern selbst ICMs bilden, also Modelle sind, oder ob sie auf ICMs operieren. Bilden also Ursprungs- und Zielbereich zusammengenommen ein Modell oder ist der Ursprungsbereich ein Modell für den Zielbereich?<sup>23</sup>

Der Zusammenhang von Metapher und Modell wurde bereits von Black gesehen, als er schrieb: „jede Metapher ist die Spitze eines untergetauchten Modells“ (Black [1977] 1996: 396). In Kapitel 3.9 wird die Beziehung von Metapher und Modell in Verbindung mit der Analogie systematischer untersucht.

#### 3.5.5 Unbewusstheits-These

Die kognitive Funktion der Metapher wird bei Aristoteles auf das Vor-Augen-Führen von Ähnlichkeiten zwischen sonst Disparatem zurückgeführt. Modern sagt man, das Betrachten von Ähnlichkeiten werde durch einen scheinbaren semantischen oder pragmatischen Fehler in der wörtlich verstandenen Äußerung ausgelöst, der zur Auflösung drängt und dazu führt, innezuhalten, um eine metasprachliche Perspektive einzunehmen.<sup>24</sup> Auf einen Akt des Problemlösens weist ferner auch Aristoteles' Bemerkung

---

<sup>23</sup> Zu unterschiedlichen Einschätzungen siehe etwa Jäkel (2003: 140), Eggs (2001: Sp. 1155), Baldauf (2000: 124) oder Linz (2004: 250).

<sup>24</sup> Siehe z. B. diese typische Charakterisierung: „Diese Sprachfigur, die durch erstes semantisches Nicht-Passen ein Zögern verursacht, den Verstehensvorgang bewußter macht und ihn dann durch Einbeziehung einer ungewohnten Denkperspektive seiner kommunikativen Aufgaben besonders treffend gerecht werden läßt —, diese Sprachfigur hat seit zweitausend Jahren einen eigenen Namen: die Metapher“ (Hörmann 1971: 320).

zur Verbindung zwischen Metapher und Rätsel hin:

Aus guten Rätseln kann man überhaupt treffliche Metaphern gewinnen, denn Metaphern sprechen insofern in Rätseln, als klar werden müßte, daß die Übertragung trefflich erfolgt ist. (Aristoteles 2007: Rhet. III, 2; 157)

Eine gute Metapher habe mit einem Rätsel gemeinsam, eine Aufgabe zu stellen, die durch bewusstes Nachdenken zu lösen sei. Das metaphorische Verfahren ist, so gesehen, ein metasprachlicher Prozess, der Distanz zu den festgefahrenen Konventionen der Sprache schafft, um mit der Sprache etwas gegen sie zu sagen. Sowohl das Bilden als auch das Verstehen von Metaphern sind demnach bewusst ablaufende, intentionale Prozesse, die damit auch häufiger misslingen können als automatische Vorgänge, wie das Verstehen einer konventionellen Bedeutung. Das deckt sich zunächst mit der Beobachtung, dass poetische Metaphern Verständnisschwierigkeiten bereiten können und längeres „Grübeln“ erfordern.

Die kognitive Metaphertheorie will diese Ansicht, dass bewusste Metapherninterpretationen zu Einsichten führen können, nicht widerlegen, sondern bestreitet, dass die meisten sprachlichen Metaphern von Anfang an überhaupt bewusst verarbeitet werden:

Wir alle begreifen die Welt zu einem großen Teil in Form von Metaphern – und sind uns dessen nicht bewusst. (Lakoff/Wehling 2009: 13)

Die Macht von Metaphern, unser Denken zu leiten, hängt gerade mit ihrer Eigenart zusammen, sich unsichtbar zu machen und im Hintergrund zu wirken. Denken findet daher nicht nur „mit“ Metaphern, sondern zu allererst „in“ ihnen statt.<sup>25</sup> Je stärker eine Metapher in das konzeptuelle System einer Kultur eingesunken ist, umso schwerer wird es, sie als solche zu erkennen und ihr Alternativen entgegenzusetzen. Die wirklich interessanten Metaphern sind somit diejenigen, die wir nicht mehr als solche wahr-

---

<sup>25</sup> Metaphern haben deshalb mit Medien die Tendenz gemeinsam, einerseits für Kommunikation unerlässlich zu sein, sich aber gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen.

nehmen, die aber durch den Schleier der Konvention geschützt unbewusst unsere Sprache, unser Denken und unser Handeln lenken.

Die Unbewusstheits-These weist damit insbesondere alle Theorien zurück, die den „Inhalt“ einer sprachlichen Metapher zur zusätzlichen Bedeutung neben einer Ausdrucksbedeutung erklären wollen, die von einem Rezipienten erst erschlossen werden muss. Das betrifft etwa Searles Metaphertheorie, nach der die Metapher keine Erscheinung auf der Ebene der Wort- oder Satzbedeutung, sondern der vom Sprecher intendierten Äußerungsbedeutung ist: „Bei metaphorischer Bedeutung handelt es sich immer um Äußerungsbedeutung“ (Searle 1982: 99). Ein Sprecher sagt also mit seiner Äußerung etwas, meint aber etwas anderes. Dieses Gemeinte auf der Basis des Gesagten, des Kontexts und des Weltwissens zu erschließen, fällt als Aufgabe an den Hörer.<sup>26</sup> Insofern ist Searles Theorie eine durch die Sprechakttheorie unterfütterte Variante der Commonsense-Theorie, bei der das Verstehen einer Metapher einen zweistufigen Interpretationsprozess durchläuft. Zunächst wird die wörtliche Interpretation als defizitär oder irgendwie unpassend z. B. auf Grundlage der griceschen Konversationsmaximen erkannt und zurückgewiesen, um dann eine indirekte Interpretation zu versuchen. Deshalb wird diese Theorie auch als *pragmatische Reinterpretations-* oder *Divergenztheorie* bezeichnet. Um zu erklären, wie metaphorische Äußerungen funktionieren, wie also ein Hörer von der wörtlichen Satzbedeutung zur gemeinten Äußerungsbedeutung gelangt, legt Searle eine Liste von Prinzipien und Strategien vor, denen ein Hörer folgen kann. Prinzipiell hat jeder Hörer, will er eine Äußerung verstehen, nach Searle folgende Aufgaben zu bewältigen:

Meines Erachtens muß der Hörer bei den einfachen Fällen, die wir erörtert haben, wenigstens drei Arten von Schritten machen. Erstens muß er über eine Strategie verfügen, mit der er feststellt, ob er überhaupt nach einer

---

<sup>26</sup> Im Detail bei Searle: „Ein Sprecher äußert einen Satz der Form »S ist P« und meint damit metaphorisch, S sei R“ (Searle 1982: 105).

metaphorischen Interpretation der Äußerung suchen muß oder nicht. Zweitens muß er – wenn er sich dazu entschieden hat, nach einer metaphorischen Interpretation Ausschau zu halten – über Strategien oder Prinzipien verfügen, mit denen er hinter mögliche Werte von »R« kommt. Und drittens muß er über Strategien oder Prinzipien verfügen, mit denen er den Bereich der Rs einschränkt: mit denen er entscheidet, welche Rs der Sprecher dem S vermutlich zuschreibt. (ebd.: 126)

Wenn ein derartig mehrstufiger Prozess die Verarbeitung metaphorischer Äußerungen bzw. figurativer Sprache im Allgemeinen wahrhaftig steuern würde, so müsste er deutlich mehr Zeit in Anspruch nehmen als eine Interpretation vergleichbarer wörtlicher Äußerungen, denn bei ihnen ist der Interpretationsprozess bereits nach dem ersten Schritt abgeschlossen. Dieser vorhergesagte zeitliche Mehrbedarf konnte aber in einigen psycholinguistischen Experimenten nicht nachgewiesen werden:

In the normal course of events nonliteral uses of language, be they metaphors, idioms, or indirect speech acts, are comprehended without any special processing. [...] On the other hand, there certainly are cases where an utterance is insufficiently related to the context for it to be understood. These cases include literal as well as nonliteral uses of language. In such cases, it is necessary to engage in additional inferential procedures [...] (Ortony/Schallert/Reynolds u. a. 1978: 476)

Hinsichtlich des kognitiven Aufwands verhalten sich metaphorische Äußerungen also nicht grundsätzlich anders als wörtliche, wenn beide gleichermaßen gut in den Kontext eingebettet sind. Insbesondere gibt es Hinweise, dass die metaphorische Bedeutung einer Äußerung verarbeitet wird, bevor über den Wahrheitswert der wörtlichen Interpretation geurteilt wurde (vgl. Gentner/Bowdle/Wolff u. a. 2001: 224f). Die Maxime der Qualität fiel damit als Identifikationskriterium von metaphorischen Äußerungen aus. Man könnte sogar soweit gehen zu behaupten, dass es überhaupt keinen prinzipiellen Unterschied zwischen metaphorischen und nicht-metaphorischen

Äußerungen gebe. Neben der Rolle des Kontexts bietet die kognitive Metaphertheorie mit ihren eingeschliffenen kognitiven Metaphernmodellen ein gutes Instrument, die „beschleunigte“ Verarbeitung sprachlicher Metaphern zu erklären und zwar so weit, dass zusätzliche Schritte à la Searle überflüssig werden.

Die Betonung des Kontexts gibt eventuell einen Hinweis darauf, warum viele Metaphertheoretiker, Searle eingeschlossen, zu dem Schluss kommen, der Hörer hätte bei einer metaphorischen Äußerung eine denkintensive Rekonstruktion zu leisten und müsste aus dem potentiell unendlichen Bedeutungsspektrum eine Auswahl treffen: Die diskutierten Sprachbeispiele werden meist „in vitro“ unters Mikroskop gelegt. Unter diesen künstlich herbeigeführten Bedingungen getrennt von Kontexten mögen sie dann recht haben, jedoch trifft man außerhalb der wissenschaftlichen Literatur zur Metapher nur selten auf völlig isoliert dastehende Metaphern. Hinzu kommt, dass man sich häufig auf kreative Metaphorik jenseits eingespielter Muster konzentriert hat.<sup>27</sup> Wenn man diese dann auch noch entkontextualisiert, ist es wenig überraschend, dass ohne erheblichen Aufwand keine Interpretation mehr möglich ist. Zu bezweifeln ist, dass solch absichtlich herbeigeführte Nullkontexte dienlich sind, die Frage, wie Metaphern verstanden werden, zu erhellen.

Schon Stählin (1914: 340) weist auf die Problematik hin, die der Versuch, die Metapher auf eine bewusste Vergleichs- oder Analogietätigkeit zurückführen zu wollen, mit sich bringe, und verneint diesen Ansatz ebenfalls mit dem Hinweis auf die zusätzliche Zeit, die solche Tätigkeiten erfordern würden, wenn man sie bei jeder Metapher anwenden müsste. Dass trotzdem immer wieder derartige Erklärungsversuche angestrebt werden, erklärt er sich so:

---

<sup>27</sup> Mittlerweile scheint sich dies aber umgekehrt zu haben: „But metaphor research has focused disproportionately on conventional metaphors.“ (Gentner/Bowdle/Wolff u. a. 2001: 238)

Es ist ja auch klar, was der letzte Grund dieses Mißverhältnisses bei der Auffassung der Metapher als einer unbewußten Analogietätigkeit ist: Ein psychischer Prozeß soll geschildert werden, und die Begriffe, in die er eingeordnet werden soll, sind aus der Logik entnommen. (ebd.: 342)

Man versucht also einen Prozess in Termen der Logik zu erklären, der sich eigentlich jenseits<sup>28</sup> aller Logik bewegt. Statt einer logischen Erklärung der Metapher sei Stählin zufolge eine psychologische von Nöten.

Vergleichbar damit schreibt Davidson im Anschluss an die alten Begriffe *Bild* und *Bildlichkeit*: „Words are the wrong currency to exchange for a picture“ (Davidson 2007: 263). Damit will er nicht sagen, dass es grundsätzlich völlig falsch sei, so wie Searle zu verfahren, sondern nur, dass die Erklärung der Metapher durch ein rationales Verfahren erst nachträglich an sie herangetragen werde, dass also das Verstehen einer Metapher jeder derartigen Analyse vorausgehen müsse.<sup>29</sup> Searle beschreibt demnach kein Verfahren, wie man metaphorische Äußerungen verstehen kann, sondern, wie sie sich analysieren lassen, wenn man sie einmal verstanden hat. Ebenso kann davon ausgegangen werden, dass auch Sprecher nicht erst etwas, das sie äußern möchten, im Kopf haben, um sich dann in einem zweiten Schritt zu überlegen, wie sie diesen Gedanken, den sie auch wörtlich äußern könnten, metaphorisch entlang der Prinzipien von Searle verpacken. Genau das unterstreicht die kognitive Metaphertheorie, indem sie sagt, dass schon der Gedanke metaphorisch sei und die Sprache ihm lediglich nachfolge. Deshalb bleiben die meisten Metaphern unter der Bewusstseinschwelle

---

<sup>28</sup> Im Sinne der kognitiven Metaphertheorie sollte *jenseits* hier nicht so verstanden werden, als wären Metaphern unlogisch ohne Anspruch auf Wahrheit, sondern vielmehr so, dass sie der Logik vorausgehen und insofern mit Kategorien wie *logisch*, *unlogisch* oder *rational* überhaupt nicht erfasst werden können. Insbesondere werden Schematheorie und Invarianz-These behaupten, dass die Logik selbst metaphorisch erzeugt sei.

<sup>29</sup> Noch einmal Davidson: „It is no help in explaining how words work in metaphor to posit metaphorical or figurative meanings, or special kinds of poetic metaphorical truth. These ideas don't explain metaphor, metaphor explains them. Once we understand a metaphor we can call what we grasp the 'metaphorical truth' and (up to a point) say what the 'metaphorical meaning' is.“ (Davidson 2007: 247)

der Kommunizierenden und genau darin liegt ihre Macht, denn was mir nicht bewusst ist, dem kann ich auch nicht widersprechen. Die Bewertung der Theorie von Searle von Seiten der kognitiven Metaphertheorie ist damit völlig klar: „But given that system [of metaphoric concepts], Searle’s theory and his principles become unnecessary“ (Lakoff 1993: 239).

Dass auch die Unbewusstheits-These auf hochgradig kreative sprachliche Metaphern im Allgemeinen seltener zutreffen wird, scheint offenkundig. Gerade dann, wenn sprachliche Metaphern Konzepte auf eine neuartige Weise miteinander verknüpfen, dürfte ein bewusster Interpretationsprozess unumgänglich sein. Wie Lakoff/Turner (1989) jedoch eindrucksvoll zeigen, sind selbst im literarischen Bereich derartige Metaphern selten und es dominieren solche, die an das vorhandene konzeptuelle System anschließen und damit über vorhandene konzeptuelle Metaphern ohne kognitiven Mehraufwand verstehbar bleiben.

Allerdings könnte man den Einwand geltend machen, dass die Unbewusstheit für lexikalisierte Metaphern trivial und somit nichtssagend sei, da hier ein Wort einfach eine neue Teilbedeutung hinzugewonnen habe und man als Rezipient wie bei allen anderen polysemen Wörtern auch die für den Kontext relevante Lesart auszuwählen habe. Tote Metaphern verhalten sich dann nicht anders als die meisten Phraseologismen: Ihre Bedeutung muss gelernt werden. Diese Sichtweise, die für einige Metaphern durch psycholinguistische Experimente bestätigt wird (vgl. Gentner/Bowdle/Wolff u. a. 2001: 216f), ist für die kognitive Metaphertheorie höchst gefährlich, da sie gerade die konventionelle sprachliche Metaphorik als Beleg für die Existenz systematischer Verknüpfungen kognitiver Domänen wertet.

Die Frage der Bewusstheit wird schließlich häufig gar nicht als zu klärendes Problem wahrgenommen, weil sie als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt wird: „Was kann ‘metaphorisch’ anderes sein als das BEWUSSTE Ändern des ‘wörtlichen’ Zeichengebrauchs“ (Abraham 1975: 142), fragt



rhetorisch Abraham. In der Konsequenz folgen daraus sogar unterschiedliche Vorstellungen zur Freiheit des Sprachgebrauchs: Auf der einen Seite verfügt der Mensch frei über seine Sprache, macht Gebrauch von ihr nach Maßgabe dessen, was er zu kommunizieren beabsichtigt, auf welche Ähnlichkeiten er aufmerksam machen möchte. Im Gegensatz dazu verliert ein Sprecher in der kognitiven Metaphertheorie ein Stück dieser Souveränität gegenüber der Sprache. Der Mensch wird zum Getriebenen tradierter kulturgeprägter Denkmuster, zur Marionette an den Schnüren seiner Metaphern.

### 3.5.6 Unidirektionalitäts-These

Es ist üblich, ein Gespräch als physischen Konflikt<sup>30</sup> oder eine Theorie als Gebäude zu metaphorisieren, die Umkehrung jedoch, sich einen Konflikt als Gespräch oder ein Gebäude als Theorie zu denken, erscheint ungewöhnlich oder sogar absurd. Daraus und aus weiteren ähnlichen Befunden schließt man in der kognitiven Metaphertheorie, dass Metaphern im Allgemeinen gerichtet sind, also unidirektional von einem Bereich zu einem anderen verlaufen, und sich nicht ohne Weiteres umkehren lassen. Dies betrifft in erster Linie die konzeptuellen Metaphern, aber dann in der Folge auch die realisierten sprachlichen Metaphern. Wie sich noch zeigen wird, ist die Unidirektionalitäts-These eine Voraussetzung für die Invarianz-Hypothese, der zufolge bestimmte Strukturen aus dem Ursprungs- in den Zielbereich transportiert werden.

---

<sup>30</sup> Die häufig zitierte konzeptuelle Metapher ARGUMENTATION IST KRIEG wurde zum Aushängeschild der kognitiven Metaphertheorie, musste aber korrigiert werden, da es nicht einsichtig war, warum Menschen im Allgemeinen Kriegs- vor Argumentationserfahrungen machen sollten. Deshalb geht man heute von physischen Konflikten als ursprüngliche Erfahrung für die Übertragung aus: „The conflation of physical struggle with associated words in the development of all children is the basis for the primary metaphor Argument Is Struggle. As we grow up, we learn about more extended and violent struggles like battles and wars, and the metaphor is extended via that knowledge.“ (Lakoff/Johnson 2003: 265)

Zu den vielen Facetten der Metapher, die bereits von Aristoteles angesprochen werden, gehört die Übertragungsrichtung nicht dazu. Sie ist aber implizit in der begriffslogischen Ordnung der ersten drei Metapherentypen und in der Metapher gemäß der Analogie enthalten, bei denen Übertragungen in beide Richtungen möglich sind. Bei Tversky (1977) kommt sie erstmals explizit für Ähnlichkeiten in den Blick. Dieser kritisiert, dass vorhergehende Analysen Ähnlichkeit zumeist geometrisch als Punktraum modelliert haben, in denen der Ähnlichkeitsgrad durch eine Metrik wiedergegeben werde. Zwei Objekte sind sich in diesem Modell umso ähnlicher, je kleiner der Abstand zwischen ihren Punktrepräsentationen im Raum bezüglich dieser Metrik ist (vgl. ebd.: 327f).<sup>31</sup> Zu den definierenden Eigenschaften einer Metrik gehört nun aber gerade ihre Symmetrie: Ist ein *A* einem *B* bezüglich der Metrik zum einen gewissen Grad ähnlich, so gilt dies für *B* in Bezug auf *A*. Tversky (ebd.: 332) hält das für unzureichend und entwickelt ein Modell, in dem asymmetrische Ähnlichkeiten nicht nur erfasst werden können, sondern den Normalfall darstellen. Auf dieser Arbeit baut Ortony (1979) auf und postuliert die Asymmetrie erstmals explizit als ein Markenzeichen der Metapher.

Obwohl die Unidirektionalität ebenfalls eine wesentliche Behauptung der kognitiven Metaphertheorie ist, wird sie von ihren Vertretern eher selten ganz direkt thematisiert. Lakoff spricht statt von Unidirektionalität an einer Stelle von einer Asymmetrie<sup>32</sup> metaphorischer Abbildungen. Indirekt drückt sich die Unidirektionalität aber bereits in den Begriffen *Ziel-* und *Ursprungsbereich* sowie in der Kurzschreibweise *X IST Y* aus, da beide die zwischen den zwei Bestandteilen einer Metapher bestehende Beziehung als

---

<sup>31</sup> Das geometrische Modell wird durch die konzeptuelle Metapher *SIMILARITY IS CLOSENESS* gestützt, der zufolge Ähnlichkeit alltäglich als Nähe konzeptualisiert wird (vgl. Lakoff/Johnson 1999: 51). Im Deutschen finden sich dazu sprachliche Realisierungen wie *Unsere Ansichten liegen weit auseinander* oder *Das kommt der Sache schon recht nahe*.

<sup>32</sup> „Such mappings [metaphors] are asymmetric and partial.“ (Lakoff 1993: 245)

antisymmetrisch charakterisieren. In der mnemotechnischen Kurzschreibweise wird dem Subjekt  $X$  das Prädikat  $Y$  (bzw. *ist*  $Y$ ) zugesprochen und nicht umgekehrt. Während diese Aspekte die Vorstellung von der Gerichtetheit der Metapher unterstützen, lesen sich sowohl Funktions- als auch Projektionsmodell der konzeptuellen Metapher in dieser Hinsicht ambig: Mathematische Funktionen im Sinne einer Zuordnung weisen zwar eine Richtung auf, indem sie einen Definitions- auf einen Wertebereich abbilden, sind aber prinzipiell umkehrbar. Jäkel dagegen interpretiert die Abbildungsmetaphorik als Weiterentwicklung der historisch ersten Metapher für die Metapher: „die METAPHER ALS TRANSPORT“ (Jäkel 2003: 109). Durch die Logik des Transports eines Wortes von einem Bereich in einen anderen ergibt sich automatisch eine Richtung. Was die Erläuterungen zur Transportmetaphorik betrifft, kann man dem zustimmen, allerdings lässt sich Lakoffs Definition der Metapher als „mapping“ nicht einfach darunter subsumieren:

Each mapping is a **fixed** set of ontological **correspondences** between entities in a source domain and entities in a target domain. (Lakoff 1993: 245  
– Hervorhebungen durch den Autor)

Er beschreibt die Metapher gerade als feste Zuordnung von Entitäten des Ursprungs- mit Entitäten des Zielbereichs und warnt ausdrücklich vor einer dynamischen Interpretation der Abbildung.<sup>33</sup> Ein Transport von Elementen ist deshalb ausgeschlossen. Genau daran haben sich später Lakoff/Johnson gestoßen, als sie bemängelten, die durch die Abbildungsmetaphorik vermittelte Perspektive sei zu statisch. Dem wollten sie mit einem Projektionsmodell abhelfen, um dem Potential von Metaphern, konzeptuelle Bereiche zu strukturieren, mehr Geltung zu verschaffen. Hinsichtlich der zu verteidigenden Unidirektionalitäts-These stellt sie aber auch keine angemessene

---

<sup>33</sup> Zum Vergleich zwischen dem dynamischen und statischen Funktionsbegriff siehe ausführlicher Kapitel 6.7.

Alternative dar, da das „Übereinanderlegen“ von Konzepten wie Folien Züge einer Verschmelzung hat, durch die ein drittes Konzept aus Teilen der beiden Ausgangskonzepte zusammengesetzt wird, ohne dass sich hinterher noch ein erstes und zweites Konzept unterscheiden ließen.<sup>34</sup> Daher ist es nicht verwunderlich, wenn die Vorstellung von der Metapher als einer Projektion bei den Interaktionstheoretikern Bühler und Black anzutreffen ist.

Welche Argumente zu Gunsten der Unidirektionalitäts-These kann die kognitive Metaphertheorie anführen? Als Kronzeuge bemüht sie erneut die explanatorische Funktion der Metapher und die damit bevorzugte Projektionsrichtung vom physisch Konkreten zum Abstrakten:

[...] we typically conceptualize the nonphysical *in terms of* the physical—that is, we conceptualize the less clearly delineated in terms of the more clearly delineated. (Lakoff/Johnson 2003: 59)

Diese sich in ähnlicher Form häufig wiederholende Formel kann nicht verbergen, dass die verwendeten Begriffe diffus bleiben. Wir greifen daher Jäkels Vorschlag auf, „*konkret* als 'sinnlicher Erfahrung zugänglich' und *abstrakt* antonymisch als 'nicht konkret'“ (Jäkel 2003: 57) zu verstehen. Als Pole entlang Skala eröffnen die beiden konträren Adjektive einen Zwischenbereich, in dem sich verschiedene Grade der Abstraktheit unterscheiden lassen. Gleichzeitig entwickelt Jäkel (ebd.: 58f) ein ausgefeilteres, hierarchisch geordnetes Modell mit der Übertragung vom Bekannteren zum Unbekannteren an der Spitze, der sich konventionelle Metaphern, die entweder vom Physischen/Konkreten zum Abstrakten oder personifizierend verfahren, und Spezial-Metaphern, die umgekehrt Konkretes durch Abs-

---

<sup>34</sup> In diese Richtung führt die von Turner und Fauconnier entwickelte in dieser Arbeit nicht weiter besprochene Blending-Theorie: „Like standard analogical mapping, blending aligns two partial structures (the inputs). But in addition, blending projects selectively to form a third structure, the blend. The blend is not a simple composition of the inputs. Through pattern completion and dynamic elaboration, it develops an emergent organization of its own.“ (Fauconnier 2001: 256)

traktes erklären, unterordnen. Das Adjektiv *konventionell* ist an dieser Stelle allerdings problematisch, da es bereits zur Kennzeichnung eines hohen Konventionalisierungsgrads reserviert ist. Kreative oder innovative Metapherschöpfungen können natürlich auch im Zweig dieser als *konventionell* bezeichneten Metaphern auftreten, wenn etwa ein bestehendes Metaphernmodell erweitert wird. So antwortete Matthias Kreck in der Podiumsdiskussion zum Thema „Was ist Mathematik“ im Rahmen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2011 auf die Frage, warum sich Mathematiker auf wahre Sätze einigen können: „Weil die Mathematik so ein wunderschönes natürliches Gebäude ist, wo ein falscher Stein sofort die ganze Statik durcheinanderbringt.“<sup>35</sup> Er bezieht sich einerseits auf die konventionelle konzeptuelle Metapher THEORIEN SIND GEBÄUDE, erweitert diese andererseits um die Korrespondenz von Sätzen und Steinen. Die Mathematik ist somit ein aus Stein gebautes solides Gebäude, das dennoch so filigran ist, dass schon ein falscher Stein, die Stabilität des gesamten Hauses gefährden könnte. Wahre mathematische Sätze entsprechen den stabilen Steinen, aus denen das Gebäude gebaut ist, falsche Sätze aber können als brüchige Steine das gesamte Konstrukt zum Einsturz bringen. Diese Metapher überträgt eindeutig Physisch/Konkretes auf Abstraktes, jedoch gehört sie nach etablierter Terminologie zu den kreativen und nicht zu den konventionellen Metaphern. Um diese Unterscheidung nicht zu verlieren, sollten weiterhin die in einer Sprachgemeinschaft eingespielten Metaphern unabhängig von deren Übertragungsrichtung *konventionell* genannt werden. Für Jäkels Metapherentyp schlagen wir als alternative Bezeichnung *universelle Metapher* vor. So wird der Gegensatz dieser überall vorkommenden Metaphern zu den Spezial-Metaphern, die lokal auf einen Bereich beschränkt sind und meist nur von Spezialisten gebraucht werden, besser herausgestellt.

Die Undirektionalitäts-These hat ihre Anhänger aber nicht ausschließ-

---

<sup>35</sup> <http://www.youtube.com/watch?v=5FDaepUk5p8> – Zugriff am 27.09.2011

lich in kognitiv ausgerichteten Metaphertheorien. Keller, ein Verfechter der Trennung von sprachlicher Bedeutung und Konzept, argumentiert mit Bezug auf die Semiotik:

Meines Erachtens liegt der Grund dafür [der Gerichtetheit von Metaphern] in erster Linie in der Logik des Problems, das mit diesen sprachlichen Mitteln üblicherweise gelöst werden soll. [...] Es liegt an der Logik des ikonischen Verfahrens und des Problems, das mit seiner Hilfe gelöst werden soll [...] (Keller 1995: 189)

Metaphern bezeichnet er auch als *Metaikone*, worunter er symbolisierte Ikone versteht, d. h. Zeichen, bei deren Interpretation ein regelbasierter und ein assoziativer Schluss kombiniert werden (vgl. ebd.: 187). Beim ikonischen Verfahren wird ein wahrnehmbarer Gegenstand mit etwas nicht unmittelbar Wahrnehmbaren assoziiert. Wer am Computer Dateien in den „Papierkorb“ legt, assoziiert mit dem Icon, dass dort nicht mehr Benötigtes, hingehört. Der Papierkorb ist etwas Konkretes als die Handlung des Wegwerfens bzw. des Löschens von Dateien, das vom Computer auch anders durchgeführt wird, als der Papierkorb es nahelegt. Ganz ähnlich zeigen Icons von E-Mail-Programmen meist konkrete Gegenstände aus dem Postverkehr, etwa eine Briefmarke, einen Briefumschlag, einen Briefkasten oder ein Paket. Dagegen wird sich wohl (noch) kein Kasten finden, der mit dem At-Zeichen „@“ die Möglichkeit, Briefe einzuwerfen, signalisieren will. In dieser Hinsicht wird die Äußerung *Die E-Mail ist der Brief des 21. Jahrhunderts* sicher (noch) leichter verstanden als *Der Brief ist die E-Mail vor der Erfindung des Internets*. Gleichwohl ist die zweite Äußerung nicht uninterpretierbar, nur erfüllt sie die explanatorische Funktion einer Erklärung von etwas Unbekanntem nicht mehr und wirkt daher eher komisch. Sollte sich die Situation allerdings so verändern, dass die E-Mail den Brief vollständig ersetzt, vertauschen sich Explanans und Explanandum und damit auch die Wirkung der beiden Äußerungen. Zeigt nicht aber dieses konstru-

ierte Beispiel, dass die Richtung einer Metapher variieren kann? Damit wäre die Unidirektionalitäts-These widerlegt:

Wenn also [...] je nach Kontext, Erfahrung, kultureller Entwicklung (oder generell: Zeit) etwas als bildspendender und/oder bildempfangender Bereich wahrgenommen werden kann, dann kann die Unidirektionalitätsthese nicht aufrechterhalten werden. (Kruse/Biesel/Schmieder 2011: 87)

Dieser Einwand lässt sich jedoch entkräften: Dass Ursprungs- und Zielbereich einer Metapher im Laufe der Zeit ihre Plätze tauschen können, ist ein diachroner Aspekt, die Unidirektionalitäts-These ist aber – auch wenn dies explizit noch nicht gesagt wurde – synchron zu verstehen.<sup>36</sup> Im Zeitraum *A* ist die E-Mail erklärungsbedürftig und der Brief bekannt und in einem hypothetischen in der Zukunft liegenden Zeitraum *B* ist der Brief die unbekannte Größe, die durch die E-Mail erklärt wird. In beiden Fällen gilt aber die universelle Übertragungsrichtung vom Bekannten zum Unbekannten. Kehrt man die Richtung um, entsteht jeweils eine zwar noch interpretierbare, aber merkwürdige Äußerung. Dieses Argument kann die Unidirektionalitäts-These also nicht entkräften.

Auch wenn Keller einen anderen Metaphernbegriff als die kognitive Metapherntheorie vertritt, ergänzen sich beide in ihren Argumenten für die Annahme einer generellen Gerichtetheit aller Metaphern. An den diskutierten Beispielen wurde auch deutlich, dass mit Unumkehrbarkeit keine faktische Unmöglichkeit gemeint ist, da sich metaphorische Äußerungen besonders von der Form *X ist Y* immer umkehren lassen, indem *X* und *Y* syntaktisch vertauscht werden, sondern epistemische Unmöglichkeit, d. h.

---

<sup>36</sup> Jäkel andererseits betont gerade, dass die Unidirektionalität „sich synchronisch wie diachronisch feststellen“ (Jäkel 2003: 41) lasse. Hier muss differenziert werden. Synchron liegt auch bei Jäkel konzeptuelle Unidirektionalität vor, im diachronen Bereich aber bezieht er sich auf den semantischen Wandel, der sich häufig als Verschiebung von einer konkreteren zu einer abstrakteren Bedeutung darstellt. Damit liegen synchrone und diachrone Unidirektionalität auf verschiedenen Ebenen und sollten besser getrennt werden, wie das Brief-Beispiel deutlich zeigt. Wenn in dieser Arbeit von Unidirektionalität die Rede ist, bezieht sich das immer auf den synchronen Aspekt.

die Unmöglichkeit, sich die Umkehrung als Erklärung vorzustellen.

Mit der Unidirektionalitäts-These stellt sich die kognitive Metaphertheorie in Opposition zu Theorien, welche die Metapher als Interaktionsprozess oder Analogietätigkeit begreifen. Für diese stellt sich eine metaphorische Übertragung als bidirektionale, wechselseitige Anpassung zweier eigentlich nicht zusammengehöriger Gegenstände oder Konzepte dar. Dennoch wird die Unidirektionalität auch dort nicht vollständig abgelehnt: Coenen (2002: 106), der der kognitiven Metaphern ablehnend gegenübersteht und die Analogie als Grundlage der Metapher stark macht, bemerkt, dass bei Prädikationsmetaphern häufig eine Richtung bevorzugt wird, besteht aber darauf, dass im Prinzip beide Richtungen möglich seien. Warum aber in einigen Fällen die eine Richtung üblicher ist als die andere, erklärt er nicht. Weil sich Interaktionstheorien der Metapher explizit gegen die Uni- und für die Bidirektionalität aussprechen, sollen im Folgenden ihre Argumente betrachtet werden.

Mit dem Begriff der Interaktion verbindet man meist zuerst I. A. Richards ([1936] 1996) und Max Black ([1954] 1996; [1977] 1996), der Richards Theorie aufgreift und weiterführt. Burkhardt (1990: 313) erinnert außerdem daran, Bühler (1982) als Vordenker nicht zu vergessen. Doch auch er kann nicht für sich in Anspruch nehmen, als erster eine Interaktionstheorie der Metapher formuliert zu haben. Diese Leistung muss man wohl Stählin (1914) zuerkennen, auf den Bühler auch explizit Bezug nimmt.<sup>37</sup> Dass wir hier Black den Vorzug geben, ist dem weitreichenden Echo geschuldet, das seine Arbeiten bis heute hervorrufen. So werden seine Aufsätze weithin als exemplarische Beschreibung einer bidirektionalen Metaphertheorie gelesen.

Zu Beginn seines ersten Aufsatzes ist diese Sachlage allerdings gar nicht

---

<sup>37</sup> Bei Stählin ist zu lesen: „Es findet ein Austausch der Merkmale, eine Vereinigung der beiderseitigen Sphären, eine Verschmelzung von Bild und Sache statt“ (Stählin 1914: 324).



so eindeutig. Zwar spricht Black ([1954] 1996: 70) an einer Stelle von „Verbindung, Interaktion, zusammenwirkenden Vorstellungen, wechselseitiger Erhellung“ oder „Kooperation“, jedoch bleiben diese Begriffe dort noch weitgehend unklar und er schwenkt schon im nächsten Absatz auf eine Erklärung der Metapher als Filter um, wie sie schon Bühler diskutiert hatte. Im Gegensatz zu Bühler geht es Black aber anscheinend nicht um eine „Sphärenmischung“, bei der die beiden Gegenstände der Metapher zusammengenommen ein Bild ergeben, denn er schreibt:

Man kann sich die Metapher als einen solchen Filter vorstellen [...] Man kann sagen, der Hauptgegenstand wird „durch den metaphorischen Ausdruck gesehen“ – oder, wenn man so will, der Hauptgegenstand wird auf das Feld des untergeordneten Gegenstands „projiziert“. (ebd.: 72)

Der metaphorische Ausdruck funktioniert also so ähnlich wie eine Brille, man sieht durch ihn hindurch auf den Hauptgegenstand, der sich entsprechend der Beschaffenheit der Brillengläser immer anders darstellt. Eine wechselseitige Beeinflussung von Haupt- und untergeordnetem Gegenstand ist bei dieser Analogie nicht festzustellen, da Brillengläser unabhängig sind von dem Gegenstand, der durch sie betrachtet wird. Dem entspricht auch das Begriffspaar *Hauptgegenstand* und *untergeordneter Gegenstand*, das der Dichotomie von Ursprung- und Zielbereich verdächtig nahe kommt. Seine Überlegungen wendet Black auf die metaphorische Äußerung *Der Mensch ist ein Wolf* an. Auf den Hauptgegenstand (Mensch) werden bestimmte allgemein verbreitete Wissensbestände des untergeordneten Gegenstandes (Wolf), Black spricht vom „*System miteinander assoziierter Gemeinplätze*“ (ebd.: 70/71), projiziert. Es kommt dabei nicht darauf an, ob das geteilte kulturelle Wissen zum untergeordneten Gegenstand den Tatsachen entspricht, wichtig ist nur, dass darüber in einer Kultur weitgehend Einigkeit besteht. Meist wird dem Wolf nachgesagt, er sei ein blutrünstiges, rücksichtsloses, hinterlistiges Raubtier. Die Eigenart von Wölfen Rudel zu

bilden, die sie als soziale Tiere charakterisiert, geht dagegen nicht in das System assoziierter Gemeinplätze unserer Kultur ein. Selbst eine zoologisch ausgebildete Person, die Wölfe für ausgesprochen gesellige und friedfertige Tiere hält, kennt das vorherrschende Bild vom Wolf und wird die Metapher zwar nicht gutheißen, aber verstehen. Insbesondere ist zum Verstehen der Metapher neben semantischem vor allem enzyklopädisches Wissen notwendig.<sup>38</sup> Die Kenntnis der assoziierten Gemeinplätze genügt aber noch nicht: Ein Rezipient muss die üblichen Implikationen des Wolf-Systems dem Hauptgegenstand (Mensch) anpassen und gelangt so zu einem Implikationssystem über den Hauptgegenstand, in dem Menschen wild, bedrohlich oder böartig erscheinen. Erst an dieser Stelle kommt der Begriff der Interaktion ins Spiel und fast beiläufig kommt Black nun zu folgendem wesentlichen Punkt:

Wenn die Bezeichnung Wolf einen Menschen in ein bestimmtes Licht rückt, so darf man darüber nicht vergessen, daß die Metapher den Wolf dabei menschlicher als sonst erscheinen läßt. (Black [1954] 1996: 75)

Nach Black bestimmt der Hauptgegenstand den Charakter des Systems, das auf ihn angewendet werden soll, teilweise mit. Das Mensch-System selektiert also die Implikationen aus dem Wolf-System, die für die Projektion als relevant erachtet werden. Vorstellen lässt sich dieser Vorgang als Zickzack-Bewegung zwischen den beiden Systemen, also tatsächlich als Interaktion:

Im Kontext einer bestimmten metaphorischen Aussage „interagieren“ die beiden Gegenstände auf folgende Weise: (I) das Vorhandensein des Primärgegenstandes reizt den Zuhörer dazu, einige der Eigenschaften des Sekun-

---

<sup>38</sup> In dieser Feststellung sieht Rolf die besondere Leistung von Black: „Daß gemeinplatzartige Kenntnisse bezüglich des von einem metaphorisch gebrauchten Wort gewöhnlich bezeichneten Gegenstands eine ausschlaggebende Rolle spielen, dürfte als entscheidender Einblick in das Funktionieren der Metapher anzusehen sein“ (Rolf 2005: 45). Gleichzeitig liefert sie ein Sprungbrett in die kognitive Metaphertheorie, da man nur noch diese Systeme zu mentalen Modellen bzw. zu „folk theories“ erklären muss.

därgegenstandes auszuwählen; und (II) fordert ihn auf, einen parallelen „Implikationszusammenhang“ zu konstruieren, der auf den Primärgegenstand paßt; und umgekehrt (III) wiederum parallele Veränderungen im Sekundärgegenstand bewirkt. (Black [1977] 1996: 393)

Diese Bidirektionalität wird von Jäkel vehement bestritten:

Aber daß die Metapher "*Man is a wolf*", die den Menschen zweifelsohne raubtierähnlich macht, gleichzeitig den Wolf vermenschliche, so daß es eigentlich keinen Ursprungs- und Zielbereich, sondern nur zwei irgendwie "interagierende" Bereiche gäbe, läßt sich kaum halten. (Jäkel 2003: 98/99)

Warum sich diese Behauptung nicht halten lasse, bleibt hier unausgesprochen. Die sprachliche Struktur der Äußerung liefert eine Begründung: Das Thema von *Der Mensch ist ein Wolf* ist der Mensch, dem prädiert wird, dass er zur Kategorie der Wölfe gehört. Die Umkehrung *Der Wolf ist ein Mensch* erscheint dagegen nicht sofort verständlich und schon gar nicht äquivalent zu *Der Mensch ist ein Wolf*. Wirkliche Interaktion kann demnach also nur dann vorkommen, wenn auch in der sprachlichen Struktur Fokus und Rahmen gleichrangig kombiniert sind. Burkhardt verweist hier auf Kompositionsmetaphern bei denen tatsächlich eine „eigentliche Interaktion im Sinne einer *Wechselwirkung*“ (Burkhardt 1987: 58) stattfindet. Als Beispiel nennt er das von Aristoteles bekannte N+N-Kompositum *Lebensabend*, bei dem die Sphäre des Lebens mit der Sphäre des Tags interagiert. Das verträgt sich mit der aristotelischen Analogie  $\frac{\text{Leben}}{\text{Alter}} :: \frac{\text{Tag}}{\text{Abend}}$ , nach der das Alter als Abend des Lebens aber auch der Abend als Alter des Tages bezeichnet werden kann. Aber auch damit zeigt sich Jäkel nicht einverstanden:

Daß sich *diese* konventionelle Metapher [gemeint ist der „Lebensabend“] im allgemeinen Sprachgebrauch findet und eben nicht die des "*Tagesalters*", läßt sich mit Hilfe unserer Unidirektionalitätsthese konkret vorhersagen. Schließlich haben wir sehr viel mehr konkrete Erfahrung mit Tagen und Abenden als mit dem Leben als Ganzem und dessen einmaligem Endabschnitt, so daß

sich nur die eine Übertragungsrichtung für eine explanatorisch funktionierende Metapher anbietet. (Jäkel 2003: 90)

Sicherlich ist das Kompositum *Tagesalter* selten.<sup>39</sup> Allerdings ist dies noch keine hinreichende Begründung, um auf die Unidirektionalität der konzeptuellen Metapher zu schließen, denn niemand hindert einen, auch Phrasen wie *der junge Tag* zu betrachten, schließlich soll die konzeptuelle Metapher eine Menge sprachlicher Metaphern steuern.<sup>40</sup> Dann sieht man, dass es sehr wohl möglich ist, den Tagesablauf mit Hilfe von Ausdrücken aus dem Bereich Leben zu beschreiben. Die Etymologie des Adjektivs *jung* zeigt ferner, dass es zunächst in Opposition zu *alt* stand und sich damit ausschließlich auf die Lebensspanne bezog, dann aber auf ganz verschiedene Zeitabläufe bezogen werden konnte (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 374).

Zur Beurteilung der Frage nach der Unidirektionalität scheinen insgesamt zwei Aspekte wesentlich zu sein: Wo wird die Metapher theoretisch verortet und welche sprachlichen Äußerungen werden betrachtet? Interessieren vor allem die konventionellen Formen der Sprache, so ist mit Ausnahme bestimmter Kompositumsmetaphern allen konventionellen sprachlichen Metaphern eine Richtung durch die grammatische Struktur der Äußerung vorgegeben. „Echte“ Bidirektionalität kann hier also ausschließlich der konzeptuellen Metapher, dem Metaphernmodell, der zugrunde liegenden Analogie oder ähnlichem zukommen. Ein mögliches Beispiel für ein „reziprokes“ Metaphernmodell ist vielleicht die konzeptuelle Metapher DER MENSCH IST EIN COMPUTER (vgl. Drewer 2003: 73f). Hier wird nicht nur der Mensch als Computer und damit sein Gehirn als Software, die auf der Hardware des Körpers operiert, als algorithmisch verfahrenes Rechenprogramm konzeptualisiert, sondern umgekehrt wird die Maschine ein Stück menschlicher. So

---

<sup>39</sup> Eine Google-Suche zeigt, dass sich das Kompositum tatsächlich fast ausschließlich in Literatur zur Metapher findet. Insofern kann man davon ausgehen, dass es in der Alltagssprache keine nennenswerte Rolle spielt

<sup>40</sup> Dazu: „[...] one can call the evening the *old age of day* or, vice versa, call the old age *the evening* or *sunset of life*.“ (Burkhardt 1990: 311)

können Computer bestimmte Medien „lesen“ und „beschreiben“, sie können sich mit einem „Virus infizieren“, Notebooks beweisen viel „Ausdauer“, wenn ihr Akku lange „durchhält“. Diese sprachlichen Metaphern und viele weitere mehr sind Zeugnis der Anthropomorphisierung des Computers und seiner Tätigkeiten.

Black dagegen möchte mittels seiner Interaktionstheorie vor allem die Frage beantworten, „wie starke metaphorische Aussagen *funktionieren*“ (Black [1977] 1996: 391). Als *stark* bezeichnet er Metaphern, wenn sie sowohl emphatisch als auch resonant sind, d. h. unentbehrlich und reich an Hintergrundimplikationen. Seine Beispiele zeigen, dass er sich im Übergangsbereich zwischen konventionellen und innovativen Metaphern bewegt, wo die Metaphern zwar noch auf bekannte Muster zurückgreifen, jedoch bewusst eingesetzt werden und immer als solche zu erkennen sind.<sup>41</sup> Das mag erklären, warum die Wolfs-Metapher bezogen auf ihre Richtung so unterschiedlich eingeordnet wird, denn im Bereich innovativer, poetischer Metaphern wird schon auf der sprachlichen Ebene die Eindeutigkeit der Richtung fragwürdig. Insbesondere sind dort echte Interaktionsprozesse zu vermuten, wo syntaktische Strukturen bewusst aufgelöst werden. Diese Richtung schlägt Kohl ein, wenn sie hervorhebt, „dass besonders in der Lyrik auch mit komplexen ›Interaktionen‹ zu rechnen ist“ (Kohl 2007b: 134). Wenn syntaktische Funktionen nicht mehr klar zugeordnet werden können, wird auch fraglich, wem was prädiziert wird, sodass dort auch auf der sprachlichen Ebene eine Wechselwirkung möglich wird.

Dass es sich bei der Entscheidung über die Metaphernrichtung nicht zwangsläufig um ein Entweder-oder handeln muss, sondern ein Sowohl-als-auch ebenso möglich ist, beweist Gentners „structure-mapping“-Theorie.

---

<sup>41</sup> Den Hang zu diesem Metapherotyp zeigt die metaphorische Äußerung *Der Mensch ist ein Wolf*. Sie ist eine Vereinfachung der Metapher *Homo homini lupus*, die durch Thomas Hobbes bekannt wurde und auf den römischen Komödiendichter Titus Maccius Plautus zurückgeht.

Sie stellt ein Drei-Phasen-Modell der Metaphernverarbeitung vor: Das Verstehen beginnt als symmetrischer Abgleichungsprozess zwischen den beiden beteiligten Domänen, auf den unidirektionale Phasen folgen, in denen weitere Inferenzen vom Ursprungsbereich in den Zielbereich übertragen werden (vgl. Gentner/Bowdle 2008: 112). Wenn aber im Verstehensprozess immer beide Aspekte involviert sind, so ist Direktionalität letztendlich ebenso wie Konventionalität ein graduelles Phänomen einzelner Metaphern und kein prinzipielles Merkmal, das allen Metaphern gemein wäre.

Abschließend soll noch ein letztes Argument gegen die Unidirektionalität diskutiert werden, das sich aus didaktischer Perspektive ergibt, wenn man Metaphern als Mittel der Erkenntnisgewinnung und Wissensvermittlung betrachtet. Mit der explanatorischen Funktion der Metapher scheint die Metapher zunächst ein geeignetes Instrument zu sein, Lernprozesse zu stimulieren, da sie es erlaubt, Unbekanntes über Bekanntes zu erschließen. Allerdings erscheint dieser Vorgang doch paradox, will man die Entstehung neuer Strukturen aus alten erklären. Wie, fragt Sfard (1997: 354), solle man erkennen, dass etwas etwas anderem ähnlich ist, wenn man dieses „etwas“ nicht bereits hinreichend gut kenne? Auch wenn sie hier die Begriffe *Ähnlichkeit* und *Analogie* ins Spiel bringt, die Lakoff weit von sich weist, zeigt sie doch einen berechtigten Punkt auf. Die Lösung der kognitiven Metaphertheorie bestand im Embodiment, also dem Verweis auf das systematische gemeinsame Auftreten von Erfahrungen als Ursache für konzeptuelle Verknüpfungen. Doch auch hier muss der Zielbereich bis zu einem gewissen Grad vor der Metapher der Erfahrung zugänglich gewesen sein, sonst müsste man annehmen, er werde vollständig aus der Metapher heraus geschaffen. Für die konzeptuelle Metapher ARGUMENTATION IST PHYSISCHE AUSEINANDERSETZUNG ist also wenigstens ein schematisches Wissen über Argumentationen notwendig, sonst kann eine elementweise Zuordnung für die metaphorische Abbildung nicht gelingen. Darauf weist

auch Murphy (1996: 181) hin, wenn er bemerkt, dass es schon einen Homunculus bräuchte, der genug über zwei Domänen weiß, um die richtigen Korrespondenzen herzustellen. Eine Möglichkeit, dem Dilemma zu entfliehen, sieht Sfard in der Interaktionstheorie und damit in der Aufgabe der Unidirektionalität:

One promising way out of the entanglement is to view metaphorical projection as a dialectic process—a process of ceaseless two-way interaction between the old and the new. Accordingly, creation of new concepts should be viewed as a zig-zag movement between relatively familiar source and the emergent target. More often than not, this is a process of mutual adaptation which, with its every swing, does not only strengthen the target but also alters and adds new dimensions to the source. (Sfard 1997: 355)

Ein mathematisches Beispiel für eine derartige Wechselwirkung mit historischen Dimensionen ist das vertraute Modell des Zahlenstrahls bzw. der Zahlengeraden, bei denen das Zeichnen von Linien und Messen von Abständen auf den abstrakten Bereich der Zahlen projiziert wird. Mit Hilfe dieser konzeptuellen Metapher kann etwa die übliche Ordnung auf den rationalen Zahlen als räumliches vor- und nacheinander verdeutlicht werden und sie gestattet es, auf räumliche Verhältnisse bezogene Lexeme zu übertragen. So kann man davon sprechen, dass „zwischen“ zwei verschiedenen rationalen Zahlen immer eine weitere rationale Zahl „liegt“, die Menge der rationalen Zahlen also „dicht“ ist. Läge hier strikte Unidirektionalität vor, wäre keine Aussage möglich, ob umgekehrt auch jedem Punkt auf einer Geraden eine Zahl entspricht. Genau diese zweite Richtung hat nun aber zur Entdeckung der irrationalen Zahlen bei den Griechen geführt, indem man feststellte, dass der Diagonalen eines Quadrats mit Seitenlänge eins keine rationale Zahl entsprechen kann. Seither gelten die reellen Zahlen fast unbestritten als das „richtige“ mathematische Modell der Linie, was ihnen im 19. Jahrhundert die Bezeichnung *Kontinuum* eingebracht hat. Anscheinend liegt hier also Bidirektionalität vor, die ein beständiges Springen zwischen

Geometrie und Arithmetik erlaubt.<sup>42</sup>

#### 3.5.7 Kreativitäts-These

In der Metaphertheorie sind zwei Gebrauchsweisen des Adjektivs *kreativ* auseinanderzuhalten. Einmal wird damit auf der Skala des Konventionalisierungsgrads das Antonym zu *tot*, *konventionell*, *lexikalisiert*, *verblasst* bezeichnet und andererseits bezieht man es auf die Fähigkeit mancher Metaphern, Tatsachen, Sachverhalte, Ähnlichkeiten usw. zu erzeugen. Beide Aspekte werden häufig vermischt.

Die zweite Variante ist gemeint, wenn über die Frage gestritten wird, ob Metaphern etwas Neues schaffen oder lediglich auf schon Existierendes hinweisen. Puster gibt für diese Art von Kreativität folgende Definition:

##### KREATIVISTISCHE THESE (= KT)

Im Gegensatz zu wörtlichen Behauptungen gilt für einige Metaphern (metaphorische Behauptungen) der Form ›S ist ein P‹:

Sie kreieren die in ihnen ausgedrückten Tatsachen (= sie setzen die in ihnen ausgedrückten Sachverhalte in die Welt) und machen sich so selbst wahr.  
(Puster 1998: 27)

Unter Voraussetzung der kreativistischen These können metaphorische Äußerungen der genannten Form einen Sachverhalt, d. h. eine metaphorische Proposition, zum Ausdruck bringen, die dann die von ihr beschriebenen Tatsachen, also die Weise, in der Zustände in der Welt wahrgenommen werden, verändert. Die semantische Umwälzung in *S ist ein P* schlägt demnach

---

<sup>42</sup> Bemerkenswert ist, wie Lakoff/Núñez mit diesem Problem umgehen: Sie bedienen sich bei der Blending-Theorie und ergänzen die „measuring stick metaphor“ mit einem „Number/Physical Segment blend“, der es ihnen erlaubt, die Unidirektionalität der konzeptuellen Metapher beizubehalten, gleichzeitig aber Wechselwirkungen zu untersuchen (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 68ff).



auf die Ebene der Meinungen durch.<sup>43</sup> Diese Variante der Kreativitäts-These, wenn sie auf sprachliche Metaphern bezogen wird, steht mit dem Prinzip, wonach sich Denken immer relativ zu einer Sprache vollzieht, in Zusammenhang. Dieser bei Wilhelm von Humboldt entwickelte und besonders durch die Sapir-Whorf-Hypothese populär gemachte sprachliche Relativismus hat viel Kritik einstecken müssen und sich in einigen Bereichen als schlichtweg unhaltbar erwiesen (vgl. Wildgen 2008: 11ff). In der Metapherntheorie jedoch erfreut er sich ungebrochener Vitalität. Einen prominenten Fürsprecher hat er in Black gefunden, der es für erwiesen hält, dass jede Metapher, egal ob sie neuartig ist oder nur altbekannte Muster bekräftigt, „eine kleine Veränderung in einer ‚Welt‘ mit sich“ (Black [1977] 1996: 404) bringt, einfach indem die metaphorische Aussage selbst Teil der Welt ist. In diesem dann trivialen Sinne ist jede Metapher kreativ. Interessanter ist für Black, was er die „starke Kreativitätsthese“ nennt:

Tatsächlich habe ich vor, die unwahrscheinliche Behauptung zu verteidigen, nach der eine metaphorische Aussage manchmal neues Wissen und neue Erkenntnis hervorbringen kann, indem sie Beziehungen zwischen den bezeichneten Dingen [...] *verändert*. (ebd.: 405)

Das entspricht genau der von Puster genannten Kreativitäts-These: Dieser Typ Metapher bildet keine bestehende Ähnlichkeit sprachlich ab, sondern erzeugt sie aus sich heraus. Indem er sprachliche Bedeutungen verändert, schafft er auch Fakten. Indem Black betont, „daß die ‚Welt‘ notwendig eine Welt *in einer bestimmten Beschreibung ist*“ (Black [1954] 1996: 409), erweist er sich durch die Betonung der welterschließenden Funktion der Metapher nochmals als Vorläufer der kognitiven Metapherntheorie.

---

<sup>43</sup> Vorsicht ist bei der Sprechweise von Puster geboten, einige Metaphern machten sich selbst „wahr“. Denn selbst, wenn man die metaphorische Behauptung *Die Großstadt ist ein Dschungel* für zutreffend hält, würde man aufgrund der wörtlichen Diskrepanz vielleicht doch zögern, ihr den Wahrheitswert *wahr* zuzuordnen. Black ([1954] 1996: 405) spricht daher vorsichtiger davon, dass manche Metaphern sich in einigen Fällen selbst legitimieren.

Vielleicht denkt man bei Tatsachen erzeugenden Metaphern zuerst an solche, die man als kühn, innovativ und neuartig – also als kreativ im ersten Sinne – empfindet. Dazu gehören insbesondere alle diejenigen Metaphern, die den Rezipienten im vollen Bewusstsein, eine Metapher vorliegen zu haben, herausfordern, eine Interpretation zu finden – darunter viele poetische Metaphern, aber auch Blacks Metapher *Der Mensch ist ein Wolf*. Aber nun gibt es eben auch zuhauf konventionelle, abgegriffene Metaphern, von denen sich auch sagen lässt, dass sie die von ihnen beschriebenen Tatsachen konstituieren. Eventuell sind sie sogar die besseren Kandidaten für eine Tatsachen schaffende Metaphorik, gerade weil sie sich unter der Bewusstseinschwelle bewegen und völlig automatisch gebraucht werden. Die Diskussion um die Wolfsmetapher zeigt doch deutlich, dass man sich völlig im Klaren darüber ist, dass Menschen nicht zur Kategorie der Wölfe gehören. Dagegen fällt es schwerer, das Gleiche für Argumentationen und physische Auseinandersetzungen zu sagen, weil es eben üblich ist, über Argumentationen mit Lexemen aus dem Bereich der physischen Auseinandersetzungen zu sprechen, was man, ohne dass man explizit darauf hingewiesen wird, kaum bemerkt. Kreativität in diesem Sinne wird daher bei Lakoff und Johnson zu einer Grundeigenschaft der meisten konzeptuellen Metaphern. Das sprachliche Relativitätsprinzip muss allerdings zurückweichen. An seine Stelle tritt das von Metaphern durchsetzte konzeptuelle System als der Ort, von aus wir beurteilen, was wahr oder falsch, was wirklich ist, was wir tun sollen oder auch was wir als einander ähnlich ansehen:

Since we see similarities in terms of the categories of our conceptual system and in terms of the natural kinds of experiences we have (both of which may be metaphorical), it follows that many of the similarities that we perceive are a result of conventional metaphors that are part of our conceptual system. (Lakoff/Johnson 2003: 147)

Nimmt man Notwendigkeits- und Kreativitäts-These zusammen, folgt, dass

die objektive Welt nichts weiter ist, als ein größtenteils durch Metaphern vermitteltes Bild. So basiert die Konzeptualisierung von Liebe als Reise auf keiner objektiv vorhandenen Ähnlichkeit beider Bereiche, vielmehr ist die Ähnlichkeit Konsequenz der konzeptuellen Metapher. Für Reisen gilt, dass man sich von einem Ausgangs- zu einem Zielort bewegt. Über eine Beziehung kann man das nur sagen, weil wir uns Beziehungen konventionell als Reisen vorstellen. Hierin liegt also die Macht der Metapher: „the power to create with naturalness and ease“ (Lakoff/Turner 1989: 80). Wenn die kognitive Metaphertheorie damit Recht behält, dann hätte dies weitreichende Konsequenzen für das Konzept der Wahrheit: Metaphorische Behauptungen machten sich dann nicht nur, wie Puster schreibt, selbst wahr, womit die Anwendung des Wahrheitsbegriffs auf Metaphern unsinnig wäre<sup>44</sup>, der Wahrheitsbegriff selbst würde zum metaphorischen Konstrukt: „truth is always relative to a conceptual system that is defined in large part by metaphor“ (Lakoff/Johnson 2003: 159). Das träfe auch wörtliche Äußerungen: Das Wahrheitswerturteil ist immer nur relativ zu einer möglichen Welt zu verstehen, d. h. relativ zu einer Situation mit einem bestimmten Weltbild und einer Menge von Hintergrundannahmen, die aber nicht objektiv vom Menschen unabhängig existieren. Diese Annahmen wären nun Ergebnis eines zum großen Teil metaphorischen Konstruktionsprozesses (vgl. Burkhardt 1987: 50; Burkhardt 1990: 324f).

Das, was wir *Realität* nennen, mag also nur eine von Metaphern erzeugte Schimäre sein, dennoch stehen wir den eingespielten Metaphernmodellen nicht völlig wehrlos gegenüber: Kreative Metaphern – im ersten Sinne – können das bestehende Begriffssystem überwinden, eine neue Perspektive eröffnen, ungeahnte Ähnlichkeiten schaffen und so eine veränderte Welt

---

<sup>44</sup> Theorien, die Bedeutung und Sinn auf den Wahrheitsbegriff zurückführen, positionieren sich natürlich anders: „One claim that present-day Contextualists and Literalists [...] do not dispute is that metaphors express truths. Everyone also agrees that these truths are no different in *kind* than those expressed by literal language [...]“ (Stern 2006: 245/246)

konstituieren. Insofern ist die Metapher auch ein Motor eines allgegenwärtigen Sprach- und Mentalitätswandels:

Ständig artikulieren wir Neues mit Hilfe alter Bedeutungen. Insofern verfahren wir sprechend und verstehend immer metaphorisch. (Kurz 1993: 16)

Zwar gibt es kein Entkommen aus der Welt der Metaphern, doch ist diese Welt weitläufig genug, um gut darin leben zu können. Hier ist allerdings deutlich zwischen konzeptueller und sprachlicher Ebene zu unterscheiden: Nicht jede kreative sprachliche Metapher begründet auch eine neuartige konzeptuelle Metapher, umgekehrt ist es aber immer so, dass eine neue konzeptuelle Metapher ausschließlich durch kreative sprachliche Metaphern ausgedrückt werden kann (vgl. Lakoff/Turner 1989: 50). Zuweilen wird deshalb auf der sprachlichen Ebene zwischen „kreativen“ Metaphern, die eine etablierte konzeptuelle Kombination mit unkonventionellen sprachlichen Mitteln ausdrücken, und „innovativen“ Metaphern, die ein neues kognitives Metaphernmodell begründen, unterschieden. Auf beiden Ebenen kann eine potentiell unbegrenzte Menge an neuartigen Metaphern geschaffen werden, wobei kreative sprachliche Metaphern weitaus einfacher erzeug- und verstehbar sind, da sie sich auf ein konventionelles Muster berufen können. Lakoff/Turner betonen aber ausdrücklich, dass auch auf der konzeptuellen Ebene zumindest theoretisch alles möglich ist:

Given any well-structured concept, an inventive person can probably find a way to understand another concept using it. (ebd.: 50)

Was genau man sich unter einem „wohlstrukturierten“ Konzept vorzustellen hat, wird nicht gesagt, aber wenn man eines gefunden hat, sollte man es benutzen können, um es auf jedes beliebige andere Konzept zu projizieren. Lakoff/Turner (ebd.: 50) versuchen das am Beispiel von *Der Tod ist eine Banane* zu demonstrieren. Leider erklären sie nicht, wie man von dieser innovativen sprachlichen Metapher denn zu einer konzeptuellen Metapher

gelangt, die das Wissen über Bananen zur Erklärung des Konzepts TOD einsetzt. Insofern bleibt das Sprachbeispiel leer.

Als besonders markante Exemplare einer kreativen Metaphorik kommen einem wieder poetische Metaphern in den Sinn. Mindestens ebenso einflussreich sind aber auch kreative Metaphern in der Alltagssprache wie in Fachsprachen. Kuhns „metaphysische Paradigmata“ (Kuhn 1976: 195) sind letztendlich nichts anderes als Modelle, die einer Gruppe von Wissenschaftlern eine gemeinsame Diskussions- und Forschungsbasis liefern, auf der ihre Arbeit gründet und mit der sie sich von anderen Gruppen abgrenzt. Für den Forschungsprozess gewinnt die kreative Metapher so außerordentliche Relevanz: Als „Hypothesengenerator“ (Drewer 2003: 60; Debatin 1997: 149) befeuert sie den wissenschaftlichen Zyklus aus Hypothese und Experiment, mit dem sich alte Denkmuster in Frage stellen und neue Perspektiven ausprobieren lassen. Die Sprache setzt formal keine Grenzen irgendeinem  $X$  das  $Y$ -Sein zu präzisieren, ob sich daraus dann ein interessantes Modell für  $X$  ergibt und es eventuell in den Kanon der konventionellen Metaphern aufgenommen wird, kann nur die Praxis, also das Hantieren mit dieser Metapher, zeigen. Reddy (1993) wendet dieses Verfahren an, um die etablierte Röhrenmetaphorik bei der Beschreibung von Kommunikationsprozessen zu hinterfragen. Er setzt ihr ein alternatives Modell vom „Werkzeugmacher“ entgegen, bei dem das Gelingen von Kommunikation keine Selbstverständlichkeit mehr ist, sondern intensiver Anstrengung der Kommunizierenden bedarf. Ihm gelingt es so durch Vergleich beider Modelle, Defizite der Röhrenmetaphorik herauszustellen und von dieser Metapher verdeckte Aspekte zu thematisieren.

Da die kognitive Metapherntheorie ihren Gegenstand in konzeptuellen Metaphern sieht, interessiert sie sich folglich vor allem für solche kreativen sprachlichen Metaphern, die sich auf bestehende Metaphernmodelle beziehen. So reizvoll Paradigmen umwerfende Metaphern auch erscheinen

mögen, auf das gesamte konzeptuelle System gerechnet stellen sie nur eine Minderheit dar. Auch der exzentrischste Dichter müsse sich überwiegend an diese etablierten Modelle zu halten, sonst riskiere er, nicht mehr verstanden zu werden:

Poets must make the most of the linguistic and conceptual resources they are given. Basic metaphors are part of those conceptual resources, part of the way members of our culture make sense of the world. Poets may compose or elaborate or express them in new ways, but they still use the same basic conceptual resources available to us all. If they did not, we would not understand them. (Lakoff/Turner 1989: 26)

Wie die Fokussierungs-These noch genauer zeigen wird, sind konzeptuelle Metaphern grundsätzlich partielle Modelle und liefern deshalb nur für einen Ausschnitt des Zielbereiches eine Erklärung. Gleichzeitig sind sie als Muster schemahaft, sodass sie auf unterschiedlichste Weise ausgefüllt werden können. In einer konkreten Situation hat dann der Sprecher die Wahl, das Metaphernmodell entweder durch einen usuellen sprachlichen Ausdruck zu realisieren oder okkasionell eine neue sprachliche Metapher zu kreieren. So liefert die sehr allgemeine Metapher ZEIT IST EIN VERÄNDERER nur ein grobes Verständnis der Zeit als einer Person, die Veränderungen herbeiführt. Ob man sie dann konkret als Dieb, Verschlinger, Zerstörer oder Gutachter konzeptualisiert, bleibt dem Sprecher überlassen (vgl. ebd.: 34ff). Warum es eine Person, die etwas verändert sein muss, erklären Lakoff/Turner wieder mit einem Hinweis auf das den verkörperten Geist, dass sich aus unserer Erfahrung viele Dinge mit dem Verstreichen der Zeit verändern. Da nun aber Veränderungen häufig als Resultate einer Handlung gedeutet werden, wird der Zeit die Rolle eines Verursachers zugeschrieben. Deshalb ist es schwierig bis unmöglich, sich Zeit als Bibliothekar zu denken, der Wertvolles verwaltet und bewahrt, solange dies nicht durch eine andere konzeptuelle Metapher sanktioniert wird. Den Dichter zeichnet es aus, dass er von den konventionellen Mitteln unkonventionel-

len Gebrauch macht. Dazu stehen ihm vier Verfahren zur Verfügung (vgl. ebd.: 67ff):

- Die Erweiterung um Zuordnungen, die zuvor unbesetzt waren.
- Das Elaborieren, indem Leerstellen eines kognitiven Musters auf ungewöhnliche Weise gefüllt werden.
- Das Bewusstmachen und Hinterfragen üblicher Sichtweisen.
- Das Komponieren verschiedener konzeptueller Metaphern.

Dieser Regelkatalog zur Herstellung kreativer sprachlicher Metaphern veranlasst Pielenz zu folgender radikaler Einschätzung:

Prinzipiell ist daher jede ad hoc-Metapher, wie originell auch immer sie sein mag, vorhersagbar. Denn identifiziert man alle lexikalisierten Metaphern, die von einer konzeptuellen Metapher erzeugt werden, dann repräsentiert die Restmenge der Lexemmenge des Herkunftsbereiches die noch potentiell zu erzeugenden ad hoc-Metaphern. (Pielenz 1993: 84/85)

Die Kreativitäts-These erlaubt es aus diesem Determinismus der konzeptuellen Metaphern auszubrechen, dennoch ist sie nicht als „anything goes“ misszuverstehen.

### **3.5.8 Invarianz-These**

Wie an der Modell-These deutlich wurde, sind konzeptuelle Metaphern an der Konstruktion mentaler Modelle, die systematisch einen abstrakten Bereich über einen konkreten verstehbar machen, zumindest beteiligt. Neben Lexemen auf der linguistischen Ebene werden auch emotionale Einstellungen und Bewertungsmuster und insbesondere Inferenzmuster aus dem Ursprungs- in den Zielbereich übertragen. Gleichzeitig ist die Menge aller

Verbindungen zweier Domänen aber gewissen Beschränkungen unterworfen, die dem kreativen Potential Grenzen vorgeben. Diese beiden Beobachtungen kondensieren in der Invarianz-These.

Ihren Ursprung hat sie bei Lakoff/Turner (1989), die unter anderem der Frage nachgehen, wie in der Literatur über Tod gesprochen wird. Bei ihrer Analyse der Herkunftsbereiche verschiedener Metaphorisierungen von Tod stoßen sie auf Gemeinsamkeiten. Alle von ihnen analysierten Sprachbeispiele, so kreativ und außergewöhnlich die eingesetzte Metaphorik im Einzelfall auch anmuten mag, führen sie auf einige wenige konzeptuelle Metaphern zurück und meinen, dass diese ihrerseits einem noch allgemeineren kognitiven Grundmuster folgen, das wie eine Art kognitiver Filter funktioniere und gewisse Herkunftsbereiche ausschließe oder zumindest schwerer interpretierbar mache. Zwei aus diesen Befunden extrahierte Prinzipien sollen die möglichen Konzeptkombinationen einschränken:

- Preserve the generic level of the target except for what the metaphor exists explicitly to change.
- Import as much of the generic-level structure of the source as is consistent with the first condition.

(ebd.: 82)

Dem liegt eine Differenzierung kognitiver Schemata nach ihrer „Detailfülle“<sup>45</sup> zugrunde. Strukturarme Schemata mit vielen Leerstellen und rudimentärer Struktur heißen *generisch*, strukturreiche dagegen *spezifisch*. Ein spezifisches Schema wie TOD erbt dabei die Struktur generischer Schemata, in diesem Falle etwa von EREIGNIS. Bei einer metaphorischen Projektion muss nun – nach den beiden Prinzipien – die generische Struktur des

---

<sup>45</sup> An diesen vagen Formulierungen erahnt man schon den Grund, warum die Invarianz-These in fast jeder neuen Arbeit zur kognitiven Metaphertheorie wieder umgeschrieben oder sogar ganz ausgelassen wurde. Zur „Fülle“ eines Konzepts vergleiche man diese wenig erhellende Erklärung: „ACTIONS and EVENTS are generic-level schemas, having very little detail filled in, but with a skeletal structure, unlike JOURNEYS and REAPING which have more specific detail.“ (Lakoff/Turner 1989: 81)



Zielbereiches unversehrt bleiben, solange die Metapher diese nicht explizit überschreibt, und es kann nur so viel generische Struktur des Ursprungsbereichs übertragen werden, solange diese mit der generischen Zielbereichsstruktur vereinbar ist. Metaphorische Übertragungen, welche massiv in die generische Struktur der Zieldomäne eingreifen würden, werden damit ausgeschlossen oder wenigstens unwahrscheinlich. Daraus ergibt sich folgende entscheidende Konsequenz:

[...] if one takes the portion of the source domain that is mapped and the portion of the target domain it maps onto, they will have the same generic-level structure. (ebd.: 83)

Dies kann als verdeckter Ansatz zu einer Vergleichstheorie der Metapher gelesen werden, denn danach respektiert jede Metapher die beiden Bereichen gemeinsame generische Struktur. Das meint auch Coenen:

Ein *generic-level schema* ist bei allen Arten der Lakoff-Metaphern im Spiel – als das gemeinsame Allgemeine von Ausgangs- und Zielbereich, das der Begriff des *mapping* voraussetzt. (Coenen 2002: 230)

So ganz scheint die Rechnung „generisch versus spezifisch“ aber trotzdem nicht aufzugehen, wie am Beispiel des Konzepts TOD ersichtlich wird: Dieses Schema erbt zwar die Struktur von EREIGNIS, spezifiziert sie aber auf einen Vorgang, der zu einem endgültigen Zustand führt, nämlich einem, in dem ein Lebewesen aufhört zu leben. Als Metaphorisierungen des Todes kommen daher Vorgänge wie Ernten, Verschlingen oder Zerstören in Frage, die alle diese Struktur respektieren, dagegen sind Rennen, Zubereiten von Essen oder Einlassen von Badewasser keine guten Kandidaten für Ursprungsgebiete. Deshalb wird der Tod zwar häufig als Sensenmann, aber selten als Bademeister personifiziert. Zwar haben anscheinend alle Beispiele gemeinsam, dass sie eben Vorgänge sind, also das gleiche generische Schema teilen, darauf scheint es aber gar nicht so sehr anzukommen. Wichtiger ist vielmehr, dass die Vorgänge das am Tod Spezifische, nämlich

das etwas endgültig endet, einfangen. Das schreibt im Grunde auch Lakoff zur für Personifizierungen zentralen Metapher *EVENTS ARE ACTIONS*:

We therefore hypothesized that *EVENTS ARE ACTIONS* is constrained in the following way: the action must have the same overall event-shape as the event. (Lakoff 1990: 69)

Das heißt doch, dass die Metaphorisierung eines Ereignisses als Handlung auf der Ebene generischer Schemata unterdeterminiert ist und erst die charakteristischen Eigenschaften eines spezifischen Ereignisses (das „overall event-shape“) die Menge der als Ursprungsbereiche in Frage kommenden Handlungskonzepte festlegen. Um den Tod als Handlung zu beschreiben, muss eine Handlung gewählt werden, die zum Tod und zu keinem anderen Ereignis ähnlich ist. Dahinter steckt dann aber nichts anderes als der Versuch, das Auffinden des zweier Dinge Gemeinsamen in die Logik von generischen und spezifischen Schemata zu transformieren, eventuell um jeden Verdacht, es würde eine Vergleichs- oder Analogietätigkeit ablaufen, zu zerstreuen.<sup>46</sup>

Das Prinzip der generischen Schemata ist vom Ansatz her viel zu statisch und hat keinen Bezug zum tatsächlichen metaphorischen Sprechen. Wenn man generische Schemata als das von einer Person in einer Situation konstruierte Gemeinsame zwischen zwei Gegenständen oder Sachverhalten konzipieren würde, gäbe es weniger zu kritisieren, aber das liefe ja auf eine Analogie hinaus. Stattdessen geht man von einem fertigen konzeptuellen System aus, in dem unabhängig vom Sprachbenutzer generische Schemata metaphorische Projektionen steuern sollen. Man muss aber gar keine poetischen Sprachbeispiele bemühen, um zu sehen, dass es so nicht funktioniert. Es wäre äußerst merkwürdig, die Äußerung *Eine Zange ist ein Hammer* mit der Begründung, dass sowohl Zangen als auch Hämmer

---

<sup>46</sup> Für diese Annahme findet man manchmal sogar explizit Bestätigung, so etwa hier: „The overall ‘shape’ of the event of death is similar in this respect to the overall ‘shapes’ of the events of destruction and devouring“ (Lakoff 1990: 69).

Werkzeuge sind, also ein generisches Schema teilen, metaphorisch nennen zu wollen. Dann könnten je zwei beliebige Kohopynome eines Hyperonyms grundsätzlich zu einer Metapher kombiniert werden. Das beiden Gemeinsame sollte aber offensichtlich nicht trivial sein und insbesondere sollten die in einer Metapher zusammengebrachten Begriffe aus heterogenen Wirklichkeitsbereichen stammen.<sup>47</sup> Man stelle sich vor, jemand äußert *Orangen sind die Tennisbälle der Früchte-Liebhaber*, um ‚Orangen und Tennisbälle sind rund‘ auszudrücken (vgl. Ortony 1975: 50), dann hat er sich gemäß dieser Version der Invarianz-These völlig korrekt verhalten, trotzdem wird dieser Metaphernversuch höchstwahrscheinlich fehlschlagen, weil nur eine Eigenschaft geteilt wird, die wörtlich mit dem Wort *rund* bezeichnet werden kann. Die Unterscheidung generischer und spezifischer Schemata allein kann das richtig beobachtete Phänomen, dass bestimmte Metaphorisierungen funktionieren, andere hingegen nicht, nur unzureichend erklären.

In der Weiterentwicklung dieses Ansatzes spricht Lakoff (1990) zum ersten Mal explizit von der „Invarianz-These“ und ersetzt die diffuse Unterscheidung generischer und spezifischer Schemata durch den Begriff der Vorstellungs-Schemata:

Metaphorical mappings preserve the cognitive topology (this is, the image-schema structure) of the source domain. (ebd.: 54)

Von den beiden vorhergehenden Prinzipien hat in dieser Definition nur das zweite überlebt. Die Zielbereichsstruktur spielt keine Rolle mehr. Wie Brugman (1990: 258) feststellt, stimmen die von Lakoff besprochenen Beispiele jedoch nicht immer mit seiner Definition überein. Manchmal bezieht er sich auf die Struktur des Herkunfts- dann aber auch wieder auf die Struktur des Zielbereiches, ohne dies jemals zu problematisieren. Kurze Zeit später revidiert Lakoff auch diese Version noch einmal, schwächt die

---

<sup>47</sup> Dazu Coenen: „Eine Analogie ist trivial, wenn der gemeinsame Beschreibungsinhalt sich aus üblichen gemeinsamen Bezeichnungen der Analogiepartner ergibt“ (Coenen 2002: 31).

Hypothese zum Prinzip ab und nimmt dabei auch das erste Prinzip wieder auf:

Metaphorical mappings preserve the cognitive topology (that is, the image-schema structure) of the source domain, in a way consistent with the inherent structure of the target domain. (Lakoff 1993: 215)

Diese Version nähert sich anscheinend wieder der Ausgangsvariante an. Weiterhin bleibt das Problem vager Formulierungen bestehen: Was genau soll etwa heißen, dass eine metaphorische Übertragung die kognitive Ursprungs- und Zielstruktur „konsistent“ arrangiert? Immerhin lassen sich zwei Fälle unterscheiden: Wenn im Ziel- und Ursprungsbereich das gleiche Schema enthalten ist, dann wird jedes Strukturelement des Schemas im Herkunfts- auf das entsprechende Element im Zielbereich abgebildet. Konkretisiert auf Behälter-Schemata wird also garantiert, dass Inneres auf Inneres, Äußeres auf Äußeres und Ränder auf Ränder abgebildet werden. In gewisser Weise kann dieser Spezialfall als Folgerung aus dem Gestaltcharakter der Vorstellungsschemata verstanden werden, denn ihre holistische Natur verbietet es, einzelne Teile zu entfernen oder Teile gegeneinander auszutauschen, sonst würde das Ganze seinen Sinn verlieren. Stehen sich nun in Ursprungs- und Zielbereich verschiedene Schemata gegenüber, dann gewinnt immer das Schema des Zielbereichs und überschreibt alle zu ihm inkompatiblen Strukturen. In Anlehnung an ein englischsprachiges Beispiel Lakoffs lässt sich dieses Phänomen an der Phrase *jemandem eine Antwort geben* illustrieren. Über die Handlung des Gebens ist bekannt, dass dabei ein Gegenstand seinen Besitzer wechselt. Gibt man jedoch jemandem eine Antwort, dann hat er diese zwar hinterher, man selbst verliert sie aber nicht. Die topologische Struktur des Bereichs der Informationsvermittlung zwingt die metaphorische Abbildung diese Komponente des Konzepts GEBEN nicht zu übertragen.

Merkwürdig ist Lakoffs Bemerkung, dass sich das Invarianz-Prinzip nur

auf bereits fertige konzeptuelle Metaphern beziehe, anstatt ihre Erzeugung zu begleiten: „One should instead think of the Invariance Principle in terms of constraints on fixed correspondences: If one looks at the existing correspondences, one will see that the Invariance Principle holds [...]“ (ebd.: 215). Es ist anzunehmen, dass ihre Vorhersagekraft bei neuartigen Konzeptkombinationen schwindet, denn mit der Kreativitäts-These folgte, dass metaphorische Übertragungen in ihre Zielbereiche durchaus Strukturen hineinprojizieren können. Man denke aber auch an besonders abstrakte Bereiche wie KATEGORIE, EREIGNIS, HANDLUNG oder ZUSTAND, von denen man annehmen kann, dass sie zu Beginn lediglich über eine „dünne“ kognitive Topologie verfügen. Ihre Konzeptualisierung als Behälter müsste die entsprechende Struktur im Zielbereich erst einmal erzeugen, bevor sich Korrespondenzen herstellen lassen, auf die dann die Invarianz-These zutreffen kann.

Damit ist das erste Standbein der Invarianz-These umrissen: Der Versuch zu erklären, warum bestimmte Konzeptkombinationen funktionieren, andere dagegen nur schwer oder gar nicht. Ihr zweiter Anwendungsbereich bezieht sich auf die Modell-These, der zufolge konzeptuelle Metaphern kohärente, mentale Modelle ausbilden, sodass eine sprachliche Metapher, wenn sie auf einem solchen Metaphernmodell basiert, im Gegensatz zum singulären *Tischbein* mit anderen sprachlichen Einheiten verwandt ist, die zur gleichen Metapher gehören. So kann ein Metaphernmodell auf der einen Seite zur Kohärenzbildung beim Lesen eines Textes beitragen, indem sie das Textthema als Zielbereich systematisch durch einen Ursprungsbereich erschließt (vgl. Skirl/Schwarz-Friesel 2007: 66f; Feng 2003). Andererseits dient die Menge ihrer Hintergrundimplikationen als Ort zum Auffinden von Argumenten:

Man erkennt demnach mit einer Metapher stillschweigend deren gesamten Implikationshorizont nach dem Muster eines *iterativen Modus ponens* als gültig an. (Pielenz 1993: 108)

Im Sinne von Pielenz lassen sich die Implikationen der Metapher *Griechenland ist ein Patient* als Reihe von Konditionalen mit dem Antezedenz *Wenn Griechenland ein Patient ist, dann ...* und etwa folgenden Konsequenzen beschreiben:

- ... ist Griechenland krank.
- ... kann Griechenland andere Staaten anstecken.
- ... braucht Griechenland die richtige Medizin, um zu genesen.
- ... hängt Griechenland am Tropf.
- ... muss ein erfahrener Arzt Griechenland behandeln.

Benutzt wird diese Metapher nicht nur um die Lage Griechenlands im Kontext der Finanz- und Schuldenkrise zu beschreiben, sondern auch als Reservoir von Begründungen, um Maßnahmen zu rechtfertigen. Wird die Prämisse *Griechenland ist ein Patient* als zutreffend akzeptiert, dann ist man eher bereit die Schlussfolgerungen anzuerkennen, dass es richtig und vielleicht sogar geboten ist, von außen einzugreifen, dass die zur Heilung benötigten Mittel bitter sind und die Therapie schmerzhaft ist. Einschnitte in den öffentlichen Dienst Griechenlands können so als notwendige Operationen, die schlussendlich dem Wohl des Patienten dienen, gerechtfertigt werden. Das alltägliche Wissen über Krankheiten und die Verbreitung der Krankheitsmetaphorik im politischen Sprachgebrauch tragen dazu bei, diese Metapher und ihre Hintergrundimplikationen umso leichter anzunehmen und es wird in gleichem Maße schwerer, ein alternatives Modell dagegenzusetzen.

Die Fähigkeit von Metaphern, Inferenzmuster von einem Bereich auf einen anderen zu übertragen, ist der Kernbestandteil der Auffassung von konzeptuellen Metaphern als „understanding one conceptual domain in terms

of another conceptual domain“ (Kövecses 2002: 4). Lakoff untersucht nun Inferenzphänomene auch bei viel grundlegenderen Konzepten, denen man ihre Metaphorizität im Gegensatz zum *griechischen Patienten* nur schwer ansieht, weil die sprachlichen Metaphern sehr stark konventionalisiert sind:

What is more interesting, and I think more exciting, is the realization that many of the most basic concepts in our conceptual systems are also normally comprehended via metaphor – concepts like time, quantity, state, change, action, cause, purpose, means, modality, and even the concept of category. (Lakoff 1993: 212)

Nicht alles davon ist völlig überraschend: Dass über Zeit regelmäßig in Ausdrücken mit ursprünglich lokaler Bedeutung gesprochen wird, war für das Deutsche auch schon Paul (1960: 96) bekannt. Lakoff kommt es vornehmlich darauf an, dass alle der genannten Konzepte darüber hinaus metaphorisch verstanden werden, dass also jede Schlussfolgerung im Zielbereich ihre Gültigkeit aus der Gültigkeit einer äquivalenten Schlussfolgerung aus dem Herkunftsbereich und einer konzeptuellen Metapher beziehe. Im Quellbereich sollen die Inferenzmuster Teil der topologischen Struktur der dort enthaltenen Vorstellungs-Schemata sein. Jedes Vorstellungs-Schema verfügt über seine eigene Logik, die von metaphorischen Projektionen unangetastet in abstrakte Bereiche übertragen wird.

Invariant an konzeptuellen Metaphern sind jetzt die Inferenzmuster der Vorstellungs-Schemata des Ursprungsbereiches. Damit ist die Invarianz-These sowohl das Herzstück – „The heart of metaphor is inference“ (Lakoff/Johnson 2003: 244) – als auch die Achillesferse der kognitiven Metaphertheorie, denn der Status der Vorstellungs-Schemata ist umstritten. Es besteht weder Einigkeit darüber, wie viele es gibt, noch welche Elemente zum Strukturkern der einzelnen Schemata gehören. So kommt Jäkel (2003: 288ff) zu einem zwiespältigen Ergebnis: Für das Manipulations-Schema und das Behälter-Schema könne er die Invarianz bei einer Übertragung in den Bereich der Geistestätigkeit nachweisen, für das Weg-Schema

bleibe die Invarianz jedoch zweifelhaft. Aus seiner empirischen Arbeit stellt er schließlich eine Liste von Vorstellungs-Schemata zusammen, die sich für ihn bewährt haben.

Die Beobachtungen, die zur Invarianz-These geführt haben, hatten Anlass gegeben, nach Strukturen zu suchen, die unveränderlich gegenüber metaphorischen Projektionen sind. Als bester Kandidat haben sich die Schlussfolgerungsmuster herausgestellt, die zu Recht als essentieller Kern der Metapher angesehen werden dürfen. Eine einheitliche Erklärung dieser Phänomene ist daher ohne Zweifel erstrebenswert. Sie aber allein auf generische Strukturen oder Vorstellungs-Schemata stützen zu wollen, wird letztendlich die Diversität und den dynamischen Charakter metaphorischer Prozesse verfehlen. Ob eine Handvoll Vorstellungs-Schemata ausreichen, um alle Schlüsse abzuleiten, bleibt daher eine äußerst gewagte These.

#### 3.5.9 Fokussierungs-These

Wenn alle vorhergehenden Thesen gültig sind, dann ist bis hierher erwiesen, dass Metaphern allgegenwärtig sind, weil sie eine für abstraktes Denken notwendige Erklärungsfunktion erfüllen, indem sie abstrakte Domänen durch Rückgriff auf konkretere erschließen und so kohärente kognitive Modelle bilden, in denen Inferenzmuster übertragen werden. Diese Behauptungen sind nun einzuschränken:

The very systematicity that allows us to comprehend one aspect of a concept in terms of another [...] will necessarily hide other aspects of the concept. In allowing us to focus on one aspect of a concept [...], a metaphorical concept can keep us from focusing on other aspects of the concept that are inconsistent with that metaphor. (Lakoff/Johnson 2003: 10)

Schon im Modellbegriff ist angeklungen, dass eine Metapher immer nur für einen Teil eines Konzepts ein Erklärungsmodell zur Verfügung stellt, jedoch nie für ein Konzept als Ganzes. Der von einer Metapher fokus-



sierte Bereich wird akzentuiert, der Rest verborgen. Häufig wird dieser Aspekt wieder durch einen Vergleich mit optischen Phänomenen erklärt, wie man an der Terminologie *Highlighting and Hiding* bei Lakoff/Johnson (ebd.: 10ff) erkennt, die, mit *Beleuchtung und Verdunklung* übersetzt, diesen Bezug zur Optik deutlich hervortreten lässt. Schon Bühler (1982: 348) und Black ([1954] 1996: 72) beschreiben Metaphern bekanntermaßen als optische Filter, die beim Hindurchschauen bestimmte Teile eines Gegenstands verdecken und den Rest somit umso deutlicher hervortreten lassen, freilich mit dem Unterschied der Interaktionstheorien, dass bei ihnen der Gegenstand den Filter, durch den er gesehen wird, mitbestimmt. In diesem Sinne schlägt Jäkel (2003: 37) *Fokussierung* als Oberbegriff vor, dem wir uns anschließen.

Besonders auffällig ist der Fokussierungs-Effekt bei unterschiedlichen Metaphern mit demselben Zielbereich. So thematisieren die Metaphern DAS LEBEN IST EIN (SCHAU)SPIEL und DAS LEBEN IST EINE BÜRDE das selbe Konzept, fokussieren aber ganz unterschiedliche Aspekte (vgl. Lakoff/Turner 1989: 20ff und 25f). Wer sein Leben als Schauspiel betrachtet, kann sich fragen, welche Rollen er spielt, ob er etwa gern im Rampenlicht steht oder lieber den Unbeteiligten gibt, ob er sich noch in der Exposition oder schon im Epilog befindet, ob es eine Tragödie oder Komödie ist und vieles mehr. Im Leben eine Bürde zu sehen, greift dagegen auf die elementare Metapher SCHWIERIGKEITEN SIND LASTEN zurück, die mit der Metapher DAS LEBEN IST EINE REISE kompatibel ist. Wer ständig eine schwere Last zu tragen hat, kommt auf einer Reise nur langsam vorwärts, sucht möglicherweise nach Hilfe und wird am Ende die Reise selbst als Belastung wahrnehmen. Wer das Leben als Belastung konzeptualisiert, fühlt sich niedergedrückt, sucht nach Unterstützung bei Freunden und Familie. Neben diesen beiden Metaphern gibt es dutzende weitere Metaphorisierungen des Lebens, weil das Leben selbst voller unterschiedlicher, sich immer wandeln-

der Erfahrungen ist, die eine Ursprungsdomäne allein niemals bewältigen könnte (vgl. Lakoff/Turner 1989: 52f). Verschiedene Aspekte des Lebens verlangen nach unterschiedlichen Metaphern, um verstanden zu werden.

Die Fokussierungs-These kann in Kombination mit der Kurzschreibweise einer konzeptuellen Metapher in der Form X IST Y zu Missverständnissen führen. So versucht Murphy gegen die Annahme, dass abstrakte Konzepte durch konkrete mittels konzeptueller Metaphern verstanden werden am Beispiel der Metapher ARGUMENT IS WAR Folgendes einzuwenden:

For example, I might think that when people argue, they go to high locations, in order to shoot and kill their adversaries. I might think that napalm and missiles are typically used in modern arguments, and that the participants wear uniforms. I might think that the loser of the argument has to pay reparations to the winner, and so on. However, I can assure the reader that I do not think these things. [...] many things I believe about wars I don't believe about arguments ...in face, *most* things I believe about wars I don't believe about arguments [...] (Murphy 1996: 180/181)

Lässt man beiseite, dass der Ursprungsbereich dieser Metapher von Kriegen auf physische Auseinandersetzungen revidiert wurde, so versucht die obige Argumentation anscheinend einen Widerspruchsbeweis: Angenommen das Wissen über Kriege wäre tatsächlich die Grundlage für das Verständnis von Argumentationen, dann müsste doch alles Kriegsrelevante von der Aufklärungsdrohne bis zum U-Boot auch für Argumentationen relevant sein. Da das offensichtlich nicht der Fall ist, muss die Annahme falsch gewesen sein und das Konzept des Krieges ist unabhängig vom Konzept der Argumentation. Dagegen ist erstens einzuwenden, dass es Kraft der Kreativitäts-These sehr wohl möglich sein sollte, durch Erweiterung des Metaphernmodells weitere Aspekte von Kriegen auf Argumentationen zu übertragen. Ebenso zeigt das Beispiel nicht, dass die Metapher fehlerhaft angegeben wurde, sondern zeigt, dass nicht der gesamte Ursprungsbereich genutzt wird. Die Fokussierungs-These kann also dahingehend erweitert

werden, dass sie sowohl Ziel- als auch Ursprungsbereich einer Metapher betrifft. In Lakoff/Johnson (2003) werden beide Aspekte getrennt voneinander behandelt, obwohl sie unserer Ansicht nach zusammengehören, denn welche Teile im Zielbereich hervorgehoben und welche abgedeckt werden, hängt nicht zuletzt von der projizierten Struktur des Ursprungsbereichs ab.

In späteren Arbeiten nach *Metaphors we live by* wird die Fokussierungstheorie seltener erwähnt. Vermutlich liegt der Grund dafür in Metaphern wie MORE IS UP oder LESS IS DOWN, denn bei ihnen ist fraglich, ob man überhaupt von einem Fokussierungseffekt sprechen kann, denn welche Aspekte, wenn man die übergeordnete Beziehung von Quantität und Vertikalität nimmt, werden betont, welche unterdrückt? Diese Entwicklung setzt sich mit der Dekomposition komplexer Metaphern in primäre Metaphern fort. Während die komplexe Metapher THEORIES ARE BUILDINGS in Lakoff/Johnson (ebd.: 52f) noch auf ihre Fokussierungseffekte hin abgeklopft wird, zerlegt sie Grady (1997) in die zwei allgemeineren Metaphern ORGANIZATION IS PHYSICAL STRUCTURE und PERSISTING IS REMAINING ERECT. Hier ist der Status der Fokussierungstheorie wiederum unklar, zumal die Motivation dieser basalen Metaphern häufig durch die Verschmelzung zweier Erfahrungsbereiche erklärt wird. Erst bei den komplexen Metaphern, die primäre Metaphern miteinander kombinieren, kann der Fokussierungseffekt wieder prägnant beschrieben werden.

In besonderem Maße zeigt die Fokussierungstheorie Metaphern als ein zweischneidiges Schwert: Auf der einen Seite reduzieren sie Komplexität, erlauben es, sich auf einen Teilaspekt zu konzentrieren. Gleichzeitig sind auf der anderen Seite durch diese Beschränkung „erkenntnishemmende Auswirkungen“ (Drewer 2003: 2) fast nicht zu vermeiden.

## 3.6 Typologien konzeptueller Metaphern

Zum Abschluss der Darstellung der Grundzüge der kognitiven Metaphertheorie beschäftigt sich dieses Kapitel mit verschiedenen Möglichkeiten, konzeptuelle Metaphern zu typologisieren. Da auf die üblichen Einteilungen sprachlicher Metaphern etwa nach ihrem Konventionalisierungsgrad oder nach ihrer syntaktischen Form zurückgegriffen werden kann, müssen Kriterien gefunden werden, die auf bestimmte Eigenschaften der beteiligten Domänen oder auf eine Charakteristik der metaphorischen Projektion Bezug nehmen.

Eine erste Typologie konzeptueller Metaphern führen Lakoff/Johnson (2003) ein, indem sie eine Dreiteilung in „structural metaphors“, „orientational metaphors“ und „ontological metaphors“ vorschlagen. Strukturelle Metaphern wie etwa *TIME IS MONEY* sind „cases where one concept is metaphorically structured in terms of another“ (ebd.: 14). Orientierungsmetaphern dagegen organisieren ganze Konzeptsysteme, dadurch dass sie Konzepten eine räumliche Orientierung wie vorn-hinten, links-rechts, oben-unten usw. geben (vgl. ebd.: 14ff). Die Art und Weise, wie eine räumliche Orientierung auf ein Konzept übertragen wird, ist dabei keineswegs zufällig, sondern basiert auf physischen und/oder kulturellen Erfahrungen. So kann die Metapher *MORE IS UP* auf viele Skalen wie Lohn, Preis oder Temperatur angewendet werden und gründet auf der Erfahrung, dass beim Hinzufügen von Flüssigkeit in einen Behälter der Pegel steigt, also ein Mehr an Substanz mit einem höheren Füllstand einhergeht. Ontologische Metaphern schließlich konzeptualisieren sinnlich nicht wahrnehmbare oder nicht klar abgrenzbare Objekte als fass- und greifbare Gegenstände. Hier werden Erfahrungen im Umgang mit physischen Objekten auf abstrakte immaterielle Gegenstände übertragen (vgl. ebd.: 25ff). Darunter fällt etwa jede Art von Behälter-Metaphorik und als Spezialfall ebenfalls die Personifizierung (vgl. ebd.: 33f).

Schon in Lakoff (1987) ist diese Typologie konzeptueller Metaphern wieder kommentarlos verschwunden und wird seitdem von ihren Erfindern nicht mehr aufgegriffen. Erst in einem Nachwort aus dem Jahr 2003 äußern sich Lakoff/Johnson noch einmal dazu:

The division of metaphors into three types—orientational, ontological, and structural—was artificial. All metaphors are structural (in that they map structures to structures); all are ontological (in that they create target domain entities); and many are orientational (in that they map orientational image-schemas). (Lakoff/Johnson 2003: 264)

Sicherlich war diese Klassifikation von Beginn an recht vage, da die gesamten Orientierungs- und ontologischen Metaphern in gewisser Weise immer strukturell sind, denn auch bei ihnen erscheint letztendlich ein Konzept im Lichte eines anderen. Man kann also entweder auf diese Typologie, da sie „keinen wirklichen Systematisierungsgewinn bringt“ (Drewer 2003: 7), verzichten oder versucht, in einer „differenziert-kritischen Verwendung der fraglichen Klassifizierung“ (Jäkel 2003: 137) zutreffende Unterscheidungen beizubehalten, ohne sich aber auf eine strenge Trichotomie zu verpflichten. In jedem Fall jedoch bleibt die Frage bestehen, warum Lakoff/Johnson diese Einteilung überhaupt eingeführt hatten und ob nicht doch ein grundsätzlicher Unterschied zwischen konzeptuellen Metaphern wie der Orientierungsmetapher MORE IS UP und der strukturellen Metapher TIME IS MONEY besteht. Einen Hinweis darauf gibt Coenen, wenn er zur Orientierungsmetapher MORE IS UP kritisch schreibt: „Höhe ist daher kein metaphorischer Korrespondenzpartner, sondern vielmehr Beispiel der Quantität [...]“ (Coenen 2002: 232). Er kommt zu dem Schluss, dass an dieser Stelle statt einer Metapher eine Synekdoche vorliege, da man eine Art von Quantität – nämlich Höhe – für das ganze Konzept setze, vergleichbar damit, an Stelle des Oberbegriffs *Nahrungsmittel* den Unterbegriff *Brot* zu setzen. Aufgegriffen wird diese Sichtweise durch jüngere Bestrebungen, wie etwa die Aufsätze in Barcelona (2003) zeigen, das Verhältnis von Metapher und

Metonymie auf konzeptueller Ebene neu zu bewerten. Das legt nahe, dass zumindest die Unterscheidung zwischen strukturellen Metaphern auf der einen und Orientierungs- und ontologischen Metaphern auf der anderen Seite vielleicht doch einen gewissen Wert hat, wenn auch nicht im Sinne von Lakoff/Johnson.

Eine zweite nicht als solche kenntlich gemachte Typologie wird in Lakoff/Turner (1989) entwickelt und in Lakoff (1990) und Lakoff (1993) fortgesetzt. Sie unterscheidet zwei Typen konzeptueller Metaphern: „image metaphors“ und „generic-level metaphors“. Beide Typen sind zwar disjunkt, schöpfen aber den Bereich der konzeptuellen Metapher nicht aus. Image metaphors unterscheiden sich von anderen konzeptuellen Metaphern darin, dass sie als „‘one-shot’ metaphors“ (Lakoff 1990: 66) eine Vorstellung einmalig auf eine andere Vorstellung abbilden.<sup>48</sup> Als deutschsprachiges Beispiel funktioniert vielleicht folgende Beschreibung Sherlock Holmes’ durch seinen Kollegen Watson:

Seine Augen waren scharf und durchdringend, außer in jenen Zwischenzeiten der Lähmung, die ich erwähnt habe, und seine schmale, falkenhafte Nase verlieh ihm insgesamt den Ausdruck der Wachsamkeit und Entschlossenheit. (Doyle 2007: 24)

Um sie zu verstehen, muss man sich einen Falken, insbesondere dessen Schnabel vergegenwärtigen und auf das Bild einer menschlichen Nase projizieren. Das unterscheidet sie von Blacks Metapher *Der Mensch ist ein Wolf*, wo die Morphologie von Wölfen nebensächlich ist und stattdessen Annahmen über ihr Verhalten relevant sind. Dennoch lädt auch die Falken-Metapher dazu ein, zusätzliches Wissen über Falken auf Holmes zu über-

---

<sup>48</sup> Es ist nicht ganz klar, ob *image* mit *Vorstellung* oder *Bild* übersetzt werden sollte. Lakoffs Beispiele legen nahe, dass es um visuelle Eindrücke eines Gegenstandes oder einer Szene geht, seine Ausführungen bringen die image metaphors jedoch mit den Vorstellungs-Schemata in Verbindung, die nur zu einem Teil visuelle Komponenten beinhalten. Deshalb wird im Folgenden der englische Terminus *image metaphors* beibehalten und *image* meist mit dem unverfänglicheren Wort *Vorstellung* übersetzt.

tragen, wie es mit den Wörtern *Wachsamkeit* und *Entschlossenheit* angedeutet wird. Wegen der hohen Detailfülle eignen sich solche Metaphern nur für sehr spezielle Fälle und man könnte sie in diesem Sinne als *Einwegmetaphern* bezeichnen (vgl. Lakoff 1993: 230). Aus sprachwissenschaftlicher Perspektive ist zu ergänzen, dass image metaphors wie andere Metaphern auch lexikalisieren können, wie die Beispiele *Kotflügel* oder *Türflügel* zeigen, und dann weitere Verbreitung erlangen, als die von Lakoff bemühten poetischen Beispiele suggerieren.

Der zweite Subtyp, die „generic-level metaphor“, wurde bereits im Zuge der Invarianz-These erwähnt. Wenn image metaphors nur auf sehr spezielle Fälle eingeschränkt sind, dann stehen generic-level metaphors am entgegengesetzten Pol, da sie generische Konzepte miteinander verbinden, die in einer Vielzahl spezifischerer Konzepte eingebettet sind. Personifizierungen etwa können der generic level metaphor EVENTS ARE ACTIONS folgen, bei der ein Ereignis durch eine Person beschrieben wird, die eine zu diesem Ereignis ähnliche Handlung durchführt. Ein anderes Beispiel ist CAUSATION IS PROGENERATION, also in etwa VERURSACHUNG IST ZEUGUNG, die z. B. mit der Äußerung *Saussure ist der Vater der modernen Linguistik* realisiert wird (vgl. ebd.: 232). Mit ihr können Gegenstände oder Sachverhalte, die aus dem Nichts geschaffen wurden und für längere Zeit bestehen, als Nachkommen eines Urhebers konzeptualisiert werden.

Auch diese zwei Typen konzeptueller Metaphern sind in der Diskussion schnell überholt. Schon in Lakoff/Johnson (1999) werden sie mit keinem Wort mehr erwähnt. Stattdessen wird eine neue Differenzierung in „primary metaphors“ und „complex metaphors“ angeboten. Während der Diskussion der Fokussierungs-These hatte sich gezeigt, dass es Metaphern wie MORE IS UP gibt, die nur einen schwachen Fokussierungs-Effekt zeigen, und dass sich viele konzeptuelle Metaphern in Teilmetaphern aufspalten lassen. Die kleinsten Bestandteile, die bei einer Dekomposition konzeptu-

eller Metaphern zurückbleiben, werden *primäre Metaphern* genannt. Über ihre Besonderheiten heißt es bei Lakoff/Johnson:

We acquire a large system of primary metaphors automatically and unconsciously simply by functioning in the most ordinary of ways in the everyday world from our earliest years. We have no choice in this. Because of the way neural connections are formed during the period of conflation, we all naturally think using hundreds of primary metaphors. (Lakoff/Johnson 1999: 47)

Primäre Metaphern sind nach dem Erwerb der Vorstellungs-Schemata der zweite Schritt auf dem Weg zum Aufbau eines umfassenden konzeptuellen Systems. Da sie ebenso wie die Vorstellungs-Schemata auf grundlegenden Erfahrungen des Körpers und seiner Interaktion mit der Umwelt basieren, sind bei vergleichbaren Umweltbedingungen die gleichen primären Metaphern in jeder Kultur auf der Erde zu erwarten (vgl. ebd.: 56f). In ihnen zeigt sich die Unbewusstheits-These am deutlichsten. Geht man die Liste an Beispielen für primäre Metaphern in Lakoff/Johnson (ebd.: 50ff) durch, dann findet man „alte Bekannte“ wie HAPPY IS UP, CATEGORIES ARE CONTAINERS oder SIMILARITY IS CLOSENESS, die in der ersten Typologie noch in die Klasse der Orientierungs- oder der ontologischen Metaphern fielen. Komplexe Metaphern dagegen „are built out of primary metaphors plus forms of commonplace knowledge“ (ebd.: 60). In ihnen verbinden sich universelle primäre Metaphern mit kulturgebundenen Vorstellungen zu komplexen kognitiven Modellen. Beispielsweise setzt sich die komplexe Metapher A PURPOSEFUL LIFE IS A JOURNEY aus den beiden primären Metaphern PURPOSES ARE DESTINATIONS und ACTIONS ARE MOTION gekoppelt mit der kulturellen Ansicht, dass Menschen in ihrem Leben Ziele haben und sich, um sie zu erreichen, entsprechend verhalten sollten, zusammen. Kulturen, in denen diese Überzeugung nicht geteilt wird, konzeptualisieren das Leben durch andere komplexe Metaphern. Insgesamt sieht es so aus, als sei die ursprünglich dreigliedrige Klassifizierung in dieser Zwei-



teilung aufgegangen, wobei Orientierungs- und ontologische Metaphern in einer Klasse zusammenfallen.

Über diese drei „kanonischen“ Typologien der Begründer der kognitiven Metaphertheorie hinaus gibt es eine Vielzahl weiterer Klassifikationen, die sich meist an konkreten Forschungsvorhaben orientieren oder im Rückblick auf abgeschlossene Untersuchungen entwickelt werden. Pielenz (1993: 76ff) etwa unterscheidet „alltagskreative“ von „theoriekreativen“ Metaphern in Bezug auf ihren „Wirkungskreis“, d. h. nach dem übergeordneten Bereich der Zieldomäne. So sind alltagskreative Metaphern „überwiegend in der alltäglichen Redepraxis“ daheim, während theoriekreative Metaphern „bei der Bildung wissenschaftlicher Theorien eine konstitutive Rolle“ (ebd.: 76) spielen. Diese Unterscheidung ist nicht trennscharf, da es Metaphern gibt, die sowohl alltags- als auch theoriekreativ sind, wie etwa die Röhrenmetaphorik der Kommunikation, die in der Linguistik und im Alltag Verwendung findet. Das Adjektiv *kreativ* ist hier im zweiten Sinne der Kreativitätstheorie so zu lesen, dass Metaphern eine bestimmte Perspektive auf ein Phänomen eröffnen oder dieses Phänomen überhaupt erst zu Bewusstsein bringen.

Drewer (2003) dagegen diskutiert eine Einteilung in „natürliche“ und „künstliche“ Metaphernmodelle. Sie schreibt dazu:

Unter **natürlichen Metaphernmodellen** sollen diejenigen verstanden werden, die im Fach selbst zur Beschreibung und Erklärung bestimmter Sachverhalte Anwendung finden, während **künstliche Metaphernmodelle** von Angehörigen der wissenschaftlichen Gemeinschaft nicht verwendet, sondern ausschließlich aus Veranschaulichungs- und Explikationsgründen entwickelt und in der Lehre eingesetzt werden. (ebd.: 97/98)

Natürliche Metaphernmodelle konstituieren Fachwissen oder haben es einmal getan, bevor sie von anderen Modellen ersetzt wurden, wohingegen künstliche Metaphernmodelle vor allem der Vermittlung von Wissen an

Außenstehende im didaktischen Prozess dienen. Reste außer Gebrauch gekommener natürlicher Metaphernmodelle können in der Sprache als tote Metaphern konserviert sein. Künstliche Metaphernmodelle sind austauschbar und können individuell stark variieren. Ein Lehrender wählt zur Vermittlung des Fachwissens ein geeignetes künstliches Metaphernmodell adressaten- und situationsgerecht aus oder schafft sich selbst eines. Letztendlich dienen sie lediglich als Brücken zu den natürlichen Metaphern eines Faches, denn für Drewer (2003: 98) sind Fachwissen und natürliche Metaphernmodelle identisch. Die Begriffswahl erscheint allerdings ungünstig, da suggeriert wird, dass sich natürliche Metaphernmodelle von selbst aus dem betrachteten Gegenstand ergeben, wohingegen künstliche Modelle von außen durch Menschen ohne unmittelbare Notwendigkeit eingebracht werden. Drewer selbst schwächt ihre terminologische Unterscheidung mit der Feststellung, dass wissenschaftliche Theorien auch immer nur eine bestimmte menschliche Sichtweise darstellen, ab: „Insofern sind auch die als Erklärungsmuster anerkannten, die natürlichen Metaphernmodelle der Fächer in gewisser Weise künstlich“ (ebd.: 101). Wenn der Unterschied zwischen den in einem Fach gängigen und den von einer einzelnen Person gebrauchten Modellen betont werden soll, kann immer noch von etablierten, usuellen, konventionalisierten Metaphern im Gegensatz zu okkasionellen, idiosynkratischen Metaphern gesprochen werden.

### **3.7 Kritische Anmerkungen**

Auch wenn die kognitive Metaphertheorie gern als die Standardtheorie der Metapher gesehen werden möchte, ist man nicht gezwungen, ihre streitbaren Annahmen wie die Metaphysik des Erfahrungsrealismus oder die Degradierung der Sprache zum Epiphänomen des konzeptuellen Systems mitzutragen. Aus der Fülle der Kritik werden hier drei Aspekte – die ver-

wendete Terminologie, das Verhältnis von Bedeutung und Konzept und die Gefahr einer zirkulären Argumentation – ausgewählt.

### 3.7.1 Terminologie

Die Spaltung der Metapher in einen sprachlichen und einen konzeptuellen Teil zwingt zu einer Erweiterung der Terminologie. Eine metaphorische Äußerung wird als *metaphorical expression* bezeichnet, während der eigentliche Begriff *metaphor* der konzeptuellen Abbildung bzw. dem metaphorischen Konzept vorbehalten bleibt. Lakoff rechtfertigt diese Entscheidung so:

Since it is the mappings that are primary and that state the generalizations that are our principal concern, we have reserved the term “metaphor” for the mappings, rather than for the linguistic expressions. (Lakoff 1993: 209)

Obwohl dieses Vorgehen unter den Prämissen der kognitiven Metaphertheorie nachvollziehbar ist, könnte man sich viel Aufregung ersparen, wenn man gewisse sprachliche Ausdrücke weiterhin *Metapher* nennen und für das kognitive Phänomen die Begriffe *konzeptuelle Metapher* oder *Metaphernmodell* reservieren würde. Lakoff fordert mit seiner Terminologie die Konfrontation geradezu heraus, wobei ihm durchaus unterstellt werden darf, dass er den Bruch mit der Metaphertradition bewusst inszeniert. So wird man nicht müde, immer wieder zu betonen, wie oft die Metapher doch missverstanden wurde:

[...] it can be misleading to speak of a sequence of words as being a metaphor. Linguistic expressions—mere sequences of words—are not metaphors in themselves. Metaphors are conceptual mappings. They are a matter of thought, not merely language. (Lakoff/Turner 1989: 107)

Die tiefere Ursache dieser weit verbreiteten „Verwechslung“ liege in der konzeptuellen Metonymie WORDS STAND FOR THE CONCEPTS THEY EXPRESS.

Durch sie werde das Wort *Metapher* sowohl auf konzeptuelle Abbildungen als auch auf Wörter, die diese Abbildungen ausdrücken, anwendbar (vgl. Lakoff/Turner 1989: 108). In diesem Falle sei der Ausdruck *dieses Wort ist eine Metapher* eine ökonomische Verkürzung von *das durch dieses Wort ausgedrückte Konzept ist eine Metapher*, die, wenn sie unerkannt bliebe, zur falschen Ansicht führe, die Metapher sei ein genuin sprachliches Phänomen. Dagegen spricht natürlich sofort, dass in weiten Teilen der Linguistik und der Philosophie die Metapher ganz bewusst als ein besonderes Wortgebrauchsverfahren und damit als Teil der parole bzw. der Performanz einer Sprache gilt. Die Erklärung der angeblich notorischen Verwechslung kann daher als Versuch, andere Metaphertheorien zu desavouieren, gelesen werden.

Während die Verschiebung des Metaphernbegriffs anscheinend provozieren soll, ist der Gebrauch der Antonyme *lebendig* und *tot* eher skurril: Wird die Lexikalisierung traditionell als Endpunkt des Lebenswegs einer Metapher, an dem sie stirbt, metaphorisiert, sind für Lakoff/Turner nur die toten Metaphern wahrhaft lebendig:

The things most alive in our conceptual system are those things that we use constantly, unconsciously, and automatically. They include conceptual schemas and conceptual metaphors. (ebd.: 62)

Jäkel hält solche „terminologischen Taschenspielereien“ (Jäkel 2003: 54) für überflüssig und findet, sie beschädigten den Ruf des kognitiven Ansatzes, wo es überhaupt nicht notwendig sei. Dass man in der kognitiven Metaphertheorie in der Tat einen Hang dazu hat, etablierte Terminologien auf den Kopf zu stellen, hat sich schon gezeigt und ist ein berechtigter Kritikpunkt. Hier jedoch ist der Nutzen einer Begriffsumkehrung nicht völlig von der Hand zu weisen, da zwei verschiedene Ebenen betroffen sind. In der Sprache stirbt eine Metapher, sobald sie lexikalisiert wird. Die metaphorische Bedeutung ersetzt dann die wörtliche oder tritt als neue Teilbedeutung

neben sie und das betreffende Lexem oder der Phraseologismus wird polysem. *Tot* ist dabei nicht absolut zu verstehen, da sich solche ehemaligen Metaphern immer „wiederbeleben“ lassen. Ob für eine solche Reanimation etymologisches Wissen benötigt wird oder nicht, kann dabei als Indikator, wie stark der Lexikalisierungsprozess fortgeschritten ist, genutzt werden. Auf kognitiver Ebene können tote Metaphern jedoch im Sinne des obigen Zitates höchst lebendig sein, wenn die ihnen zugrunde liegenden Konzeptkopplungen weiter genutzt werden. Beispielsweise ist das Lexem *Depression* aus französisch *dépression* ‚Niederdrücken, Senkung‘ (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 141) eine tote Metapher zu dem höchst aktiven Paar konzeptueller Metaphern GLÜCKLICH IST OBEN, TRAUERIG IST UNTEN. Realisierungen lebendiger kognitiver Metaphern sind vielfach schon konventionell, während umgekehrt lebendige Metaphern, kognitiv sozusagen noch „ungeboren“ sein können, weil entsprechende Konzeptverbindungen erst herauszubilden sind.

Markanter Höhepunkt der Terminologieneuausrichtung ist aber sicher die Verwendung des Paares *wörtlich/metaphorisch*. Im Zuge der Erörterung der Metapher ARGUMENT IS WAR heißt es bei Lakoff/Jonson zunächst noch:

The concept [ARGUMENT] is metaphorically structured, the activity is metaphorically structured, and, consequently, the language is metaphorically structured. (Lakoff/Johnson 2003: 5)

Schon im nächsten Absatz wird das Sprechen über Argumentationen in Ausdrücken des Krieges dann als „ordinary“, „normal“ oder „conventional“ und schließlich als „literal“ bezeichnet (ebd.: 5). Demzufolge spricht jeder, wenn er über Argumentationen als Krieg redet, sowohl metaphorisch als auch wörtlich. Damit würde aber der Unterschied zwischen wörtlichem und metaphorischem Sprachgebrauch eingeebnet. Ein paar Kapitel später wird die Verwirrung mit dem Begriff „imaginative (or nonliteral) metaphor“

(Lakoff/Johnson 2003: 53) komplett gemacht, den Jäkel „als Ausdruck einer terminologischen Begriffskonfusion“ (Jäkel 2003: 43) zurückweist. Der Grund dieses vermeidbaren Durcheinanders liegt wieder in der Unterscheidung der zwei Metapherenebenen – linguistisch und konzeptuell. So wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass „whenever in this book we speak of metaphors [...] it should be understood that *metaphor* means *metaphorical concept*“ (Lakoff/Johnson 2003: 6), weshalb man obige *nichtwörtliche Metapher* als *nichtwörtliches metaphorisches Konzept* zu lesen hat. Dann klärt sich die doppelte Terminologie etwas auf, denn auf der konzeptuellen Ebene gibt es Metaphern, die zum konventionellen Grundstock einer kulturellen Gemeinschaft gehören, die von allen ständig gebraucht werden, ohne dass sie wirklich bewusst werden. Diese können als *wörtliche Metaphern* bezeichnet werden. Alle Erweiterungen konventioneller Metaphernmodelle werden dagegen als *nichtwörtlich* oder *kreativ* usw. bezeichnet. Damit ist nichts über die sprachlichen Ausdrücke, die diese Metaphern realisieren, gesagt. Insofern kann das „Oxymoron ‚wörtliche Metapher‘“ (Jäkel 2003: 43) doch einigermaßen gerettet werden, wenn man es konsequent als Aussage über konzeptuelle Metaphern liest. Das ist jedoch kein Freispruch für eine derart undurchsichtige Terminologie. Später sieht es dann sogar so aus, als solle auf den Begriff *wörtlich* im herkömmlichen Sinne lieber ganz verzichtet werden. So schlagen Lakoff/Turner folgende aus ihrer Sicht angemessene Verwendung dieses Begriffes vor:

We suggest that the term “literal” be used as a handy, nontechnical term either for a source domain of a metaphor or to contrast with such terms as “ironic,” “exaggerated,” “understated,” “arrived at by principles of conversation,” and so on. (Lakoff/Turner 1989: 119)

Hier ist Jäkel voll und ganz zuzustimmen, dass die Termini *wörtlich* und *metaphorisch* doch weiterhin als Antonyme zur Beschreibung sprachlicher Äußerungen gebraucht werden sollten.

### 3.7.2 Bedeutung und Konzept

Bereits 1968, lange bevor die kognitive Metaphertheorie das Licht der wissenschaftlichen Welt erblickte, warnte schon Weinrich:

Metaphern in einem literarischen Werk müssen vor dem Hintergrund der metaphorischen Tradition interpretiert werden. Ein direkter Rückschluß vom Metapherngebrauch eines Autors auf seine mentale Struktur ist nicht möglich. (Weinrich/Heckhausen/Suerbaum u. a. 1968: 101)

Diese Mahnung gilt natürlich nicht nur für poetische Metaphern, sondern gleichermaßen auch für Metaphern in der Alltagssprache. Gerade in diesem Sammelbecken konventioneller Metaphern, worin die kognitive Metaphertheorie einen unverstellten Ausdruck des Denkens erblickt, könnte man mit gleichem Recht behaupten, einen Tiefkühlschrank voller gefrorener Bräuche vorzufinden, die bestenfalls noch im Rückblick auf ihre sprachgeschichtliche Entstehung einen Einblick in die Denkgewohnheiten ihrer früheren Benutzer gewähren könnten. Fraglos sind die Konsequenzen der ersten Option stärker und für die Wissenschaft attraktiver, jedoch gehen sie zu Lasten der Nachvollziehbarkeit, weshalb man eine strenge Begründung ihrer Angemessenheit einfordern sollte. Dass es an solchen Rechtfertigungen zumeist mangelt, ist für Keller ein Punkt unter anderen dieses Semantikmodell, das nicht zwischen Bedeutung und Konzept unterscheidet, abzulehnen:

Erkenntnisse über die Metaphorizität der Sprache werden, ohne weitere Rechtfertigung, als Erkenntnisse über menschliche Kognition ausgegeben. Kognitive Kategorien wie „concepts“ werden, ebenfalls ohne groß zu argumentieren, mit sprachlichen Kategorien wie „meaning“ gleichgesetzt. Die Berechtigung einer solchen Gleichsetzung wird meist stillschweigend vorausgesetzt. (Keller 1995: 178)

Tatsächlich liefert die kognitive Metaphertheorie auch kaum Argumente, warum diese Annahme gültig sein soll;<sup>49</sup> sie wird als Selbstverständlichkeit behandelt: „Words are sound sequences that conventionally express concepts“ (Lakoff/Turner 1989: 109).

Im Gegensatz zum Identifikationsmodell hält es Keller für notwendig, drei Betrachtungsebenen, die den Ecken im semiotischen Dreieck entsprechen, auseinanderzuhalten: „die linguistische Ebene der Zeichen (Wörter, Sätze), die epistemologische Ebene der Konzepte (Begriffe, Propositionen) und die ontologische Ebene der Dinge, Sachverhalte und dergleichen“ (Keller 1995: 181). Die Bedeutung eines Zeichens ist für ihn der Aspekt des Zeichens, durch den es interpretierbar wird, der es erlaubt, dem Zeichen ein Konzept zuzuordnen. Daraus folgt nun umgekehrt, dass Bedeutung für Keller überhaupt nichts Mentales an sich hat. Diese Position zeigt, auch wenn man ihr nicht restlos zustimmen mag, dass die Auffassung, sprachliche Bedeutung ginge restlos in konzeptuellen Struktur auf, zu kurz gegriffen ist. Nach langem wird diese Kritik schließlich auch in der Forschung zu kognitiven Metaphernmodellen ernst genommen, selbst wenn zunächst lediglich weiterer Forschungsbedarf diagnostiziert wird:

In fact, we agree with various critics of the cognitive linguistic approach [...] that the relation between metaphor-related words in language and cross-domain mappings in thought requires much further study. (Steen/Dorst/Herrmann u. a. 2010: 789)

Lyons (1991: 11ff) nennt Semantiktheorien, die lexikalische Bedeutung vor allem durch Begriffe, Ideen, Gedanken oder Konzepte erklären wollen, *Ideationstheorien*. Außer dem oben genannten Einwänden, geht er noch

---

<sup>49</sup> Drewer verbucht diese Gleichsetzung sogar als positive Leistung: „Die Kognitive Semantik ‚versöhnt‘ Linguistik und Kognitionspsychologie, indem sie semantische und konzeptuelle Strukturen nicht voneinander trennt, sondern sprachliche und konzeptuelle Bedeutung als eng verbunden und interagierend – in der extremen Fassung sogar als identisch – betrachtet“ (Drewer 2003: 76, Anm. 59).



einige weitere Kritikpunkte gegen diesen Theorietyp durch. Für die kognitive Semantik, auf der die kognitive Metapherntheorie aufbaut, ergibt sich darüber hinaus noch eine spezifische Schwierigkeit: Aus der Gleichsetzung von sprachlicher Bedeutung und mentalen Konzepten leitet sie die Schlussfolgerung ab, dass sprachliche Strukturen etwas dem konzeptuellen System Nachgeordnetes seien und deshalb als Epiphänomen keinen Einfluss auf diese ausüben können, weil die Konzepte schon im kognitiven Raum existieren, bevor sie im Medium der Sprache mitgeteilt werden.<sup>50</sup> Somit ist klar, dass alle syntaktischen Überlegungen, die sich auf die sprachliche Form beziehen würden, aus der Metaphernanalyse herausfallen.<sup>51</sup> Insbesondere haben sich Typologisierungen an den konzeptuellen und nicht an den sprachlichen Strukturen zu orientieren. Allgemeiner wird jedes Medium, in dem sich eine konzeptuelle Metapher manifestiert, lediglich als neutraler Vermittler betrachtet, dessen Aufgabe sich in der Repräsentation vollständig erfüllt. Auf die sich aufdrängende erkenntnistheoretische Frage, woher die Konzepte denn kommen sollen, wenn sie vor jeder Sprachverwendung liegen, antwortet das Embodiment mit dem Verweis auf vergleichbare Lebensbedingungen bei allen Menschen, die zumindest einfache Grundkonzepte garantieren, auf denen sich abstrakte Konzepte aufbauen lassen. Es bleiben dennoch Zweifel, ob das genügt, um den Ausschluss der sprachlichen Sphäre, „in der das monologische Subjekt agiert“ (Linz 2004: 260), aus der Sinnerzeugung zu rechtfertigen.

Eine andere in der Linguistik bewährte Gruppe von Semantikmodellen favorisiert die Unterscheidung mehrerer Bedeutungsebenen. Wo die holis-

---

<sup>50</sup> Dankbar klar wird diese Position etwa hier expliziert: „Im Sinne eines kognitiven Herangehens setze ich voraus, dass Bedeutungen generell mit *konzeptuellen Strukturen* identifiziert werden können. Den Inhalt von sprachlichen Ausdrücken bilden damit besondere mentale Konfigurationen, die in ihrer Existenz nicht an Sprache gebunden, sondern prinzipiell unabhängig davon sind“ (Dölling 2005: 164).

<sup>51</sup> Vgl. dazu auch: „Bei der Reduzierbarkeit sprachlich aktualisierter Metaphern auf ihren je zugrundeliegenden Typus spielt dessen syntaktische und morphologische Gestalt keine Rolle“ (Pielenz 1993: 72).

tische Bedeutungskonzeption Lakoffs eine homogene Bedeutung annimmt, gehen diese Theorien von einer Spaltung in mindestens zwei verschiedene Bedeutungsarten aus. Von Keller (1995: 179) werden sie *Zweistufenmodelle* genannt, bekannt sind sie aber auch unter der Bezeichnung *Zwei-Ebenen-Semantiken*. Im engen Sinn ist damit nur die Theorie von Bierwisch und Lang gemeint, deren Grundgedanken nach Bierwisch (1983) kurz erläutert werden sollen. Sie unterscheidet an der Bedeutung sprachlicher Ausdrücke einen grammatischen, kontextunabhängigen und einen begrifflichen, kontextabhängigen Anteil. Dabei handelt sich es nicht mehr um eine Wortsemantik wie bei Lakoff, sondern eher um eine Äußerungssemantik. Bierwisch (ebd.: 65) gliedert den Prozess der Bedeutungserzeugung einer Äußerung in drei aufeinander aufbauende Stufen: Zunächst liegt im Lexikon eine nur durch die Sprachkenntnis determinierte semantische Repräsentation – die semantische Form – vor, die auf der zweiten Stufe vermittelt durch das konzeptuelle System in eine Äußerungsbedeutung umgewandelt wird und schließlich auf der dritten Stufe in einen kommunikativen Sinn, d. h. einen Sprachakt, mündet. Bierwisch (ebd.: 78f) geht es vor allem um den Zusammenhang zwischen semantischer Form *sem* und Äußerungsbedeutung *m*, den er über eine Interpretationsfunktion *F* beschreiben möchte, die *sem* in Abhängigkeit vom Kontext *ct* auf *m* abbildet:

$$F(sem, ct) = m$$

Die Äußerungsbedeutung als durch das konzeptuelle System bedingte Bedeutung ist damit nach Bierwisch nicht direkt an die Form einer Äußerung gebunden, sondern Abhängig vom Kontext und der semantischen Repräsentation, die ihrerseits die Wahl der Domäne, aus der *ct*<sup>52</sup> stammt, be-

---

<sup>52</sup> Mit dem Wort *Kontext* wird demnach nicht die konkrete Situation, sondern eine mentale Repräsentation davon bezeichnet, deren Aufbau dementsprechend durch das konzeptuelle System mitbestimmt wird.

einflussen kann. Lexikalische Bedeutung und konzeptuelle Struktur fallen in diesem Modell nun deshalb auseinander, weil die kontextunabhängigen semantischen Repräsentationen als Funktionen bestimmte Konzeptfamilien determinieren. Beispielsweise kann den Wörtern *Schule* und *Theater* je nach Kontext das Konzept INSTITUTION oder GEBÄUDE zugeordnet werden (vgl. ebd.: 87ff), was in diesem Fall das Ergebnis einer metonymischen Bedeutungsverschiebung ist. Damit die semantische Form einer lexikalischen Einheit alle konzeptuellen Strukturen determinieren kann, die in nicht-metaphorischen Varianten mit ihr assoziiert sein können, muss sie selbst radikal unterspezifiziert sein und kann keinem mit enzyklopädischem Wissen angereicherten Konzept entsprechen.

In der jüngeren Diskussion ist man eine Tendenz bei Bierwisch aufgreifend schließlich mehr und mehr dazu übergegangen, die semantischen Formen als explizite Teilmenge der konzeptuellen Strukturen aufzufassen, wie etwa hier deutlich wird:

Soweit semantische Formen als unabhängige Vermittler zwischen syntaktischen und konzeptuellen Strukturen behandelt werden, ist diese Vorstellung zu revidieren. Auch grammatisch determinierte, formale Bedeutungen haben selbstverständlich ihre Grundlage im konzeptuellen Wissen. Ihre Bestandteile sind unmittelbar und systematisch mit Einheiten der Konzeptualisierung verbunden. (Dölling 2005: 166)

Die Differenz dieser Bedeutungskonzeption zur holistischen Semantik ist dann nur noch graduell: „In Bezug auf ihre Substanz sind semantisches und konzeptuelles Wissen identisch“ (Skirl 2009: 42). Aus dem konzeptuellen Wissen, das alle enzyklopädischen Informationen umfasst, gliedert die lexikalische Bedeutung für eine Sprachgemeinschaft wesentliche Merkmale aus, die bei unterschiedlichem Wissen von Person zu Person den gemeinsamen Konzeptkern ausmachen. Insofern ist jede lexikalische Bedeutung eine konzeptuelle Einheit, aber nicht jede konzeptuelle Einheit ist auch eine Lexembedeutung. Dem entspricht im Wesentlichen auch Burkhardt,

wenn er Begriff und Bedeutung als zwei Facetten des selben Phänomens ausweist:

Der Begriff [das Konzept] ist [...] die subjektiv-kreative und kognitiv-konstitutive, die Bedeutung die intersubjektive, tendenziell konservative und kommunikativ-konventionale Seite der Sprache. (Burkhardt 1991: 12)

Die Bedeutung ist, wenn man so sagen kann, das die von Mensch zu Mensch sich unterscheidenden Konzepte ausgleichende Element, die gemeinsame Basis einer Sprachgemeinschaft. Burkhardt vermeidet es, den beiden Aspekten eine Hierarchie beizulegen. Gleichwohl nähert sich der modulare Ansatz durch die Verringerung der Differenz zwischen Bedeutung und Konzept wieder den erkenntnistheoretisch fragwürdigen Annahmen an, die Konzeptualisierung erfolge sprachunabhängig und erst in einem zweiten Schritt würden aus Konzepten sprachliche Bedeutungen gewonnen (vgl. Willems 1997: 22).

Immerhin nimmt man die fehlende Abgrenzung von Bedeutung und Konzept endlich als ernstes Problem zur Kenntnis. So versucht Skirl (2009: 49f) darzulegen, welchen Irrtümern die kognitive Metaphertheorie durch die Gleichsetzung von sprachspezifisch-lexikalischer Bedeutung und kognitivem Konzept aufsitzt. Seine Kritik exemplifiziert er an folgender Passage von Lakoff/Johnson zur Kriegs-Metaphorik in Argumentationen:

Whether we are in a scientific, academic, or legal setting, aspiring to the ideal of rational argument, or whether we are just trying to get our way in our own household by haggling, the way we conceive of, carry out, and describe our arguments is grounded in the ARGUMENT IS WAR metaphor. (Lakoff/Johnson 2003: 65)

Skirl hält dagegen, dass im Englischen für das Lexem *argument* drei verschiedene Teilbedeutungen zu unterscheiden seien: (a) ‚Diskussion‘, (b) ‚Streit(gespräch), Auseinandersetzung‘ und (c) ‚Argumentation, Beweisführung‘. Lakoff und Johnson hätten zwar gezeigt, wie *argument* im Sinne

von (b) über das Konzept KRIEG strukturiert und verstanden werde, diesen Befund dann aber ungerechtfertigter Weise auf die ganze Bedeutung des Lexems und somit auf das gesamte Konzept ARGUMENT ausgedehnt, was besonders für die Bedeutung (c) unplausibel sei. Obwohl wir ebenfalls eine Trennung von Bedeutung und Konzept befürworten, scheint dieses Beispiel doch eher ungeeignet, um den Standpunkt zu untermauern, da es Lakoff/Johnson hier freisteht auf die Kritik zu erwidern, dass man den Namen einer konzeptuellen Metapher, der nur ein mnemotechnisches Hilfsmittel (vgl. Lakoff 1993: 207) darstelle, mit der konzeptuellen Metapher an sich verwechselt habe. Die Bezeichnung einer konzeptuellen Metapher ist nicht mehr als eine Gedankenstütze, die lediglich darauf hinweist, welche zwei kognitiven Domänen gekoppelt werden, aber weder darüber Auskunft gibt, welche Elemente in der metaphorischen Abbildung miteinander verknüpft sind, noch darüber, welche Inferenzmuster vom Ursprungs- in den Zielbereich übertragen werden. Dass dabei niemals die gesamte Zieldomäne metaphorisch durchstrukturiert wird, sondern immer nur ein partielles mentales Modell erzeugt wird, ergibt sich aus der Fokussierungs-These. Genau dieser Fehler, Bezeichnung und konzeptuelle Metapher zu verwechseln, scheint hier Skirl zu unterlaufen.<sup>53</sup>

Insgesamt ist festzustellen, dass man das alte Problem der Unterscheidung von Bedeutung und Begriff nicht löst, indem man *Begriff* durch *Konzept* ersetzt. Alle Einwände gegen Ideationstheorien bleiben bestehen. Solange diese Problemfelder nicht ausgeräumt sind und danach sieht es im Moment nicht aus, schließen wir uns folgender Einschätzung Coenens uneingeschränkt an:

Wenn einerseits nicht alle sprachlichen Manifestationen eines *cross domain mapping* sprachliche Metaphern sind und wenn es andererseits sprachliche

---

<sup>53</sup> Recht hat Skirl (2009: 50) dagegen mit seinem Hinweis auf die unglückliche deutsche Übersetzung ARGUMENTIEREN IST KRIEG und seinem Gegenvorschlag EIN STREITGESPRÄCH IST KRIEG.

Metaphern gibt, die nicht auf einer vorgängig etablierten *metaphor* beruhen, besteht Anlaß, außer der konzeptuellen *metaphor*, der Lakoff eigentliches Interesse gilt, auch die sprachliche Metapher als Gegenstand eigenen Rechts genauer zu bestimmen. (Coenen 2002: 220)

#### 3.7.3 Zirkuläre Argumentation

Nach Diskussion der Terminologie und des Semantikmodells betrifft der letzte hier behandelte Kritikpunkt die Methodik der kognitiven Metaphertheorie, über einen Umweg aus beobachtbaren Daten auf nicht unmittelbar beobachtbare konzeptuelle Metaphern zu schließen. Im Detail führt Lakoff fünf Verfahren an, die zum Auffinden kognitiver Metaphernmodelle genutzt werden können:

Generalizations governing polysemy [...]  
Generalizations governing inference patterns [...]  
Generalizations governing novel metaphorical language [...]  
Generalizations governing patterns of semantic change [...]  
Psycholinguistic experiments [...]  
(Lakoff 1993: 205)

Die ersten vier Punkte zielen vornehmlich auf die sprachliche Ebene ab, wobei bei der Analyse von Inferenzmustern im Prinzip auch Nichtsprachliches hinzugezogen werden kann. Erst die psycholinguistischen Experimente überschreiten systematisch den Bezug auf Sprache, indem auch andere beobacht- oder messbare Daten einbezogen werden. Von allen diesen Methoden haben sich Lakoff, Johnson und Turner zumeist auf die ersten drei konzentriert.

Wie nun aber genau aus den zumeist sprachlichen Daten, die dem Gedächtnis der Analysierenden oder einem Korpus entstammen, konzeptuelle Metaphern abstrahiert werden, ist methodisch unklar. Der Verweis auf „generalizations“, also auf Verallgemeinerungen, erklärt das Vorgehen nur

bedingt: Ein einzelnes polysemes Wort, dessen Teilbedeutungen untereinander in Beziehung stehen, lässt allenfalls den Verdacht auf eine konzeptuelle Metapher zu, liefert aber keinesfalls ein hinreichendes Kriterium, wie der Phraseologismus *Fuß des Berges* zeigt. Dieser würde eine dann anzunehmende konzeptuelle Metapher **BERGE SIND PERSONEN** nur in einem Aspekt realisieren, da man üblicherweise nicht vom Kopf, Arm oder Gesicht eines Berges spricht. Erst eine Reihe zusammengehörender Sprachbeispiele macht den Schluss auf dahinter liegende konzeptuelle Strukturen wenigstens wahrscheinlicher. Wie viele Daten es aber sein müssen, ob sie konstruiert sein dürfen oder statistisch durch ein Korpus belegt sein müssen, bleibt Ermessenssache. Konzeptuellen Metaphern haftet so immer Hypothesencharakter an. Das wäre nicht weiter bedenklich, wenn man sie als theoriegebundene Abstraktionen mit einer gewissen Vorhersagekraft betrachten würde. Lakoff legt sich jedoch auf die Ontologie fest, dass konzeptuelle Metaphern keine konstruierten, sondern physisch reale Objekte sind, die man dementsprechend entdecken kann.

Dass man sich bei der Rekonstruktion konzeptueller Metaphern nun vielfach fast ausschließlich auf sprachliche Äußerungen gestützt hat, halten Murphy (1996: 183f) und Linz (2004: 258f) für bedenklich, da auch das, was mit ihnen erklärt werden soll, wiederum sprachliche Äußerungen sind. Wenn beispielsweise Lakoff/Johnson (2003: 4f und 61ff) die konzeptuelle Metapher **ARGUMENT IS WAR** anhand einiger Sprachbeispiele mit polysemen Wörtern und Phraseologismen vorstellen und später zur Frage, wie diese Metapher zustande kommt, wieder nur weitere polyseme Wörter und Phraselogismen anführen, dann hat das den unangenehmen Beigeschmack, man wäre im Kreis gelaufen. Eine konzeptuelle Metapher aus konkreten Sprachdaten abzuleiten, ist eine Sache, die Richtigkeit dieser Metapher dann aber mit weiteren kaum andersartigen Sprachdaten beweisen zu wollen, ist methodisch zumindest fragwürdig. Die Ursache, warum das als

wenig problematisch wahrgenommen wird, liegt erneut in der zweifelhaften Identifikation von sprachlicher Bedeutung und konzeptuellem Inhalt begründet:

A central point of my article is that the linguistic evidence by itself is dubious, because it assumes that a certain pattern in speech directly reflects conceptual structure. [...] Taking verbal metaphors and idioms as evidence about conceptual structure is assuming a particular answer to the question – an answer that is not yet well supported in my view. (Murphy 1997: 103)

Wie im vorhergehenden Kapitel deutlich wurde, greifen Gegner der kognitiven Metaphertheorie dieses direkte Schließen von sprachlichen auf konzeptuelle Strukturen besonders stark an, da der Sprung von der sprachlichen auf die epistemologische Ebene durch eine repräsentationale Sprachauffassung ermöglicht wird, selbst aber weitgehend unreflektiert bleibt (vgl. Linz 2002: 103f). Natürlich wollen weder Murphy noch Linz die Sprachanalyse aus der Metaphernforschung herausdrängen. Wenn es aber um eine so starke Annahme, wie es die Existenz konzeptueller Metaphern als physiologisch reale Gehirnzustände ist, geht, dann ist ein gesundes Maß an Skepsis ebenso angebracht wie eine methodische Vielfalt, um sie von verschiedenen Warten aus zu verifizieren.

Eine Möglichkeit, diesen Zirkel zu durchbrechen und aus sprachlichen Daten extrahierte konzeptuelle Metaphern weiter zu stützen, sind die von Lakoff im letzten Punkt angesprochenen psycholinguistischen Experimente, wie sie beispielsweise in Gentner (2001: 207ff) oder Gentner/Bowdle/Wolff u. a. (2001: 211ff) vorgestellt und ausgewertet werden. Probanden werden dort sprachliche Äußerungen präsentiert, die ein Thema entweder mittels eines kohärenten Metaphermodells oder mittels zweier inkompatibler Modelle darstellen, wie etwa hier:

(1) Kocht Hans immer noch vor Wut?



(2) Ist Hans immer noch blind vor Wut?

(3) Nein, er hat sich wieder abgekühlt.

Während Satz (1) und (3) kohärent bezüglich der konzeptuellen Metapher WUT IST EINE KOCHENDE FLÜSSIGKEIT sind, realisiert Satz (2), obwohl er in etwa die gleiche Interpretation wie Satz (1) hat, dagegen WUT IST EIN GLEISSENDES LICHT. Wenn WUT tatsächlich über globale kognitive Muster verstanden wird, so greift ein Rezipient bei Satz (1) und (3) auf sein Wissen über kochende Flüssigkeiten und bei Satz (2) auf sein Wissen über gleißende Lichter zurück. Es wäre dann zu erwarten, dass Probanden im Mittel die Kombination der Sätze (1) und (3) schneller verstehen als die der Sätze (2) und (3). Lässt sich dieser Effekt experimentell nachweisen, so spricht dies für die Existenz dieser kognitiven Metaphernmodelle, ansonsten muss wahrscheinlich nur von lokalen lexikalischen Phänomenen wie Poly- oder Homonymie der betreffenden Wörter ausgegangen werden.

Ein anderes Mittel, um sprachliche Daten zu ergänzen, kann die Beobachtung gleichzeitig mit dem Sprechen vollzogener nonverbaler Handlungen sein. Beispielsweise analysieren Núñez/Sweetser (2006) oder Núñez (2008) Gesten, um zu erhärten, dass durch linguistische Daten rekonstruierte konzeptuelle Metaphern tatsächlich real und keine auf lexikalisierten sprachlichen Metaphern basierenden Chimären sind. Kann etwa beobachtet werden, wie Personen, während sie *Die Preise steigen* äußern, die Hand heben, dann ist dies neben der sprachlichen Äußerung ein weiteres Indiz für das aktive Metaphernmodell MORE IS UP.

Die Konzentration auf Sprache wird aber nicht ausschließlich nur negativ bewertet: So mahnt zwar auch Gibbs zur Vorsicht beim Schließen von Sprache auf Denken, dennoch hält er es für eine selbstverständliche Grundvoraussetzung der Kognitionswissenschaften, Sprache als „window to the mind“ (Gibbs 1996: 310, Anm. 1) zu nutzen. Dahinter stehen letztendlich auch ganz praktische Gründe: Psycholinguistische Experimente bedeuten

immer einen hohen Aufwand in Vorbereitung, Durchführung und Auswertung, während Sprachanalysen grundsätzlich schneller zu bewältigen sind, insbesondere dann, wenn ein bisher unerforschtes Gebiet nach Metaphern durchsucht werden soll. Zudem kann man davon ausgehen, dass durch Introspektion gewonnene Ergebnisse später häufig auch psycholinguistisch bestätigt werden (vgl. Kövecses 2011: 24).

Wenn die Introspektion trotzdem zu unsicher erscheint und man sich nicht auf Sprachbeispiele aus der Erinnerung einer Person verlassen möchte, können unterstützend korpuslinguistische Methoden hinzugezogen werden:

The relative frequency of source and target items in a given metaphorical pattern may be used to determine the degree to which the pattern in question is transparently motivated by a metaphorical mapping, and the relative frequency of source and target domain items in a coherent *set of* metaphorical patterns may be used to assess the degree to which the metaphorical mapping underlying them can be regarded as productive, i.e. as a candidate for a truly *conceptual* metaphor [...] (Stefanowitsch 2006b: 68)

Letztendlich können aber auch derartige Häufigkeitsanalysen die tiefe Kluft zwischen sprachlichen und konzeptuellen Strukturen nicht vollständig überbrücken; auch sie liefern, wie Stefanowitsch hier schreibt, lediglich Kandidaten für potentielle konzeptuelle Metaphern. Alle aus sprachlichen Daten rekonstruierten Ergebnisse, ob sie nun durch Introspektion oder Korpusanalyse gewonnen wurden, sind keine hinreichenden Kriterien, sondern lediglich Indikatoren, dass ein kognitives Metaphernmodell vorliegen könnte.

Bei der Fixierung der Diskussion auf das Problemfeld der Sprache sollte nicht vergessen werden, dass gerade der kognitive Ansatz der Metapher einen weiten alle menschlichen Tätigkeiten durchdringenden Anwendungsbereich verheißt. Die Abwertung der sprachlichen Metapher zu einer sekundären Erscheinungsform hat den Nebeneffekt, dass sie eine Rechtfertigung bietet, das Untersuchungsfeld über sprachliche Äußerungen hinaus auf andere semiotische Zeichentypen auszudehnen. Lakoff (1993: 241) nennt dazu

einige Beispiele wie Cartoons, Träume, Visionen, Mythen, soziale Institutionen oder soziale Riten. So folgt etwa der Graph eines Aktienkurses der Metapher MORE IS UP, da eine Bewegung der Kurve nach oben als Erhöhung und ein Sinken als Verminderung des Wertes der Aktie verstanden wird. Schon Richards hat versucht, den Metaphernbegriff in diese Richtung zu denken:

Ich bin sogar noch weiter gegangen und habe auch jene Vorgänge als metaphorisch miteinbezogen, bei denen wir unsere Wahrnehmung, unser Denken oder unsere Empfindungen über eine Sache in Worten ausdrücken, die eigentlich zu etwas anderem gehören – wenn beispielsweise ein Gebäude, das wir betrachten, ein Gesicht zu haben scheint und uns mit einem eigentümlichen Ausdruck ansieht. (Richards [1936] 1996: 41/42)

Diesen Weg ist man in der kognitiven Metaphertheorie nur konsequent zu Ende gegangen und hat Wahrnehmungs-, Denk- und Empfindungsereignisse unter dem Dach eines durch Metaphern strukturierten konzeptuellen Systems vereinigt. Lakoff selbst nutzt diese Vielfalt der kognitiven Metaphertheorie immer wieder, um Kritik an der US-amerikanischen Politik zu äußern. So analysiert Lakoff (2001) die Ereignisse um den Anschlag auf das World Trade Center, wie sie wahrgenommen und wie darauf reagiert wurde. Die über die Medien verbreiteten Bilder, die das Einstürzen der Zwillingstürme zeigen, seien auch deshalb mit so enormer Bestürzung aufgenommen worden, weil die Flugzeuge in die oberen Stockwerke, die metaphorisch als Kopf verstanden würden, stürzten. Die Türme insgesamt seien dann Menschen, die mit dem Zusammenbrechen der Gebäude sterben. Da es sich aber um keinen natürlichen Tod, sondern um intentionale Tötung handele, werde augenblicklich das alltägliche Wissen über Morde herangezogen und nach einem Täter gesucht, den es hart zu bestrafen gelte. Hier hinein spiele auch die Metapher KONTROLLE IST OBEN, bei der die noch aufrecht stehenden Türme im Zustand der Kontrolle seien und das Fallen einem Kontrollverlust und somit einer Ohnmacht entspreche (vgl.

auch Wildgen 2008: 84f). Mit der konzeptuellen Metapher GESELLSCHAFT IST EIN GEBÄUDE und der kulturell geprägten Assoziation von Feuer und Rauch mit Hölle, werde dem Ereignis schließlich eine gesellschaftspolitische und religiöse Dimension beigelegt.

#### 3.7.4 Relativierung der Kritik

Auf die kritischen Bemerkungen soll abschließend eine Art Metakritik folgen mit dem Ziel, die angesprochenen Probleme gegenüber den Vorzügen der kognitiven Metaphertheorie zu relativieren.

In der Zeitschrift für Sprachwissenschaft des Jahres 1993 hat Ludwig Jäger ein Plädoyer für die Rettung der angeschlagenen Linguistik vor den Kognitionswissenschaften veröffentlicht. Die Umbettung der kränkenden Sprachwissenschaft „aus dem Krankenzimmer der Geisteswissenschaften in die Luxussuite des Kognitivismus“ (Jäger 1993: 94) sei Ausdruck eines tiefsitzenden Opportunismus, sich dem jeweils aktuellen naturwissenschaftlichen Paradigma widerstandslos anzuschließen, wodurch sich „die Wissenschaftsgeschichte in einen noch immer anwachsenden Friedhof archaisierter Erkenntnisgegenstände verwandelt“ (ebd.: 82). Jäger wirft dem kognitiven Paradigma vor, es dränge die intentional-kommunikative Funktion der Sprache und damit letztlich die Sprache selbst an den Rand. Abseits aller Anfeindungen trifft Jägers Kritik doch einen wichtigen Punkt, nämlich die Frage, wozu der Mensch einer Sprache bedarf, wenn sich sein konzeptuelles System anfangs aus Erfahrungszusammenhängen und später mittels konzeptueller Metaphern herausbildet, ohne an irgendeinem Punkt auf Sprache angewiesen zu sein. Welche Funktion hat dann Sprache noch, außer für den Forschenden das berüchtigte „Fenster zum Geist“ zu öffnen? Statt lediglich als Medium der Abbildung konzeptueller Strukturen gesehen zu werden, wäre es wünschenswert, die Sprache würde auch als ein Ort der Genese eben dieser Strukturen Beachtung finden. Insofern sollte

jeder Beschwörung eines Alleinvertretungsanspruch dieser Disziplin, sie betreibe die einzig zeitgenössische Linguistik, vehement widersprochen und ein nüchterner Umgang mit den neugewonnenen Methoden gepflegt werden. Weder ist die kognitive Metaphertheorie der heilige Gral noch die letztgültige Antwort.

Dieser mit Polemik nicht geizende Artikel hat Manfred Bierwisch (1993) und Günther Grewendorf (1993) veranlasst, nicht minder reißerisch Jäger vorzuhalten, er verkenne die Realität der gegenwärtigen Sprachwissenschaft, in der sich kognitive Methoden längst bewährt haben, und versuche, einen Grundlagenstreit ohne Relevanz für die Praxis zu forcieren. Von den eskalierenden Provokationen abgesehen ist beiden darin zuzustimmen, dass sowohl der kognitive Zugriff auf das Phänomen Sprache als auch die kognitive Metaphertheorie im Besonderen die Sprachwissenschaft bereichern.

Wenn zuweilen die Sprachvergessenheit der kognitiven Metaphertheorie beklagt wird – wie auch wir hier es getan haben –, so steckt dahinter natürlich auch ein gewisser Selbsterhaltungstrieb der Sprachwissenschaft, die sich in ihrer Deutungshoheit des ihr ureigenen Gegenstandes bedroht sieht. Sprache als etwas Autonomes anzusehen, hat seinen Reiz, darf aber nicht dazu führen, alle Ansätze, die sie in ein größeres Ganzes einordnen wollen, von vornherein abzulehnen. Beispielhaft für diese Richtung ist etwa Weinrichs Bestimmung des Metapherbegriffs:

Eine Metapher, und das im Grunde **die einzig mögliche Metapherdefinition**, ist ein Wort in einem Kontext, durch den es so determiniert wird, daß es etwas anderes meint, als es bedeutet. (Weinrich 1976: 311 – Hervorhebung durch den Autor)

Die kognitive Metaphertheorie ist der lebendige Gegenbeweis, dass sich eine Metapherdefinition nicht zwangsläufig auf die Differenz zwischen Sagen und Meinen und dem Wort als Grundeinheit stützen muss.

### 3.8 Metapher und Analogie

Nachdem Aristoteles die Metapher gemäß der Analogie als weitaus wichtigste Form wertgeschätzt hatte, wurde es zwar ruhiger um Analogieprozesse am Grund der Metapher, dennoch kann auch die kognitive Metaphertheorie trotz Lakoffs Verschleierungsversuchen durch Schema-Theorie und Invarianz-These die Nähe konzeptueller Metaphern zu Analogien nicht gänzlich verbergen. Insgesamt erscheint das Verhältnis von Metapher und Analogie jedoch gelinde gesagt „unübersichtlich“. Es lassen sich aber zumindest grob drei Grundpositionen unterscheiden, die sich weiter auffächern ließen, wenn man den Terminus *Vergleich* noch hinzunähme:

- Metapher und Analogie sind völlig unterschiedliche Phänomene.
- Metaphern sind implizite, verkürzte Analogien.
- Analogien sind erweiterte, fortgesetzte Metaphern.

Zur weiteren Klärung nähern wir uns dem Verhältnis von Metapher und Analogie über die Bedeutung und Etymologie des Wortes *Analogie*.

Das deutsche Substantiv *Analogie* wurde aus dem Lateinischen (*analogia*) und dort wiederum aus dem Griechischem (*analogía*) übernommen und bedeutet ‚Entsprechung, Ähnlichkeit‘ oder ‚Gleichheit von Verhältnissen‘ (vgl. DUW: 137). Der dritte Bedeutungsaspekt der relationalen Ähnlichkeit bzw. Verhältnisgleichheit, die es erlaubt, von Bekanntem auf Unbekanntes zu schließen, macht bei aller Varianz der Begriffsverwendung in verschiedenen Wissenschaftsbereichen den gemeinsamen Bedeutungskern aus (vgl. Hoenen 1992: Sp. 498; Gentner 1999). Schon hieran wird klar, dass nicht zu jeder Metapher eine Analogie gehören muss: Wer *Die Sonne ist eine Orange* äußert, um auf die Ähnlichkeit hinsichtlich Farbe und Form von Organen und Sonne aufmerksam zu machen, bezieht zwei einstellige Prädikate – also die Eigenschaften *ist gelb* und *ist rund* – auf beide Objekte

und damit im strikten Sinne keine Relationen, die mindestens zweistellig sind.<sup>54</sup> Dass diese Metapher allgemein wahrscheinlich eher wenig Zuspruch findet, ist kein Zufall, denn solche lediglich auf dem Vergleich von Attributen basierenden Metaphern werden von Erwachsenen im Allgemeinen als weniger gelungen beurteilt und stattdessen werden relationale, auf „echten“ Analogien basierende Metaphern bevorzugt (vgl. Gentner/Bowdle 2008: 110). Gestützt wird diese Einschätzung durch die Modell-These, nach der systematische sprachliche Metaphern Realisierungen kohärenter kognitiver Modelle sind, in denen die einzelnen Bestandteile einer Domäne relational miteinander verknüpft sind. Dagegen motivieren sprachliche Metaphern wie die Bezeichnung von Windkraftanlagen als *Windspargel* wegen ähnlicher Form und Farbe keine systematischen Bereichsverknüpfungen, sondern bleiben isoliert. Allerdings ist die Unterscheidung nicht so trennscharf, wie es den Eindruck hat. Die berühmte metaphorische Äußerung *Achilles ist ein Löwe* kann attributiv als Anwendung des einstelligen Prädikats *ist mutig* auf beide Gegenstände oder als Verhältnisvergleich, dass sich Achilles zum Menschen wie der Löwe zum Tier oder Achilles zum Feind wie der Löwe zur Beute verhält, verstanden werden. Im ersten Fall liegt eine attributive und im zweiten eine relationale Sichtweise vor. Im Übrigen kann jedes mehrstellige Prädikat durch das Fixieren von Variablen auf ein einstelliges Prädikat reduziert werden. Für das Vorliegen einer relationalen Metapher scheint demnach entscheidend zu sein, ob sich einstellige Prädikate zu mehrstelligen erweitern lassen, wie es bei der Achilles-Metapher der Fall ist, oder ob reine, nicht sinnvoll erweiterbare Attribute vorliegen, wie in den Fällen des Vergleichs von Sonne und Orange und von Windkraftan-

---

<sup>54</sup> Coenen bildet hier eine „Ausnahme“: „Das Verhältnis der Analogie besteht zwischen zwei beschriebenen Gegenständen genau dann, wenn für diese Gegenstände ein gemeinsamer Beschreibungsinhalt gilt“ (Coenen 2002: 31). Da er auch einstellige Prädikate als Beschreibungen zulässt, gründet sich jede Metapher bei ihm auf eine Analogie.

lagen und Spargel.<sup>55</sup> Für das Verhältnis von Metapher und Analogie kann man daher vorerst zu folgendem Schluss kommen:

Thus, all analogies are metaphors but not all metaphors are extended into analogies. (Aubusson/Harrison/Ritchie 2006: 3)

Korrigierend ist nur anzufügen, dass Analogien keine Metaphern „sind“, sondern dass sich aus jeder Analogie eine Metapher „gewinnen“ lässt; Analogien können Metaphern begründen, sie sind dann mit ihnen jedoch keineswegs identisch. Völlig richtig dagegen ist, dass nicht alle Metaphern zu einer Analogie erweitert werden können.

Erstmals gebraucht wurde der Terminus *Analogie* in der griechischen Mathematik bei den Pythagoreern; zunächst als Bezeichnung für alle Arten von Gleichheiten darunter etwa die Gleichheit zweier Differenzen  $a - b = b - c$  und dann spezifisch auf die Gleichheit zweier Divisionen eingeschränkt, die sogenannte *geometrische Analogie* (vgl. Coenen 2002: 10; Hoenen 1992: Sp. 499):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Das Wort *Analogie* konnte sich dann sowohl auf die Gleichung als Ganzes als auch nur auf das Verhältnis zwischen den beiden Zählern oder den beiden Nennern der Brüche beziehen, in jedem Fall aber bezeichnet es eine „horizontale“ Relation zwischen den beiden Termen als Ganzes oder Teilen davon im Gegensatz zur den „vertikalen“ Relationen der Division. Es lassen sich zwei Formen der geometrischen Analogie unterscheiden: Sind alle vier Glieder verschieden, so nennt man sie *diskret* oder *getrennt*, ansonsten heißt sie *kontinuierlich* und ist etwa von der Form  $a : b = b : c$ . Jede

---

<sup>55</sup> Die Unterscheidung von attributiven und relationalen Metaphern nach der Stelligkeit von Prädikaten ist nur eine Vereinfachung, die zu unrecht suggeriert, relationale Metaphern wären in gewisser Weise die besseren Metaphern, weil sie sich zu Analogien fortsetzen lassen. Das mag im Bereich der Wissenschaft noch eine gewisse Berechtigung haben, aber besonders in der Literatur kommen Metaphern vor, denen die hier diskutierte einfache Form der Analogie niemals gerecht werden kann, etwa bei interaktiven Sphärenmischungen oder wenn mehrere Herkunftsbereiche simultan aktiviert werden (vgl. Gentner/Jeziorski 1993: 452; Kohl 2007a: 76).



geometrische Analogie lässt sich fortsetzen: Bei der kontinuierlichen Form macht man das hintere Glied des zweiten Quotienten zum vorderen Glied eines neuen Verhältnisses ( $a : b = b : c = c : d$ ) und bei der diskreten Variante sucht man ein neues Zahlenpaar ( $a : b = c : d = e : f$ ) (vgl. Hoenen 1992: Sp. 501). Mit der Unterscheidung horizontaler und vertikaler Relationen und der Fortsetzbarkeit sind interessante Eigenschaften gefunden, die auch konzeptuelle Metaphern aufzuweisen scheinen, wenn man etwa das Übertragen von Inferenzmustern als Erweiterung einer Analogie um zusätzliche Verhältnisse interpretiert. Für den Zweck dieser Arbeit soll daher die mathematische Verhältnisgleichung als Modell der Analogie genügen, anhand derer einige weitere wesentliche Merkmale expliziert werden können. Zwar warnt Eggs (2001: Sp. 1104) eindringlich davor, die einer Metapher zugrunde liegende Analogie als mathematische Proportion aufzufassen, jedoch gibt doch schon ihre Form, wenn sie als vierstellige Relation  $\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}$  geschrieben wird, den Anlass, genau dies zu tun. Dieser Warnung soll gemeinsam mit Hesse (1970: 64ff) unter Berufung auf die Etymologie genauer nachgegangen werden, indem sowohl die formalen Gemeinsamkeiten zwischen Proportion und Analogie als auch ihre Unterschiede herausgestellt werden. Die formalen Eigenschaften der geometrischen Analogie werden allgemein dargestellt und konkret an der Analogie  $\frac{\text{Leben}}{\text{Alter}} :: \frac{\text{Tag}}{\text{Abend}}$  der aristotelischen Metapher vom Lebensabend überprüft.

Interpretiert man die Analogie als vierstellige Relation, so ist sie wie auch die mathematische Proportionalität nach Hesse (ebd.: 65)

- reflexiv ( $\frac{A}{B} :: \frac{A}{B}$ ),
- symmetrisch ( $\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}$  folgt  $\frac{C}{D} :: \frac{A}{B}$ ),
- invertierbar ( $\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}$  folgt  $\frac{B}{A} :: \frac{D}{C}$ ),

kann in gewissem Umfang nach einer Unbekannten „aufgelöst“ werden und erlaubt die Bildung einer „logischen Summe“. Dass Verhältnisgleichungen

diese Eigenschaften erfüllen, ist unmittelbar klar, für die Analogie im Allgemeinen ist nicht alles sofort einsichtig. Zunächst fällt aber auf, dass sich die beiden Eigenschaften der Symmetrie und Reflexivität nicht, wie Hesse schreibt, auf vierstellige Relationen, sondern allenfalls auf eine zweistellige Relation  $R$  über einer Menge  $M$  dann *reflexiv* bzw. *symmetrisch*, wenn für alle  $a$  aus  $M$   $R(a, a)$  bzw. wenn für alle  $a, b$  aus  $M$  mit  $R(a, b)$  auch  $R(b, a)$  gilt. Das zeigen ebenfalls die Verhältnisgleichungen, bei denen auf ihre zwei Zeiten als Ganzes Bezug genommen wird. Zwar weist jede Seite für sich genommen zwei Leerstellen auf, für die Reflexivität und die Symmetrie ist das allerdings unerheblich. So könnten sie auch vier, neun oder nur ein Argument verlangen, die beiden Eigenschaften sind Merkmale der Seiten der Gleichung und davon gibt es in jedem Fall immer genau zwei. Wäre die Analogie  $::$  vierstellig, so müsste  $::(A, B, C, D)$  geschrieben werden, wodurch die Zugehörigkeit von  $A$  zu  $B$  und  $C$  zu  $D$  verloren ginge. Die Analogierelation setzt also nicht einfach vier Objekte  $A, B, C$  und  $D$  zueinander ins Verhältnis, sondern ist als Relation über zwei Relationen  $R(A, B)$  und  $Q(C, D)$  aufzufassen, also „als *Identität* von Relationen in *bestimmten Hinsichten*“ (Eggs 2001: Sp. 1105). So sind in der geometrischen Analogie die beiden Relationen  $R$  und  $Q$  Divisionen und im aristotelischen Analogievergleich ist das Verhältnis von Leben zu Alter dem von Tag zu Abend deswegen analog, weil das zweite Glied die Endphase des ersten Glieds bezeichnet. Die Analogie kann somit als zweistellige Relation höherer Ordnung gekennzeichnet werden, deren zwei Argumente von Relationen zu besetzen sind. Erst mit dieser Klärung lässt sich sinnvoll von den zwei Bereichen einer Analogie, die man analog zur Metapher als *Ursprungs-* und *Zielbereich* bezeichnen kann, und von den Eigenschaften der Symmetrie und Reflexivität reden.

Während die Analogie vom Lebensabend tatsächlich symmetrisch ist, wird der Analogie im Allgemeinen, wenn auch nicht ganz so oft wie der Metapher, die Symmetrie abgesprochen, teilweise mit ähnlichen Argumenten, wie sie im Rahmen der Unidirektionalitäts-These diskutiert worden sind. Gentner/Colhoun (2010: 37) nennen dazu als Beispiel die sprachlichen Äußerungen *Mein Chirurg ist wie ein Fleischer* und dessen „Umkehrung“ *Mein Fleischer ist wie ein Chirurg*, in denen die jeweils gleichen Gegenstände entlang verschiedener Relationen verglichen werden. Während in der ersten Äußerung die Grobschlächtigkeit des Chirurgen thematisiert wird, geht es in der zweiten um den Fleischer, dem besonderes Geschick bei der Fleischverarbeitung zugeschrieben wird. Nach Gentner/Colhoun argumentieren Gegner der Symmetrie, dass, wenn die Analogie symmetrisch wäre, beide Äußerungen auf den gleichen Relationen gründen müssten. Wie schon in Kapitel 3.5.6 kurz angerissen, lösen sie das Problem im Rahmen ihrer Theorie vom „structure-mapping“, indem sie auf eine erste Phase symmetrischer Angleichung die Unidirektionalität folgen lassen. Allerdings ist doch schon dieses Sprachbeispiel an sich merkwürdig: Die Interpretationen dieser Äußerungen fallen sicherlich unterschiedlich aus, nur darf bezweifelt werden, dass damit die Symmetrieannahme widerlegt ist, denn die Äußerungen selbst sind syntaktisch gar nicht symmetrisch aufgebaut, ansonsten hätte man doch *Mein Chirurg ist wie ein Fleischer* und *Ein Fleischer ist wie mein Chirurg* zu vergleichen. Verglichen werden nicht Chirurgen und Fleischer, sondern einmal soll ein bestimmter Chirurg Ähnlichkeit mit Fleischern haben und dann ein bestimmter Fleischer Ähnlichkeit mit Chirurgen. Des Weiteren sind diese Äußerungen keine vollständigen Analogien, da die Vergleichshinsicht nicht genannt wird. Äußert man dagegen *Chirurgen sind wie Fleischer, beiden wird eine hohe Fingerfertigkeit abverlangt* und *Fleischer sind wie Chirurgen, beiden wird eine hohe Fingerfertigkeit abverlangt* ist die Symmetrie offenkundig. Ein ähnliches Argument gegen

die Symmetrie der Analogie versucht Murphy in Stellung zu bringen:

For example, one might say that a very talented college basketball player is similar to Michael Jordan, but one would not say that Michael Jordan is similar to the same player. (Murphy 1996: 197f)

Dieser Effekt soll auf dem Vergleich eines weniger typischen Exemplars einer Kategorie mit dem prototypischen Exemplar beruhen. Sein Beispiel kann allerdings nicht richtig überzeugen, denn angenommen, man sagt zu einem talentierten Basketballspieler *Du spielst wie der junge Michael Jordan*, kann dann nicht ebenfalls mit gleichem Recht *Der junge Michael Jordan spielte wie du* geäußert werden? Anders verhält es sich, wenn man stattdessen die Antonomasie *Du bist Michael Jordan* äußert, dann tritt wie bei der Metapher ein starker Unidirektionalitätseffekt auf, aber daraus sind keine unmittelbaren Rückschlüsse auf die Analogie möglich, insofern Analogie, Metapher und Antonomasie zwar zusammenhängen, doch nicht identisch sind. Nach einem weiteren Argument, das sich nicht auf einzelne Sprachbeispiele stützt, sondern von der kognitiven Seite dessen, was mit einer Analogie erreicht werden soll, ausgeht, kann die Analogie nicht symmetrisch sein, da sie wie die Metapher auch eine explanatorische Funktion erfüllt, bei der von Bekanntem auf Unbekanntes geschlossen wird, also etwas von einem Ursprungs- in einen Zielbereich herübergetragen wird und nicht etwa umgekehrt. Die Schwierigkeit liegt hier in den zwei Hinsichten, die man mit dem Wort *Analogie* meinen kann (vgl. Gentner 1999: 17): Erstens kann man sich auf die genannte Verhältnisgleichheit beziehen, die durch eine mathematische Proportion modelliert werden kann und daher eher statisch wirkt, also „fertige“ Gegenstände oder Sachverhalte miteinander vergleicht. Zweitens kann man sich aber auch auf Analogieschlüsse beziehen, die ausgehend von einer bestehenden Verhältnisgleichheit im ersten Sinne weitere Gemeinsamkeiten zwischen den Vergleichsbereichen konstruieren. Dieser Analogieschluss wird als dynamisches Verfahren ver-

standen und wirkt deshalb gerichtet. Damit geht es erneut um die Frage, ob Strukturen kreiert oder lediglich abgebildet werden. Als vorläufiger Ausweg bietet es sich hier an, Analogien immer als Resultate und nicht als Prozesse aufzufassen, dann kann man vielleicht die Symmetrie akzeptieren.

Reflexivität dagegen erfüllt eine Analogie offensichtlich, da jede Relation zwischen zwei Objekten immer zu sich selbst ähnlich ist. Identität ist der Pol auf der Skala der Ähnlichkeit, von dem aus sich unterschiedliche Grade überhaupt erst ausbilden können. Zu wissen, dass die Beziehungen von Tag zu Abend und von Leben zu Alter zu sich selbst ähnlich sind, heißt die Relation *ist Endphase von* als zutreffend anzusehen, ohne dass die Analogie zwischen biologischer Lebensspanne und physikalischem Tagesablauf nicht möglich wäre. Die Reflexivität ist damit eine notwendige Voraussetzung der Analogie. Allerdings ist sie als trivialste Form der Analogie für eine Metapher ungeeignet, da keine „heterogenen“ Bereiche verglichen werden (vgl. Eggs 2001: Sp. 1105; Coenen 2002: 31f). Insofern die Metapher ein Übertragungsbewusstsein voraussetzt, muss die zugrunde liegende Analogie über zwei verschiedenen Domänen operieren. Daraus folgt nun aber, dass nicht jede Analogie eine Metapher begründen kann.<sup>56</sup> Metapher und Analogie sind demnach unterschiedliche Phänomene, können aber gleichwohl – metaphorisch gesprochen – als eng verwandt angesehen werden. Aus der Unbrauchbarkeit trivialer Analogien zur Metaphernbildung folgt jedoch nicht, dass sie für rhetorische Zwecke gänzlich nutzlos wären. Man könnte sich etwa überlegen, eine Tautologie wie *Kinder sind eben Kinder* als Ausdruck einer trivialen Analogie aufzufassen. Mit dieser Äußerung wird nicht einfach die Identität von Kindern mit sich selbst ausdrückt, sondern auf einen spezifischen Aspekt des Kindseins hingewiesen. Wie bei der Metapher auch wird eine bestimmte Hinsicht unter Vernachlässigung

---

<sup>56</sup> Mit Coenen gesprochen: „Nicht jede Analogie begründet eine Metapher, aber jede Metapher setzt eine Analogie voraus. [...] Eine einseitige Analogie lässt sich nur dann in eine Metapher umwandeln, wenn sie nicht trivial ist“ (Coenen 2002: 97).

anderer hervorgehoben. Welche Facette dabei thematisiert wird, hängt am gemeinsamen Wissen der Kommunikationsteilnehmer in einer bestimmten Situation. Mit Tautologien wie auch mit trivialen Analogien wird „an eine Gemeinschaft von ‚Wissenden‘ appelliert“ (Harras 1999: 12).

Invertierbarkeit kann einer Analogie nur dann zukommen, wenn die im Verhältnis stehenden Relationen zweistellig sind. Problemlos lässt sich daher die Metapher vom Lebensabend in die invertierte Analogie  $\frac{\text{Alter}}{\text{Leben}} :: \frac{\text{Abend}}{\text{Tag}}$  umwandeln. Mit der Bemerkung bei Aristoteles (2006: Poet. 21; 69), dass die Nenner einer Verhältnisgleichung füreinander eintreten können, erhält man zusätzlich als „Korollar“ aus der Invertierbarkeit, dass auch die Zähler einander beschreiben können. Deshalb können sowohl das Leben als Tag als auch das Alter als Abend metaphorisiert werden.

Unvermittelt und auch etwas obskur ist bei Hesse (1970: 65) das, was sie *logische Summe* nennt. Mathematisch leuchtet ein, dass, wenn  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  gilt, auch  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  gültig ist, was sich auf Analogien übertragen lassen soll. Bezogen auf unsere Analogie übersetzt sich das zu

$$\frac{\text{Eigenschaften des Lebens}}{\text{Alter}} :: \frac{\text{Eigenschaften des Tages}}{\text{Abend}},$$

wobei *Eigenschaften des Lebens* und *Eigenschaften des Tages* die logischen Summen aller möglichen Aspekte bezeichnen sollen, für die sich eine Analogie herstellen lässt. Die logische Summe umfasst somit alles, in denen sich zwei Bereiche ähnlich sind.

Interessanter ist schließlich die Möglichkeit, Analogien mit Leerstellen zu vervollständigen. Angenommen man hat die Verhältnisgleichung  $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$  vor sich, wo  $a, b$  und  $d$  bekannt sind,  $x$  aber eine Unbekannte darstellt, dann erhält man  $x$  durch Multiplikation der Gleichung mit  $d$ , also  $x = \frac{a}{b} \cdot d$ . Ein vergleichbares Vorgehen hat Aristoteles (2006: Poet. 21; 69) für die Analogie  $\frac{\text{Säen}}{\text{Samen}} :: \frac{x}{\text{Licht}}$  beschrieben, wo für die Variable  $x$  mit der Bedeutung

‚Tätigkeit der Sonne‘ ein Lexem fehle und man daher metaphorisch vom *Säen des Lichtes* sprechen könne.<sup>57</sup> Die entstehenden Metaphern füllen als Katachresen lexikalische Lücken, wie etwa die auf das Gegenwartsdeutsche bezogenen Bezeichnungen *Kopf der Familie* und *Kopf der Phrase* aus folgender fortgesetzter Analogie  $\frac{\text{Kopf}}{\text{Körper}} :: \frac{x_1}{\text{Familie}} :: \frac{x_2}{\text{Phrase}}$ . Mit diesen Eigenschaften erschöpfen sich die Gemeinsamkeiten bei Hesse.

Ergänzt werden sollten Unterschiede: In der Mathematik ist es üblich und meist unproblematisch,  $((A, B), (C, D))$  mit  $(A, B, C, D)$  zu identifizieren, allerdings nur weil dort Relationen mengentheoretisch rein extensional aufgefasst werden. Bei der Analogie in gleicher Weise zu verfahren, würde dazu führen, die beiden Relationen  $Q$  und  $R$  zu verwischen. So ist dies bereits zum Teil bei der Übersetzung der Analogie in ein mathematisches Modell geschehen, in dem  $Q$  und  $R$  als Division interpretiert wurden. Hesse (1970: 67) weist darauf hin, dass die horizontalen Relationen  $Q$  und  $R$  wie auch die vertikale Relation  $::$  in der Proportion vom selben Typ seien, wohingegen bei der Analogie  $Q$  und  $R$  kausale Relationen im weitesten Sinne seien und  $::$  eine Ähnlichkeitsrelation sei.<sup>58</sup> Dass sich das Alter zum Leben verhält wie der Abend zum Tag in der Hinsicht, dass die erste Größe die Endphase der zweiten ist, darauf gibt die Strukturformel  $\frac{\text{Leben}}{\text{Alter}} :: \frac{\text{Tag}}{\text{Abend}}$  keinen Hinweis. Sie stellt nur extensional zusammen, bleibt aber in Bezug auf die beteiligten Relationen unterspezifiziert. Weiterhin lässt eine Verhältnisgleichung algebraische Umformungen zu, die im Bereich der Analogien die beteiligten Relationen durcheinander bringt, wie etwa der Übergang von  $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d}$  zu  $\frac{a}{c} :: \frac{b}{d}$ . Zwar ist  $\frac{\text{Leben}}{\text{Tag}} :: \frac{\text{Alter}}{\text{Abend}}$  nicht ungültig, die beiden Relationen können jedoch nicht mehr die selben sein, so wie die Division die selbe

<sup>57</sup> Ob eine lexikalische Lücke vorliegt, ist natürlich immer nur sprachrelativ zu beantworten – in diesem Fall für das Altgriechisch des Aristoteles. Im Deutschen existiert dafür das Verb *scheinen*.

<sup>58</sup> *Kausale Relation i. w. S.* meint: „Arguments from models involve these analogies which can be used to predict the *occurrence* of certain properties or events, and hence the relevant relations are causal, at least in the sense of implying a tendency to co-occur“ (Hesse 1970: 78),

Operation bleibt. Schließlich ist die Proportion transitiv, d. h., aus  $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d}$  und  $\frac{c}{d} :: \frac{e}{f}$  folgt stets  $\frac{a}{b} :: \frac{e}{f}$ , wohingegen dies für die Ähnlichkeitsrelation im Allgemeinen nicht gilt, wie etwa Wittgensteins Familienähnlichkeiten zeigen.

Bis hierhin wurde das Verhältnis von Analogie und sprachlicher Metapher untersucht, doch wie steht nun die Analogie zur konzeptuellen Metapher? Gemeinsam haben sie, wenn die Analogie nicht trivial ist, dass beide ansonsten disparate Bereiche miteinander verbinden und das Übertragen von Inferenzmustern ermöglichen. Insofern erfüllen beide eine explanatorische Funktion. Sie unterscheiden sich einmal durch die Übertragungsrichtung, denn eine konzeptuelle Metapher überträgt Inferenzmuster nur in eine Richtung, während Analogien zumindest im hier benutzten Modell, bidirektionale Übertragungen erlauben. Ein weiterer Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die Verbindung von Ursprungs- und Zielbereich zustande kommt: Während konzeptuelle Metaphern mit Korrespondenzregeln für Elemente starten, beginnen Analogien mit Korrespondenzregeln für Relationen zwischen den Elementen:

The corresponding objects in the base and target need not resemble each other; rather object correspondences are determined by like roles in the matching relational structures. Thus, an analogy is a way of aligning and focusing on relational commonalities independently of the objects in which those relations are embedded. (Gentner/Jeziorski 1993: 449)

Für konzeptuelle Metaphern gilt demnach „erst Objekte dann Relationen“ und für Analogien komplementär „erst Relationen dann Objekte“. Dass man die konzeptuelle Metapher zuerst von den Elementen der Bereiche und nicht von den Relationen her denkt, könnte möglicherweise ein Reflex auf die Analyse sprachlicher Metaphern der prädikativen Form *X ist Y* sein, bei der zwei Lexeme durch eine Kopula verbunden sind und eine zugrunde liegende Relation unausgesprochen bleibt. So kann man metaphorisch *das Alter ist der Lebensabend* äußern, ohne explizit die Relati-



on  $x$  ist Endphase von  $y$  mit zu nennen. Die Darstellung konzeptueller Metaphern als Matrizen von Korrespondenzen zwischen den Bestandteilen zweier Domänen illustriert daher die Übertragungen einzelner Lexeme vom Ursprungs- in den Zielbereich und zeigt die systematische Polysemie vieler Wörter auf. Das lässt natürlich zunächst die Fragen unbeantwortet, woher man denn weiß, welches Element des Ursprungsbereiches welchem Element im Zielbereich zugeordnet sein muss, welche Elemente unbenutzt bleiben und wie die „höheren“ Strukturen der Inferenzmuster übertragen werden. In der kognitiven Metaphertheorie kommt dafür einmal der Erfahrungsrealismus und andererseits die Schematheorie zusammen mit der Invarianz-These auf: Inferenzmuster werden als Teile der internen Logik von Vorstellungs-Schemata erfasst, die gegenüber metaphorischen Projektionen invariant sind, also unverändert vom Ursprungs- in den Zielbereich übernommen werden. Analogien dagegen sind von vornherein auf das Übertragen von Schlüssen ausgelegt, denn wenn Inferenzmuster vereinfachend als Äußerungsmuster der Form *Wenn X, dann Y* dargestellt werden, handelt es nach Hesse um nichts anderes als kausale Relationen i. w. S. zwischen  $X$  und  $Y$ . Dies legt folgende Konsequenz nahe:

The large-scale communication metaphor analyzed by Reddy (this volume), as well as other conceptual metaphors analyzed by Lakoff and Johnson (1980) and by Lakoff (this volume), are examples of systematic relational metaphors, that is, metaphors that could also qualify as analogies. (ebd.: 452)

Wir möchten über diese Einzelfälle hinaus behaupten, dass die meisten konzeptuellen Metaphern als Analogien betrachtet werden können, da beide systematisch zwei Bereiche aufeinander beziehen und sich durch Erweiterung dieser Verbindung weitere Schlüsse gewinnen lassen. Letztendlich führt die zweitausendjährige Reise damit wieder zu Aristoteles zurück.

Abschließend soll am Konvergenzbegriff der Analysis angedeutet werden, wie der Analogie- den Metaphernbegriff sinnvoll ergänzen kann. Dazu betrachte man diese Folge von reellen Zahlen:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \dots$$

Spätestens, wenn man die Folgenglieder auf der Zahlengeraden visualisiert, sieht man, wie sie sich auf die Zahl Null „zubewegen“, zu ihr „hinstreben“, sich ihr „annähern“. Das Verhalten der Folgenglieder wird als eine räumliche Bewegung auf ein Ziel hin metaphorisiert, wobei einem Schritt im Vergleichsbereich der Übergang von einem Glied zu seinem Nachfolger im thematischen Bereich entspricht. Die Metapher eröffnet eine räumlich-dynamische Perspektive auf den Zielbereich, in dem Folgen sonst eine völlig statische Aneinanderreihung von reellen Zahlen sind (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 187). Diese durch einen metaphorischen Prozess erzeugte Vorstellung über die Konvergenz von Folgen als Bewegung der Folgenglieder auf einen Grenzwert zu, kann durch einen Ausdruck in der Sprache der Prädikatenlogik formalisiert werden. Etabliert hat es sich, eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergent gegen ein  $x \in \mathbb{R}$  zu nennen, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - x| < \varepsilon.$$

Lakoff/Núñez (ebd.: 187) halten nicht viel von dieser Definition, weil sie ihrer Meinung nach zwar den Fall des Sich-Annäherns an eine Grenze einfange, aber auch viele irrelevante Fälle durch den Allquantor über Epsilon beinhalte. Dagegen ist einzuwenden, dass der erste Allquantor die Idee des sich verringernden Abstands zum Grenzwert aufnimmt, der Existenzquantor und der zweite Allquantor die Idee, dass man sich nach einer bestimmten Anzahl an Schritten nicht mehr weiter als  $\varepsilon$  vom Grenzwert entfernt, aufnehmen und der Betrag den Abstand wiedergibt. Der Ausdruck der

Prädikatenlogik ist der intuitiven Konvergenzvorstellung analog. Wie belastbar diese Analogie ist, stellt sich schnell heraus: So lässt sich zeigen, dass der Grenzwert im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmt ist, wie man es intuitiv auch erwartet. Ebenso kann der Antonyme Begriff der Divergenz durch formale Negation und Anwendung der Verneinungsregeln für Quantoren gewonnen werden: So ist eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann divergent, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 |x_n - x| \geq \varepsilon.$$

In den thematischen Bereich übersetzt heißt dies, dass es für jedes mögliche  $x$  immer wieder Folgenglieder gibt, die von diesem  $x$  weiter als ein bestimmtes  $\varepsilon$  entfernt sind. Aus der Analogie folgt aber keineswegs, dass sich die formale Definition ganz natürlich aufdrängt, dass sie leicht zu verstehen wäre oder dass sie vollständig mit dem intuitiven Konvergenzbegriff übereinstimmt.

### 3.9 Metapher, Analogie und Modell

Mit der Analogie im Gepäck ist es jetzt nur noch ein kurzer Weg bis zum Modellbegriff, zumal dieser mit der Modell-These bereits durch die Hintertür in die kognitive Metaphertheorie eingezogen ist.

Eine einfache, hier aber ausreichende Unterscheidung von Modellen ist die in reale und fiktive Modelle (vgl. Drewer 2003: 47). Reale Modelle sind materielle Nachbildungen eines ebenfalls materiellen Originals. Im Gegensatz zu einer perfekten Kopie unterscheiden sie sich vom Original jedoch in wesentlichen Eigenschaften wie Größe, Farbe oder Materialbeschaffenheit. Welche Attribute sie mit dem Original gemeinsam haben, hängt davon ab, was der Modellnutzer mit ihnen erreichen möchte. Reale Modelle können zu Anschauungszwecken, weil das Original aus bestimmten Gründen

nicht verfügbar ist, oder im wissenschaftlichen Prozess als Untersuchungsobjekt verwendet werden. Fiktive Modelle unterscheiden sich davon zunächst im materiellen Aspekt, denn sie werden nur gedanklich vorgestellt und sprachlich oder mittels anderer Zeichen ausgedrückt. Des Weiteren verbinden fiktive Modelle zwei Bereiche miteinander: Einen unbekanntem Zielbereich, der durch einen bekannten, gut erforschten Herkunftsbereich erklärt werden soll, um Prozesse im Zielbereich zu erklären oder Vorhersagen zu machen, indem Aussagen, die im Herkunftsbereich gelten, auf den Zielbereich angewendet werden. Ein fiktives Modell entwickelt eine Theorie über das thematisierte Original. Dabei werden bestimmte Aspekte des Zielbereiches betont, andere dagegen vernachlässigt, sodass fiktive Modelle ebenso wie reale Modelle die Komplexität reduzieren und damit notwendig partiell sind.

Hesse (1970: 8) klassifiziert die Beziehungen zwischen Modell und Original in drei Gruppen: Prädikate, die sowohl im Modell als auch im Original gelten, nennt sie *positive Analogien*, Prädikate, die nur im Modell zutreffen, *negative Analogien* und Prädikate, von denen noch nicht klar ist, ob sie zu den positiven oder negativen Analogien gehören, heißen *neutrale Analogien*. Als grundlegende Beziehung eines Modells zu seinem Original sieht Hesse damit die Analogie an. Eigenschaften des dritten Typs sind anscheinend der Gegenstand von Analogieschlüssen, bei denen auf Grund der positiven Analogien zwischen einem Modell und seinem Original versucht wird, auf die Gültigkeit einer neutralen Analogie zu schließen. Im Gegensatz zu einem logischen Schluss, der entweder wahr oder falsch ist, behält ein solcher Analogieschluss immer den Status einer Hypothese, die sich bewähren kann oder auch nicht (vgl. Steudel-Günther 1995: 96). Insofern sind „positive Analogien“ nicht als objektiv gültige Analogien zu verstehen, sondern als über eine längere Zeit erprobt und für gut befunden. Modelle sind mächtige Werkzeuge im Forschungs- und Lehrbetrieb, wegen ihrer Natur, immer

nur einen Teil näher zu beleuchten, aber auch umkämpft. Wessen Modell allgemein akzeptiert ist, hat die Deutungshoheit inne.

Zwar sind, wie die realen Modelle zeigen, nicht alle Modelle sofort automatisch auch konzeptuelle Metaphern, doch scheinen immerhin fiktive Modelle, konzeptuelle Metaphern und Analogien eng verwandt zu sein. Stellen wir uns etwa Elektrizität als einen Wasserstrom vor und übertragen bekannte Eigenschaften wie Fließgeschwindigkeit oder transportierte Wassermenge auf den elektrischen Strom, dann verweisen die sprachlichen Metaphern *Strom*, *fließen* auf eine konzeptuelle Metapher und der Wissenstransfer vom Bereich des fließendes Wassers in den Bereich des elektrischen Stroms auf ein fiktives Modell, was die den schon verwendeten Terminus *Metaphernmodell* nachträglich rechtfertigt (vgl. ebd.: 243ff). Verschwindet ein Modell wieder, weil es verblasst oder durch ein anderes ersetzt wird, bleiben unter Umständen sprachliche Metaphern als Katachresen zurück. Drewer fasst den Zusammenhalt von Metapher und Modell folgendermaßen zusammen:

Jedes Modell hat metaphorischen Charakter und erfordert Lexemmetaphern zu seiner Versprachlichung. Das bedeutet von der anderen Seite aus betrachtet: Jede Lexemmetapher existiert nur im Rahmen eines übergeordneten Modells. Dieses übergeordnete Modell kann entweder ein *bewusst* entwickeltes, *systematisch* ausgearbeitetes, *explizites Analogiemodell* sein oder aber ein *unbewusst* und *unsystematisch* verwendetes, *implizites Metaphernmodell*. (Drewer 2003: 49)

Der Unterschied zwischen Metapher und Analogie ist bei ihr also ein Unterschied in der Bewusstheit, der mit Intentionalität einhergeht. Beide Phänomene finden dann im Modellbegriff zusammen. Außerdem wird noch einmal die Stellung der sprachlichen Metapher als Realisierungsphänomen eines nichtsprachlichen Typus hervorgehoben. Nicht völlig zutreffend ist allerdings, dass „jede“ Lexemmetapher immer auf einem Modell basieren müsse, wie wir im vorhergehenden Abschnitt am Lexem *Windspargel* gese-

hen haben und wie ebenfalls der alte Bekannte *Tischbein* zeigt. Stattdessen sollte man besser von einem mehrstufigen Prozess ausgehen, bei dem eine sprachliche Metapher zu einer Analogie erweitert werden und schließlich in ein Modell münden kann. So formuliert es auch Debatin: „Das Modell ist eine auf Dauer gestellte, systematisierte Metapher“ (Debatin 1995: 141). Wenn die kognitive Metaphertheorie die sprachliche Metapher zuweilen zu vergessen scheint, so leidet umgekehrt in der Linguistik zuweilen ihr Modellcharakter, wenn die Metapher verstärkt als Wortgebrauchsverfahren gesehen wird (vgl. Steudel-Günther 1995: 106f).

Weiterhin ist in der Kognitionspsychologie der Begriff des mentalen Modells geläufig, der, wie folgt, definiert werden kann:

A mental model is a representation of some domain or situation that supports understanding, reasoning, and prediction. (Gentner 2002: 9683)

Mentale Modelle sind also kognitive Abbildungen eines Bereichs oder einer Situation, mit deren Hilfe Menschen Gegenstände, Sachverhalte, Vorgänge einordnen, über sie nachdenken und Vorhersagen treffen können. Die Textlinguistik hat diesen Begriff zur Beschreibung des mentalen Aufbaus kohärenter Repräsentationen eines Textinhalts durch einen Rezipienten übernommen. Im Gegensatz zum oben diskutierten auf Wissenschaft beschränkten Modellbegriff betont man mit dem Begriff des mentalen Modells seine besondere Bedeutung für den Alltag. So werden mit mentalen Modellen zukünftige Situationen und Abläufe mental simuliert werden, etwa wenn man darüber nachdenkt, wie ein anstehender Kinobesuch verlaufen könnte, in welcher Reihenfolge man welche Handlungen durchführen muss und was man dazu benötigt (vgl. ebd.: 9684). Wie Blacks assoziierte Gemeinplätze können auch mentale Modelle objektiv falsch sein. Solange ihre Vorhersagen einigermaßen zutreffen und sich alle daran halten, besteht aber keine Notwendigkeit sie zu verwerfen. So war das geozentrische Modell zur Erklärung der Fixsternbewegung im Alltag zumeist völlig ausreichend und ist es

im Prinzip auch heute noch, obwohl es nachweislich falsch ist. In gleicher Weise entspricht das Wissen über Wölfe nicht dem wissenschaftlichen Standard in der Zoologie und trotzdem ist es weit verbreitet. Mentale Modelle vereinigen also Blacks Systeme assoziierter Gemeinplätze mit Strukturen, die unter den Begriffen *Schema*, *Skript*, *Frame* oder *folk theory* firmieren. Insbesondere sind dann konzeptuelle Metaphern eine Art von mentalem Modell.

In Bezug auf die Mathematik ist zu beachten, dass in der Modelltheorie, einem Teilgebiet der mathematischen Logik, ein anderer Modellbegriff in Gebrauch ist, der mit dem oben diskutierten nicht verwechselt werden sollte. Dort versteht man unter einem Modell, eine Struktur, in der gewisse Axiome eines formalen System erfüllt sind und in der eine formale Aussage und ihre Negation nicht zugleich wahr sein können. Beispielsweise sind die üblichen natürlichen Zahlen ein Modell der Peano-Arithmetik. Wenn in dieser Arbeit von einem „mathematischen Modell“ die Rede ist, dann ist damit ausdrücklich nicht dieser Modellbegriff aus der mathematischen Logik gemeint. Wenn also später das mengentheoretische Modell der natürlichen Zahlen besprochen wird, so ist dies so zu verstehen, dass sich in der Mengenlehre eine oder mehrere Strukturen erzeugen lassen, die in wesentlichen Eigenschaften mit den natürlichen Zahlen übereinstimmen und deshalb als ihr Modell verwendet werden.

## 3.10 Metaphern in der Mathematik

Die Rolle von Metaphern beim abstrakten Denken im Allgemeinen und in der Mathematik im Speziellen wird unter zwei sehr gegensätzlichen Perspektiven wahrgenommen.

Unter der Annahme der auf konzeptuelle Metaphern bezogenen Notwendigkeits-These, die ihrerseits die Ubiquitäts-These impliziert, reduziert

sich abstraktes Denken einerseits auf die Auswahl geeigneter Metaphern und andererseits wird unvorstellbar, dass abstraktes Denken ohne Metaphern überhaupt möglich sein könnte:

Es steht uns frei, aus etablierten Metaphern auszuwählen, sie abzuwandeln oder neue zu wählen; die Möglichkeit, abstrakte Dinge und Prozesse gänzlich ohne Metaphern zu denken und zu kommunizieren, dürfte allerdings kaum gegeben sein (Kohl 2007a: 25)

*Abstraktes Denken* ist in diesem Fall gradezu gleichbedeutend mit *metaphorisches Denken*. Der Begriff der konzeptuellen Metapher wird deshalb zum unverzichtbaren Werkzeug, um die Genese mathematischer Gegenstände zu erklären:

Rather than being just tools for a better understanding and memorizing, conceptual metaphors are often the primary source of mathematical concepts. (Sfard 1997: 349)

Die wohl umfassendsten Untersuchungen zu konzeptuellen Metaphern in der Mathematik haben George Lakoff und Rafael E. Núñez mit den beiden Aufsätzen Lakoff/Núñez (1997), Lakoff/Núñez (1998) und dem Buch Lakoff/Núñez (2000) vorgelegt. Wie die Titel andeuten, stehen die ersten beiden Arbeiten noch ganz im Zeichen einer Erprobung kognitionswissenschaftlicher Methoden und der Frage nach dem kognitiven Fundament mathematischer Tätigkeit, wohingegen die Monographie bereits im Titel „Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being“ auf die Theorie des verkörperten Geists als Antwort auf diese Frage verweist. Die Mathematik, wie wir sie kennen, ist demnach in ihrem Kern ein Produkt physischer Erfahrungen und deren metaphorischer Verarbeitung. Nichtsdestotrotz macht sich auch in der kognitiv-affinen Literatur dann und wann ein Unbehagen an der totalen Abhängigkeit des abstrakten Denkens von Metaphern bemerkbar, so etwa hier bei Drewer:



Obwohl die Metapher von großem Wert für die Vermittlung von (Fach-) Wissen ist, muss relativierend angemerkt werden, dass sie nicht in allen Fällen als alleinige Erklärung ausreicht. Es gibt Sachverhalte, deren hoher Abstraktheitsgrad es unmöglich macht, sie ausschließlich metaphorisch zu beschreiben. (Drewer 2003: 91)

An dieser Aussage ist bemerkenswert, dass sie die Grundüberzeugung der kognitiven Metapherntheorie – je abstrakter eine Domäne sei, umso unerlässlicher werde ihre Bindung an konkrete Domänen durch Metaphern – ein Stück weit in Frage stellt, indem sie indirekt behauptet, es müsse auch andere Verfahren geben, hoch abstrakte Bereiche zu verstehen. Wie die Alternativen zu metaphorischen Beschreibungen aussehen könnten, bleibt jedoch ungesagt. Für die Mathematik ist zu vermuten, dass die Notation einspringt, um das Operieren mit abstrakten Gegenständen jenseits von Metaphern zu ermöglichen, denn, wie wir gesehen haben, ist es ihre operative Kraft, die es erlaubt, kognitive Prozesse zu externalisieren. Offenbar ist die Konzeption des Verhältnisses von formaler und natürlicher Sprache entscheidend für die Frage, welche Reichweite man der Metapher in der Mathematik zugesteht.

Am gegenüberliegenden Pol hält sich noch immer die Vorstellung eines reinen nur von der Logik beeinflussten mathematischen Denkens. Merkwürdig ist, dass Kohl diese Position vertritt, obwohl sie zuvor auf der unvermeidlichen Metaphorizität des abstrakten Denkens bestanden hatte:

In der Mathematik manifestiert sich das nicht-metaphorische logische Denken gewissermaßen in ›reinsten‹ Form. [...] selbst ›Schönheit‹ ist in der Mathematik nicht bildlich visuell, sondern logisch. (Kohl 2007a: 146)

Die Notation, in der dieses „reine“ Denken prozessiert wird, wird dann konsequent zur metaphernfreien Zone erklärt:

Wiewohl die Notation selber keine Metaphern involviert, so wird doch ihre Funktion und ihr Einsatz mittels Metaphern konzeptualisiert und dem Leser vermittelt. (ebd.: 147)

Das ist offensichtlich ein Widerspruch. Wenn man dafür ist, dass alles abstrakte Denken notwendig metaphorisch verfahren muss, dann kann nicht ausgerechnet die Mathematik als Beispiel für nicht-metaphorisches Denken angeführt werden. Kohl denkt möglicherweise an Formalisierungen durch die Prädikatenlogik, reflektiert aber nicht systematisch auf die unterschiedlichen Mischungsverhältnisse von natürlicher und formaler Sprache, in denen mathematische Fragestellungen formuliert werden können. Damit beide Positionen vereinbar bleiben, kann die mathematische Notation als nachträgliche Symbolisierung begriffen werden, der ein auf natürlicher Sprache basierender Erkenntnisprozess vorausgeht:

Damit erweist sich die natürlichsprachliche Komponente der Wissenschaftssprache als notwendige Grundlage kreativen, wissenschaftlichen Denkens, das nur in der Repräsentation seiner Resultate – und nicht als kognitiver Prozeß selbst – ausschließlich auf formalsprachliche Darstellung rekurrieren kann. (Bungarten 1981: 42)

Hier kann die Metapher dann wieder zur Geltung kommen und muss nicht hinter eine entrhetorisierte Zone formaler Sprachen zurücktreten.

Wir erachten beide Positionen in ihren extremen Ausprägungen als unzutreffend. Zuerst soll die zweite These, dass die Mathematik eine rhetorikfreie Zone reiner Logik und insbesondere die Notation frei von Metaphern sei, entkräftet werden. Dazu werden nachfolgend drei Perspektiven auf Metaphern in der Mathematik vorgestellt, die sich in ihrer disziplinären Herkunft deutlich unterscheiden, aber darin überstimmen, dass Metaphern auch in der Mathematik ein ernstzunehmendes Phänomen sind. Die erste These, wonach pointiert formuliert, alles in der Mathematik Metapher sei, wird im zweiten Teil der Arbeit am Beispiel der Mengenlehre angegangen.

### 3.10.1 Die Arbeiten von George Lakoff und Rafael E. Núñez

Der Unterschied zwischen Register und Notation, auf den wir so viel Nachdruck legen, spielt in der kognitiven Metaphertheorie keine Rolle, da die Bedeutung natürlicher wie künstlicher Zeichen mit mentalen Konzepten gleichgesetzt wird, auf denen Metaphern operieren. Lakoff/Núñez übernehmen dieses Semantikmodell für ihre Analyse mathematischer Ideen:

In embodied mathematics, mathematical symbols, like 27,  $\pi$ , or  $e^{\pi i}$ , are meaningful by virtue of the mathematical concepts that they attach to. [...] To understand a mathematical symbol is to associate it with a concept—something meaningful in human cognition that is ultimately grounded in experience and created via neural mechanisms. (Lakoff/Núñez 2000: 49)

Eine Konsequenz dieser Auffassung ist, dass die Wahl der Symbole unabhängig ist von den Konzepten, die sie repräsentieren. So müsse z. B. strikt zwischen Zahlen, d. h. Konzepten, und Zahlzeichen unterschieden werden, denn die Zahlen werden metaphorisch aus angeborenen numerischen Fähigkeiten und erfahrungsnahen Bereichen konstruiert und gehen damit den Zahlzeichen sowohl phylo- als auch ontogenetisch voraus. Ob Zahlen dann mit arabischen, römischen oder Gebärdenzeichen dargestellt werden, wirke sich nur auf die Art und Weise aus, wie Rechenoperationen ausgeführt werden, aber nicht auf die Zahlkonzepte selbst (vgl. ebd.: 83ff).<sup>59</sup> Weiterhin wendet sich diese Position gegen zwei der prominentesten metamathematischen Positionen – den Platonismus und den Formalismus. Gegen den Platonismus wird eingewendet, dass die Mathematik, die von den Menschen betrieben wird, nicht deshalb so sei, wie sie ist, weil das Universum selbst alle mathematischen Gegenstände enthalte, diese also den menschlichen Verstand transzendieren, sondern allein aufgrund des spezifisch menschli-

---

<sup>59</sup> Als Gegenstimme, die sich auf psycholinguistische Experimente stützt, siehe z. B. Iversen (2004) oder Iversen (2009), bei der zu lesen ist: „Der Einfluss des Zahlensymbolsystems auf die Zahlenverarbeitung muss also doch höher eingeschätzt werden als bisher angenommen wurde“ (ebd.: 292).

chen Körpers und seiner Einbettung in die ihn umgebende Umwelt, die ganz bestimmte Grunderfahrungen determiniere. Den Formalismus dagegen könne man nicht einmal als vernünftige Position ernst nehmen, denn er sei „nonsense from the perspective of cognitive science“ (Lakoff/Núñez 2000: 373). Nun darf nicht vergessen werden, dass sowohl Platonismus als auch Formalismus idealisierte Positionen markieren, deren Reinform sich kaum eine Mathematikerin oder ein Mathematiker freiwillig zurechnen lassen wird. Auch wird die Bedeutung alltäglicher Erfahrungen bei der Herausbildung mathematischer Theorien wohl kaum jemand ernsthaft in Zweifel ziehen wollen, denn dazu muss man sich der viel stärkeren These, wonach alle mathematischen Gegenstände aus konkreten Bereichen generiert werden, nicht anschließen. Wenn also Lakoff/Núñez gegen ihrer Meinung nach verkrustete Denkstrukturen in der Philosophie der Mathematik zu Felde ziehen und ihr Unfähigkeit bescheinigen, die Ontologie mathematischer Ideen zu untersuchen, so ist dies ähnlich einschätzen, wie ihre Polemik gegen die vermeintlich so fehlgeleiteten früheren Metaphertheorien. Dies wird nochmals deutlich in der provozierenden Behauptung, die Fundamente der Mathematik freizulegen, d. h. die Beantwortung der Frage, warum wir genau die mathematischen Kategorien benutzen, die wir benutzten, könne sowieso nicht von innerhalb der Mathematik gelingen, sondern nur von außerhalb und dazu seien ausschließlich die Kognitionswissenschaften imstande.

Das Prinzip des verkörperten Geistes als Antwort auf die Frage, was Mathematik ist und wie sie entsteht, findet sich schon vor den genannten drei Arbeiten:

Mathematics instead is the study of the structures that we use to understand and reason about our experience—structures that are inherent in our preconceptual bodily experience and that we make abstract via metaphor.  
(Lakoff 1987: 354/355)

Die konzeptuelle Metapher ist das Instrument, um direkte Erfahrungen in abstrakte mathematische Konzepte umzusetzen. Als kognitive Basis der körperlichen Erfahrungen bieten sich wiederum die Vorstellungs-Schemata an, deren Status als anthropologische Universalien zu erklären vermag, warum Menschen genau die Mathematik betreiben, die sie eben betreiben. Zur Illustration listet Lakoff einige mathematische Begriffe zusammen mit ihren zugrunde liegenden Schemata auf:

entity — ENTITY

correspondence — LINK

continuity — PATH (OF MOTION)

[...]

factor (or decomposition) — PART-WHOLE, SEPARATION

prime — PART (WITH NO OTHER PARTS)

[...]

operator — AGENT

operation — CHANGE TO ANOTHER ENTITY

[...]

(ebd.: 363)

Mit diesen wenigen Bemerkungen zur Grundidee, wie der kognitive Ansatz auf die Mathematik übertragen wird, lassen wir es bewenden, da die meisten Thesen der kognitiven Metaphertheorie auch hier ihre Gültigkeit behalten. Stattdessen sollen nun vor allem die Unterschiede zur allgemeinen kognitiven Metaphertheorie thematisiert werden. Ein Punkt betrifft die Integration der Blending-Theorie in die Analyse mathematischer Konzepte. Mit ihr kann die Unidirektionalitäts-These umgangen werden, da Blends im Gegensatz zu konzeptuellen Metaphern bidirektionale Verschmelzungsprozesse zwischen zwei Bereichen zulassen. So beschreiben Lakoff/Núñez (2000: 388ff) etwa den „Unit Circle Blend“, bei dem die Domäne eines Kreises mit Mittelpunkt und Radius mit der Domäne eines

kartesischen Koordinatensystems zu einem Blend verbunden wird, in dem der Kreismittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und der Radius die Länge eins erhält. Dieser Blend ist nicht metaphorisch, da weder ein Kreis als Koordinatensystem noch ein Koordinatensystem als Kreis gesehen wird, sondern beide Bereiche miteinander verschmolzen werden. Neben dieser Erweiterung des kognitionswissenschaftlichen Instrumentariums, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden kann, wird eine auffallende Unterscheidung dreier Typen konzeptueller Metaphern vorgenommen:

- First, there are *grounding metaphors*—metaphors that ground our understanding of mathematical ideas in terms of everyday experience. [...]
- Second, there are *redefinitional metaphors*—metaphors that impose a technical understanding replacing ordinary concepts. [...]
- Third, there are *linking metaphors*—metaphors within mathematics itself that allow us to conceptualize one mathematical domain in terms of another mathematical domain. [...]

(Lakoff/Núñez 2000: 150)

Wie Becker (2006: 39ff) übersetzen wir *grounding metaphor* mit *Fundierungsmetapher* und *linking metaphor* mit *Verbindungsmetapher*. Auf die Analyse der Mengenlehre vorgreifend gehört die Metapher MENGEN SIND BEHÄLTER zum ersten, Cantors Metapher der Gleichmächtigkeit von Mengen zum zweiten und von Neumanns Metaphorisierung der natürlichen Zahlen als spezielle Mengen zum dritten Typ. Der wesentliche Unterschied zwischen Fundierungs- und Verbindungsmetaphern besteht darin, ob der Herkunftsbereich einer konzeptuellen Metapher noch der Alltagswelt oder bereits der Mathematik angehört. Insofern ist der zweite Metapherentyp eine Unterklasse der Fundierungsmetaphern, da *ordinary Konzept* ‚alltägliches Konzept‘ bedeutet, und die Diskussion kann auf den ersten und dritten Typ eingeschränkt werden. Die Reihenfolge, in der die verschiedenen

Typen aufgelistet werden, reflektiert eine Chronologie: Am Anfang stehen Fundierungsmetaphern, mit deren Hilfe die grundlegenden mathematischen Konzepte wie ZAHL, MENGE, FUNKTION usw. aus konkreten Konzepten mit einer ausgeprägten topologischen Struktur entstehen. Für die Arithmetik rekonstruieren Lakoff/Núñez (2000: 50ff) vier Fundierungsmetaphern: ARITHMETIC IS OBJECT COLLECTION, OBJECT CONSTRUCTION, USING A MEASURING STICK und ARITHMETIC IS MOTION ALONG A PATH. Sprachlich manifestiert sich die erste Metapher etwa durch die Adjektive *groß* und *klein*, die sowohl auf (vorwissenschaftliche) Mengen als auch auf Zahlen anwendbar sind, oder durch das englische Wort *add*, das sowohl das Hinzufügen eines Objekts zu einer Menge als auch die Additions-Operation bezeichnen kann. Das deutsche Lehnwort *addieren* zeigt diese Verbindung dagegen nur in der etymologischen Rückschau auf das lateinische Wort *adere* mit der Bedeutung ‚beitun, hinzufügen‘. Jeder dieser Metaphern folgen zahlreiche Implikationen, die im Ursprungsbereich gültige Aussagen in arithmetische Regeln wie die Kommutativität und Monotonie der Addition oder in die Existenz einer inversen Operation übersetzen. Durch Erweiterungen und sogenannte „entity-creating metaphors“ können diese Fundierungsmetaphern schließlich auch für Multiplikation, Division, Brüche und die Zahl Null aufkommen. Fundierungsmetaphern sind konzeptuelle Metaphern im besten Sinne, da sie eine Erklärungsfunktion wahrnehmen, ein kognitiv dunkles Territorium über eine bekannte Domäne zu erschließen.

Vielleicht auch weil Verbindungsmetaphern davon abweichen, sind sie „in many ways the most interesting“ (ebd.: 150). Ein Beispiel ist die Metapher FUNCTIONS ARE NUMBERS, die den Herkunftsbereich der Zahlen auf den Zielbereich der Funktion abbildet und so völlig innerhalb der Mathematik verbleibt. Mit dieser Metapher werden die üblichen Zahlenoperationen auf Funktionen übertragen, sodass etwa die Summe  $(f + g)(x)$  zweier Funktionen  $f$  und  $g$  als Summe der Funktionswerte  $f(x) + g(x)$  konzeptualisiert

wird. Während das Pluszeichen in  $f(x) + g(x)$  wörtlich als die gewöhnliche Addition zu lesen ist, muss es in  $(f + g)(x)$  metaphorisch verstanden werden (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 386).<sup>60</sup> Die Erklärungsfunktion von Metaphern dieses Typs ist wesentlich schwächer als bei Fundierungsmetaphern, auch weil bei ihnen der Erfahrungsrealismus nicht mehr greift. Es gibt keine auf körperlichen Erfahrungen basierende Erklärung, warum man Funktionen als Zahlen verstehen sollte. Insofern sind Verbindungsmetaphern ein Gradmesser für Abstraktheit, denn: „The more indirect the grounding in experience, the more ‘abstract’ the mathematics is“ (ebd.: 102).

Insgesamt werfen Verbindungsmetaphern grundlegende Fragen auf: Wie steht es um die Bereichsverschiedenheit der Domänen, wenn beide zur Mathematik gehören? Wann liegen zwei Domänen weit genug auseinander, um noch von einer Metapher sprechen zu können, und wann sind sie einander so nah, dass sie als konzeptuelle Metonymie zu klassifizieren sind? Macht es einen Unterschied, ob ein Laie oder ein Experte die „Distanz“ beurteilt? Weiterhin kommt man nicht an der Frage vorbei, ob dieser Metapherntyp das Unterfangen, den Erfahrungsrealismus auf mathematische Ideen anzuwenden, nicht zumindest in seiner absoluten Form unterminiert. Schließlich bringt er die Unidirektionalitäts-These in Bedrängnis, da zahlreiche Verbindungsmetaphern bei Lakoff/Núñez in bidirektionale Blends übergehen.

Verbindungsmetaphern sind also gleich doppelt bemerkenswert: Indem sie mathematische Konzepte zu anderen mathematischen Konzepten in Beziehung setzen, sind sie ein Stück weit von der Determination des Denkens durch Körper und Umwelt befreit und spiegeln somit die Kreativität des abstrakten Denkens wider.

---

<sup>60</sup> Später werden wir ein Argument vorbringen, nach dem es günstiger wäre, hier von einer Metonymie auszugehen.



### 3.10.2 Die Sprache der Mathematik bei Solomon Marcus

Der rumänische Mathematiker Solomon Marcus beschäftigt sich in seiner Arbeit zur mathematischen Modellierung poetischer Sprache und der Anwendung dieses Modells auf die Analyse von Theaterstücken u. a. mit sprachlichen Metaphern in der Mathematik.

Zunächst teilt Marcus (1973: 95f) die in einem mathematischen Text vorkommenden Wörter in drei Klassen ein:

$A = \{\text{Wörter des Textes, die auch in der Alltagssprache in gleicher Bedeutung gebraucht werden.}\}$

$B = \{\text{Wörter des Textes, die zwar in der Alltagssprache in gleicher Form aber mit anderer Bedeutung gebraucht werden.}\}$

$C = \{\text{Wörter des Textes, die in der Allgemeinsprache nicht vorkommen.}\}$

Offensichtlich gehört jedes Wort eines mathematischen Textes, wenn man synchron zu einem bestimmten Zeitpunkt auf diesen Text blickt, genau zu einer dieser drei disjunkten Klassen. Diachron betrachtet muss die Zuordnung eines Wortes zu einer Klasse jedoch nicht konstant bleiben. So können Wörter der Klasse  $C$  in  $A$  oder  $B$  wechseln, wenn sie beispielsweise breitere Aufmerksamkeit in der Schulbildung erfahren und in den Allgemeinwortschatz eindringen. Jeder mathematische Text, wenn er nicht vollständig in einer formalen Sprache verfasst ist, enthält mit Präpositionen, Konjunktionen, Pronomen usw. Wörter der Klasse  $A$ . Beispiele für Wörter der Klasse  $C$  sind *meromorph*, *monogen*, *konfinal* und aus sprachhistorischer Perspektive *Logarithmus*, *Polynom*, *Polygon* sowie *Sinus* (vgl. ebd.: 95). Am interessantesten sind jedoch die Wörter der Klasse  $B$ , zu denen auch metaphorische Übertragungen aus der Alltagssprache zählen. Derartige aus der Alltagssprache importierte Wörter können „nach dem Grad der Näherung zwischen ihrem mathematischen und nichtmathematischen Sinnge-

halt“ (Marcus 1973: 99) wiederum in drei Unterklassen eingeordnet werden. Ist der mathematische Sinn eines Wortes dem nichtmathematischen sehr nahe, indem er diesen nur präzisiert und formaler fasst, so gehört das Wort in die erste Unterklasse  $B_1$ . Ein Beispiel, das in Kapitel 6.5 ausführlich besprochen wird, ist das Substantiv *Vereinigung*, dessen Bedeutung in der Mengentheorie sich von der Alltagsbedeutung kaum unterscheidet. Zum zweiten Typ  $B_2$  sind Wörter wie *Filter*, *dicht* oder *Zusammenhang* zu zählen, deren mathematische Bedeutung sich weiter von der nichtmathematischen entfernt hat, aber mit dieser noch über eine leicht rekonstruierbare Ähnlichkeit verbunden ist. So bezeichnet *Filter* ein Mengensystem, dessen Aufgabe darin besteht, ähnlich den Gegenständen, die sonst unter diesen Begriff fallen, aus einer Menge Teilmengen ab einer bestimmten Größe auszusortieren. Schließlich bleiben die Wörter der Klasse  $B_3$  übrig, deren mathematische Bedeutung sich sehr weit von der nichtmathematischen Bedeutung entfernt hat, möglicherweise so weit, dass sich ihre Bedeutung nicht mehr durch Ähnlichkeit oder Analogie ableiten lässt. Wieder aus der Mengenlehre nennt Marcus (ebd.: 100) als Beispiele *perfekt*, *offen*, *abgeschlossen*. *Perfekt* zählt er deshalb zu  $B_3$ , weil er zwischen der nichtmathematischen Bedeutung ‚vollkommen, ohne Mängel, fehlerlos‘ und dem mengentheoretischen Begriff für Mengen, die mit ihrer Ableitung, d. h. der Menge ihrer Häufungspunkte, identisch sind, keine auffallende Ähnlichkeit sieht. Dem muss man nicht zustimmen, da eine Menge  $M$ , die identisch mit ihrer Ableitung ist, in dem Sinne *perfekt* genannt werden kann, als dass sie keine „überflüssigen“ isolierten Punkte mehr enthält und ihr keine „wesentlichen“ Häufungspunkte fehlen. Nach dieser Überlegung wäre das Wort eher in die Klasse  $B_2$  einzuordnen. Dies zeigt, wie Marcus (ebd.: 101) auch selbst schreibt, dass die Einordnung der aus der Alltagssprache importierten Wörter in diese drei Unterklassen recht vage ist und vom Wissen des Untersuchenden abhängt.

Echte Metaphern aus der Alltagssprache können sich streng genommen nur unter den Wörtern der Klasse  $B_2$  befinden, da sich nur hier die mathematische Bedeutung durch Anwendung einer Ähnlichkeit oder Analogie aus der nichtmathematischen rekonstruieren lässt. Im Falle von Wörtern aus  $B_1$  ist lediglich ein Abstraktionsprozess notwendig und die Bedeutung der Wörter aus  $B_3$  muss vergleichbar mit einem Phraseologismus separat gelernt werden.

Weiterhin werden bei Marcus (ebd.: 104ff) äußere und innere Metaphern unterschieden, was stark an die Unterteilung der konzeptuellen Metaphern in Fundierungs- und Verbindungsmetaphern bei Lakoff/Núñez erinnert. So sind alle Wörter der Klasse  $B_2$  äußere Metaphern, da sie von außen aus der Alltagssprache in das mathematische Register übertragen werden. Marcus spricht etwas unglücklich von der „heterogene[n], gemischte[n] Natur der mathematischen Metapher, die der homogenen, gleichmäßigen Natur der linguistischen Metapher gegenübersteht“ (ebd.: 104). Er meint damit, dass die linguistische Metapher eine Ähnlichkeit zwischen zwei Bedeutungen aus der Alltagssprache vermittele, während bei der mathematischen Metapher eine der Bedeutungen der Mathematik angehöre. Diese Terminologie kollidiert jedoch mit der wesentlichen Voraussetzung, dass jede Metapher, wie schon die aristotelische Metapherntheorie gezeigt hat, auf eine Ähnlichkeit zwischen heterogenen Bereichen gründen muss. Die Sprechweise von äußeren und inneren Metaphern ist dagegen weitaus unverfänglicher. Als Beispiel für eine innere Metapher nennt Marcus (ebd.: 105f) das Substantiv *Reihe*, das in der Analysis die Folge der Partialsummen einer beliebigen Folge bezeichnet, aber auch in der algebraischen Sprachtheorie gebraucht wird. Motiviert wird die Übertragung durch eine „formelle Analogie“ (ebd.: 105), die sich in der einheitlichen Darstellung beider mathematischer Gegenstän-

de in der Notation widerspiegelt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Innere Metaphern können auch in die Klasse  $C$  gehören, wenn das betreffende Wort nur in der Mathematik vorkommt und dort von einem Bereich auf einen anderen übertragen ist. Diese Klassifikation birgt ein paar Probleme in sich (vgl. Becker 2006: 35). Zum einen gibt es den Terminus *Ring*, und darauf weist auch Marcus (1973: 106) selbst hin, der als Bezeichnung für eine Struktur aus der Maßtheorie sowohl eine äußere, wenn er auf *Ring* in der Alltagssprache bezogen wird, als auch eine innere Metapher, wenn er auf *Ring* im Sinne einer algebraischen Struktur bezogen wird, sein kann. Das trifft nun aber nicht nur für einige exotische Wörter zu, wie das eine Beispiel bei Marcus nahe legen könnte, sondern ist eine allgegenwärtige Erscheinung in der Mathematik. So werden etwa viele mengentheoretische Termini wie *offen*, *abgeschlossen*, *Umgebung* usw. auch in der Topologie verwendet. Es ist sogar zu vermuten, dass der größte Teil aller mathematischen Termini in mehr als einer Teildisziplin gebraucht wird, sodass wenigstens zwei Assoziationen wachgerufen werden. Damit wird die Unterscheidung zwischen äußeren und inneren Metaphern unscharf und als allgemeines Kriterium nur schlecht handhabbar. Weiterhin gibt es Termini wie *Garbe*, *Halm*, *Faser* oder *Nerv*, die aus einer anderen Fachsprache, in diesem Fall der Biologie, übertragen wurden (vgl. Eisenreich 1998: 1226). Zwar haben auch sie eine alltagssprachliche Bedeutung, dennoch stehen sie mit ihrem fachsprachlichen Bezug außerhalb von Marcus Klassifikation. Insgesamt ist Marcus' Modell in dieser Form wohl nicht haltbar.

Schließlich kommt Marcus auf einen interessanten Punkt zu sprechen:

Die in den vorangegangenen Abschnitten untersuchte mathematische Metapher bezog sich auf die metaphorischen Übertragungen, die die natürliche

Komponente der mathematischen Sprache engagieren. Wir müssen nun also noch prüfen, ob solche Übertragungen nicht etwa auch innerhalb der künstlichen Komponente der mathematischen Sprache stattfinden. (Marcus 1973: 108)

In Übereinstimmung mit dem zu Beginn dieser Arbeit gegebenen Hinweis auf die hybride Natur der Mathematik, ihrer Verbindung von natürlicher Sprache und Notation, fragt Marcus, ob sich Übertragungen, wie sie für natürlichsprachliche Wörter unzweifelhaft vorhanden sind, auch im Bereich des Formalen finden lassen. Er kommt zu dem Schluss, dass so etwas tatsächlich möglich ist: Sein erstes Beispiel ist die Übertragung des Subtraktionszeichens  $-$  von Zahlen auf Mengen. Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  bezeichnet  $A - B$  diejenige Menge, die aus allen Elementen von  $A$  besteht, die nicht zugleich Elemente von  $B$  sind. Die analogische Basis der Übertragung wird deutlich, wenn  $A$  und  $B$  endlich sind: Wenn  $a$  die Anzahl der Elemente von  $A$  und  $b$  die Anzahl der Elemente  $B$  bezeichnet sowie  $B$  eine Teilmenge von  $A$  ist, dann gilt nämlich:  $|A - B| = a - b$ . So eine Übertragung nennt Marcus *graphische Metapher*.<sup>61</sup> Es kann nun der Fall eintreten, dass ein graphisches Zeichen bei einer Übertragung auch in seiner Form verändert wird, wie etwa das Symbol für die leere Menge  $\emptyset$ , dem das Symbol der Zahl Null zugrunde liegt. Neben der Analogie zwischen der leeren Menge und der Zahl Null wird so zugleich auch auf die Differenz zwischen beiden Objekten aufmerksam gemacht. Wegen ihrem Doppelcharakter des Hinweisens und Zurücknehmens bezeichnet Marcus (ebd.: 110) solche Zeichen als *Semimetapher*.

#### 3.10.3 Mathematik aus didaktischer Perspektive bei David Pimm

Abschließend soll David Pimms Perspektive auf Metaphern in der Mathematik aus seiner Untersuchung mit dem sprechenden Titel „Speaking

---

<sup>61</sup> Für eine genauere Analyse und die Situation im mathematischen Register siehe Kapitel 6.5.

Mathematically“ behandelt werden. Seine Gedanken entwickelt er entlang der Metapher *Mathematik ist eine Sprache*:

The task I wish to perform is partially to structure the concept of *mathematics* in terms of that of *language*, but with the primary intention of illuminating mathematics teaching and learning. (Pimm 1987: xiv)

Während Marcus Metaphern in der Mathematik mit Blick auf die Zeichen selbst untersucht, geht es Pimm stärker um den Zeichenbenutzer und vor allem um damit verbundene didaktische Aspekte des Lehrens und Lernens von Mathematik. Bei Lakoff/Núñez ist diese Facette implizit enthalten, denn sie fragen allgemeiner, wie mathematische Gegenstände und Theorien konzeptualisiert werden. Pimms Arbeit unterteilt sich grob in drei Abschnitte: Im ersten Teil steht die mündliche Kommunikation im Vordergrund, im zweiten die schriftliche und schließlich werden beide Stränge in einem Kapitel über metalinguistische Aspekte zusammengeführt und mit einer Bewertung der eingangs gestellten Frage, ob sich Mathematik systematisch als Sprache begreifen lasse, abgeschlossen. In seiner systematischen Erörterung der Analogie zwischen Mathematik und Sprache kommt er auf die Ubiquität metaphorischer Prozesse für natürliche Sprachen zu sprechen und sieht hier eine Verbindung zur Mathematik:

[...] I wish to claim that metaphor is as central to the expression of mathematical meaning, as it is to the expression of meaning in everyday language. (ebd.: 10/11)

In dieser Formulierung deutet sich bereits die Gleichbehandlung von natürlichen und formalen Sprachen an. Zunächst untersucht er aber ebenso wie Marcus Metaphern auf der natürlichsprachlichen Seite der Mathematik und hebt ihr kreatives Potential, neue Bedeutungen zu schaffen, hervor: „One means of coining words or expressions for a register [...] is that of metaphor“ (ebd.: 93). Als Katachresen können Metaphern die lexikalischen Lücken im

mathematischen Register einer Sprache füllen, wobei neben der Alltagssprache und anderen mathematischen Teildisziplinen auch Fremdsprachen als Reservoir für Wortimporte in Frage kommen. Dabei bleibt Pimm aber nicht stehen, sondern überschreitet Marcus, indem er auf kognitive Funktionen von Metaphern verweist: „At a deeper level, metaphor is involved in the way mathematicians discuss their objects of interest and discovery“ (ebd.: 95). Metaphern sind für Pimm Werkzeuge des Denkens, um abstrakte mathematische Gegenstände zu verstehen. Als Beispiel erwähnt Pimm (2004: 98) die Metapher *AN EQUATION IS A BALANCE*, die im englischsprachigen aber auch im deutschsprachigen Schulmathematikunterricht (*EINE GLEICHUNG IST EINE WAAGE IM GLEICHGEWICHT*) häufig zur Erklärung, wie man mit Gleichungen umzugehen hat, eingesetzt wird. Dabei entsprechen die zwei Seiten einer Gleichung den beiden Waagschalen einer sich im Gleichgewicht befindenden Waage. Werden Veränderungen an den Gewichten auf einer Waagschale vorgenommen, dann ist klar, dass die gleiche Veränderung auf der anderen Schale durchgeführt werden muss, um das Gleichgewicht zu halten. Dieses Inferenzmuster überträgt sich auf Gleichungen: Den Gewichtsveränderungen entsprechen mathematische Umformungen, die auf beiden Seiten der Gleichung angewendet werden müssen, um die Lösungsmenge unverändert zu lassen (vgl. Sfard 1995: 18). An dieser Metapher erkennt man deutlich die partielle Natur der Projektion: Da Waagen natürlich keine „Lösungen“ haben, können sie das Wissen über Gleichungen nur bis zum einem gewissen Grad strukturieren.

Vergleichbar mit Marcus' Unterscheidung innerer und äußerer Metaphern differenziert Pimm (1987: 95) zwischen „extra-mathematical metaphors“ und „structural metaphors“. Beim ersten Typ, den außermathematischen Metaphern, werden mathematische Gegenstände und Prozesse unter Zuhilfenahme von Konzepten aus der Alltagswelt erklärt. Im Unterschied zu Marcus geht es Pimm weniger um die Übertragung eines einzelnen Wortes

aus der Alltagssprache, sondern um die Projektion eines ganzen Konzeptes mit seinem sprachlichen und enzyklopädischen Wissen auf ein mathematisches Konzept. Ganz wie in der kognitiven Metaphertheorie steht also nicht die Zeichenübertragung auf der linguistischen Ebene, sondern der Wissenstransfer auf der epistemologischen Ebene im Fokus. Außermathematische Metaphern können wie die oben besprochene Waagschalenmetapher konventionell im Mathematikunterricht verankert sein oder aber idiosynkratisch von nur einer Person in Abhängigkeit von dessen Bedürfnissen und dessen Vorwissen entwickelt werden. Indem Pimm auch individuelle Metaphernmodelle berücksichtigt, hebt er sich deutlich von Lakoff/Núñez ab. Metaphern des zweiten Typs dagegen übertragen Fachwissen von einem mathematischen Bereich auf einen anderen und gestatten es, sprachliche und notationale Ausdrücke des Ursprungsbereichs auch im Zielbereich anzuwenden. Für einen Lernenden sind sie wesentlich schwerer zu erfassen, „because they rely on underlying analogies within mathematics itself“ (Pimm 1987: 99). Beim Analogiebegriff lehnt sich Pimm (ebd.: 100f) deutlich bei Aristoteles an und definiert die Analogie als Ähnlichkeit zweier Verhältnisse zwischen je zwei Gliedern, die sich als Verhältnisgleichung schreiben lässt. Metaphern sind demnach implizite Analogien, bei denen ein oder zwei der insgesamt vier Glieder und die Vergleichsrelation unterdrückt werden. Um eine Metapher zu verstehen, muss eine vollständige Analogie konstruiert werden, wobei häufig mehrere Varianten denkbar sind, von denen einige durch den Kontext begünstigt, andere ausgeschlossen werden. Ausführlich diskutiert Pimm (ebd.: 101ff) die Anwendung der Analogie auf die Analyse des Ausdrucks *spherical triangle*. Vom grammatischen Typ her liegt hier wie auch in der deutschen Phrase *sphärisches Dreieck* eine Adjektivmetapher vor, bei der einem Wort eine Eigenschaft zugesprochen



wird, die semantisch mit der Bedeutung des Wortes nicht verträglich ist.<sup>62</sup> So gehören zur Bedeutung des Wortes *Dreieck* üblicherweise die Merkmale ‚in der Ebene liegend, mit geraden Seiten‘, die aber mit der Bedeutung von *sphärisch* im Sinne von ‚auf der Oberfläche einer Kugel liegend‘ inkompatibel sind. Um die Phrase trotzdem verstehen zu können, muss die Bedeutung von *Dreieck* auf der Basis einer Analogie erweitert werden, die sich so ausschreiben lässt:

Großkreise : Kugeloberfläche :: gerade Linien : Ebene

Diese Analogie ist mehr als nur eine einfache Erweiterung der Adjektivmetapher *sphärisches Dreieck*; sie vergleicht auf einer höheren Ebene das Verhältnis von Großkreisen und Kugeloberfläche mit dem Verhältnis von Geraden und Ebene, wodurch dem in der Ebene durch drei Geraden begrenzten Dreieck auf der Kugeloberfläche eine geometrische Figur entspricht, die von drei Großkreisen begrenzt wird. Weiterhin lädt die Analogie ein, weitere Lexeme und weiteres Wissen aus dem Herkunftsbereich in den Zielbereich zu übertragen. So lässt sich beispielsweise über kongruente sphärische Dreiecke sprechen, auch wenn es Unterschiede bei den gültigen Kongruenzsätzen gibt. Nach Pimm (ebd.: 103) wirft die Analogie zusätzlich ein neues Licht auf die euklidische Geometrie, das Sätze und Axiome wie das Parallelenaxiom, die sonst vielleicht völlig selbstverständlich erscheinen, in ihrer Wichtigkeit bewusst werden lässt. Diese Wechselwirkung ist als ein weiterer Beleg für die Symmetrie der Analogie zu werten.

Anschließend steht wie schon bei Marcus die mathematische Notation im Vordergrund, wo sich eine spezielle Variante der strukturellen Metapher

<sup>62</sup> Bei diesem Metapherntyp gehen Skirl/Schwarz-Friesel (2007: 25f) davon aus, dass der Phrasenkopf den Ziel- und das Attribut den Herkunftsbereich benennt. In diesem Fall hier ist es aber offensichtlich genau umgekehrt: *Sphärisch* verweist auf den Zielbereich der Kugeloberflächen und *Dreieck* auf den Herkunftsbereich gewisser geometrischer Figuren der Ebene. Demnach muss *Dreieck* und nicht etwa *sphärisch* metaphorisch interpretiert werden. Der sich aufdrängenden Frage, ob diese Adjektivmetapher in dieser Hinsicht singular ist oder ob es einen regulären Subtyp gibt, bei dem der Kopf metaphorisch zu verstehen ist, kann an dieser Stelle nicht nachgegangen werden.

findet, die Pimm (2004: 184ff) *notational metaphor* nennt. Wo bei Marcus jedoch eine Übertragung von einem mathematischen Gebiet in ein anderes, etwa von der Arithmetik in die Mengenlehre, stattfindet, fokussiert Pimm auf die Erweiterung des Anwendungsbereichs von Zeichen in einem Bereich. Beispielsweise diskutiert er die Erweiterung der Zahlenbereiche von den natürlichen über die ganzen bis hin zu den komplexen Zahlen, die auf jeder Stufe mit einer Ausdehnung des Bedeutungsumfangs der Zeichen für die Rechenoperationen und zumindest bis zu den reellen Zahlen auch der Zeichen für die Ordnungsrelation einhergehen. Da aber diese Übertragungen nur den Bereich der Zahlen betreffen, ist zu fragen, ob es sich nicht vielmehr um Metonymien oder genauer um Synekdochen handelt, da jeder Zahlenbereich eine Teilmenge aller ihm folgenden Bereiche ist und die Übertragungen somit von einem Unter- zu einem Oberbegriff verlaufen.

#### 3.10.4 Fazit: Zwei Typen mathematischer Metaphern

Auffallend ist, dass alle drei diskutierten Untersuchungen trotz ihrer unterschiedlichen Voraussetzungen und Methoden jeweils zwei Typen von Metaphern in der Mathematik unterscheiden:

	Lakoff/Núñez	Marcus	Pimm
Typ 1	Fundierungs- metapher	äußere Metapher	außermathematische Metapher
Typ 2	Verbindungs- metapher	innere Metapher	strukturelle Metapher

Über die einzelnen Autoren hinweg haben Metaphern vom Typ 1 gemeinsam, dass Zeichen oder Konzepte aus der Alltagswelt in die Mathematik hineingezogen werden. Sie gewährleisten den Anschluss mathematischer

Termini und Ideen an die Alltagssprache und das alltägliche Wissen. Typ-2-Metaphern dagegen koppeln zwei mathematische Bereiche. Bei ihnen scheint die Unidirektionalität wesentlicher schwächer ausgeprägt, was unserer Einschätzung nach damit zusammenhängt, dass sie der Analogie sehr nahe stehen und in vielen Fällen Teil kohärente Modelle bilden oder wenigstens Teile davon sind. Von Nachteil ist, dass Metaphern, deren Ursprung in anderen Wissenschaften liegt, durch keine der drei Einteilungen erfasst werden.

### 3.11 Schwierigkeiten beim Metapherngebrauch

Sowohl für die kognitive Metaphertheorie als auch für eine Reihe weiterer Metaphertheorien sind Metaphern ein notwendiger Bestandteil jeder Sprache und des Denkens: Sie ermöglichen es, über abstrakte Sachverhalte zu sprechen und nachzudenken, sie erweitern das Wissen und den Wortschatz, begründen wissenschaftliche Theorien und sind an der Konstruktion von kultureller Identität beteiligt. Dabei gerät allerdings ein Problemfeld in den Hintergrund, auf das schon Aristoteles hingewiesen hat, dass nämlich Metaphern nicht nur Nutzen bringen, sondern in ihrem Gebrauch auch Gefahren lauern können. Diese Zwiespältigkeit wird jedoch durch die klischeehafte Auffassung verdeckt, nach der in der Antike Metaphern lediglich als Redeschmuck betrachtet worden seien, die zwar einer Dichtung Esprit verleihen könnten, für jede ernsthafte Wissenschaft aber gänzlich unbrauchbar seien, weshalb man heute genötigt sei, die Ehre der Metapher wiederherzustellen. Dass Aristoteles keinesfalls in diese Schublade einsortiert und undifferenziert mit der lateinischen Rhetorik zusammengelegt werden darf, sollte mittlerweile hinreichend deutlich geworden sein, da gerade er die kognitive Funktion der Metapher wertschätzt (vgl. Debatin 1997: 22f). Jedoch scheint eine Stelle aus der „Topik“ diese Position zu widerlegen und den

Kritikern der aristotelischen Metaphertheorie recht zu geben, denn dort heißt es:

Ein anderer (Topos besteht darin zu prüfen), ob ein metaphorischer Ausdruck verwendet wurde, ob zum Beispiel das Wissen als ›zuverlässig‹ bezeichnet wurde oder die Erde als ›Amme‹ oder die Besonnenheit als ›Zusammenklang‹. Alles metaphorisch Gesagte ist nämlich unklar. (Aristoteles 2004: Top. VI, 2; 184)

Insbesondere dann, wenn man nur den zweiten Satz zitiert, erscheint dies als schlagender Beweis der Annahme, dass Aristoteles die Metapher aus der Wissenschaft verbannen wollte. Jedoch sollte bedacht werden, wo genau er die Metapher für zu undeutlich hält, denn im Bereich der Poetik und der Rhetorik war sie ihm stets willkommen. Im zweiten Kapitel des sechsten Buches der „Topik“ spricht Aristoteles über die Nachteile unklarer sprachlicher Ausdrucksweisen beim Definieren. Keineswegs geht es ihm darum, eine metaphernfreie Wissenschaft einzufordern, stattdessen bespricht er verschiedene sprachliche Fehlerquellen, die zu schlechten Definitionen führen und dazu gehört für ihn auch die Verwendung von Metaphern. Natürlich muss man auch mit dieser Einschränkung auf eine ganz spezifische Textsorte nicht übereinstimmen, aber beim Betrachten seiner Beispiele wird man ihm mit Sicherheit zustimmen wollen, dass etwa eine Definition der Erde als Amme in der Tat äußerst unklar und wenig nützlich ist. Letztendlich fordert Aristoteles auch nicht, dass Metaphern in Definitionen um jeden Preis völlig zu vermeiden sind, denn dies wäre in der Praxis wohl nicht einlösbar. Metaphorische Definitionen sind nicht generell verboten, doch da Definitionen immer am Anfang einer wissenschaftlichen Theorie stehen, bürden sie dem Definierenden eine Hypothek auf, die er später abbezahlen muss, „d. h. er muss explizit machen, welche nicht-metaphorischen Behauptungen sich daraus ergeben“ (Aristoteles 2009: 928). Dies ist ganz im Sinne der These Debatins, „daß der Metapher die *Funktion eines rationalen Vorgriffs* zukommt, wobei die Rationalität dieses Vorgriffs [...] nur durch die

*sinn- und geltungskritische Reflexion* der Metaphernverwendung bestimmt werden kann“ (Debatin 1997: 7). So ist z. B. in der Sprachwissenschaft die metaphorische Definition *Die Bedeutung ist der Inhalt eines Wortes* wegen der Ontologisierung der Bedeutung kritisiert worden (vgl. Burkhardt 1987: 62f). Die Stelle der „Topik“ ist also nicht als Verbot, sondern als Warnung zu lesen, als Warnung an den Definierenden, die Implikationen seiner Definition offenzulegen.

Die Probleme metaphorischer Rede in Definitionen werden nach Aristoteles durch ihre Undeutlichkeit verursacht. Präziser lässt sich dies u. a. darauf zurückführen, dass an einer isolierten sprachlichen Metapher, wenn sie unkommentiert bleibt, nicht zu erkennen ist, welche Analogien die Basis der Übertragung bilden und welche ungenutzt bleiben. Welches sind, nach Hesses Terminologie, die positiven, welches die negativen und welches die neutralen Analogien? Eine metaphorische Definition verlangt von ihrem Autor immer zusätzliche Erklärungen, sonst droht sie missverstanden zu werden. Im schlimmsten Fall könnte es sogar vorkommen, dass gar nicht erkannt wird, dass eine Metapher vorliegt. Dann besteht die Gefahr, Realität und Metapher gleichzusetzen (vgl. Drewer 2003: 116). Auf die negativen Konsequenzen des Wörtlich-Nehmens einer konzeptuellen Metapher bezogen auf die Mathematik weisen auch Lakoff/Núñez hin:

Many of the confusions, enigmas, and seeming paradoxes of mathematics arise because conceptual metaphors that are part of mathematics are not recognized as metaphors but are taken as literal. (Lakoff/Núñez 2000: 6)

Wenn etwa gesagt wird *es gibt genauso viele natürliche wie rationale Zahlen*, dann wirkt dies für einen Nichtmathematiker möglicherweise deshalb paradox, weil die natürlichen Zahlen nicht nur eine echte Teilmenge der rationalen Zahlen sind, sondern die Restmenge, die durch Entfernen aller natürlichen aus den rationalen Zahlen entsteht, sogar noch unendlich ist. Lakoff/Núñez meinen, dass man in diesem Fall das Konzept GLEICHE AN-

ZAHL nicht metaphorisch versteht, sondern als Laie automatisch auf das wörtliche Konzept zurückgreift und daher in einer „Interpretationssackgasse“ landet. Die Lösung derartiger Probleme besteht darin, über die inhärente Metaphorizität mathematischer Konzepte aufzuklären, wodurch sich alle Verwirrungen und Paradoxien auflösen sollen. Dass eine Gefahr des Metapherngebrauchs darin liegt, nicht zu bemerken, dass eine Metapher vorliegt, dem könnte wahrscheinlich auch Aristoteles zustimmen.

Doch selbst wenn eine Äußerung als metaphorisch erkannt wurde, ist das noch keine Garantie für eine adäquate Interpretation. Vor allem im Bereich innovativer Metaphorik, wo noch kein kognitives Metaphernmodell aufgebaut ist, um das Verstehen zu leiten, kann das Verstehen nicht-konventioneller Metaphern misslingen. Harrison/Treagust (2006) erinnern daran, dass das Verstehen von Metaphern und Analogien immer auf das (Vor)Wissen der Interpretierenden angewiesen ist. Setzt eine Lehrerin oder ein Lehrer im Unterricht eine Analogie ein, um den Schülerinnen und Schülern einen ihnen unbekanntem Sachverhalt anschaulich näher zu bringen, dann können von Person zu Person ganz unterschiedliche Interpretationen entstehen, von denen einige vom Lehrenden möglicherweise nicht intendiert sind. Metaphern und Analogien sind so immer zweiseitige Schwerter:

Durch den Rückgriff auf bekannte Ausdrücke können irrelevante Assoziationen in den Vordergrund rücken, die vom metaphorisch benannten Sachverhalt wegführen. (Drewer 2003: 81)

Presmeg spricht von der „obverse side of the power of these forms in reasoning“ (Presmeg 1997: 267), wenn eine Metapher verdunkelt anstatt zu erhellen. Liegen einer sprachlichen Metapher eingespielte Bildfeldkonventionen zugrunde, so ist die Wahrscheinlichkeit, sie fehlerhaft oder gar nicht zu verstehen, geringer. So wird die Äußerung *Sally ist ein Eisklotz* trotz aller philosophischen Debatten in solchen Kulturen, in denen Gefühl mit Temperatur assoziiert ist, leicht verstanden werden. Kaum jemand dürf-

te dort, wenn er das Metaphernmodell gelernt hat, auf die Idee kommen, Sally wäre unsportlich, obwohl dies auch eine denkbare Assoziation wäre. Verständnisschwierigkeiten durch das Übertragen irrelevanter Assoziationen oder im Grenzfall sogar aller Assoziationen, was der angesprochenen wörtlichen Interpretation des metaphorischen Ausdrucks entspricht, treten vermehrt auf, wenn über einen wissenschaftlichen Gegenstand kommuniziert werden soll. Drewer (2003: 81) weist als Beispiel auf die konzeptuelle Metapher ELEKTRIZITÄT IST EINE FLÜSSIGKEIT hin, die es für Laien schwierig mache, sich Wechselstrom zu erklären, der im Gegensatz zu einer konstant fließenden Flüssigkeit in kurzen Abständen seine Richtung wechselt. Gerade am Beginn eines Lernprozesses kann es vorkommen, dass Lernende zur Übergeneralisierung neigen:

Dennoch suchen Lernende für *alle* Merkmale des Zielbereichs Erklärungen in ihrem dominanten Modell. (ebd.: 96)

Andererseits haben neuartige Metaphern immer den Charakter von Hypothesen, sind Vorgriffe und müssen sich beweisen. Das gilt sowohl in der Lehre als auch in der Forschung. Zur Forschungsarbeit gehört es, Modelle auf ihre Tauglichkeit hin zu überprüfen, ihre Reichweite zu ermitteln und gegebenenfalls Alternativen vorzuschlagen. Insofern birgt gerade auch das Missverstehen einer Metapher, wenn es denn erkannt wird, einen didaktischen Wert, über einen Gegenstand oder Sachverhalt und seine Beschreibung nachzudenken.

Bisher standen im weitesten Sinne kognitive Schwierigkeiten von Rezipienten beim Erkennen und Verstehen von Metaphern im Vordergrund. Ebenso kann aber auch nach der Güte einer Metapher an sich gefragt werden, die unter dem Begriff der Angemessenheit verhandelt wird. Aristoteles schreibt dazu:

Aber sowohl Epitheta als auch Metaphern müssen in der Rede passen, das wird aber nur auf dem Wege der Analogie gehen. Ist dies nicht der Fall, wird

sich der Ausdruck als unangemessen erweisen, da Widersprüche zwischen beinanderliegenden Gliedern besonders ins Auge fallen. Man muß aber darauf achten, was dem Greis ebenso paßt wie dem Jüngling sein Purpurkleid, denn dasselbe Gewand paßt ihm keineswegs. (Aristoteles 2007: Rhet. III, 2; 156)

Das Epitheton, gemeint ist ein für das Verständnis des Satzzusammenhangs nicht notwendiges Attribut, ebenso wie die Metapher müssen also in der Rede passen, was man so verstehen kann, dass über die Angemessenheit einer Metapher allein in einer konkreten Situation entschieden werden kann, also im Bereich der parole. Dies unterstützt Debatins vorsichtigen Hinweis, dass „die Metapher schon bei Aristoteles der Ebene der Redeakte, d. h. dem *kommunikativen* Bereich zugerechnet“ (Debatin 1995: 16, Anm. 4) wird. Auf der anderen Seite vermittelt das Beispiel der altersgerechten Kleidung den Eindruck, solch ein Urteil basiere auf einem ästhetischen Kriterium: So wie nicht zu jeder Person jegliche Kleidung passt, so muss auch eine Metapher ihren Gegenstand angemessen beschreiben, wofür nach Aristoteles aber einzig die Metapher gemäß der Analogie in Frage komme. Es ließe sich aber leicht ergänzen, dass eine Bewertung immer nur relativ zu einer Situation vorgenommen werden sollte, da es durchaus Umstände gibt – etwa ein Kostümball –, bei denen dem Greis das Purpurkleid durchaus angemessen ist. Um das ästhetische Kriterium richtig einzuordnen, sollte man weiterhin bedenken, dass *Angemessenheit* in der „Rhetorik“ der Schaffung eines guten Stils dient, den Aristoteles folgendermaßen bestimmt:

[...] es sei definiert, daß der höchste Vorzug des Stils dessen Klarheit ist (eine Rede ist ja eine Art Hinweis, so daß sie ihre Aufgabe, wenn sie nichts klarlegt, verfehlt), weder niedrig, noch allzu würdevoll, sondern angemessen; (Aristoteles 2007: Rhet. III, 2; 154)

Gelungene Metaphern müssen den Gesprächspartner innerhalb einer durchdachten Argumentation überzeugen können (vgl. Jost 2007: 277f). Damit fließt auch hier, sozusagen durch die Hintertür, wieder ein kognitives Moment in die Betrachtung ein, das durch Aristoteles' Bemerkung bestärkt



wird, wonach alle Menschen gern etwas Neues lernen und hierfür vor allem die Metaphern geeignet sei (vgl. Aristoteles 2007: Rhet. III, 10; 172f). Wie die poetische Funktion erschöpft sich daher auch die rhetorische Funktion der Metapher keineswegs im Schaffen filigraner Sprachornamente, indem sie „Eindringlichkeit, Anmut und Fremdartigkeit“ (ebd.: Rhet. III, 2; 156) in der Rede hervorruft, sondern ist ein Instrument, Erkenntnis zu vermitteln. Dazu aber muss die Metapher notwendigerweise angemessen sein.

Schließlich sei noch ein letztes Kriterium genannt, das zu einer schlechten Metapher führen kann: Indem Metaphern bestimmte Aspekte hervorheben, andere aber verdecken, können sie zur Durchsetzung einseitiger Interessen genutzt werden. Im Unterschied zur „Rhetorik“ des Aristoteles, wo sowohl Sprecher als auch Hörer im Interesse der Wissensvermittlung zusammenkommen, kann ein Textproduzent auch Metaphern mit dem Ziel einsetzen, sein Gegenüber zu überreden, eine Position zu akzeptieren, die moralisch fragwürdig ist. Hat er es geschafft und wurde seine Metapher angenommen, dann hat er dem Rezipienten einen Komplex an Vorstellungen, Assoziationen und Inferenzmustern mitgegeben, aus denen sich Handlungsanweisungen in Bezug auf das metaphorisierte Objekt ableiten lassen. In Texten mit dominierender argumentativer Funktion wird der Autor seine Metaphern häufig besonders kenntlich machen und in einem Metadiskurs erläutern, wenn er Aristoteles' Warnung vor der Unklarheit metaphorischen Sprechens ernst nimmt. Zielt er jedoch auf Manipulation ab, wird er seine Metaphern möglichst unauffällig anbringen, um zu verdecken, dass seine Metaphorisierung nur bestimmte Aspekte hervorhebt und damit bereits eine Bewertung des Gegenstandes vornimmt (vgl. Drewer 2003: 86). Ein in diesem Zusammenhang vielzitiertes Beispiel sind die Bezeichnungen *Fremden-*, *Ausländer-* oder *Asylantenflut* für Personen ohne deutsche Staatsbürgerschaft, die so als bedrohliche Naturgewalt darstellt werden. Gegen sie erscheinen dann entsprechende Schutzmaßnahmen ge-

rechtfertigt und sogar geboten, da es bei Naturkatastrophen völlig legitim ist, den Schaden zu begrenzen und langfristig zu versuchen, sich gegen sie zu wappnen etwa durch die Errichtung von Dämmen bei einer drohenden Flut (vgl. Andreeva 2011: 23ff). Die Metaphernanalyse kann so als Instrument der Sprachkritik genutzt werden, um Konzeptualisierungen aus dem Hinterzimmer des Denkens ans Licht zu zerren. So hat Lakoff wiederholt seine kognitive Metaphertheorie auf die US-amerikanische Politik angewandt und versucht, Denkmuster der US-amerikanischen Regierung zum Golfkrieg (1991) oder zum 11. September offenzulegen. Eine Metapher in diesem Sinne *schlecht* zu nennen, basiert also auf einem moralischen Kriterium.

### 3.12 Methodologische Bemerkungen

Diese Arbeit verfolgt beim überwiegenden Teil der Metaphernanalyse einen „onomasiologischen“ Ansatz (vgl. Jäkel 2003: 131ff). Ausgangspunkt sind daher nicht einzelne Wortformen oder Lexeme, die auf metaphorische Bedeutungen hin untersucht werden, sondern ist ein abstrakter mathematischer Sachbereich – die Mengenlehre –, der auf Metaphern im Register und in der Notation hin befragt wird, mit dem Ziel Erkenntnisse über konzeptuelle Strukturen zu gewinnen.

Sollten die Thesen der kognitiven Metaphertheorie zutreffen, ist zu erwarten, dass der Bereich der Mengenlehre metaphorisch strukturiert ist, was heißt, dass nicht nur das Register systematisch von sprachlichen Metaphern durchsetzt ist, sondern dass sich die Theorie zuallererst selbst durch Übertragungen von Strukturen aus erfahrungsnahen Bereichen konstituiert. Wenn also heute jemand die Mengentheorie studiert, ihre wesentlichen Gegenstände lernt, dort Argumentationen und Beweise führt, dann, so die Behauptung, greift er mental auf ihm schon geläufige konkretere Bereiche

zurück. Die konventionelle Art und Weise, wie in Lehrbüchern oder Vorlesungsskripten die Mengenlehre vermittelt wird, ist schließlich Ausdruck dieser sprachvorgängigen Konzeptualisierung.

Um diese starke Behauptung der Existenz einer oder mehrerer theoriekreativer Metaphern zu überprüfen, ist diese Untersuchung vom Grundsatz her synchron angelegt, weil danach gefragt, wie die Mengenlehre heute verstanden wird, und nicht, wie sie sich historisch herausgebildet hat. Zugleich verfährt sie weitgehend ahistorisch, da die Analyse keinen Anspruch erhebt, abzubilden, wie Mathematiker und Mathematikerinnen im 19. Jahrhundert über fundamentale Konzepte der Mengenlehre nachgedacht haben. Dass zwischen beiden Aspekten dennoch Schnittpunkte existieren, dass sie aber auch erheblich auseinanderfallen können, daran besteht kein Zweifel. Insbesondere sind Teile der Terminologie des Registers, wie auch der verwendeten Notation, historisch tradiert. Insofern lässt sich die Diachronie auch gar nicht vollständig ausschließen und wir werden insbesondere bei „toten“ Metaphern gar nicht darum herumkommen, auch die Etymologie der metaphorisch gebrauchten Wörter zu berücksichtigen. Die diachrone Dimension wird somit als Mittel dienen, synchron konzeptuelle Metaphern zu identifizieren (vgl. ebd.: 49ff). Für Becker birgt ein solches Vorgehen untragbare Risiken:

Die Autoren [Lakoff und Núñez] gehen von Lakoff und Johnsons (1980) Ansatz aus, wo er sich auf gemeinsprachliche Beispiele bezieht und übertragen diesen auf fachliche Kontexte. Diese Vorgehensweise scheint uns nicht geeignet zu sein, Metaphorik und Begriffsbildung in der Wissenschaftssprache zu verstehen. [...] Diese Beispiele zeigen darüber hinaus, daß die Ausblendung des Kontextes unseres Modells wissenschaftlicher Begriffsbildung zu einer Überschätzung der direkten kognitiven Fundierungen und zu einer Unterschätzung der wissenschaftsgeschichtlichen Tradition führt. Außerdem erscheint es uns methodisch fragwürdig, historische Metaphern auszustellen, ohne auf textliche Belege einzugehen [...] Lakoff und Núñez erheben zwar nicht den Anspruch, historisch arbeiten zu wollen, doch müssen sich die

Autoren an entsprechenden Maßstäben messen lassen, wenn sie zahlreiche historische Beispiele betrachten. (Becker 2006: 275/276)

Er hält sowohl Ansatz als auch Methode für wissenschaftlich verfehlt. Diese Einschätzung mag für eine Untersuchung zur Begriffsgeschichte vollkommen zutreffen, dieses Ziel wird aber weder hier noch in Lakoff/Núñez (2000) verfolgt. Allerdings kann man den Autoren vorwerfen, dass sie das niemals richtig klarstellen, sondern immer nur von mathematischen Ideen, die sie kognitionswissenschaftlich unter die Lupe nehmen möchten, sprechen:

We seek, *from a cognitive perspective*, to provide answers to such questions as, Where do the laws of arithmetic come from? Why is there a unique empty class and why is it a subclass of all classes? Indeed, why is the empty class a class at all, if it cannot be a class *of* anything? And why, in formal logic, does every proposition follow from a contradiction? Why should anything at all follow from a contradiction? (ebd.: XIII)

Das kann man so deuten, als wollten die Autoren die Frage, wie mathematische Gegenstände verstanden werden, ein für alle Mal über alle Zeiten, Kulturen und Personen hinweg klären. Im weiteren Verlauf des Buches wird allerdings deutlich, dass dies nicht der Fall ist. Werden historische Personen genannt, dann nie mit dem Ziel, ihre individuelle Perspektive auf einen Gegenstand oder ihre Motivation zu einer Terminologie zu untersuchen, sondern immer mit Blick auf die aktuellen konventionellen kognitiven Strukturen. Wenn also beispielsweise Núñez (2008: 99f) danach fragt, warum über Funktionen als statische Mengen geordneter Paare in dynamischer Weise gesprochen wird, indem man etwa sagt, eine Funktion „nähere“ sich einer Asymptote an oder „oszilliere“ an einer Stelle, dann möchte er das nicht in einer historischen Rückschau auf den Funktionsbegriff im 17. und 18. Jahrhundert beantworten, sondern mit dem mentalen Zustand von Personen, in dem Funktionen und bewegte Objekte verbunden sind. In dieser Manier fragen wir: Wie wird die Mengenlehre verstanden, welche Vorstel-

lungen haben Lehrende und Lernende, wenn sie über Mengen nachdenken, sprechen oder mit ihnen operieren?

Zur Beantwortung dieser Fragen soll das im ersten Abschnitt entwickelte Modell der mathematischen Sprache als einer hybriden Sprache aus einer natürlichsprachlichen Komponente – dem Register – und einer formalen Komponente – der Notation – eingesetzt werden. Dabei interessieren fast ausschließlich die konventionellen Formen des Sprechens über die Mengenlehre, wie sie sich in Lehrbuchtexten und Aufsätzen in mathematischen Fachzeitschriften zeigen. Da weder Korpusstudien, noch psycholinguistische Verfahren betrieben werden, sondern vor allem die Intuition des Autors und einige Belegtexte maßgebend sein werden, bleibt die Analyse notwendigerweise bis zu einem gewissen Grad ein Entwurf. Diese Einschränkung wird unserer Ansicht nach durch den Vorteil aufgewogen, dass ein relativ umfangreicher Sachbereich in begrenzter Zeit systematisch durchforstet werden kann.<sup>63</sup>

Da der zu betrachtende Gegenstand nicht mehr dem Alltag angehört, ist eine Metaphernanalyse ohne eine gewisse Kenntnis der wissenschaftlichen Theorie nicht sinnvoll:

Zu behaupten, dass eine bestimmte Metapher das wissenschaftliche Denken über den Gegenstand strukturiere, ist in vielen Fällen schwierig, denn das würde eine Evaluation der wissenschaftlichen Theorien erfordern, die oft nicht von außen geleistet werden kann. (Goschler 2008: 52/53)

Daher ist es nötig, die Mengenlehre bis zu einem gewissen Grad auch darzustellen.

Für konkrete Einzelanalysen halten wir uns mehr Möglichkeiten offen, als nur kognitive Metaphernmodelle in Betracht zu ziehen:

Metaphorische Prozesse sind letztlich so vielfältig wie Metaphern, und wie diese werden sie nicht nur von kognitiven Vorgängen, sondern auch vom

---

<sup>63</sup> Für eine weiterführende Rechtfertigung des gescholtenen intuitiven Ansatzes siehe Kövecses (2011: 24ff).

Bezug zum Kontext bestimmt. Es ist daher unerlässlich, eine Vielfalt von wissenschaftlichen Begriffen bereitzuhalten, um die Prozesse zu erkunden.  
(Kohl 2007a: 45)

Gerade dann, wenn die kognitive Metaphertheorie zu Aporien führt, wird es von Vorteil sein, auf Sprache ausgerichtete Metaphertheorien ebenso wie die Begriffe der Analogie und des Modells zur Verfügung zu haben.

# **Teil II**

## **Mengenlehre**





## 4 Einleitung

Käme heute ein in der Geschichte der Mathematik ganz unbedarfter Beobachter auf die Erde, er müsste zu dem Schluss kommen, die Mengenlehre wäre eine der ältesten Disziplinen der Mathematik. Bereits in der Schulmathematik wird mit Datenmengen, Lösungsmengen oder Definitionsmengen gearbeitet und kaum eine universitäre Einführungsveranstaltung in die Algebra oder Analysis kommt ohne einen kurzen Exkurs zur Mengenlehre aus. Element- und Teilmengenrelation sowie Vereinigung und Durchschnitt gehören zum allgegenwärtigen Standardrepertoire. In der wissenschaftlichen Diskussion beansprucht die Mengenlehre darüber hinaus für sich den Status einer Grundlagendisziplin, die alle mathematischen Probleme in ihre „Sprache“ übersetzen könne:

Eine universale Sprache für alle mathematischen Teilgebiete erlaubt erst einen uneingeschränkten Gedankenaustausch und eine gegenseitige Befruchtung der einzelnen Disziplinen. Und speziell für die Geometrie brachte die mengentheoretische Sprache eine Befreiung von der Arithmetik in Form der mengentheoretischen Topologie. (Deiser 2010: 156)

Mit der Übersetzung mathematischer Fragestellungen in die universale Sprache der Mengentheorie verbindet sich aber nicht nur der Anspruch, ein disziplinübergreifendes Kommunikationsmedium zu schaffen, sondern auch die Möglichkeit, neue Einblicke in alte Probleme zu gewinnen, die zu eleganten Lösungen führen oder im besten Fall erstmals überhaupt eine Lösung erlauben.

Ein Beobachter, der dies alles gesehen hat, wäre daher sicherlich erstaunt zu erfahren, dass diese schon fast mythisch verklärte Zaubersprache als

eigenständige Disziplin eine Errungenschaft des ausgehenden 19. Jahrhunderts ist. Selbstverständlich haben Mathematiker auch schon zuvor Mengen gekannt und mit ihnen an verschiedenen Stellen gearbeitet, aber die Herausbildung einer allgemeinen Mengentheorie hat lange auf sich warten lassen. Der erste Entwurf ist vor allem den Mathematikern Georg Cantor (1845–1918), Richard Dedekind (1831–1916) und Felix Hausdorff (1868–1942) zu verdanken. Sie haben im Austausch untereinander und mit vielen weiteren Mathematikern, Logikern und Philosophen ihrer Zeit mitgeholfen, nicht nur der Mengenlehre, sondern der modernen Mathematik insgesamt den Weg zu bereiten. Im Laufe des 20. Jahrhunderts hat sich dann eine zweite Generation, mit Ernst Zermelo (1871–1953) im Zentrum, der Mengenlehre angenommen und es sich als Reaktion auf die um die Jahrhundertwende entdeckten Paradoxien der ersten, „naiven“ Mengenlehre zum Ziel gesetzt, ein Axiomensystem zu entwickeln, das die Intuition über Mengen widerspruchsfrei formalisieren sollte. Auch wenn sich dann herausgestellt hat, dass sich die Widerspruchsfreiheit nie endgültig beweisen lassen würde, ist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre<sup>1</sup> unter allen alternativen Vorschlägen zur meist genutzten Axiomatisierung aufgestiegen. In der Folge hat die Mengenlehre den Status einer Grundlage für fast alle Zweige der Mathematik erlangt, den sie bis heute behalten hat, auch wenn das Ideal einer Universalsprache lediglich ein theoretisches Ziel geblieben ist.

Trotz aller Euphorie, mit der die Entwicklung der Mengenlehre heute gesehen wird, war sie zu ihrer Zeit keineswegs unumstritten. Der Widerstand, der ihr in der Anfangszeit entgegenschlug, betraf vor allem die unendlichen Mengen – den eigentlichen Kern der Mengenlehre –, denen renommierte Mathematiker wie Carl Friedrich Gauß (1777–1855) oder Leopold Kronecker (1823–1891) ablehnend gegenüberstanden. Es ging dabei um

---

<sup>1</sup> Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965) hat Zermelos ursprüngliches Axiomensystem ergänzt.

die Frage, ob etwa die natürlichen Zahlen in ihrer Gesamtheit als ein mathematisches Objekt existieren, wie es die Mengenlehre annahm, oder nur als Möglichkeit von einer konkreten natürlichen Zahl zu einer größeren voranzuschreiten. Georg Cantor merkte schnell, auf welchen Konflikt er zusteuerte, wenn er mit dem traditionellen Verständnis des Unendlichen brechen sollte:

Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Ueberzeugung aussprechen, dass diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, dass ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgrösse mich stelle. (Cantor 1883: 545)

Diese „weitverbreiteten Anschauungen“, von denen Cantor hier spricht, haben ihren Ursprung bei Aristoteles, der zwischen einem potentiell und einem tatsächlich Unendlichen unterscheidet, der tatsächlichen Unendlichkeit eine Abfuhr erteilt und die potentielle Sichtweise bevorzugt. Die Folgen dieser Entscheidung für die weitere Entwicklung der nachantiken Mathematik sind kaum zu überschätzen. Mathematiker, die sich dem Konzept vom potentiell Unendlichen anschlossen, argumentierten, es gebe zwar keine größte natürliche Zahl, dennoch sei es unmöglich, alle diese Zahlen so in einer Menge zusammenzufassen, dass alle gleichzeitig existieren. Das Unendliche könne nicht als ein Objekt behandelt werden, sondern sei immer nur als Annäherung von beliebig groß oder klein werdenden aber immer endlich bleibenden Größen zu betrachten. Verfechter eines Konzept des tatsächlich Unendlichen nahmen dagegen genau diese Möglichkeit an, dass auch Objekte unendlicher Größe existieren und diese als sinnvolle mathematische Gegenstände untersucht werden können (vgl. Deiser 2010: 22ff).

Jahrhunderte lang sicherte die Autorität des Aristoteles der potentiellen Unendlichkeit eine Hegemonialstellung. Erst mit Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz brach ein offener Streit um beide Konzepte los, der im 19. Jahrhundert mit besonderer Heftigkeit tobte, wie Cantors Zitat belegt. Schließlich konnte sich die tatsächliche Unendlichkeit erfolgreich durchsetzen und das nicht zuletzt auch dank der teilweise erstaunlichen Ergebnisse Cantors über unendliche Mengen.

Diese winzigen Anmerkungen zu den historischen Begebenheiten mögen genügen, um den Hintergrund der folgenden Kapitel, in denen die Anwendung der Theorie der konzeptuellen Metaphern auf die Mengenlehre auf die Probe gestellt wird, zu umreißen. Die Analyse wird sich vor allem an der naiven Mengenlehre Cantors orientieren und lediglich zum Schluss als Ausblick auf die Axiomatisierung im Rahmen der ZFC-Axiome zu sprechen kommen. Zwar wird die wissenschaftliche Mengenlehre heute zumeist auf der Basis der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre geführt, trotzdem bleibt die intuitive Anschauung ein wichtiger Bezugspunkt, einmal für die Schulmathematik, doch auch für Einführungen in die meisten mathematischen Disziplinen, die häufig ohne den vollständigen Axiomenapparat auskommen. Zudem resultieren die Axiome aus dem Versuch, die Intuition über Mengen formal so zu fassen, dass insbesondere das naive Mengenuniversum ein Modell (am besten das einzige Modell) dieses Axiomensystems ist. Diese Entwicklung der formalen Mengenlehre in Auseinandersetzung mit der naiven Theorie rechtfertigt es, dem intuitiven Ansatz die meiste Aufmerksamkeit zu widmen.

Paul Cohen – Erfinder der „Erzwingungsmethode“ – schreibt ganz im Sinne der Idee vom verkörperten Geist:

The only reality we truly comprehend is that of our own experience. But we have a wonderful ability to extrapolate. The laws of the infinite are extrapolations of our experience with the finite. If there is something infinite, perhaps it is the wonderful intuition we have which allows us to sense what

axioms will lead to a consistent and beautiful system such as our contemporary set theory. (Cohen 2002: 1099)

Behält die kognitive Metapherntheorie recht, dann stellen konzeptuelle Metaphern die Mechanismen bereit, um Erfahrungen im Umgang mit dem Endlichen auf das Unendliche zu übertragen. Im Folgenden soll insbesondere der starken Annahme, dass die Mengenlehre selbst zum überwiegenden Teil durch theoriekreative Metaphern erzeugt wird, nachgegangen werden. Dafür werden fast ausschließlich konventionelle Metaphern eine Rolle spielen, wie sie in Lehrbuchtexten oder fachwissenschaftlichen Aufsätzen zur Mengenlehre verwendet werden, wohingegen idiosynkratische Metaphern, die für die Vorstellungen einzelner Personen, für eine spezifische Fragestellung oder für einen didaktischen Prozess äußerst wichtig sein können, kaum betrachtet werden.

Zuvor ist noch auf eine allgemeine Angelegenheit hinzuweisen. Die beiden Autoren George Lakoff und Rafael E. Núñez stellen sich ihren Lesern so vor: „WE ARE COGNITIVE SCIENTISTS—a linguist and a psychologist—each with a long-standing passion for the beautiful ideas of mathematics“ (Lakoff/Núñez 2000: xi). Obwohl interdisziplinäres Forschen viel Anerkennung verdient, muss man doch die Frage stellen, ob eine anhaltende Leidenschaft für Mathematik wirklich ausreicht, dem selbstgesteckten Ziel gerecht werden zu können, eine neue Disziplin der „*mathematical idea analysis from a cognitive perspective*“ (ebd.: xi) ins Leben zu rufen, die nichts Geringeres leisten soll, als endlich „a picture of what mathematics really is“ (ebd.: xvii) zu offenbaren. Grundsätzlich wird ihre Arbeit natürlich nicht sofort dadurch, dass sie nicht als forschende Mathematiker tätig sind, abgewertet, aber es wirft einen Schatten auf ihr Anliegen, alle mathematischen Ideen mittels konzeptueller Metaphern letztendlich aus erfahrungsnahen

Konzepten herleiten zu wollen.<sup>2</sup> Denn ob Metaphern eine wissenschaftliche Theorie konstituieren, kann doch nur auf der Basis einer umfassenden Kenntnis dieser Theorie beurteilt werden.

Ein Beispiel für die Risiken, die diese Hypothek ihrer Untersuchung aufbürdet, sei kurz an ihrer ersten Arbeit zu Metaphern in der Mathematik demonstriert. Dort vermischen sie die beiden schon erwähnten Vorstellungen vom Unendlichen. Wer heute von den natürlichen, rationalen oder reellen Zahlen spricht, meint eine aktuelle Zusammenfassung aller dieser unendlich vielen Objekte zu einer Menge, dagegen wird in der Standardanalysis das Unendlichkeitssymbol  $\infty$  nur im potentiellen Sinne gebraucht. Diese Unterscheidung wird manchmal von Lernenden nicht hinreichend beachtet und eben auch bei Lakoff/Núñez (1997: 58f), die folgende Grenzwerte<sup>3</sup> missverstehen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \qquad \lim_{x \downarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right) = \infty$$

Sie behaupten, beide Gleichungen ergeben wörtlich verstanden keinen Sinn, da im ersten Fall unendlich keine Zahl sei und  $1/x$  niemals den Wert Null annehme und im zweiten Fall da  $1/x$  wörtlich für Null nicht definiert sei und es keine Zahl gebe, der sich  $1/x$  nähere. Deshalb müsse man metaphorisch interpretieren:

[...] this makes perfect sense given the metaphors that Infinity Is A Point, Numbers Are Points, and The Limit Metaphor. (ebd.: 59)

Kraft dieser Metaphern sei es dann möglich, die beiden Grenzwerte der Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  als  $f(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$  und  $f(0) = \frac{1}{0} = \infty$  zu schreiben.

---

<sup>2</sup> So beklagt folgende Rezension die zahlreichen sachlichen Ungeauigkeiten: „Occasional misconceptions, and frequent imprecision of mathematical language in otherwise valid explanations, make close page-by-page reading frustrating“ (Goldin 2001: 19).

<sup>3</sup> Im Original ist der zweite Grenzwert als  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = \infty$  angegeben. Das kann jedoch nicht gemeint sein, da dieser Grenzwert nicht existiert. Daher ersetzen wir ihn durch das (wahrscheinlich gemeinte)  $\lim_{x \downarrow 0} (1/x) = \infty$ .

Das ist jedoch falsch: Nicht nur, dass niemand in der Standardanalysis auf die Idee käme, das so zu schreiben und unendlich als Zahl zu betrachten, auch die beiden Grenzwerte kommen sehr gut ohne diese metaphorische Interpretation aus und das liegt einfach an der Definition des Grenzwertes, die von den Autoren allerdings nicht besprochen wird. Völlig recht haben Lakoff/Núñez immerhin damit, dass die Funktion  $f$  niemals den Wert Null annimmt, dass sie für Null nicht definiert ist und dass es auch keine Zahl gibt, der sich  $f$  bei gegen Null strebendem  $x$  annähert. Anschaulich bedeutet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$  ‚Wenn  $x$  gegen  $\infty$  strebt, so strebt  $\frac{1}{x}$  gegen 0‘ und  $\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty$  bedeutet ‚Wenn  $x > 0$  gegen 0 strebt, so strebt  $\frac{1}{x}$  gegen  $\infty$ ‘. Die Gleichungen suggerieren eine statische Identität von Werten, das metaphorisch gebrauchte Verb *streben* weist aber deutlich auf den dynamischen Charakter einer Bewegung hin. Lakoff/Núñez versuchen hier das aktuell Unendliche Kraft ihrer konzeptuellen Metaphern durchzusetzen, wo eigentlich das potentiell Unendliche üblich ist.

Dieses Beispiel zeigt, wie wichtig es ist, die Analysen von Lakoff/Núñez eingehend zu prüfen. Wir werden dies detailliert für den Bereich der Mengenlehre durchführen. Denn auch dort haben die beiden Autoren eine ganz klare Vorstellung davon, wie die Mengentheorie konzeptuell verankert ist:

Set theory is grounded in two kinds of related experiences:

1. Grouping objects into conceptual containers
2. Comparing the number of objects in two groupings

(ebd.: 40)

Der erste Aspekt zielt auf den Mengenbegriff selbst ab und der zweite auf die charakteristische Tätigkeit des Vergleichens zweier Mengen hinsichtlich ihrer „Größe“. Auf den zweiten Punkt gehen wir im Rahmen des Abschnitts über Mächtigkeiten von Mengen genauer ein. Die Zusammenfassung in einem konzeptuellen Behälter beansprucht sehr intensiv das

Behälter-Schema. Daher soll sich in einem vorbereitenden Schritt diesem Vorstellungs-Schema genähert werden, indem seine innere Struktur, seine Verbindung mit der Präposition *in* und seine eingebaute Logik besprochen wird.



## 5 Das Behältniskonzept

### 5.1 Grundlagen

Das Behältniskonzept gehört zu den basalsten Herkunftsbereichen vieler primärer und ist weiterhin an der Bildung einer großen Zahl komplexer konzeptueller Metaphern beteiligt. Lakoff/Johnson (2003: 25ff) behandeln es erstmals im Kapitel über ontologische Metaphern, die auf menschlichen Erfahrungen mit physischen Objekten beruhen und die ganz verschiedene Konzepte wie ZEIT, EMOTION oder IDEE strukturieren können. Unter den durch den verkörperten Geist erzeugten mentalen Strukturen reflektiert das Behälterkonzept die universelle Erfahrung der Differenz zwischen dem eigenen Körper und der physischen Umwelt, die sich als Gegenüber von innen und außen darstellt:

We are physical beings, bounded and set off from the rest of the world by the surface of our skins, and we experience the rest of the world as outside us. Each of us is a container, with a bounding surface and an in-out orientation. (ebd.: 29)

Zentrales Merkmal aller Behälter ist also ihre Begrenzung und die damit verbundene Unterscheidung eines inneren und eines äußeren Bereichs. Aufgrund der Bindung an elementare menschliche Erfahrungen ist das Schema kulturübergreifender Bestandteil aller konzeptuellen Systeme. Neben Gegenständen wie einer Tasse oder einem Zimmer, die sozusagen aus sich selbst heraus das Behälter-Schema erfüllen, werden auch Gebilde, die von allein dem Schema eigentlich gar nicht genügen, weil ihnen etwa eine feste Begrenzung fehlt, als Behälter verstanden. Insofern werden diese zum

Zielbereich einer konzeptuellen Metapher. Als einfaches Beispiel führen Lakoff/Johnson eine Waldlichtung an, von der man nur schwer sagen kann, wo genau ihre „Grenze“ verläuft, die aber trotz dieses unscharfen Randes als Behälter konzeptualisiert wird. Sie untermauern ihre These durch die beiden englischen Ausdrücke *in* und *out of the clearing*, in denen die beiden Präpositionen *in* und *out* aufgrund ihrer Verknüpfung mit dem Behälter-Schema die Behauptung einsichtig machen. Dass insbesondere auch abstrakte Konzepte als Behälter konzeptualisiert werden, zeigen im Detail beispielsweise Lakoff (1987: 380ff) für den Bereich des Ärgers und Jäkel (2003: 177ff) am Diskurs der Geistestätigkeit, in dem etwa Bewusstsein und Gedächtnis (z. B. *Das ist mir im Gedächtnis geblieben*) als Behälter verstanden werden. Darüber hinaus soll das Behälterkonzept sowohl im alltäglichen wie auch im wissenschaftlichen Denken so frequent<sup>1</sup> sein, dass es zu den Grundbestandteilen der Kognition – den Vorstellungs-Schemata – gezählt wird. Allein das Weg-Ziel-Schema (source-path-goal schema) als Muster einer gerichteten Bewegung von einem Start- zu einem Zielpunkt tritt in der Forschungsliteratur noch mit vergleichbarer Häufigkeit auf. Es überrascht daher nicht, dass es Bestrebungen gibt, die Vorstellungs-Schemata ihrerseits wieder in einfache und komplexe Schemata zu unterscheiden, wobei die komplexeren Schemata vom Behälter- und Pfad-Schema abhängig gemacht werden (vgl. Peña Cervel 1998-99: 262).

Die genannten drei Teile des Behälter-Schemas – Inneres, Rand, Äußeres – sind als Minimalstruktur weitgehend Konsens, ob darüber hinaus noch weitere Bestandteile anzunehmen sind, bleibt eine kontroverse Frage: Z. B. unterteilt Jäkel (2003: 176f) das Behälterinnere zusätzlich noch in ein

---

<sup>1</sup> Eine kleine Auswahl von in der Forschung diskutierten Metaphern, bei denen das Behälter-Schema im Herkunftsbereich involviert ist: EMOTIONEN SIND BEHÄLTER, MENSCHEN SIND BEHÄLTER FÜR EMOTIONEN, ZUSTÄNDE SIND BEHÄLTER, DER GEIST IST EIN BEHÄLTER, WÖRTER SIND BEHÄLTER, DAS GEDÄCHTNIS IST EIN BEHÄLTER, ZEIT IST EIN BEHÄLTER, DER KÖRPER IST EIN BEHÄLTER FÜR DEN GEIST, KATEGORIEN SIND BEHÄLTER, GRUPPEN SIND BEHÄLTER.

Zentrum sowie einen umgebenden Randbereich und unterscheidet außerdem zwischen offenen und geschlossenen Behältern, je nachdem ob äußere Einflüsse auf den Inhalt einwirken können oder nicht. Wenn man jedoch die Illustrationen Jäkels zu den einzelnen Behälterttypen betrachtet, stellt sich die Frage, ob er nicht statt eines mentalen Behälter-Schemas eher visuelle Formen seiner Darstellung beschreibt. Dabei war es er selbst, der darauf hinwies, wie wenig Vorstellungsschemata mit Bildern oder Propositionen gemein haben müssen. Häufig sind Behälter-Metaphern Teile einer übergeordneten Raummetaphorik wie im Falle der konzeptuellen Metapher *ZEIT IST EIN RAUM*, unter der Zeitabschnitte als Behälter konzeptualisiert werden können, die im Raum verschiedene Positionen zueinander einnehmen können und deren Entfernung zueinander beschrieben werden kann. Mit der Gegenüberstellung von Innen- und Außenraum kann weiterhin ein axiologischer (Plus-Minus-)Parameter verbunden sein, so dass etwa innen als gut, erstrebenswert, integriert und außen als schlecht, ausgeschlossen, isoliert bewertet wird. Oft geht mit einer Behälter-Metapher ebenfalls die Vorstellung von Kontrolle entweder des Behälters über seinen Inhalt oder umgekehrt einher (vgl. Peña Cervel 1998-99: 264). Diese Kontrolle kann sich bis zur Gefangennahme steigern, wie sie die sprachlichen Metaphern *Die Ehe ist ein Gefängnis* und *Ich bin einer ausweglosen Situation gefangen* realisieren. Hier werden die Ehe und eine Lebenslage als Behälter konzeptualisiert, die ihren Inhalt – die Ehepartner bzw. den Sprecher – am Verlassen hindern, ihn zwingen, innerhalb der Begrenzung zu bleiben. Am zweiten Beispiel zeigt sich durch das Lexem *ausweglos*, dass sich Behälter-Schema und Pfad-Schema kombinieren lassen. Wege verbinden Außen- und Innenraum miteinander, auf ihnen betritt oder verlässt man einen Behälter. Wer also in einer schwierigen Lage „festsitzt“, der sucht nach „Auswegen“ oder „Schlupflöchern“, um seinem Gefängnis zu „entrinnen“. Mit der Kontrolle kann auch ein Verlust an Sichtbarkeit einhergehen, wenn das In-

neren durch eine geschlossene Begrenzung von der äußeren Welt abgeschirmt wird. In Verbindung mit der konzeptuellen Metapher WISSEN IST SEHEN folgt daraus, dass ein in einem Behälter eingeschlossener Gedanke von der Außenwelt nicht gewusst wird. Man kann daher versuchen, die Bedeutung der Phraseologismen *etwas (Angst, Wut, Hass) in sich hineinfressen* ‚etwas verstecken und nicht herauslassen‘ mit Hilfe der konzeptuellen Metaphern DER KÖRPER IST EIN BEHÄLTER FÜR GEFÜHLE, GEFÜHLE SIND OBJEKTE und WISSEN IST SEHEN zu motivieren: Frisst man Gefühle in sich hinein, transportiert man die sonst für alle sichtbaren Gefühle in einen psychischen Innenraum, wo sie vor Außenstehenden verborgen sind. Allerdings können sie sich im Inneren „anstauen“ und schließlich Kraft der Metapher GEFÜHLE SIND KOCHENDE FLÜSSIGKEITEN irgendwann unvermittelt, wenn der „Druck“ zu groß wird, „ausbrechen“. Der zur Verfügung stehende Innenraum kann also begrenzt sein, wodurch er seinen Inhalt quantifizierbar macht:

And such defining of a territory, putting a boundary around it, is an act of quantification. Bounded objects, whether human beings, rocks, oder land areas, have sizes. This allows them to be quantified in terms of the amount of substance they contain. (Lakoff/Johnson 2003: 29/30)<sup>2</sup>

Die Möglichkeit, Behälter ihrer Größe nach zu quantifizieren, erlaubt es, sie entlang der Relationen „größer als ( $>$ )“, „kleiner als ( $<$ )“ oder „gleich ( $=$ )“ zu ordnen. In der Mathematik differenziert sich Quantifizierbarkeit weiter aus: Während das geometrische Messen auf eine Verallgemeinerung von Flächeninhalt und Volumen in der Maßtheorie hinausläuft, ist die Quantifikation i. e. S., also die Bestimmung der Anzahl, eine Grundlage der Arithmetik (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 54ff) und mündet schließlich in Cantors Mächtigkeitsbegriff.

---

<sup>2</sup> Vgl. dazu auch: „Quantifizierbarkeit ist keine Auszeichnung, über welche die Dinge von Natur aus verfügen, sondern ist das Interpretationskonstrukt seines operativen Verfahrens“ (Krämer 2009b: 123).

Die verschiedenen Erweiterungen, Konkretisierungen und Kombinationen des Behälter-Schemas mit anderen konzeptuellen Strukturen veranschaulichen die Flexibilität seiner triadischen Minimalstruktur. Die Varianz in den Strukturbeschreibungen des Schemas bei verschiedenen Autoren erklärt sich somit zum Teil aus den von ihnen untersuchten Bereichen, in denen das Schema in unterschiedliche komplexere Konzepte integriert ist.

## 5.2 Semantik versus Kognition am Beispiel der deutschen Präposition *in*

Im Rahmen ihrer holistischen, Bedeutung und Konzept identifizierenden Semantik gehen Lakoff/Núñez (ebd.: 30) davon aus, dass der zentrale Bestandteil der Bedeutung der Präpositionen *in* und *out* das Behälter-Schema sei. Zur einer vollständigen Bedeutungsbeschreibung fehlen ihnen zufolge dann noch zwei weitere Bestandteile: Zum einen werde ein Behälteraspekt gegenüber den anderen hervorgehoben. Während von der Präposition *in* das Innere markiert werde, fokussiere *out* den äußeren Bereich. Als Letztes fügen sie noch eine Figur-Grund-Unterscheidung hinzu, welche die Relation der beteiligten Gegenstände widerspiegeln soll. So bildet in der Äußerung *x in A* das Objekt *A* den Grund von dem aus das Objekt *x* zu lokalisieren ist (vgl. ebd.: 31). Insgesamt sollen also drei Komponenten an der Konstitution der Wortbedeutung von *in* beteiligt sein: Das Behälter-Schema, die Hervorhebung seines inneren Bereichs und eine Figur-Grund-Unterscheidung. Einige Aspekte dieser Bedeutungsbeschreibung sind besonders beachtenswert: Sie wird nicht auf den lokalen Gebrauch dieser Präpositionen eingeschränkt, sondern umfasst alle Verwendungsweisen. Sie ist unabhängig von der Art der Objekte, zwischen denen die Relation besteht, d. h. unabhängig von ihrer geometrischen Form, ihrer Funktion oder ihrer Belebtheit. Es wird lediglich die Minimalstruktur des Behälter-Schemas in Form der

Trichotomie von Außen, Rand, Innen genutzt, alle weiteren Parameter wie abgeschlossen/offen oder die Kontrollfunktion über den Inhalt finden keinen Eingang in die Bedeutung. Schließlich werden nur die Präpositionen *in* und *out* betrachtet, ohne systematisch auf benachbarte Präpositionen wie *over/über* oder *on/auf* einzugehen. In der Summe folgt dieser Ansatz einer Form der Monosemie-These, derzufolge jedes Lexem über genau eine, sehr abstrakte, nicht weiter in Teile zergliederbare Bedeutung verfüge, deren Leerstellen durch den Kontext gefüllt werden.

Auf der einen Seite ist es verwunderlich, dass sich in der kognitiven Metaphertheorie nach der ausführlichen Analyse der Präposition *over* in Lakoff (1987: 416ff), die von einem polysemen Wort mit unterschiedlichen aber verbundenen Teilbedeutungen ausgeht, kein vergleichbarer Standpunkt in Bezug auf *in* durchsetzen konnte, wie er etwa von (Rice 1992) favorisiert wird. Bedenkt man jedoch die wichtige Funktion der Präposition *in* in der kognitiven Metaphertheorie, dann werden die divergierenden Ansätze plausibler: So wird schon das Auftreten der Präposition *in* innerhalb einer Äußerung als ein hinreichender Beleg dafür gewertet, dass an dieser Stelle etwas als Behälter konzeptualisiert werde. Man vergleiche nur einmal die in Lakoff/Johnson (2003: 30f) aneinandergereihten Beispiele *I have him in sight*, *Are you in the race on Sunday* und *He's in love* als Belege für die Häufigkeit der Behälter-Metaphorik. Damit dieser Schluss gelingt, muss von einer festen Bindung einer Wortform an ein Konzept ausgegangen werden, die es erlaubt, bei der Analyse sprachlicher Äußerungen direkt auf Konzeptualisierungen zu schließen.

Um zu verdeutlichen, dass sowohl die Monosemie-These als auch das holistische Semantikmodell zu Problemen bei der Bedeutungsbeschreibung der deutschen Präposition *in* führen, werden im Folgenden einige Verwendungsweisen dieser Präposition beschrieben, zunächst unter der Prämisse, dass die Annahmen der kognitiven Metaphertheorie zutreffen, um dann

am konkreten Fallbeispiel Widersprüche aufzuzeigen. Nimmt man also an, zwischen Bedeutung und Konzept gäbe es keinen wesentlichen Unterschied und auch im Deutschen liefe die Bedeutung der Präposition *in* hauptsächlich auf das Behälter-Schema unter Fokussierung des Innenbereichs hinaus, so müssten alle Verwendungsweisen damit interpretiert werden können. Jede Äußerung der Form *x in A* ist dann entweder wörtlich zu verstehen oder realisiert eine konzeptuelle Metapher der Form *A IST EIN BEHÄLTER*, welche das Vorstellungs-Schema *BEHÄLTER* auf das jeweilige von *A* bezeichnete Konzept projiziert und das Objekt *x* im Inneren von *A* lokalisiert.

Auskunft über die Verwendungsweisen der Präposition *in* geben traditionelle Grammatiken. Die Duden-Grammatik unterscheidet hinsichtlich der Semantik lokale, temporale, modale, kausale und neutrale Verhältnisse, die von Präpositionen ausgedrückt werden können. Für die Präposition *in* heißt das konkret:

in: in den Wald (lokal) – in drei Wochen (temporal) – in roter  
Farbe (modal) – sich in jemanden verlieben (neutral) (Duden.  
Die Grammatik: 610)

### Lokaler Gebrauch

Für das Deutsche ist zunächst zwischen der Verwendung der Präposition *in* mit Akkusativ und Dativ zu unterscheiden. An dieser Stelle beschränken wir uns auf Phrasen, in denen die Präposition ein Nomen im Dativ regiert und so die lokale Beziehung zweier Objekte als statische Gegebenheit ausdrückt. Die Verwendung mit Akkusativ bezieht sich dagegen auf eine Bewegung und entspricht eher der englischen Präposition *into*. Eine Möglichkeit, die Bedeutung einer Äußerung wie *Hans ist im Wald* zu beschreiben, besteht in der Verwendung räumlicher Begriffe oder entsprechender Visualisierungen. So lässt sich nach Eisenberg die lokale Bedeutung von Präpositionen über eine Topologie erfassen, die sich wie eine Beschreibung des Behälter-Schemas liest:

Die Bedeutung der Präpositionen in 7a [in, an, bei, zu, nach, von, aus, durch] erfaßt man einfach und elegant mit Hilfe topologischer Begriffe wie dem des Raumbereiches, der Begrenzung (dem Rand) des Raumbereiches und der Umgebung des Raumbereiches. (Eisenberg 1999: 191)

Raumbereich, Begrenzung und Umgebung entsprechen exakt den drei Komponenten des Behälter-Schemas Innenraum, Rand und Außenraum. An der Äußerung *Hans ist im Wald*, lässt sich die Beschreibung der Bedeutung durch topologische Begriffe gut nachvollziehen: Wälder werden als Behälter verstanden, die man betreten und verlassen kann, wenn man die Waldgrenze überquert, und Hans befindet sich zur Äußerungszeit im Inneren des Waldbehälters. Bereits bei diesem eher profanen Beispiel würde die kognitive Metaphertheorie analog zur bereits diskutierten Waldlichtung von einer konzeptuellen Metapher ausgehen, da Wälder von Natur aus keine Behälter sind, sondern erst als solche konzeptualisiert werden müssen. Das ließe sich gut an weiteren Kollokationen, Phraseologismen und Wortbildungen (z. B. *Waldgrenze*, *Walddinneres*, *Waldrand*, *Waldgebiet*) näher bestimmen, die auf die konzeptuelle Metapher EIN WALD IST EIN BEHÄLTER hindeuten. Das Konzept WALD wird über das Vorstellungsschema BEHÄLTER strukturiert, mit einem Inneren, einem Äußeren und einer beide trennenden Grenze versehen, um dann den inneren Bereich gegenüber den anderen Teilen hervorzuheben. Dennoch zögert man, schon die Äußerung *Hans ist im Wald* als metaphorisch einzustufen zu wollen.

Problematisch wird an der Beschreibung der lokalen Bedeutung zunächst die Fokussierung des Innenbereichs. Man vergleiche dazu die Präpositionalphrasen *das Wasser in der Vase* und *der Riss in der Vase*. Nicht in beiden Fällen ist der Vaseninnenraum markiert. Erst durch Rückgriff auf entsprechendes Weltwissen über Vasen wird festgelegt, welcher Teil des Gefäßes gemeint ist: Während sich das Wasser im Vaseninneren befindet, gehört der Riss zur Vasenwand. Man könnte einwenden, dass in im zweiten Beispiel eine metonymische Bedeutungsverschiebung stattgefunden ha-



be, bei der *Vasenwand* durch *Vase* auf Grund einer Teil-Ganzes-Beziehung substituiert wurde. Dann könnte der Bedeutungsaspekt der Fokussierung des inneren Bereichs beibehalten werden, wenn man davon ausginge, dass jetzt die Vasenwand den Bezugspunkt bildete, die dann eben als Behälter zu konzeptualisieren wäre. Das Problem läge also nicht bei der Präposition *in*, sondern im Wort *Vase*.

Ein andere Schwierigkeit tritt an der Phrase *die Blumen in der Vase* auf, bei der man üblicherweise nicht versteht, dass sich die Blumen vollständig im Inneren der Vase befinden, sondern dass ein Teil über sie hinausragt. Man müsste also den Teil der Bedeutungsbeschreibung von *x in A*, dass *x* im Inneren von *A* lokalisiert ist, zumindest so modifizieren, dass es auch genügt, wenn sich nur ein Teil von *x* in *A* befindet. Wie viel von *x* allerdings in *A* sein muss, damit die Präposition *in* anwendbar ist, bleibt damit offen.

Damit ist allgemeiner zu fragen, ob die lokale Bedeutung vollständig im Behälter-Schema aufgeht oder ob man nicht auch nicht-begriffliche Bedeutungsaspekte wie Gebrauchsregeln mit betrachten sollte. Hier kommt zum Tragen, dass die Präposition *in* ein relationaler Ausdruck ist und Sprachbenutzer über enzyklopädisches Wissen in Bezug auf die in Beziehung gesetzten Gegenstände verfügen. Für Coventry u. a. ist beispielsweise das Wissen über typische Funktionen des Grunds entscheidend, ob *in* zulässig ist:

**in:** functional containment—*in* is appropriate if the ground is conceived of as fulfilling its containment function. (Coventry/Carmichael/Garrod 1994: 291)

Die Präposition *in* ist demzufolge immer dann anwendbar, wenn der Grund seine Rolle als Behälter – natürlich in Bezug auf eine bestimmte Figur – wahrnehmen kann. Die Entscheidung, ob diese funktionale Relation gegeben ist, erfolgt aber nicht auf ontologischer Basis anhand der realen Objekte, sondern vermittelt durch ein mentales Modell der betreffenden Situation. Im Gegensatz zur Bedeutungsbeschreibung der Präposition bei

Lakoff/Núñez mithilfe des Behälter-Schemas trennen Coventry u. a. die Enthaltenseins-Relation von räumlichen Vorstellungen einer Lokalisation:

It must be the case that knowledge of what objects are for and how objects interact with each other [...] provides the basis for conceptions of spatial arrangements. Thus the construction of mental models of space have more to do with functional constraints than fine geometric distinctions. (Coventry/Carmichael/Garrod 1994: 305)

Die Autoren versuchen ihre These mittels psycholinguistischer Experimente zu verifizieren, bei denen Probanden Szenen verschiedener Behälter, die über den Rand mit festen Objekten gefüllt sind, gezeigt werden und die Probanden die Angemessenheit einer bestimmten Präpositionswahl bei der sprachlichen Beschreibung dieser Situationen bewerten sollen. Es gelingt ihnen nachzuweisen, dass *in* deutlich häufiger bei einer Schüssel als bei einer Kanne als akzeptabel eingestuft wird, wenn der Stapel der den Behälter füllenden Objekte hoch ist (vgl. ebd.: 296). Dieses Phänomen erklären sie über die verschiedenen Funktionen, die mit den Behältern verbunden werden: Eine Kanne werde meist nicht zum Aufbewahren fester Stoffe, sondern für Flüssigkeiten verwendet. Man könnte daher eine Applikationsregel wie ‚Wenn ein Objekt üblicherweise dazu benutzt wird, einen bestimmten Gegenstand zu enthalten, dann verwende *in*‘ ansetzen.

In der Forschung wird noch eine ganze Reihe weiterer Eigenschaften von Figur und Grund untersucht, die einen Einfluss auf die Wahl der Präposition zu haben scheinen. Feist/Gentner (2003) analysieren beispielsweise die Geometrie des Grunds, d. h. den Grad seiner Konvexität, und die Belebtheit sowohl des Grunds als auch der Figur als Einflussfaktoren auf die Wahl zwischen *in* und *on*. Sie kommen zu dem Schluss, „that the appropriate use of spatial prepositions in English is influenced by a complex set of interacting factors“ (ebd.: 394). Das Behälter-Schema allein kann diese Befunde zum lokalen Gebrauch nicht ausreichend erklären.

## Temporaler Gebrauch

Wie werden nun temporale Verhältnisse etwa in der Phrase *in drei Wochen* interpretiert? Soll man eine konzeptuelle Metapher ZEIT IST EIN BEHÄLTER ansetzen, die solchen Äußerungen zugrunde liegt? Ja, meinen Lakoff/Johnsen:

The same correlation is a basis for the TIME IS A CONTAINER metaphor [...], with the bounded space traversed by the object correlated with the time the object takes to traverse it. Events and actions are correlated with bounded time spans, and this makes them CONTAINER OBJECTS. (Lakoff/Johnson 2003: 59)

Als Beispiel geben sie den Satz *He did it in ten minutes* an, bei dessen Interpretation die Zeitdauer von zehn Minuten in eine räumliche Ausdehnung übersetzt werde. Das Zeitliche werde so mit dem Räumlichen über den Aspekt der Bewegung verknüpft. Im Sinne des Embodiments folge die Notwendigkeit der metaphorischen Erfassung von Zeit aus der biologischen Struktur des menschlichen Körpers, der über kein Organ verfüge, um Zeit direkt wahrzunehmen, aber über Organe zur Wahrnehmung von Bewegung, weshalb Menschen Zeit immer nur in Verbindung mit Bewegung wahrnehmen können.<sup>3</sup> Dies führe zur Konzeptualisierung von Zeit als Raum und schlage sich schließlich in den entsprechenden sprachlichen Ausdrücken nieder (vgl. Lakoff 1990: 57).

Ähnlich sieht es auch Eisenberg, der von der Sprache ausgehend einem Übertragungsprozess von Wörtern mit ursprünglich rein lokaler Bedeutung annimmt:

---

<sup>3</sup> Dass es sich dabei nur um einen scheinbaren Gemeinplatz handelt, wenn der Vorrang des Raumes vor der Zeit postuliert wird, darauf macht Krämer aufmerksam: „Vielleicht eröffnet gerade die Hörerfahrung [...] ein genuin sinnliches Erleben von Zeit. Doch der theoretische Diskurs über die Zeit sowie fast alle Versuche zur symbolischen Darstellung von Zeit bedienen sich der Sprache des Raumes. Zeitverhältnisse analytisch zu charakterisieren heißt also in der Tradition der abendländischen Philosophie und Wissenschaft: Die Zeit ist zu verräumlichen“ (Krämer 2009b: 114). Wenn man diese Annahme zulässt, ist zu überlegen, ob Zeit nicht doch direkt sinnlich wahrgenommen und in der Konsequenz auch ohne konzeptuelle Metaphern gedacht werden kann.

Die meisten Präpositionen mit temporaler Bedeutung sind offensichtliche Übertragungen aus dem Räumlichen. (Eisenberg 1999: 193)

Dieser Übertragungsbegriff unterscheidet sich allerdings vom dem der kognitiven Metaphertheorie: Er geht von einer grundsätzlichen Wörtlichkeit der lokalen Verwendungsweisen aus und würde die Phrase *in den Wald* als wörtlich einstufen, wohingegen für die kognitive Metaphertheorie hier auf kognitiver Ebene schon eine Metapher vorliegt.<sup>4</sup> Im Rahmen dieser Übertragung können temporale Relationen durch Präpositionen mit ursprünglich lokaler Bedeutung ausgedrückt werden. Die konzeptuelle Metapher ZEIT IST EIN BEHÄLTER ist also dann zutreffend, wenn man sich klarmacht, dass nicht Zeit selbst als Behälter verstanden wird, sondern einzelne Zeitabschnitte als Behälter konzeptualisiert werden. Es wäre daher angemessener, von der konzeptuellen Metapher ZEIT IST EIN RAUM zu sprechen, wie es sonst auch üblich ist.

Die die Metaphorisierung der Zeit differenziert sich dabei sowohl im Englischen als auch im Deutschen in zwei Subtypen aus: TIME IS A MOVING OBJECT und TIME IS STATIONARY AND WE MOVE THROUGH IT (vgl. Lakoff/Johnson 2003: 41ff). Eine sprachliche Äußerung, die nach der ersten Metapher funktioniert, ist etwa *die Zeit vergeht wie im Flug* und für die zweite Metapher *wir nähern uns dem Wochenende*. Jede der beiden Metaphern erzeugt eine etwas andere Topologie, die das Zeitkonzept strukturiert: Einmal ist der Sprechende unbeweglich während sich die Zeit von vorn auf ihn zubewegt, ihn im Moment der Gegenwart streift und sich dann wieder von ihm entfernt, im anderen Fall bewegt sich der Sprechende durch die nun statische Zeit hindurch in Richtung Zukunft mit dem Rücken

---

<sup>4</sup> Die Begründung für die Verwendung des Attributs *wörtlich* ist hier wohl ein etymologisches Argument: Die lokale Bedeutung wird als sprachgeschichtlich primär angenommen und damit als die eigentliche bzw. wörtliche Bedeutung deklariert, von der aus Übertragungen der Präpositionen auf andere Gebiete stattfinden können.

zur Vergangenheit.<sup>5</sup> Feist/Gentner (2003) gelang es zu erhärten, dass beide Metaphern psychisch real sind, dass also nicht nur über Zeit in räumlichen Termini gesprochen, sondern dass über zeitliche Verhältnisse in räumlichen Strukturen nachgedacht wird.

In die übergeordnete Raum-Metaphorik scheint sich das Behälter-Schema einzufügen. Jedoch ist eine Äußerung wie *In einer Woche finden zwei Konferenzen statt* mehrdeutig: Die beiden Konferenzen können innerhalb einer Woche oder nach Ablauf einer Woche vom Sprechzeitpunkt aus gesehen stattfinden. Die erste Lesart ist vereinbar mit dem Behälter-Schema: Es wird zwar kein Hinweis darauf gegeben, wann relativ zum Sprecherzeitpunkt das Ereignis zu lokalisieren ist, jedoch befindet sich das Ereignis der Konferenzen innerhalb des Zeitintervalls von einer Woche. Bei der zweiten, deiktischen Interpretation dagegen wird ein Zeitpunkt angegeben, der nach der Sprechzeit liegt, und das Ereignis des Konferenzbeginns wird außerhalb des spezifizierten Zeitraums von einer Woche lokalisiert. Die Präposition *in* verweist dann nicht auf das durch die Nominalphrase *einer Woche* bezeichnete „Innere“ eines Zeitabschnitts, sondern auf den Bereich, der auf dem Zeitstrahl „rechts“ dieses Zeitabschnitts liegt. Damit dient sie eher einer zeitlichen Orientierung als einer Lokalisierung. Beide Interpretationen vertragen sich zwar mit der Metapher ZEIT IST RAUM, aber zumindest die orientierende Funktion von *in* bezieht sich nicht auf das Innere eines Behälters, sondern erlaubt die temporale Einordnung eines Ereignisses in Relation zu einem Zeitabschnitt.

---

<sup>5</sup> Während man lange davon ausging, dass die Zukunft universal als vor und die Vergangenheit als hinter dem Betrachter liegend konzeptualisiert wird, stellten Núñez/Sweetser (2006) für Aymara, eine südamerikanische in den Anden Westboliviens verbreitete Sprache, fest, dass dort genau umgekehrt die Zukunft hinter und die Vergangenheit vor dem Betrachter liegt.

### Modaler Gebrauch

Besonders deutlich wird die Problematik des Behälter-Schemas, wenn man sich modalen Verwendungen der Präposition *in* zuwendet. Dazu zählen etwa folgende Äußerungen:

- Das Bild war in Öl gemalt.
- Das Hemd in rot ...

Die Äußerungen beschreiben jeweils jeweils eine Eigenschaft (Material, Farbe) eines Gegenstandes näher. Aber muss sich deswegen gleich eine konzeptuelle Metapher vom Typ EIGENSCHAFTEN SIND BEHÄLTER dahinter verbergen oder ist dies nicht eher ein rein semantisches Phänomen, ohne Einflussnahme des konzeptuellen Systems? Selbst wenn man von einer Übertragung der lokalen Grundbedeutung in abstraktere Bereiche ausgeht (lokal → temporal → modal?), fehlt der modalen Bedeutung zumindest in den hier besprochenen Beispielen doch jeder Bezug zum Behälter-Schema, der über das Auftreten der Präposition *in* hinausgeht.

### Neutraler Gebrauch

Am Ende der Skala liegt die neutrale Verwendung, bei der die Präposition *in* (fast) keine eigene Bedeutung mehr trägt, sie also bedeutungsleer oder bedeutungsneutral ist (vgl. Duden. Die Grammatik: 613). Wie sich die Rekonstruktion konzeptueller Metaphern in einem solchen Fall verhält, darüber macht die kognitive Metaphertheorie keine Angaben, aber ohne Bedeutung sollte zumindest synchron auf kein kognitives Metaphernmodell geschlossen werden können. Diese Verwendung findet sich beispielsweise in feststehenden Wendungen wie beispielsweise bei *im Allgemeinen*. Wie hätte man sich hier die Konzeptualisierung als Behälter vorzustellen. Auf

welche Weise könnte das Allgemeine einen Innen- und Außenbereich aufweisen? Weiterhin findet sich diese Verwendung bei Präpositionalobjekten (*sich in jemanden verlieben*), Funktionsverbgefügen (*in Gang setzen, in Rechnung stellen*) oder festen präpositionalen Wortverbindungen (*in Bezug auf*). Vielleicht ist es möglich, wenn man nur weit genug die Etymologie dieser Phrasen zurückverfolgt, plausibel zu machen, dass irgendwann heute neutrale Verhältnisse tatsächlich als Behälter interpretiert wurden. Für eine „kognitive Archäologie“ kann das sicher interessant sein, jedoch sind Schlüsse auf das Denken gegenwärtiger Sprachbenutzer damit sehr unplausibel. So käme wohl niemand ernsthaft auf die Idee, aus *in Bezug auf* eine Behälter-Metaphorik ableiten zu wollen.

Aus diesen vier Gebrauchsmöglichkeiten lässt sich schlussfolgern, dass die Präposition *in* im Allgemeinen keinen hinreichenden Indikator darstellt, um eine konzeptuelle Metapher vom Typ X IST EIN BEHÄLTER sicher rekonstruieren zu können. Lakoff und Johnson betonen ja selbst immer wieder den systematischen Charakter ihrer konzeptuellen Metaphern als kognitive Modelle, die ein ganzes Bündel sprachlicher Metaphern motivieren sollen. Daher erwartet man mehr als nur ein Sprachbeispiel, um wenigstens mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf kognitive Strukturen schließen zu können. Eine einfache Gleichsetzung von Bedeutung und Konzepten kann so jedenfalls nicht funktionieren.

### 5.3 Eine fest eingebaute Logik?

Erkenntnistheoretisch brisant ist die Behauptung der kognitiven Metaphertheorie, jedes Vorstellungsschema verfüge über seine eigene „fest eingebaute Logik“, die unmittelbar aus dem Gestaltcharakter der Schemata als „Emergenzphänomen“ (Linz 2002: 101) entstehe und ohne weite-

re kognitive Anstrengung sofort für Schlussfolgerungen verfügbar sei. Die weitreichenden Auswirkungen einer solchen Annahme werden klar, wenn man sich noch einmal den Inhalt der Invarianz-Hypothese vergegenwärtigt: Metaphorische Projektionen erhalten Vorstellungs-Schemata, somit erbt der Zielbereich die kognitive Topologie des Quellbereichs und übernimmt automatisch dort gültige Schlussfolgerungsmuster. Stellt man sich das konzeptuelle System hierarchisch geordnet vor, dann bilden die Vorstellungs-Schemata die Wurzel, aus der sich immer komplexere Konzepte herausbilden, deren gültige logische Schlussfolgerungsmuster immer Variationen der Logik der Schemata sind:

So-called propositional inferences arise from the inherent topological structure of the image-schemas mapped by metaphor onto concepts like time, states, changes, actions, causes, purposes, means, quantity, and categories. (Lakoff 1990: 65)

Die Wahl des Adjektivs *topologisch* zur Charakterisierung dieser Logik verriet, dass im weitesten Sinne räumliche Strukturen gemeint sind. Darüber hinaus würde man sich eigentlich eine möglichst exakte Bestimmung von dem, was hier unter *Logik* verstanden werden soll, wünschen, insbesondere da Vorstellungs-Schemata ja gerade nur zu einem Teil propositional aufgebaut sein sollen. Wie genau diese intuitiv-basale Logik aussehen soll, bleibt jedoch weitgehend im Dunklen. Man muss sich mit der Betrachtung von Beispielen begnügen.

Vor allem zwei Schemata werden als Träger einer solchen Logik immer wieder genannt – das Behälter- und das Weg-Schema. Da sie bei Lakoff/Núñez als relevant für die Konzeptualisierung einer Reihe mathematischer Ideen erachtet werden, konzentriert sich die folgende Betrachtung auf diese beiden, wobei der Fokus auf dem für das Mengenkonzept zentrale Behälter-Schema liegt.



Mit dem Weg-Schema werden etwa reellwertige Funktionen einer Variablen als Bewegung eines Punktes entlang eines Pfades konzeptualisiert, was sich sprachlich durch Ausdrücke wie *die Funktion steigt/fällt, durchquert eine Nullstelle* oder *sie erreicht ihr Maximum* manifestiere (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 38). Das Schema selbst konstituiert sich aus drei Hauptkomponenten: Einem Ursprung, einem Ziel und einem Pfad, der Ursprung und Ziel miteinander verbindet. Entlang dieses Pfades bewegt sich ein Objekt vom Startpunkt in Richtung des Ziels. Die dabei geltende interne Logik umfasse ein Schlussfolgerungsmuster:

Path inference: if you are going from A to C, and you are now at an intermediate point B, then you have been at all points between A and B and not at any points between B and C. (Lakoff 1993: 214)

Zur Veranschaulichung greift Lakoff auf das Beispiel einer Autofahrt zurück, die sich folgendermaßen an deutsche Verhältnisse anpassen lässt: Wer auf der A2 von Hannover nach Berlin fährt und sich gerade in Magdeburg befindet, war schon in Braunschweig, aber noch nicht in Brandenburg. Dieses „Pfad-Gesetz“ folge unmittelbar aus der kognitiven Topologie von Pfaden, d. h. es sei kein Nachdenken nötig, um seine Gültigkeit zu erkennen. Alle Zielbereiche konzeptueller Metaphern, deren Ursprungsbereich entweder das Pfad-Schema selbst oder ein Bereich, zu dessen Bestandteilen das Pfad-Schema gehört, ist, erben automatisch Kraft der Invarianz-These dieses Gesetz. Als Beispiel diskutiert Lakoff das Konzept QUANTITÄT, das neben den beiden viel zitierten Metaphern MORE IS UP und LESS IS DOWN auch durch die Metapher LINEAR SCALES ARE PATHS strukturiert werde, was sich in den folgenden deutschen Sprachbeispielen zeigen könnte (vgl. ebd.: 213f):

- (1) John ist weit intelligenter als Bill.
- (2) Johns Intelligenz übersteigt die von Bill.

(3) Johns Intelligenz ist der von Bill meilenweit voraus.

Dass hier Intelligenz<sup>6</sup> als mess- und vergleichbarer Wert auf einer Skala verstanden wird, ist für Lakoff nicht der wesentliche Punkt, sondern vielmehr, dass die zur Beschreibung dieser Skala eingesetzten Lexeme und Phraseologismen, räumliche Interpretationen im Sinne einer Entfernung und Bewegung besitzen.<sup>7</sup> Die Intelligenzskala wird so als Pfad verstanden und Orte auf diesem Pfad markieren einen bestimmten Intelligenzgrad, der umso höher ist, je weiter dieser Ort vom Ursprung entfernt ist. Daher verwendet man, um die Intelligenz zwischen verschiedenen Personen oder zwischen einer Person zu unterschiedlichen Zeiten zu vergleichen, Entfernungsangaben und Verben der Bewegung. Überträgt man nun das Pfad-Gesetz, so muss für das Konzept der Intelligenz gelten: Ändert sich die Intelligenz einer Person von *A* zu *C*, so war sie zuvor auf jedem Niveau *B* zwischen *A* und *C*. Diese Folgerungsmuster gelte für alle Skalen, jedoch diskutiert Lakoff ein Beispiel, bei dem sich die Interpretation plötzlich verändert:

If you have exactly \$50 in your bank account, then you have \$40, \$30, and so on, but not \$60 \$70, or any larger amount. (Lakoff 1990: 53)

Im Gegensatz dazu wird aber niemand mit einem IQ von 110 behaupten, er hätte auch einen IQ von 90 oder 80. Warum hier unterschiedliche Interpretationen vorliegen, wird von Lakoff nicht erklärt. Wahrscheinlich muss man doch davon ausgehen, dass enzyklopädisches Wissen über den Zielbereich das Pfad-Gesetz beeinflusst.<sup>8</sup> Damit würde man allerdings gegen die

---

<sup>6</sup> Gemeint ist ein Alltagsverständnis von Intelligenz, nicht der psychologische Fachbegriff.

<sup>7</sup> Bestätigt wird die Relevanz der Weg-Metaphorik für das Intelligenzkonzept durch die korpuslinguistische Untersuchung von Goschler (2008).

<sup>8</sup> Zu einem vergleichbaren Ergebnis kommt Hampe bei der Betrachtung von Bewertungsmaßstäben, die in Vorstellungs-Schemata integriert sind: „Overall, this comes down to rejecting the plus-minus parameter in image-schema theory in its current form and claiming that axiological default components are determined by broader and richer conceptual frames relating to aspects of experience not captured by single, isolated (“primitive”) image schemas“ (Hampe 2005b: 107).

Form der Invarianz-Hypothese, dass die kognitive Topologie des Ursprungsbereichs unangetastet in den Zielbereich übertragen wird, verstoßen. Als weiteres Beispiel nehme man den Fall, dass sich der Preis eines Produkts schlagartig von 30 € auf 50 € erhöht. Wie soll man hier das Pfad-Gesetz anwenden? Da der Preis gesprungen ist, kann man nicht sagen, dass Produkt hätte einmal auch 35 € und 40 € gekostet. Ebenso unsinnig ist ebenfalls eine Lesart analog zum Kontostand, sonst würde das Produkt 50 € und gleichzeitig alle kleineren Beträge kosten. Ohne ausreichende Berücksichtigung des Zielbereichs ist die „interne Logik“ des Pfad-Schemas daher nur eingeschränkt verwertbar.

Noch prominenter ist das Behälter-Schema, mit dessen Hilfe wir Handlungen, Zustände, Beziehungen, aber auch klassische Kategorien, Mengen und Aussagen konzeptualisieren und dort Schlüsse mit dessen basaler Logik ziehen sollen. Zwei Prinzipien stehen im Zentrum dieser Logik: Das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und das Gesetz der Transitivität (vgl. Lakoff 1987: 272). In der klassischen zweiwertigen Logik ist eine Aussage entweder wahr oder falsch, ebenso wie sich etwas entweder in einem Behälter oder außerhalb dieses Behälters befindet. Das logische Prinzip *entweder  $p$  oder nicht  $p$*  entspringe also dieser räumlichen Ordnung.<sup>9</sup> Das Prinzip der Transitivität wird in zwei Sätzen entweder in einem Logikkalkül oder wie im Folgenden sprachlich formuliert (vgl. Lakoff/Núñez 2000: 31):

- (1) Gegeben seien zwei Behälter-Schemata  $A$  und  $B$  und ein Objekt  $X$ .  
Wenn  $A$  in  $B$  enthalten ist und  $X$  sich in  $A$  befindet, folgt daraus, dass  $X$  auch in  $B$  ist.
- (2) Gegeben seien zwei Behälter-Schemata  $A$  und  $B$  und ein Objekt  $Y$ .

---

<sup>9</sup> Aus Lakoffs Bemerkungen geht nicht eindeutig hervor, ob damit auch der Schluss  $\neg\neg A \Rightarrow A$  zur Logik des Behälter-Schemas gehört, ob man also immer aus  $X$  *ist nicht außerhalb des Behälters  $A$*  schließen kann, dass  $X$  *ist in  $A$*  gelten muss. Diese Frage stellt sich, da dieses Prinzip nicht überall vollständig akzeptiert wird. So ist in der intuitionistischen Logik der Schluss  $\neg\neg A \Rightarrow A$  im Allgemeinen ungültig.

Wenn  $A$  in  $B$  enthalten ist und  $Y$  sich außerhalb von  $B$  befindet, dann ist  $Y$  auch außerhalb von  $A$ .

Diese Variante wird in praktisch allen „Klassikern“ der kognitiven Metaphertheorie regelmäßig durchexerziert.<sup>10</sup> Wie schon beim Pfad-Schema soll die Gültigkeit dieser Schlussfolgerungsmuster offensichtlich sein, da sie untrennbar in die topologische Struktur des Behälter-Schemas eingeschrieben sind und jeder Mensch auf Grund seiner biologischen Determination über dieses Schema verfügt. Aus der Angabe, dass sich jemand in Berlin befindet, kann geschlossen werden, dass sich diese Person auch in Deutschland und in Europa aufhält, da man weiß, dass sich Berlin in Deutschland und Deutschland wiederum in Europa befindet, und geographische Räume als Behälter konzeptualisiert werden, womit das Gesetz der Transitivität diesen Schluss legitimiert. Ebenso ist klar, wenn man sich außerhalb Deutschlands aufhält, man nicht in Berlin sein kann. Jedoch zeigt sich hier schon eine Einschränkung der Transitivität: Die konkreten Ausformungen der Relation des Enthaltenseins zwischen  $A$  und  $B$  sowie zwischen  $X$  und  $A$  müssen gleichartig sein. May (1995: 291) diskutiert ein Beispiel, bei dem in einem See ( $A$ ) in einem Wäldchen ( $B$ ) ein Fisch ( $X$ ) lebt. Die Schlussfolgerung, dass der Fisch auch in dem Wäldchen lebe, wirkt deswegen seltsam, weil die Relation zwischen See und Wäldchen, eine andere ist, als die zwischen See und Fisch. Der See liegt in dem Wäldchen, während der Fisch im See lebt und ohne den See nicht leben könnte, während der See auch außerhalb des Waldes existieren kann. Auf diese Weise lassen sich Schlüsse mit ungewöhnlichen oder absurden Konklusionen konstruieren, wie etwa dieser hier:

- (1) Italien ist in der EU.
- (2) Der Vatikan liegt in Italien.

---

<sup>10</sup> Eine unvollständige Liste: Lakoff (1987: 272; 1990: 52; 1993: 213), Lakoff und Turner (1989: 99), Lakoff und Johnson (1999: 31), Johnson (2008: 179).

(3) Der Vatikan ist in der EU.

In Satz (1) ist gemeint, dass Italien ein Mitglied der Europäischen Union ist, während Satz (2) eine geographische Angabe, über die Lage des Vatikanstaates macht. Wieder sind die Relationen ungleichartig und die Konklusion ist in diesen Fall sogar falsch, obwohl das Transitivitätsgesetz den Schluss als gültig betrachtet.

Insbesondere sollen nun auch klassische Kategorien, Aussagen und Mengen als Behälter konzeptualisiert werden, deren logische Eigenschaften aus den topologischen Eigenschaften des Behälter-Schemas Kraft einer metaphorischen Projektion folgen (vgl. Lakoff 1990: 52). Um die Evidenz der beiden Sätze des Transitivitätsprinzips in der Mengenlehre zu veranschaulichen, präsentieren Lakoff/Núñez folgende Mengendiagramme:

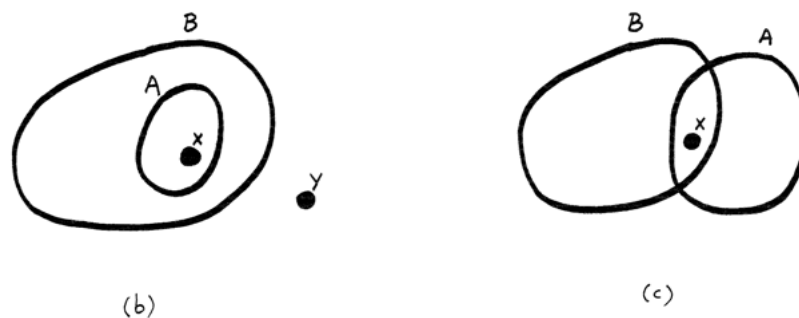


Abbildung 1: Lakoff/Núñez 2000: 32

Man soll hier die Transitivität unmittelbar, also ohne einen Interpretationsprozess durchlaufen zu müssen, sehen können. May argumentiert gegen diese Auffassung unter Rekurs auf die Zeichentheorie von Peirce, denn „Sehen ist ein semiotischer Prozeß, der einen Interpretationsakt umfaßt“ (May 1995: 292). Ihm zufolge begehe Lakoff eine unzulässige „ikonistische“ Reduktion mathematischen Denkens“ (ebd.: 298) und unterschätze den Symbolcharakter solcher Diagramme. Die Interpretation einer Figur

als Diagramm stelle sich demnach nicht von allein ein, wie es bei einem rein ikonischen Zeichen zu erwarten wäre, sondern ist an die Absicht gebunden, diese Figur als Mengen-Diagramm mit spezifischen Eigenschaften sehen zu wollen. Damit wird aber die Annahme, dem Behälter-Schema wären die genannten logischen Prinzipien eingeschrieben, widerlegt:

Die Logik der Transitivität und des ausgeschlossenen Dritten kann nicht in irgend einer simplen Weise in die kognitive Topologie von Innen/Außen-Schemata eingebaut sein, da jedes konkrete logische Diagramm, das Innen/Außen-Beziehungen nutzt, unterschiedliche Interpretationen zulässt, die von der Interpretationsabsicht und dem unterstellten Wissen abhängen. (May 1995: 298)

Als Beispiel führt May das Diagramm aus Abbildung 1(b) an, in dem man auch die Projektion eines Torus in eine Ebene sehen kann. Der Punkt  $x$ , den Lakoff/Núñez als im Inneren liegend interpretieren, befindet sich dann außerhalb des Torus. Mays Resultate decken sich mit den Ergebnissen zum Pfad-Schema, dass der Zielbereich und dessen zeichenhafte Repräsentation eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der Konstruktion gültiger Schlussfolgerungsmuster spielen.

Damit in Zusammenhang steht auch die Kritik der rezenten Bilderforschung am Versuch, Logisches auf Topologisches zurückführen zu wollen. Dort werden Logikbegriffe, die vor allem die Aspekte der Zweiwertigkeit, die Anwendung der Negation oder die Eindeutigkeit betonen, zurückgewiesen, da diese Eigenschaften gerade auf Bilder nicht zutreffen und so verdecken, dass Bilder ihre eigene Logik haben (vgl. Heßler/Mersch 2009: 9f). Insofern Diagramme und diagrammatisches Denken aber eine Form des Operierens mit Bildern sind, sollten die spezifischen Eigenschaften dieses Medium Berücksichtigung finden. Gegen diese Kritik wehren sich Lakoff/Núñez (2000: 32f) mit einem Rückzug auf die kognitive Ebene, denn sie weisen darauf hin, dass man zwischen physischen und kognitiven Behältern unterscheiden müsse: Zwar werden greifbare Behältnisse als kognitive

Behälter konzeptualisiert, aber ihre unterschiedlichen ontologischen Modi (materiell gegenüber immateriell) erzeugen eine jeweils andere Logik. Die beiden logischen Schlüsse zur Transitivität sollen für jede Art von Behälter gültig sein, doch nur kognitive Behälter können als Teil des mentalen Innenraums zusätzlich Durchschnitte bilden, was physischen Behältern grundsätzlich unmöglich sei, weshalb diese dann auch nur von zweitrangigem Interesse sind. Mays Kritik ist damit zwar nicht ausgeräumt, aber immerhin räumen die Autoren wenigstens einen Unterschied in der medialen Darstellung ein. Jedoch illustrieren Lakoff/Núñez die Durchschnittsbildung paradoxerweise mit Mengen-Diagrammen, die einander sehr wohl schneiden, obwohl sie physisch real vorhanden sind, und führen damit vor Augen, dass ihre Trennung in physische und mentale Behälter auf diese Weise nicht aufrechtzuerhalten ist. Darin zeigt sich, dass es der kognitiven Metaphertheorie an einem Medienverständnis mangelt, das über die Vorstellung einer Realisierung kognitiver Inhalte hinausgeht und Schrift oder Bild als etwas Wahrnehmbares überhaupt einmal ernst nimmt. Sie stehen damit einer auf Platon zurückgehenden Tradition nahe, dessen Widersprüche Krämer am Liniengleichnis herausarbeitet:

Mithilfe des Bildes einer hingezichneten und dann proportional zu unterteilenden konkreten Linie plausibilisiert und erörtert Platon just eine Welt-sicht, der alle sinnlich-körperlichen und bildlichen Phänomene gegenüber den ideellen als niederrangig gelten. (Krämer 2009a: 112)

In eben dieser Weise erklären Lakoff/Núñez den Vorrang kognitiver Behälter, während sie gleichzeitig mit physischen Zeichen hantieren. Die Durchschnittsbildung kann ebenso gut auf der diagrammatischen Darstellung beruhen und muss nicht zwangsläufig vollständig in den mentalen Innenraum verschoben werden.

Grundlegender sollte die Konzeption von Medien als Repräsentationsmittel medial unabhängiger Inhalte hinterfragt werden und durch eine trans-

formierende Kraft bildlicher Formate ergänzt werden, die eben auch die dort gültigen Schlüsse einbezieht:

Nicht nur Referenz und Repräsentationalität, sogar der *Abbild*charakter spielt eine Rolle beim Verständnis operativer Bildlichkeit – vorausgesetzt Abbildung wird dabei in einem ‚transnaturalen‘ und ‚projektionsbezogenen‘ Sinne verstanden. (Krämer 2009a: 103)

Worum es Krämer geht, ist, dass Referenz, d. h. der Verweis auf etwas anderes außerhalb des Medium Liegendes, zwar für alle operativen Bilder<sup>11</sup> und damit im Besonderen für Diagramme konstitutiv ist, doch dass darüber hinaus der repräsentierte Gegenstand im Prozess einer Abbildung zusätzlich immer einer Veränderung unterworfen wird. Als Beispiel führt sie topographische Karten an, die ein Territorium niemals 1:1 wiedergeben, sondern einen Maßstab verwenden und es damit notwendig umwandeln. Dadurch erzeugen sie neue Aspekte, wie etwa das Gradnetz oder Landesgrenzen. Auf Mengen-Diagramme gewendet entsteht so eine systematische Spannung zwischen den konkreten Eigenschaften eines Diagramms und den abstrakten Eigenschaften des entsprechenden kognitiven Gegenstandes, die vom Begriff des Vorstellungs-Schemas unberücksichtigt bleibt.

Wie schon an der Notation als operativer Schrift deutlich wurde, ist es auch diagrammatischen Formen eigen, dass mit ihnen nicht nur etwas dargestellt, sondern dieses Etwas auch verändert werden kann. Mengen-Diagramme stellen ein Experimentierfeld zur Verfügung. Ihre Materialität und die damit verbundene Manipulierbarkeit erlauben es, sonst intern ablaufende Denkvorgänge zu externalisieren oder neue Einsichten erst zu gewinnen. Damit stimmt auch May überein, wenn er über Peirces Begriff des diagrammatischen Denkens schreibt, dass es „im Konstruieren, Manipulieren und Beobachten von (repräsentierenden Objekten und deren gegenseitigen Verhältnissen in) Diagrammen“ (May 1995: 300) bestimmt sei.

---

<sup>11</sup> Dazu gehören für sie Schriften, Diagramme bzw. Graphen und Karten.



Das Behälter-Konzept sollte nicht als medienneutrale Denkform allein von der Erfahrung des eigenen Körpers in Relation zur Umwelt her gedacht werden, auch wenn dies seine Basis sein mag, sondern durch Zeichensysteme und ihre transformierende Wirkung ergänzt werden. Im Gegensatz zur kognitiven Metapherntheorie setzt diese Perspektive die Möglichkeit konsequenter Wechselwirkungen der symbolischen Welt und es konzeptuellen Systems voraus. Die vormals interne „Logik“ offenbart sich dann als eine wenigstens teilweise (von außen) durch Medien induzierte Logik.

Insgesamt muss daher konstatiert werden, dass die sogenannte „interne Logik“ von Konzepten mehr Fragen aufwirft, als sie beantworten kann. Weder ist klar, wie die Effekte verschiedener Zielbereiche auf die metaphorische Projektion zu bewerten sind, noch in welcher Weise man den Einfluss der Medien, der unter dem Begriff *Eigensinn* (vgl. Jäger 2005) verhandelt wird, zu berücksichtigen hat.



## 6 Zum Mengenbegriff

### 6.1 Vokabular

Es ist unstrittig, dass jemand, der die Metaphern einer Sprache untersuchen möchte, diese Sprache zunächst bis zu einem gewissen Grad beherrschen muss. Metaphorisiert man wie Pimm (1987) Mathematik als Sprache, dann setzt das Anliegen, Metaphern in der Mathematik untersuchen zu wollen, stillschweigend voraus, dass der Untersuchende, die Sprache sprechen lernt, bevor er sich mit diesem Problem auseinandersetzen kann. Es erscheint daher ratsam, einige für die nächsten Kapitel grundlegende mathematische Ausdrucksweisen zu klären, was letztendlich nichts anderes bedeutet, als eine Liste von Vokabeln, die in diesem Falle einen Überblick über die für die Mengenlehre wichtige Lexik geben soll, zu erstellen. Fragen der Syntax oder der Pragmatik, die sich ebenfalls in Bezug auf die Mathematik als Sprache stellen könnten, bleiben weitestgehend unberücksichtigt. Es wird auch keine Rücksicht auf die Motivation der Bezeichnungen genommen und stattdessen einfach definiert. Dass dabei bereits mengentheoretische Konzepte zur Anwendung kommen, lässt sich gar nicht vermeiden. In den nächsten Abschnitten beginnend mit dem intuitiven Wissen über Mengen wird diese Schuld wieder eingelöst.

#### Zahlen

Die hier benötigten Zahlenbereiche umfassen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ , welche die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen und die Menge der reellen Zah-

len bezeichnen.

Die natürlichen Zahlen sollen mit der 0 beginnen und dann in der üblichen Dezimalschreibweise fortgesetzt werden:

$$0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, \dots$$

Ganze Zahlen werden als  $+n$  oder  $-n$  geschrieben, wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist und zusätzlich  $+0 = -0$  gilt:

$$\dots, -4, -3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3, +4, \dots$$

Für rationale Zahlen stehen zwei verschiedene Schreibweisen zur Verfügung: Entweder schreibt man sie als Bruch in der Form  $\frac{n}{m}$  oder  $-\frac{n}{m}$ , wobei  $n, m$  natürliche Zahlen sind mit  $m \neq 0$  oder als endlichen oder periodisch endenden unendlichen Dezimalbruch in der Form

$\pm n, a_1 \dots a_k$  bzw.

$\pm n, b_1 \dots b_m a_1 \dots a_k a_1 \dots a_k a_1 \dots a_k \dots$ ,

wobei  $n, m, k$  natürliche Zahlen sind, und  $0 \leq a_i < 10$  gilt für alle  $1 \leq i \leq k$ . Obwohl die  $a_i$  hier als Zahlen bezeichnet werden, sind sie eigentlich nur die Ziffern in der Dezimaldarstellung, sodass ihnen erst aus ihrer Stellung ein numerischer Wert zukommt.

Eine reelle Zahl wird ebenfalls als Dezimalbruch  $\pm n, a_1 a_2 a_3 \dots$  geschrieben, allerdings ohne die Einschränkungen, dass dieser abbrechen oder dass sich eine Sequenz periodisch ab einer Stelle wiederholen muss. Diese Darstellung ist im Allgemeinen nicht eindeutig. So gilt etwa:

$$1 = 0,999 \dots$$

Die intuitive Mengenlehre behandelt die natürlichen Zahlen als Grundobjekte bzw. Urelemente, also als Dinge, die außerhalb des Mengenuniversums

stehen und aus denen sich Mengen bilden lassen. Endlichen Mengen kann man so eine Kardinalität zuweisen, indem man die Anzahl ihrer Elemente mit den natürlichen Zahlen zählt. In der axiomatischen Mengenlehre dagegen gibt es nichts außerhalb des Mengenuniversums. Die natürlichen Zahlen müssen dann als bestimmte Mengen modelliert werden. In ihrer intuitiven Form werden die natürlichen Zahlen jedoch auch dort als metamathematische Zeichen verwendet, etwa um in Mengenfolgen einzelne Glieder zu indizieren. Der Unterschied zwischen den objekt- und den metamathematischen natürlichen Zahlen wird hier typographisch nicht kenntlich gemacht.

### Lineare Ordnungen

Mit den einzelnen Zahlbereichen verbindet sich mehr als nur die reine Zusammenfassung dieser Zahlen. Neben den gewöhnlichen Operationen, die auf man auf ihren Elementen ausführen kann, sind sie in einer bestimmten Weise geordnet.

Allgemein soll eine zweistellige Relation  $<$  auf einer Menge  $M$  eine *lineare Ordnung auf  $M$*  genannt werden, falls für alle  $x, y, z$  aus  $M$  gilt:

- (i)  $x \not< x$ ,
- (ii)  $x < y$  und  $y < z$  folgt  $x < z$ ,
- (iii)  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $y < x$ .

Alle drei Eigenschaften werden von allen intuitiv gegebenen Ordnungen auf den Zahlenbereichen erfüllt. Ordnungen, welche die dritte Eigenschaft nicht erfüllen, für die es also Elemente gibt, die sich nicht vergleichen lassen, heißen *partielle Ordnungen*. Wie gewohnt wird für  $x < y$  oder  $x = y$  auch  $x \leq y$  geschrieben. Ein besonderer Typ linearer Ordnung ist die Wohlordnung, bei der jede Teilmenge einer gegebenen Menge ein bezüglich dieser Ordnung kleinstes Element hat. So bilden die natürlichen Zahlen

mit der üblichen Ordnung eine Wohlordnung, die anderen Zahlenbereiche hingegen nicht.

### Schranken und Suprema von Teilmengen

Es sei also auf einer Menge  $M$  eine lineare Ordnung gegeben. Dann bedeutet  $X < s$  für eine Teilmenge  $X$  von  $M$  und  $s \in M$ , dass  $x < s$  für alle Elemente  $x$  von  $X$  gilt. Analog sind auch  $s < X$ ,  $s \leq X$  und  $X \leq s$  definiert.

Ein Element  $s$  aus  $M$  heißt eine obere Schranke von  $X$ , falls  $X \leq s$  und entsprechend eine untere Schranke, falls  $s \leq X$ . Existiert ein Element  $s$  aus  $M$  mit  $X \leq s$  und für alle  $s'$  aus  $M$  mit  $X \leq s'$  gilt  $s \leq s'$ , dann nennt man  $s'$  das Supremum von  $X$  ( $\sup(X)$ ). Im Falle der Existenz ist das Supremum eindeutig bestimmt. In gleicher Weise definiert man bezogen auf untere Schranken das Infimum.

## 6.2 Der intuitive Ansatz

Einen Meilenstein auf dem Weg zum Durchbruch der Mengenlehre zu einer anerkannten mathematischen Disziplin markieren die beiden Aufsätze Cantor (1895) und Cantor (1897). In ihnen bündelt Georg Cantor die Ergebnisse jahrzehntelanger Arbeit. Im ersten der beiden Artikel gibt Cantor eine „Definition“ von *Menge*<sup>1</sup>, die auch heute noch in kaum veränderter Form gern als alltagssprachliche Hinführung an diesen Begriff verwendet wird:

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten  $m$  unsrer Anschauung oder unseres Den-

---

<sup>1</sup> Zu Beginn der Entwicklung der Mengenlehre kursieren noch die mehr oder weniger synonymen Begriffe *Mannigfaltigkeit*, *Gesamtheit*, *Inbegriff* (bei Bernard Bolzano), *Varietät*, *Klasse*, *Vielheit*, *System* (bei Richard Dedekind).

kens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen. (Cantor 1895: 481)

Sie begründet eine Mengenlehre, die man *intuitiv* oder auch abwertend *naiv* nennt, da sie anstatt einer Folge formaler Axiome alltagssprachliche Formulierungen verwendet. Im strengen mathematischen Sinn kann daher eigentlich nicht von einer Definition gesprochen werden, da unerklärt bleibt, wie *Zusammenfassung* oder *Ganzes* zu verstehen sind. Das fällt aber zunächst nicht weiter ins Gewicht, weil jeder über eine intuitive Vorstellung von Mengen und der Element-Relation verfügt, die von Cantors Definition getroffen wird (vgl. Deiser 2010: 15).<sup>2</sup> In der bekannten und überwiegend an Laien gerichteten Einführung in die Mengenlehre von Halmos liest man dann auch:

Der im Folgenden eingenommene halb-axiomatische Standpunkt setzt voraus, daß der Leser die übliche, menschliche, intuitive (und oft irrige) Vorstellung von Mengen hat; Zweck dieser Darlegung ist, einiges vom korrekten Umgang mit Mengen zu schildern. (Halmos 1994: 11)

Die meisten Autoren folgen einem von zwei Verfahren: Entweder berufen sie sich auf Cantors Begriffsbestimmung oder sie lehnen schon jeden Versuch einer natürlichsprachlichen Definition als letztlich unzureichend ab und verweisen auf den praktischen Umgang, in dem der Begriff die nötige Klarheit erhalte.<sup>3</sup> Interessant an Halmos ist ferner die Klammerbemerkung, dass die üblichen Vorstellungen über Mengen häufig fehlerhaft seien und deshalb der Korrektur durch das Vorführen des richtigen Umgangs

---

<sup>2</sup> Gegen diese Annahme einer intuitiven Basis des Mengenbegriffs spricht sich jedoch Felgner aus: „In order to construct a theory of sets, it was first necessary clearly to formulate the fundamental concept of ‘set’. This concept is one for which there is almost no intuitive foundation and whose intended content is rather difficult to grasp“ (Felgner 2010: 160).

<sup>3</sup> Siehe dazu auch den Ansatz bei Ebbinghaus: „Statt uns zu bemühen, eine möglichst präzise Definition des Mengenbegriffs zu geben, werden wir versuchen, die Mengenvorstellung, die wir exemplarisch gewonnen haben, zu analysieren“ (Ebbinghaus 2003: 4).

mit Mengen bedürfen. Sie ist sicher nicht das Ergebnis einer breit angelegten kognitionspsychologischen Untersuchung, sondern entstammt wahrscheinlich der Erfahrung aus dem Lehralltag, macht aber dessen ungeachtet deutlich, dass die von Lakoff/Núñez angestrebte Zurückführung der Mengenlehre auf Alltagskonzepte nicht völlig reibungslos funktionieren könnte.

Im Rahmen ihres Vorhabens, die Verwurzelung abstrakter mathematischer Ideen in Alltagskonzepten aufzudecken, interpretieren Lakoff/Núñez die Fähigkeit, intuitiv zu wissen, was eine Menge ist, als Ausdruck der Universalität des Behälter-Schemas, das ihrer Ansicht nach zur Konzeptualisierung des Mengenkonzepts genutzt werde. Im Folgenden wird die konzeptuelle Metapher *CLASSES ARE CONTAINERS* in Matrixdarstellung wiedergegeben, wobei *CLASS* ohne Einschränkung durch *SET* ersetzt werden kann.<sup>4</sup>

Es fällt auf, dass im Englischen das Element einer Menge auch als *member* und die Element-Relation als *membership* bezeichnet werden kann, während das Deutsche dafür ausschließlich das aus dem Lateinischen entlehnte Lexem *Element* kennt. Das deutsche Wort *Menge* ist eine Bildung zum Adjektiv *manec (-ig)* mit der Bedeutung ‚viel, reichlich‘, vergleichbar gebildet wie *Länge* zu *lang* oder *Höhe* zu *hoch* (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 504f, 520). In der Alltagssprache hat sich diese Bedeutung als ‚große Anzahl‘ erhalten. Darüber hinaus kann ebenso ein bestimmtes Quantum, egal ob es sich um eine große oder geringe Zahl handelt, ebenfalls durch *Menge* bezeichnet werden (vgl. DUW: 1179). *Menge* verweist daher wie auch das Behälter-Schema auf den Aspekt der Quantifizierung.

An der Beschreibung dieser konzeptuellen Metapher bemerkt man die Abweichung, dass dem Rand als ein Bestandteil des Herkunftsbereiches

---

<sup>4</sup> In einer bestimmten axiomatischen Ausrichtung der Mengenlehre, der Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre, gelten dagegen Klassen und Mengen als verschiedene mathematische Objekte. Da die Autoren aber von einem historischen Standpunkt aus argumentieren, können beide Begriffe hier als synonym aufgefasst werden.



CLASSES ARE CONTAINERS	
<i>Source domain</i>	<i>Target domain</i>
CONTAINER SCHEMAS	CLASSES
Interiors of Container schemas	→ Classes
Objects in interiors	→ Class members
Being an object in an interior	→ The membership relation
An interior of one Container schema within a larger one	→ A subclass in a larger class
The overlap of the interiors of two Container schemas	→ The intersection of two classes
The totality of the interiors of two Container schemas	→ The union of two classes
The exterior of a Container schema	→ The complement of a class

Tabelle 3: Lakoff/Núñez 2000: 123

BEHÄLTER kein Objekt im Zielbereich MENGE zugeordnet wird, obwohl nach der Logik der Invarianz-Hypothese gelten müsste:

What the Invariance Principle does is guarantee that, for container schemas, interiors will be mapped onto interiors, exteriors onto exteriors, and **boundaries onto boundaries**; (Lakoff 1993: 215 – Hervorhebungen durch den Autor)

Die Matrix der Korrespondenzen zwischen den Teilen der Konzepte BEHÄLTER und MENGE verletzt also das Prinzip von der Erhaltung der grundlegenden topologischen Struktur, sonst müsste dem Rand ein Element im Zielbereich entsprechen. Auf diese Anomalie machen auch Lakoff/Núñez in ihrer ersten Studie zu mathematischen Metaphern selbst aufmerksam,

erklären sich diese Merkwürdigkeit aber damit, dass man sich den Rand auch nur denken könne und er keineswegs physisch vorhanden sein müsse:

Container schemas may have a physical realization (a jar, a plot of ground marked off by a line, etc.), but, as used here, the boundary of the container is purely imaginative and need not to be physically realized. (Lakoff/Núñez 1997: 40)

In dem später erscheinenden Buch ist diese Bemerkung vollständig gestrichen worden und das Problem wird auch nicht mehr thematisiert, was im Lichte der Theorie der Vorstellungs-Schemata und der Invarianz-These auch verständlich ist, denn entweder ist der Rand ein das Behälter-Schema mitkonstituierender Bestandteil oder nicht, ihn aber als *imaginative* zu bezeichnen, verwässert den Gestaltcharakter des Schemas. Blicke man bei der ursprünglichen Bestimmung des Behälter-Schemas, das wenigstens aus Rand, Innen und Außen besteht, und ginge man weiterhin von der Wahrheit der Invarianz-Hypothese aus, müsste das Behälter-Schema als Ganzes in die Metapher MENGEN SIND BEHÄLTER eingehen. Da sich aber kein zum Rand korrespondierendes Element in der Mengen-Domäne findet, bleiben nur zwei Alternativen unter der Prämisse, dass diese konzeptuelle Metapher korrekt ist: Entweder ist die Invarianz-Hypothese falsch oder das Behälter-Schema wurde zu Beginn ungenau beschrieben. Nun ist dies sicherlich ein Grenzfall konzeptueller Analyse, aber wenn schon bei einem vermeintlich simplen Vorstellungs-Schema derartige Probleme auftreten, wirft das doch insgesamt ein bedenkliches Licht auf die gesamte Theorie.

Damit soll nicht abgestritten werden, dass Mengen als Behälter verstanden werden können, sondern nur darauf hingewiesen werden, dass die Art und Weise, wie Lakoff/Núñez die konzeptuelle Metapher angeben, mit ihrer eigenen Theorie in Konflikt steht. Entscheidet man sich, die Invarianz-Hypothese zu retten, muss die Struktur des Behälter-Schemas reduziert werden, indem der Rand als konstituierendes Element entfernt wird. Es

war ja von vornherein nicht klar, welche Strukturelemente überhaupt zum Behälter-Schema gehören und welche nicht und ob sich diese überhaupt sprachlich oder visuell beschreiben lassen. Möglicherweise zwingt die immer nur approximativ mögliche sprachliche Darstellung der Vorstellung-Schemata, von solch elementweisen Beziehungen zwischen Herkunfts- und Zielbereich einer konzeptuellen Metapher ganz abzusehen und man müsste sich stattdessen mit einer vagen Beschreibung der Form A IST B begnügen.

Ist Cantors Mengenbegriff nun äquivalent zur konzeptuellen Metapher MENGEN SIND BEHÄLTER, liegt ihr also das Behälter-Schema zugrunde? Zunächst sind an der cantorschen Definition die zwei Stufen der Mengenbildung, auf die Lakoff/Núñez nicht eingehen und die auch aus ihrer konzeptuellen Metapher nicht gefolgert werden können, besonders hervorzuheben: Im ersten Schritt werden wohlunterschiedene Objekte des Denkens, mit anderen Worten epistemische Gegenstände, oder Objekte der Anschauung zusammengefasst, wobei diese Gegenstände keine gemeinsame Eigenschaft teilen oder unter einem bestimmten Aspekt ausgewählt werden müssen.<sup>5</sup> Erst danach wird diese Vielheit zu einem Ganzen zusammengefasst und damit selbst als ein mathematisches Objekt verfügbar. Felix Hausdorff prägte dafür den griffigen Slogan „Vielheit, als Einheit gedacht“ (Hausdorff 2008: 55). Damit ist aber die Möglichkeit gegeben, dass eine Mengenbildung auch fehlschlagen kann, wenn sich eine Vielheit nicht zu einer Einheit zusammenfassen lässt. Beispiele für solche „zu großen“ Ansammlungen sind die Allmenge  $V = \{x \mid x = x\}$  oder die „kleinere“ Menge  $R = \{x \mid x \notin x\}$  sowie die Menge aller Ordinal- oder Kardinalzahlen. Keine dieser Vielheiten lässt sich ohne Widersprüche zu einer Einheit zusammenfassen, da beispielsweise für die Menge  $R$  aus  $R \in R$  stets folgt, dass  $R \notin R$ , und andererseits aus  $R \notin R$  stets  $R \in R$  folgt. Dieser Widerspruch liegt im laxen Umhang mit dem Komprehensionsprinzip begründet, wonach es zu

<sup>5</sup> Cantor selbst hat das wohl nicht so streng gesehen. Bei ihm verbindet die Elemente einer Menge häufig eine nicht weiter besprochene Ordnung (vgl. Deiser 2010: 20).

jeder Eigenschaft eine Menge gibt mit genau den Elementen, auf die diese Eigenschaft zutrifft. Für dieses grundlegende Phänomen, das zur Entwicklung axiomatischer Zugänge angeregt hat, findet sich in der konzeptuellen Metapher MENGEN SIND BEHÄLTER keine Entsprechung.

Also bieten Lakoff/Núñez (2000: 140f) mit SETS ARE OBJECTS erst für den zweiten Schritt, der Objektbildung, eine Metapher an. Mit ihr lassen sich dort zumindest zwei Dinge erklären: Zum einen können Mengen wiederum als Elemente anderer Mengen auftreten; sie können also ineinander verschachtelt werden, wie z. B. in der Menge  $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ , die aus den zwei Grundobjekten 1, 2 und der Menge  $\{1, 2\}$  zusammengesetzt ist. Andererseits können auf sie als Ganzes Operationen angewendet werden. Mengen als Objekte zu behandeln, erlaubt es weiterhin, ihnen Eigenschaften wie endlich, unendlich, offen, abgeschlossen, dicht, konfinal oder vollständig zuzuschreiben. Diese recht unscheinbare und scheinbar selbstverständliche konzeptuelle Metapher wird daher nicht ausschließlich durch bestimmte Lexeme realisiert, sondern ebenso anhand der Möglichkeit, syntaktische Funktionen wie Attribut oder Prädikativum in Bezug auf ein Mengensymbol zuzulassen. In der Notation manifestiert sich die Objektbildung durch die Symbolisierung von Mengen mit Buchstaben, wobei es üblich ist, Mengen mit großen lateinischen Buchstaben  $A, B, C, \dots$ , ihre Elemente dagegen mit kleinen Buchstaben  $a, b, c, \dots$  und Mengen mit speziellen Eigenschaften mit griechischen, hebräischen oder Frakturbuchstaben zu bezeichnen. Jedoch signalisiert der Unterschied zwischen Groß- und Kleinbuchstaben nicht immer einen Unterschied im Typ der bezeichneten Gegenstände, etwa dann, wenn die Elemente einer Menge selbst wieder Mengen sind oder in bestimmten axiomatischen Mengenlehren, die keine Grundobjekte sondern nur Mengen kennen. Eine Menge, die mit einem großen Buchstaben bezeichnet wird, gibt daher bestensfalls eine höhere Komplexität gegenüber einem Objekt, das mit einem kleinen Buchstaben

bezeichnet wird, zu erkennen.

Zentral für die Mengenlehre ist die grundlegende Beziehung zwischen einem Objekt  $a$  und einer Menge  $B$ , der dieses Objekt angehört, die als  $a \in B$  geschrieben wird. Im Deutschen sind folgende sprachliche Ausdrücke zur Bezeichnung dieser Relation gebräuchlich:

- (1)  $a$  ist Element von  $B$ / $a$  Element  $B$ .
- (2)  $B$  hat ein Element  $a$ .
- (3)  $B$  enthält  $a$  (als Element).
- (4)  $a$  (ist/liegt) in  $B$ .
- (5)  $a$  gehört zu  $B$ .

Da Lakoff/Núñez selbst keine sprachlichen Belege für ihre konzeptuelle Metapher anführen, kann allenfalls gemutmaßt werden, von welchen sprachlichen Äußerungen sie ausgegangen sein könnten. Nahe liegt, dass insbesondere die Äußerungen wie (3) und (4) zu ihren Schlussfolgerungen geführt haben könnten, da sie auch im Englischen als  $B$  *contains*  $a$  und  $a$  (*lies*) *in*  $B$  die Nähe zum Behälter-Schema andeuten. Auf die Problematik, die Präposition *in* mit dem Behälter-Schema zu verknüpfen, wurde bereits hingewiesen, aber zumindest das Verb *enthalten* scheint ein deutlicherer Hinweis auf das Behälter-Schema zu sein. Wie jedoch ordnet sich dann Äußerung (1) ein, die immerhin in der Regel als die übliche<sup>6</sup> Versprachlichung von  $a \in B$  verwendet wird und ebenfalls in Cantors Definition auftritt? Als Besonderheit fällt sofort die Verkürzung von  $a$  *ist Element von*  $B$  zu  $a$  *Element*  $B$  auf, in der *Element* syntaktisch wie ein Fügewort gebraucht ist, parallel zu  $a \in B$ .<sup>7</sup> Wegen der Veränderung der syntaktischen Eigenschaften von

---

<sup>6</sup> Das gilt zumindest nach unserer Erfahrung und nach Sichtung einschlägiger Literatur zur Mengenlehre.

<sup>7</sup> Diese Kürzung tritt ebenso in der mündlichen Sprache auf.

*Element* ist die Bezeichnung *Kürzung* eigentlich nicht ganz passend, da es sich um mehr als nur eine elliptische Auslassung einiger Wörter handelt. Das Nebeneinander dieser beiden Versprachlichungen von  $a \in B$  legt die Vermutung nahe, dass der semantische Kern der Phrase *ist Element von* auf dem Wort *Element* liegt und die Präposition *von* nur einen geringen Beitrag zur Gesamtbedeutung leistet, eventuell so gering, dass sie neutral verwendet wird. Insbesondere dürfte *von* dann keine lokale oder eine davon übertragene Bedeutung ausdrücken, die als Realisierung einer Raum- oder Behältnis-Metaphorik gedeutet werden könnte. Allenfalls bezeichnet die Präposition eine eher vage Zugehörigkeit, deren Art erst durch den Begriff *Element* bestimmt wird.<sup>8</sup>

Also ist das Lexem *Element*, das nicht unmittelbar mit Behältern assoziiert ist, zu untersuchen. Während es Bungarten (1981: 31, Anm. 38) für einen homonymen Terminus hält, der in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen ganz unterschiedlich, ohne eine gemeinsame Basis gebraucht werde, kann zumindest auf seine Verwendung in der Mathematik bezogen festgestellt werden, dass seine Fachbedeutung aus einer alltagssprachlichen Bedeutung unter metaphorischer Verschiebung ableitbar ist. Aus lateinisch *elementum* entlehnt bezeichnet *Element* allgemein Grundbestandteile und Bausteine, so etwa in der Chemie, wo alle nicht weiter chemisch zerlegbaren Stoffe *Elemente* genannt werden. Ursprünglich waren wahrscheinlich Buchstaben als kleinste Bestandteile der schriftlichen Sprache gemeint (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 177). In der Mengenlehre wird es als Katachrese zur Bezeichnung der zu einer Menge gehörenden Objekte und der Relation selbst gebraucht. Im Unterschied zu chemischen Molekülen und

---

<sup>8</sup> Das ist im mathematischen Register des Deutschen gar nicht so selten. Man vergleiche dazu etwa eine Äußerung wie *zwei hoch zwei*, in der das im Lexikon der Alltagssprache als Adjektiv markierte Lexem *hoch* auch einen fügwortähnlichen Charakter annimmt. Den Wechsel der syntaktischen Kategorie einzelner Wörter diskutiert ebenfalls Pimm, der weitere Beispiele für das Englische auflistet: „The use of common English words for specialized terms in mathematics can lead to shifts in their grammatical category and function“ (Pimm 1987: 81/82).

orthographischen Wörtern, die mehr als nur die Summe ihrer Elemente sind, ist eine Menge bereits vollständig durch die Elemente determiniert, die sie enthält, und gleichzeitig müssen die Elemente nichts weiter als ihre Zugehörigkeit zu dieser Menge gemeinsam haben. Daraus, folgt, dass zwei Mengen  $A$  und  $B$  genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten oder, anders ausgedrückt, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist und umgekehrt. Mengen sind demnach rein extensional bestimmte Objekte. Wenn man von einer Menge sagt, sie enthalte genau die Zahlen 1, 2 und 3 dann ist die Menge damit eindeutig festgelegt. Es gibt keine roten, blauen, dicken, breiten oder hölzernen Mengen mit diesen Objekten, sondern nur diese eine Menge.

Die Extensionalität ist nun aber ein Grund, warum die Vorstellung von Mengen als Behälter problematisch wird: Ein Glas Milch ist nicht identisch mit einer Tasse, in die man dieselbe Milch füllt. Reale Behälter unterscheiden sich deutlich durch ihre äußere Form, ihre Farbe, ihr Material usw. voneinander. Das trifft auch auf Objekte zu, die eigentlich keinen Rand haben, auf die er erst projiziert wird: Waldlichtungen kann man unterscheiden, ob sie rund, oval oder viereckig sind. Für Mengen gilt so etwas nicht, wie Ebbinghaus einprägsam formuliert:

Eine Menge  $M$  ist nichts weiter als die Zusammenfassung ihrer Elemente; deren „Persönlichkeit“ zählt nicht, „Dabeisein“ ist alles. (Ebbinghaus 2003: 3)

Das Extensionalitätsprinzip ist so grundlegend, dass von einer theoriekreativen Metapher erwartet werden muss, dass sie es respektiert. Dem hier, stellvertretend durch Cantors Definition explizierten Mengenbegriff, kann daher kein Behälter-Schema im Sinne einer theoriekreativen Metapher zugrunde liegen, die den Mengenbegriff in grundlegenden sensomotorischen Erfahrungen verankert, da die Extensionalität für physische Dinge gerade nicht gilt.

Aber auch die sprachlichen Ausdrücke, mit denen Lakoff/Núñez selbst über Mengen schreiben, zeigen, dass sie ihrer eigenen Metapher nicht treu sind, denn sie sprechen sehr häufig statt von *container* von *conceptual grouping* oder *choice*:

One of the properties of **conceptual groupings** is that the **grouping** is determined by the choice of the objects. **A choice** of different objects is a different **grouping**. Two **choices** of the same objects do not constitute different **conceptual groupings**. (Lakoff/Núñez 1997: 40 – Hervorhebungen durch den Autor)

Wendet man nun die kognitive Metaphertheorie auf diese Beschreibung an, so weisen die Wörter *grouping/group* wie auch die Bezeichnung *member* für die Elemente einer Menge weg vom Behälter-Schema. Alltagssprachlich verweist *group* ebenso wie das deutsche Lexem *Gruppe* auf eine Ansammlung von Objekten, die durch gemeinsame Eigenschaften und Beziehungen untereinander verbunden sind und sich daher als *member* bzw. *Mitglieder* dieser Gruppe bezeichnen dürfen. Prototypisch dafür sind alle Formen sozialer Gruppen, in denen Personen durch soziale Beziehungen und Kontakte untereinander die Gruppenstruktur konstituieren. Für die Mengentheorie ist diese Vorstellung jedoch problematisch, weil man dazu neigen könnte, nur solche Vielheiten überhaupt als Mengen zu akzeptieren, in denen eine Ordnung auf den Elementen erkennbar ist. So wäre  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  als Menge akzeptabel, weil man eine Regel sieht, nach die Elemente ausgewählt wurden, aber die Zahlen 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $-5$  und  $\pi$  könnten keine Menge bilden, da auf den ersten Blick keine nicht triviale Eigenschaft zu erkennen ist, die auf alle zutrifft. Hinzu kommt, dass die Mathematik den Begriff *Gruppe* bzw. *group* für eine komplexere mathematische Struktur verwendet. Trotzdem zeigt die von Lakoff/Núñez verwendete Sprache, dass im Englischen eine konzeptuelle Metapher SETS ARE GROUPS existieren müsste, würde man nur die sprachlichen Daten berücksichtigen.



Auf kognitiver Ebene möchten wir eine Alternative probieren – die Metapher *SETS ARE COLLECTIONS* bzw. *MENGEN SIND SAMMLUNGEN*. Im Gegensatz zu Behältern verfügen Sammlungen über keinen Rand und sind allein durch die zu ihnen gehörenden Objekte bestimmt, respektieren also das Extensionalitätsprinzip. Sie haben noch einen Vorzug: Cantor hatte in seiner Definition Wert auf die Unterscheidbarkeit der Objekte, die zu einem Ganzen zusammengefasst werden, gelegt. Während es bei Behältern nicht entscheidend ist, ob ihr Inhalt in einzelne Elemente zerfällt, also zählbar ist, kommt einer Sammlung eine spezifische Quantität zu, sie kann in Bezug auf die Anzahl ihrer Elemente gemessen werden, weil sich einzelne Elemente herausnehmen und zählen lassen. Zwar kann auch der Inhalt von Behältern gemessen werden, jedoch nicht immer nach der Anzahl der enthaltenden Objekte. Diese Eigenschaft überträgt sich auch durch konzeptuelle Metaphern. Man betrachte beispielsweise die in der lexikalischen Semantik verbreitete Metapher *WÖRTER SIND BEHÄLTER*, der zufolge die Bedeutung eines Wortes sein Inhalt ist. Burkhardt schreibt dazu: „Nach Anwendung der Inhaltsmetapher ergibt sich die zweite von der semantischen Struktur praktisch von selbst“ (Burkhardt 1987: 62). Gemeint ist die Segmentierbarkeit der Wortbedeutung, die in der Merkmalssemantik bis auf eine atomare Ebene kleinster Bedeutungsbestandteile getrieben werden kann. Auch wenn der Schluss von der Behälter-Metaphorik auf einen segmentierbaren Inhalt fast von selbst gelingt, muss er doch gegangen werden und die Verschärfung auf atomare semantische Einheiten versteht sich nicht mehr von allein. Sammlungen dagegen bestehen immer aus unterscheidbaren Einheiten. Von diesen strukturellen Unterschieden abgesehen, verfügen beide Konzepte aber über sehr ähnliche Eigenschaften. So stoßen Lakoff/Núñez auch auf dieses Konzept, allerdings nicht im Zusammenhang mit Mengen, sondern mit der konzeptuellen Metapher *ARITHMETIC IS OBJECT COLLECTION*, mit der sie natürliche Zahlen und die auf ihnen de-

finierten arithmetischen Operationen auf Erfahrungen beim Manipulieren von physischen Sammlungen zurückführen. Gerade dann ist nicht recht verständlich, warum sie für Mengen vom Behälter-Schema ausgehen. Leider besprechen sie auch nicht, wie sich beide Konzepte zueinander verhalten, ob man etwa das Sammlungskonzept auch zu den Vorstellungs-Schemata zählen sollte.

Mit dem Alternativvorschlag soll keineswegs ausgeschlossen werden, dass Mengen in bestimmten Kontexten als Behälter konzeptualisiert werden können. Ein Beispiel für einen derartigen Kontext, in dem dies nützlich sein kann, ist die Untersuchung linearer Punktmengen, d. h. von Teilmengen der reellen Zahlen. Cantor (1884: 470) gebraucht hier das Attribut *abgeschlossen* für lineare Punktmengen, welche die Menge ihrer Häufungspunkte<sup>9</sup> als Teilmenge enthalten. Bis hierher bezieht sich die Abgeschlossenheit auf die Operation der Bildung der Häufungspunkte – von Cantor *Ableitung* genannt –, die bei auch bei beliebiger Wiederholung nicht aus der Ursprungsmenge herausführt (vgl. Becker 2006: 181ff). Im Anschluss daran bezeichnet man eine Menge als *offen*, wenn ihr Komplement in den reellen Zahlen abgeschlossen ist. Es lässt sich zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass für jedes Element einer offenen Menge eine Epsilon-Umgebung<sup>10</sup> existiert, die das Element enthält und vollständig in der Menge liegt. Anschaulich ausgedrückt kann man sich von jedem Punkt in einer offenen Menge in jede Richtung ein Stück fortbewegen, ohne aus der Menge herauszufallen, oder – endlich mit Bezug auf das Behälter-Schema – die Menge hat keinen Rand, keine Begrenzung. Heute kehrt man die Begriffsbildung üblicherweise um

---

<sup>9</sup> Ein Häufungspunkt einer Menge ist – anschaulich gesprochen – ein Punkt, in dessen „Nähe“ unendlich viele Punkte der Menge liegen. Der Genitiv ist hier nicht so verstehen, dass der Punkt ein Element der Menge sein muss; er kann auch außerhalb der Menge liegen. Für diesen Begriff spielen anscheinend räumliche Termini wie *Nähe* und *Ferne* eine wichtige Rolle. Wie zuvor erläutert, treten Raum- und Behälter-Metaphorik regelmäßig zusammen auf, da Behälter immer Grenzziehungen in einem Raum sind (Innenraum gegenüber Außenraum) und gleichzeitig so auch Räume eröffnen.

<sup>10</sup> In diesem Falle hier entspricht jeder Epsilon-Umgebung um einen Punkt  $x$  ein Intervall  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  mit der Länge  $2\epsilon$ .

und geht von offenen Mengen aus und definiert erst anschließend die abgeschlossenen Mengen. Obwohl Marcus (1973: 100f) behauptet, dass zwischen der alltagsweltlichen und der mathematischen Bedeutung der Wörter *offen* und *abgeschlossen* kaum noch ein wesentlicher Zusammenhang bestehe, erscheint uns der Einsatz von Behälter-Metaphorik nicht nur möglich, sondern auch didaktisch sinnvoll, um die sonst vielleicht dunkel erscheinende Definition über Ableitungen, Häufungspunkte und Epsilon-Umgebungen verständlich zu machen. Wer offene Mengen als Behälter ohne Rand konzeptualisiert, kann durchaus Alltagswissen über Behälter einbeziehen, indem man schlussfolgert, dass jedes Element einer solchen Menge ausschließlich von anderen Elementen dieser Menge umgeben sein kann, ansonsten hätte man einen zur Menge gehörenden Randpunkt gefunden. Dies sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen und da ist Marcus (ebd.: 100f) zuzustimmen, dass die Behälter-Metaphorik schnell zu Problemen führt, weil sie nur ein partielles Modell bereitstellen kann: Über Behälter wissen wir intuitiv, dass sie entweder offen oder geschlossen sind. Die diese Eigenschaften bezeichnenden Adjektive sind also kontradiktorisch. Das ist für die mathematischen Termini nicht mehr richtig. Sie sind nicht einmal mehr konträr. So gibt es Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen<sup>11</sup> sind (z. B. die reellen Zahlen selbst und die leere Menge)<sup>12</sup>, und Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind (z. B. halboffene Intervalle  $[a, b)$  mit  $a < b$ ). Nicht alle aus dem Alltag gewohnten Inferenzmuster können somit unmittelbar in die Mathematik übertragen werden. Hinzu kommt, dass *offen* und *abgeschlossen* als mathematische Termini relationale Begriffe sind, da eine Menge immer nur vor dem Hintergrund eines bestimmten (euklidischen, metrischen, topologischen) Raumes offen oder abgeschlossen sein kann. Im

---

<sup>11</sup> Im Englischen hat sich für solche Mengen das Kofferwort *clopen* etabliert.

<sup>12</sup> Im Falle der linearen Punktmenge sind dies die einzigen Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Im Allgemeinen ist für jeden aus getrennten Mengen zusammengesetzten Raum jede dieser Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen.

Beispiel der linearen Punktmengen sind dies die reellen Zahlen mit der üblichen euklidischen Metrik. Die Behälter-Metaphorik fungiert für diese Mengen also als didaktisches Hilfsmittel, um bestimmte Eigenschaften durch Rückgriff auf Bekanntes anschaulich zu machen, keinesfalls aber als theoriekreative Metapher.

Bisher wurde die Frage, wie Mengen konzeptualisiert werden, ob und wie sie also an alltägliche menschliche Erfahrungen anschließen, vor allem im Lichte sprachlicher Ausdrücke beurteilt, wohingegen die mathematische Notation weitestgehend unberücksichtigt blieb. Hier ist zunächst das bei der Bildung von Mengen entweder durch Aufzählung  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  oder durch eine Eigenschaft  $B = \{x \mid E(x)\}$  verwendete Paar geschweifeter Klammern zu nennen, das ikonisch die Bedeutung ‚Umzäunung, Rand, Grenze‘ assoziieren lässt. Die Klammern selbst gehören jedoch nicht zur Menge, sondern kennzeichnen in der Schrift die Stellen an denen eine Aufzählung oder Beschreibung einer Menge abgeschlossen ist. Zur Bezeichnung der Elementbeziehung  $a \in B$  wird ein stilisiertes Epsilon  $\epsilon$  verwendet, das von Giuseppe Peano (1858–1932) eingeführt wurde und das auf einen altgriechischen Ausdruck mit der Bedeutung ‚er, sie, es ist‘ zurückgeht (vgl. Deiser 2010: 21). Liest man also  $a \in B$  als *a ist ein B* im Sinne von ‚das Sein von  $B$  wird durch die  $a$  bestimmt‘, dann leuchtet der Zusammenhang mit dem Extensionalitätsprinzip ein. Allerdings dürfte die Herkunft des Zeichens heute ohne etymologisches Fachwissen kaum bekannt sein, weshalb es als arbiträres Zeichen für die Elementbeziehung verstanden werden muss. Anders gelagert ist der Fall der Gleichheit zweier Mengen  $A$  und  $B$ , für den man  $A = B$  schreibt.<sup>13</sup> Hier kann der Gebrauch des Gleichheitszeichens ebenfalls als ein Fall metaphorischer Verwendung angesehen werden, wenn man davon ausgeht, dass es primär zum Vergleichen von Zahlen gebraucht wird. Hinter der Übertragung des Gleichheitszeichens auf Men-

---

<sup>13</sup> Der sprachliche Ausdruck *A (ist) gleich B* wird damit als nachträgliche Verbalisierung gesehen, dem der Einsatz des Gleichheitszeichens vorausgeht.

gen und ihrer Symbolisierung durch Buchstaben steht sich das allgemeine Prinzip der Algebraisierung, in dessen Folge mathematische Gegenstände im notationalen Symbolsystem repräsentiert werden und mit ihnen dort operiert werden kann. Sie steht mit der konzeptuellen Metapher *MENGEN SIND OBJEKTE* in Verbindung, wobei nicht klar ist, ob die Algebraisierung diese Metapher voraussetzt oder ob die Metapher aus der Algebraisierung resultiert.<sup>14</sup> Das Eindringen der Algebra in die Mengenlehre wird an der Übertragung des Gleichheitszeichens sinnfällig, mit dem zugleich das Wissen über bekannte operative Verfahren potentiell verfügbar wird, so wie Heiden am Beispiel einfacher Formeln deutlich macht:

Dieses einfache Beispiel zeigt bereits, daß das schriftliche Gleichheitszeichen eine wesentliche Funktion bei der Lösung eines Problems haben kann. Es leistet dies, indem es erlaubt, daß auf beiden Seiten gewisse Operationen ausgeführt werden können. (Heiden 2002: 263)

Das Gleichheitszeichen schafft zwei Seiten und bereitet so die Anwendung der Metapher *GLEICHUNGEN SIND WAAGEN* und deren wesentlicher Implikation, dass mathematische Operationen stets auf beiden Seiten durchzuführen sind, vor. Welche Operationen das im Einzelnen sind, muss für jedes mathematische Objekt neu ermittelt werden. Mit der Übertragung algebraischer Symbole in neue Bereiche ist aber immer auch ein gewisses Risiko verbunden, dass man statt einer metaphorischen die wörtliche Lesart wählt, die ursprüngliche Bedeutung also übergeneralisiert.<sup>15</sup> So ist auch eine unreflektierte Übertragung des Gleichheitszeichens auf Mengen nicht unbedenklich: Sie könnte dazu führen, die Quantität einer Menge zum Kriterium der Gleichheit zu erheben, sodass zwei Mengen als gleich

---

<sup>14</sup> Dass die zweite Variante nicht auszuschließen ist, zeigen die Fälle der Null und der leeren Menge im nächsten Kapitel.

<sup>15</sup> Angelehnt an das Projektions-Modell der Metapher spricht Sfard von einer *Überprojektion*: „It is a matter of consistency: Without abandonment of certain characteristics there may be a danger of a logical incompatibility with the new context or with other metaphors contributing to the construction of the new concept. [...] In such cases, we may be witnessing a metaphorical *overprojection*“ (Sfard 1997: 368).

angesehen würden, wenn sie über die gleiche Anzahl an Elementen verfügten. Lakoff/Núñez haben für die Arithmetik der natürlichen Zahlen mit der konzeptuellen Metapher ARITHMETIC IS OBJECT COLLECTION herausgearbeitet, wie Zahlen als Anzahlen, also als Kardinalitäten von Sammlungen, und wie die Operationen der Addition und Subtraktion als gegenständliche Operationen mit diesen Sammlungen verstanden werden können. Die Gefahr, eine Menge mit ihrer Kardinalität zu identifizieren, ist daher nicht ausgeschlossen. Diese Tendenz hängt zusätzlich auch mit der Waagschalen-Metapher für die Seiten einer Gleichung zusammen, nach der eine Gleichung wahr ist, wenn sie sich im Gleichgewicht befindet, also beide Seiten das gleiche Gewicht, den gleichen Wert haben, der aber als Quantität also als Zahl aufgefasst wird. Für Mengen ist es jedoch wesentlich, zwischen einer Menge und ihrer Kardinalität strikt zu unterscheiden. Aus der Gleichheit zweier Mengen folgt zwar die Gleichheit ihrer Kardinalitäten, die Umkehrung ist jedoch im Allgemeinen falsch. Cantor selbst verwandte ein anderes Zeichen, das zwar auch über die Fähigkeit, zwei Seiten zu öffnen, verfügt, sich aber vom üblichen Gleichheitszeichen unterscheidet:

Die Identität zweier Punktmengen  $P$  und  $Q$  werde durch die Formel:  $P \equiv Q$  ausgedrückt. (Cantor 1880: 355)

Abschließend sei noch auf die ältere Mengendefinition von Richard Dedekind hingewiesen, in der zwar statt *Menge* der Ausdruck *System* bevorzugt wird, die aber noch einmal die Konkurrenz der beiden konzeptuellen Metaphern MENGEN SIND SAMMLUNGEN und MENGEN SIND OBJEKTE verdeutlicht:

Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge  $a, b, c \dots$  aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein System  $S$  bilden; man nennt die Dinge  $a, b, c \dots$  die Elemente des Systems  $S$ , sie sind enthalten in  $S$ ; umgekehrt besteht  $S$  aus diesen Elementen.

Ein solches System  $S$  [...] ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding [...] es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von  $S$  ist oder nicht. (Dedekind 1965: 1)

Im Unterschied zu Cantor hebt Dedekind den Status von Mengen als epistemische Gegenstände, das Extensionalitätsprinzip und den Objektcharakter von Mengen stärker hervor. Auch an dieser Mengendefinition könnten wieder die Schwierigkeiten einer Behälter-Metaphorik für das Mengenkonzept aufgezeigt werden.

Dies alles führt zu der Frage, wie sich die beiden diskutierten konzeptuellen Metaphern zueinander verhalten, ob sie eventuell zusammen eine tragfähige Basis für das Verständnis der Mengentheorie darstellen oder nur in Bezug auf bestimmte Aspekte wirksam sind. Schließlich stellt sich das Problem, ob es überhaupt eine oder mehrere theoriekreative Metaphern gibt, welche die Mengenlehre erzeugen, oder ob man sich mit der Konzentration auf konzeptuelle Metaphern allein nicht zu sehr in eine methodische Enge manövriert.

### 6.3 Die Grenzen der Intuition

Im letzten Abschnitt musste festgestellt werden, dass die konzeptuelle Metapher *MENGEN SIND BEHÄLTER* in einigen Punkten mit dem Mengenbegriff, wie er sich in der Nachfolge Cantors etabliert, unvereinbar ist. Aber auch die als Alternative vorgeschlagene konzeptuelle Metapher *MENGEN SIND SAMMLUNGEN* verhält sich nicht konsistent mit vielen Eigenschaften, die Mengen aufweisen. Im Prinzip ist das nicht weiter überraschend, gilt doch mit der Fokussierungs-These, dass Metaphern bestimmte Eigenschaften des Zielbereichs betonen, andere dagegen in den Hintergrund rücken. Jedoch erwartet man von einer theoriekreativen Metapher, dass sie zumindest die wesentlichen Merkmale des Zielbereichs beleuchtet. Beiden

Metaphern gemeinsam ist, dass sie zur Klasse der Fundierungs- oder in anderer Terminologie der außermathematischen Metaphern gehören, deren Funktion es ist, die Struktur des Mengenkonzepts aus erfahrungsnahen, alltäglichen Konzepten abzuleiten. Ihnen steht ein formaler Zugang aus Definitionen, Sätzen und Beweisen gegenüber, der entweder sowohl Elemente des mathematischen Registers als auch der Notation kombinieren oder ein Axiomensystem in der Sprache der Prädikatenlogik aufstellen kann. Ist dieser formale Zugang nun äquivalent zum intuitiven metaphorengestützten Herangehen oder stärker gefragt, ist aus kognitiven Metaphernmodellen abgeleitet?

Fischbein/Baltsan (1998) untersuchen aus didaktischer Perspektive mittels Fragebögen den Einfluss der Sammlungs-Metapher auf das Mengenverständnis von Lernenden und angehenden Lehrenden. Sie vermuten, dass eine gelernte formale Mengentheorie umso stärker durch intuitive Metaphern überlagert werde, je größer die seit dem letzten Mathematikunterricht verstrichene Zeitspanne sei, und Schülerinnen und Schüler dann dazu neigen, Eigenschaften und Schlussfolgerungsmuster zu übertragen, die mit dem formalen Mengenkonzept in Widerspruch stehen:

The main hypothesis of our present research was that many students will tacitly retain the properties of the collection model and, as a consequence, will forget those formal properties which conflict with the practical collection model. (ebd.: 1/2)

In die Terminologie der Metapherntheorie übersetzt besteht die Gefahr zu vergessen, dass Ursprungs- und Zielbereich heterogene Erfahrungsbereiche sind, mit der Konsequenz, dass Mengen nicht als Sammlungen gesehen, sondern als in allen Eigenschaften mit ihnen identisch betrachtet werden. *Mengen sind Sammlungen* ist dann keine metaphorische Aussage mehr, sondern eine wörtliche Identitätsaussage. Außer durch die Zeit könnte das Vergessen auch durch das abstrakte formale Mengenkonzept auf der einen



und das konkrete Behälter-Schema auf der anderen Seite gefördert werden, das insbesondere dann, wenn die formalen mathematischen Beziehungen nicht hinreichend klar sind, dazu verleitet, eher den konkreten Gegenstand zum Thema zu machen, anstatt ihn als Ursprungsdomäne bzw. als Vehikel für Übertragungen zu nutzen (vgl. English 1997: 8f).

Fischbein/Baltsan begreifen im deutlichen Gegensatz zur kognitiven Metaphertheorie den formalen Zugang zur Mengenlehre als Grundlage für das mathematische Konzept, während es bei Lakoff/Núñez alltägliche Konzepte sind, die sich über konzeptuelle Metaphern in die Struktur des Mengenkonzepts einschreiben. Wenn der formale Zugang als primär gesetzt wird, dann bemisst sich die Angemessenheit jeder Metaphorisierung der Mengenlehre danach, inwieweit sie sich mit dem formalen Mengenbegriff verträgt. Fischbein/Baltsan (1998: 2) befinden die Sammlungs-Metapher für inadäquat und listen fünf falsche Annahmen über Mengen auf, die sich aus ihrer unreflektierten Verwendung ergeben können:

- (1) Die Elemente einer Menge müssen eine gemeinsame Eigenschaft teilen.
- (2) Eine Menge besteht aus mindestens zwei Elementen. Es gibt deshalb keine leere Menge oder Mengen mit nur einem Element.
- (3) Wiederholt sich ein Element, werden beide als unterschiedliche Elemente betrachtet.
- (4) Kein Objekt kann Element mehrerer Mengen zugleich sein.
- (5) Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Anzahl an Elementen enthalten.

Auf die Sätze (1) und (5) haben auch wir bereits hingewiesen. So trat das Problem (5) bei uns im Zusammenhang mit der Übertragung des Gleichheitszeichens auf, aber nach Fischbein/Baltsan (ebd.: 14) trägt auch die

konzeptuelle Metapher MENSEN SIND SAMMLUNGEN eine gewisse Mitschuld, da Sammlungen im Alltagsverständnis häufig verglichen werden, indem die Anzahl der enthaltenen Elemente verglichen wird, anstatt zu überprüfen, ob beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.

Das zweite Problem der Existenz von Mengen, die nur ein oder gar kein Element enthalten, sollte unter einer Behälter-Metaphorik nicht auftreten, da man sich leicht Gefäße vorstellen kann, die nur einen Gegenstand enthalten oder auch völlig leer sind. Dagegen ist die leere Menge (als Zeichen  $\emptyset$  oder  $\{\}$ ) unter der Sammlungs-Metapher und ebenso unter dem formalen Standpunkt, ganz ähnlich dem Fall der Null bei den Zahlen, nicht immer unmittelbar verständlich, insofern als es schwerfällt, sie als Idee und eigenständiges mathematisches Objekt zu akzeptieren. Eine übliche natürlichsprachliche Definition lautet: Die Menge, die kein Element enthält. Die Verwendung des bestimmten Artikels ist hier berechtigt, denn wenn man die Existenz einer leeren Menge anerkennt, ist sie nach dem Extensionalitätsprinzip auch eindeutig bestimmt; es gibt also nur eine Menge, die leer ist, wohingegen, wenn man Grundobjekte zulässt, viele verschiedene Mengen mit einem, zwei, drei usw. Elementen existieren. Legt man Cantors Mengenbegriff einer Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen zugrunde, ist diese Definition der leeren Menge jedoch schlicht sinnlos, da einfach keine Objekte zum Zusammenfassen vorhanden sind. Ebenso schwer fällt die Vorstellung von einer Menge mit nur einem Element, denn man erwartet mindestens zwei Elemente, wenn etwas zusammengefasst werden soll, was sich im Übrigen an der Bedeutung ‚in, zu einem größeren Ganzen vereinigen‘ (vgl. DUW: 2084) von *zusammenfassen* bestätigt. Nützlicher für diese Belange scheint deshalb die konzeptuelle Metapher SETS ARE CONTAINERS zu sein. Doch auch die Konzeptualisierung der leeren Menge durch ein leeres Behältnis ist wegen des Extensionalitätsprinzips keineswegs unumstritten:

Every representation of the void set is wrong. An empty matchbox is a wrong representation. It suggests that a set be a box where you may or may not stuff in things. (Dormolen 1969: 405)

Ebenso wie wir auf die Randproblematik der Behälter-Metaphorik aufmerksam gemacht haben, zielt Dormolens Argument darauf ab, dass Behälter doch mehr sind als nur ihr Inhalt und deshalb die Eindeutigkeit der leeren Menge in Frage gestellt wäre. Die absolute Verneinung der Existenz von guten Repräsentationen kann natürlich auch keine befriedigende Lösung sein. Vielleicht gilt hier, was Halmos gesagt hat, dass unsere anfänglich irrigen Vorstellungen über mathematische Gegenstände durch den richtigen Umgang mit ihnen korrigiert werden. Dem könnte wohl auch Dormolen zustimmen, verweist er doch auf die Nützlichkeit der leeren Menge für das mathematische Argumentieren.

Doch selbst viele der führenden Köpfe der Mengenlehre waren unschlüssig, ob sie die leere Menge einführen sollten, und haben sich teilweise dagegen entschieden. Wenn sie es aber getan haben, dann zumeist mit Blick auf praktische Aspekte im Umgang mit der Notation und nicht durch Reflexionen über Behälter oder Sammlungen. So liest man etwa bei Dedekind, dass er zwar einelementige Mengen zulässt, die leere Menge aber strikt ablehnt, auch wenn er ihren möglichen Nutzen sieht:

Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vorteilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß ein System  $S$  aus einem *e i n z i g e n* (aus einem und nur einem) Element  $a$  besteht, d. h. daß das Ding  $a$  Element von  $S$ , aber jedes von  $a$  verschiedene Ding kein Element von  $S$  ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten. (Dedekind 1965: 2)

Bei ihm kommt der besondere Status dieser beiden Mengenbildungen zum Ausdruck, die im Prinzip nur ein Nebeneffekt der Arbeit mit „echten“ Mengen seien, um eine gleichförmige Schreibweise zu erhalten. Das Verb

*erdichten* betont dagegen, dass die Hinzunahme der leeren Menge einer künstlichen Erzeugung gleichkäme, während sich andere Mengenbildungen ganz natürlich ergäben. Das „Unbehagen“ an der leeren Menge plagt auch noch Ernst Zermelo, als er 1908 sein Axiomensystem formuliert:

Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die „Nullmenge“ 0, welche gar keine Elemente enthält. (Zermelo 2010: 192)

Auch hier wird wieder der Gegensatz zwischen den echten, eigentlichen Mengen und denen, die nur uneigentlich aus Notbehelf als Mengen betrachtet werden, thematisiert. Hausdorff dagegen spricht für die Verwendung der leeren Menge, wie auch die von Kardinal- oder Ordinalzahlen, ganz nüchtern aus praktischen Erwägungen, ohne sich mit ontologischen Fragestellungen zu belasten:

Wir lassen aus Zweckmäßigkeitsgründen auch eine Menge 0, die *Nullmenge* oder *leere Menge*, zu, die kein Element enthält. [...]  $A = 0$  bedeutet, daß die Menge  $A$  kein Element hat, leer ist, „verschwindet“. Wollten wir die Nullmenge nicht als Menge zulassen, so würden wir in zahllosen Fällen, wo wir von einer Menge sprechen, zu dem Zusatz genötigt sein: falls diese Menge existiert. [...] Die Einführung der Nullmenge ist demnach, wie die der Zahl Null, durch Zweckmäßigkeitsgründe geboten; (Hausdorff 2008: 56/57)

Hausdorffs Verwendung des Zeichens 0 für die leere Menge und die Zahl Null ergibt sich aus dem Zusammenhang der beiden mathematischen Objekte, denn die Kardinalität der leeren Menge ist Null (in moderner Schreibweise:  $|\emptyset| = 0$ ). Die Zeichenbildung erfolgt hier also metonymisch, bei der die Anzahl der Elemente als charakteristisch für die leere Menge steht, was, wie oben diskutiert, für beliebige Mengen im Allgemeinen falsch, aber da die leere Menge die einzige Menge mit Null Elementen ist, hier unproblematisch ist. In vergleichbarer Weise ist es üblich, das Zeichen 0 für eine Funktion mit  $f(x) = 0$  oder für eine Matrix, deren sämtliche Einträge Null sind, zu verwenden. Durchsetzen konnte sich Hausdorffs Symbol allerdings

nicht. Vielleicht weil es suggeriert, die leere Menge und die Zahl Null wären nicht grundsätzlich verschieden, obwohl die Zahl Null, sofern man sie als intuitiv gegebenes Grundobjekt betrachtet, gerade keine Menge ist.<sup>16</sup> Etablieren konnte sich schließlich das Symbol  $\emptyset$ , das gleichzeitig auf die Analogie, aber auch auf den Unterschied zwischen der leeren Menge und der Zahl Null hinweist. Nach Marcus (1973: 109f) findet eine semimetaphorische Übertragung statt, der zwar einerseits eine Analogie zugrunde liegt, die aber durch Veränderung der Zeichenform gleichzeitig wieder in Frage gestellt wird. Nach obiger Überlegung wäre *semimetonymisch* für diesen Fall die geeignetere Bezeichnung, da die leere Menge und die Zahl Null in einer realen Beziehung zueinander stehen und nicht nur vergleichend miteinander verknüpft sind. Auch die von Hausdorff noch verwendete sprachliche Bezeichnung *Nullmenge* ist heute als Bezeichnung für die leere Menge aus der Mengenlehre weitestgehend verschwunden. Auch sie könnte zur falschen Gleichsetzung der leeren Menge und der Zahl Null verleiten, denn wie bei allen N+N-Komposita im Deutschen ist die semantische Beziehung zwischen Erst- und Zweitglied nicht transparent. Weil das Erstglied in den beiden Komposita *Nullfunktion* und *Nullmatrix*, die sich als ‚Funktion, die (überall) Null ist‘ und ‚Matrix, deren sämtliche Einträge Null sind‘ paraphrasieren lassen, auf den „Inhalt“ der von den Zweitgliedern benannten Objekte bezogen ist, wäre eine analoge Interpretation für *Nullmenge* im Sinne von ‚Menge, die Null ist‘ statt ‚Menge, deren Kardinalität Null ist‘ zu befürchten.<sup>17</sup>

Dedekind deutet es an und Hausdorff macht es explizit deutlich, dass es

<sup>16</sup> Auf John von Neumann zurückgehend wird die mengentheoretische Null als die leere Menge definiert, sodass man die Gleichung  $0 = \emptyset$  erhält, welche alle Bedenken hinsichtlich einer Verwechslungsgefahr ad absurdum zu führen scheint, jedoch wird hier „mengentheoretisch“ modelliert. Die intuitive Null bleibt davon völlig unberührt.

<sup>17</sup> In der Maßtheorie hat sich das Kompositum *Nullmenge* allerdings halten können. Dort werden so Mengen bezeichnet, deren Maß Null ist. Insbesondere ist die leere Menge eine Nullmenge, aber Nullmengen können auch Elemente enthalten, sogar unendlich viele. Häufig wird das Kompositum deshalb zu  $\mu$ -*Nullmenge* erweitert, um den Bezug der Null auf ein Maß  $\mu$  der Menge klarzustellen.

sich schlichtweg als vorteilhaft erweist, wenn man beim Operieren mit Mengen nicht ständig darauf achten muss, ob als Ergebnis wieder eine Menge entsteht. Betrachtet man etwa die Lösungen einer Gleichung als Menge, so ist es nur konsequent auch die Möglichkeit, dass eine Gleichung wie  $x^2 = -1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) keine Lösung hat, als Menge zu sehen, um sich Fallunterscheidungen zu ersparen. Letztendlich wünscht man die Abgeschlossenheit des Mengenuniversums gegenüber den üblichen Operationen. So wie die Zahl Null aus der Verwendung des dezimalen Positionssystems heraus entstanden ist, kann man auch von der leeren Menge sagen, dass sie erst durch den symbolischen Umgang mit Mengen geschaffen worden ist. Alle Interpretationsprobleme, was die leere Menge bedeutet, wie man sie sich vorzustellen hat, ergeben sich erst danach, wenn man mit ihr bereits operiert. Ganz im Sinne von Klaus folgt dem operativen Sinn des Zeichens  $\emptyset$  der eidetische. Die Vorstellung der leeren Menge als einem Behälter ohne Inhalt oder einer Sammlung ohne Gegenstände ist keine Voraussetzung für die Existenz der leeren Menge, sondern vielmehr eine nachträgliche Interpretation – und vielleicht nicht einmal eine gelungene. Geraten diese Zweckmäßigungsgründe jedoch wieder in Vergessenheit, können die mathematischen Konzepte der leeren Menge und einelementiger Mengen verdrängt werden:

In our case of the mathematical concept of set we are dealing with aspects which are differently situated with regard to their ‘distance’ from the original figural model. As a consequence, the destructive effect of the respective tacit model is different. Forgetfulness of the concept of an ‘empty set’ is visibly stronger than the forgetfulness of the concept of a one-element set (a singleton). (Fischbein/Baltsan 1998: 11)

Schließlich sei an dieser Stelle noch die Variante der Bestimmung der leeren Menge in einer axiomatischen Mengenlehre genannt: Wenn ihre Existenz nicht über ein Axiom gefordert wird, genügt das Komprehensionsprinzip. Zwar führt das volle Komprehensionsprinzip für Eigenschaften wie

$E(x) := x = x$  zu Widersprüchen, für die leere Menge genügen jedoch die Existenz einer beliebigen Menge  $M$  und die Eigenschaft  $P(x) := x \neq x$ , dann kann die leere Menge relativ zu  $M$  als  $\emptyset_M := \{x \in M \mid x \neq x\}$  definiert werden. Aufgrund der Extensionalität, die im Axiomensystem geregelt ist, gilt für alle Mengen  $M$  und  $M'$ , dass  $\emptyset_M = \emptyset_{M'}$ . Dies zeigt, dass die Definitionen unabhängig von der Wahl der Menge  $M$  ist und man zu Recht von „der“ leeren Menge sprechen kann, die sich folgendermaßen festsetzen lässt:

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$$

Der Reiz an diesem Vorgehen besteht darin, die leere Menge aus einem Ausdruck der Prädikatenlogik erster Stufe zu gewinnen. Mengen werden hier als Extensionen von Eigenschaften verstanden und die leere Menge erscheint dabei als Extensionen jedes nicht erfüllbaren Prädikates. Erst nachträglich, nachdem man sich der Wohldefiniertheit versichert hat, gibt man ihr eine natürlichsprachliche Benennung und eine Deutung.

Anders gelagert ist das Problem (3) der sich wiederholenden Elemente, die aber nur einmal gezählt werden, und das Problem (4) der Zugehörigkeit eines Objekts zu verschiedenen Mengen. Beide entstehen durch Rückgriff auf das intuitive Verständnis von Zusammenfassungen materieller, nicht-zeichenhafter Gegenstände. Unsere Erfahrung mit solchen Objekten lehrt, dass etwa drei Bälle, selbst wenn sie äußerlich nicht zu unterscheiden sind, als drei verschiedene Objekte gezählt werden und dass sie nicht zu verschiedenen Sammlungen gleichzeitig gehören können. Definiert man jedoch eine Menge  $A = \{1, 2, 3\}$ , so enthält diese nicht die materiellen Zeichenformen 1, 2 und 3, sondern deren Referenten, also epistemische Gegenstände, und die Menge selbst ist auch wieder ein Objekt des Denkens.<sup>18</sup> Die Menge  $A' = \{1, 1, 2, 3, 1\}$  ist identisch mit  $A$ , weil jedes Element von  $A'$  auch

<sup>18</sup> Man erinnere sich dazu der verbalen Mengendefinitionen von Cantor und Dedekind des letzten Abschnitts, welche die Elemente einer Menge als Objekte des Denkens ausgewiesen haben.

Element von  $A$  ist und umgekehrt. Jede in der Schreibung von  $A$  und  $A'$  vorkommende Marke 1 referiert auf dasselbe Konzept. Goodman würde sagen, dass alle konkreten Marken zur gleichen Äquivalenzklasse gehören. Die Schwierigkeit besteht also darin, dass Wissen des Bereichs SAMMLUNG auf den Bereich MENGE in Bezug auf die Eigenschaften der Bestandteile übertragen wird, das zu der Annahme führt, die Elemente einer Menge wären die konkreten Marken, statt die Konzepte, auf die sie referieren. Dieses Problem, zwischen einem Zeichen und seinem Referenten zu unterscheiden, ist nun nicht allein charakteristisch für die Mengenlehre, sondern kann in allen Bereichen der Mathematik auftreten. Pimm schreibt dazu:

Mathematics seems peculiarly prone to confusions between the symbols through which ideas are communicated and the ideas themselves. In part, these difficulties arise from a confusion of levels, exacerbated by the attempt of mathematicians to reflect relationships among the ideas by means of relationships among the symbols. (Pimm 1987: 15/16)

Diese unter dem Stichwort der Operationalität diskutierte Leistung der mathematischen Notation, das Operieren mit Konzepten in ein Operieren mit Zeichenformen zu transformieren, führt mitunter zu Missverständnissen, wenn die verschiedenen Repräsentationsebenen nicht getrennt werden. Ein anderes Beispiel dafür ist, dass etwa in der Aufzählung einer Menge wie  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  aufgrund der linearen Anordnung und der gewohnten Schreibrichtung von links nach rechts auch eine Reihenfolge der Elemente zu sehen ist, die aber für die Menge selbst keine Rolle spielt. In gleicher Weise erklärt sich das Problem der sich gleichzeitig in verschiedenen Mengen befindenden Elemente.

Eines der größten Hindernisse bei der Erklärung, wie die Mengentheorie verstanden wird, ist mit diesen Problemen aber noch gar nicht angesprochen: Ganz gleich auf welchen grundlegenden menschlichen Erfahrungen die Konzeptualisierung des Mengenbegriffs basieren soll, sie können immer nur für eine endliche Anzahl von Objekten und daher allenfalls für die



potentielle Unendlichkeit aufkommen. Die Mengenlehre lebt aber gerade davon, Aussagen über aktual unendliche Mengen zu treffen. Damit hatte sie in der Mathematik des 19. Jahrhunderts teilweise noch einen schweren Stand und musste sich mit ihrem Verständnis der aktuellen Unendlichkeit erst durchsetzen. Wer sich heute mit Mathematik beschäftigt, trifft ständig auf aktual unendliche Strukturen, ohne sie als ungewöhnlich wahrzunehmen, obwohl der „Sprung“ vom Endlichen zum Unendlichen gewaltig sein müsste, wenn sich die These von der Fundierung abstrakter Konzepte durch konkrete, in direkten Erfahrungen wurzelnde Konzepte bewahrheiten sollte.

## 6.4 Teilmengenrelation und Venn-Diagramme

Von der Elementbeziehung zwischen einer Menge und ihren Elementen hat man die Teilmengenrelation zwischen Mengen zu unterscheiden. Formal wird die Relation  $\subseteq$  definiert als:  $A \subseteq B$ , falls gilt: Für alle  $x \in A$  folgt  $x \in B$ . Beispielsweise ist  $A \subseteq B$  für  $A = \{1, 4\}$  und  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Aus der Definition folgt, dass jede Menge Teilmenge ihrer selbst ist und dass die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist. Offenbar lässt sich auch umgekehrt die Element- durch die Teilmengenrelation definieren mit  $x \in A$ , falls  $\{x\} \subseteq A$  gilt. Demnach genügt es der Prädikatenlogik in der axiomatischen Mengenlehre entweder  $\in$  oder  $\subseteq$  als Grundzeichen hinzuzufügen. Den Begriff *Teilmenge* prägte Cantor:

„Theil“ oder „Theilmenge“ einer Menge  $M$  nennen wir jede *andere* Menge  $M_1$ , deren Elemente zugleich Elemente von  $M$  sind. (Cantor 1895: 481)

Zuvor in Cantor (1880: 355) gebrauchte er noch die an die Arithmetik erinnernden Bezeichnungen *Divisor* und *Multiplum*.

Im mathematischen Register des Gegenwartsdeutschen kann die Teilmengenrelation zwischen  $A$  und  $B$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

- (1)  $A$  ist Teilmenge von  $B$ .
- (2)  $B$  enthält  $A$ .
- (3)  $A$  (ist) in  $B$ .
- (4)  $B$  ist Obermenge von  $A$ .

Sofort fällt die Ähnlichkeit dieser Äußerungen zu den geläufigen Versprachlichungen von  $a \in B$  ins Auge, die ohne Notation Verwechslungen provozieren könnte. Besonders die Äußerungen (2) und (3) sind nur in Abhängigkeit vom Kontext zu interpretieren: Ob mit  $A$  *enthält*  $B$   $A \subseteq B$  oder  $A \in B$  gemeint ist, kann weder in der mündlichen noch in der schriftlichen Sprache entschieden werden; der Großbuchstabe  $A$  bezeichnet zwar meist eine Menge und kein Grundobjekt, allerdings können Mengen auch selbst wieder als Elemente anderer Mengen auftreten. Erst mit Kontext oder in der mathematischen Notation herrscht Eindeutigkeit. Dass allgemein weder aus  $A \subseteq B$   $A \in B$  noch aus  $A \in B$   $A \subseteq B$  folgt, zeigt, dass beide Relationen strikt zu trennen sind. Neben mehrdeutigen Versprachlichungen kann der Einsatz von Venn-Diagrammen, um Beziehungen zwischen Mengen anschaulich zu machen, die Vermischung beider Relationen begünstigen. Lakoff/Núñez selbst hatten auf diese Art der Darstellung zurückgegriffen, um die interne Logik des Behälter-Schemas zu demonstrieren. Zwar haben wir in Kapitel 5.3 die Annahme der Existenz einer solchen Logik in Zweifel gezogen, dennoch ist es aber sicherlich richtig anzunehmen, diese Art von Diagramm evoziere das Behälter-Schema:

Certainly, when a pupil draws a curved line in order to consider a collection of objects inside, he or she carries out an important and meaningful action: when classes and sets are visualized in this way, they are conceptualized metaphorically as containers [...] (Bagni 2006: 262)

Daraus leitet sich aber keine generelle über diesen Einzelfall gültige konzeptuelle Strukturierung von Mengen als Behälter ab. Das Konzept des Be-

hälters ist ausschließlich mit der konkreten Handlung des Zeichnens solcher Diagramme verknüpft und nicht mit dem Mengenkonzept an sich. Krämers Behauptung, dass wir „in der diagrammatischen Figur ein mathematisches Konzept“ (Krämer 2009a: 114) sehen, kann dahingehend erweitert werden, dass wir dieses Konzept aus einer bestimmten Perspektive sehen, es also metaphorisch wahrnehmen. Zudem muss man sich darüber im Klaren sein, dass die Benutzung von Venn-Diagrammen ein Medienwechsel ist, von der symbolischen Notation und ihren verbalen Entsprechungen, die beide Sprachcharakter i. w. S. haben, in ein visuelles Medium, das auf diagrammatische Darstellungsformen, die dem Bild nahestehen, zurückgreift (vgl. Bagni 2006: 274).

Der „Erfinder“ der Venn-Diagramme, John Venn (1834–1923), hatte gar nicht die Absicht, Mengen diagrammatisch zu veranschaulichen, dies war vielmehr ein Nebeneffekt seiner eigentlichen Intention, diese Darstellung zur Lösung logischer Probleme zu verwenden. Venn (1880: 3) nimmt Anstoß an der Darstellung von Propositionen im Rahmen von Syllogismen durch Euler-Diagramme, die nach seiner Meinung zwei wesentliche Mängel aufweisen. Erstens müssen schon bei einer einfachen Proposition wie *Alle X sind Y* zwei Euler-Diagramme gezeichnet werden, eines für  $X = Y$  und eines für  $X \subsetneq Y$ , und schon zwei Prämissen erfordern mindestens sechs Figuren, um alle möglichen Fälle abzudecken. Ein weiterer Nachteil zeige sich in der praktischen Handhabbarkeit der Diagramme: Ein Problem müsse im Prinzip schon gelöst sein, bevor man die entsprechenden Figuren zeichnen könne. Diese Art der Darstellung nütze also während des Problemlösens nichts, sondern könne nur die Resultate wiedergeben und eine Probe durchführen. Venn schlägt daher eine alternative Methode vor, die Eulers Ansatz in beiden Punkten verbessern solle:

Whereas the Eulerian plan endeavoured at once and directly to represent *propositions*, or relations of class terms to one another, we shall find it best to begin by representing only *classes*, and then proceed to modify these in

some way so as to make them indicate what our propositions have to say.  
(Venn 1880: 5)

Statt also sofort eine Proposition als Ganzes darzustellen, sollen zunächst die in ihr vorkommenden Mengenterme in aller Allgemeinheit visualisiert und in diese Darstellung soll dann sukzessive die Proposition eingezeichnet werden. Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  ergeben sich wegen der Zugehörigkeit eines Elements in Bezug auf  $A$  und  $B$  vier Kombinationsmöglichkeiten: Elemente von  $A$ , die zugleich Elemente von  $B$  sind, Elemente von  $A$ , die nicht Elemente von  $B$  sind, Elemente von  $B$ , die keine Elemente von  $A$  sind und Objekte die weder zu  $A$  noch zu  $B$  gehören. Im allgemeinen Fall für  $n$  Mengen müssen  $2^n$  Kombinationsmöglichkeiten berücksichtigt werden. Der Ansatz von Venn sieht vor, alle  $2^n$  Möglichkeiten in einem Diagramm darzustellen:

All that we have to do is to draw our figures, say circles, so that each successive one which we introduce shall intersect once, and once only, all the subdivisions already existing, and we then have what may be called a general framework indicating every possible combination producible by the given class terms. (ebd.: 5)

Für  $n = 2$  ergeben sich zwei einander schneidende Kreise mit vier Gebieten, für  $n = 3$  entsprechend drei Kreise mit acht Gebieten. Berühmt geworden ist Venn (ebd.: 7) dann mit seiner Darstellung von vier und fünf Mengen mit Hilfe von Ellipsen und anderen geometrischen Figuren. Diese Darstellungen sind die Voraussetzung, um Propositionen der Prädikatenlogik visuell nachvollziehen zu können. Diesem Anliegen widmet er sich im zweiten Teil seines Artikels, in dem er beschreibt, wie man jede Proposition in eine Kombination von mehreren Negationen zerlegt, für die dann im Diagramm entsprechende Gebiete zu schwärzen sind. So schließt etwa *Alle  $X$  sind  $Y$*  die Elemente von  $X$ , die nicht zugleich auch in  $Y$  sind, aus, entsprechend wird im Diagramm zweier sich schneidender Kreise dieser Bereich markiert. Auf diese Weise zerlegt er Propositionen in Folgen

von Negationen, schwärzt entsprechende Bereiche im Venn-Diagramm und gelangt nach einer endlichen Zahl von Schritten zur Lösung – dem nicht geschwärzten Restbereich. Dieser Aspekt an Venns Werk ist mit der Zeit in Vergessenheit geraten und heute tendiert man schon fast dazu, jede Darstellung von Mengen mittels geschlossener Linien *Venn-Diagramm* zu nennen.

Vor diesem Hintergrund kann die Hypothese der Existenz einer Logik in der topologischen Struktur des Behälter-Schemas noch einmal neu angegangen werden. Zwei scheinbar völlig auf der Hand liegende Sätze sollten Bestandteil dieser Logik sein:

- (1) Gegeben seien zwei Behälter-Schemata  $A$  und  $B$  und ein Objekt  $X$ .  
Wenn  $A$  in  $B$  enthalten ist und  $X$  sich in  $A$  befindet, folgt daraus, dass  $X$  auch in  $B$  ist.
- (2) Gegeben seien zwei Behälter-Schemata  $A$  und  $B$  und ein Objekt  $Y$ .  
Wenn  $A$  in  $B$  enthalten ist und  $Y$  sich außerhalb von  $B$  befindet, dann ist  $Y$  auch außerhalb von  $A$ .

Was jedoch genau bedeutet hier  *$A$  ist in  $B$  enthalten*? Mengentheoretisch gibt zwei mögliche Interpretationen: Entweder ist  $A \subseteq B$  oder  $A \in B$  gemeint. Übersetzt man Satz (1), so ergeben sich folgende zwei Varianten, wenn wir für  $X$  in  $A$  nur die Interpretation  $X \in A$  zulassen:

- (1a) Wenn  $A \subseteq B$  und  $X \in A$  gilt, folgt  $X \in B$ .
- (1b) Wenn  $A \in B$  und  $X \in A$  gilt, folgt  $X \in B$ .

Während (1a) für jede Wahl von  $A, B$  und  $X$  wahr ist, lässt sich das für (1b) nicht sagen. Beispielsweise ist für  $A = \{X\}$  und  $B = \{A\} = \{\{X\}\}$   $X$  zwar ein Element von  $A$ , aber keines von  $B$ , obwohl  $A$  in  $B$  „enthalten“ ist. So wie die Diagramme in Kapitel 5.3 gezeichnet sind, ist jedoch klar,

dass nur Interpretation (1a) in Frage kommt, da der Verwendung dieser Diagramme die Konvention, dass geschlossene Kurven Mengen darstellen, die alle Punkte innerhalb der Grenzen als Elemente enthalten, zugrunde liegt.<sup>19</sup> Eine geschlossene Kurve innerhalb einer anderen meint immer die Teilmengenrelation, während die Markierung einzelner Punkte immer als Elementrelation interpretiert wird. Von einem intuitiven Sehen von Wahrheiten kann dann allerdings keine Rede mehr sein, da konventionelle Vereinbarungen bestehen, die das Verstehen steuern.

Es scheint demnach so zu sein, als fände die Differenzierung in Element- und Teilmengenrelation erst im Bereich der Mengen statt, während im Behälter-Schema beide Relationen in der Enthaltenseins-Relation zusammenfallen. Dies kann als dritter Grund gezählt werden, warum der Unterschied zwischen  $A \in B$  und  $A \subseteq B$  nicht selbstverständlich ist. Allerdings steht man nun wieder vor dem Problem, dass die Invarianz-These eigentlich die Unversehrtheit aller Vorstellungsschemata eines Ursprungsbereichs unter einer metaphorischen Projektion und damit die Unversehrtheit ihrer topologischen Struktur, der die interne Logik entspringt, gewährleisten sollte. Entweder schwächt man die Invarianz-These nun weiter ab und lässt auch die Möglichkeit einer Transformation der Vorstellungsschemata zu, wobei man dann die Regularitäten, nach denen eine Umwandlung abläuft, zu erklären hat, oder man stellt die Frage, ob die Unterscheidung zwischen Element- und Teilmengenrelation vielleicht doch schon im Behälter-Schema angelegt ist und bisher einfach übersehen wurde. Das wäre letztendlich wieder nur ein weiterer Hinweis darauf, wie vertrackt es ist, das Behälter-Schema exakt zu beschreiben. Als dritte Variante bleibt nur der Versuch, im Einklang mit der Theorie das Transitivitätsgesetz der Enthaltenseins-Relation auf Mengen zu übertragen, was jedoch unvermeidlich zu Fehlern führt, wie hier bei Johnson deutlich wird:

---

<sup>19</sup> Die Ebene, in der Venn-Diagramme gezeichnet werden, stellt also das Universum aller Grundobjekte dar und jeder Punkt repräsentiert ein solches Objekt.

Thus, our experience with containers (and bounded spaces) and their properties is the basis for our understanding of the transitivity of set membership. Sets are understood as containers for their members and their subsets. So, if a set  $A$  is a member of (is contained by) set  $B$ , and set  $B$  is a member of (is contained by) set  $C$ , then  $A$  is a member of set  $C$ . (Johnson 1987: 39/49)

Die Eigenschaft der Transitivität kann aber durch die konzeptuelle Metapher gerade nicht auf das gesamte Mengenkonzept übertragen werden, da die Elementrelation im Allgemeinen nicht transitiv ist, wie das Beispiel  $A = \{X\}$  und  $B = \{A\} = \{\{X\}\}$  oben gezeigt hat. Die Logik des Behälter-Schemas ist an dieser Stelle mit der  $\in$ -Logik nicht vereinbar. Johnson kann auch schlecht argumentieren, er hätte eigentlich die Teilmengenrelation gemeint, die tatsächlich transitiv ist, d. h., aus  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq C$  folgt stets  $A \subseteq C$ , da er ganz explizit feststellt, dass man zwischen der Element-(membership) und Teilmengenrelation (subset) unterscheiden müsse. Aus unbekanntem Gründen mischt er dann beides zusammen, indem er das natürlichsprachliche Prädikat *contain* auf beide Relationen anwendet.

Der Ursprung dieser Fehlinterpretation scheint also in der Mehrdeutigkeit der Prädikate *is in/contain* bzw. *ist enthalten in* zu liegen. So schreibt Lakoff zur Logik des Behälter-Schemas:

For all  $A, X$ , either  $\text{IN}(X, A)$  or not  $\text{IN}(X, A)$ .  
 For all  $A, B, X$ , if  $\text{CONTAINER}(A)$  and  $\text{CONTAINER}(B)$  and  $\text{IN}(A, B)$  and  $\text{IN}(X, A)$ , then  $\text{IN}(X, B)$ .  
 (Lakoff 1987: 273)

Hier muss  $\text{IN}(A, B)$  als Teilmengen-,  $\text{IN}(X, A)$  und  $\text{IN}(X, B)$  jedoch müssen als Elementrelation gelesen werden. Alle Instanzen von  $\text{IN}$  als Teilmengenrelation zu verstehen, wäre ebenfalls möglich, würde aber voraussetzen, dass auch  $\text{CONTAINER}(X)$  gilt, was hier nicht explizit vermerkt ist, weshalb man  $X$  wohl nicht als Behälter, sondern als Grundobjekt ansehen soll.

In dieses Feld gehört auch die Diskussion des Behälter-Schemas als Ursprungsbereich der Konzeptualisierung des Kategorienkonzepts:

Classical categories are understood metaphorically in terms of bounded regions, or “containers”. Thus, something can be *in* oder *out* of a category, it can be *put into* a category or *removed from* a category. (Lakoff 1990: 52)

Lakoff folgert aus der Verknüpfung, dass sich wie bei Mengen die Logik der klassischen<sup>20</sup> Kategorien aus der Logik des Behälter-Schemas ergebe. Die Gültigkeit eines syllogistischen Schlusses verdanke sich deshalb der topologischen Logik des Behälter-Schemas:

The classical syllogism,

Socrates is a man.

All men are mortal.

Therefore, Socrates is mortal.

is of the form:

If X is in category A and category A is in category B, then X is in category B.

(Lakoff 1993: 213)

Unter einem klassischen Syllogismus versteht Lakoff wahrscheinlich den kategorischen Syllogismus, wie ihn Aristoteles entwickelt hat, also einen formalen logischen Schluss aus drei Sätzen, bei dem aus zwei Prämissen (Ober- und Untersatz) eine Konklusion folgt (vgl. Kraus 1992: Sp. 269). Alle Sätze sind dabei kategorische Aussagen, d. h. Prädikationen, bei denen einem Subjekt ein Prädikat zu- oder abgesprochen wird oder anders formuliert bei denen ein Subjekt in eine Kategorie eingeordnet oder aus ihr ausgeschlossen wird. Die Aussagen haben die Form *Alle S sind P*, *Einige S sind P*, *Kein S ist P* oder *Einige S sind nicht P*. Damit ist das von Lakoff angegebene Schlussmuster eigentlich überhaupt kein Syllogismus, weil in zwei der drei Sätze Quantoren fehlen. Noch am ehesten wird man in

---

<sup>20</sup> Das Attribut *klassisch* kontrastiert eine Bestimmung von Kategorien über notwendige und hinreichende Merkmale mit Ansätzen, die von einer Prototypenstruktur oder unscharfen Grenzen ausgehen.



ihm einen Syllogismus der ersten Figur (Barbara), bei dem alle drei Sätze die Form *Alle S sind P* haben, sehen, wenn man *Sokrates ist ein Mensch* als Verkürzung der Allaussage über alle Individuen, die Sokrates heißen, akzeptiert. Ein häufig benutztes Beispiel für diesen Syllogismustyp lautet dann auch: Aus *Alle Menschen sind sterblich* und *Alle Griechen sind Menschen* folgt *Alle Griechen sind sterblich* (vgl. ebd.: Sp 271). Der Schluss, den Lakoff hier als den klassischen Syllogismus präsentiert, geht zum einen nur unter Modifikation seiner Form als Syllogismus durch und zum anderen ist es auch nur einer unter den insgesamt 24 logisch gültigen Modi, zwar einer der zentralen ersten Figur, jedoch bleiben die restlichen 23 gänzlich unerwähnt.

In Lakoffs „Pseudosyllogismus“ wird etwas über die Kategorie der Menschen, die Kategorie alles Sterblichen und das Individuum Sokrates ausgesagt. Auch hier muss die Mehrdeutigkeit des Prädikats *is in* bzw. *ist enthalten in* beachtet werden. Der Satz *Sokrates ist ein Mensch* bedeutet – extensional –, dass das durch *Sokrates* bezeichnete Individuum ein Element der Kategorie Mensch ist. Hingegen kann *Alle Menschen sind sterblich* nicht in diesem Sinne verstanden werden, dass die Kategorie der Menschen ein Element der Kategorie aller sterblichen Dinge ist, sondern nur so, dass sie eine Teilmenge derselben bildet. Jedes Element dieser Kategorie, also jeder Mensch, ist auch Element der zweiten Kategorie und ist somit sterblich. Nicht der Kategorie der Menschen an sich wird das Attribut der Sterblichkeit zugesprochen, sondern durch den Allquantor jedem einzelnen Menschen, sodass sich folgende prädikatenlogische Formel ergibt:  $\forall x (Mensch(x) \rightarrow sterblich(x))$ . Damit wird auch einsichtig, warum von den Sätzen im klassischen Syllogismus eine bestimmte Form verlangt wird: Durch die Quantoren wird sichergestellt, dass die Beziehung der Begriffe nur als Teilmengenrelation verstanden werden kann. Denn nach der „lakoffschen Regel“ ließen sich Syllogismen konstruieren, die gewiss nicht

gültig sind, wie beispielsweise dieser:

Erste Prämisse	Sokrates ist ein Mensch.
Zweite Prämisse	Die Menge aller Menschen ist endlich.
Konklusion	Deshalb ist Sokrates endlich.

Auch hier gilt nämlich:  $X$  (Sokrates) ist in der Kategorie  $A$  (Mensch) und Kategorie  $A$  ist in Kategorie  $B$  (alles Endliche). Daraus aber folgern zu wollen, dass auch  $X$  in Kategorie  $B$  sein müsse, ist wie man unzweifelhaft sieht, absurd. Hier wird, mengentheoretisch formuliert, der Schluss von  $X \in A$  und  $A \in B$  auf  $X \in B$  versucht, der im Allgemeinen nicht gültig ist. Die Behauptung, dass „the logic of containers is true of classical categories“ (Lakoff 1990: 53) kann somit als fehlerhaft betrachtet werden.

Dessen ungeachtet hat Lakoff Recht, dass die Gültigkeit der Syllogismen im Modus der ersten Figur deshalb evident ist, weil die zugrunde liegende Relation zwischen den Kategorien transitiv ist. Es ist jedoch kaum nachzuvollziehen, warum die Transitivität durch eine metaphorische Projektion der Struktur des Behälter-Schemas in das Konzept der Kategorie kommen sollte.

### 6.5 Elementare Operationen

Die Verwendung von Symbolen für Mengen, die Übertragung des Gleichheitszeichens und die konzeptuelle Metapher **MENGEN SIND OBJEKTE** markieren Schritte auf dem Weg zur Algebraisierung der Mengenlehre, der mit den zweistelligen Operationen der Vereinigung, des Durchschnitts, der Subtraktion (bzw. Differenzbildung) und des Produkts sowie der einstelligen Potenzmengenoperation fortgesetzt wird. Die sprachlichen Bezeichnungen dieser Operationen lassen sich nach ihrer Herkunft differenzieren:

Während *Vereinigung* aus der Alltagssprache kommt, hat man mit *Durchschnitt* aus der Geometrie bzw. Arithmetik und den letzten drei Bezeichnungen aus der Arithmetik innere Übertragungen aus der mathematischen Fachsprache vor sich. Die Bezeichnungen der Resultate der Operationen können wie *Vereinigungsmenge/Vereinigung*, *Durchschnittsmenge/Durchschnitt*, *Differenzmenge*, *Mengendifferenz/Differenz*, *Produktmenge/Produkt* entweder fakultativ oder müssen wie *Potenzmenge* obligatorisch mit dem Lexem *Menge* aus dem Zielbereich als Erst- oder Zweitglied ein Kompositum bilden.

Sowohl für die Bezeichnungen im mathematischen Register als auch für die Notationssymbole gab es lange Zeit keinen allgemein akzeptierten Standard. So nannte beispielsweise Hausdorff (2008: 61) die Vereinigung *Summe* und verwendete für sie das Zeichen  $\dot{+}$  und Cantor (1895: 485) bezeichnete die Produktmenge als *Verbindungsmenge*, für die er  $(M.N)$  schrieb. Jeder Mathematiker pflegte auf diese Weise ein ihm eigenes Inventar sprachlicher Bezeichnungen und Symbole, das teilweise erheblich von dem seiner Kollegen abwich. Auch wenn sich Terminologie und Notation heute immer weiter international angleichen (vgl. Eisenreich 1998: 1227), gibt es von Autor zu Autor doch noch immer Unterschiede, sodass mathematische Texte häufig mit einem Katalog terminologischer Konventionen beginnen. Zumindest aber für die hier zur Diskussion stehenden elementaren Operationen haben sich kanonische Bezeichnungen und Schreibweisen etabliert.

Im Folgenden werden die heute üblichsten sprachlichen und nichtsprachlichen Zeichen im Umgang mit den fünf elementaren Operationen auf dem Mengenuniversum betrachtet und vergleichend einige historische Abweichungen miteinbezogen, wenn sie helfen, metaphorische und analogische Benennungsmotive genauer herauszuarbeiten.

### Vereinigung, Durchschnitt und Differenz

Im Vergleich zur Verwendung des Wortes *Vereinigung* in der Alltagssprache mit der Bedeutung ‚Zusammenfassung zu einer Einheit, zu einem Ganzen‘ (vgl. DUW: 1874) ergeben sich zur Bedeutung des Terminus im mathematischen Register kaum wesentliche Unterschiede. Marcus (1973: 99) spricht von der „Präzisierung“ der alltagsweltlichen Bedeutung und Bildung eines „mathematischen Modells“. In jedem Fall kommt es zu semantischen Anpassungen: Während in der Alltagssprache sowohl der Vorgang des Zusammenfassens als auch sein Resultat gemeint sein können, ist die Verwendung in der Mengenlehre, extensional begriffen, allein auf das Ergebnis eingeschränkt, das dann wiederum als Menge und somit auch als ein Objekt des Mengenuniversums aufgefasst werden kann. Extensionserweiternd können auch „pathologische Zusammenfassungen“, bei denen eine Menge schon Teilmenge einer anderen ist, mit *Vereinigung* bezeichnet werden, obgleich alltagssprachlich vorausgesetzt ist, dass die zu vereinigenden Dinge zunächst getrennt sind. Nichtsdestotrotz haben „getrennte“ Mengen einen Sonderstatus, der sich in der Bezeichnung *disjunkt* nach dem lateinischen Partizip *disiunctus* mit der Bedeutung ‚getrennt‘ für zwei Mengen ohne gemeinsame Elemente niederschlägt. Das Adjektiv kann auch metonymisch auf ganze Mengensysteme übertragen werden. Damit wird dann angezeigt, dass je zwei verschiedene Mengen eines solchen Systems disjunkt sind. Ebenso spricht man metonymisch von einer disjunkten Vereinigung, wenn die zu vereinigenden Mengen paarweise disjunkt sind.<sup>21</sup>

In der Notation ist heute das Symbol  $\cup$  für die Vereinigung gebräuchlich. Definiert wird die Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  als die Menge aller

---

<sup>21</sup> In der Literatur zur Mengenlehre wird manchmal die Vereinigung disjunkter Mengen mit einem eigenen Symbol gekennzeichnet oder wie hier bei Cantor gesondert hervorgehoben: „Die Vereinigung mehrerer Mengen  $M, N, P, \dots$ , die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit  $(M, N, P, \dots)$ “ (Cantor 1895: 481).

Elemente, die in  $A$  oder  $B$  enthalten sind:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} - A \text{ vereinigt } B$$

Hausdorff (2008: 61) dagegen bezeichnete die Vereinigung als *Summe* und verwandte dafür das Symbol  $\dot{+}$ . Damit wird besonders markant auf die Analogie zur herkömmlichen Addition in der Arithmetik aufmerksam gemacht. Durch das Anbringen eines diakritischen Zeichens wies Hausdorff gleichzeitig aber auch auf den Unterschied beider Operationen hin, der in der sprachlichen Benennung *Summe* verborgen bleibt. Die Beziehung zwischen der Vereinigung zweier Mengen und der Summe ihrer Kardinalitäten gibt nämlich folgende Gleichung wieder:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Der für die Analogie relevante Fall  $|A \cup B| = |A| + |B|$  tritt allerdings nur dann ein, wenn die Mengen  $A$  und  $B$  keine gemeinsamen Elemente haben. Disjunkte Vereinigungen schrieb Hausdorff konsequenterweise als  $A + B$ . In Marcus' Terminologie ist  $\dot{+}$  als semimetaphorisch und  $+$  als (voll)metaphorisch zu klassifizieren. In der sich nun mit Hausdorffs Notation ergebenden Gleichung

$$|A + B| = |A| + |B|$$

tritt das Pluszeichen auf der rechten Seite in wörtlicher und auf der linken in metaphorischer Verwendung auf.

Warum konnten sich weder das Pluszeichen noch die Bezeichnung *Summe* durchsetzen? Einmal womöglich gerade wegen ihrer suggestiven Sogwirkung, die didaktisch nicht wünschenswert war, da sonst die Gefahr bestünde, Mengen mit ihren Kardinalitäten und die Vereinigung mit der Addition gleichzusetzen. Andererseits wird mit dem Pluszeichen die Minkowski-Summe  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ , wobei  $A$  und  $B$  Teilmengen

eines Vektorraums sind, ausgedrückt. In diesem Fall liegt dann aber keine metaphorische, sondern vielmehr eine metonymische Übertragung vor, da die Operation auf die Elemente der Mengen „durchgereicht“ wird.

Das Lexem *Durchschnitt* dagegen ist als Wortbildungsprodukt zum Verb *durchschneiden* mit der Bedeutung ‚Durchschneidung zweier Linien oder Durchmesser‘ von Anfang an in der mathematischen Fachsprache, genauer in der Geometrie, beheimatet (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 161). Eine erste Übertragung findet von der Geometrie in die Arithmetik statt, wo es als Bezeichnung für den Mittelwert verwendet wird. Der arithmetische Durchschnitt gibt für eine endliche Folge mindestens zweier Zahlen einen „dazwischen liegenden“ Wert an. Wenn man Mengen-Diagramme berücksichtigt, wird für die Mengenlehre wieder der anschaulich geometrische Ursprung des Schneidens maßgeblich. Man definiert den Durchschnitt als die Menge aller Elemente, die sowohl zu  $A$  als auch zu  $B$  gehören und symbolisiert die Operation mit dem gespiegelten Zeichen der Vereinigung  $\cap$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} - A \text{ geschnitten } B$$

Während die Vereinigung zweier Mengen im nicht-pathologischen Fall eine „neue“ Menge ergibt, deren Existenz in der axiomatischen Mengenlehre abgesichert werden muss, liefert der Durchschnitt lediglich eine schon „bekannte“ Teilmenge. Dies kann etwa durch  $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$  besonders deutlich gemacht werden.

Insgesamt wird eine Dopplung von Übertragungsprozessen deutlich: Einerseits wird die Mengenlehre als Ursprungsbereich genutzt, um der Geometrie eine neue „Sprache“, in die sie ihre Probleme übersetzen und in der sie nach Lösungen suchen kann, zu geben. Andererseits zehrt aber, wie gezeigt, die Mengenlehre vom geometrischen Erbe der Mathematik, das als Bildspender für eine Reihe sprachlicher Metaphern dient.

Neben den semantischen Verschiebungen der Wörter bei der Übertragung

aus der Alltagssprache bzw. der geometrischen Fachsprache fallen auch syntaktische Veränderungen auf: Die in der Verbalisierung von  $A \cup B$  und  $A \cap B$  verwendeten Partizipien *vereinigt* und *geschnitten* nehmen, wie bereits am Lexem *Element* diskutiert wurde, einen fügewortähnlichen Charakter an. Ursache dafür könnte einerseits der Versuch sein, eine zur Notation „baugleiche“ sprachliche Form zu finden, andererseits die Tatsache, dass vor und hinter den Partizipien keine Wörter im Sinne einer natürlichen Sprache stehen, sondern Variablen. Da diese nur schwer einer Wortart zuzuordnen sind, werden wahrscheinlich auch die üblichen Muster zum Phrasenaufbau der natürlichen Sprache außer Kraft gesetzt. Man vergleiche dazu die Phrase *die mit der Menge B geschnittene Menge A*, der das Lexem *Menge* hinzugefügt wurde. Hier wird das Partizip ganz regulär als Attribut, das um eine Angabe erweitert ist, verwendet.

Sowohl Vereinigung als auch Durchschnitt lassen sich auf Mengensysteme  $M$  verallgemeinern:

$$\begin{aligned}\bigcup M &= \{x \mid \exists z \in M \text{ mit } x \in z\} \\ \bigcap M &= \{x \mid \forall z \in M \text{ gilt } x \in z\}\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu ihren „kleinen“ Verwandten sind die große Vereinigung und der große Durchschnitt einstellige Operationen auf Mengensystem. Doch auch hier gilt wieder, dass der Durchschnitt  $\bigcap M$  eine schon bekannte Menge<sup>22</sup> ergibt, da  $\bigcap M \subseteq x$  für alle  $x \in M$  ist, im Gegensatz zur Vereinigung  $\bigcup M$ , für die umgekehrt  $x \subseteq \bigcup M$  für alle  $x \in M$  ist.

Zu Vereinigung und Durchschnitt gehört als Drittes noch die Subtrakti-

<sup>22</sup> Dies ist nur für eine Ausnahme falsch: Es gilt, weil  $\forall z \in \emptyset$  folgt  $x \in z$  für jedes beliebige  $x$  wahr ist,  $\bigcap \emptyset = \{x \mid x = x\}$ . Da die Allmenge jedoch keine Menge mehr ist, wird man durch die Durchschnittsbildung über die leere Menge aus dem Mengenuniversum herausgeworfen. Dieser Effekt ist ganz ähnlich zur Division durch Null, der keine reelle Zahl entspricht. Um ihn zu umgehen, kann man in der Definition den Fall  $M = \emptyset$  gesondert durch die Festsetzung  $\bigcap \emptyset := \emptyset$  regeln.

onsoperation, deren Ergebnis als *mengentheoretische Differenz* oder *Differenzmenge* bezeichnet wird. Sowohl in der sprachlichen Benennung als auch im verwendeten Notationssymbol – ist wieder die Analogie zur Arithmetik deutlich sichtbar. Im mathematischen Register bezeichnet das Lexem *Subtraktion* konventionell eine Operation auf einer der üblichen Zahlenmengen und *Differenz* das Resultat dieser Operation. Dass hier übertragener Wortgebrauch vorliegt, wird wieder durch Attribuierung und Kompositabildung sichtbar gemacht. Die Operation selbst wird definiert als:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} - A \text{ minus } B \text{ oder } A \text{ ohne } B$$

Manche Autoren verlangen in der Definition, dass  $B$  eine Teilmenge von  $A$  ist, womit die Analogie zur Subtraktion in der Arithmetik durch  $|A - B| = |A| - |B|$  für endliche Mengen  $A$  und  $B$  zur Geltung kommt.

Für den Fall, dass  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist, nennt man  $B - A$  auch das *relative Komplement* von  $A$  in  $B$  und wenn weiterhin  $B$  fixiert ist, nennt man  $B - A$  kurz das *Komplement* von  $A$  und schreibt  $A^C$  für  $B - A$ . Die Bezeichnung ist durch die Beziehung  $A \cup A^C = B$  motiviert;  $A^C$  ergänzt  $A$  zu  $B$ .

### Produkt

Eine zur Multiplikation auf den natürlichen Zahlen analoge Definition der Operation auf Mengen lässt sich geometrisch motivieren: Da sich das Produkt zweier natürlicher Zahlen  $n \cdot m$  anschaulich als die Anzahl von Spielsteinen, die sich in einem Rechteck mit  $n$  Reihen und  $m$  Spalten verteilen lassen, vorstellen lässt, definiert man das Produkt zweier Mengen  $A$  und  $B$  als die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus  $A$  und  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\} - A \text{ kreuz } B$$



$A \times B$  bezeichnet man als *Produktmenge*, *Mengenprodukt*, *Kreuzprodukt* oder *kartesisches Produkt*. Die ersten beiden Bezeichnungen folgen wieder dem symmetrischen Wortbildungsmuster  $N + \text{Menge}$  bzw.  $\text{Menge}(n) + N$ , die dritte entsteht durch Komposition mit einer der üblichen Bezeichnungen für das Symbol  $\times$  und die letzte verweist durch das eponymische Attribut auf René Descartes, dessen Verknüpfung von Geometrie und Algebra, in deren Folge er die euklidische Ebene mit der Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  identifizierte, gewürdigt wird. Marcus möchte in diesen Fällen, weil dem Zeichen  $\times$  bei der Anwendung auf Mengen nicht mehr die gleiche Benennung wie bei der Anwendung auf Zahlen zukommt, von einer „lautliche[n] Semimetapher“ (Marcus 1973: 109) sprechen. Dagegen ist einzuwenden, dass es sprachlich vollkommen üblich ist, ein metaphorisch gebrauchtes Wort mit einem Lexem aus dem Zielbereich zu kombinieren, wie es Falle von *Mengenprodukt*, *Produktmenge* und über das Attribut *kartesisch* passiert ist.<sup>23</sup> Die Metapher wird damit nicht abgeschwächt, wie es das Präfix *semi-* nahelegt, sondern tritt überhaupt erst klar zu Tage, da ansonsten der Zielbereich ungenannt bliebe.

Ganz wie erwartet, gilt nun für endliche Mengen  $A$  und  $B$ :  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Als nützlichen Nebeneffekt erhält man die Möglichkeit, die Vereinigung zweier Mengen disjunkt zu machen, ohne die Anzahl ihrer Elemente zu verändern, indem von  $A \cup B$  etwa zu  $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$  übergegangen wird, da für jede einelementige Menge  $\{m\}$   $|A \times \{m\}| = |A|$  ist.

<sup>23</sup> Darauf weist schon Aristoteles hin: „[...] und manchmal fügt man hinzu, auf was sich die Bedeutung bezieht, für die das Wort eingesetzt ist. So verhält sich z. B. eine Schale ähnlich zu Dionysos wie ein Schild zu Ares; der Dichter nennt also die Schale ›Schild des Dionysos‹ und den Schild ›Schale des Ares‹. Oder: das Alter verhält sich zum Leben, wie der Abend zum Tag; der Dichter nennt also den ›Alter des Tages‹, oder, wie Empedokles, das Alter ›Abend des Lebens‹ oder ›Sonnenuntergang des Lebens‹“ (Aristoteles 2006: Poet. 21; 69). Von diesen Genitivattributen ist es nur ein kleiner Schritt bis zu den Komposita *Lebensabend* oder *Tagesalter*. Coenen (2002: 119ff) zählt noch weitere Formen der „kommentierenden Metapher“ auf und Skirl bemerkt weiter, dass Kompositumsmetaphern, die, wenn sie nicht im Ganzen metaphorisch gebraucht werden, ebenfalls kommentieren und „die kürzestmögliche formale Realisierung von Metaphern darstellen und in natürlichsprachlichen Texten nicht selten sind“ (Skirl 2010: 24).

Cantor (1895: 485) schrieb für die Multiplikation zweier Mengen noch  $(M \cdot N)$  und bezeichnete sie als *Verbindungsmenge*, weil bei ihm geordnete Paare noch *Verbindungen* hießen. Sein Notationssymbol ist im Unterschied zum heute üblichen Kreuz, das wie der Punkt auch die Multiplikationsoperation auf den Zahlen bezeichnen kann, aber dafür weitaus seltener benutzt wird, eine semimetaphorische Übertragung, bei der im Gegensatz zu Hausdorffs Summenzeichen nicht ein diakritisches Zeichen den Unterschied anzeigt, sondern die Verschiebung seiner Position von der Mittel- auf die Grundlinie.

Wie sich das Mengenprodukt auf beliebig viele Mengen verallgemeinern lässt, ist im Gegensatz zu Vereinigung und Durchschnitt nicht mehr so offensichtlich. Für eine endliche Mengenfolge  $(A_i)_{0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}}$  führt noch eine Definition über  $n$ -Tupel zum Ziel:

$$\times_{i=0}^n A_i = \{(a_0, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 0, \dots, n\}$$

Neben dem großen Kreuz findet sich häufig auch das große Produktzeichen  $\prod$ , sodass sich der Zusammenhang zwischen kartesischem Produkt und Kardinalität als  $|\prod_{i=0}^n A_i| = \prod_{i=0}^n |A_i|$  schreibt, falls alle  $A_i$  endlich sind. Sind zusätzlich alle  $A_i$  von gleicher endlicher Kardinalität  $m$ , so gilt  $|\times_{i=0}^n A_i| = m^{(n+1)}$ .

Seien nun  $I$  eine beliebige Menge und  $A_i$  Mengen für  $i \in I$ , dann ist das allgemeine Produkt der Mengen  $A_i$  etwas gewöhnungsbedürftig definiert durch:

$$\times_{i \in I} A_i = \left\{ f \mid f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, f(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

Die Idee hinter dieser „obskuren“ Definition ist, dass man ein  $n$ -Tupel  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  als Funktion  $f$  von den ersten  $n$  natürlichen Zahlen in die  $a_i$  auffassen kann mit  $f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(n-1) = a_{n-1}$ , womit die

Menge aller  $n$ -Tupel der Menge aller solcher Funktionen entspricht. Durch Verallgemeinerung auf beliebige Indexmengen  $I$  gelangt man zur Menge aller Funktionen, die aus jedem  $A_i$  genau ein Element auswählen und es  $i \in I$  zuordnen.<sup>24</sup>

## Potenzmenge

Die allgemeine zweistellige Potenzoperation gehört nicht zum Kanon der einfachen Mengenoperationen, sondern nur eine spezielle einstellige Form. Hausdorff (2008: 68) sprach noch periphrastisch von der *Menge aller Teilmengen einer Menge  $M$* , wofür sich heute die Bezeichnung *Potenzmenge* eingebürgert hat. Sie wird meist mit einem stilisierten  $\mathcal{P}$  symbolisiert und als  $\mathcal{P}(M) = \{x \mid x \subseteq M\}$  definiert. Ihre Kardinalität stellt ein kombinatorisches Problem dar: Bilde zu einer Menge  $M$  alle möglichen Teilmengen und fasse diese zu einer Menge zusammen. Für endliche Mengen  $M$  mit  $m$  Elementen gilt dabei:  $|\mathcal{P}(M)| = 2^m$ . Aus diesem Zusammenhang erklärt sich ihre Bezeichnung. Ihre besondere Stellung dagegen verdankt die Potenzmenge ihren mengentheoretischen Eigenschaften: Beispielsweise gilt  $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$  sowie  $M \in \mathcal{P}(M)$  und für  $x \in \mathcal{P}(M)$  ist auch  $(M - x) \in \mathcal{P}(M)$ , so dass die Potenzmenge unter den zuvor besprochenen Operationen abgeschlossen ist. Außerdem hat man den Eindruck, die Potenzoperation „vergrößere“ eine gegebene Menge ganz erheblich, denn z. B. kann gezeigt werden, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen im Grunde genommen nichts anderes ist als die Menge der reellen Zahlen und diese wirkt wenigstens intuitiv, wenn man die gesamte Zahlengerade mit den darauf verstreut

<sup>24</sup> Diese Definition hat allerdings einen „Haken“: Um zu zeigen, dass  $\prod_{i \in I} A_i$  nicht leer ist, hat man eine derartige Funktion anzugeben, wozu man aus jedem  $A_i$  ein Element auswählen muss. Genau diese Auswahlakte sind aber problematisch, denn es ist unklar, auf welche Weise man im Allgemeinen aus einer beliebigen Menge ein Element auswählen soll. Abhilfe schafft in der axiomatischen Mengenlehre das Auswahlaxiom, das wenigstens die Existenz solcher Auswahlakte garantiert, auch wenn es kein konstruktives Verfahren bereitstellt.

liegenden natürlichen Zahlen vergleicht, doch um einiges größer. Mit Cantors Mächtigkeitbegriff wird tatsächlich für alle Mengen  $M$  folgen, dass stets  $|M| < |\mathcal{P}(M)|$  gilt.

Insgesamt zeigt sich, dass die Terminologie wie auch die Notation aus unterschiedlichen Herkunftsbereichen, unter denen der innermathematische Bereich der Arithmetik dominiert, stammen. Die sprachlichen und graphischen Metaphern möchten wir jedoch nicht als Realisierung einer konzeptuellen Metapher zwischen den Domänen ARITHMETIK und MENGEN beschreiben, da der Grad systematischer Beziehungen bereits zur Analogie hin überschritten scheint. An zwei Aspekten wird dies deutlich: Von der analogen Basis lässt sich das durch die Arithmetik initiierte Programm weiter fortsetzen, indem etwa Eigenschaften der übertragenen Operationen wie Assoziativität, Kommutativität und Distributivität untersucht werden. Auf diese Weise erhält man Myriaden an Gleichungen wie z. B. die De Morgan'schen Regeln  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$  und  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ , die eine Art von Distributivgesetz für die Komplementbildung formulieren.

Jedoch verselbstständigen sich die mengentheoretischen Operationen zusehends, da man erwartet, diese Operationen nicht nur auf endliche Mengen von endlichen Mengen anwenden zu dürfen, sondern auf die gesamte Vielfalt im aktual unendlichen Mengenuniversum. Für diese Verallgemeinerungen finden sich im arithmetischen Ursprungsbereich keine Entsprechungen mehr. Gerade dadurch ist aber der Grundstein für eine Umkehrung der Projektionsrichtung von der Mengenlehre auf die Arithmetik gelegt: Gelänge eine Verständigung darüber, was man unter der Kardinalität  $|M|$  einer beliebigen Menge  $M$  verstehen soll und verwendete man dann provisorisch Frakturbuchstaben  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  usw. für diese Kardinalitäten, dann ließe sich mit dieser Hypothek eine Arithmetik auf diesen „transfiniten Kardinalzahlen“ einführen. Dazu seien  $\mathfrak{a} = |A|$ ,  $\mathfrak{b} = |B|$  und  $\mathfrak{a}_i = |A_i|$  für alle

$i \in I$  und wir definieren mit den vorhergehenden Operationen:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}| \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |A \times B|$$

$$\sum_{i \in I} \mathbf{a}_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\} \right| \qquad \prod_{i \in I} \mathbf{a}_i = \left| \times_{i \in I} A_i \right|$$

$$2^{\mathbf{a}} = |\mathcal{P}(A)|$$

Die zuvor aus der endlichen Arithmetik in die Mengenlehre importieren Operationen werden in der Mengenlehre auf unendliche Mengen erweitert und nun wieder in die Arithmetik zusammen mit den transfiniten Zahlen exportiert. Diese eindeutige Bidirektionalität kann mit dem üblichen Verständnis eines Metaphermodells nicht mehr beschrieben werden.

Aus kognitiver Perspektive sollte auch hier nochmals deutlich geworden sein, dass eine Behälter-Metaphorik allein nicht ausreicht, um den Mengenbegriff in seiner ganzen Breite zu erfassen. Sie unterschlägt die Traditionen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie, die an der Strukturierung der Theorie mitwirken.<sup>25</sup> Für Boolsche Algebren zeigen Lakoff/Núñez (2000: 125f) den Einfluss der Arithmetik durch eine konzeptuelle Metapher zwar auf, wiederholen ihre Überlegungen allerdings für Mengen leider nicht, sondern stellen nur lakonisch fest, dass die Mengentheorie da weiter mache, wo Boole aufgehört habe: „Sets are more sophisticated than Boolean classes“ (ebd.: 140). Ihnen entgeht so, dass Boolsche Algebren und Mengen in unterschiedlicher Weise durch Arithmetik und Algebra geformt werden, dass die gleichen Herkunftsbereiche auf ganz verschiedene Weise genutzt werden und dass es deshalb nicht genügen kann, konzeptuelle Metaphern als  $A \text{ IST } B$  anzugeben, weil Fokussierungseffekte so verborgen bleiben. Darüber hinaus wird an der Bidirektionalität deutlich, dass die konzeptu-

<sup>25</sup> Becker (Becker 2006: 167f) kommt zu dem gleichen Ergebnis für die mathematische Struktur der Gruppe.

ellen Metaphern längst in einer Analogie aufgegangen ist, die schließlich, wie das nächste Kapitel zeigen soll, sogar zu einem vollen Modell geworden ist.

### 6.6 Transitive Mengen und ein Modell der natürlichen Zahlen

Der Irrtum in Bezug auf die Transitivität von Mengen konnte mit dem Verweis aufgelöst werden, dass die beiden Relationen  $\in$  und  $\subseteq$  nicht ausreichend unterschieden wurden. Dennoch ist die Transitivität nicht einfach beiseitezulegen. Zunächst kann die Elementrelation auf Mengen mit Grundobjekten als Elementen niemals transitiv sein, sodass nur Mengensysteme für diese Eigenschaft in Frage kommen. Jede Menge, deren Elemente zugleich auch Teilmengen dieser Menge sind, werde *transitiv* genannt. Transitive Mengen haben interessante Eigenschaften: Sie sind unter der Bildung von Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen und die Potenzmenge einer transitiven Menge ist selbst auch wieder transitiv. Wird eine transitive Menge weiterhin durch die Relation  $\in$  wohlgeordnet, dann heiße sie (*Neumann-Zermelo-Ordinalzahl*). Die „kleinste“ derartige Menge ist die leere Menge; sie erfüllt die genannten Bedingungen trivialerweise. Aus ihr kann man sukzessiv durch wiederholte Bildung von  $x \cup \{x\}$  weitere transitive und durch  $\in$  wohlgeordnete Mengen gewinnen:  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$ . Auf John von Neumann geht schließlich die Idee zurück, diese Mengen als mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen zu interpretieren. Vor von Neumann hatte Zermelo als mengentheoretische Interpretation der natürlichen Zahlen die Mengenfolge  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$  vorgeschlagen, die iterativ durch den Übergang von  $x$  zu  $\{x\}$  entsteht. Beiden Ansätzen gemeinsam ist, dass sie ihr Modell ohne Verwendung von Grundobjekten allein aus der leeren Men-

$$\begin{aligned}0 &= \emptyset \\1 &= \{\emptyset\} = \{0\} \\2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \\3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\&\vdots\end{aligned}$$

Tabelle 4: Von Neumanns mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen

ge konstruieren. Von Neumanns Zahlenreihe konnte sich aber letztendlich wegen ihrer besseren Eigenschaften durchsetzen, auch wenn sie komplizierter aussieht. Durch die Wohlordnung entlang der  $\in$ -Relation gilt  $n < m$  für zwei Ordinalzahlen  $n$  und  $m$  genau dann, wenn  $n \in m$  ist. Außerdem enthält die Mengendarstellung einer Zahl  $n$  genau  $n$  Elemente und zwar die  $n$  Vorgänger dieser Zahl, was den Zählprozess besonders hervorhebt.

Von Neumanns mengentheoretische Einbettung wird von Lakoff/Núñez ebenfalls als konzeptuelle Metapher analysiert:

From a cognitive perspective, this is a metaphor that allows us to conceptualize numbers, which are one kind of conceptual entity, in terms of sets, which are a very different kind of conceptual entity. This is a *linking metaphor* [...] (Lakoff/Núñez 2000: 142)

Auch mit viel gutem Willen und unter Beachtung, dass es sich um eine Verbindungsmetapher handeln soll, wirkt es immer noch recht abwegig: Da sollen nun also die natürlichen Zahlen, deren Fundament Lakoff/Núñez (ebd.: 50ff) sehr ausführlich und recht plausibel auf alltägliche Erfahrungen zurückgeführt haben, als etwas wesentlich Abstrakteres verstanden werden? Das ist fragwürdig, zumal man einigen Aufwand betreiben muss, um von Neumanns Mengenreihe zu erhalten, während man schon längst über ein reiches Verständnis der natürlichen Zahlen verfügt. Insbesondere steht doch wohl dieses intuitive Wissen Pate bei der Konstruktion. Die Metapher

ließe sich vielleicht retten, wenn man die Projektionsrichtung umkehrte, dann würde sich der bekannte Herkunftsbereich der natürlichen Zahlen in den unbekanntem Mengen abbilden. Dafür spricht etwa folgende Erklärung Zermelos:

Die Menge  $Z_0$  enthält die Elemente  $0, \{0\}, \{\{0\}\}$  usw. und möge als „Zahlenreihe“ bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. (Zermelo 2010: 200)

Die sprachlichen „Vorsichtsmaßnahmen“ vom Modalverb im Konjunktiv bis zur doppelten typographischen Markierung durch Anführungszeichen und Kursivdruck deuten darauf hin, dass Zermelo das Lexem *Zahlenreihe* nicht wörtlich verstanden wissen wollte, sondern eine metaphorische Interpretation bevorzugte, die, wie aus seiner Begründung hervorgeht, auf ähnlichen Struktureigenschaften von seinen Mengen und der natürlichen Zahlen basiert. Aber auch so herum gedreht ist die konzeptuelle Metapher nicht vollends zufriedenstellend, da man kaum davon ausgehen kann, dass Zermelo seine Mengen völlig zufällig entdeckt und dann nach einer Interpretation für sie gesucht hat. Es ist eher anzunehmen, dass diese Mengen völlig bewusst mit dem Ziel, die „intuitiven“ Zahlen nachzubilden, konstruiert worden sind, wie sich an den Zielen, die Zermelo für die Mengenlehre formuliert, bestätigt:

Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Wissenschaft. (ebd.: 188)

Die Suche nach einem dazu notwendigen mengentheoretischen Äquivalent zu den Zahlen ist somit nichts anders als die Suche nach einem Analogon, nach Mengen mit einer zu den Zahlen ähnlichen Struktur. Für die natürlichen Zahlen ist nun aber charakteristisch, dass man mit ihnen zählen kann:



Sie haben einen Anfang, die Null, von dem aus Schrittweise Nachfolger gebildet werden, wobei verschiedene natürliche Zahlen verschiedene Nachfolger haben, und sie sind induktiv<sup>26</sup>. Formal wird diese Struktur durch die Peano-Axiome beschrieben. Man kann nun einerseits zeigen, dass die Mengen nach von Neumann diese Axiome erfüllen und andererseits weiß man seit Dedekind, dass alle Strukturen, die diese Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind.

Von Neumanns Mengen erfassen nun aber nicht nur wie Zermelos Zahlenreihe den ordinalen Aspekt des Zählens, sondern auch die Kardinalität, da jede Menge genau der intuitiven Zahl entsprechende Elemente enthält, während Zermelos Mengen abgesehen von der leeren Menge immer genau ein Element enthalten. Die Überlegenheit gegenüber Zermelos Vorschlag gründet sich somit auf einer umfassenderen Analogie, die mehr positive Analogien stiftet und deshalb stärker ist.

Insgesamt erhält man ein mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen und durch Erweiterung damit auch Modelle der ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Der Vorzug dieser Modelle besteht aber nicht darin, kognitiv ein unbekanntes Terrain aufzuschließen, sondern in der Aussicht, eine Basis für die gesamte Mathematik zu entwickeln und mit der Einbettung der Arithmetik in das stärkere System der Mengenlehre auch bisher unbewiesene Vermutungen beweisen zu können. So reichen etwa die Peano-Axiome nicht aus, um die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik oder den Satz von Goodstein beweisen zu können. Beides ist aber in der Mengenlehre möglich, unter dem Vorbehalt, dass die Mengenlehre selbst widerspruchsfrei ist.

---

<sup>26</sup> Für alle Eigenschaften  $E$  gilt: Trifft  $E$  auf 0 zu und folgt aus  $E(n)$  stets  $E(n+1)$ , dann haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft  $E$ .

## 6.7 Funktionen und geordnete Paare

Ebenso wie der Mengenbegriff für die Mathematik grundlegend geworden ist, stieg auch der Funktionsbegriff zu einem zentralen Werkzeug fast aller mathematischen Tätigkeiten auf. Beide Begriffe sind zudem auf engste miteinander verwoben und seit dem 20. Jahrhundert in fast jedem mathematischen Zweig präsent. Im Schulunterricht dagegen werden Mengen heute meist nur indirekt als Hilfsmittel genutzt, während Funktionen zum Kernbestand des Curriculums gehören, wie die Rahmenrichtlinien Sachsen-Anhalts für den Mathematikunterricht zeigen:

Neben der Vermittlung grundlegender Kompetenzen bei der Bewältigung mathematischer Fragestellungen hat der Mathematikunterricht die Aufgabe, zentrale Ideen der Mathematik, wie die Idee der Zahl, **die Idee des funktionalen Zusammenhangs**, die Idee der Wahrscheinlichkeit und des Zufalls, die Idee der Raumschauung, deutlich zu machen. (Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik. Schuljahrgänge 5-12 2003: 6 – Hervorhebungen durch den Autor)

In jeder dieser Leitideen werden Mengen als Werkzeug benutzt, etwa um die Gesamtheit aller Teiler einer ganzen Zahl zu erfassen oder um ein Modell für einen Wahrscheinlichkeitsraum oder den euklidischen Raum bereitzustellen. Demgegenüber genießt der Funktionsbegriff eine exponiertere Stellung angefangen bei den linearen Funktionen in Klasse sieben und acht über quadratische Funktionen, Winkel-, Potenz- und Exponentialfunktionen in den Folgejahren bis zum Themenkomplex der Infinitesimalrechnung in den Klassen elf und zwölf. Es soll deshalb an dieser Stelle mehr als nur die mengentheoretische Interpretation von Funktionen diskutiert und ein umfassenderer Blick auf diesen zentralen Begriff geworfen werden.

Kurioserweise war der heute so unverzichtbare Funktionsbegriff der antiken Mathematik noch fremd und ist eine Erfindung des 17. Jahrhunderts. In dieser Epoche zu Zeiten von Leonhard Euler und Gottfried Wilhelm

Leibniz nannte man anfangs jede veränderliche Größe, die von einer anderen veränderlichen abhängt, eine Funktion. Noch im Deutschen Wörterbuch von Jacob und Wilhelm Grimm macht diese Abhängigkeit den Kern der fachsprachlichen Bedeutung aus:

[...] in der mathematik nennt man so eine von einer andern abhängige veränderliche grösze, die man in der regel durch x, y, z ausdrückt.

(<http://woerterbuchnetz.de/DWB/?lemma=function> – Zugriff am 16.08.2010)

Für diese Beziehung zweier Größen schrieb man – und schreibt auch weiterhin, selbst wenn sich die Interpretationen gewandelt haben –  $y = f(x)$  und nannte  $y$  eine *Funktion von  $x$* , wobei diese Bezeichnung heute gemieden wird. Der Wert von  $y$  ist durch  $f$  und die Wahl von  $x$  determiniert, weshalb  $y$  als *abhängige Größe* bezeichnet wurde (und wird). Als Bezugspunkt lässt sich, wie schon der Begriff *Größe* vermuten lässt, innermathematisch die Geometrie denken, in der etwa der Flächeninhalt eines Quadrates in Abhängigkeit von der Seitenlänge beschrieben werden kann, oder aber außermathematisch in der Physik die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der verstrichenen Zeit. Im Fokus dieser Perspektive stehen also zwei Größen und deren Abhängigkeit voneinander, bei der jede Änderung der unabhängigen Größe eine charakteristische Veränderung der abhängigen Größe bewirkt. Wie der Eintrag aus dem Deutschen Wörterbuch zeigt, wurde in  $y = f(x)$  das  $y$  als *Funktion* bezeichnet. Diese Sprechweise ist heute nicht mehr in Gebrauch, da durch Verschiebung der Perspektive nicht mehr die abhängige Größe, sondern das Gesetz der Abhängigkeit selbst als Funktion bezeichnet wird. Dies wird auf konzeptueller Ebene durch die Fundierungsmetapher FUNKTIONEN SIND MASCHINEN unterstützt. Gemäß dieser Sichtweise werden Objekte  $x$  aus einem Quellbereich (Definitionsbereich) in die Funktion hineingegeben, dort nach einem bestimmten Mechanismus umgewandelt und als veränderte Objekte  $y$  in

einen Zielbereich (Wertebereich) ausgegeben (vgl. Lakoff/Núñez 1997: 47). In den folgenden sprachlichen Äußerungen ist diese konzeptuelle Metapher realisiert:

- (1) Die sign-Funktion liefert zu jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen.
- (2) Die Funktion  $f(n) = n + 1$  wandelt jede gerade Zahl in eine ungerade Zahl und jede ungerade Zahl in eine gerade Zahl um.

Eine besondere Variante ist die Funktion-als-Verkaufsautomat-Metapher:

- (3) Eine Metrik ist eine Funktion, in die man zwei Elemente einer Menge hineinsteckt und dafür eine nicht negative reelle Zahl herausbekommt.

Diese dynamische Vorstellung eines dreistufigen Vorgangs aus Eingabe, Verarbeitung und Ausgabe lässt sich konzeptuell durch die Kombination des Behälter-Schemas mit dem Weg-Schema, dessen Start- und Endpunkt außerhalb des Behälters liegen, dessen Pfad aber durch das Behälterinnere führt, beschreiben. Im Kern dieser Apparatur arbeitet ein Algorithmus als Getriebe und rechnet Eingabe- in Ausgabewerte um. Die Aufmerksamkeit wird so auf die Berechnung einzelner Funktionswerte gelenkt, eventuelle Zusammenhänge zwischen verschiedenen Ein- und Ausgabewerten bleiben im Verborgenen (vgl. Slavit 1997: 261). Es ist daher auch nicht verwunderlich, wenn die Funktionsmaschine, in der Notation als Gleichung dargestellt, mit der Funktion identifiziert wird.

Implizit wird von der Eindeutigkeit der  $y$ -Objekte ausgegangen, d. h., aus  $f(x_0) = y_1$  und  $f(x_0) = y_2$  folgt stets  $y_1 = y_2$ . Manche Autoren versehen den Funktionsbegriff auch explizit mit dem Attribut *eindeutig*, wenn sie diese Eigenschaft nicht unmittelbar fordern. Sie unterscheiden dann zwischen eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen. Zu den wichtigsten Beschreibungsmitteln beider Typen von Funktionen zählen Definitions- und

Wertebereich. Da die Bezeichnungen sehr variieren, sei hier festgelegt:

$$\text{dom}(f) := \{x \mid \text{es existiert ein } y \text{ mit } f(x) = y\} \quad (\text{Definitionsbereich})$$

$$\text{rng}(f) := \{y \mid \text{es existiert ein } x \text{ mit } f(x) = y\} \quad (\text{Wertebereich})$$

Konsistent mit der algorithmisch verfahrenen Funktionsmaschine zeigt sich die auf die mengentheoretische Interpretation vorausgreifende Schreibweise  $f: A \rightarrow B$  für eine Funktion  $f$ , die Elemente aus der Menge  $A$  in Elemente der Menge  $B$  umwandelt. Man beachte, dass die Funktion zwar auf allen Elementen von  $A$  operiert, aber nicht zwangsläufig alle Elemente aus  $B$  erreichen muss, sodass der Wertebereich einer Funktion, also alle Werte, die  $y$  annehmen kann, im Allgemeinen eine Teilmenge von  $B$  ist. Insgesamt gilt also  $\text{dom}(f) = A$  und  $\text{rng}(f) \subseteq B$ ; die Menge  $B$  heiße *Werteveorrat* von  $f$ .

Gesondert muss noch auf das Gleichheitszeichen im Ausdruck  $y = f(x)$  hingewiesen werden, das, ganz gleich wie Funktionen konzeptualisiert werden, immer Verwendung findet. Pimm (1987: 187) zufolge lassen sich wenigstens zwei grundlegend verschiedene Lesarten des Gleichheitszeichens unterscheiden: Einmal kann es zur Benennung eines Ausdrucks durch einen anderen verwendet werden, so etwa in  $f(x) = x^2$ , wo die linke Seite der Gleichung der rechten einen Namen bzw. ein Etikett zuweist. Funktionsgleichungen sind dann Belegungen von  $f(x)$  mit einem algebraischen Ausdruck. Insbesondere kann ihnen kein Wahrheitswert zugesprochen werden. Für diese Verwendungsweise wird teilweise die Zeichenfolge „:=“ substituiert, meistens dann wenn die Bedeutung einer Zeichenfolge im Rahmen einer Definition festgelegt werden soll. Die zweite Lesart beschreibt Pimm so:

The second use of ‘=’ is more worthy of the name ‘theorem’, and arises from some kind of identification of meanings, where both sides of the equality have

meaning in their own right. (Pimm 1987: 187)

Als Beispiel führt er einen Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$  an, der im Gegensatz zu einer einfachen Benennung etwas behauptet und damit beweispflichtig ist. Dass diese Zweiteilung nicht immer eindeutig ist, wird schon bei Pimm deutlich, wenn er etwa danach fragt, welche Lesart denn in  $2 + 3 = 5$  oder in  $2 - 3 = -1$  vorliege. Ist es eine Stipulation, die das Ergebnis von  $2 + 3$  als 5 festlegt, oder eine Behauptung mit Anspruch auf Wahrheit? Ein vergleichbares Problem findet man auch bei der Exponentialfunktion. Diese kann als  $e^x := \sum_n \frac{x^n}{n!}$  definiert werden, um mit ihrer Umkehrfunktion – dem Logarithmus – die allgemeine Exponentiation als  $a^x := e^{x \ln(a)}$  für alle  $a > 0$  einzuführen. Daraus lassen sich alle üblichen Rechenregeln für die Exponentiation wie  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$  oder  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  ableiten. Umgekehrt kann jedoch auch von der Exponentiation als wiederholte Multiplikation auf den natürlichen Zahlen ausgegangen werden, die sich eindeutig auf alle ganzen, rationalen und reellen Zahlen fortsetzen lässt. Definiert man dann die Eulersche Zahl durch  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , ist die genannte Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion keine Definition mehr, sondern muss bewiesen werden. Das Gleichheitszeichen zeigt abhängig vom Zugang einmal eine Benennung und das andere Mal ein Theorem an. Neben den vom Pimm diskutierten lässt sich noch eine dritte Interpretation des Gleichheitszeichens feststellen. So beobachtet Kieran (1981: 324), dass in der Schulmathematik das Gleichheitszeichen häufig mit einem Appell, „etwas zu tun“, assoziiert wird. Dieser dynamische Aspekt ist konsistent mit der Verkaufsautomaten-Metaphorik, die ebenfalls als Handlungsaufforderung, zu einem Ausgangswert einen Zielwert zu berechnen, verstanden werden kann.

Lakoff/Núñez verfolgen bei der Beschreibung der Bedeutung des Gleichheitszeichens eine andere Strategie: Statt wie Pimm zwei homonyme Les-

arten zu unterscheiden, meinen sie, dass nur in wenigen Kontexten das Gleichheitszeichen wörtlich zu interpretieren sei und in allen anderen Fällen der Verwendung eine konzeptuelle Metapher zugrunde liege:

*Not all =’s mean the same thing, and most =’s are metaphorical. We have seen that in the grounding metaphors there are many different uses of ‘=’ in numerical equations; e.g., balance, different routes to the same place, and so on. Moreover, every linking metaphor introduces metaphorical uses of ‘=’ via which expressions for source domain ideas can be substituted in proofs for expressions of target ideas. (Lakoff/Núñez 1997: 84)*

Wie man die Verwendung eines Gleichheitszeichens interpretiert, ist demzufolge abhängig von den konzeptuellen Metaphern, die mit den Objekten, zwischen denen es eine Beziehung stiftet, verknüpft sind. Von der Maschinen-Metapher ausgehend könnte sich *y entsteht, indem x die Prozedur f durchläuft* als Paraphrase für  $y = f(x)$  eignen. Damit ist aber mit dem Zeichen „=“ mehr als nur eine Etikettierung im Sinne Pimms verbunden, andererseits kann auch nicht von einem Theorem gesprochen werden, das zu beweisen wäre. Gegen die Interpretation des Gleichheitszeichen im Rahmen übergeordneter kognitiver Modelle spricht jedoch, wie Funktionen verglichen werden. Unter der Maschinenmetapher wäre es konsequent, zwei Funktion  $f$  und  $g$  dann als *gleich* ( $f = g$ ) zu bezeichnen, falls beide den gleichen internen Aufbau aufweisen, also die Regeln, nach denen Objekte umgewandelt werden, identisch sind. Durchgesetzt hat sich jedoch eine von der Mengenlehre inspirierte extensionale Definition, nach der zwei Funktion  $f$  und  $g$  dann gleich sind, wenn sie in ihrem Definitions- und Wertebereich übereinstimmen und jedes Objekt des Definitions- in das selbe Objekt des Wertebereichs umgewandelt wird, wenn also für alle  $x \in \text{dom}(f) = \text{dom}(g)$   $f(x) = g(x)$  gilt. Es ist dann unerheblich, wie eine Funktion „intensional“ definiert ist, alles, was zählt, sind die Zuordnungen von Definitions- zu Funktionswerten.

Die Verwendung des Gleichheitszeichens kann aber auch ganz unabhängig einer Konzeptualisierung von Funktionen als Abhängigkeiten oder Maschinen gesehen werden, zumal keine dieser konzeptuellen Metaphern das Auftreten dieses Zeichens erzwingt. Dann ist zusätzlich ohne Berücksichtigung von möglichen Interpretationen anzumerken, dass ein Gleichheitszeichen auch auf der medialen Ebene, gemeint sind die materiellen Zeichenaspekte, eine bestimmte Leistung vollbringt. Wie schon beim Vergleichen von Mengen erläutert, ist es ein Bestandteil der Algebraisierung. Wenn man so sagen kann, wird hier weniger eine Bedeutung übertragen als vielmehr eine syntaktische Konfiguration, in deren Zuge das Wissen über Transformationsregeln von Gleichungen auch auf Funktionen anwendbar wird. Mit Klaus gesprochen, wird der operative Sinn der Zeichen erweitert und Funktionen und Gleichungen werden in diesem Prozess aufeinander bezogen, was schließlich auch sprachlich durch die Komposita *Funktionsgleichung* (,Gleichung, die eine Funktion beschreibt‘) und *Funktionalgleichung* (,Gleichung, deren Lösungen Funktionen sind‘) bezeugt wird. Daneben werden in der Notation die arithmetischen Operationen auf Funktionen übertragen:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) & (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ wenn } g(x) \neq 0\end{aligned}$$

Lakoff/Núñez (1997: 52f) und Lakoff/Núñez (2000: 386) analysieren diese Ausweitung des Anwendungsbereichs der arithmetischen Operationszeichen von gewöhnlichen Zahlen auf Funktionen als „definitional metaphor“ auf der konzeptuellen Ebene. Deshalb seien alle vier oben aufgelisteten Gleichungen metaphorische Definitionen, in denen man die Operationszeichen auf den linken Seiten metaphorisch und die auf den rechten Seiten wörtlich zu verstehen habe, jedenfalls dann, wenn die Mengen  $\text{rng}(f)$  und



$\text{rng}(g)$  Zahlen enthalten, ansonsten müssen die Operationszeichen auf den rechten Seiten ebenfalls in einem übertragenen Sinne verstanden werden. Wie bei vielen Verbindungsmetaphern stellt sich auch hier das Problem, dass die miteinander in Beziehung gesetzten Bereiche eigentlich keinen verschiedenen Wirklichkeitsbereichen angehören. Hinzu kommt, dass die zur Diskussion stehenden Funktionen gerade Funktionen auf Zahlenmengen sind und insofern mit Zahlen in einem direkten Verhältnis stehen und nicht mit ihnen über eine Ähnlichkeit assoziiert werden müssen. Dann ist diese Übertragung auf der Ebene der Zeichen jedoch besser als Metonymie zu beschreiben, da die jeweilige Operation auf Funktionen auf ihre Funktionswerte „durchgereicht“ wird, wo sie dann wörtlich interpretiert werden kann.

Vergleichbar mit der Weiterentwicklung der Mengenoperationen kann ausschließlich auf Funktion wohldefinierte Operation eingeführt werden: Sind  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  Funktionen, so heiße  $g \circ f$  *Verknüpfung*, *Verkettung*, *Hintereinanderausführung* oder auch *Komposition* von  $f$  und  $g$  und sei definiert als:

$$g \circ f: A \rightarrow C \text{ mit } (g \circ f)(x) = g(f(x)).^{27}$$

Die Bezeichnung *Hintereinanderausführung* verdeutlicht die Operation in Bezug auf die Maschinen-Metapher: Wenn man Funktionen als Maschinen begreift, denn dann werden hier die zwei Funktionsmaschinen  $f$  und  $g$  so hintereinandergeschaltet, dass zuerst  $f$  ausgeführt wird und anschließend  $g$ . Das ist natürlich nur dann möglich, wenn der Wertebereich von  $f$  eine Teilmenge des Definitionsbereichs von  $g$  ist. Obwohl diese Operation genuin auf Funktionen angewandt wird, ohne im Bereich der Zahlen ein Analogon aufzuweisen, knüpft sich auch hier die Bande zur Arithmetik, wenn etwa gefragt wird, welche bekannten Eigenschaften diese Operation  $\circ$  aufweist:

<sup>27</sup> Manche Autoren bevorzugen es,  $(g \circ f)(x)$  als  $f(g(x))$  zu definieren.

So ist sie zwar nicht kommutativ, d. h., im Allgemeinen ist die Funktion  $f \circ g$  nicht identisch mit  $g \circ f$ , aber sie ist assoziativ, da  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  für entsprechende Funktionen erfüllt ist.

Der Bereich der Funktionen wird also auf vielfältige Weise strukturiert: Einmal durch konzeptuelle Metaphern wie EINE FUNKTION IST EINE MASCHINE, welche die Anbindung an die alltägliche Erfahrungswelt gewährleisten, dann durch innermathematische metaphorische und metonymische Übertragungen, die Brücken zu Arithmetik und Algebra schlagen, auf der Wissen und Fertigkeiten aus diesen Bereichen übersetzen können. Während sich die erstgenannten Verfahren vor allem den in sprachlichen Bezeichnungen, Kommentaren und Paraphrasen wiederfinden lassen, motivieren die zweiten Übertragungen vor allem die Notation.

Der im 18. Jahrhundert entwickelte Funktionsbegriff war einerseits ein Katalysator für der Herausbildung der modernen Mathematik, andererseits dauerte es nicht lange, bis man erste Schwächen erkannte: Die starke Verbindung zu Gleichungen legt schon nahe, warum anfangs überhaupt nur solche Objekte als Funktion galten, für die eine explizite Bildungsvorschrift in Form einer Gleichung angegeben werden kann. Diese Bedingung wurde in der Folgezeit immer öfter in Zweifel gezogen, weil Objekte, die einen funktionellen Zusammenhang im Sinne der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen Größe ausdrücken, gefunden wurden, die sich nicht in einem analytischen Ausdruck beschreiben ließen. So wurde eine Überarbeitung des Funktionsbegriff immer dringender. Mit der Entwicklung der Mengenlehre konnte der in der Zwischenzeit abstrakter gewordene Funktionsbegriff theoretisch präzise erfasst werden. Man verließ die Sphäre der Abhängigkeit von Größen, unter denen man üblicherweise Zahlen verstand, und machte die Zuordnung selbst, die nicht notwendigerweise nach einer algebraisch formulierbaren Regel vorgehen musste, zur definierenden Eigenschaft von Funktionen. Die morphologische Wortbildung *Zuordnung* als Derivation

zum Verb *zuordnen* mittels des Suffixes *-ung* lässt dabei grundsätzlich die Wahl, das Geschehen als Vorgang oder als dessen Resultat zu interpretieren (vgl. Duden. Die Grammatik: 735). Insofern kann eine mathematische Funktion eher dynamisch als Vorgang der Zuordnung oder eher statisch als Ergebnis dieses Prozesses aufgefasst werden.<sup>28</sup>

Bei dieser Neuorientierung des Begriffs lohnt es, nach der Verwendung des Wortes *Funktion* außerhalb des mathematischen Registers zu fragen. In der Linguistik wird das Wort meist zur Bezeichnung einer bestimmten Rolle in Relation zu einem umfassenderen System verwendet und dem Begriff der Form gegenübergestellt, wie z. B. diese Einführung in die Pragmatik zeigt:

Die Sätze einer Sprache haben eine unterschiedliche **Form**, wie sich etwa in unterschiedlicher Anordnung und Auswahl von Wörtern und Konstruktionen zeigt. Und dennoch haben sie eine gemeinsame **Funktion**, nämlich die, daß sie der sprachlichen Verständigung von Menschen dienen. (Meibauer 2001: 2)

Einer sprachlichen Einheit – einem Wort, einer Phrase, einem Satz oder einem Text – kann nur in Bezug zu einem übergeordneten Ganzen eine bestimmte Funktion zukommen. Wie beim mathematischen Terminus geht es auch hier letztendlich immer um Zuordnungen: Sätzen werden in Bezug auf eine Kommunikationssituation bestimmte Sprechakte oder im Bereich der Syntax werden Phrasen in Bezug auf einen Satz syntaktisch-semantic Rollen zugeordnet. Nur nennt der Sprachwissenschaftler die Rolle einer Form in einem übergeordneten Zusammenhang ihre Funktion, für den Mathematiker, der sich von der Abhängigkeits- und Maschinenmetapher entfernt hat, wären jedoch erst alle Paare aus Formen und Rollen die Funktion. Daran verdeutlicht sich nochmals das Prinzip der Extensio-

---

<sup>28</sup> Wie Sfard/Linchevski schreiben, lassen sich die meisten mathematischen Gegenstände statisch als Objekt oder dynamisch als Vorgang interpretieren: „the same representation, the same mathematical concepts, may sometimes be interpreted as processes and at other times as objects; or, to use the language introduced elsewhere they may be conceived both *operationally* and *structurally*“ (Sfard/Linchevski 1994: 193).

nalität der Mathematik. Der Linguistik ist die Frage, wie einer Form eine Funktion zugeordnet wird, besonders wichtig, die Mathematik abstrahiert davon.

Eine heute übliche Definition des Funktionsbegriffs findet sich etwa in einem Einführungsbuch in die Mathematik für Studienanfänger:

Eine Abbildung oder Funktion  $f$  ist eine Zuordnung, die jeder Zahl  $x$  einer gegebenen Zahlenmenge  $D$  eine Zahl  $y$  einer Zahlenmenge  $W$  zuordnet. Die Zuordnung ist eindeutig, das heißt, jeder Zahl  $x$  wird genau eine Zahl  $y$  zugeordnet. Man schreibt dafür  $y = f(x)$  oder manchmal auch  $x \rightarrow f(x)$ . Man nennt  $f(x)$  das Bild von  $x$  und umgekehrt  $x$  das Urbild von  $f(x)$ . (Kemnitz 2002: 170)

Zwar wird hier schon von einer Zuordnung zwischen Mengen gesprochen, aber man bleibt vorerst noch im Reich der Zahlen. Die ursprüngliche Notation  $y = f(x)$  wird beibehalten, aber die Lesart zu ‚ $y$  wird  $x$  zugeordnet‘ umbesetzt. Außerdem gebraucht der Autor hier zusätzlich den Begriff der Abbildung, der eigentlich aus einer anderen mathematischen Richtung kommend heute synonym zu *Funktion* gebraucht wird. Mit ihm in Verbindung stehen die Begriffe *Bild* und *Urbild*. Ebenso wie *bildliche Rede* in der Rhetorik metaphorisch als Veranschaulichung abstrakter Sachverhalte zu verstehen ist (vgl. Kohl 2007a: 11), bezeichnet auch der mathematische Terminus *Abbildung* kein visuelles Konstrukt. Vergleichbar ist weiterhin, dass beide Begriffe metaphorisch über den optischen Vorgang einer Projektion verstanden werden können. Entscheidend für die Mathematik ist, dass eine Zuordnung ebenso wie eine Projektion immer zwei Aspekte beinhaltet: Etwas wird etwas zugeordnet oder etwas wird auf etwas projiziert. So nennt man dann  $y$  *das Bild von  $x$  unter der Abbildung  $f$*  und entsprechend  $x$  *ein Urbild von  $y$* .<sup>29</sup> Allerdings hat die Projektionsmetapher, auch

---

<sup>29</sup> Die Asymmetrie in der Wahl der Artikel (*das Bild* aber *ein Urbild*) ist berechtigt, weil das Bild zwar aufgrund der Eindeutigkeit der Zuordnung eindeutig bestimmt ist, das Urbild im Allgemeinen aber nicht, d. h. zu einem  $y \in \text{rng}(f)$  kann es verschiedene  $x \in \text{dom}(f)$  geben, die diesem zugeordnet sind.

wenn sie gegenüber der Zuordnungsmetapher konkreter ist, wie alle Metaphern einen blinden Fleck: Abbildungen einer Menge in sich selbst, die in der Mengentheorie und der Mathematik häufig untersucht werden, sind nur schwer als Projektion vorstellbar, als Zuordnung jedoch leicht erfassbar. Insofern ist es didaktisch sinnvoll, dass die oben genannte Definition beides kombiniert.

Die Durchdringung des Funktionsbegriffs durch Mengentheorie gestattet es, eine Funktion auch auf Teilmengen ihres Definitionsbereiches zu betrachten. Für  $f: A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$  definiert man  $f(M) := \{f(m) \mid m \in M\}$  als das Bild der Menge  $M$  unter der Abbildung  $f$ . Der Wertebereich lässt sich dann als  $\text{rng}(f) = f(A)$  ausdrücken. Analog dazu definiert man das<sup>30</sup> Urbild einer Menge  $N \subseteq B$  als  $f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}$ .<sup>31</sup>

Die hochgestellte  $-1$  ist als eine Übertragung aus der Potenzoperation zu verstehen: In der algebraischen Struktur der reellen Zahlen drückt der Exponent  $-1$  das bezüglich der Multiplikation inverse Element aus, d. h., zu jeder reellen Zahl  $a \neq 0$  gibt es genau eine Zahl  $a^{-1}$ , die, wenn sie mit  $a$  multipliziert wird, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, also die 1, ergibt. In metonymischer Lesart wäre der Ausdruck  $f^{-1}$  als  $\frac{1}{f}$  im Sinne von  $\frac{1}{f(x)}$  zu interpretieren, der für alle  $f(x) \neq 0$  definiert ist und eine neue

<sup>30</sup> Im Gegensatz zum Urbild eines Elements aus  $\text{rng}(f)$  ist das Urbild einer Menge von Elementen aus  $\text{rng}(f)$  immer eindeutig bestimmt. Insbesondere ist zwischen den Ausdrücken  $f^{-1}(y)$  und  $f^{-1}(\{y\})$  (für  $y \in \text{rng}(f)$ ) zu unterscheiden: Während  $f^{-1}(\{y\})$  immer ein Element der Potenzmenge des Definitionsbereichs von  $f$  ist, gehört  $f^{-1}(y)$ , wenn es eindeutig bestimmt ist, zu  $\text{dom}(f)$ .

<sup>31</sup> Deiser macht auf eine Problematik der Notation aufmerksam: „ $f(A)$  ist die Bezeichnung für einen Funktionswert, und dem Großbuchstaben kommt dann zuviel Gewicht zu. In einfachen Kontexten, wo etwa  $f$  immer eine reelle Funktion ist, ist das durchaus sinnvoll. Ist aber etwa  $f$  auf einem Mengensystem definiert, so ist  $f(A)$  nicht geeignet.  $f[A]$  hat viel für sich, sieht aber als  $f[[A]]$  für Äquivalenzklassen  $[A] = A/R$  unmöglich aus und erst recht als  $f[ ]a, b[ ]$  für Intervalle  $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ “ (Deiser 2008: 21). Er selbst verwendet  $f''A$  für das Bild von  $A$  unter  $f$  und  $f^{-1}''A$  für das Urbild von  $A$  unter  $f$ . In der Notation ist also ohne Kontextwissen kaum zu entscheiden, ob  $f(M)$  nun das Bild eines Elements  $M$  aus  $\text{dom}(f)$  oder das Bild einer Menge  $M$  von Elementen aus  $\text{dom}(f)$  bezeichnet.

Funktion beschreibt.<sup>32</sup> Wird er jedoch metaphorisch verwendet, so ist die hochgestellte  $-1$  Ausdruck des allgemeineren Vorgangs einer Umkehrung, einer Inversion, die in vielen mathematische Strukturen wie Gruppen, Ringe oder Körper Eingang gefunden hat. Die Inversion ist dabei immer auf ein Element in einer bestimmten mathematischen Struktur bezogen und kann nur mit Bezug zur Struktur als Ganzes erklärt werden: In Analogie zum multiplikativen Inversen reeller Zahlen wird die Inversion eines Elementes  $X$  einer mathematischen Struktur in Bezug auf eine Operation  $\circ$  ausgeführt, sodass die Verknüpfung des Elements mit seinem Inversen  $X^{-1}$  das in dieser Struktur ausgezeichnete neutrale Element  $e$  ergibt:  $X \circ X^{-1} = e$ . Auf die Verknüpfungsoption von Funktionen übertragen bedeutet die Inversion eine Umkehrung der Abbildungsrichtung, bei der die unabhängige Variable abhängig und die abhängige unabhängig wird sowie  $\text{dom}(f)$  und  $\text{rng}(f)$  ihre Plätze tauschen. Als neutrales Element fungiert die Identität  $f(x) = x$ , die jedes Element auf sich selbst abbildet. Während die multiplikative Inversion reeller Zahlen nur für die Null unmöglich ist, sind bei Funktionen engere Grenzen gesetzt: Der Ausdruck  $f^{-1}$  wird im Allgemeinen keine Funktion mehr sein, weil er das Eindeutigkeitskriterium verletzt. So ist etwa für die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $g(x) = x^2$  die Inversion  $g^{-1}$  keine Funktion mehr, da z. B. sowohl  $g^{-1}(4) = 2$  als auch  $g^{-1}(4) = -2$

---

<sup>32</sup> Das Attribut *metonymisch* ist hier problematisch, da, wie Pimm schreibt, der Ausdruck  $a^{-1}$  selbst nur wieder unter Rückgriff auf eine Metapher zu verstehen sei: „ $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ , ... can be viewed as a shorthand notation for repeated multiplication, where the index is the number (in the sense of ‘how many?’) of times the base number  $a$  is to be multiplied together. What sense can be made of  $a^{-1}$ ? What sort of statement is  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ?“ (Pimm 1987: 186) Bei der Definition „von unten nach oben“ ist die Potenzschreibweise zunächst einmal nur eine zweckmäßige Abkürzung für eine wiederholte Multiplikation. Aus ihr ergibt sich aber das Potenzgesetz  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  für natürliche Zahlen  $n$  und  $m$ , aus dem sich bei Erweiterung des Zahlenbereiches von  $n$  und  $m$  auf die ganzen Zahlen der Ausdruck  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  ableiten lässt: Wegen  $a^1 \cdot a^{-1} = a^{1+(-1)} = a^0 = 1$  lässt sich  $a^{-1}$  mit dem Inversen von  $a$  bezüglich der Multiplikation identifizieren. Im Sinne einer wiederholten Multiplikation ist dies aber nicht mehr verstehbar. In dieser Weise kann nach Pimm die Erweiterung der Potenzoperation bis zu den komplexen Zahlen als Kette metaphorischer Prozesse beschrieben werden.

wäre. Während  $f^{-1}(y) = x$  dann unsinnig wird, bleibt  $f^{-1}(M) = N$  für  $M \subseteq \text{rng}(f)$  und  $N \subseteq \text{dom}(f)$  weiterhin ein vernünftiger Ausdruck. Die Übertragung von  $^{-1}$  birgt also wieder die für Metaphern typische Gefahr, in der zugrunde liegenden Analogie falsche positiven Analogien anzunehmen. Hier könnte von den bekannten Eigenschaften der Anwendung der Potenzoperation auf reellen Zahlen fälschlich geschlossen werden, die Operation würde auch für Funktionen grundsätzlich ein Objekt des selben Typs erzeugen. Falls  $f^{-1}$  aber eine Funktion ist, dann gelten zum Bereich der Zahlen analoge Beziehungen wie  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Andererseits lassen sich eine Reihe von Beziehungen zwischen Bildern und Urbildern formulieren, z. B.  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$  für alle  $X \subseteq \text{dom}(f)$ , die noch einmal die Besonderheit der Umkehrung  $f^{-1}$  vor Augen führt, nicht in jedem Fall eine Funktion zu sein. Ebenso wie  $f^{-1}$  sind auch andere Potenzen von Funktionen ambig, sodass nicht unmittelbar klar ist, auf welche Operation sich etwa  $f^2$  bezieht: Es könnte sowohl als  $f^2 = f \circ f$ , aber auch als  $f^2 = f \cdot f$  gelesen werden. Für die Umkehrfunktionen spezieller Funktionen werden teilweise neue Bezeichnungen eingeführt, um einer Verwechslungsgefahr vorzubeugen.

Man kann die Einführung des Funktionsbegriffs auf dieser verbalen Umschreibung einer Zuordnung beruhen lassen, sodass er wie der Mengenbegriff einen nicht weiter zurückführbaren Grundbegriff darstellt, und wie schon angedeutet seinen Eigenschaften nachgehen oder man definiert ihn mengentheoretisch. Dann bleibt nur die statistische Interpretation einer Funktion als spezielle Menge. Dazu braucht es den Begriff des geordneten Paares.

Für Mengen gilt nach dem Extensionalitätsprinzip  $\{a, b\} = \{b, a\}$ ; von einem geordnetem Paar erwartet man jedoch, dass die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird, dass also  $(a, b) \neq (b, a)$  für  $a \neq b$  gilt. Um die Struktur eines geordneten Paares auf Mengen zurückzuführen, stehen

verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Bewährt hat sich die Definition des polnischen Mathematikers Kazimierz Kuratowski (1896–1980):

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Um diese Definition als sinnvoll zu begreifen, extrahiert man aus dem intuitiven Verständnis des geordneten Paares die wesentliche Eigenschaft der Reihenfolge oder anders ausgedrückt: Zwei geordnete Paare  $(a, b)$  und  $(c, d)$  sind genau dann gleich, wenn  $a = c$  und  $b = d$  ist. Nun kann gezeigt werden, dass das Kuratowski-Paar diese Bedingung erfüllt.<sup>33</sup> Alternativ ließe sich das geordnete Paar auch als  $(a, b) = \{\{a, i\}, \{b, j\}\}$  mit verschiedenen Objekten  $i$  und  $j$  definieren, die der Vorstellung einer Indizierung der Elemente noch näher käme. Kuratowskis Definition hat aber den Vorteil, dass sie ohne Hinzunahme weiterer Objekte neben  $a$  und  $b$  auskommt.

Lakoff/Núñez nehmen diese mengentheoretische Interpretation des Paarbegriffs nun wiederum zum Anlass, dahinter eine konzeptuelle Metapher zu vermuten. Selbst für die kognitive Metaphertheorie stellt dies eine in-

THE ORDERED PAIR METAPHOR	
<i>Source domain</i>	<i>Target domain</i>
SETS	ORDERED PAIRS
The Set $\{\{a\}, \{a, b\}\}$	→ The Ordered Pair $(a, b)$

Tabelle 5: Lakoff/Núñez 2000: 141

flationäre Verwendung des Metaphernbegriffs dar. Obwohl Lakoff/Núñez völlig zu Recht darauf hinweisen, dass jeder über eine intuitive Vorstellung eines geordneten Paar verfügt, ziehen sie daraus nicht die naheliegende Konsequenz. Sie schreiben explizit, die Konzeptualisierung erfolge „non-

---

<sup>33</sup>  $(a, b) = (c, d)$  bedeutet dann  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  und man kann zeigen, dass die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn  $a = c$  und  $b = d$  ist.



metaphorically“ (Lakoff/Núñez 2000: 141) durch das Pfad-Schema, wobei das erste Element dem Ursprung und das zweite dem Ziel entspreche. Das Konzept PAAR ist demnach im Alltagswissen weit entfernt von allem, was man abstrakt nennen kann, und der Mensch hat anscheinend die Möglichkeit, es direkt zu verstehen. Es besteht daher keinerlei kognitive Notwendigkeit einer metaphorischen Strukturierung. Das zeigt auch die hier anzunehmende Übertragungsrichtung *abstrakt*  $\implies$  *konkret*. Eine metaphorische Projektion, die von einem abstrakten Ursprungsbereich zu einem konkreten Zielbereich verläuft, ist ungewöhnlich, widerspricht sie doch dem Prinzip, wonach abstrakte Konzepte durch erfahrungsnahe Konzepte strukturiert werden sollen. Die Rettung könnte durch die Metaphertypologie von Jäkel (2003: 58) erfolgen, die solche Metaphern als „Spezial-Metaphern“ noch zulässt. Nun sind Mathematiker sicher Personen mit solchem Spezialwissen über Mengen. Dennoch ist es zweifelhaft, ob Jäkels Bestimmung hier greift, da er die Modell-These voraussetzt, dass jede Metapher, egal ob konventionelle oder Spezialmetapher, eine explanatorische Funktion wahrnimmt, also das Unbekannte durch das Bekannten erklärt. Das Kuratowski-Paar liefert aber keinerlei zusätzliches Wissen über geordnete Paare, über man das man nicht schon vorher verfügte. Tatsächlich muss man erst einmal das geordnete Paar kennen, um die Definition von Kuratowski überhaupt verstehen zu können. In der täglichen mathematischen Praxis kann es meist auch sofort wieder vergessen werden. Durch diese Definition gewinnt man keine Erkenntnisse über das Objekt  $(a, b)$ , das auch so schon gut bekannt ist, sondern über das Mengenuniversum, indem gezeigt wird, dass es auch Mengen enthält, die geeignet sind, Paare zu modellieren. Demonstriert wird die Reichweite der Mengenlehre und die Angemessenheit ihrer intuitiven

oder axiomatischen Fundierung.<sup>34</sup>

In der Mathematik ist man bemüht, möglichst allen mathematischen Objekten eine mengentheoretische Interpretation zu geben, um die Idee einer Universalsprache der Mengenlehre voranzutreiben. Man stellt fest, dass es Mengen gibt, welche Eigenschaften aufweisen, die man auch von einem Paar erwartet, und ist so in der Lage auf der Notationsebene, sollte die Notwendigkeit dazu auftreten, jedes geordnete Paar durch eine Menge zu ersetzen. Jede Definition, jeder Satz und jeder Beweis, die auf geordnete Paare angewiesen sind, kann so, wenn es erforderlich ist, in die Sprache der Mengenlehre übersetzt werden. Insbesondere kann beim Aufbau einer Theorie auf der Basis der Mengenlehre das geordnete Paar über Mengen definiert werden. Daraus aber die Schlussfolgerung zu ziehen, es gebe eine Entsprechung auch auf mentaler Ebene und man verstehe den Bereich GEORDNETES PAAR über den Bereich MENGE, zeigt nur erneut, wie problematisch die Rekonstruktion konzeptueller Strukturen aus Zeichenketten ist. Generell ist es in der kognitiven Metapherntheorie manchmal schwer zu argumentieren, dass etwas keine konzeptuelle Metapher ist, aber ausgehend von den Grundthesen lässt sich feststellen, dass hier weder die Notwendigkeit einer metaphorischen Konzeptualisierung besteht oder systematische Verbindungen zwischen zwei konzeptuellen Bereichen geschlossen werden, noch bestimmte Aspekte hervorgehoben und andere ausgeblendet sind. Es ist einfach kein Anhaltspunkt gegeben, um von einer konzeptuellen Metapher zu sprechen.

---

<sup>34</sup> Da stellt sich natürlich die Frage, ob dies auf Basis einer Behältnismetaphorik auch denkbar ist. Denn wie soll man sich  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$  als Behälter vorstellen? Etwa als Behälter, der zwei Behälter enthält, wovon einer ein Objekt  $a$  und der andere wieder das Objekt  $a$  und ein Objekt  $b$  enthält? Für einen rein auf die Kognition fixierten Standpunkt muss das desaströs wirken. Siehe dazu die klar extensionale Feststellung: „Es ist für die Mathematik letztlich ohne Bedeutung, was geordnete Paare *wirklich* sind; wichtig ist allein, daß das geordnete Paar  $(a, b)$  zweier Objekte  $a$  und  $b$  diese Objekte und ihre Reihenfolge eindeutig festlegt“ (Ebbinghaus 2003: 47).

Auch auf der symbolischen Ebene ist im Ausdruck  $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$  keine Metapher auszumachen, da hier letztendlich eine Definition vorliegt. Man könnte aber sehr wohl argumentieren, dass dieser Definition eine Analogie zugrunde liegt, da die Vorstellung eines geordneten Paares und  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$  sich in bestimmten Hinsichten ähnlich verhalten. Aus der Analogie entsteht aber noch lange keine Metapher. Der Grund dafür liegt wahrscheinlich in der Trivialität der Analogie, die außer einer mengentheoretischen Definition keine weitergehenden Einsichten vermittelt. Wie bereits bei der Diskussion der mengentheoretischen Interpretation der natürlichen Zahlen kommt man zu dem Schluss, dass eine Analogie hier besser geeignet ist, die Genese dieser mathematischen Strukturen zu erklären.

Dass die Analogie bis auf eine positive Analogie nicht weiter belastbar zeigt sich daran, dass das Kuratowski-Paar gegenüber anderen mengentheoretischen Interpretationen des geordneten Paares über einige eher kuriose aber manchmal nützliche Eigenschaften verfügt, die sich nicht auf geordnete Paare übertragen lassen. So gelten z. B.  $(x, x) = \{\{x\}\}$  oder  $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ . Die zweite Eigenschaft ist gültig wegen  $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$  und gestattet es, das Mengenprodukt als  $A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$  zu definieren. In der axiomatischen Mengenlehre kann so auf ein gesondertes Produktmengenaxiom verzichtet werden, da man über die Vereinigung, die doppelte Anwendung der Potenzmengenoperationen und anschließender Aussonderung zur gewünschten Menge gelangt.

Ist das geordnete Paar dann einmal erklärt, entweder intuitiv oder mengentheoretisch, kann darauf der Funktionsbegriff aufgebaut werden, wie etwa hier bei Hausdorff:

Die geordneten Paare ermöglichen die Einführung des Funktionsbegriffes [...]

Sei  $P$  eine Menge geordneter Paare  $p = (a, b)$ ; für jedes in  $P$  vorkommende Paar  $p$  ( $p \in P$ ) wollen wir  $b$  *ein Bild* von  $a$ ,  $a$  *ein Urbild* von  $b$  nennen, und es sei  $A$  die Menge aller Urbilder  $a$  (d. h. aller ersten Elemente von Paaren

$p \in P$ ),  $B$  die Menge aller Bilder  $b$  (d. h. aller zweiten Elemente von Paaren  $p \in P$ ). Hiernach bestimmt jedes  $a$  seine Bilder, jedes  $b$  seine Urbilder; das ist der Zusammenhang, der zwischen den Mengen  $A$  und  $B$  durch die Paarmenge  $P$  hergestellt wird: es findet, wie man sagt, eine *Abbildung* der einen Menge auf die andere statt. (Hausdorff 2008: 59)

Hausdorff vertritt also einen weiten Funktionsbegriff, wenn er Funktionen mit Mengen von geordneten Paaren identifiziert. Heute nennt man solche Mengen meist als Relationen und bestimmt Funktionen i. e. S. dann als spezielle Relationen, für die Rechtseindeutigkeit gilt. In der Notation Hausdorffs heißt das: Enthält die Paarmenge  $P$  zwei Paare  $(a, b_1)$  und  $(a, b_2)$  mit dem gleichen ersten Element, so folgt sofort auch die Gleichheit der zweiten Elemente  $b_1 = b_2$ .

Von den vorhergehenden metaphorischen Konzeptualisierungen des Funktionsbegriffs unterscheidet sich diese Definition zunächst dahingehend, dass eine Verbindungs- bzw. eine innermathematische Metapher vorliegt, die innerhalb der Mathematik verschiedene Bereiche miteinander verbindet. Sie korrespondiert aber gleichwohl zur Fundierungs- bzw. außermathematischen Metapher, nach der Funktionen als Zuordnungen gesehen werden, wobei hier auf den Aspekt des statischen Ergebnisses dieses Prozesses fokussiert wird. Die Rechtseindeutigkeit der Paarmenge lässt sich so als eindeutige Zuordnung reinterpretieren: Einem Element einer Menge wird genau ein Element einer weiteren Menge zugewiesen. Gleichzeitig wird unter der Paarmengen-Metapher der Ausdruck  $y = f(x)$  als  $(x, y) \in f$  verstanden. Man erkennt, wie weit sich diese Metaphern von der älteren Vorstellung, Funktionen drückten eine Abhängigkeit zwischen zwei Variablen aus, die sich analytisch in einem formalen Ausdruck fassen lassen, entfernt haben. Beide, außer- und innermathematische Metapher, geben dem Bereich der Funktion Struktur, beeinflussen das Reden über Funktion und die Notation. Sprache und Methoden der Mengenlehre können so auch für Funktionen nutzbar gemacht werden. Im Sinne von Black ([1977] 1996: 390)

weisen diese Metaphern eine hohe Resonanz auf, da sie eine große Zahl von Hintergrundimplikationen nach sich ziehen. So lässt sich etwa eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  auch auf jedes Objekt  $x \notin A$  fortsetzen, indem man für ein beliebiges Objekt  $y$  das geordnete Paar  $(x, y)$  der Funktion hinzufügt:  $h = f \cup \{(x, y)\}$ . Somit setzt  $h$  die Funktion  $f$  in genau einem Paar fort und insbesondere ist  $f$  eine Teilmenge der Funktion  $h$  und man schreibt ganz selbstverständlich  $f \subseteq h$ . Alles bisher Besprochene erscheint in einem neuen mengentheoretischen Gewand:

- Verknüpfung:  $g \circ f = \{(a, c) \mid a \in \text{dom}(f) \text{ und } (f(a), c) \in g\}$
- Inversion:  $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$
- arithmetische Operationen:  $f \odot g = \{(a, b_1 \odot b_2) \mid (a, b_1) \in f \text{ und } (a, b_2) \in g\}$  für entsprechende Funktionen  $f, g$  und Operationen  $\odot \in \{+, -, \cdot, \div\}$
- die Identität auf einer Menge  $A$ :  $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$

Über das Bereitstellen eines Inventars an Symbolen und Techniken hinaus wird im gleichen Moment eine neue Funktion generiert: Nach der Definition von Funktionen als Mengen von geordneten Paaren muss folgerichtig die leere Menge  $\emptyset$  ebenfalls eine Funktion sein. Dieser pathologische Fall widersetzt sich der Vorstellung einer Funktion als Maschine, Projektion oder Zuordnung, da es nichts gibt, was produziert, projiziert oder zugeordnet wird. Nur im Sinne der Paar-Metapher liegt also eine Funktion vor, da die Eigenschaft *alle Elemente sind geordnete Paare* für die leere Menge trivialerweise erfüllt ist. Wenn man dies akzeptiert, kann man davon sprechen, dass die leere Menge eine Funktion  $\emptyset$  beschreibt, welche die leere Menge in jede beliebige andere Menge  $B$  abbildet ( $\emptyset: \emptyset \rightarrow B$  für jede Menge  $B$ ). Die Frage, ob diese Konstruktion nützlich ist und wie sich dieses Objekt interpretieren lässt, liegt letztendlich wieder ähnlich, wie schon bei der

Frage nach dem Status der leeren Menge: In der Notation wird ein Objekt erzeugt, das zu Beginn nur einen operativen Sinn aufweist, bevor sich das Problem seiner Verortung in außermathematischen Metaphern und damit seine Einbindung in konkretere Erfahrungen überhaupt stellt.

Interessant wird diese konzeptuell schwer erfassbare Funktion, wenn man beispielsweise dem Problem nachgeht, welchen Wert der Ausdruck  $0^0$  annimmt. Aus dem Schulunterricht sind die beiden Potenzregeln  $a^0 = 1$  und  $0^a = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  bekannt, die im Ausdruck  $0^0$  kollidieren. Um die Antwort aus Sicht der Mengenlehre zu verstehen, wird die allgemeine kardinale Exponentiation benötigt: Die Potenzoperation zweier Kardinalzahlen  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  lässt sich als Mengenoperationen definieren:  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} := |{}^B A|$  mit  $|A| = \mathfrak{a}$  und  $|B| = \mathfrak{b}$ , wobei der Ausdruck  ${}^B A$  die Menge aller Funktionen von  $B$  nach  $A$  bezeichnet ( ${}^B A = \{f: B \rightarrow A\}$ ). Sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  endliche Kardinalzahlen, d. h. natürliche Zahlen, und ungleich Null, so stimmt diese Definition mit der üblichen Bestimmung der Exponentiation als

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \underbrace{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}}_{\mathfrak{b} \text{ Faktoren}}$$

überein. Jedes Element aus  ${}^B A$  ist eine Funktion, also eine Menge geordneter Paare  $(b, a)$  mit  $b \in B$  und  $a \in A$ . Für ein bestimmtes  $b$  aus  $B$  gibt es genau  $\mathfrak{a}$  verschiedene  $a$  aus  $A$ , die diesem zugeordnet werden können, also als Werte von  $f(b)$  in Frage kommen. Da nun eine Funktion von  $B$  nach  $A$  jedem  $b \in B$  ein  $a \in A$  zuordnet, gibt es  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$  Möglichkeiten eine solche zu konstruieren. Demnach entspricht der Wert von  $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$  der Anzahl aller möglichen Funktionen, die eine Menge mit  $\mathfrak{b}$  Elementen in eine Menge mit  $\mathfrak{a}$  Elementen abbilden.<sup>35</sup> Die arithmetische Frage nach dem Wert von  $0^0$  stellt sich so mengentheoretisch als Frage nach der Anzahl der Abbil-

<sup>35</sup> Alternativ kann man, ohne Kardinalzahlen explizit zu verwenden, formulieren:  $|{}^B A| = |A|^{|B|}$  (vgl. Deiser/Lasser/Voigt u. a. 2011: 86).

dungen der leeren Menge in die leere Menge dar und die lässt sich mit eins beantworten, da nur die Funktion  $\emptyset$  diese Eigenschaft aufweist.<sup>36</sup>

Nach dieser relativ ausführlichen Sichtung des Funktionsbegriffs, auch über seine mengentheoretische Bestimmung hinaus, ergibt sich insgesamt das folgende (unvollständige) Feld beteiligter Metaphern:

außermathematische Vergleichsbereiche	innermathematische Metaphern	
	strukturell	graphisch
Abhängigkeiten, Maschinen, Projektionen, Zuordnungen	Funktionen als Mengen geordneter Paare	$y = f(x)$ , $f^{-1}$ , $f \subseteq g$ , $\emptyset$

Diese Auflistung kann weder die Reichhaltigkeit der Beziehungen der einzelnen Metaphern untereinander wiedergeben, noch zeigt sie, welche individuellen Metaphern jemand in einer bestimmten Situation in Bezug auf Funktionen verwenden könnte. Sie gibt lediglich einen Ausschnitt davon wieder, was sich an konventionellen Metaphern in der Mathematik etabliert hat. Im Rahmen der Mengenlehre ist vor allem die innermathematische Metapher, die Funktionen mit Mengen von geordneten Paaren identifiziert von Bedeutung. Mit ihr kann der Funktionsbegriff dem Mengenbegriff untergeordnet werden. Auffallend ist die Differenz im Abstraktionsgrad zwischen den Metaphorisierungen einer Funktion als Maschine und als Zuordnung, die für die Entwicklung der Mathematik entscheidend war. Maschinen arbeiten eine festgelegte Prozedur ab, um ein Ausgangsprodukt in ein Endprodukt umzuwandeln. Dabei schließt diese Metapher ein, dass

<sup>36</sup> Die Geschichte der Kontroverse um  $0^0$  findet sich kurz abgerissen bei Knuth (1992). Er bezieht auch deutlich Stellung im Sinne der Mengenlehre: „The number of mappings from the empty set to the empty set is  $0^0$ . It *has* to be 1“ (ebd.: 6).

sich der Arbeitsablauf der Maschine als Funktionsgleichung niederschreiben lässt. Die Zuordnungsmetapher dagegen gewährt einen höheren Grad an Freiheit, da sie keine derartigen Vorentscheidungen setzt und die Art der Zuordnung völlig beliebig sein kann, d. h. unabhängig davon, ob sich Gleichungen finden lassen, welche die Zuordnung beschreiben.

Als prototypischer Notationsausdruck hat sich  $y = f(x)$  unabhängig von außermathematischen oder strukturellen Metaphern etabliert. Für Entsprechungen im mathematischen Register der deutschen Sprache lassen sich zusammenfassend folgende Phrasen auflisten:

- (1)  $x$  wird abgebildet auf  $y$ .
- (2)  $x$  wird  $y$  zugeordnet.
- (3)  $y$  ist das Bild von  $x$  unter der Abbildung  $f$ .
- (4)  $y$  gleich  $f$  von  $x$ .
- (5)\*  $y$  ist eine Funktion von  $x$ .

Während Variante (5)\* heute nur noch selten verwendet wird, weil sie auf die ausrangierte Metapher von Funktionen als Abhängigkeiten unter einem bestimmten Gesetz zurückgeht, sind alle anderen in Gebrauch.

Abschließend sei diesem Kapitel noch eine didaktische Anmerkung hinzugefügt. Im Wechsel von der Maschinen- zur Zuordnungs-Metapher mag auch ein Grund dafür liegen, warum der Wechsel von der Schul- zur Hochschulmathematik als ungewohnt, teilweise sogar als schwierig erlebt wird. Zwar werden Funktionen auch in der Schulmathematik zumeist als Zuordnungen definiert, jedoch dominiert ein praktischer Umgang mit Funktionen, der doch sehr stark auf Funktionsgleichungen und einem Verständnis des Gleichheitszeichens, etwas zu tun, ausgerichtet ist, sodass Funktionen, für die sich keine einheitliche analytische Vorschrift angeben lässt, als



schwer verständlich angesehen werden. Hinzu kommt, dass fast ausschließlich Funktionen untersucht werden, deren Definitions- und Wertebereich Zahlenmengen sind. Die Kombination dieser beiden Aspekte lässt vermuten, dass Schülerinnen und Schüler durchaus Funktionen als Maschinen begreifen, die Zahlen in andere Zahlen nach einer konkreten Berechnungsvorschrift umwandeln, zumal diese Metapher auch weitaus anschaulicher ist. Aus dieser Perspektive muss die Hochschulmathematik ungewöhnlich wirken und schwer verdaulich sein. Das zeigt auch, wie schwer der Wechsel einmal erlernter kognitiver Denkmodelle sein kann. Wenn ihre Erklärungen sich bisher immer bewährt haben, wird man sich hüten, sie aufzugeben, und zunächst nach Möglichkeiten suchen, die Erklärungen dem Problem oder im ungünstigen Fall das Problem den Erklärungen schrittweise anzupassen. Trotz der Kreativitäts-These, die grundsätzlich die Möglichkeit einräumt, etablierten Metaphermodellen neue entgegenzustellen, wird der Austausch selten leicht vonstattengehen. In der Wissenschaft wird ein Metaphernwechsel oft von einem Paradigmenwechsel begleitet und auch ein Individuum kann einen Paradigmenwechsel „im Kleinen“ erleben.

## 6.8 Äquivalenzrelationen

Metaphern, egal ob sprachlich oder konzeptuell, sind Werkzeuge der Begriffsbildung. In diesem Kapitel soll ein mathematisches Verfahren vorgestellt werden, das Metapher und Analogie insofern nahe steht, als dass es auf vergleichbare Weise zu neuen mathematischen Begriffen führt, indem ein bekannter Gegenstand unter einer veränderten Perspektive betrachtet wird.

Ausgangspunkt ist die Idee, Beziehungen zwischen Objekten wie  $A \subseteq B$  oder  $a = b$ , aber auch alltagssprachliche Konzepte wie *P kennt Q* oder *P ist mit Q verwandt* mengentheoretisch zu erfassen. Im letzten Abschnitt wurde

besprochen, wie sich Funktionen mengentheoretisch als spezieller Typ von Relation erfassen lassen. Allgemein bezeichnet man eine Menge  $R$  als Relation, falls jedes  $x \in R$  ein geordnetes Paar ist.<sup>37</sup> Begriffe wie *Definitions-* und *Wertebereich* lassen sich nahtlos auf Relationen erweitern und Funktionen sind dann genau die Relationen, für die zusätzlich Rechtseindeutigkeit gilt. Diese rein extensionale Definition von Relation geht allen Abgründen aus dem Weg, die sich ergeben würden, wenn man stattdessen intensional von einem „bestimmen Begriff“ ausginge:

Diese „Definition mit dem Paukenschlag“ ist das Paradebeispiel für das extensionale Denken der Mengenlehre. Ein Begriff wird mit seinem Umfang identifiziert. Jede Menge von geordneten Paaren  $R$  liefert eine Relation, genannt  $R$ , die, in wichtigen Fällen wie  $\subseteq$ , mit einem kontextunabhängigen Namen versehen wird; und zwei Objekte  $a, b$  stehen in der Relation  $R$  zueinander genau dann, wenn  $(a, b) \in R$  gilt. (Deiser 2010: 51)

Der mengentheoretische Zugriff auf den Relationsbegriff kann als innermathematische Metapher RELATIONEN SIND MENGEN GEORDNETER PAARE gewertet werden, die zu einer statistischen Perspektive auf Relationen führt. Jedoch gilt es auch hier, die kognitive Reichweite nicht zu überschätzen und im Kurzschlussverfahren auf eine bestimmte Strukturierung des Relationskonzepts zu schließen.

Sind  $A$  und  $B$  Mengen, so heißt jede Teilmenge von  $A \times B$  *eine Relation zwischen  $A$  und  $B$*  und im Falle von  $A = B$  spricht man von *einer Relation auf  $A$* . Der Präpositionswechsel trat schon bei der Diskussion des Funktionsbegriffs auf, wo es einerseits *Abbildung zwischen  $A$  und  $B$*  hieß, aber dann, wenn nur eine Menge beteiligt war, *Identität auf  $A$* . Für jede Relation  $R$  zwischen  $A$  und  $B$  kann eine Menge  $C$  so gefunden werden, dass  $R$  eine Relation auf  $C$  ist, nämlich  $C = \text{dom}(R) \cup \text{rng}(R)$ . Damit ist es gerechtfertigt, sich auf Relationen auf einer Menge zu beschränken.

---

<sup>37</sup> Man untersucht auch  $n$ -stellige Relationen als Mengen von  $n$ -Tupeln, hier aber interessieren nur die zweistelligen Relationen.

Für  $(a, b) \in R$  wird häufig  $aRb$  geschrieben, in Anlehnung an  $a = b$ . Damit lässt sich die Kleiner-Relation  $<$  auf den natürlichen Zahlen etwa als  $< := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k > 0 \text{ mit } n + k = m\}$  definieren (vgl. Deiser/Lasser/Voigt u. a. 2011: 15). Etwas ungewohnt ist es dann,  $(3, 7) \in <$  für  $3 < 7$  oder  $(5, 2) \notin <$  für  $5 \geq 2$  zu schreiben. Eigentlich wäre das Zeichen  $<$  zusätzlich mit einem Hinweis auf die betreffende Grundmenge, in diesem Fall  $\mathbb{N}$ , zu indizieren, sodass immer  $(n, m) \in <_{\mathbb{N}}$  geschrieben werden müsste. Meist ist jedoch klar oder unerheblich, welche Grundmenge gemeint ist. Im Rahmen der Erweiterung der Zahlenbereiche  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , die sich durch fortschreitende Metaphorisierungen<sup>38</sup> beschreiben lässt, wird auch eine Kette von Kleiner-Relationen  $<_{\mathbb{N}} \subset <_{\mathbb{Z}} \subset <_{\mathbb{Q}} \subset <_{\mathbb{R}}$  mitkonstruiert.

Aus der Betrachtung verschiedener bekannter Relationen unterscheidet man Relationen nach folgenden Eigenschaften:<sup>39</sup>

- (i)  $R$  heißt *reflexiv* falls für alle  $x \in A$  gilt  $xRx$ .
- (ii)  $R$  heißt *symmetrisch*, falls für alle  $x, y \in A$  gilt  $xRy$  folgt  $yRx$ .
- (iii)  $R$  heißt *transitiv*, falls für alle  $x, y, z \in A$  gilt  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$ .

Jede Kombination dieser Merkmale erzeugt ganz eigenen Typ von Relation, wobei hier die „Äquivalenzrelation“ besonders interessiert, die sich

<sup>38</sup> Die Kette der Inklusionen gibt nach Pimm nur einen Teil der Erweiterung wieder, da die jeweilige Konstruktion eines höheren Zahlenbereichs weit über einfaches Hinzufügen von Elementen hinausgeht: „Despite the many complications of construction, these are viewed as set-theoretic inclusions, although each one requires a structural metaphor“ (Pimm 1987: 187). Eine mathematische Konstruktion zum Beispiel der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen ist dann auch mehr als nur das Hinzufügen von Elementen. So muss eine Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  alle Rechengesetze in  $\mathbb{Q}$  und eben auch die Ordnung  $<_{\mathbb{Q}}$  bewahren und dann zusätzliche gewünschte Eigenschaften – im Falle der reellen Zahlen die lineare Vollständigkeit – aufweisen. Der Ausdruck  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  gibt daher die Beziehung der rationalen zu den reellen Zahlen nur extensional in Bezug auf die beteiligten Grundmengen wieder.

<sup>39</sup> Des Weiteren werden häufig noch die Adjektive *irreflexiv* und *antisymmetrisch* als Antonyme verwendet, spielen aber für die Äquivalenzrelation keine Rolle.

durch Reflexivität, Symmetrie und Transitivität auszeichnet. In der Notation verwendet man für sie die generischen Zeichen  $R$  oder  $\sim$ , falls es sich nicht um bekannte Relationen wie  $=$  oder  $\subseteq$  handelt. Weiterhin definiert man die „Äquivalenzklasse“ von  $x$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $R$  mit  $x/R$  (gelesen als  $x$  modulo  $R$ ) durch  $x/R := \{y \in A \mid xRy\}$ . Jedes  $y \in x/R$  heißt ein „Repräsentant“ der Äquivalenzklasse  $x/R$ .<sup>40</sup> Außerdem wird die Menge aller Äquivalenzklassen  $A/R$  ( $A$  modulo  $R$ ) definiert durch  $A/R := \{x/R \mid x \in A\}$ . Die Motivation hinter diesen Definitionen liegt in den drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv begründet. Aus ihnen kann man folgern, dass zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt sind und dass die Vereinigung aller Äquivalenzklassen der Ausgangsmenge entspricht, auf der diese Relation gegeben ist. Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $M$ , dann ist jedes Element  $x$  aus  $M$  Element genau einer Äquivalenzklasse. Die bereits diskutierte Analogierelation hatten wir als reflexiv und symmetrisch bestimmt, aber nicht als transitiv und damit lag keine Äquivalenzrelation vor. Wäre die Analogie eine Äquivalenzrelation, ließe sich die Welt in disjunkte Klassen von ausschließlich untereinander ähnlichen Relationen zerlegen. Insofern ist gerade die Nicht-Transitivität eine Bedingung für den kreativen Umgang mit Analogien und damit auch für die Metaphernbildung.

Was haben Äquivalenzrelationen nun mit Metaphern und Analogien gemeinsam? Schon Klaus hat auf die Rolle der Äquivalenzrelation für die Begriffsbildung hingewiesen:

---

<sup>40</sup> Vielfach werden vollständige Repräsentantensysteme  $V$  einer Äquivalenzrelation  $\sim$  untersucht, für die jede Äquivalenzklasse mit genau einem Element in  $V$  vertreten ist. Häufig können solche Systeme jedoch nicht konstruktiv erzeugt werden; man kann sich ihrer Existenz nur durch Zuhilfenahme des Auswahlaxioms versichern. Ein Beispiel ist das für den Beweis des Satzes von Vitali verwendete Repräsentantensystem  $V \subseteq [0, 1)$  zur Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{R}$ , die definiert ist durch:  $x \sim y$  falls  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Ohne Auswahlaxiom kann man nicht auf die Existenz einer Auswahlfunktion schließen, die aus jeder der überabzählbar vielen Äquivalenzklassen genau ein Element, das in  $[0, 1)$  liegt, auswählt.

Damit [mit der Äquivalenzrelation] ist in der betreffenden Wissenschaft mittels einer ‚Definition durch Abstraktion‘ ein neues System von Begriffen und fachlichen Termini geschaffen. (Klaus 1963: 35)

Sie teilt mit Metapher und Analogie eine ganz wesentliche Eigenschaft: Alle drei strukturieren eine Gegenstandsmenge, indem sie bestimmte Eigenschaften besonders hervorheben und zur Klassenbildung einsetzen, andere dagegen ausblenden. So erschaffen sie eine neue Kategorisierung dieser Gegenstände. Wer die Großstadt metaphorisch als Dschungel bezeichnet, erzeugt einen neuen Begriff, zu dessen Umfang sowohl subtropische Regenwälder als auch Großstädte gehören, indem er intensional auf die gemeinsamen Züge beider Gegenstände fokussiert. Äquivalenzrelationen sind gewissermaßen die extensionale Entsprechung der Metapher: Betrachtet man als Beispiel die Relation  $\sim$  auf den natürlichen Zahlen, bei der zwei natürliche Zahlen  $n$  und  $m$  genau dann äquivalent ( $n \sim m$ ) sein sollen, wenn sie bei Division durch 5 den gleichen Rest lassen<sup>41</sup>, dann ist dies eine Äquivalenzrelation. Unter anderem sind  $0 \sim 0$ ,  $12 \sim 27$  oder  $111 \sim 1$ . Als arithmetische Operation wird die Ermittlung des Rests bei einer Division auch als *modulo* bezeichnet, wovon der Terminus dann auf Äquivalenzrelationen übertragen wurde.<sup>42</sup> Diese Äquivalenzrelation sieht von allen anderen Eigenschaften der natürlichen Zahlen ab und ordnet sie ausschließlich nach dem Rest bei Division durch 5 in Klassen an. Unter dieser Relation kann man die Zahlen 3 und 8 „gleich“ nennen, obwohl sie sonst als ver-

<sup>41</sup> Häufig wird diese Relation bei Division durch  $m$  als  $\equiv_m$  geschrieben. So lassen sich wiederum Gleichungen erzeugen wie  $2 \equiv_7 9$ , in die dann auch Variablen eingeführt werden können und für die sich Methoden zum kalkülmäßigen Lösen entwickeln lassen.

<sup>42</sup> In der mathematischen Fachsprache wird *modulo* noch in einem weiteren Sinne metaphorisch gebraucht, wie das folgende Beispiel zeigt: „Ganz anders als der Schnitt und die Vereinigung hängen die diagonalen Versionen von der Aufzählung der zu schneidenden Mengen ab. Dennoch sind sie ‚modulo club‘ eindeutig bestimmt“ (Deiser 2010: 322). Hier ist gemeint, dass sowohl die diagonalen Schnitte als auch die diagonalen Vereinigungen zweier Mengenfolgen, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Glieder unterscheiden, jeweils gleich sind, wenn vom Rest bei symmetrischer Differenzbildung abgesehen wird. Die Phrase *A ist B modulo C* wird dann im Sinne von ‚A ist identisch mit B abgesehen von der Eigenschaft C‘ verwendet.

schieden betrachtet werden. Insgesamt sind bei Division durch 5 die Reste 0, 1, 2, 3 oder 4 möglich, sodass sich fünf Äquivalenzklassen ergeben, als deren Repräsentanten man im Allgemeinen eben den Rest wählt und die daher auch *Restklassen* genannt werden:

$$\begin{aligned} 0/\sim &= 5/\sim = 10/\sim = \dots = \{0, 5, 10, 15, \dots\} = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 1/\sim &= 6/\sim = 11/\sim = \dots = \{1, 6, 11, 16, \dots\} = \{5k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 2/\sim &= 7/\sim = 12/\sim = \dots = \{2, 7, 12, 17, \dots\} = \{5k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 3/\sim &= 8/\sim = 13/\sim = \dots = \{3, 8, 13, 18, \dots\} = \{5k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 4/\sim &= 9/\sim = 14/\sim = \dots = \{4, 9, 14, 19, \dots\} = \{5k + 4 \mid k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Auf dieser neuen durch die Äquivalenzrelation erzeugten Struktur  $\mathbb{N}/\sim$  lassen sich nun wieder Operationen definieren, wie etwa die Addition und Multiplikation von Restklassen durch:

$$\begin{aligned} (x/\sim) + (y/\sim) &:= (x + y)/\sim \\ (x/\sim) \cdot (y/\sim) &:= (x \cdot y)/\sim \end{aligned}$$

Grundsätzlich hat man bei derartigen Definitionen darauf zu achten, dass sie wohldefiniert sind, d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. In diesem Fall ist die Wohldefiniertheit erfüllt, da es für  $x' \in (x/\sim)$  und  $y' \in (y/\sim)$   $s, t \in \mathbb{N}$  gibt mit  $x' = x + s \cdot 5$  und  $y' = y + t \cdot 5$ , woraus  $x' + y' \in (x + y)/\sim$  und  $x' \cdot y' \in (x \cdot y)/\sim$  folgen. Beispielsweise sind dann  $(1/\sim) + (4/\sim) = 5/\sim = 0/\sim$  und  $(4/\sim) \cdot (2/\sim) = 8/\sim = 3/\sim$ . Alle möglichen Kombinationen von Elementen bezüglich der Addition, von denen es in diesem Falle nur endlich viele gibt, lassen sich in einer Verknüpfungstabelle darstellen, wobei hier vereinfachend statt  $x/\sim$  nur noch  $x$  geschrieben wird:

<b>+</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>0</b>	0	1	2	3	4
<b>1</b>	1	2	3	4	0
<b>2</b>	2	3	4	0	1
<b>3</b>	3	4	0	1	2
<b>4</b>	4	0	1	2	3

Man erkennt, wie bezüglich dieser Addition mit der Restklasse, welche die Null enthält, ein neutrales Element vorhanden ist und zu jeder Restklasse ein inverses Element existiert, deren Addition das neutrale Element ergibt, wodurch  $(\mathbb{N}/\sim, +)$  zu einer Gruppe wird. Die Übertragung von Additions- und Multiplikationszeichen auf die so definierten Äquivalenzklassen führt zu einer Erweiterung ihres Bedeutungsumfangs.

Neben der vorgestellten Restklassenarithmetik führen weitere wichtige Äquivalenzrelationen zu den üblichen Zahlbereichen:

- der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\sim$  mit  $(n, m) \sim (n', m')$ , falls  $n + m' = n' + m$ ,
- der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))/\sim$  mit  $(a, b) \sim (c, d)$ , falls  $a \cdot d = c \cdot b$ ,
- der reellen Zahlen (nach Cantor)  $\mathbb{R} = F/\sim$ , wobei  $F$  die Menge aller Cauchy-Folgen in  $\mathbb{Q}$  bezeichnet, mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls die Differenzfolge eine Nullfolge ist.

Wie bei der Modulo-Operation erzeugt jede Äquivalenzrelation eine neue Struktur, auf der dann arithmetische Operationen und eine lineare Ordnung definiert werden können, welche die Operationen und die Ordnung der vorausgehenden Struktur fortsetzen.

In der nicht-axiomatischen Mengenlehre wurden bei Cantor und Hausdorff Kardinal- und Ordinalzahlen noch über Äquivalenzrelationen definiert. Angenommen man hätte eine Interpretation von *A ist gleichmächtig zu B*, dann definiere man die Relation  $\sim$  auf dem Mengenuniversum mit  $A \sim B$ , falls *A* gleichmächtig zu *B* ist, zeige, dass es eine Äquivalenzrelation ist, und wähle entweder aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten aus oder verfare wie Hausdorff hier:

Demgemäß sagen wir allgemein, daß äquivalente Mengen dieselbe *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* haben. D. h. wir ordnen jeder Menge *A* ein Ding **a** zu derart, daß äquivalenten Mengen und nur solchen dasselbe Ding entspricht:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ soviel wie } A \sim B.$$

Diese neuen Dinge nennen wir Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten; wir sagen: *A* hat die Mächtigkeit **a**, **a** ist die Mächtigkeit von *A*, wohl auch (indem wir **a** als Zahlwort verwenden) *A* hat **a** Elemente. (Hausdorff 2008: 69)

So sehr diese Bestimmung der Kardinalzahlen der Intuition auch entgegenkommt, sie hat leider nur heuristischen Wert, da einerseits das Mengenuniversum selbst keine Menge und andererseits das Ding **a** kein Objekt des Mengenuniversums ist. Zudem hat man kein Entscheidungskriterium an der Hand, warum ein Element einer Äquivalenzklasse besser als Repräsentant geeigneter sein soll als ein anderes. Trotzdem hat diese Definition durch Abstraktion ihren Wert für die Anschauung und man erhält sehr schnell einen benutzbaren Kardinalzahlbegriff.

Äquivalenzrelationen erzeugen also neue Strukturen, indem sie Elemente unter einem bestimmten Aspekt zusammenfassen und andere Merkmale dabei vernachlässigen:

Äquivalenzrelationen *R* auf *A* sehen die Elemente *x* von *A* nur unscharf, wenn nicht  $x/R = \{x\}$  gilt. Die Identität  $\{(x,x) \mid x \in A\}$  auf *A* ist der Adler unter den Äquivalenzrelationen auf *A*,  $R = A \times A$  das blinde Huhn. (Deiser 2010: 52/53)



Die von Deiser herangezogenen sprachlichen Metaphern aus dem Bereich der Optik sind auch in der Metapherntheorie geläufig. So beschreibt Bühler (1982: 348) die Metapher als einen Doppelfilter und auch Black übernimmt bedient sich des Filter- und Projektionsbegriffs:

Man kann sich die Metapher als einen solchen Filter vorstellen und das System der „assozierten Gemeinplätze“ des fokalen Wortes als das Netz der Linien darauf. Man kann sagen, der Hauptgegenstand wird „durch den metaphorischen Ausdruck gesehen“ – oder, wenn man so will, der Hauptgegenstand wird auf das Feld des untergeordneten Gegenstands „projiziert“ .  
(Black [1954] 1996: 72)

Der in vielen Metapherntheorien enthaltene Gedanke, Metaphern mit visueller Wahrnehmung zu assoziieren – „Metaphor makes us see one thing as another [...]“ (Davidson 2007: 263) – geht letztendlich auf Aristoteles (2007: Rhet. III, 10; 172ff) zurück, der in der Rhetorik eine Eigenschaft guten Stils im „Vor-Augen-Führen“ sieht, das durch den Gebrauch von Metaphern erreicht werden könne. Dass Äquivalenzrelationen und Metaphern mit ähnlichem Vokabular beschrieben werden und beide Werkzeuge systematischer Begriffsbildung sind, kann als Beleg dafür gedeutet werden, dass sie Facetten ein und desselben Phänomens sind.

Abschließend soll der natürlichsprachlichen Seite bei der Bildung von Klassen durch Äquivalenzrelationen aus mengentheoretischer Sicht noch weiter nachgegangen werden. Dazu betrachte man zunächst eine Vereinigung mehrerer paarweise disjunkter Mengen. Diese bilden eine „Zerlegung/Partition“ der Vereinigungsmenge. Für  $A = B \cup C$  mit  $B \cap C = \emptyset$  teilen die Mengen  $B$  und  $C$  die Menge  $A$  wie nach einem Schnitt, so dass jedes Element von  $A$  entweder ein Element von  $B$  oder von  $C$  ist. Zum Ausdruck dieser Beziehung stehen unter anderem folgende sprachliche Ausdrücke zur Verfügung:

- (1)  $A$  zerfällt in  $B$  und  $C$ .

(2)  $A$  spaltet sich in  $B$  und  $C$ .

(3)  $B$  und  $C$  zerlegen  $A$ .

Alle drei der hier verwendeten Verben gehören zur semantischen Gruppe der Verben des Schaffens und Vernichtens, bei denen ein Gegenstand durch die entsprechende Handlung zu existieren aufhört, dafür aber Teile von ihm entstehen (vgl. Duden. Die Grammatik: 398). In diesem Fall metaphorischer

ist der Bedeutungsaspekt der Zerstörung jedoch getilgt, da die Menge  $A$  weiterhin bestehen bleibt. Gemein ist den Verben weiterhin, dass sie allesamt konkrete Tätigkeiten oder Prozesse bezeichnen, die auf den abstrakten Bereich der Mengen übertragen werden. Zudem fällt in Äußerung (3) die abweichende syntaktisch-semantische Rolle des Subjekts auf, dem üblicherweise die Rolle des Agens zugeordnet ist, also denjenigen bezeichnet, der etwas zerlegt, hier aber ebenfalls das Resultat des Prozesses meint. Davon ausgehend ist das Wortbildungsprodukt *Zerlegung* im mathematischen Register zu verstehen: Allgemein nennt man jede Menge  $P$ , deren Elemente nichtleere, disjunkte Teilmengen einer Menge  $A$  sind, *Partition* oder *Zerlegung* der Menge  $A$ , wenn jedes Element von  $A$  in genau einem Element von  $P$  enthalten ist.

Jede Zerlegung kann als eine Äquivalenzrelation begriffen werden, indem man die Relation  $\sim$  auf  $A$  definiert durch:  $a \sim b$  genau dann, wenn ein  $Q \in P$  existiert mit  $a, b \in Q$ . Jeder Zerlegung entspricht so genau eine Äquivalenzrelation, aber auch umgekehrt kann jede Äquivalenzrelation als Zerlegung verstanden werden, bei der eine Menge  $A$  so in Äquivalenzklassen aufgeteilt wird, dass zwei Elemente von  $A$  genau dann äquivalent sind, wenn sie zur gleichen Klasse gehören. Im Grunde genommen sind Äquivalenzrelationen und Zerlegungen damit identisch.

## 6.9 Zwischenfazit

Nach dieser Untersuchung einiger grundlegender Themen der Mengenlehre in ihrer intuitiven Form ist ein Zwischenfazit zu unseren Ergebnissen im Vergleich mit der Untersuchung von Lakoff/Núñez angebracht.

Zunächst muss im Hinblick auf Ubiquitäts- und Notwendigkeits-These konzeptueller Metaphern kritisch festgestellt werden, dass sich zwar auch in diesem Bereich konzeptuelle Metaphern identifizieren lassen, ihr Einfluss aber bei weitem nicht immer als so grundlegend angesehen werden kann, wie dies von Lakoff/Núñez behauptet wird. Ihre Grundidee, das Verständnis von Mengen auf die eine konzeptuelle Metapher **SETS ARE CONTAINERS** zu gründen, ist als unzureichend zu verwerfen. Obwohl einige sprachliche Ausdrücke, mathematische Symbole und Venn-Diagramme teilweise für diese Metapher zu sprechen scheinen, unterlaufen sie sie bei genauerer Betrachtung doch auch gleichzeitig immer wieder. Dabei wurden lediglich konventionelle Äußerungen aus aktuellen Lehrbuchtexten und historisch aus Cantors, Hausdorffs und Zermelos zentralen Arbeiten zur Mengenlehre betrachtet. Für eine einzelne Person, die sich mit einem konkreten Problem auseinandersetzt, können jedoch zahlreiche andere idiosynkratische Metaphern wichtig werden, die sich nicht alle konsistent auf ein kognitives Metaphernmodell reduzieren lassen. Auf diese Diskrepanz zwischen „usueller“ und „okkasioneller“ Mathematik macht eine Entgegnung auf *Where Mathematics Comes From* deutlich aufmerksam:

CM [conceptual mathematics] concepts are public representations; they exist outside in a public space of shared meanings. As such they are best kept distinct from the internal representations that given people will form of them. How an individual represents these concepts to herself is what we will call *ideational mathematics* (IM) and will probably be influenced by many experiential and genetic factors. (Schiralli/Sinclair 2003: 81)

Die Autoren bemängeln, dass die einseitige Konzentration auf die konven-

tionellen konzeptuellen Strukturen zu einer undifferenzierten und übergeneralisierenden Auszeichnung bestimmter Metaphern führe. Sie illustrieren dies am Beispiel des auf Funktionen bezogenen Konzepts der Ableitung, für das Lakoff/Núñez genau eine Fundierungsmetapher angeben, wohingegen Schiralli/Sinclair (2003: 81f) aber auf einen Autoren verweisen können, der sechs von dieser konzeptuellen Metapher unabhängige Zugänge zum Ableitungsbegriff aufzählt, die in verschiedenen Kontexten eingesetzt werden. Formal sind die Ansätze zwar äquivalent, konzeptuell jedoch weisen sie zum Teil erhebliche Unterschiede auf.

Wenn sich eine Metaphertheorie entweder stärker auf konventionelle oder auf idiosynkratische Metaphern konzentriert, dann ist das meistens wenig problematisch. Nur dann, wenn wie im Falle von Lakoff/Núñez, der Anspruch erhoben wird, aus der einseitigen Analyse konventioneller Metaphern für alle möglichen Kontexte sprechen zu können, ruft dies berechtigte Kritik auf den Plan. Hätten sie dagegen geschrieben, sie vermuten einen möglichen Zugang zum Ableitungsbegriff oder einen möglichen Zugang zum Mengenbegriff auf Grund bestimmter Texte oder psycholinguistischer Experimente, dann wäre ihnen solche Kritik erspart geblieben. Es ist aber ihr Absolutheitsanspruch, mit dem sich viele nicht arrangieren können und der statt einer Inhalts- eine Methodendebatte provoziert.

Doch auch eingeschränkt auf die konventionellen Metaphern innerhalb der Mengenlehre, auf die sich diese Arbeit ebenfalls beschränkt, kann die Analyse von Lakoff/Núñez nicht richtig überzeugen. Ihnen geht es darum, die Mengenlehre mittels einer konzeptuellen Metapher in der konkret-physischen Erfahrungswelt zu verankern und sie meinen, im Vorstellungsschema BEHÄLTER das Fundament gefunden zu haben, auf dem die gesamte Mengenlehre aufgebaut werden könne. In dieser Arbeit konnte allerdings bisher gezeigt werden, dass wesentliche Eigenschaften von Mengen wie das Extensionalitätsprinzip durch eine Behälter-Metaphorik nicht abgedeckt

werden. Auch eine als Alternative erprobte Sammlungs-Metaphorik kann das Mengenkonzept nur in bestimmten Hinsichten beleuchten. Beide Metaphern sind als nicht theoriekreativ, sondern als didaktische Hilfsmittel einzustufen. Problematisch bleibt weiterhin auch der Status der Vorstellungsschemata selbst. Jäkel (2003: 291) fordert gegen Ende seiner Arbeit von kommenden Untersuchungen, die Analyse der Vorstellungsschemata solle auf eine breitere empirische Basis gestellt werden, die neben der Linguistik auch andere Wissenschaften einbezieht. Für diese Untersuchung zur Mengentheorie ist festzustellen, dass entweder erhebliche Zweifel am Status des Behältniskonzeptes als Vorstellungsschema oder an der Angemessenheit der Invarianz-Hypothese geboten sind, wie sich besonders deutlich am nicht übertragbaren Transitivitätsgesetz von Behältern auf Mengen gezeigt hat. Ein weiteres Argument findet sich bei Coenen bezogen auf den Begriff der Kategorie:

Es ist üblich, zwar nicht den gesamten Kategorienbegriff, wohl aber wesentliche Strukturen des Sachbereichs ‚Kategorie‘ in vergleichbaren Strukturen des Sachbereichs ‚Behälter‘ konkretisiert und verdeutlicht zu sehen. (Coenen 2002: 216)

Auf unsere Fragestellung transferiert heißt das: Es gibt keine konzeptuelle Metapher, die den Bereich BEHÄLTER auf den Bereich MENGE abbildet. Stattdessen sind Behälter nützlich, um sich Mengen vorzustellen oder einige Aspekte wie die Teilmengenrelation zu veranschaulichen. Sie strukturieren jedoch nicht vollständig die Art und Weise, wie wir über Mengen denken. Damit löst sich auch das Problem der fälschlich auf die Element-Relation übertragenen Transitivität, da sich Behälter und Mengen dann einfach in diesem Punkt unterscheiden. Allerdings setzt diese Perspektive voraus, dass die Konzepte MENGE und BEHÄLTER zumindest in einer rudimentären Form unabhängig voneinander existieren und vergleichend nebeneinander gehalten werden können, wodurch das Bestreben, abstrakte Konzepte aus

konkreten abzuleiten, unhaltbar wird.

Vom Umfang her erscheint die konzeptuelle Analyse des Bereichs der Mengenlehre bei Lakoff/Núñez deutlich zu knapp geraten, besonders dann, wenn man sich etwa anschaut, wie die mathematikdidaktische Literatur mit der Metaphorisierung von Mengen als Sammlungen hadert und immer bemüht ist, gerade die Unterschiede hervorzuheben. Die Vernachlässigung der Disparität zwischen den kognitiven Domänen, die eine Metapher verbindet, spiegelt sich in der Form wider, wie in der kognitiven Metaphertheorie konzeptuelle Metaphern dargestellt werden – als Matrix, welche die einzelnen Korrespondenzbeziehungen auflistet. Damit wird aber nur indirekt angesprochen, für welche Elemente keine Beziehungen existieren und welche Inferenzmuster nicht übertragen werden können. Bei einer detaillierten Untersuchung sollten immer auch die – in der Terminologie von Hesse – negativen Analogien herausgearbeitet werden, denn gerade sie entscheiden mit über die Reichweite eines kognitiven Modells. Lakoff/Núñez legen sich bei extrem dünner Datenlage vorschnell auf ein kognitives Modell fest.

Andererseits erweckt die Untersuchung teilweise sogar den Eindruck eines fast schon zwanghaften Bemühens, an Stellen konzeptuelle Metaphern zu postulieren, wo man auch gut ohne sie auskäme. Als eine möglicherweise geeignetere Erklärung, wie mengentheoretische Gegenstände verstanden werden und mathematische Strukturen entstehen können, wurde versucht, einerseits auf den Analogie- und Modellbegriff zurückzugreifen und andererseits der medialen Komponente symbolischer Praktiken stärker Rechnung zu tragen, u. a. indem zwischen dem mathematischer Register und der Notation unterschieden wurde. Obwohl die kognitive Metaphertheorie ihre Grundposition in einem Erfahrungsrealismus sucht und den Menschen zuallererst als ein physisches Wesen definiert und deshalb vom „verkörperten Geist“ spricht, entgeht ihr doch, dass diese Perspektive auch auf Zeichen zutrifft und zwar auf die Korporalität von Zeichen (vgl. Krämer

2004), die sich nicht einfach durch die Betrachtung scheinbar amedialer Konzeptstrukturen wegretuschieren lässt. Wenn sich der menschliche Körper in die konzeptuellen Strukturen einschreibt, warum dann nicht auch der Zeichenkörper? Hier bietet sich der Anschluss an kulturwissenschaftliche Positionen und an die Frage, warum die Mathematik eine besondere Schrift braucht, an. Da sich Lakoff/Núñez diese Option aber versagen, sind sie gezwungen konzeptuelle Metaphern allein um ihrer Theorie Willen aufzudecken. Eine stärkere Berücksichtigung der Schrift, so sollte deutlich geworden sein, heißt jedoch keineswegs sich auf ein anderes Extrem einzulassen, der zufolge die Mathematik eine mechanische und interpretationslose Wissenschaft sei, wie es etwa von Dieter Mersch angedeutet wird:

Denn das Besondere des Mathematischen, das es sowohl vom geisteswissenschaftlichen als auch vom naturwissenschaftlichen Wissen unterscheidet ist, dass es weder Kausalitäten noch Explanationen oder Interpretationen kennt, sondern allein das Prozessieren von Deduktionen und Operationen. Zwar bezeichnet die Grundlage des mathematischen Satzes der Beweis, doch stützt er sich nicht auf Argumentation und Diskurs, die letztlich fehlbar sind, sondern auf logische Gesetze oder syntaktische Regeln. (Mersch 2010: 7)

Das mag auf die mathematische Logik noch einigermaßen zutreffen, aber für die übrige Mathematik halten wir ganz im Gegenteil daran fest, dass die Mathematik eine kreative Wissenschaft ist und der formale Beweisbegriff zwar ein zuweilen praktisches Hilfsmittel darstellt, aber in der tagtäglichen Praxis nur eine untergeordnete Rolle spielt. Daher ist der Schlussfolgerung von Lakoff/Núñez prinzipiell zuzustimmen:

The choice of conceptual metaphors matters. It is important to be aware of how metaphor choice affects our understanding of a problem. (Lakoff/Núñez 2000: 334)

Man sollte es nur vermeiden, die konzeptuellen Metaphern zum alleinigen Faktor mathematischen Wissens verklären zu wollen. Teilweise gewinnt

man leider den Eindruck, es gehe den Autoren eher darum, mit allen Mitteln überall konzeptuelle Metaphern zu entziffern und zwar nicht, weil man sich davon einen Erkenntnisgewinn über mathematische Gegenstände verspricht, sondern einfach weil es ihre Theorie so verlangt. Sie gehen immerhin schon am Anfang ihrer Untersuchung von einer metaphorischen Durchdringung aller mathematischen Bereiche aus, sodass ihre Arbeit sogar teilweise Züge einer sich selbsterfüllenden Prophezeiung<sup>43</sup> annimmt, die den Leser vor die undankbare Aufgabe stellt, die tatsächlich relevanten konzeptuellen Metaphern von den „erzwungenen“ zu scheiden. Eine ganz ähnliche Kritik an dieser Tendenz, letztendlich alle Erscheinungen durch Metaphern erklären zu wollen, äußert auch Wildgen:

So ästhetisch befriedigend eine monolithische Letztbegründung, eine Theorie von allem, die nur auf einem Prinzip basiert, auch sein mag, aus der Sicht der Theoriendynamik erscheint die Autofundierung einer Theorie als Immunisierungsstrategie. Mit ihr wird die Tür der Fremdkritik verschlossen, da jede Argumentation immer schon die Gültigkeit der zentralen Annahmen, im Falle Lakoffs der Metapherntheorie, voraussetzen muss. (Wildgen 2008: 197)

Bewährt dagegen hat sich die auch bei Lakoff/Núñez anzutreffende Unterscheidung zwischen zwei Typen mathematischer Metaphern nach ihrem Herkunftsbereich. In ihr spiegelt sich einmal der hybride Charakter der Mathematik eine natürliche Sprache mit einer formalen Notation zu verbinden. Andererseits haben gerade die Typ-2-Metaphern die Tendenz gezeigt, sich zu größeren Analogien und schließlich zu vollen Modellen zu entwickeln.

Insgesamt trat eine Besonderheit von Metaphern in der mathematischen Notation gegenüber dem mathematischen Register hervor. Es gibt im Gegensatz zur natürlichen Sprache keine Mittel eine metaphorische oder allgemeiner eine übertragene Verwendung eines Zeichen explizit kenntlich zu

---

<sup>43</sup> Dazu: „Although it is far from being fully accepted in cognitive science of linguistics, the theory is presented in the book as if firmly established“ (Goldin 2001: 18).



machen:

There is no trace in the symbolism to indicate that a metaphoric usage is being employed. A metaphor skims over a lot and a polished notation permits this riding on the surface. The same words and symbols are used throughout. (Pimm 1987: 195)

Jemand, der nichts über inverse Funktionen weiß, wird  $f^{-1}$  sicherlich als  $\frac{1}{f}$  interpretieren, indem er die Regel  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  anwendet, die er für reelle Zahlen gelernt hat. Die schriftliche Form gibt ihm keinen Hinweis auf das mögliche Vorliegen einer Metapher. Ebenso ist es unmöglich zu entscheiden, ob das Zeichen 0 nun die Zahl Null, einen Nullvektor oder eine Nullmatrix symbolisiert, ebenso wie  $\emptyset$  die leere Menge, eine Funktion oder eine Wohlordnung sein kann. Zum einen muss daher die syntaktische Umgebung eines Zeichens auf seine Bedeutung determinierend wirken, andererseits kann auf das mathematische Register zurückgegriffen werden, um Klarheit zu schaffen.



## 7 Transfinite Kardinalzahlen

### 7.1 Cantors zentrale Metapher?

Die Geburt der Mengenlehre als eigenständige Disziplin lässt sich auf den 7. Dezember 1873 datieren. An diesem Tag bewies Georg Cantor nach einem Briefwechsel mit Richard Dedekind, dass die Menge der reellen Zahlen „überabzählbar“ ist.<sup>1</sup> Damit gelang ihm der Beweis, dass die Menge der reellen Zahlen mächtiger als die der natürlichen Zahlen ist und er hatte damit den Beleg in Händen, dass sich auch im Reich des Unendlichen Mengen nach ihrer Größe unterscheiden lassen. Was aber bedeutet dieses Resultat, dass  $\mathbb{R}$  „größer“ als  $\mathbb{N}$  ist bzw.  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$  gilt? Weder das Wort *größer* noch das Zeichen  $<$  werden hier in ihrer üblichen Bedeutung verwendet, wie sie in der Alltagssprache oder zum Vergleichen reeller Zahlen gebraucht werden.

Cantors Prinzip, Mengen in Bezug auf ihre Kardinalität miteinander zu vergleichen, besteht, modern gesprochen, darin, Funktionen zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  zu betrachten. Existiert unter ihnen ein bijektives (umkehrbar eindeutiges, eineindeutiges)  $f: A \rightarrow B$ , so nennt er die Mengen  $A$  und  $B$  *gleichmächtig* bzw. *äquivalent*. Zwei Mengen haben also dann gleiche Mächtigkeit, wenn sich die Elemente der beiden Mengen so in Paare ordnen lassen, dass jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zugeordnet wird und umgekehrt. Dies lässt sich als Abtragungsprozess veranschaulichen, bei dem zunächst ein beliebiges Element der ersten und dann eines der zweiten Menge ausgewählt wird, die dann aus ihren Mengen entfernt werden. Mit den verbleibenden Restmengen

---

<sup>1</sup> Veröffentlicht wurde dieses Resultat ein Jahr später in Cantor (1874).

wird ebenso verfahren. Sind nach unzähligen Wiederholungen beide Mengen aufgebraucht, dann sind sie gleichmächtig. In Cantors eigenen Worten:

*Zwei Mengen  $M$  und  $N$  nennen wir ‚äquivalent‘ und bezeichnen dies mit*

$$(4) \quad M \sim N \text{ oder } N \sim M,$$

*wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht. (Cantor 1895: 482)*

Diese Gesetzmäßigkeit ist eben nichts anderes als eine bijektive Funktion. Das Attribut *äquivalent* zeigt an, dass es sich um einen Gleichheitsbegriff handelt, dessen Relation reflexiv (für jede beliebige Menge  $M$  ist  $f = id_M$  ist eine bijektive Funktion auf  $M$ ), symmetrisch (bijektive Funktionen sind umkehrbar und ihre Umkehrfunktion ist wiederum bijektiv) und transitiv (die Verkettung zweier bijektiver Funktionen ist wieder bijektiv) ist; es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation. Von hier aus ist nun leicht, zwei Mengen  $A$  und  $B$  nach ihrer Mächtigkeit zu vergleichen:

- Existiert eine bijektive Abbildung von  $A$  nach  $B$ , dann sind  $A$  und  $B$  gleichmächtig, in Zeichen  $|A| = |B|$ .
- Ist  $A$  gleichmächtig zu einer Teilmenge von  $B$ , dann ist  $|A|$  kleinergleich  $|B|$ , in Zeichen  $|A| \leq |B|$ .
- Existiert zusätzlich zur vorhergehenden Bedingung keine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$ , dann ist  $A$  (echt) kleiner als  $B$ , in Zeichen  $|A| < |B|$ .

Damit ist der Grundstein für die Untersuchung von Mächtigkeiten unendlicher Mengen gelegt, da sich dieser Mächtigkeitsbegriff nicht nur auf endliche sondern insbesondere auch auf unendliche Mengen anwenden lässt. Alle diese Begriffsbestimmungen wären aber wertlos, wenn alle unendlichen Mengen von gleicher Mächtigkeit wären, wenn es also zwischen zwei

unendlichen Mengen immer eine bijektive Abbildung gäbe. Das dies nicht zutrifft, zeigt der eingangs erwähnte Beweis von Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen echt größer als die der natürlichen Zahlen ist.

Diese Definition erzeugt zunächst nur einen relationalen Begriff, der eine Beziehung zwischen zwei Mengen charakterisiert. Damit ist die Kardinalität unendlicher Mengen  $|M|$  jedoch noch nicht als Objekt gegeben. Cantor führt deshalb die Termini *Mächtigkeit* und *Kardinalzahl* ein:

*„Mächtigkeit“ oder „Cardinalzahl“ von  $M$  nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge  $M$  hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente  $m$  und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird. (ebd.: 481)*

Dieser Abstraktionsprozess arbeitet mit der im vorhergehenden Abschnitt genannten Äquivalenzrelation und erfasst, dass beim Zählen einer Menge sowohl von allen besonderen Merkmalen der Elemente wie auch von einer eventuell gegebenen Ordnung auf der Menge abstrahiert wird. Das zweifache Absehen von charakteristischen Eigenschaften einer Menge und ihrer Elemente führt dann zur Kardinalzahl dieser Menge, die Cantor durch doppelte Überstreichung der Menge kenntlich macht. Mengen haben genau dann die gleiche Mächtigkeit bzw. Kardinalzahl, wenn sie äquivalent sind und für alle endlichen Mengen werden als Kardinalzahlen, wie man es gewohnt ist, die natürlichen Zahlen gewählt. Für die erste transfinite Kardinalzahl reserviert Cantor den ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets:

Die Gesamtheit *aller endlichen Cardinalzahlen  $v$*  bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§1) *„Alef-null“*, in Zeichen  $\aleph_0$ , definiren also

$$(1) \quad \aleph_0 = \overline{\{v\}}.$$

(ebd.: 492)

In die moderne Notation übersetzt sich das zu:  $\aleph_0 = |\{v \mid v \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$ . Nicht nur die natürlichen, sondern auch die ganzen, die rationalen und die algebraischen Zahlen sind alle von der Mächtigkeit  $\aleph_0$ . Leider eignet sich diese Begriffsbestimmung nicht als strenge mathematische Definition der Mächtigkeit, weil die Kardinalzahlen selbst außerhalb des Mengenuniversums liegen und als Abstraktionsprodukte nur verbal beschrieben wurden. Zudem ist das Mengenuniversum zu groß, um noch eine Menge zu sein, so dass die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit nur auf einen ausgesuchten Teilbereich anwendbar ist. Der moderne Weg zeichnet deshalb spezielle Mengen als Kardinalzahlen aus, aber für diese Arbeit reicht die cantorsche Kardinalzahl durch Abstraktion völlig aus.

Den Terminus *Mächtigkeit* hat Cantor, wie er in Cantor (1882: 116) schreibt, von Jacob Steiner, einem Schweizer Mathematiker, übernommen. In einer Zusammenstellung von Steiners Universitätsvorträgen zur Theorie der Kegelschnitte findet sich zwar keine explizite Definition, was dafür spricht, dass dieser Begriff als mathematischer Terminus bereits etabliert war, aber seine Verwendung des Begriffs zeigt die Übereinstimmung mit Cantor:

Diese beiden einfachsten geometrischen Gebilde (Punktreihe und Strahlbüschel) sind von einfacher Unendlichkeit. Die gleiche Mächtigkeit erkennen wir, indem wir die beiden Gebilde zu einander in Beziehung setzen. (Steiner 1898: 1)

Steiner nimmt hier auf das Beispiel Bezug, dass sich, wenn ein Punkt  $P$  und eine nicht durch diesen Punkt verlaufende Gerade  $g$  gegeben sind, jeder Punkt  $q$  auf dieser Geraden genau einer Gerade  $s$  des durch den Punkt  $P$  verlaufenden Geradenbüschels zuordnen lässt. In anderen Worten: Jede Gerade  $s$  durch den Punkt  $P$  schneidet die Gerade  $g$  in einem und nur in einem Punkt  $q$ . Dabei ist wie in projektiven Geometrie üblich vorausgesetzt, dass auch der unendlich ferne Punkt zur Geraden gehört, dem dann die

durch  $P$  verlaufende zu  $g$  parallele Gerade zugeordnet wird. Das Prinzip ist wie bei Cantor das einer funktionalen Zuordnung.

Zweifellos werden die Adjektive *größer*, *kleiner* und die entsprechenden Zeichen  $>$ ,  $<$  abweichend von ihrer üblichen Bedeutung gebraucht. Für Lakoff/Núñez erklärt sich diese neue Bedeutung durch eine konzeptuelle Metapher, die sie auf den Namen *Cantors Metapher* taufen:

CANTOR'S METAPHOR	
<i>Source domain</i>	<i>Target domain</i>
MAPPINGS	NUMERATION
Set $A$ and set $B$ can be put into one-to-one correspondence	→ Set $A$ and set $B$ have the same number of elements

Tabelle 6: Lakoff/Núñez 2000: 143

Um diese konzeptuelle Metapher zu rechtfertigen, kontrastieren sie das Alltagsverständnis von *größer als* mit Cantors Mächtigkeitbegriff, der einige unintuitive Folgen hat. So mag  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$  auch intuitiv noch unmittelbar einleuchten, weil die natürlichen Zahlen, wenn man sie sich auf der Zahlengeraden vergegenwärtigt, in den reellen Zahlen verstreut liegen. Gewöhnungsbedürftiger sind dagegen schon folgende Resultate:

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}|$ , wobei  $\mathbb{A}$  die Menge der algebraischen Zahlen bezeichnet.
- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} - \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^n|$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Mengen der ersten Gruppe sind alle von der Mächtigkeit  $\aleph_0$ , was möglicherweise deshalb erstaunt, weil beispielsweise nicht nur  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$  gilt, sondern die Restmenge  $\mathbb{Q} - \mathbb{N}$  sogar noch unendlich ist. In der zweiten Gruppe haben alle Mengen die Mächtigkeit der reellen Zahlen, die größer als  $\aleph_0$  ist.

Verblüffend daran ist, dass die Ebene, also die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen, von der Mächtigkeit der Zahlengeraden ist und weiter, dass sogar alle höherdimensionalen Räume in ihrer Kardinalität mit den reellen Zahlen übereinstimmen. Dass diese Aussagen mitunter schwer zu akzeptieren sind, deuten Lakoff/Núñez als Nebeneffekt der Metapher: In einer Äußerung wie *es gibt genau so viel natürliche wie rationale Zahlen* kollidieren Cantors Mächtigkeitsbegriff und das Verständnis von *größer als* im Alltag. Besonders kurios ist nun aber, welches Alltagsverständnis die Autoren rekonstruieren:

Among the criteria characterizing our ordinary everyday versions of these concepts are:

- *Same Number As:* Group  $A$  has the same number of elements as group  $B$  if, for every member of  $A$ , you can take away a corresponding member of  $B$  and not have any members of  $B$  left over.
- *More than:* Group  $B$  has more objects than group  $A$  if, for every member of  $A$ , you can take away a member of  $B$  and still have members left in  $B$ .

(Lakoff/Núñez 2000: 142/143)

Sie behaupten, dass diese Konzepte und Cantors Konzept der bijektiven Funktionen im endlichen Fall übereinstimmen, d. h., zwei endliche Mengen werden im alltäglichen Sinne als gleichgroß beurteilt genau dann, wenn sie gleichmächtig in Cantors Sinne sind. Für unendliche Mengen gelte diese Äquivalenz jedoch nicht mehr: Eine Äußerung wie *Cantor hat gezeigt, dass es genau so viele positive gerade Zahlen wie natürliche Zahlen* sei im Sinne der Alltagstheorie falsch, da beim Entfernen aller geraden Zahlen aus den natürlichen Zahlen die ungeraden übrig blieben und es daher mehr natürliche als gerade Zahlen gebe (vgl. ebd.: 143). Diese Interpretation gibt ihre Analyse der Alltagstheorie des Größenvergleichs jedoch gar nicht her, denn wenn man für jede gerade natürliche Zahl, die von der Form  $2k$  ist, aus



den natürlichen Zahlen die Zahl  $k$  entfernt, so bleiben keine natürlichen Zahlen über und beide Mengen müssten dementsprechend unter das Konzept SAME NUMBER AS fallen. Immerhin hatten Lakoff/Núñez gesagt, wenn jedem Element einer Menge  $A$  ein „korrespondierendes“ Element einer Menge  $B$  entspreche, dann seien diese beiden Mengen *gleich groß* zu nennen. Das ist aber nichts anderes als eben Cantors Mächtigkeitsbegriff! Was vielleicht gemeint war, ist, dass man ein und dasselbe Element aus beiden Mengen entfernt und dann die Restmengen beurteilt. Dann liefere der Alltagsbegriff auf die Teilmengenrelation hinaus: Wenn Menge  $A$  eine echte Teilmenge von  $B$  ist, dann sage *A hat weniger Elemente als B*. Hier geraten tatsächlich zwei verschiedene Konzepte aneinander, wie auch Hausdorff schon feststellte:

Diese Verletzung des Axioms „totum parte majus“ ist eine jener „Paradoxien des Unendlichen“, an die man sich gewöhnen muß und gewöhnt hat; (Hausdorff 2008: 70)

Für unendliche Mengen ist die Schlussfolgerung  $A \subsetneq B \Rightarrow |A| < |B|$  zu  $A \subsetneq B \Rightarrow |A| \leq |B|$  abzuschwächen. Eine unendliche Teilmenge kann also von der gleichen Mächtigkeit wie die Ausgangsmenge sein.

Eine detaillierte Untersuchung, wie der Übergang vom Vergleichen endlicher zum Vergleichen unendlicher Mengen im Unterricht gestaltet werden kann, führt Tasmir (1999) durch. Die Autorin kommt u. a. zu dem Ergebnis, dass Lernende intuitiv sechs verschiedene Verfahren anwenden können, um zu entscheiden, ob zwei unendliche Mengen äquivalent sind:

- (1) Alle unendlichen Mengen haben die gleiche Größe.
- (2) Unendliche Mengen können ihrer Größe nach nicht verglichen werden.
- (3) Vergleich durch Paarbildung.
- (4) Vergleich anhand der Teilmengenrelation.

(5) Vergleich durch Intervallbetrachtungen.

(6) Vergleich der Beschränktheit.

Die Typen (1) und (2) lassen keine Unterschiede im Bereich des Unendlichen zu, weil entweder alle unendlichen Mengen die gleiche Größe haben oder der Begriff der Anzahl bei unendlichen Mengen sinnlos ist. Typ (3) entspricht dem Mächtigkeitsbegriff nach Cantor. Die letzten drei Typen erlauben Unterscheidungen im Unendlichen, weichen aber vom Typ (3) ab. So hat nach Cantor beispielsweise das offene Intervall  $(0, 1)$  die gleiche Mächtigkeit wie die reellen Zahlen, nach (4) und (6) wäre es jedoch von strikt kleinerer Mächtigkeit, da  $(0, 1) \subsetneq \mathbb{R}$  und das Intervall im Gegensatz zu den reellen Zahlen beschränkt ist. Im Endlichen dagegen sind die Verfahren (3)-(5) äquivalent, während (1),(2) und (6) nicht anwendbar sind. Von den Verfahren (3)-(6) lässt sich nur (3) uneingeschränkt auf beliebige Mengen anwenden, da für (4) die zu vergleichenden Mengen in der Teilmengenrelation stehen, für (5) durch Intervalle beschrieben sein müssen und für (6) eine Menge beschränkt und die andere unbeschränkt sein muss. Von diesem Standpunkt her hat sich Cantor konsequent für das einzige Verfahren entschieden, das durchgehend sowohl auf endliche wie auch auf unendliche Mengen angewendet werden kann.

Bemerkenswert daran ist, dass Cantors Mächtigkeitsbegriff nicht länger als ein neues Verfahren erscheint, das aus einem anderen Bereich in das Vergleichen von Mengen hineingezogen wird, wie Lakoff/Núñez mit ihrer Metapher suggerieren, sondern schon immer ein Typ unter den intuitiven Verfahren war. Man kann sogar darüber spekulieren, ob es nicht sogar die älteste Methode ist, zwei Mengen ihrer Größe nach zu vergleichen. Wenn man sich vorstellt, in eine Zeit zurückversetzt zu sein, in der es noch keine Sprache und auch keine Zeichen zum Zählen gab, dann erscheint Paarbildung ein gutes Mittel zu sein, die Anzahl der Objekte zweier Haufen zu vergleichen. Bei Hausdorff liest man dazu:

Wenn man eine Menge von Äpfeln mit einer Menge von Birnen in bezug auf die Anzahl der Gegenstände *v e r g l e i c h e n* will, so geschieht dies auf dem primitiven Standpunkt in der Weise, daß man einen Apfel mit einer Birne zusammenlegt, dann einen zweiten Apfel mit einer zweiten Birne, und dieses Verfahren bis zu seinem Ende fortsetzt, d. h. bis die eine von beiden Mengen erschöpft ist. Ist damit gleichzeitig auch die andere erschöpft, so haben wir ebenso viele Äpfel wie Birnen. Das ist nun gar nicht anderes als die Bildung einer Menge von *P a a r e n*  $p = (a, b)$ , worin jeder Apfel  $a$  und jede Birne  $b$  in höchstens einem Paar vorkommt; und gelingt es insbesondere die Paarmenge  $P$  so zu bilden, daß jedes  $a$  und jedes  $b$  in genau einem Paare vorkommt, so haben wir gleiche Anzahl von Äpfeln und Birnen oder (Kap. II, §1) die *Ä q u i v a l e n z* beider Mengen  $A$  und  $B$  konstatiert. (Hausdorff 2002: 145)

Hausdorff hält es sogar für denkbar, dass in einem nächsten Schritt anstatt der beiden zu vergleichenden Mengen Stellvertretermengen wie Muscheln, kleine Steine usw. verwendet werden, die schließlich in einem System von Zeichen münden. Die Paarbildung erscheint aus dieser kulturhistorischen Spekulation als Grundlage des Zählens schlechthin.

Berücksichtigt man diese beiden Überlegungen, dann sollte von einer konzeptuellen Metapher Abstand genommen werden, da keine heterogenen Bereiche aufeinander bezogen werden. Stattdessen wird das Wissen, wie man endliche Mengen nach der Anzahl ihrer Elemente vergleicht, aus sich selbst heraus so erweitert, dass auch unendliche Mengen erfasst werden können. Daher ist zu überlegen, ob nicht an Stelle einer Metapher von einer konzeptuellen Metonymie ausgegangen werden könnte. Radden definiert sie so: „*Metonymy* is a mapping within the same conceptual domain“ (Radden 2003: 93). Das würde auf diesen Fall hier zutreffen: Aus allen intuitiven Verfahren des Mengenvergleichens wird ein Verfahren ausgewählt, den gesamten Bereich zu vertreten. Cantors Metapher wäre dann in *Cantors Metonymie* umzubenennen. Die Schwierigkeiten beim Verstehen des Mächtigkeitsbegriffs resultierten dann daraus, dass die Paarbildung nicht

als prototypisches Verfahren, das für den ganzen Bereich stehen kann, akzeptiert wird, vergleichbar vielleicht mit dem in Lakoff/Johnson (2003: 37) geschilderten Fall, dass ein Foto eines Rumpfes nicht als Bild einer Person durchgehen wird, ein Bild des Gesichtes auf Grund der Metonymie *THE FACE FOR THE PERSON* schon. Die Paarbildung wäre demnach eine intuitiv gegebene Methode, die aber zumindest in unserer Kultur nicht immer als zentral angesehen wird.

Für den Mathematikunterricht folgt aus diesen Überlegungen, dass es beim Lehren der cantorschen Mengenlehre sinnvoll sein könnte, die intuitiven Vorstellungen der Lernenden zu thematisieren, um die verschiedenen Methoden des Mengenvergleichs bewusst werden zu lassen. Dabei soll das formale System der Mengenlehre mit seinen Definitionen, Sätzen und Beweisen keineswegs vernachlässigt werden, sondern Anschluss an das Vorwissen der Lernenden finden. Während bei einer Metapher die positiven und negativen Analogien genau zu besprechen wären, hat man bei der Metonymie zu begründen, warum ein bestimmter Aspekt ein ganzes Konzept vertritt. Dies kann in diesem Fall gelingen, wenn die Alternativen und die Gründe ihres Ausschlusses bewusst gemacht werden können.

### **7.2 Resultate über Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese**

Wie konzeptuelle Metaphern auch haben konzeptuelle Metonymien die Funktion, einen kognitiven Rahmen aufzuspannen, in dem Verstehen möglich ist. So lässt die Erweiterung der Paarbildung auf unendliche Mengen sofort eine Reihe von Beziehungen gewahr werden, die für das Vergleichen endlicher Mengen gelten und die man auch auf den unendlichen Mengen bestätigt sehen möchte. Tatsächlich sind einige Beziehungen so einleuchtend, dass man sie eventuell gar nicht als zu rechtfertigen wahrnimmt. Beispiels-

weise erwartet man, dass zwei beliebige Mengen  $A$  und  $B$  hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verglichen werden können, sodass entweder  $|A| \leq |B|$  oder  $|B| \leq |A|$  gilt. Doch, ob es in der Menge aller Funktionen von Teilmengen von  $A$  nach Teilmengen von  $B$  tatsächlich immer entweder eine Funktion, die  $A$  bijektiv auf eine Teilmenge von  $B$ , oder eine Funktion, die  $B$  bijektiv auf eine Teilmenge von  $A$  abbildet, gibt, ist keineswegs klar. Tatsächlich ist es in der Praxis schwer so eine Funktion konkret anzugeben. Zum Beweis, dass zwei Mengen tatsächlich immer vergleichbar sind, wird dann auch das Auswahlaxiom benötigt, um wenigstens die Existenz einer solchen Funktion sichern zu können. Im Folgenden sind einige wichtige durch Cantors Metonymie motivierte Resultate über Kardinalitäten zusammengefasst:

---

**Satz von Cantor-Bernstein**

Aus  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A|$  folgt stets  $|A| = |B|$ .

---

**Vergleichbarkeitssatz**

Für zwei beliebige Mengen  $A$  und  $B$  ist stets  $|A| \leq |B|$   
oder  $|B| \leq |A|$ .

---

**Satz von Cantor**

Für jede Menge  $M$  ist  $|M| < |\mathcal{P}(M)|$ .

---

**Additions- und Multiplikationssatz**

Für alle unendlichen Mengen  $M$  gilt:

$$|(M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})| = |M| \text{ und } |M \times M| = |M|.$$

---

Mit transfiniten Kardinalzahlen und den in zuvor eingeführten Operationen lassen sich diese Ergebnisse eleganter formulieren. So schreibt sich etwa der Additionssatz als  $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$  für alle unendlichen Kardinalzahlen  $\mathfrak{a}$ .

Cantor bezeichnete die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen mit  $\aleph_0$  und konnte zeigen, dass die reellen Zahlen von größerer Mächtigkeit sind. Daran schließt sich ganz selbstverständlich eine Frage an, die auf Cantor selbst und die Entwicklung der Mathematik einschneidend wirkte: Um wie viel größer ist  $|\mathbb{R}|$  als  $|\mathbb{N}|$ ? Bezeichnet man die  $\aleph_0$  folgende, nächstgrößere Kardinalzahl, deren Existenz sich formal rechtfertigen lässt, als  $\aleph_1$ , dann beantwortet die Kontinuumshypothese die Frage mit  $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ . Oder in anderen Worten: Ist  $M$  eine Menge mit  $|\mathbb{N}| \leq |M| \leq |\mathbb{R}|$ , dann gilt entweder  $|\mathbb{N}| = |M|$  oder  $|M| = |\mathbb{R}|$ . Erstmals wird sie in Cantor (1878) erwähnt. Bemerkenswert an ihr ist, dass sie im Rahmen der üblichen Mathematik, d. h. des im nächsten Abschnitt erläuterten Axiomensystems, weder beweis- noch widerlegbar ist.<sup>2</sup> Der Beweis dieses fundamentalen Satzes wurde erst später in zwei Schritten von Kurt Gödel (1938) und Paul Cohen (1963) geleistet.

Mit Blick auf den Satz von Cantor ( $|M| < |\mathcal{P}(M)|$ ) kann eine verallgemeinerte Kontinuumshypothese formuliert werden, der zufolge zwischen  $|M|$  und  $|\mathcal{P}(M)|$ , insofern  $M$  eine unendliche Menge ist, keine weiteren Kardinalzahlen liegen. Für  $M = \mathbb{N}$  erhält man die Kontinuumshypothese als Spezialfall. Auch die verallgemeinerte Kontinuumshypothese ist weder beweis- noch widerlegbar.

Eine viel diskutierte Frage in der Mengenlehre ist daher, ob neue Axiome, mit denen die Kontinuumshypothese bewiesen oder widerlegt werden kann oder aber weiter unentschieden bleibt, dem üblichen Rahmen hinzugefügt werden sollen. Für jede der Optionen stünden geeignete Kandidaten zur Verfügung, jedoch besteht derzeit keine Einigkeit darüber, welcher Richtung man folgen soll. Jenseits des formalen Standpunkts bleibt so die Frage offen, welchen Wahrheitswert man der Kontinuumshypothese zuschreiben will. Da über Wahrheit im Gegensatz zur Beweisbarkeit relativ zu einem

---

<sup>2</sup> *Beweisbar* bedeutet hier ‚formal ableitbar mit Hilfe von Axiomen und einem Kalkül‘.

Modell geurteilt wird, stellt sich die Frage, wie das intuitive Modell der Mengenlehre auszusehen hat. Deshalb können Lakoff/Núñez schreiben:

From the perspective of our mathematical idea analysis, this means that whether or not the Continuum hypothesis is “true” depends on the underlying conceptual metaphors characterizing the concept “set”. (Lakoff/Núñez 2000: 215)

Richtig daran ist sicherlich, dass unsere Vorstellung von dem, was eine Menge ist, letztendlich den Ausschlag über den Wahrheitswert der Kontinuumshypothese geben wird. Ob konzeptuelle Metaphern allein dafür die Weichen stellen, darf nach allem Vorhergehenden jedoch bezweifelt werden.





## 8 Paradoxien und ZFC

### 8.1 Paradoxien

Am Ende der 1920er Jahre diagnostiziert Hermann Weyl eine tiefe Grundlagenkrise der Mathematik:

In der Tat: jede ernste und ehrliche Besinnung muß zu der Einsicht führen, daß jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik als Symptome gewertet werden müssen, in ihnen kommt an den Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht.  
(Weyl 1929: 39)

Weyl entwirft hier eine doppelte Topologie des mathematischen Raumes: Einerseits ist er eine ebene Fläche, in dessen Zentrum eine Mathematik betrieben wird, die von den sich an der Peripherie auftuenden Abgründen nichts weiß oder nichts wissen will. Andererseits erhebt sich im Sinne der Metapher THEORIEN SIND GEBÄUDE eine vertikale Architektur der Mathematik, deren Fundament Weyl für nicht belastbar erachtet. Vorausgegangen war dem Krisenempfinden die Entdeckung zahlreicher Paradoxien der Mengenlehre am Ende des 19. Jahrhunderts. Weyl verwirft die Sicht-

weise, wonach diese Antinomien<sup>1</sup> sehr spezieller Natur seien und die übliche Mathematik kaum tangierten, indem er mit der Gebäudemetapher auf die gemeinsamen Grundlagen von Mengenlehre und üblicher Mathematik verweist. Seine Kritik und die darin enthaltene Polemik charakterisieren den zu dieser Zeit noch tobenden Grundlagenstreit.

Ein entscheidendes Ereignis, das zu dieser Diskussion geführt hat, ist Freges Versuch, Cantors Mengenlehre zu axiomatisieren. Dabei nimmt er das volle Komprehensionsprinzip mit auf: Zu jeder beliebigen Eigenschaft  $E$  existiert eine Menge  $M$  mit

$$M = \{x \mid E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}.$$

Um 1901 gelingt es dann Bertrand Russel und Ernst Zermelo einen Widerspruch aus diesem System abzuleiten, der als Russellsche Antinomie oder Russell-Zermelosches Paradoxon in die Mathematikgeschichte eingeht. Dazu wählten sie die Eigenschaft  $E$   *$x$  ist eine Menge und  $x \notin x$*  und versuchten, die Menge  $R$  aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind, zu bilden:

$$R = \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}$$

---

<sup>1</sup> Hier werden *Paradoxie* und *Antinomie* weitgehend synonym verwendet. Wollte man beide Begriffe aber unterscheiden, so weist Christian Tapp darauf hin, dass beide zunächst eine Situation bezeichnen, „die das herkömmliche Denken und sein Begriffssystem vor ein *ad hoc* nicht lösbares Problem stellt“ (Tapp 2005: 54). Während aber eine Paradoxie (,gegen die allgemein übliche Meinung‘) einen überraschenden Widerspruch, der vielleicht sogar nur scheinbar besteht und gelöst werden kann, darstellt, verletzt eine Antinomie (,gegen das Gesetz‘) viel stärker ein allgemein akzeptiertes Gesetz oder eine Regel. Im Gegensatz zur Paradoxie können Antinomie und Regel nicht versöhnt werden. Beispielsweise ist die Behauptung von  $A \wedge \neg A$  eine Antinomie zum Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch, nach dem eine Aussage und ihre Verneinung nicht gleichzeitig zutreffen können; sie ist aber bestimmt keine Paradoxie. Für axiomatische Theorien kommt die Entdeckung einer Antinomie einem Todesstoß gleich, da sie zeigt, dass sich aus den Axiomen Widersprüchliches ableiten lässt, womit die gesamte Theorie wertlos wird. In Bezug auf die Mengenlehre sollte nach Tapps Ansicht nicht von Antinomien gesprochen werden, da Cantor in seiner Mengendefinition den Fall, dass sich eine Vielheit nicht zu einer Einheit zusammenfassen lässt, ausdrücklich berücksichtigt (vgl. ebd.: 54).

Entscheidend ist nun die Frage, ob  $R$  selbst ein Element von  $R$  ist. Offenbar gilt hier  $R \in R$  genau dann, wenn  $R \notin R$  gilt. Denn angenommen  $R \in R$ , dann folgt aus der Definition von  $R$ , dass  $R \notin R$  gelten muss, ist aber andererseits  $R \notin R$ , dann erfüllt  $R$  die Eigenschaft  $E$ , woraus  $R \in R$  folgt. Dies widerspricht aber dem Verständnis einer Menge als einem wohldefinierten Objekt, bei dem für jedes beliebige Objekt entschieden werden kann, ob es zur Menge gehört oder nicht. Was diese Paradoxie so bemerkenswert macht, ist, dass sie auf keine weitergehenden Sätze zurückgreift. Weder braucht sie die Theorie der Kardinal- noch der Ordinalzahlen. Sie ist ein rein logisches Problem und als solches muss es auf die Mathematik um die Jahrhundertwende besonders schockierend gewirkt haben. Daher kommt Weyls Unbehagen: Wenn schon die Mengenlehre widersprüchlich sein sollte, könnte dann nicht die gesamte Mathematik gefährdet sein?

Lakoff und Núñez versuchen, die Russellsche Antinomie mit einem Argument aus dem Behälter-Schema wegzuwischen:

[...] when The Sets Are Container-Schemas Metaphor is being used to conceptualize sets, expressions like “sets that are members of themselves” and “sets that are not members of themselves” are nonsense and therefore cannot designate anything at all. Relative to this metaphor, Russell’s classical set-theoretical paradox concerning the set of all sets which are not members of themselves cannot arise. (Lakoff/Núñez 1997: 41)

Die Logik des Behälter-Schemas mache es unmöglich, dass ein Behälter sich selbst enthalten könne, sonst müsste der Rand Teil des Innenbereiches, den er vom Außenbereich abgrenzt, sein, damit würde aber die Trennung von Innen und Außen zusammenbrechen. Dem ist durchaus zuzustimmen, die Folgerung, dass die Eigenschaft  $x$  ist Menge und  $x \notin x$  völlig sinnlos sei, muss allerdings zurückgewiesen werden. Vielmehr gilt unter der Metapher MENGEN SIND BEHÄLTER, dass diese Eigenschaft auf jede Menge zutrifft, sodass die Russellsche Menge  $R$  zur Allmenge wird, also der Menge aller Mengen. Diese Menge ist aber ebenfalls paradox: Denn sei

$V = \{x \mid x \text{ ist eine Menge}\}$ , dann gilt für die Potenzmenge  $\mathcal{P}(V) \subseteq V$ , da jedes Element von  $\mathcal{P}(V)$  eine Menge von Elementen von  $V$  ist und damit selbst eine Menge, und somit ist  $|\mathcal{P}(V)| \leq |V|$ . Andererseits gilt aber nach dem Satz von Cantor  $|M| < |\mathcal{P}(M)|$  für alle Mengen  $M$ . Insgesamt ergibt sich also  $|V| < |\mathcal{P}(V)| \leq |V|$  und mit der Transitivität der Relation  $\leq$  der Widerspruch  $|V| < |V|$ . Dass die Menge  $R$  mit Blick auf ein intuitives Mengenverständnis etwa über Behälter merkwürdig erscheint, ist richtig, jedoch haben sie Russell und Zermelo auf der Basis von Freges Axiomatisierungsversuch konstruiert. Sie konnten damit zeigen, dass Freges System widersprüchlich ist oder anders gesagt, dass es die Intuition schlecht einfängt. Unter der Behälter-Metaphorik verschwindet die Russellsche Antinomie aber keineswegs, sie wandelt sich zum Cantorsche Paradoxon der Allmenge.

Deiser (2010: 187) weist darauf hin, dass man Cantor häufig zu Unrecht beschuldigt habe, die von ihm begründete naive Mengenlehre habe die Antinomien hervorgebracht und damit die Mathematik insgesamt verunsichert. Tatsächlich war sich Cantor, wie im Übrigen schon seine Mengendefinition bei genauer Betrachtung gezeigt hat, sehr wohl bewusst, dass der zweite Schritt in der Mengenbildung – die Zusammenfassung einer Vielheit zu einer Einheit – fehlschlagen kann. Leider hat er seine Gedanken dazu nur in Briefen an Hilbert und Dedekind geäußert, sodass sie einer breiteren Öffentlichkeit verborgen blieben. So schreibt Cantor im Jahr 1899 an Dedekind über eben diese Zusammenfassung aller Mengen:

Das System T, mithin auch das System S [= V] sind daher *keine Mengen*.  
*Es gibt also bestimmte Vielheiten, die nicht zugleich Einheiten sind, d. h. solche Vielheiten, bei denen ein reales „Zusammensein aller ihrer Elemente“ unmöglich ist. Diese sind es, welche ich „inkonsistente Systeme“, die andern aber „Mengen“ nenne.* (Cantor/Dedekind 1932: 448)

Alle Paradoxien der Mengenlehre basieren auf dem vollen Komprehensionsprinzip, dass es zu jeder Eigenschaft eine Menge mit genau den Ele-

menten, die diese Eigenschaft erfüllen, gibt. Obwohl es intuitiv einleuchtend erscheint, muss es aus logischen Gründen abgelehnt werden. Das aber entgeht Lakoff/Núñez, wenn sie nur das „inhaltliche“ Argumentieren mit konzeptuellen Metaphern als mathematisch sinnvoll erachten. Wenn man aber Mengen nicht mehr frei nach beliebigen Eigenschaften bilden kann, braucht es Axiome, die regeln, welche Bildungen neuer Mengen aus vorhandenen Mengen zulässig sind.

## 8.2 Das Axiomensystem ZFC

Mit dem Axiomensystems ZFC wird der Boden der intuitiven Mengenlehre endgültig verlassen. Das Kurzwort *ZFC* steht für *Zermelo-Fraenkel-Axiomatik mit Auswahlaxiom*, wobei das *C* aus der englischen Bezeichnung *axiom of choice* herrührt.

Das Problem, eine mathematisch exakte Definition des Mengenkonzepts zu geben, in Verbindung mit den geschilderten Paradoxien führte um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert zu Versuchen, die Mengenlehre und damit auch die Mathematik auf ein widerspruchsfreies Fundament zu stellen. Zermelos 1908 veröffentlichte Arbeit „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“ ist weder der erste noch der letzte Versuch einer Axiomatisierung der Mengenlehre, aber der mit dem stärksten Einfluss. Seine dort vorgestellten sieben Axiome wurden in der Folgezeit durch das Ersetzungsschema von Abraham Fraenkel und das Fundierungsaxiom, das in vergleichbaren Formen von Fraenkel, von Neumann, Zermelo und Skolem diskutiert wurde, ergänzt.

Die durch das Kurzwort *ZFC* suggerierte Sonderstellung des Auswahlaxioms ist zumindest historisch unbegründet, da es bereits zu den sieben ursprünglich von Zermelo postulierten Axiomen gehörte und Zermelos Leistung gerade in der Isolierung dieses Axioms gesehen werden kann (vgl.

Felgner 2010: 177). Dennoch hat es in der Mengenlehre wie auch in der Mathematik im Allgemeinen eine exponierte Stellung inne, da manche es vollständig ablehnen, andere wieder nur in abgeschwächter Form akzeptieren. Die Kontroverse um seine Berechtigung spielt sich zwischen seinem nicht konstruktiven Charakter und seiner Unverzichtbarkeit für viele mathematische Bereiche ab. In der tagtäglichen Praxis kann auf das Axiom jedoch kaum verzichtet werden, da schon elementare Sätze wie die Äquivalenz von Folgen- und Epsilon-Delta-Stetigkeit oder Sätze wie der Wohlordnungs- oder der Vergleichbarkeitssatz nicht mehr allgemein beweisbar wären.

ZFC setzt sich aus unendlich vielen Axiomen zusammen, da es mit dem Aussonderungs- und dem Ersetzungsschema zwei Schemata enthält, die zu bestimmten Prädikaten Axiome generieren. In der folgenden Übersicht ist ZFC in mathematischer Umgangssprache wiedergegeben.

---

**Extensionalitätsaxiom**

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

---

**Existenz der leeren Menge**

Es existiert eine Menge, die keine Elemente enthält.

---

**Paarmengenaxiom**

Zu zwei Mengen  $x$  und  $y$  gibt es genau eine Menge  $z$ , deren Elemente genau  $x$  und  $y$  sind.

---

**Vereinigungsmengenaxiom**

Für jede Menge  $x$  gibt es eine Menge  $y$ , die genau die Elemente der Elemente von  $x$  enthält.

---

**Potenzmengenaxiom**

Zu jeder Menge  $x$  existiert eine Menge  $y$ , deren Elemente genau die Teilmengen von  $x$  sind.

---

### **Aussonderungsschema**

Zu jeder Eigenschaft  $\phi$ , d. h. ein mit Parametern definierbares einstelliges Prädikat, und jeder Menge  $x$  gibt es eine Menge  $y$ , deren Elemente genau die Elemente von  $x$  sind, auf die  $\phi$  zutrifft.

---

### **Ersetzungsschema**

Ist  $x$  eine Menge und wird jedes Element von  $x$  eindeutig durch eine Menge ersetzt, dann erhält man wieder eine Menge.

---

### **Unendlichkeitsaxiom**

Es gibt eine Menge  $x$ , die die leere Menge und mit jedem ihrer Elemente  $y$  auch  $\{y\}$  als Element enthält.

---

### **Fundierungsaxiom**

Jede nichtleere Menge  $x$  enthält ein Element  $y$ , das mit  $x$  keine Elemente gemeinsam hat.

---

### **Auswahlaxiom**

Für jede Menge  $x$  paarweise disjunkter nichtleerer Mengen existiert eine Menge  $y$ , die mit jedem Element von  $x$  genau ein Element gemeinsam hat.

---

Mit dem Axiomensystem verschwindet die Russellsche Antinomie nicht nur, da das Aussonderungsschema die Konstruktion der Menge  $R = \{x \mid x \notin x\}$  nicht mehr erlaubt, sondern verwandelt sich sogar in einen Satz, wenn man vom Fundierungsaxiom absieht: Für alle  $x$  existiert eine Teilmen-

ge  $y$  von  $x$  mit  $y \notin x$ . Nach dem Aussonderungsschema existiert nämlich analog zur Russellschen Konstruktion  $y = \{z \in x \mid z \notin z\}$ . Dann muss aber  $y \notin x$  gelten, da ansonsten der Widerspruch  $y \in y \iff y \notin y$  ableitbar wäre. Daraus ergibt sich weiterhin die Folgerung, dass es keine Allmenge geben kann, da zu jeder Menge  $x$  ein  $y$  existiert, das kein Element von  $x$  ist.

Seine wahre Schlagkraft erlangt die Axiomatisierung allerdings erst, wenn sie formal in der Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe formuliert wird. Dann wird aus den hier in mathematischer Umgangssprache formulierten Axiomen ein formales System, in dem unabhängig von der Semantik der verwendeten Zeichen auf rein syntaktischer Ebene argumentiert werden kann. Erst dann werden metamathematische Untersuchungen des Axiomensystems möglich, wie etwa die Frage nach der Unabhängigkeit der Kontinuums-Hypothese oder der Widerspruchsfreiheit.

Der Eingangs erwähnte Anspruch der Mengenlehre, alle mathematischen Probleme in ihre Sprache übersetzen zu können, kann unter einer strikt formalistischen Position so weit getrieben werden, dass die gesamte Mathematik auf das formale Axiomensystem ZFC zurückgeführt wird und unter Ausschluss der Semantik mathematische Beweise zu einem syntaktischen, regelhaften „Spiel“ mit Zeichenformen werden, die im Prinzip auch ein Computer ohne menschliches Zutun durchführen kann. Ohne Semantik gäbe es hier keine Konzepte mehr und somit auch keine konzeptuellen Metaphern. Das letztendliche Scheitern dieses ambitionierten Vorhabens hatte mehrere Gründe: Ein von innerhalb der mathematischen Logik kommender Schlag gegen den Formalismus waren die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, denen zufolge es in jedem hinreichend komplexen formalen Kalkül Sätze gibt, die weder formal beweis- noch widerlegbar sind. Insbesondere kann in ZFC nicht bewiesen werden, dass ZFC selbst widerspruchsfrei ist. Von außen kommend lässt sich einwenden, dass Menschen immer über ein



bestimmtes Verständnis mathematischer Gegenstände verfügen, dass man, anstatt es aus der Mathematik eliminieren zu wollen, ernst nehmen sollte:

This [die Formalisierung] is, of course, nonsense from the perspective of cognitive science. In any mathematics that is humanly comprehensible, classes and sets have a conceptual structure, and even a metaphorical structure. (Lakoff/Núñez 2000: 373)

Insbesondere kann innerhalb der formalen Methode nicht geklärt werden, woher die Axiome kommen und welche Bedeutung das  $\in$  hat. Ihr Ursprung kann aber nur die Intuition der Mathematiker und Mathematikerinnen sein und weil das so ist, ist die auch Frage, ob die Kontinuums-Hypothese wahr oder falsch ist, trotz der Unabhängigkeits-Beweise nicht abgeschlossen:

The ultimate response to CH must be looked at in human, almost sociological terms. We will debate, experiment, prove and conjecture until some picture emerges that satisfies this wonderful taskmaster that is our intuition. (Cohen 2002: 1099)

Diesem „heimlichen Lehrmeister“ ein Stück näher zu kommen, dazu kann die kognitive Metaphertheorie versuchen, ihren Beitrag zu leisten.



## 9 Singuläre Metaphern

Abschließend sollen aus semasiologischer Perspektive überblicksartig weitere sprachliche Metaphern in der Mengenlehre besprochen werden, von denen auszugehen ist, dass sie keine Realisierungen kognitiver Modelle sind und insofern auch nicht theoriekreativ sein können, sondern isoliert der anschaulichen Bezeichnung eines mengentheoretischen Gegenstandes dienen. Fast alle dieser Lexeme treten auch in anderen Teilgebieten der Mathematik auf, insbesondere in der Topologie, dort zumeist in noch abstrakterer Bedeutung. Hier beschränken wir die Untersuchung jedoch ausschließlich auf ihre Verwendung in der Mengenlehre. Da systematische Übertragungen zwischen Domänen hier unwahrscheinlich sind, fallen analogische Modelle oder konzeptuelle Metaphern als Grundlage einer Übertragung aus und es wird daher angenommen, dass die Übertragung lokal aufgrund einer Ähnlichkeit zwischen der bezeichneten mathematischen Struktur oder Beziehung und den Dingen, die in der Alltagssprache zur Extension der Wörter gehören, oder einigen gewohnheitsmäßigen Assoziationen mit diesen Dingen erfolgt.

### **Dichte, nirgends dichte und magere Mengen**

Wenn das Wort *dicht* in der Alltagssprache nicht in lokaler oder temporaler Bedeutung von ‚in der Nähe von‘ oder übertragen mit der Bedeutung ‚betrunken‘ verwendet wird, sind mit ihm semantische Merkmale wie ‚ohne Zwischenräume‘, ‚undurchdringlich‘ oder ‚undurchlässig‘ assoziiert (vgl. DUW: 416). Innerhalb der Wort Adjektiv gehört es der semantischen

Gruppe der qualifizierenden Adjektiven an, die einer Person oder Sache eine Eigenschaft zusprechen. Der mathematische Terminus *dicht* wird jedoch zunächst relational gebraucht. So schreibt beispielsweise Cantor:

Liegt  $P$  theilweise oder ganz im Intervalle  $(\alpha \cdots \beta)$ , so kann der bemerkenswerthe Fall eintreten, dass *jedes noch so kleine* in  $(\alpha \cdots \beta)$  enthaltene Intervall  $(\gamma \cdots \delta)$  Punkte von  $P$  enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, dass  $P$  im Intervalle  $(\alpha \cdots \beta)$  *überall-dicht* sei. (Cantor 1879: 2)

*Dicht* bezeichnet hier bezogen auf lineare Punktmenge, gemeint sind Teilmengen der reellen Zahlen, also eine Beziehung zwischen einer Menge und einem Intervall. Beispiele für zwei im echten Intervall  $(a, b)$  dichte Mengen sind: Jede Menge  $A$  mit  $(a, b) \subseteq A$  oder die Menge der rationalen Zahlen in diesem Intervall  $B = \mathbb{Q} \cap (a, b)$ . Für beide gilt, dass jedes Teilintervall von  $(a, b)$  wieder Elemente dieser Mengen enthält. Jede in einem echten Intervall dichte Menge muss notwendig unendlich sein, wobei sie von der Mächtigkeit sowohl abzählbar (wie  $B$ ) als auch überabzählbar (wie  $A$ ) sein kann. Implizit ist im Intervallbegriff die übliche Ordnung auf den reellen Zahlen mit enthalten. Unter expliziter Verwendung der Ordnung ist äquivalent, dass eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  dicht ist, falls für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ein  $x \in M$  existiert mit  $a < x < b$ . Wiederrum sind die rationalen Zahlen ein Beispiel für eine in  $\mathbb{R}$  dichte und abzählbare Menge. Jede dichte Menge  $M$  besteht also aus Approximationen an die Elemente von  $\mathbb{R}$ . Also trifft das Merkmal ‚ohne Zwischenräume‘ auf dichte Ordnungen in dem Sinne zu, dass es, ist  $M$  dicht in  $\mathbb{R}$ , kein echtes Intervall reeller Zahlen gibt, das kein Element von  $M$  enthält. Beim Versuch, eine in  $\mathbb{R}$  dichte Menge auf einer Zahlengeraden zu visualisieren, hätte man zwischen zwei beliebigen, verschiedenen Zahlen immer ein Element dieser Menge zu zeichnen.

Davon abgeleitet findet sich eine attributive Version dieses Terminus für lineare Ordnungen: Eine lineare Ordnung  $\langle M, < \rangle$  heißt *dicht*, falls für alle  $x, y \in M$  mit  $x < y$  ein  $z \in M$  existiert mit  $x < z < y$ . Diese Eigenschaft

findet u. a. bei der Charakterisierung von Ordnungstypen Anwendung. So gilt beispielsweise für die Ordnung der rationalen Zahlen  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ , dass sie abzählbar, unbeschränkt und dicht ist. Cantor (1895: 504ff) hat weiterhin bewiesen, dass jede lineare Ordnung mit diesen drei Eigenschaften isomorph zur Ordnung der rationalen Zahlen ist.

Konträr dazu ist der Begriff *nirgends dicht* definiert. Eine Menge  $M$  heißt *nirgends dicht* in  $\mathbb{R}$ , falls ihr Abschluss, d. h. die Vereinigung mit allen ihren Häufungspunkten, kein echtes Intervall enthält. Als Beispiel betrachte man die Menge  $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Der Abschluss fügt dieser Menge nur die Null hinzu und es gibt kein echtes Intervall, das in  $M \cup \{0\}$  enthalten wäre.

Ist weiterhin  $P$  eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen, dann heißt  $P$  *mager*. Alltagssprachlich kann das Adjektiv *mager* Nahrung mit geringem Fettgehalt, eine dünne Person oder eine kaum zum Leben reichende Situation bezeichnen. Gemeinsam ist diesen Verwendungen bei unterschiedlichen Bewertungen der Bezug auf die Abwesenheit von etwas Essentiellem. Magere Mengen sind in einem von der Kardinalität abweichenden Sinne kleine, unerhebliche, vernachlässigbare Mengen. So liegt nach dem Baireschen Kategoriensatz das Komplement einer mageren Menge dicht in  $\mathbb{R}$ . Wenn eine Menge in Bezug auf eine Obermenge mager ist, dann kann man das so interpretieren, dass fast alles Wesentliche im Komplement liegt. Magere Mengen können aber dicht sein, wie das Beispiel der Menge der rationalen Zahlen zeigt, die als abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen, die sicherlich nirgends dicht sind, mager aber dennoch dicht ist. Die Menge der reellen Zahlen, damit gewinnt der Begriff erst seine Berechtigung, ist jedoch nicht mager.

### **Vollständige lineare Ordnungen und Lücken**

Verglichen mit den zuvor diskutierten Termini liegen die Fachbedeutungen von *vollständig* und *Lücke* viel näher an den jeweiligen Alltagsbedeutungen.

Eine lineare Ordnung nennt man *vollständig*, falls jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig, da etwa die Menge  $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  wegen der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  kein Supremum in  $\mathbb{Q}$  hat. Diese fehlenden Suprema bezeichnet man als *Lücken*. Durch das „Stopfen“ aller Lücken einer linearen Ordnung wird diese vollständig. Im Falle der Menge der rationalen Zahlen sind die irrationalen Zahlen genau die Lücken, deren Stopfen zur Menge aller reellen Zahlen führt. Wie auch in der Alltagssprache sind *vollständig* und *lückenlos* im mathematischen Register synonym.

Dagegen sind *dicht* und *vollständig* bzw. *lückenlos* als mathematische Termini unabhängig voneinander, wie folgendes Beispiel eindrucksvoll zeigt: In der Ebene, dem  $\mathbb{R}^2$ , kann zwischen zwei beliebigen verschiedenen Punkten ein Kreisbogen gezogen werden, der Anfangs- und Endpunkt ausgenommen kein Element aus  $\mathbb{Q}^2$  enthält, obwohl  $\mathbb{Q}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  dicht liegt. Der Grund dafür ist, dass beim Auffüllen der Lücken von  $\mathbb{Q}$  überabzählbar viele Elemente hinzugefügt werden müssen, bis man die vollständige Ordnung der reellen Zahlen erhält. Andererseits impliziert *vollständig* auch nicht *dicht*, da die lineare Ordnung  $\langle \mathbb{N}, < \rangle$  zwar vollständig, aber nicht dicht ist.

### Filter, Ultrafilter

Ist  $M$  eine Menge und  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$  ein Mengensystem, dann heißt  $\mathcal{F}$  ein *Filter* auf  $M$ , falls für alle  $X, Y \subseteq M$  gilt:

- (i)  $\emptyset \notin \mathcal{F}, M \in \mathcal{F}$ ,
- (ii)  $X \in \mathcal{F}$  und  $Y \supseteq X$  folgt  $Y \in \mathcal{F}$ ,
- (iii)  $X, Y \in \mathcal{F}$  folgt  $X \cap Y \in \mathcal{F}$ .

Gilt zusätzlich:

- (iv)  $X \in \mathcal{F}$  oder  $M - X \in \mathcal{F}$ ,

dann heißt  $\mathcal{F}$  ein *Ultrafilter* auf  $M$ . Deiser (2010: 318) motiviert diese Definition mit der Suche nach einem geeigneten Begriff für die Frage, wann eine Teilmenge  $X$  zu einer vorgegebenen Menge  $M$  groß ist. Die Eigenschaften (i)-(iii) folgen der Intuition, denn  $\emptyset$  ist sicher die kleinste Teilmenge und deshalb nicht groß, während  $M$  in Bezug auf  $M$  die größte Teilmenge darstellt. Hat man eine Teilmenge  $X$  für groß befunden, so sollten auch alle Obermengen dazu groß sein und sind schließlich  $X$  und  $Y$  groß, dann ist der Schnitt der beiden Mengen noch immer groß. Das Mengensystem  $\mathcal{F}$  liefert ein rein extensionales Abbild dieser Vorstellung von groß und sammelt alle in einem gewissen Sinn großen Teilmengen ein. Die Bezeichnung *Filter* motiviert sich durch eine Ähnlichkeit dieser so definierten Struktur und einigen Gegenständen, die allgemeinsprachlich als Filter bezeichnet werden. Diese haben die Funktion, Dinge von einander zu trennen und dann auszusondern, z. B. ein Trinkwasserfilter, der unerwünschte Stoffe aus dem Wasser entfernt, oder ein optischer Filter, der Licht mit bestimmten unerwünschten Eigenschaften absorbiert. Die oben definierte Struktur filtert in diesem Sinne die Potenzmenge einer Menge  $M$ , indem sie Teilmengen ab einer bestimmten Größe zurückhält und nur zu kleine Mengen passieren lässt. Ein Ultrafilter filtert zudem für alle Teilmengen  $X$  von  $M$  entweder  $X$  oder das Komplement  $M - X$ .

Ein konkretes Beispiel für einen Filter  $\mathcal{F}$  auf einer unendlichen Menge  $M$  ist der Fréchet-Filter:

$$\mathcal{F}_{Fin} = \{X \subseteq M \mid M - X \text{ ist endlich}\}$$

Er sammelt alle Mengen, deren relatives Komplement in  $M$  endlich ist, ein bzw. sortiert alle Mengen aus der Potenzmenge von  $M$  aus, die nach Subtraktion weiterhin eine unendliche Menge hinterlassen. Dieser Filter ist für bestimmte Mengen kein Ultrafilter: So gehören beispielsweise für die Menge der natürlichen Zahlen weder  $2\mathbb{N}$  noch  $\mathbb{N} - 2\mathbb{N}$  zu  $\mathcal{F}_{Fin}$ , da sowohl

die geraden natürlichen Zahlen als auch ihr Komplement unendlich sind.

Dual dazu können die Begriffe *Ideal* und *Primideal* in der Mengenlehre definiert werden, die dann die Vorstellung „kleiner Teilmengen“ extensional fassen.<sup>1</sup>

### **Kette**

Das deutsche Wort *Kette* mit der sprachgeschichtlich ursprünglichen Bedeutung ‚(Metall)band aus ineinander greifenden Einzelgliedern‘ wird in der Alltagssprache mit der Bedeutung ‚zusammenhängende Folge von Dingen‘ vielfach übertragen gebraucht (vgl. Duden. Herkunftswörterbuch: 403). Eine jüngere Übertragung hat so zu der weiteren Bedeutung ‚Gesamtheit der gleichartigen Betriebe eines Handelsunternehmens‘ geführt. Dies zeigt, wie aktiv dieses Wort metaphorisch genutzt wird. Wird also etwas als *Kette* bezeichnet, muss meistens nicht mehr lange nach einer geeigneten Interpretation gesucht werden, da man auf eine Geschichte etablierter Übertragungen zurückgreifen kann. Ebenso virulent zeigt sich das Lexem im mathematischen Register. Wir greifen eine Struktur der Mengenlehre heraus, die durch das Wort *Kette* bezeichnet werden kann.

Ein Mengensystem  $K$  heißt Kette, falls gilt:

$$\text{Für alle } X, Y \in K \text{ gilt } X \subseteq Y \text{ oder } Y \subseteq X.$$

Wie üblich ist diese Definition extensional; die einzelnen Kettenglieder sind nur durch die Teilmengenrelation miteinander verzahnt. Die Definition schließt auch automatisch die leere Menge als Kette mit ein. Genutzt

---

<sup>1</sup> Zur Geschichte des Idealbegriffs siehe Becker (2006: 171ff).



wird der Begriff u. a. für Zermelosysteme:

Eine nichtleere Menge  $\mathcal{L}$  heißt ein *Zermelosystem*, falls gilt:

Ist  $T \subseteq \mathcal{L}$  eine nichtleere Kette, so ist  $\bigcup T \in \mathcal{L}$ .

In Zermelosystemen wird also jede Kette durch ein Element des Systems fortgesetzt. Ein wichtiger Satz über Zermelosysteme sagt dann, dass jedes Zermelosystem ein Ziel hat, d. h. es existiert ein  $X \in \mathcal{L}$  und es gibt kein  $Y \in \mathcal{L}$  mit  $X \subset Y$ . Auch in anderen Maximalitätsprinzipien wie dem Zornschen Lemma oder dem Hausdorffschen Maximalitätsprinzip findet der Kettenbegriff Anwendung. In dieser Weise sind Ketten Mengen versehen mit einer Ordnung, in der sich je zwei Elemente vergleichen lassen.



## 10 Rück- und Ausblick

Angetreten war diese Arbeit mit dem Ziel, sich über einige Aspekte, wie Metaphern in der Mathematik funktionieren, weitere Einsichten zu verschaffen, als dies bisher in der Forschung gelungen war. Dazu wurde im Theorieteil zu Beginn versucht, das verschiedene Medien überspannende semiotische System der Mathematik für die Metaphernanalyse geeignet aufzubereiten, indem das Konzept der sogenannten „Sprache“ der Mathematik genauer expliziert wurde. Auf dieser Basis fiel die Wahl der Methode für die Metaphernanalyse auf die kognitive Metapherntheorie mit dem Hauptargument, dass die intermedialen Abhängigkeiten nach einem übergeordneten Standpunkt verlangen würden. Im Anschluss an die Darstellung des forschungsgeschichtlichen Werdegangs der kognitiven Metapherntheorie, ihrer metapherntheoretischen Vorläufer und ihrer wesentlichen Thesen wurde jedoch nicht mit kritischen Kommentaren gespart. Diese Kritik vertiefte sich im Praxisteil, der die Grenzen einer die konkreten Zeichen vernachlässigenden Metapherntheorie weiter aufzeigte.

Zum Abschluss soll nun Bilanz gezogen werden, die sich analog zum Aufbau der gesamten Arbeit verhalten wird: Ein Teil wird sich den Ergebnissen aus den Überlegungen zur Metapherntheorie widmen und ein Teil den Ergebnissen aus der Analyse von Metaphern in der Mathematik. Dazu wird eine Auswahl der wesentlichen Ergebnisse noch einmal kurz präsentiert und nach ihrer Relevanz in Bezug auf interessante metapherntheoretische Aspekte aus Sprachwissenschaft und Sprachphilosophie befragt.

Zunächst soll noch einmal der Grundansatz der Untersuchung dargestellt und die Argumentation, mit welchen allgemeinen Schwierigkeiten eine Me-

taphernanalyse in der Mathematik zu kämpfen hat und warum daraus gefolgert wurde, dass ein übersprachlicher Metaphernbegriff benötigt wird, herausgearbeitet werden. Anschließend werden die zentralen Ergebnisse sowohl der metaphorntheoretischen Überlegungen als auch der Untersuchung von Metaphern in der Mengenlehre dargelegt. Insbesondere das traditionell schwierige Verhältnis von Analogie und Metapher soll eine weitere Reflexion erfahren.

Von sprachwissenschaftlicher Bedeutung ist darüber hinaus die Frage, ob man aus den vielfach wiederholten Einwänden gegen die kognitive Metapherntheorie schlussendlich folgern dürfe, dass die Zeit (wieder) reif für einen genuin sprachlichen Metaphernbegriff sei. Die Antwort hängt letztendlich von der konkreten Ausgestaltung dieser Alternative ab: Während eine Orientierung am Gebrauch einzelner sprachlicher Zeichen nicht ausreichend ist, erscheint ein medialer Metaphernbegriff geeignet, das Kognitive und das Semiotische zusammenzuführen.

Schließen wird die Arbeit mit dem unterschätzten und theoretischen Problem der Identifikation von Metaphern, das Sprachbenutzern weniger Kopfzerbrechen zu bereiten scheint als der wissenschaftlichen Debatte. Daran lassen sich noch einmal wesentliche Diskussionsstränge der gegenwärtigen Forschung aufzeigen, deren Verknüpfung sich eine ganzheitliche Metapherntheorie, wie sie der mediale Metaphernbegriff anbietet, zur Aufgabe machen muss.

### **10.1 Der Ausgangspunkt der Arbeit**

Grundlegend für den Gang der Untersuchung war die Bestimmung der mathematischen „Sprache“ als ein hybrides Gebilde, bestehend aus einem Ausschnitt einer natürlichen Sprache – dem Register – und aus einer formalen Sprache – der Notation. Während das Register weiter nach dem ver-

wendeten Medium in einen schriftlichen und mündlichen Zweig unterschieden werden kann, ist die mathematische Notation stets schriftlich fixiert, insofern wäre es in Bezug auf die Notation berechtigt, statt von der mathematischen „Sprache“, von der mathematischen „Schrift“ zu sprechen. Mit dieser Zweiteilung war kein Anspruch auf eine strenge Dichotomie verbunden: Andere geläufige Formen mathematischer Darstellungen wie geometrische Konstruktionen, Diagramme oder Graphen sollten mit dieser Begriffsbestimmung zwar nicht völlig ausgeschlossen werden, wurden jedoch marginalisiert. Dies entspricht weitgehend der Entwicklung in der mathematischen Gemeinschaft, Beweise nur dann zu akzeptieren, wenn sie als Ketten logisch gültiger Schlüsse in Form notationeller oder sprachlicher Zeichen vorliegen. Die anderen Darstellungsformen werden lediglich als Hilfsmittel eingesetzt, denen noch für die Genese mathematischer Beweise und die didaktische Vermittlung eine Rolle zugestanden werden kann, die aber nur dann für die Geltung eines Beweises relevant sind, wenn sich ihr „Inhalt“ in die Notation übertragen lässt. Das Verhältnis von potentiell internationaler Notation und einzelsprachlichem Register folgt dabei keiner Eins-zu-eins-Entsprechung: Nicht alle notationellen Zeichen haben eine Entsprechung im Register. Dennoch gibt es Ähnlichkeiten etwa im syntaktischen Aufbau von Zeichenketten zwischen der Notation und den Sprachen vorrangig des westlichen Kulturkreises. Für die Untersuchung von Metaphern in diesem Bereich ergab sich somit, dass es notwendig ist, sowohl die Notation als auch das Register des Deutschen zu betrachten, da eine Einschränkung auf natürliche Sprachen nicht sinnvoll mit dem Anspruch, die Mathematik als Ganzes zu untersuchen, vereinbar ist.

Obwohl die Unterscheidung zwischen Register und Notation vielleicht trivial anmutet, scheint ihr dennoch nicht immer die notwendige Beachtung geschenkt zu werden, insbesondere dann, wenn die medialen Repräsentationen als etwas Externes betrachtet werden, die den internen kognitiven Ein-

heiten nachgeordnet und von ihnen abhängig sind. In diesem Falle werden Zeichen als einem Sinn gegenüber neutrale Mittel der Übertragung kognitiver Inhalte verstanden. Sie sind also lediglich Etiketten für vorsemiotisch erzeugte Gedankeninhalte. Die Fähigkeit von materiellen und damit wahrnehmbaren Zeichen, kognitive Prozesse im Sinne einer operativen Schrift zu externalisieren und damit teilweise sogar erst zu ermöglichen, bleibt dann im Verborgenen. Zum Beispiel war die Entwicklung der Mathematik stets eng mit der Entwicklung ihrer „Schrift“ verbunden. Mit der von Georg Klaus geborgten Unterscheidung zwischen einem eidetischen und einem operativen Zeichensinn wurde versucht, dieser Einsicht nachzukommen. So verstanden ist das Besondere an der mathematischen Notation gegenüber dem Register, dass der operative Sinn dem eidetischen vorausgehen und dass das (mathematische) Denken über den unmittelbaren Körper hinaus fortgesetzt und in Formmanipulationen umgesetzt werden kann. Hier zeigte sich einerseits nochmals die Wichtigkeit, beide Zeichensysteme in den Blick zu nehmen, und zugleich wurde deutlich, dass sich umgekehrt Notation und Register nicht von den kognitiven Prozessen trennen lassen. Die kontinuierliche Umsetzung von Denken in Sprache und umgekehrt wurde bereits für die Metapher konstatiert (vgl. Kohl 2007a: 122ff) und dieses gilt für Metaphern in der Mathematik in mehrfacher Weise. Eine umfassende Untersuchung von Metaphern in der Mathematik müsse daher, so wurde argumentiert, stets beide Aspekte und damit kognitive Metaphern zumindest mit berücksichtigen.

Um eine zweite Argumentationslinie, warum ein kognitiver Metaphernbegriff unverzichtbar für diese Untersuchung war, in Stellung zu bringen, wurde genauer gefragt, wie das Verhältnis von sprachlichen Metaphern und Notation einzuschätzen wäre, wenn man von einem rein sprachlichen Metaphernbegriff ausginge. Wir vertraten dabei die Überzeugung, dass man, falls ein Metaphernbegriff zum Einsatz käme, der hauptsächlich auf eine

besondere Art von Zeichenverwendung abzielte, in heikle Gewässer geriete: Mit der Etablierung der axiomatischen Mengenlehre gilt es empirisch als gesichert, dass auf der Ebene der Notation jeder mathematische Ausdruck in die Sprache der Mengenlehre, also eine Prädikatenlogik der ersten Stufe über den Axiomen von ZFC, übersetzbar ist. Diese formale Logik kennt ihrer Natur nach jedoch ausschließlich Extensionen und keine Intensionen und kann somit auch keine metaphorischen Ausdrücke kennen. Wenn nun aber metaphorische Ausdrücke des Registers erst in die Notation und anschließend in die metaphernfreie Prädikatenlogik „übersetzt“ werden könnten, dann hieße dies, dass alle mathematischen Metaphern letztendlich vollständig eliminierbar wären. Diese Folgerung wäre aber fundamentalerweise unverträglich mit der Notwendigkeits-These<sup>1</sup>, wonach zumindest einige Metaphern unverzichtbar seien, und zugleich unverträglich mit der damit verbundenen Ansicht, dass Metaphern nicht ohne erhebliche Sinn- oder Wirkungsverluste wörtlich paraphrasiert werden können. Dies wäre aber mit der Übersetzung in die Sprache der Mengenlehre der Fall und das nicht nur bei einzelnen, vielleicht wirklich entbehrlichen Metaphern, sondern bei ausnahmslos allen Metaphern. Daraus wurde geschlossen, dass ein ausschließlich sprachlicher Metaphernbegriff für die Mathematik nicht zielführend ist.

Zu einer vergleichbaren Einschätzung kommt auch der Sprachphilosoph Richard Moran, der aus der Gegenüberstellung von Metaphern und Phrasologismen, die sich im Kern durch wörtliche Paraphrasierbarkeit und Wort-für-Wort-Übersetzbarkeit in andere Sprachen unterscheiden, folgert:

In so far as metaphor involves comparison of things and ideas with other things and ideas, it is something less specifically languagebound than is idiom. (Moran 1997: 251)

Wie man sich diese weniger intensiv ausgeprägte Sprachgebundenheit vor-

---

<sup>1</sup> Siehe dazu Kapitel 3.5.2

stellen muss, bleibt bei Moran jedoch noch weitgehend unausgesprochen. Mit der Verwendung der kognitiven Metaphertheorie sollte genau dieser Aspekt, dass ein rein sprachlicher Metaphernbegriff nicht ausreichend erscheint und dass anstatt seiner ein übersprachlicher Metaphernbegriff zu favorisieren ist, berücksichtigt werden. Auf der anderen Seite heißt „less specifically languagebound“ jedoch nicht, dass Metaphern völlig sprachunabhängig zu konzipieren wären, sondern nur graduell weniger stark an eine Sprache gebunden sind als andere Phänomene. Dies wiederum wurde und wird von der kognitiven Metaphertheorie nicht ausreichend bedacht, wofür sie zu kritisieren und weshalb sie zu modifizieren ist. Dieser Einwand hat sich schlussendlich jedoch so gewichtig manifestiert, dass eine einfache Modifizierung jetzt kaum noch möglich erscheint und eine andere Metaphertheorie angezeigt ist, deren Silhouette durch einen medialen Metaphernbegriff umrissen wird.

### 10.2 Ergebnisse im Überblick

Nach der Einführung eines um formale Sprachen angereicherten Sprachbegriffs wurden von der aristotelischen Metaphertheorie ausgehend die Grundlagen der kognitiven Metaphertheorie ausführlich dargestellt, anderen geläufigen Positionen gegenübergestellt und kritisch hinterfragt. Unter anderem konnte dabei erneut bestätigt werden, dass die kognitive Metaphertheorie entgegen ihrem Selbstverständnis nicht radikal mit der Geschichte der Metaphertheorien bricht, sondern viele Gedanken, die teilweise letztendlich bis zu Aristoteles zurückreichen, aufnimmt. Eine wirkliche Neuerung dagegen ist die auch explizit als solche propagierte Verschiebung des Metaphernbegriffs von der linguistischen auf die epistemologische Ebene, die eine neue Dimension der Systematizität metaphorischer Projektionen aufschließt. Auf diese Weise gelingt es der kognitiven Meta-



pherntheorie, den wiederum schon bei Aristoteles erwähnten Punkt, dass alle Menschen Metaphern gebrauchen, zwar nicht neu zu entdecken, aber eindrucksvoll zu bestätigen und eine im Rahmen ihrer Theorie stimmige Erklärung für diesen Befund anzubieten.

Aus der Menge allgemeiner kritischer Bemerkungen seien zunächst noch einmal der unbedingte Wille zur Selbstdarstellung durch Abgrenzung, der beispielsweise durch die Umkehrung bewährter Terminologien stellenweise groteske Züge annimmt, und die Ausgrenzung der Analogie, die man durch Schema-Theorie und Invarianz-These zu ersetzen versucht, hervorgehoben. Die unnachgiebige Analogieaversion kann nicht überzeugen, da sowohl die Vorstellungs-Schemata wie auch die auf ihnen errichtete topologische Logik zu vage und uneinheitlich bleiben, um eine wirkliche Alternative zum etablierten Analogiebegriff zu bieten. Am Beispiel der Mengenlehre waren weder eine Behälter- noch eine als Alternative probierte Sammlungs-Metaphorik in Verbindung mit der Enthaltenseins-Relation in der Lage, einen ausreichend großen Teil der Struktur des Mengenkonzepts plausibel zu erklären. Beide sind zwar ohne Zweifel als didaktische Instrumente geeignet, um bestimmte Eigenschaften von Mengen oder Operationen auf Mengen zu veranschaulichen, darüber hinaus müssen sie jedoch als nicht theoriekreativ für die Mengenlehre eingestuft werden. Auch die Annahme einer internen Logik der Vorstellungs-Schemata ist zumindest für das Pfad- und das Behälter-Schema äußerst zweifelhaft und bedarf dringend weiterer Forschungsarbeit, wenn man auf sie nicht gänzlich verzichten möchte. Für die Mengenlehre jedenfalls mussten wir sie entschieden zurückweisen, da sie, wie am Transitivitätsgesetz ausführlich gezeigt wurde, eindeutig falsche Inferenzen erzeugen würden. Als grundlegendes Problem erwies sich dabei das Extensionalitätsprinzip der Mengenlehre, das mittels Behälter-Metaphorik kaum erfassbar war. Deshalb musste ebenfalls die Grundannahme der innerhalb der kognitiven Metapherntheorie vertretenen Spielart

des *embodiments*, dass abstrakte Konzepte aus konkreten, erfahrungsnahe Konzepten konstruiert werden, für den Bereich der Mengenlehre in seiner absoluten Form verworfen werden. Auch aus diesen Gründen wurde versucht, die kognitive Metapherntheorie wieder näher an den verschmähten Analogiebegriff heranzuführen und die direkte Nähe zum Modellbegriff genauer auszuloten.

Ferner ist immer die Rückbindung der Metaphern an die Zeichensysteme zu bedenken, in denen sie konstituiert, durch stetiges Verarbeiten konventionalisiert und selbstverständlich auch verändert werden. Hier konnte insbesondere am Beispiel des Kuratowski-Paares gezeigt werden, dass eine allzu leichtfertige Setzung konzeptueller Strukturen in Aporien mündet, die durch Reflexion über die effektive Verwendung der Notation vermieden werden können. Viele der von Lakoff und Núñez ermittelten konzeptuellen Metaphern konnten bei genauer Betrachtung nicht nachvollzogen werden. So fehlten der angeblichen Metapher des geordneten Paares fast alle relevanten metaphorntypischen Eigenschaften, weshalb wir vorgeschlagen haben, sie als Analogie zu klassifizieren, die nicht als Metapher verwendet wird und deren Funktion nicht darin besteht, etwas als etwas anderes verstehbar zu machen, sondern eine Möglichkeit unter anderen ist, das geordnete Paar als Menge darzustellen, die sich allein durch ihre Prägnanz in der Notation auszeichnet.

Anders liegt der Fall bei der zentralen Idee der Mengenlehre, wie sich beliebige Mengen durch Paarbildung untereinander vergleichen lassen: Für „Cantors Metapher“ gelang es plausibel zu machen, dass dort anstelle einer konzeptuellen Metapher eher eine konzeptuelle Metonymie vorliegt, da man sich innerhalb ein und derselben konzeptuellen Domäne bewegt.<sup>2</sup> Einerseits fand so die anfängliche Skepsis am Anspruch von Lakoff/Núñez,

---

<sup>2</sup> Dabei gilt es jedoch zu bedenken, dass der Begriff der konzeptuellen Metonymie noch umstrittener ist als der Begriff der konzeptuellen Metapher und in der aktuellen Forschung ganz unterschiedlich verwendet wird.

endlich den „wahren“ Kern der Mathematik ans Licht gebracht zu haben, weitere Bestätigung. Die konzeptuelle Metapher allein taugt nicht als monolithische Letztbegründung aller abstrakten Denkvorgänge. Ohne auch andere Prozesse wie Analogie oder Metonymie wieder mit zu berücksichtigen, droht das Gebäude der kognitiven Metaphertheorie unter seinem eigenen Gewicht einzustürzen. Andererseits bekräftigt dieses Resultat das Anliegen einer Richtung innerhalb der gegenwärtigen Forschung des kognitiven Paradigmas, der Metonymie wieder mehr Gewicht gegenüber ihrer großen Schwester, der Metapher, einzuräumen.

Gegenüber diesen Einschränkungen bleibt als erstes positives Resultat, dass Metaphern auch in der Mathematik ubiquitär sind, wobei sich zwei Typen unterscheiden lassen: Bei mathematischen Metaphern des ersten Typs liegt der Ursprungsbereich in der Alltagssprache bzw. in alltäglichen Konzepten und bei Typ-2-Metaphern liegt er ebenso wie der Zielbereich in der Mathematik. Während die Metaphern des ersten Typs auf konzeptueller Ebene die Rückbindung mathematischer Konzepte an alltägliche Vorstellungen ermöglichen und auf sprachlicher Ebene suggestive Bezeichnungen<sup>3</sup> zur Verfügung stellen, dienen Metaphern des zweiten Typs vornehmlich der systematischen Verbindung mathematischer Teilbereiche und bilden Analogien oder sogar volle Modelle aus. Am Beispiel der transfiniten Zahlen wurde eine Typ-2-Metapher, welche die natürlichen Zahlen mit ihrer üblichen Arithmetik und die Mengenlehre verbindet, genauer beschrieben. Auffällig war dabei, wie diese Analogie auch die Umkehrung erlaubt, nämlich die Integration der üblichen Zahlen in die Mengenlehre – ein Affront gegen die Unidirektionalitäts-These und ein Argument zu Gunsten des Analogiebegriffs. Ob sich die Unterscheidung in diese zwei Metapherntypen auch in anderen Wissenschaften treffen und dort sinnvoll einsetzen lässt, ist nach unserem Wissen noch nicht beantwortet. Es sei die Vermutung gestattet,

---

<sup>3</sup> Gemeint sind die als *singulär* bezeichneten Metaphern aus Kapitel 9.

dass die Verbindung von Bereichen innerhalb einer Disziplin als Eigenheit der Mathematik betrachtet werden darf.

### 10.3 Analogie und Metapher

Im Hinblick auf die von vielen Seiten festgestellte Systematizität von Metaphern, die an der Ordnung einzelner sprachlicher Metaphern zu größeren Komplexen und an in diese Komplexe integrierbaren metaphorischen Innovationen augenfällig wird, erscheint eine Renaissance des Analogiebegriffs zeitgemäß. Tatsächlich verwenden viele auf Abbildungen basierende Metaphertheorien direkt oder indirekt eine Spielart der Analogie und dennoch erfreut sich der Begriff selbst nur geringer Beliebtheit: Für die kognitive Metaphertheorie wurde dies bereits deutlich, doch auch jenseits dieses Paradigmas hält man einen Sicherheitsabstand ein. So vermeiden etwa Barnden/Wallington (2010: 86) gezielt den Begriff der Analogie und ersetzen ihn in der Hoffnung, Ansprüche im Sinne strenger bijektiver Zuordnungen zu vermeiden, durch das naheliegende „parallels“. Wir dagegen haben uns gerade wegen der assoziativen Nähe zum formalen Isomorphiebegriff, dessen heutige Heimat die Mathematik ist, zur Analogie bekannt. Jedoch hieß Nähe in diesem Zusammenhang nie, dass die Analogie als statische mathematische Relation zu verstehen sei, sondern immer wurde ihre mit einem Myzel vergleichbare Wandelbarkeit betont. Auch wurde wiederholt darauf hingewiesen, die Analogie als Ähnlichkeit von Relationen und nicht als Zuordnung von Objekten eines zu Objekten eines anderen Bereiches zu verstehen (vgl. Gentner 1999: 17ff). Die von Barnden/Wallington (2010) so hervorgehobenen Parallelen sind aber gerade nichts anderes als die Vergleiche zweier Bereiche hinsichtlich der dort bestehenden Relationen. Die Scheu vor dem Analogiebegriff ist daher unbegründet.

Des Weiteren bietet der Analogiebegriff forschungspraktische Vorzüge:

Man gewinnt Anschluss an die von Douglas Hofstadter etwa in Hofstadter (2001) vertretene und auch weithin popularisierte Ansicht von der Analogie als *engine* oder *core of cognition*, die er gerne immer wieder an mathematischen Beispielen verdeutlicht. Zweitens steht man in Übereinstimmung mit großen Teilen der didaktischen Literatur, die der Analogie regelmäßig einen enormen Stellenwert für das Mathematiklernen attestiert. Schließlich ist auch nicht zu vernachlässigen, den Bogen zu Aristoteles zu schlagen, welcher der Metapher von Anfang an die Analogie an die Seite gestellt hat.

Auf der anderen Seite ist Barnden/Wallington (2010) zuzustimmen, wenn sie vermuten, dass nicht alle metaphorischen Interpretationen durch Analogien zu erklären seien. Auch in dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, die Nähe von Metapher und Analogie nicht mit Identität zu verwechseln: So gibt es Analogien, die nicht als Metaphern verwendet werden, genauso wie es Metaphern gibt, die nicht auf Analogien basieren. Jedoch erscheint ihre Argumentation mit dem Ziel, die Analogie aus der Metaphernanalyse weitgehend herauszudrängen, als teilweise nicht stichhaltig. Das soll an einem von ihnen diskutierten Beispiel gezeigt werden, das entgegen der Intention gerade den Analogiebegriff stützt:

I tried not to run down Phil too much – I felt bad enough as it was, what with screwing his girlfriend and all. But it became unavoidable, because when Jackie expressed doubts about him, I had to nurture those doubts as if they were tiny, sickly kittens, until eventually they became sturdy, healthy grievances, with their own cat-flaps which allowed them to wander in and out of our conversation at will. (Barnden/Wallington 2010: 96)

Die Autoren stellen zunächst zu Recht fest, dass beim Verstehen der gesamten Äußerung nicht alle sprachlichen Ausdrücke, die Teile aus dem Herkunftsbereich bezeichnen, in Elemente des Zielbereiches umgesetzt werden. So haben etwa die Katzentüren kein Äquivalent im Zielbereich der Kommunikation, sondern heben ausschließlich eine Eigenschaft im Herkunftsbereich hervor, nämlich die Eigenwilligkeit und -ständigkeit von Katzen,

sich selbst Zutritt zu verschaffen. Dann behaupten sie allerdings, dass die Prädikation von Katzenhaftigkeit insgesamt unwichtig sei, außer um das allgemein bekannte Szenario von Füttern und Katzentüren zu evozieren (vgl. Barnden/Wallington 2010: 97). Das kann aber nicht sein, denn sonst müsste jedes andere Tier ebenso gut sein, die gleiche Proposition zum Ausdruck zu bringen. Jedoch ist es in Blacks Begriffsverwendung ein assoziierter Gemeinplatz, dass es gerade Katzen sind, die sich in besonderem Maße eigenwillig verhalten und sich ihren Haltern nicht unterordnen. Dies ist nun gerade die wesentliche Relation, auf der die Analogie gründet und die ohne das Katzen-Szenario nicht zustande käme. Sie lässt sich sogar klassisch-aristotelisch vierstellig ausdrücken: Katzen verhalten sich zu ihren Haltern wie Vorurteile zu den Personen, die sie haben – die Ersteren lassen sich durch die Zweiteren nicht kontrollieren. Dass den Katzentüren nichts im Zielbereich entspricht, ist kein Einwand gegen parallele Strukturen, da es bei der Analogie vorrangig um die Ähnlichkeit von Relationen geht, die hier gegeben ist. Von diesem unglücklichen Beispiel abgesehen liegen die Autoren richtig, wenn sie die Reichweite der Analogie bei der Metaphernanalyse einzuschränken versuchen. So hatten wir vorgeschlagen, die Übertragung einfacher Eigenschaften nicht zur Analogie zu rechnen. Ein alternatives Verfahren an der Basis der Metapher könnte dabei etwa die Exemplifikation nach Stern (2000: 153ff) sein, durch die im Zielbereich eine Eigenschaft hervorgehoben wird, weil diese charakteristisch für ein Objekt des Herkunftsbereiches ist. Für das Verständnis solcher Metaphern ist es nebensächlich, ob die beiden Bereiche auch durch eine Analogie verbunden sind.

So bleibt festzuhalten, dass zumindest manche Metaphern mithilfe von Analogien analysiert werden können, indem sie entweder leicht in vorhandene Analogien eingeordnet werden oder eine bestehende Analogie um bisher ungenutzte Teile erweitert wird. Gänzlich neue Metaphern können sogar

zu Kristallisationskeimen für neue Analogien werden. Insbesondere für die Mathematik hat sich dieser theoretische Ansatz als fruchtbar erwiesen. Damit ist freilich noch überhaupt nichts über die psychische Verarbeitung von Metaphern gesagt. Hier konnten etwa Gentner/Bowdle/Wolff u. a. (2001) zeigen, dass der Verarbeitungsmodus u. a. vom Konventionalisierungsgrad einer Metapher abhängig ist: Je stärker eine Metapher konventionalisiert ist, desto größer sei die Wahrscheinlichkeit, dass sie durch einfaches Abrufen gespeicherter Bedeutungen interpretiert werde, ohne einen Bereichswechsel vollziehen zu müssen. Erst bei neuen oder innovativen Metaphern manifestiere sich die Analogie meist auch psychisch, indem die zum Verständnis notwendigen Inferenzen durch die Verbindung zweier mentaler Bereiche erzeugt werden müssen.

Es bleibt, einen letzten Vorzug des Analogiebegriffs zu wiederholen, der von manchen womöglich eher als Manko empfunden wird: seine Offenheit für symmetrische Übertragungen, also Bidirektionalität. Auch wenn bereits die Metaphernautorität Black ([1954] 1996) den Gedanken diskutiert, dass durch die Metapher *der Mensch ist ein Wolf* nicht nur dem Menschen typische mit Wölfen assoziierte Eigenschaften zugesprochen werden, sondern auch umgekehrt der Wolf menschlicher werde, bleibt es doch weitgehend Konsens, dass die Metapher im Standardfall einen klar erkennbaren Herkunfts- und einen Zielbereich habe. Übertragungen fänden allein vom Herkunfts- in den Zielbereich und nicht umgekehrt oder allenfalls in sehr seltenen Fällen statt. Als wesentlich für die Identifizierung, welcher Bereich welcher ist, weist Forceville den Kontext aus, dessen Relevanz für die Metapherninterpretation seit je betont worden ist:

In a metaphor, contextual factors of various kinds determine unequivocally what is the tenor and what is the vehicle of a metaphor. The relationship is asymmetrical, in that the transfer of features is from vehicle to tenor, and not vice versa. (Forceville 1995: 705)

Gleichzeitig macht Forceville jedoch Grenzfälle aus, die diesem Standardfall zuwiderlaufen. In Anlehnung an eines seiner Beispiele und in Ergänzung der in Kapitel 3.5.6 und im Zuge der Analyse von Metaphern in der Mengenlehre erwähnten Beispiele sei abschließend eine visuelle Metapher erwähnt, welche eine mögliche Bidirektionalität zeigt. Im Zuge der Proteste in Griechenland gegen die Maßnahmen zur Krisenbewältigung wurde Angela Merkel auf Plakaten mit Chaplinbart karikiert. Damit wurde zunächst eine Analogie zwischen Merkel und Hitler gestiftet, die beide metonymisch für die Regierungen und deren Handlungen stehen, denen sie vorstanden. Ziel der Protestierenden war es, Merkels Außenpolitik als Besatzungspolitik darzustellen und ihr gegenüber eine emotional äußerst negative Haltung aufzubauen, indem sie die Rezipienten veranlassten, ihr Wissen über und ihre Emotionen in Bezug auf Hitler auf Merkel zu übertragen. Eine häufig vorgebrachte Kritik, warum diese und andere Gleichsetzungen mit Hitler unangebracht seien, lautet nun, dass sie die Verbrechen des Nationalsozialismus verharmlosten. Dieser Einwand sollte aber bei Metaphern gar nicht auftreten, da der Herkunftsbereich nur Eigenschaften und Bewertungen ex-jedoch nicht importiert – Veränderungen sollten also nur den Zielbereich betreffen. Dass in diesem Fall aber eine Verharmlosung empfunden wird, legt doch nahe, dass auch der Herkunftsbereich Veränderungen, hier eine teilweise Neubewertung, erfahren kann.

Derartige „Sonderfälle“ lassen sich elegant erklären, wenn man annimmt, dass zumindest einigen Metaphern Analogien zugrunde liegen, die weniger sprachabhängig und grundsätzlich symmetrisch sind. Die an einer konkreten sprachlichen Metapher wahrgenommene Richtung ist dann das Ergebnis der sprachlichen Nutzung dieser Analogie als Metapher, die u. a. durch die syntaktische Struktur von Subjekt und Prädikat, die Intentionen des Sprechers oder den Kontext von der unmittelbaren sprachlichen Umgebung bis hin zum enzyklopädischem Weltwissen einen Herkunfts- und einen Ziel-



bereich ausweist. So würde klar, warum im Nachhinein als „Nebeneffekt“ auch Rückübertragungen möglich sind.

Für die Mathematik wurde gerade die Bidirektionalität als ein wesentliches Merkmal der Typ-2-Metaphern hervorgehoben, um zwischen strukturähnlichen Bereichen innerhalb der Mathematik hin- und herzuspringen. Am Beispiel der transfiniten Kardinal- bzw. Ordinalzahlen konnte gezeigt werden, wie einerseits die bekannten endlichen Zahlen als Herkunftsreich genutzt werden, um Rechenoperationen auf den transfiniten Zahlen zu erklären, wie man aber auch andererseits neue Erkenntnisse über das Endliche mit Methoden aus dem Transfiniten gewinnen kann.

## 10.4 Metaphern als wahrnehmbare Zeichenphänomene?

Nachdem die Irrwege der kognitiven Metaphertheorie, sowohl diejenigen, die sie mit ihrem allgemeinen Forschungsprogramm beschreitet, als auch diejenigen, die sich speziell am Gegenstand der Mathematik zeigen, hinlänglich diskutiert wurden, steht abschließend die Frage im Raum, welche Konsequenzen nun die Metaphertheorie daraus zu ziehen habe. Zwei der möglichen Wege könnten sein, sich von der kognitiven Metaphertheorie in Gänze abzuwenden und die Metapher (wieder) als rein sprachliches Phänomen aufzufassen oder die Erkenntnisse der kognitiven Metaphertheorie in eine Theorie zu integrieren, die der Metapher neben ihrer kognitiven auch eine sprachspezifische Dimension zuschreibt. Die erste Möglichkeit besticht auf den ersten Blick durch drei Vorzüge: Zum Ersten vermeidet der flache, sich allein auf die sprachliche Ebene der Zeichenverwendung beschränkende Metaphernbegriff die in Kapitel 3.7 behandelten Gefahren einer Ebenenverdopplung, zweitens schließt man sich der kulturwissenschaftlichen Debatte um Performativität und Aisthesis von Zeichen an und letztendlich begibt man sich wieder auf einen traditionsmächtigen Strang der Metaphertheo-

rie, der wiederum mit Aristoteles Bestimmung der Metapher als Übertragung eines Wortes begann. Dass sich diese Perspektive jedoch nicht als Alternative profilieren kann, soll nun gezeigt werden, um im Anschluss die demonstrierten Defizite mit einem medialen Metaphernbegriff aufzufangen, der Kognition und Sprache in einem holistischen Ansatz zusammenzuführen versucht.

Eine geeignete Arbeitsdefinition der Metapher als rein sprachliches Phänomen, mit der sich im Folgenden auseinandergesetzt werden kann, soll in zwei Schritten entwickelt werden.

Eine Metapher ist ein spezifischer Zeichengebrauch.

Obwohl hier bezüglich des Metaphorischen nicht-sprachliche Zeichen nicht ausgeschlossen sind, beschränkt sich die weitere Diskussion ausschließlich auf sprachliche Zeichen, da sie als der prototypische Bereich der Metaphern gelten dürften. Ferner beachte man, dass keine konkrete sprachliche Einheit wie das Wort oder der Satz in den Blick genommen wird und stattdessen allgemein vom Zeichen die Rede ist. Diese nur scheinbar vage Bestimmung ist notwendig, da Metaphern jede grammatische Einheit vom Wort bis zum Text betreffen können. Auch der Extremfall diskontinuierlicher Metaphern, die mehrere Konstituenten oder Äußerungen übergreifend auftreten, wird damit berücksichtigt. Die geforderte Wahrnehmbarkeit des metaphorischen Zeichengebrauchs impliziert bereits, dass man es mit einem Phänomen konkreter Zeichenverwendung zu tun hat. Damit wird auch deutlich, dass die an einer Kommunikationssituation beteiligten Personen, ihr sprachliches und enzyklopädisches Wissen sowie der die Metapher umgebende Ko- und Kontext für die Metaphernwahrnehmung und -interpretation entscheidend sind (vgl. Burkhardt 1987: 46f). Expliziert werden muss nun allerdings, worin der spezifische metaphorische Zeichengebrauch bestehen soll, was ihn ausmacht, woran man ihn erkennen kann und welche Sinngebungsverfahren die Kommunizierenden einsetzen. Hierfür sei folgende Variante

vorgeschlagen, die von den Begriffen der Störung und Transparenz, wie sie in Jäger (2004) entwickelt werden, Gebrauch macht und die gleichsam Weinrichs Definition der Metapher „als ein Wort in einem konterdeterminierenden Kontext“ (Weinrich 1967: 6) verallgemeinert:

Eine Metapher ist ein spezifischer Zeichengebrauch, bei dem die Rede eine Störung erfährt, welche die Aufmerksamkeit auf das Medium (der Sprache) lenkt und die durch rekursive Transkription solange zu bearbeiten ist, bis wieder Transparenz hergestellt ist.

Störung und Transparenz sind im Sinne Jägers „die beiden Aggregatzustände, die alle Prozesse medialer Sinn-Inszenierung durchlaufen“ (Jäger 2004: 59). Ein kommunikativer Verlauf befindet sich entweder im Zustand der Transparenz, „in dem die jeweils verwendeten sprachlichen (symbolischen) Mittel als solche nicht thematisch sind“, oder im Zustand der Störung „im Interesse der Stillstellung kommunizierter Zeichensequenzen und ihrer mono- oder interaktiven Bearbeitung auf der semantischen Aushandlungsbühne“ (ebd.: 60). Anders formuliert: Befindet sich Kommunikation im Modus der Transparenz, dann geben die Signifikanten den Blick ungehindert auf die Signifikate frei, sie sind also transparent in dem Sinne, dass sie ein „Hindurchschauen“ erlauben, bei dem sie selbst aber unsichtbar bleiben. Ein transparentes Medium „vermittelt“ im etymologischen Sinn des Wortes seine Botschaft, ohne selbst Einfluss zu nehmen oder ins Bewusstsein zu treten. Liegt jedoch eine Störung vor, wird das Medium opak für die Botschaft und die Signifikanten treten deutlich ins Bewusstsein. D. h. sie verlangen von den am Gespräch<sup>4</sup> Teilnehmenden, ihre eigene Rede und die Rede ihres Gegenüber solange einer Re-Lektüre zu unterziehen

---

<sup>4</sup> Auch wenn der Begriff *Transkription* anderes vermuten lässt, geht es Jäger im Gegensatz zu Derrida, an den er sich anlehnt, zuallererst um gesprochene Sprache, so dass „Skriptualität als das Ergebnis einer ursprünglichen ›rekursiven Transkriptivität‹ nonliteraler Sprachlichkeit“ (Jäger 2004: 40) gedeutet wird.

und mittels „*Paraphrase, Erläuterung* und *Explikation* zu thematisieren und zu erschließen“ (Jäger 2009: 9), bis sie sich auf einen sprachlichen Sinn verständigt haben und das Medium wieder in den Modus der Transparenz wechselt. Die beiden Zustände sind somit komplementär konzipiert: Transparenz heißt auch immer zugleich Ungestörtheit und Störung ist umgekehrt Unterbrechung von Transparenz. Man darf Transparenz jedoch nicht als Normalfall und Störung als zu behebenden Betriebsunfall missverstehen, sonst liefe man Gefahr, die Metapher zum Ausnahme- und Abweichungsphänomen zurückzustufen, im Extremfall sogar zur Perversion eines sonst reibungslosen Sprachablaufs zu erklären.

Geht man weiter davon aus, dass das, was Sprache als Medium übermittelt, nichts außerhalb ihr Liegendes, sondern „immer nur Eigensinn“ (Jäger 2005: 53) ist, dann wird die Störung sogar zum ausgezeichneten Ort der Sinnerzeugung. Die Metapher scheint nun in besonderem Maße in diesen Rahmen zu passen, da auch ihr – zumindest im Falle kreativer/innovativer Metaphorik – die Fähigkeit, neue Einsichten zu erzeugen, anstatt lediglich vorgeprägten Sinn zu übermitteln, zugesprochen wird.<sup>5</sup> Das Verfahren der Sinngenerierung ist die rekursive Transkription, die in die beiden Teilprozesse der „*autohermeneutischen Selbstlektüre*“ und der „*heterorhetorische[n]* Transkriptionen“ (ebd.: 55 u. 58) zerlegt werden kann, bei denen die Kommunizierenden ihre und die fremden Sprachprodukte ständig neu lesen. Mit dem Attribut *rekursiv* soll verdeutlicht werden, dass alle Sprach-

---

<sup>5</sup> Gerade die Metapher scheint in hervorragender Weise geeignet zu sein, den Gedanken der rekursiven Transkription zu exemplifizieren, wie folgende Textpassage zeigt, die ohne weiteres auch von Metaphern handeln könnte: „Es sind aus prinzipiellen Gründen keine Sprachen denkbar, die zugleich als vollgültige natürliche Sprachen gelten und nicht über die Möglichkeit verfügen sollten, die sprachlichen Mittel, mit denen ihre Sprecher interagieren und durch die sie sich auf die Welt beziehen, jederzeit als solche Mittel zu *fokussieren*, zu *thematizieren* und sie im Interesse der Selbst- und Fremdverständigung in symbolisch-selbstreferentiellen Aktivitäten semantisch zu bearbeiten“ (Jäger 2005: 59). Da sich Metaphern in synchroner wie diachroner Hinsicht in besonderer Weise für „semantische Bearbeitungen“ eignen, lässt sich dies als weitere Bestätigung für die auf sprachliche Metaphern bezogene Notwendigkeits-These lesen.

produkte immer wieder dem gleichen Prozess unterworfen werden, aus dem sie entstanden sind. Die ständige Relektüre von Metaphern in verschiedenen Kontexten von verschiedenen Diskursteilnehmern kann dabei erklären, warum man mit einigen Metaphern „metaphorisch unbestimmt vieles“ (Searle 1982: 137) meinen kann.

Gegen diesen kurz skizzierten auf das sprachliche Zeichen fokussierten Metaphernbegriff können nun einige Einwände geltend gemacht werden:

1. Der Metaphernbegriff wird auf kreative/innovative Metaphern eingeschränkt, von denen sich sagen lässt, dass sie genug Aufmerksamkeit erregen, um als zu transkribierende Störung gelten zu können. Konventionelle Metaphern können nur noch in der Rückschau auf einen Zeitpunkt, als sie noch originell waren, als Metaphern gelten. Gegenwärtig sind diese Metaphern tot oder wenigstens komatös und daher nichts weiter als Katachresen. Ob man konventionelle Metaphern ein- oder ausschließen möchte, ist vielleicht schon eine Frage des Geschmacks. Wir empfinden ihren Ausschluss als unnötige Begriffsverengung.
2. Es wird nicht deutlich, worin sich Metaphern von anderen Formen figurativer Rede unterscheiden.
3. Das zentrale Problem, dass Einzelmetaphern systematisch aufeinander bezogen sein können, wird weitgehend ausgeblendet oder als Anhängsel behandelt. Daran ist schon Weinrich gescheitert, da man in diesem Fall zwei Theorien der Metapher benötigt – eine für die sprachliche und eine für übersprachliche Seite. Bei Weinrich waren dies die Konterdeterminations- und die Bildfeldtheorie, die sich nie zu einer konsistenten Theorie vereinigen ließen.
4. Die Begriffe der Störung der rekursiven Transkription sind von Jäger auf natürliche Sprachen zugeschnitten worden. Wie jedoch verhält es

sich mit Metaphern in anderen Medien wie Gesten, Bildern oder der in dieser Arbeit diskutierten Notation? Funktioniert die spezifische Bezugnahmepraktik der Metaphorik dort in gleicher Weise?

5. Der Ansatz ist psychologisch nicht unumstritten. Im Rahmen der Unbewusstheits-These in Kapitel 3.5.5 wurde bereits referiert, dass bei einigen psycholinguistischen Experimenten kein erhöhter Verarbeitungsaufwand neuer/innovativer Metaphern nachgewiesen werden konnte. Dabei wäre doch zu erwarten, dass das Erkennen und die Verarbeitung opaker Rede durch rekursive Transkription mehr Zeit benötigt als bei transparenter Rede.
6. Das größte Problem: Was macht die durch eine Metapher erzeugte Störung aus? Im nächsten Kapitel versuchen wir zu zeigen, dass bisher kein adäquater Störungsbegriff gefunden wurde und wir vermuten, dass es auch keinen geben kann, weil Metaphern in vielen Fällen völlig unauffällig sind.

Insgesamt schließen wir uns dem Urteil von Fehse an, die in ihrer Rezension von Skirl (2009) schreibt:

Doch auf dem geräumten Gelände [der kognitiven Metapherntheorie] wieder eine Theorie der rein sprachlichen Metapher errichten zu wollen, wirkt reaktionär. [...] Eine Theorie der rein sprachlichen Metapher ist heute unbrauchbar. (Fehse 2010)

Skirl hatte in seiner Arbeit die kognitive Metapherntheorie ebenfalls heftig kritisiert und sich dann für eine Theorie der ausschließlich sprachlichen Metapher stark gemacht. Fehses Alternativvorschlag einer Theorie, „die die konzeptuell-lexikalische und die sprachlich-innovative Metapher gelten ließe“ (ebd.), können wir uneingeschränkt zustimmen.

In dieser Diskussion um einen rein sprachlichen Metaphernbegriff liegt jedoch auch schon ein möglicher Schlüssel verborgen, um die angespro-

chenen Probleme zu bewältigen. So würde Jäger sicherlich sofort gegen den oben entwickelten Metaphernbegriff einwenden, er sei krude und vernachlässige das für jeden Zeichengebrauch wesentliche Charakteristikum, nämlich dass Zeichen stets in einem Medium prozessiert werden müssen. Denn gerade das ist es doch, was man meint, wenn man von dem Gebrauch eines Zeichens spricht: Das Zeichen ist medienspezifisch, ist „ein ›in Szene gesetztes‹ Geschehen [...], welches Akteur- und Betrachterrollen einschließt“ (Krämer 2004: 14). Der Begriff des Mediums bezieht sich dabei nicht auf die technologischen Einrichtungen moderner Verteilungs- oder Speichermedien. Das Medium soll als „eine Möglichkeitsbedingung der Sinnbildung selbst“ (Jäger 2005: 53) begriffen werden, als der Ort, an dem Kognitives nicht einfach nur sichtbar bzw. übermittelt wird, sondern sich zu allererst zwischen Produzenten und Rezipienten konstituieren kann. Schrift und Stimme sind hier ebenso eingeschlossen wie eine mentale Sprache, in der sich unsere Gedanken bilden. Prinzip der Sinnbildung sind die genannten Verfahren der rekursiven Transkription, mit denen Sprachbenutzer intermedial durch wechselseitigen Bezug auf ein anderes Medium oder intramedial durch Rückbezug auf ein und dasselbe Medium Sinn erschließen.

Ein konsequenter Ausbau des nur halbherzigen zeichenbezogenen Metaphernbegriffs zu einem medialen Metaphernbegriff böte die Chance, die Performativität metaphorischer Phänomene mit ihrer kognitiven Dimension in Einklang zu bringen. Angedacht ist ein derartiger Metaphernbegriff etwa bei Kohl, der die Metapher ganzheitlich „als kognitiver-sprachlicher Kreislauf“ gilt, „in dem Produktion und Rezeption, Kognition und Artikulation verbunden sind“ (Kohl 2007a: 125). Gerade diese Integration von Sprache und Kognition in einem prozessualen Kreislaufmodell betont die Gebundenheit kreativer Metaphern an konkrete Kommunikationssituationen, an die Verständnishorizonte der am Gespräch Teilnehmenden, an

die konventionellen semantischen Gepflogenheiten und, nicht zu vergessen, auch an die im rationalistischen Diskurs verdrängten Emotionen. Im Medienbegriff kommen alle diese Aspekte in ihrer Prozessualität gleichermaßen zur Geltung, ohne dass sich ein Teilprozess wie in der kognitiven Metaphertheorie auszeichnen ließe. So wird in einem Medium einerseits dessen konventionalisierte Semantik immer wieder bestätigt und gleichzeitig auf neue Situationen und Erfordernisse ausgerichtet. Diesen Um-, Weiter- oder Ausbau auf noch nicht versprachlichte Territorien voranzutreiben, wäre eine Leistung kreativer Metaphern, die durch die oben genannten intramedialen Transkriptionsverfahren auf der Basis der konventionalisierten Bedeutung neue Verwendungsweisen von Zeichen erschließen und damit einen Erkenntniszuwachs generieren. Das in Metaphern liegende kognitive Verfahren erscheint somit nicht mehr losgelöst von den Kommunikationsprozessen, sondern als ein Aspekt unter anderen in einem vielschichtigen Mosaik, das erst im Zusammenwirken aller Komponenten ein vollständiges Bild ergibt.

Ein genuin medialer Metaphernbegriff fokussiert Metaphern also als Phänomen, mit dem Sprachbenutzer Sinn herstellen und vermitteln. Es handelt sich demnach insofern um eine pragmatische Herangehensweise, als formale Eigenschaften nicht zum Ausgangspunkt erhoben werden. Die Benutzer einer Sprache verwenden eine Metapher ja gerade nicht, um eine formale Vorgabe zu erfüllen, sondern um ihrer Funktion Willen, etwas zu sagen, was mit den in der Kommunikation verfügbaren konventionellen sprachlichen Mitteln (noch) nicht gesagt werden kann. Sperber und Wilson drücken dies im Rahmen ihrer Relevanztheorie so aus:

On this approach, metaphor and a variety of related tropes [...] are simply creative exploitations of a perfectly general dimension of language use. The search for optimal relevance leads the speaker to adopt, on different occasions, a more or a less faithful interpretation of her thoughts. The result in some cases is literalness, in others metaphor. (Sperber/Wilson 1995: 237)



Dieser hier beschriebene fließende Übergang zwischen dem Wörtlichen und dem Metaphorischen findet sich im medialen Metaphernbegriff wieder, da die Verfahren der rekursiven Transkription nicht exklusiv der Metapher vorbehalten sind, sondern ständig eingesetzt werden, um Sinn zu affirmieren oder zu generieren.

Die oben genannten Einwände gegen einen rein sprachlichen Metaphernbegriff sind nun weitgehend entkräftet. Insbesondere die als kritisch eingestufte Frage nach der Systematizität von Metaphern, die bei der Konzentration auf das einzelne Zeichen zweifelsohne leidet, findet in einem medialen Metaphernbegriff eine Antwort, da das Medium vergangene Zeichenprozessierungen als semantisches Netz bewahrt. Zeichen sind dort immer schon auf andere Zeichen bezogen und erhalten erst durch diese wechselseitige Bezugnahme ihren Wert. Dieser Metaphernbegriff ist somit von Beginn an ein Meta-Begriff, denn in jedem Zeichenvollzug schwingt auch immer ein Teil der vergangenen Zeichengebräuche mit, die diesen dann auch erst möglich machen und seine Interpretierbarkeit, ob nun wörtlich oder metaphorisch, gewährleisten.

Obwohl ein ganzheitlicher, prozessorientierter, medialer Metaphernbegriff angemessen erscheint, heißt das nicht, dass Teilaspekte nicht isolierbar wären oder sich durch statische Vorstellungen nicht wenigstens näherungsweise beschreiben ließen. Unter Umständen muss Wissenschaft immer derartige Verkürzungen in Kauf nehmen, um einen einheitlichen und verallgemeinerten Gegenstand einer Untersuchung zuzuführen. Darüber sollte nur das ursprünglich dynamische Phänomen nicht vergessen werden. Ein Aspekt, der vielleicht nur aus dieser wissenschaftlichen Abstraktion resultiert und für die Sprachbenutzer eigentlich keine Rolle spielt, ist die dennoch interessante Frage nach der Identifizierung von Metaphern. Sie setzt voraus, dass die Metapher für den Moment statisch als Eigenschaft von Äußerungen oder sogar Sätzen verstanden wird, die ihnen möglichst überindividuell

entweder zu- oder abgesprochen wird.

## 10.5 Identifizierung von Metaphern

Bezüglich der Frage, woran man sprachliche Metaphern erkennt, wird häufig eine der beiden folgenden Positionen eingenommen: Entweder wird auf die Frage nicht geantwortet, weil man sie vielleicht für selbsterklärend und daher nicht erwähnenswert hält, oder es wird der Hinweis auf ein einfaches semantisches oder pragmatisches Prinzip gegeben. Im Gegensatz dazu halten wir die Frage nach der Identifizierung von Metaphern für das meist unterschätzte Problem der Metapherntheorie, dem in der Forschung dringend mehr Aufmerksamkeit zu widmen ist. In gebotener Kürze sollen verschiedene häufiger vorgeschlagene Identifikationskriterien aus der Metapherntheorie und aus der Praxis der Metaphernanalyse diskutiert und bewertet werden.

Was sollte ein gutes Identifikationskriterium leisten? Idealerweise sollte es sowohl notwendig als auch hinreichend für das Vorliegen einer sprachlichen Metapher sein. Es sollte die sprachliche Einheit oder die Einheiten benennen können, die metaphorisch gebraucht werden. Weiterhin sollte es dem Interpretationsprozess vorgeschaltet sein, weshalb es abhängig von der gewählten Metapherntheorie ohne die dort beschriebenen Interpretationsprozesse auskommen muss. Ob das Kriterium konzeptuelle Metaphern erkennt, sei freigestellt. In erster Linie geht es aber um das Erkennen sprachlicher Metaphern. Aus diesen können dann in einen zweiten Schritt Annahmen über die kognitiven Strukturen abgeleitet werden. Sollte das Kriterium auch psychisch „real“ sein? Hier wäre natürlich zuerst zu entscheiden, ob es für die Sprachbenutzer überhaupt relevant ist. Vertretbar wäre, wie bei anderen metapherntheoretischen Fragen auch, zu verlangen, dass es psychologischen Erkenntnissen nicht gänzlich widersprechen darf.

Dass es kein allein auf die syntaktische Form bezogenes Kriterium geben kann, insofern man Selektionsbeschränkungen und Subkategorisierung zur Semantik allein rechnet, darauf hat bereits Loewenberg (1975: 315) aufmerksam gemacht. Syntaktische Wohlgeformtheit von Äußerungen ist eine notwendige Voraussetzung für ihre Interpretierbarkeit, egal ob diese nun wörtlich, metaphorisch oder in anderer Weise figurativ abläuft (vgl. Abraham 1975: S. 134). Von dieser Einschränkung abgesehen ist an Identifikationskriterien so gut wie alles im Umlauf. Selbst die vor kurzem noch so selbstverständliche Feststellung, dass Metaphern nur in Äußerungen auf der Parole-Ebene zu erkennen seien, ist gar nicht mehr so selbstverständlich und u. a. mit Stern (2000) oder jüngeren sprachphilosophischen Debatten zur Semantik-Pragmatik-Grenze wieder ins Wanken geraten, weshalb semantische Kriterien zumindest teilweise wieder stärker berücksichtigt werden. In Anlehnung an die Liste in Stern (ebd.: 3) lassen sich folgende die Diskussion bestimmende „Standardkriterien“ aufzählen:

1. offensichtliche Wahr- oder Falschheit
2. pragmatische Unangemessenheit (z. B. durch Verletzung gricescher Konversationsmaximen)
3. semantischer Kategorienfehler
4. Verstoß gegen Selektionsbeschränkungen.

Vorausgesetzt wird hier stets, dass die wörtliche Interpretation des Satzes oder der Äußerung einen der genannten Defekte, nichts anderes sind diese Kriterien, zeigt. Insofern handelt es sich um Kriterien zur Metaphernidentifikation ex negativo, da nur gezeigt wird, warum eine wörtliche Lesart nicht zutreffen kann, aber nicht warum eine metaphorische richtig ist. Unzweifelhaft ist, dass viele metaphorische Äußerungen wörtlich genommen fehlerhaft im Sinne wenigstens eines dieser Kriterien sind: In *der Stein schläft*

wird die Selektionsbeschränkung des Verbs *schlafen*, das einen Zustand von Lebewesen bezeichnet, verletzt; *der Mann ist ein Bulldozer* versucht einen Menschen in die Kategorie der Baumaschinen einzuordnen, obwohl beide vollständig disjunkt sind; die Äußerung *der Computer hat sich mit einem Virus infiziert* ist in wörtlicher Lesart falsch, und zwar so eklatant falsch, dass man keinem Sprecher unterstellen kann, von ihrer Wahrheit überzeugt zu sein, so dass man ihm die absichtliche Verletzung der Maxime der Qualität unterstellen darf. Ebenso einsichtig ist jedoch auch, dass keines dieser Kriterien oder eine Kombination davon hinreichend für das Vorliegen einer Metapher sein kann. Denn auch andere rhetorische Figuren wie das Oxymoron, die Metonymie, die Ironie oder die Tautologie lassen sich als Störungen der wörtlichen Interpretation auffassen: Oxymora und Metonymien verletzen regelmäßig semantische Selektionsbeschränkungen<sup>6</sup>, ironische Äußerungen verstoßen gegen die Kommunikationserwartungen in einer Gesprächssituation und Tautologien sind immer wahr. Keines der Kriterien weist damit ausschließlich auf Metaphern hin. Zudem gibt es Äußerungen, die wörtlich verstanden defekt sind, aber nicht metaphorisch verstanden werden, sondern deren wörtliche Lesart angepasst wird: Wenn man ein nicht ganz durchgebratenes Steak serviert bekommt und dem Kellner mitteilt *Das Fleisch ist roh*, dann äußert man wörtlich genommen etwas in dieser Situation Falsches. Durch Lockerung („loosening“ in der englischsprachigen Fachliteratur) der Anwendungsbedingungen des Adjektivs *roh*, dass ein Objekt vollständig ungekocht sein muss, hin zu nicht ausreichend gekocht, kann die wörtliche Lesart aber beibehalten werden. Besonders drastisch verdeutlichen Skirl/Schwarz-Friesel (2007: 53), wie selbst Äußerungen, deren wörtliche Lesart für jeden in jeder Situation offensichtlich defekt ist, dennoch nicht figurativ gelesen werden müssen: Wenn sie in einem Semantikbuch als Beispiel für die Verletzung semantischer oder prag-

---

<sup>6</sup> Daher irrt auch Abraham, wenn er behauptet, dass „jede Verletzung auf der Ebene der Selektionsregeln [...] als Metapher zu interpretieren“ (Abraham 1975: S. 134) sei.

matischer Regeln stehen, können sie beliebige Defekte aufweisen, ohne eine Metapher auszulösen. Keines der Abweichungskriterien kann demnach hinreichend für das Vorliegen einer Metapher sein.

Ferner teilen alle diese Vorschläge wieder das Problem, dass es psycholinguistischen Experimenten bisher nicht ausreichend gelungen ist, einen erhöhten Zeitbedarf beim Verstehen metaphorischer Äußerungen zu messen. Dies müsste jedoch der Fall sein, wenn zunächst die wörtliche Lesart zurückgewiesen und anschließend metaphorisch reinterpretiert werden muss. Denn diese Schrittfolge vom Wörtlichen zum Metaphorischen ist ja in allen Abweichungstheorien enthalten. Zusätzlich widerspricht das vermeintliche Parasitieren des Metaphorischen auf dem Wörtlichen der „intuitive directness of metaphor“ (Wearing 2006: 312). Gemeint ist Folgendes: Während man etwa auf gewöhnliche Implikaturen nicht direkt reagieren kann, ist dies bei Metaphern im Allgemeinen möglich: Auf die Behauptung *Deutschland ist die Konjunkturlokomotive Europas* kann man problemlos mit *Ja, das stimmt* oder *Nein, das ist falsch* reagieren. Beurteilt wird dabei selbstverständlich nicht die wörtliche Bedeutung der Äußerung, sondern ihre metaphorische Bedeutung. Man kann also auf Metaphern so reagieren, wie man es für wörtliche Äußerungen gewohnt ist. Auch dies spricht gegen die Metapher als Sekundärbedeutung einer ansonsten irgendwie defekten Äußerung.

Selbst wenn man darauf verzichten könnte, hinreichende Kriterien zur Verfügung zu haben, so sind die Kriterien aber nicht einmal notwendig für das Vorliegen einer Metapher, selbst dann nicht, wenn man sie als Disjunktion kombiniert. Um das einzusehen, muss man sich nur ein wenig außerhalb der eingefahrenen Metaphernbeispiele bewegen. Zunächst ist es einfach und zweckmäßig, das schon bei Grice (1975: 53) zu findende und durch Loewenberg ausformulierte Wahrheitskriterium zu entkräften:

It is a necessary, but not sufficient, condition for an utterance to be a

metaphor that, if taken as an assertion and interpreted literally, it is false.  
(Loewenberg 1975: 334)

Das kann schon deshalb nicht stimmen, da metaphorische Äußerungen unter Negation weiterhin metaphorisch bleiben. Ob von Julia nun gesagt wird, sie sei die Sonne oder sie sei nicht die Sonne, in jedem Fall spricht man metaphorisch über sie. Wörtlich genommen ist die erste Äußerung falsch, die zweite aber wahr. Um das Kriterium zu retten, hat man behauptet, dass metaphorische Äußerungen wörtlich genommen entweder offensichtlich wahr oder falsch seien. Der Rezipient einer solchen Äußerung soll aus der Offensichtlichkeit der Wahr- oder Falschheit schlussfolgern, dass der Sprecher keinen direkten assertiven Sprechakt vollziehen wollte, da sich mit bezüglich jeder möglichen Welt wahren oder falschen Äußerungen nichts sinnvoll behaupten lässt. Das mag für eine Reihe metaphorischer Äußerungen zutreffen, jedoch längst nicht für alle. Es gibt Äußerungen, die gleichzeitig sowohl wörtlich als auch metaphorisch zu verstehen sind und deren wörtliche und metaphorische Lesart in einem Kontext zugleich wahr sind, aber deren Wahrheiten beide nicht offensichtlich sind. In Ergänzung zur Auflistung solcher Beispiele bei Stern (2000: 4f) oder bei Hills (1997: 130f) sei folgendes Beispiel erwähnt: Während der Fußballweltmeisterschaft in Brasilien kündigte die Moderatorin einer Nachrichtensendung mit den Worten *Das wird ein heißer Abend* die anschließende Übertragung an. In wörtlicher Lesart nahm sie damit Bezug auf die Temperaturverhältnisse während des Spiels und machte den Wetterprognosen nach eine wahre, aber nicht offensichtlich wahre Behauptung, die für die Fernsehzuschauer auch relevant war, da sie den Schluss ziehen konnten, den Spielern werde die Temperatur zu schaffen machen. Im selben Kontext war diese Äußerung von den Zuschauern aber auch metaphorisch so zu verstehen, dass die Moderatorin ein spannendes Spiel zwischen den beiden Mannschaften versprach. Beide Lesarten sind in dem gegebenen Kontext wahr,

informativ und relevant und verletzt damit auch keine der griceschen Konversationsmaximen. Daher ist ebenfalls die Notwendigkeit einer Verletzung eben dieser Maximen für die Identifikation einer Metapher hinfällig. Dieser Typ „zweifach-angemessener“ (vgl. ebd.: 147) Metaphern bringt auch die Idee, dass Metaphern schon gegen semantische Kombinationsregeln verstoßen müssen, zu Fall. Syntaktisch, semantisch und pragmatisch sind sie völlig unauffällig, da gerade ihre wörtliche Lesart mitverstanden werden soll. Dieses Beispiel und die Beispiele von Stern zeigen, dass keines der genannten Kriterien notwendig sein kann.

Möglicherweise weist das so beliebte pragmatische Wahrheitskriterium aber einen noch weitaus tiefer liegenden Defekt auf, der es gänzlich unbrauchbar machen könnte:

Taken literally, most metaphors would be plain nonsense. Therefore, they cannot be construed, like those cases of indirect communication, as literally *saying* one thing and *hinting* at something else. Often on the literal level *nothing* has been said. (Schroeder 2004: 72)

Wenn Schroeder hiermit Recht behalten sollte, kann es bei diesem Metapherotyp nicht sein, dass „eine Ausgangsproposition als Vehikel zur indirekten Mitteilung einer tatsächlich intendierten Proposition verwendet wird“ (Burkhardt 1987: 47), da eine Ausgangsproposition überhaupt nicht existiert. Ohne wörtliche Proposition kann der wörtlichen Lesart der metaphorischen Äußerung aber auch kein Wahrheitswert zugewiesen werden und sie kann deshalb auch nicht gegen die Maxime der Qualität oder eine andere verstoßen, da eben nichts gesagt wird. Ein Rezipient müsste in diesem Fall die Kooperationsbereitschaft seines Gegenübers selbst in Zweifel ziehen und das Gespräch abbrechen.

Beachtenswert ist ebenfalls, dass sprachliche Ausdrücke nicht in metaphorischen Äußerungen vorkommen müssen, um metaphorisch verstanden zu werden. Das zum Unwort des Jahres 2013 gekürte Kompositum *Sozial-*

*tourismus* kann unabhängig von den Äußerungen, in denen es verwendet wird, und deren Wahrheitsgehalt, als metaphorisch identifiziert werden. Natürlich werden auch Kompositumsmetaphern nur „im Zusammenhang von sprachlichem Kontext und kommunikativem Kontext identifiziert und verstanden“ (Skirl 2010: 24), jedoch zeigt schon das Unwortbeispiel, dass dafür nicht immer eine vollständige Proposition nötig ist. In gleicher Weise ließe sich über Genitiv- oder Adjektivmetaphern sprechen, die häufig schon unterhalb der Propositionsebene in der Phrase, in der sie vorkommen, als solche erkannt werden können. Metaphern sind sprachlich so variabel, dass jede grammatische Einheit – vom Wort zum Satz und darüber hinaus – metaphorisch verwendet werden kann (vgl. Barnden/Wallington 2010: 104). Zusammen mit der eingangs gemachten Feststellung, dass die metaphorische Reinterpretation wörtlich defekter Lesarten psychologisch und intuitiv wenig überzeugend ist, liegt es gar nicht so fern, die Metapher unterhalb der Ebene der Propositionen anzusiedeln bzw. gänzlich außerhalb, wenn man satzgrenzenüberschreitende Metaphernmuster berücksichtigt. Eine solche Position, wie sie etwa in Bezuidenhout (2001) oder in Wearing (2006) vertreten wird, rechnet Metaphern dann konsequent zum Gesagten. Wer also eine metaphorische Äußerung produziert, sagt demnach nicht etwas und meint etwas anderes, sondern drückt direkt eine Proposition aus, die dann natürlich als wahr oder falsch bewertet werden kann, aber nicht trivial wahr oder falsch ist. Sollte das zutreffen, worüber noch kein abschließendes Urteil gefallen ist, spielt die wörtliche Lesart weder für das Erkennen noch für das Interpretieren einer Metapher eine Rolle.

Insgesamt kann die Metaphertheorie also bisher weder notwendige noch hinreichende Kriterien anbieten, mit denen sich sicher Metaphern identifizieren ließen. Aktuelle Vorschläge, wie das Identifikationsproblem praktisch zu lösen sei, kommen dann auch weniger aus der Sprachphilosophie, sondern vor allem aus der Korpuslinguistik, die sich schon ihrer Na-



tur nach notorisch mit dieser Frage auseinandersetzen muss, sollen doch umfangreiche Textsammlungen möglichst automatisiert nach Metaphern und anderen rhetorischen Figuren durchsucht werden. Auf der Basis von Steen/Dorst/Herrmann u. a. (2010) und Stefanowitsch (2006a) sollen die dortigen Verfahrensweisen kurz erläutert und ihre Folgen für das theoretische Problem diskutiert werden.

Einen Algorithmus zur Identifikation von sprachlichen Metaphern in Texten verspricht die *Metaphor Identification Procedure* (MIP), welche die Basis für Weiterentwicklungen wie MIPVU ist. Ihre einzelnen Teilschritte werden im Folgenden gerafft wiedergegeben (vgl. Steen/Dorst/Herrmann u. a. 2010: 769):

1. Read the text to get a general understanding of the meaning.
2. Determine the lexical units.
- 3a. Establish the meaning in context of each unit.
- 3b. For each unit, determine if it has a more basic contemporary meaning in other contexts.
- 3c. Does the contextual meaning contrast with the basic meaning but can it be understood in comparison with it?
4. If yes, mark the unit as metaphorical.

Metaphern sind im Sinne dieser Schrittfolge also syntaktische Wörter<sup>7</sup>, die indirekt verwendet werden, deren Äußerungsbedeutung also von der basalen ihrer Ausdrucksbedeutungen abweicht, aber aus dieser durch Vergleichen abgeleitet werden kann. Als Bezugspunkt für die Ausdrucksbedeutung werden zumeist renommierte Gegenwartswörterbücher herangezogen. Auf

---

<sup>7</sup> Vereinfachend seien also lexikalische Einheiten an dieser Stelle mit syntaktischen Wörtern identifiziert.

diese Weise kann MIP sowohl kreative als auch konventionelle Metaphern, solange diese noch nicht als Katachresen ins Wörterbuch eingegangen sind, erkennen. Dabei eignet sich MIP aber weniger für die maschinelle Verarbeitung von Korpora als für menschliche Interpretierende, da besonders Schritt 3c die Fähigkeit, Ähnlichkeiten zu erkennen, verlangt. Nach Markierung aller metaphorisch gebrauchten Wörter können diese dann hinsichtlich möglicher Verbindungen zwischen konzeptuellen Domänen untersucht werden, jedoch sind diese Schritte zur Metaphernerkennung nicht notwendig, da diese sich allein auf lexikalisch-semantiche Analysen stützt (vgl. Steen/Dorst/Herrmann u. a. 2010: 771). Für die Theoriedebatte ist dabei irritierend, dass schon der Rückgriff auf das syntaktische Wort und Vergleichstätigkeiten zwischen Bedeutungen zu genügen scheinen, um sprachliche Metaphern zuverlässig zu identifizieren:

We have attempted to show that metaphor can be reliably identified in large-scale linguistic research without having to resort to assumptions about conventionalized conceptual metaphors. (ibid.: 788)

Von den Detailveränderungen, die Steen an der Prozedur vornimmt, bleiben die Fragen an einen semantischen auf das Wort bezogenen Ansatz unangetastet: Werden sich über Konstituenten- oder Satzgrenzen erstreckende Metaphern oder Äußerungen, die gleichzeitig sowohl wörtlich als auch metaphorisch zu verstehen sind, erkannt? Ist eine im Wörterbuch verzeichnete Bedeutung ausreichend, um einen Vergleich anzustellen, wenn die Metapher enzyklopädisches Wissen heranzieht? Wie ist mit Metaphern umzugehen, die nicht auf Vergleichen beruhen, wie das Beispiel *Sally ist ein Eisklotz*? Das eigentliche Hauptproblem dieser Schrittfolge zur Metaphernidentifikation für die Theorie liegt aber darin, dass sie kein Identifikationskriterium im eigentlichen Sinne bereitstellt, da das Verstehen der Metapher hier ihrem Erkennen in der Schrittfolge vorausgeht. Im dritten Schritt wird die Metapher zuerst durch Vergleichen der Bedeutungen ver-

standen und erst im letzten Schritt dann als solche markiert. Also werden Wörter, deren metaphorische Lesart plausibel erschien, als metaphorisch markiert. Ein echtes Identifikationskriterium sollte – so wurde es anfangs gefordert – aber den umgekehrten Weg beschreiten: Es werden Wörter als metaphorisch markiert, die dann metaphorisch interpretiert werden. Streng genommen liegt sogar eine Art Zirkelschluss vor, da letztendlich solche Wörter als Metaphern gelten, die metaphorische Bedeutung haben. Für die Anwendbarkeit des Verfahrens muss das kein Mangel sein, da sein Zweck ja gerade nicht darin besteht, zu erklären, wie Menschen tatsächlich Metaphern erkennen, sondern die Häufigkeit von Metaphern in Textsammlungen zu ermitteln. Für die Theoriedebatte liefert es so jedoch keine Impulse.

Im Unterschied dazu listet Stefanowitsch (2006a: 2ff) im einleitenden Artikel eine Reihe von Suchstrategien auf, um zu konzeptuellen Metaphern gehörende linguistische Ausdrücke in Texten zu finden:

- (i) Manual searching
- (ii) Searching for source domain vocabulary
- (iii) Searching for target domain vocabulary
- (iv) Searching for sentences containing lexical items from both the source domain and the target domain
- (v) Searching for metaphors based on ‘markers of metaphor’

Während das manuelle Suchen im Hinblick auf die Korpuslinguistik fast als historisch überholt dargestellt wird, machen die vier folgenden Suchstrategien den Kern der Überlegungen aus. Das letzte Verfahren sticht besonders heraus: Einerseits lässt es sich auch ohne die kognitive Metaphertheorie im

Hintergrund anwenden, andererseits scheinen bestimmte Metaphernmarker wie die Zusätze *metaphorisch/bildlich gesprochen*, *sozusagen*, *gleichsam*, *gewissermaßen* schon hinreichend für das Vorliegen einer Metapher zu sein (vgl. Stefanowitsch 2006a: 4; Skirl/Schwarz-Friesel 2007: 55). Umgekehrt gilt ebenso, dass es Marker wie *wortwörtlich* oder *im wahrsten Sinne des Wortes* gibt, die eine metaphorische Interpretation gerade ausschließen. Typographische Marker wie Kursivschrift oder das Setzen von Anführungszeichen sind dagegen nur in der Schriftsprache anzutreffen und dort lediglich Indizien für das Vorliegen einer Metapher. Da diese sprachlichen Hervorhebungsmittel in der Regel recht zuverlässig sind, ist es erstaunlich, wie wenig Beachtung sie als Identifikationskriterium in der Theorie bisher gefunden haben. Für eine automatisierte Metaphernerkenkung ist die vierte Methode – das Suchen nach sprachlichen Mitteln aus Ursprungs- und Zielbereich – besonders effektiv. Allerdings müssen dazu einerseits ein annotiertes Korpus und andererseits umfangreiche Listen an Sprachmaterial vorliegen, von dem bekannt ist, dass es zu einem der Bereiche gehört. Da immer wieder neue metaphorische Ausdrücke geschaffen werden, wird jedoch keine Liste jemals alle möglichen Varianten enthalten können, so dass immer etwas übersehen wird und in manueller Nachkontrolle zu korrigieren ist (vgl. Stefanowitsch 2006a: 4).

Offensichtlich liefert auch keines dieser Suchverfahren ein notwendiges oder hinreichendes Kriterium, wodurch jede automatisierte Metaphersuche stets auf eine abschließende Überprüfung durch einen menschlichen Interpretierenden angewiesen bleibt, da sowohl falsch positive als auch falsch negative Resultate zu erwarten sind. Andererseits ist es nicht unplausibel anzunehmen, dass Sprechende diese Suchstrategien zumindest als Heuristiken nutzen könnten. Wenn durch das Thema eines Textes oder durch den Kontext ein etabliertes Metaphernmuster nahegelegt wird, könnte die Bereitschaft wachsen, einzelne linguistische Einheiten, besonders wenn sie

sowieso konventionell im Rahmen eines Metaphernmodells genutzt werden, metaphorisch zu verstehen.

Die offenkundige Differenz zwischen Theorie und Praxis der Metaphernidentifikation zeigt, wie wenig dieser Aspekt bisher verstanden wurde. Ein Großteil aller Metapherntheorien beginnt nicht mit der Frage, wie Metaphern erkannt, sondern wie Metaphern verstanden werden, welche Arten von Bedeutung eine Rolle spielen, welche kognitiven Prozesse ablaufen oder wie Metaphern sprachlich variieren. Diese Fragen stehen sicherlich zu Recht im Zentrum der Forschungsdebatte, dennoch sollte dem Identifikationsproblem mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden: Wenn Johnson (1981: 24) hofft, dass ein besseres Verständnis, auf welche Weise der Kontext die Metapherninterpretation beeinflusst, auch dabei helfen könne, weitere Einsichten in das Identifikationsproblem zu gewinnen, so möchten wir dem hinzufügen, dass die Umkehrung dieses Satzes, durch das Identifikationsproblem mehr über die Metapherninterpretation zu erfahren, ebenfalls seine Berechtigung hat. Eventuell wird man sogar zu dem Schluss kommen, dass es bei der zirkulären Situation bleiben muss, wonach man Metaphern erkennt, wenn man sie verstanden hat, womit beide Teilprobleme ununterscheidbar wären. Gestützt wird diese Überlegung durch die immer häufiger gemachte Beobachtung, dass wörtliche und metaphorische Lesarten nicht gegeneinander ausgespielt, sondern gleichzeitig erwogen werden, um sich dann für die der Situation angemessene zu entscheiden und gegebenenfalls auch beide zu berücksichtigen. Dafür jedoch scheint gerade der prozessorientierte mediale Metaphernbegriff ausreichend gewappnet.



**Teil III**  
**Literatur**





- Abraham, Werner (1975): Zur Linguistik der Metapher. In: *Poectis* 4, 133–172.
- Ammon, Ulrich (1998): Probleme der Statusbestimmung von Fachsprachen. In: *Fachsprachen. Ein internationales Handbuch zur Fachsprachenforschung und Terminologiewissenschaft*. Hrsg. von Lothar Hoffmann/Hartwig Kalverkämper/Ernst Herbert Wiegand. Bd. 1. (= *Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft* 14). Berlin, New York, 219–229.
- Andreeva, Anna (2011): Die gefährlichen Fremden: oder was verraten Metaphern über den ethnischen Diskurs. In: *metaphorik.de* 20, 7–38. URL: <http://www.metaphorik.de/20/andreeva.pdf>.
- Aristoteles (2004): *Topik*. Übers. von Tim Wagner/Christof Rapp. Stuttgart.
- (2006): *Poetik: Griechisch/Deutsch*. Übers. von Manfred Fuhrmann. Bibliogr. erg. Ausg. 1994. Stuttgart.
- (2007): *Rhetorik*. Übers. von Gernot Krapinger. Bibliogr. erg. Ausg. 1994. Stuttgart.
- (2009): *Werke in deutscher Übersetzung*. Bd. 4 *Rhetorik*. Übers. von Christof Rapp/Ernst Grumach/Hellmut Flashar. Berlin.
- Aubusson, Peter J./Harrison, Allan G./Ritchie, Stephen M. (2006): *Metaphor and Analogy: Serious thought in science education*. In: *Metaphor and Analogy in Science Education*. Hrsg. von Peter J. Aubusson/Allan G. Harrison/Stephen M. Ritchie. (= *Science & Technology Education Library* 30). Dordrecht, 1–9.
- Austin, J. L./Howson, A. G. (1979): *Language and mathematical education*. In: *Educational Studies in Mathematics* Bd. 10.2, 161–197.
- Bagni, Giorgio T. (2006): *Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory*. In: *Educational Studies in Mathematics* Bd. 62.3, 259–280.
- Baldauf, Christa (2000): *Sprachliche Evidenz metaphorischer Konzeptualisierung. Probleme und Perspektiven der kognitivistischen Metapherntheorie im Anschluss an George Lakoff und Mark Johnson*. In: *Bildersprache verstehen. Zur Hermeneutik der Metapher und anderer bildlicher Sprachformen*. Hrsg. von Ruben Zimmermann. (= *Übergänge* Bd. 38). München.
- Barcelona, Antonio, Hrsg. (2003): *Metaphor and metonymy at the crossroads: a cognitive perspective*. Berlin: Mouton de Gruyter.

- Barnden, John A./Wallington, Alan M. (2010): Metaphor and its unparalleled meaning and truth. In: *Tropical Truth(s). The Epistemology of Metaphor and other Tropes*. Hrsg. von Armin Burkhardt/Brigitte Nerlich. Berlin, New York, 85–121.
- Becker, Holger (2006): *Semantische und lexikalische Aspekte der mathematischen Fachsprache des 19. Jahrhunderts*. Diss. Universität Oldenburg. URL: <http://oops.uni-oldenburg.de/volltexte/2006/89>.
- Bezuidenhout, Anne (2001): Metaphor and What is Said: A Defense of a Direct Expression View of Metaphor. In: *Midwest Studies in Philosophy* 25, 156–186.
- Bierwisch, Manfred (1983): Semantische und konzeptuelle Repräsentation lexikalischer Einheiten. In: *Untersuchungen zur Semantik*. Hrsg. von Rudolf Růžička/Wolfgang Motsch. Bd. 22. (= *Studia grammatica*). Berlin, 61–99.
- (1993): Ludwig Jägers Kampf mit den Windmühlen. Anmerkungen zu einer merkwürdigen Sprach(wissenschafts)verwirrung. In: *Zeitschrift für Sprachwissenschaft* 12.1, 107–112.
- Black, Max ([1954] 1996): Die Metapher. In: *Theorie der Metapher*. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 55–79.
- ([1977] 1996): Mehr über die Metapher. In: *Theorie der Metapher*. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 379–413.
- Brauße, Ursula (1994): *Lexikalische Funktionen der Synsemantika*. (= *Forschungsberichte des Instituts für Deutsche Sprache, Mannheim* 71).
- Brugman, Claudia (1990): What is the Invariance Hypothesis? In: *Cognitive Linguistics* 1.2, 257–268.
- Bühler, Karl (1982): *Sprachtheorie. Die Darstellungsfunktion der Sprache*. Ungekürzter Neudr. d. Ausg. Jena, Fischer, 1934. (= *Uni-Taschenbücher* 1159). Stuttgart.
- Bungarten, Theo (1981): Wissenschaft, Sprache und Gesellschaft. In: *Wissenschaftssprache: Beiträge zur Methodologie, theoretische Fundierung und Deskription*. Hrsg. von Theo Bungarten. München, 14–53.
- Burkhardt, Armin (1987): Wie die ‘wahre Welt’ endlich zur Metapher wurde. Zur Konstitution, Leistung und Typologie der Metapher. In: *Conceptus* Bd. 21.52, 39–69.
- (1990): Searle on metaphor. In: *Speech acts, meaning and intentions: critical approaches to the philosophy of John R. Searle*. Hrsg. von Armin Burkhardt. (= *Grundlagen der Kommunikation und Kognition*). Berlin, 303–335.

- (1991): Vom Nutzen und Nachteil der Pragmatik für die diachrone Semantik. In: Diachrone Semantik und Pragmatik: Untersuchungen zur Erklärung und Beschreibung des Sprachwandels. Hrsg. von Dietrich Busse. (= Reihe germanistische Linguistik 113). Tübingen, 7–36.
- Bußmann, Hadumond, Hrsg. (2008): Lexikon der Sprachwissenschaft. 4. Aufl. Stuttgart.
- Cantor, Georg (1874): Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 77, 258–262.
- (1878): Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 84, 242–258.
- (1879): Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 1. In: Mathematische Annalen 15.1, 1–7.
- (1880): Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 2. In: Mathematische Annalen 17.3, 355–358.
- (1882): Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 3. In: Mathematische Annalen 20.1, 113–121.
- (1883): Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 5. In: Mathematische Annalen 21.4, 545–591.
- (1884): Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 6. In: Mathematische Annalen 23.4, 453–488.
- (1895): Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Erster Artikel). In: Mathematische Annalen Bd. 46.4, 481–512.
- (1897): Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Zweiter Artikel). In: Mathematische Annalen 49.2, 207–246.
- Cantor, Georg/Dedekind, Richard (1932): Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin.
- Carstensen, Kai-Uwe/Ebert, Christian/Ebert, Cornelia u. a. (2010): Computerlinguistik und Sprachtechnologie: Eine Einführung. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Heidelberg.
- Coenen, Hans Georg (2002): Analogie und Metapher: Grundlegung einer Theorie der bildlichen Rede. Berlin.
- Cohen, Paul (2002): The Discovery of Forcing. In: Rocky Mountain Journal of Mathematics 32.4, 1071–1100.

- Coventry, Kenny R./Carmichael, Richard/Garrod, Simon C. (1994): Spatial Prepositions, Object-Specific Function, and Task Requirements. In: *Journal of Semantics* 11, 289–309.
- Davidson, Donald (2007): *Inquiries into truth and interpretation*. 2. ed., reprint. Oxford.
- Debatin, Bernhard (1995): *Die Rationalität der Metapher. Eine sprachphilosophische und kommunikationstheoretische Untersuchung*. Berlin.
- (1997): *Metaphern und Mythen des Internet. Demokratie, Öffentlichkeit und Identität im Sog der vernetzten Datenkommunikation*. URL: <http://oak.cats.ohiou.edu/~debatin/German/NetMet.htm> (Zugriff am 02.04.2011).
- Dedekind, Richard (1965): *Was sind und was sollen Zahlen?* 10. Aufl. Berlin.
- Deiser, Oliver (2008): *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg.
- (2010): *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg.
- Deiser, Oliver/Lasser, Caroline/Voigt, Elmar u. a. (2011): *12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik*. Heidelberg.
- Dölling, Johannes (2005): *Semantische Form und pragmatische Anreicherung: Situationsausdrücke in der Äußerungsinterpretation*. In: *Zeitschrift für Sprachwissenschaft* 24.2, 159–225.
- Dormolen, J. Van (1969): *The uselessness of Venn Diagrams*. In: *Educational Studies in Mathematics* Bd. 1.4, 402–407.
- Doyle, Arthur Conan (2007): *Eine Studie in Scharlachrot*. Übers. von Gisbert Haefs. Frankfurt a. M./Leipzig.
- Drewer, Petra (2003): *Die kognitive Metapher als Werkzeug des Denkens. Zur Rolle der Analogie bei der Gewinnung und Vermittlung wissenschaftlicher Erkenntnisse*. (= *Forum für Fachsprachen-Forschung* Bd. 62). Tübingen.
- Dudenredaktion, Hrsg. (2005): *Duden. Die Grammatik*. 7., völlig neu erarbeitete Aufl. Mannheim.
- Hrsg. (2007): *Duden. Herkunftswörterbuch. Etymologie der deutschen Sprache*. Mannheim.
- Hrsg. (2011): *Duden, Deutsches Universalwörterbuch*. 7., überarb. und erw. Aufl. Mannheim.

- Dürscheid, Christa (2006): Einführung in die Schriftlinguistik. 3., überarb. und erg. Aufl. (= Studienbücher zur Linguistik 8). Göttingen.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter (2003): Einführung in die Mengenlehre. 4. Aufl. Heidelberg.
- Eggs, E. (2001): Metapher. In: Historisches Wörterbuch der Rhetorik. Hrsg. von Gerd Ueding/Walter Jens. Bd. 5. Tübingen, 1099–1183.
- Eisenberg, Peter (1999): Der Satz. Bd. 2. (= Grundriß der deutschen Grammatik). Stuttgart.
- Eisenreich, Günther (1998): Die neuere Fachsprache der Mathematik seit Carl Friedrich Gauß. In: Fachsprachen. Ein internationales Handbuch zur Fachsprachenforschung und Terminologiewissenschaft. Hrsg. von Lothar Hoffmann/Hartwig Kalverkämper/Ernst Herbert Wiegand. Bd. 1. (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 14). Berlin, New York, 1222–1230.
- English, Lyn D. (1997): Analogies, Metaphors, and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning. In: Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images. Hrsg. von Lyn D. English. Mahwah New Jersey, 3–18.
- Fauconnier, Gilles (2001): Conceptual Blending and Analogy. In: The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science. Hrsg. von Dedre Gentner/Keith J. Holyoak/Boicho N. Kokinov. Cambridge, Mass., 255–285.
- Fehrmann, Gisela/Linz, Erika (2004): Resistenz und Transparenz der Zeichen. Der verdeckte Mentalismus in der Sprach- und Medientheorie. In: Die Kommunikation der Medien. Hrsg. von Jürgen Fohrmann/Erhard Schüttelpelz. Tübingen, 81–104.
- Fehse, Beatrix (2010): Rezension: Skirl, Helge: Emergenz als Phänomen der Semantik am Beispiel des Metaphernverstehens. URL: <http://www.linse.uni-due.de/rezensionen-356/articles/emergenz-als-phaenomen-der-semantik-am-beispiel-des-metaphernverstehens-2576.html> (Zugriff am 28.07.2013).
- Feist, Michele I./Gentner, Dedre (2003): Factors Involved in the Use of In and On. In: Proceedings of the Twenty-fifth Annual Meeting of the Cognitive Science Society. July 31st – Aug 2nd 2003, Boston, Massachusetts USA. Hrsg. von Richard Alterman/David Hirsh. Mahwah New Jersey, 390–395.
- Felgner, Ulrich (2010): Introductory note to 1908b. In: Ernst Zermelo – Collected Works/Gesammelte Werke: Volume I – Set Theory, Miscellanea/Band I – Mengenlehre, Varia. Hrsg. von Heinz-Dieter Ebbinghaus/Craig G. Fraser/Akihiro Kanamori.

- (= Schriften der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 21). Berlin, Heidelberg, 160–188.
- Feng, Xiaohu (2003): *Konzeptuelle Metaphern und Textkohärenz*. Tübingen.
- Fischbein, Efraim/Baltsan, Madlen (1998): The mathematical concept of set and the ‘collection’ model. In: *Educational Studies in Mathematics* Bd. 37.1, 1–22.
- Fischer, Martin (2009): *Schrift als Notation*. In: *Schrift, Medien, Kognition. Über die Exteriorität des Geistes*. Hrsg. von Peter Koch/Sybille Krämer. 2., unveränd. Aufl. (= *Probleme der Semiotik* Bd. 19). Tübingen, 83–101.
- Forceville, Charles (1995): (A)symmetry in Metaphor: The Importance of Extended Context. In: *Poetics Today* 16.4, 677–708.
- Frege, Gottlob (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle.
- Gentner, Dedre (1999): *Analogy*. In: *The MIT encyclopedia of the cognitive sciences*. Hrsg. von Robert Andrew Wilson/Frank C. Keil. Cambridge, Mass., 17–20.
- (2001): *Spatial Metaphors in Temporal Reasoning*. In: *Spatial schemas and abstract thought*. Hrsg. von Merideth Gattis. Cambridge, Mass.
- (2002): *Mental models, Psychology of*. In: *International encyclopedia of the social & behavioral sciences*. Hrsg. von Neil J. Smelser/Paul B. Baltes. Amsterdam, 9683–9687.
- Gentner, Dedre/Bowdle, Brian (2008): *Metaphor as Structure-Mapping*. In: *The Cambridge handbook of metaphor and thought*. Hrsg. von Raymond W. Gibbs. Cambridge, 109–128.
- Gentner, Dedre/Bowdle, Brian/Wolff, Phillip u. a. (2001): *Metaphor Is Like Analogy*. In: *The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science*. Hrsg. von Dedre Gentner/Keith J. Holyoak/Boicho N. Kokinov. Cambridge, Mass., 199–253.
- Gentner, Dedre/Colhoun, Julie (2010): *Analogical Processes in Human Thinking and Learning*. In: *Towards a theory of thinking: building blocks for a conceptual framework*. Hrsg. von Britt M. Glatzeder. (= *On Thinking*). Heidelberg, 35–48.
- Gentner, Dedre/Jeziorski, Michael (1993): *The shift from metaphor to analogy in Western science*. In: *Metaphor and thought*. Hrsg. von Andrew Ortony. 2. Aufl. Cambridge, 447–480.
- Gibbs, Raymond W. (1996): *Why many concepts are metaphorical*. In: *Cognition* 61.3, 309–319.

- Goldin, Gerald A. (2001): Counting on the metaphorical. Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. In: *Nature* 413 (6851), 18–19.
- Goodman, Nelson (1995): *Sprachen der Kunst. Entwurf einer Symboltheorie*. Übers. von Bernd Philippi. Frankfurt a. M.
- Goschler, Juliana (2008): *Metaphern für das Gehirn: eine kognitiv-linguistische Untersuchung*. (= Sprachwissenschaft 6). Berlin.
- Grady, Joseph E. (1997): THEORIES ARE BUILDINGS revisited. In: *Cognitive Linguistics* 8.4, 267–290.
- Grewendorf, Günther (1993): Der Sprache auf der Spur: Anmerkungen zu einer Linguistik nach Jäger Art. In: *Zeitschrift für Sprachwissenschaft* 12.1, 113–131.
- Grice, H. Paul (1975): Logic and conversation. In: *Syntax and Semantics 3: Speech arts*. Hrsg. von Peter Cole/Jerry L. Morgan. New York, 41–58.
- Halliday, Michael A. K./McIntosh, Angus/Stevens, Peter (1964): *The linguistic sciences and language teaching*. London.
- Halmos, Paul Richard (1994): *Naive Mengenlehre*. Übers. von Manfred Armbrust/Fritz Ostermann. 5. Aufl. (= Moderne Mathematik in elementarer Darstellung 6). Göttingen.
- Hampe, Beate (2005a): Image schemas in Cognitive Linguistics: Introduction. In: *From perception to meaning: image schemas in cognitive linguistics*. Hrsg. von Beate Hampe/Joseph E. Grady. (= Cognitive linguistics research 29). Berlin, New York, 1–12.
- (2005b): When *down* is not bad, and *up* not good enough: A usage-based assessment of the plus-minus parameter in image-schema theory. In: *Cognitive Linguistics* 16.1, 81–112.
- Harras, Gisela (1999): Jenseits von semantischen Konventionen – zum Beispiel: tautologische Äußerungen. In: *Zeitschrift für Germanistische Linguistik* 27.1, 1–12.
- (2000): Concepts in Linguistics – Concepts in Natural Language. In: *Conceptual Structures: Logical, Linguistic, and Computational Issues*. Hrsg. von Bernhard Ganter/Guy W. Mineau. Berlin, Heidelberg, 13–26.
- Harris, Roy (1996): Writing and notation. In: *Schrift und Schriftlichkeit. Ein interdisziplinäres Handbuch internationaler Forschung*. Hrsg. von Harmut Günther/Otto Ludwig. Bd. 2. (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 10). Berlin, New York, 1559–1568.

- Harrison, Allan G./Treagust, David F. (2006): Teaching and Learning with Analogies: Friend or foe? In: Metaphor and Analogy in Science Education. Hrsg. von Peter J. Aubusson/Allan G. Harrison/Stephen M. Ritchie. (= Science & Technology Education Library 30). Dordrecht, 11–24.
- Hausdorff, Felix (2002): Gesammelte Werke Band 2. Grundzüge der Mengenlehre. Hrsg. von U. Felgner/H. Herrlich/u. a. Berlin, Heidelberg u. a.
- (2008): Gesammelte Werke Band 3. Mengenlehre (1927, 1935). Deskriptive Mengenlehre und Topologie. Hrsg. von U. Felgner/H. Herrlich/u. a. Berlin, Heidelberg.
- Haverkamp, Anselm (1996): Einleitung in die Theorie der Metapher. In: Theorie der Metapher. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 1–27.
- Heiden, Uwe an der (2002):  $e^{2\pi i} - 1 = 0$ : Warum braucht die Mathematik eine besondere Schrift? In: Über den Umgang mit der Schrift. Hrsg. von Waltraud ›Wara‹ Wende. Würzburg, 251–275.
- Hesse, Mary B. (1970): Models and analogies in science. 2. print. Notre Dame, Ind.
- Heßler, Martina/Mersch, Dieter (2009): Bildlogik oder Was heißt visuelles Denken? In: Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft. Hrsg. von Martina Heßler. Bielefeld, 8–62.
- Hills, David (1997): Aptness and Truth in Verbal Metaphor. In: Philosophical Topics 25.1, 117–153.
- Hoenen, M. J. F. M. (1992): Analogie. In: Historisches Wörterbuch der Rhetorik. Hrsg. von Gerd Ueding/Walter Jens. Bd. 1. Tübingen, 498–514.
- Hofstadter, Douglas R. (2001): Epilogue: Analogy as the Core of Cognition. In: The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science. Hrsg. von Dedre Gentner/Keith J. Holyoak/Boicho N. Kokinov. Cambridge, Mass., 499–538.
- Hörmann, Hans (1971): Semantische Anomalie, Metapher und Witz. In: Folia Linguistica 5, 310–330.
- Iversen, Wiebke (2004):  $2 + \text{zwei} = ?$  Sprachspezifische Einflüsse auf die mentale Zahlenverarbeitung. In: TRANS. Internet-Zeitschrift für Kulturwissenschaften. Nr. 15/2003. URL: [http://www.inst.at/trans/15Nr/06\\_2/iversen15.htm](http://www.inst.at/trans/15Nr/06_2/iversen15.htm) (Zugriff am 15.12.2009).
- (2009): Keine Zahl ohne Zeichen. Der Einfluss der medialen Eigenschaften der DGS-Zahlzeichen auf deren mentale Verarbeitung. Diss. Rheinisch-Westfälische Technische



Hochschule Aachen. URL: [http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus3/volltexte/2009/2654/pdf/Iversen\\_Wiebke.pdf](http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus3/volltexte/2009/2654/pdf/Iversen_Wiebke.pdf).

Jäger, Ludwig (1993): „Language, what ever that may be.“ Die Geschichte der Sprachwissenschaft als Erosionsgeschichte ihres Gegenstandes. In: Zeitschrift für Sprachwissenschaft 12.1, 77–106.

– (2004): Störung und Transparenz. Skizze zur performativen Logik des Medialen. In: Performativität und Medialität. Hrsg. von Sybille Krämer. München, 35–73.

– (2005): Vom Eigensinn des Mediums Sprache. In: Brisante Semantik: neuere Konzepte und Forschungsergebnisse einer kulturwissenschaftlichen Linguistik. Hrsg. von Dietrich Busse/Thomas Niehr/Martin Wengeler. (= Reihe germanistische Linguistik 259). Tübingen, 45–64.

– (2009): Transkriptivität. In: Transkriptionen Nr. 10 – Rückblick, 8–12. URL: [http://kups.uni-koeln.de/2711/1/Transkriptionen\\_Nr-10\\_Sonderausgabe.pdf](http://kups.uni-koeln.de/2711/1/Transkriptionen_Nr-10_Sonderausgabe.pdf).

Jäkel, Olaf (2003): Wie Metaphern Wissen schaffen: die kognitive Metapherntheorie und ihre Anwendung in Modell-Analysen der Diskursbereiche Geistestätigkeit, Wirtschaft, Wissenschaft und Religion. Verb., aktualisierte und erw. Neuaufl. (= Philologia 59). Hamburg.

Johnson, Mark (1981): Introduction: Metaphor in the Philosophical Tradition. In: Philosophical Perspectives on Metaphor. Hrsg. von Mark Johnson, 3–47.

– (1987): The Body in the Mind. The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason. Chicago/London.

– (1992): Philosophical implications of cognitive semantics. In: Cognitive Linguistics 3.4, 345–366.

– (2008): The meaning of the body: aesthetics of human understanding. Chicago, Ill.

Jost, Jörg (2007): Topos und Metapher. Zur Pragmatik und Rhetorik des Verständlichmachens. (= Sprache - Literatur und Geschichte, Studien zur Linguistik/Germanistik 34). Heidelberg.

Kästner, Abraham Gotthelf (1791): Ueber Kunstwörter, besonders in der Mathematik. In: Philosophisches Magazin 3, 255–270.

Katthage, Gerd (2009): Die Türhüter der alten Schule: Metaphernskepsis im Deutschunterricht. In: *metaphorik.de* 16, 17–27. URL: <http://www.metaphorik.de/16/Katthage.pdf>.

- Keller, Rudi (1995): Zeichenbegriff und Metaphern. In: Die Ordnung der Wörter. Kognitive und lexikalische Strukturen. Hrsg. von Gisela Harras. Berlin, 179–192.
- Kemnitz, Arnfried (2002): Mathematik zum Studienbeginn. Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. 5., verbesserte Aufl. Braunschweig, Wiesbaden.
- Kieran, Carolyn (1981): Concepts associated with the equality symbol. In: Educational Studies in Mathematics Bd. 12.3, 317–326.
- Klaus, Georg (1963): Semiotik und Erkenntnistheorie. 2. Aufl. Berlin.
- Knuth, Donald E. (1992): Two Notes on Notation. URL: <http://arxiv.org/pdf/math/9205211v1> (Zugriff am 17. 09. 2010).
- Koch, Peter/Krämer, Sybille (2009): Einleitung. In: Schrift, Medien, Kognition. Über die Exteriorität des Geistes. Hrsg. von Peter Koch/Sybille Krämer. 2., unveränd. Aufl. (= Probleme der Semiotik Bd. 19). Tübingen, 9–26.
- Kohl, Katrin (2007a): Metapher. Stuttgart.
- (2007b): Poetologische Metaphern: Formen und Funktionen in der deutschen Literatur. Berlin.
- Kövecses, Zoltán (1986): Metaphors of anger, pride, and love: a lexical approach to the structure of concepts. Amsterdam, Philadelphia.
- (2000): Metaphor and emotion. Language, Culture, and Body in Human Feeling. (= Studies in emotion and social interaction. Second series.). Cambridge.
- (2002): Metaphor: a practical introduction. Oxford.
- (2011): Methodological issues in conceptual metaphor theory. In: Windows to the mind: metaphor, metonymy and conceptual blending. Hrsg. von Sandra Handl/Hans-Jörg Schmidt. (= Cognitive linguistics research 48). Berlin, 23–39.
- Krämer, Sybille (2000): Über den Zusammenhang zwischen Medien, Sprache und Kulturtechniken. In: Sprache und neue Medien. Hrsg. von Werner Kallmeyer. (= Institut für deutsche Sprache Jahrbuch 1999). Berlin, 31–56.
- (2001): Sprache, Sprechakt, Kommunikation. Sprachtheoretische Positionen des 20. Jahrhunderts. Frankfurt a. M.
- (2003): ›Schriftbildlichkeit‹ oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In: Bild – Schrift – Zahl. Hrsg. von Sybille Krämer/Horst Bredekamp. München, 157–176.

- (2004): Was haben ›Performativität‹ und ›Medialität‹ miteinander zu tun? Plädoyer für eine in der ›Aisthetisierung‹ gründende Konzeption des Performativen. In: Performativität und Medialität. Hrsg. von Sybille Krämer. München, 13–32.
  - (2005): ‚Operationsraum Schrift‘ Über einen Perspektivenwechsel in der Betrachtung der Schrift. In: Schrift: Kulturtechnik zwischen Auge, Hand und Maschine. Hrsg. von Gernot Grube/Werner Kogge/Sybille Krämer. München, 23–57.
  - (2009a): Operative Bildlichkeit. Von der ‚Grammatologie‘ zu einer ‚Diagrammatologie‘? Reflexionen über erkennendes ‚Sehen‘. In: Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft. Hrsg. von Martina Heßler/Dieter Mersch. Bielefeld, 94–122.
  - (2009b): Schrift und Episteme am Beispiel Descartes?. In: Schrift, Medien, Kognition. Über die Exteriorität des Geistes. Hrsg. von Peter Koch/Sybille Krämer. 2., unveränd. Aufl. (= Probleme der Semiotik Bd. 19). Tübingen, 105–126.
- Kraus, M. (1992): Syllogismus. In: Historisches Wörterbuch der Rhetorik. Hrsg. von Gerd Ueding/Walter Jens. Bd. 1. Tübingen, 269–298.
- Kruse, Jan/Biesel, Kay/Schmieder, Christian (2011): Metaphernanalyse. Ein rekonstruktiver Ansatz. (= Qualitative Sozialforschung). Wiesbaden.
- Kuhn, Thomas S. (1976): Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. 2., revidierte u. um d. Postskriptum von 1969 erg. Aufl. Frankfurt a. M.
- Kurz, Gerhard (1993): Metapher, Allegorie, Symbol. 3., bibliogr. erg. Aufl. (= Kleine Vandenhoeck-Reihe 1486). Göttingen.
- Lakoff, George (1987): Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal about the Mind. Chicago/London.
- (1990): The Invariance Hypothesis: is abstract reason based on image-schemas? In: Cognitive Linguistics 1.1, 39–74.
  - (1993): The Contemporary Theory of Metaphor. In: Metaphor and thought. Hrsg. von Andrew Ortony. 2. Aufl. Cambridge, 202–251.
  - (2001): September 11, 2001. URL: <http://www.metaphorik.de/aufsaetze/lakoff-september11.htm> (Zugriff am 14.09.2011).
- Lakoff, George/Johnson, Mark (1999): Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought. New York.
- (2003): Metaphors We Live By. Nachdruck der Erstveröffentlichung von 1980 mit einem neuen Nachwort und Bibliographie. Chicago/London.

- Lakoff, George/Núñez, Rafael E. (1997): *The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics*. In: *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. Hrsg. von Lyn D. English. Mahwah New Jersey, 21–89.
- (1998): *Conceptual Metaphor in Mathematics*. In: *Discourse and Cognition: Bridging the Gap*. Hrsg. von Jean Pierre Koenig. Stanford, Calif., 219–237.
- (2000): *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York.
- Lakoff, George/Turner, Mark (1989): *More than Cool Reason: A Field Guide to Poetic Metaphor*. Chicago/London.
- Lakoff, George/Wehling, Elisabeth (2009): *Auf leisen Sohlen ins Gehirn. Politische Sprache und ihre heimliche Macht*. 2., aktualisierte Aufl. (= *Kommunikation, Gesellschaft*). Heidelberg.
- Le Guern, Michel (1973): *Sémantique de la métaphore et de la métonymie*. Paris.
- Leopold, Cornelia (1991): *Semiotik und die Grundlagen der Mathematik*. In: *Zeitschrift für Semiotik* 13.3-4, 247–256.
- Lieb, Hans-Heinrich ([1967] 1996): *Was bezeichnet der herkömmliche Begriff ‘Metapher’?* In: *Theorie der Metapher*. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 340–355.
- Linz, Erika (2002): *Indiskrete Semantik. Kognitive Linguistik und neurowissenschaftliche Theoriebildung*. München.
- (2004): *Sprachlose Metaphern. Zur Rhetorizität der Kognition und ihrer Modellierung in der kognitiven Linguistik*. In: *Rhetorik. Figuration und Performanz*. Hrsg. von Jürgen Fohrmann. Stuttgart, 246–266.
- Loewenberg, Ina (1975): *Identifying Metaphors*. In: *Foundations of Language* 12, 315–338.
- Lüttich-Hess, Ernest W. B. (1998): *Fachsprachen als Register*. In: *Fachsprachen. Ein internationales Handbuch zur Fachsprachenforschung und Terminologiewissenschaft*. Hrsg. von Lothar Hoffmann/Hartwig Kalverkämper/Ernst Herbert Wiegand. Bd. 1. (= *Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft* 14). Berlin, New York, 208–218.
- Lyons, John (1991): *Bedeutungstheorien*. In: *Semantik. Ein internationales Handbuch der zeitgenössischen Forschung*. Hrsg. von Arnim Stechow/Dieter Wunderlich. Bd. 1. (= *Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft* 6). Berlin, New York, 1–24.

- Marcus, Solomon (1973): *Mathematische Poetik*. (= Linguistische Forschungen 13). Frankfurt a. M.
- May, Michael (1995): Diagrammatisches Denken: Zur Deutung logischer Diagramme als Vorstellungsschemata bei Lakoff und Peirce. In: *Zeitschrift für Semiotik* 17.3-4, 285–305.
- Meibauer, Jörg (2001): *Pragmatik. Eine Einführung*. 2., verbesserte Aufl. Tübingen.
- Mersch, Dieter (2010): Die Geburt der Mathematik aus der Struktur der Schrift. URL: <http://www.dieter-mersch.de/download/mersch.mathematik.und.schrift.pdf> (Zugriff am 18.08.2010).
- Moran, Richard (1997): Metaphor. In: *A Companion to the Philosophy of Language*. Hrsg. von Bob Hale/Crispin Wright. Oxford, 248–268.
- Murphy, Gregory L. (1996): On metaphoric representation. In: *Cognition* 60.2, 173–204.
- (1997): Reasons to doubt the present evidence for metaphoric representation. In: *Cognition* 62.1, 99–108.
- Núñez, Rafael E. (2008): A fresh look at the foundations of mathematics. Gesture and the psychological reality of conceptual metaphor. In: *Metaphor and Gesture*. Hrsg. von Alan Cienki/Cornelia Müller. (= *Gesture studies* 3). Amsterdam, 93–114.
- Núñez, Rafael E./Sweetser, Eve (2006): With the Future Behind Them: Convergent Evidence From Aymara Language and Gesture in the Crosslinguistic Comparison of Spatial Construals of Time. In: *Cognitive Science* 30, 401–450.
- Ortony, Andrew (1975): Why Metaphors Are Necessary And Not Just Nice. In: *Educational Theory* 25.1, 45–53.
- (1979): Beyond Literal Similarity. In: *Psychological Review* 86.3, 161–180.
- Ortony, Andrew/Schallert, Diane L./Reynolds, Ralph E. u. a. (1978): Interpreting Metaphors and Idioms: Some Effects of Context on Comprehension. In: *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior* 17, 465–477.
- Paul, Hermann (1960): *Prinzipien der Sprachgeschichte*. 6., unveränd. Aufl. Tübingen.
- Peña Cervel, Sandra (1998-99): The prepositions *in* and *out* and the trajector-landmark distinction. In: *Revista española de lingüística aplicada* 13, 261–272.
- Pielenz, Michael (1993): *Argumentation und Metapher*. (= *Tübinger Beiträge zur Linguistik* 381). Tübingen.

- Pimm, David (1987): *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms*. New York.
- (2004): Discourse analysis and mathematics education: An anniversary of sorts. URL: [http://www.icme10.dk/proceedings/pages/regular\\_pdf/RL\\_David\\_Pimm.pdf](http://www.icme10.dk/proceedings/pages/regular_pdf/RL_David_Pimm.pdf) (Zugriff am 30.08.2011).
- Presmeg, Norma C. (1997): Reasoning With Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning. In: *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. Hrsg. von Lyn D. English. Mahwah New Jersey, 267–279.
- Puster, Edith (1998): *Erfassen und Erzeugen: die kreative Metapher zwischen Idealismus und Realismus*. (= Philosophische Untersuchungen 6). Tübingen.
- Radden, Günter (1997): Konzeptuelle Metaphern in der kognitiven Semantik. In: *Kognitive Linguistik und Fremdsprachenerwerb*. Hrsg. von Wolfgang Börner/Klaus Vogel. 2., überarbeitete Aufl. Tübingen, 69–88.
- (2003): How metonymic are metaphors? In: *Metaphor and metonymy at the crossroads: a cognitive perspective*. Hrsg. von Antonio Barcelona. Berlin, 93–108.
- (2008): The cognitive approach to language. In: *When Grammar Minds Language and Literature: Festschrift for Prof. Béla Korponay on the Occasion of his 80th Birthday*. Hrsg. von József Andor/Béla Hollósy/Tibor Laczkó u. a. Debrecen.
- Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik. Schuljahrgänge 5-12 (2003). URL: [http://www.bildung-lsa.de/pool/RRL\\_Lehrplaene/mathegyma.pdf](http://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/mathegyma.pdf) (Zugriff am 04.10.2011).
- Reddy, Michael J. (1993): The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. In: *Metaphor and thought*. Hrsg. von Andrew Ortony. 2. Aufl. Cambridge, 164–201.
- Rice, Sally A. (1992): Polysemy and lexical representation: The case of three English prepositions. In: *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society: July 29 to August 1, 1992; Cognitive Science Program, Indiana University, Bloomington. Hillsdale, NJ*, 89–94.
- Richards, Ivor Armstrong ([1936] 1996): Die Metapher. In: *Theorie der Metapher*. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 31–52.
- Rolf, Eckard (2005): *Metaphertheorien: Typologie, Darstellung, Bibliographie*. Berlin.

- Saussure, Ferdinand de (2001): Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft. Hrsg. von Charles Bally/Albert Sechehaye. 3. Aufl. Berlin.
- Schiralli, Martin/Sinclair, Nathalie (2003): A Constructive Response to ‘Where Mathematics Comes From’. In: Educational Studies in Mathematics Bd. 52.1, 79–91.
- Schroeder, Severin (2004): Why Juliet is the Sun. In: Semantik und Ontologie: Beiträge zur philosophischen Forschung. Hrsg. von Mark Siebel/Mark Textor. (= Philosophische Forschung 2). Frankfurt, 63–101. URL: <http://www.reading.ac.uk/AcaDepts/ld/Philos/sjs/Why%20Juliet%20is%20the%20Sun.pdf>.
- Schwarz, Monika (2002): Konzeptuelle Ansätze II: Einebenen-Ansatz vs. Mehrebenen-Ansatz. In: Lexikologie. Ein internationales Handbuch zur Natur und Struktur von Wörter und Wortschätzen. Hrsg. von Alan D. Cruse/Franz Hundsnurscher/Michael Job u. a. Bd. 1. (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 21). Berlin, New York, 277–284.
- Searle, John R. (1982): Ausdruck und Bedeutung: Untersuchungen zur Sprechakttheorie. Übers. von Andreas Kemmerling. (= Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft 349). Frankfurt am Main.
- Sfard, Anna (1995): Reification as the birth of metaphor. In: Tijdschrift voor Didactiek der  $\beta$ -wetenschappen 13.1, 5–25.
- (1997): Commentary: On Metaphorical Roots of Conceptual Growth. In: Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images. Hrsg. von Lyn D. English. Mahwah New Jersey, 339–371.
- Sfard, Anna/Linchevski, Liora (1994): The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. In: Educational Studies in Mathematics Bd. 26.2-3, 191–228.
- Skirl, Helge (2009): Emergenz als Phänomen der Semantik am Beispiel des Metaphernverstehens: emergente konzeptuelle Merkmale an der Schnittstelle von Semantik und Pragmatik. (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 515). Tübingen.
- (2010): Kompositumsmetaphern – semantische Innovation und textpragmatische Funktion. In: *metaphorik.de* 19, 23–45. URL: <http://www.metaphorik.de/19/skirl.pdf>.
- Skirl, Helge/Schwarz-Friesel, Monika (2007): Metapher. (= Kurze Einführungen in die germanistische Linguistik Band 4). Heidelberg.
- Slavit, David (1997): An alternate route to the reification of function. In: Educational Studies in Mathematics Bd. 33.3, 259–281.

- Sontag, Susan (2005): *Krankheit als Metapher & Aids und seine Metaphern*. Übers. von Karin Kersten/Caroline Neubaur/Holger Fliessbach. 2. Aufl. Frankfurt am Main.
- Sperber, Dan/Wilson, Deidre (1995): *Relevance. Communication and Cognition*. 2. Oxford.
- Stählin, Wilhelm (1914): Zur Psychologie und Statistik der Metaphern. In: *Archiv für die gesamte Psychologie* 31, 297–425.
- Steen, Gerard J./Dorst, Aletta G./Herrmann, J. Berenike u. a. (2010): Metaphor in usage. In: *Cognitive Linguistics* 21.4, 765–796.
- Stefanowitsch, Anatol (2006a): Corpus-based approaches to metaphor and metonymy. In: *Corpus-based approaches to metaphor and metonymy*. Hrsg. von Anatol Stefanowitsch/Stefan Th. Gries. (= *Trends in Linguistics. Studies and Monographs* 171). Berlin, New York, 1–16.
- (2006b): Words and their metaphors: A corpus-based approach. In: *Corpus-based approaches to metaphor and metonymy*. Hrsg. von Anatol Stefanowitsch/Stefan Th. Gries. (= *Trends in Linguistics. Studies and Monographs* 171). Berlin, New York, 63–105.
- Steiner, Jacob (1898): *Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie*. Hrsg. von Heinrich Schröter/Rudolf Sturm. 3. Aufl. Bd. 2: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften. Leipzig.
- Stern, Josef (2000): *Metaphor in Context*. Cambridge, Mass.
- (2006): Metaphor, Literal, Literalism. In: *Mind & Language* 21.3, 243–279.
- Studel-Günther, Andrea (1995): *Analogie und Paraphrase in Fach- und Gemeinsprache: Modalitäten der Wort- und Terminologieschöpfung*. (= *Abhandlungen zur Sprache und Literatur* 81). Bonn.
- Störel, Thomas (1997): *Metaphorik im Fach: Bildfelder in der musikwissenschaftlichen Kommunikation*. (= *Forum für Fachsprachen-Forschung* Bd. 30). Tübingen.
- Tapp, Christian (2005): *Kardinalität und Kardinäle: wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit*. (= *Wissenschaftsgeschichte* 53). Stuttgart.
- Tasmir, Pessia (1999): The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. In: *Educational Studies in Mathematics* Bd. 38.1-3, 209–234.



- Teubert, Wolfgang (2006): Über den fragwürdigen Nutzen mentaler Konzepte. In: Von Intentionalität zur Bedeutung konventionalisierter Zeichen: Festschrift für Gisela Harras zum 65. Geburtstag. Hrsg. von Kristel Proost/Edeltraud Winkler/Gisela Harras. (= Studien zur deutschen Sprache 35). Tübingen, 289–326.
- Tversky, Amos (1977): Features of Similarity. In: *Psychological Review* 84.4, 327–352.
- Venn, John (1880): On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasoning. In: *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science* 10.5, 1–18.
- Wearing, Catherine (2006): Metaphor and What is Saird. In: *Mind & Language* 21.3, 310–332.
- Weinrich, Harald ([1976] 1996): Semantik der kühnen Metapher. In: *Theorie der Metapher*. Hrsg. von Anselm Haverkamp. 2. Aufl. Darmstadt, 316–339.
- (1967): Semantik der Metapher. In: *Folia Linguistica* 1, 3–17.
- (1976): *Sprache in Texten*. Stuttgart.
- Weinrich, Harald/Heckhausen, Heinz/Suerbaum, Ulrich u. a. (1968): Die Metapher (Bochumer Diskussion). In: *Poetica* 2, 100–130.
- Weyl, Hermann (1929): Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. In: *Mathematische Zeitschrift* 10.1-2, 39–79.
- Wildgen, Wolfgang (2008): *Kognitive Grammatik. Klassische Paradigmen und neue Perspektiven*. Berlin.
- Willems, Klaas (1997): *Kasus, grammatische Bedeutung und kognitive Linguistik: ein Beitrag zur allgemeinen Sprachwissenschaft*. (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 427). Tübingen.
- Zermelo, Ernst (2010): *Ernst Zermelo – Collected Works/Gesammelte Werke: Volume I – Set Theory, Miscellanea/Band I – Mengenlehre, Varia*. Hrsg. von Heinz-Dieter Ebbingshaus/Craig G. Fraser/Akihiro Kanamori. (= Schriften der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 21). Berlin, Heidelberg.



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name	Martin Raschauer
Geburtsdatum	03.09.1982
Geburtsort	Magdeburg
Staatsangehörigkeit	deutsch

## Schulbildung

1989-1993	Grundschule Rosa Luxemburg Magdeburg
1993-2002	Geschwister-Scholl-Gymnasium Magdeburg

## Studium

10/2003-06/2008	Lehramtsstudium Deutsch und Mathematik an Gymnasien an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg Studienabschluss: Erstes Staatsexamen
08/2008-03/2013	Promotionsstudium an der Otto-von-Guericke- Universität Magdeburg

## Referendariat

04/2013-07/2014	Studienreferendar für das Lehramt an Gymnasien in Sachsen-Anhalt Studienabschluss: Zweites Staatsexamen
-----------------	---