



OTTO VON GUERICKE  
UNIVERSITÄT  
MAGDEBURG



FAKULTÄT FÜR  
MASCHINENBAU

# Simulation gleitgelagerter Systeme in Mehrkörperprogrammen unter Berücksichtigung mechanischer und thermischer Deformationen

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Elmar Woschke

geb. am 23.03.1982 in Magdeburg

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Jens Strackeljan  
Prof. Dr.-Ing. Hubert Schwarze

Promotionskolloquium am 21.02.2013



# Vorwort

Im Rahmen verschiedener Projekte und nach vielfältiger Zusammenarbeit mit anderen Forschungsstellen entstand der Wunsch der Definition eines offenen und modifizierbaren Algorithmus zur numerischen Beschreibung der nichtlinearen Eigenschaften von Gleitlagerungen und deren Auswirkungen auf die Rotordynamik. Eine Umsetzung ist in der vorliegenden Arbeit zusammengefasst, welche während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, Lehrstuhl für technische Dynamik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg entstand.

Mein Dank gilt insbesondere Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jens Strackeljan, dem Inhaber des Lehrstuhls für Mechanik und Rektor der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, für die Zeit, die vielen Diskussionen und wissenschaftlichen Anregungen, die zur Erstellung der Arbeit beigetragen haben.

Ferner möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Hubert Schwarze, Leiter des Instituts für Tribologie und Energiewandlungsmaschinen der Technischen Universität Clausthal, für die konstruktive Arbeit innerhalb dieser und der an diese Arbeit angrenzenden Projekte sowie die bereitwillige Annahme der Gutachtenerstellung bedanken.

Für das angenehme Arbeitsklima innerhalb der Zeit, die zur Fertigstellung der Arbeit notwendig war, und für den kreativen Gedankenaustausch möchte ich mich bei allen Kollegen und Kolleginnen des Instituts für Mechanik bedanken. Besonderen Dank sagen möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Christian Daniel für die schon seit Jahren andauernde anregende Zusammenarbeit und Herrn Dipl.-Ing. Steffen Nitzschke für die unermüdlichen Debatten über interdisziplinäre Fragen.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie, die mich vorbehaltlos unterstützt hat und mit ihrer Liebe und dem Rückhalt, den ich erfahren durfte, einen entscheidenden Anteil an dieser Arbeit hat.

Für meine Frau und meine Töchter.

# Inhaltsverzeichnis

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Formelzeichen</b>  | <b>VII</b>  |
| <b>Kurzfassung</b>  | <b>XIII</b> |
| <b>Abstract</b>   | <b>XIV</b>  |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1 Motivation . . . . .  | 1           |
| 1.2 Stand der Forschung . . . . .   | 2           |
| 1.3 Ziele der Arbeit und Umsetzung . . . . .                                | 5           |
| <b>2 Theoretische Grundlagen</b>  | <b>8</b>    |
| 2.1 Hydrodynamik . . . . .  | 8           |
| 2.1.1 Masse- und Impulserhaltung einer Strömung . . . . .                   | 8           |
| 2.1.2 Reynoldsgleichung . . . . .   | 11          |
| 2.1.3 Randbedingungen der Reynoldsgleichung . . . . .                       | 13          |
| 2.1.4 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung . . . . .                     | 16          |
| 2.2 Thermodynamik . . . . .   | 23          |
| 2.2.1 Energieerhaltung einer Strömung . . . . .                             | 23          |
| 2.2.2 Energiegleichung . . . . .  | 25          |
| 2.2.3 Randbedingungen der Energiegleichung . . . . .                        | 27          |
| 2.2.4 Numerische Lösung der Energiegleichung . . . . .                      | 28          |
| 2.3 Strukturdynamik . . . . .   | 31          |
| 2.3.1 Thermomechanische FE-Formulierung . . . . .                           | 31          |
| 2.3.2 Systemreduktion . . . . .   | 37          |
| 2.3.3 Frequency-Response-Modes . . . . .                                    | 42          |
| 2.4 Mehrkörperdynamik . . . . .   | 44          |
| 2.4.1 Grundgleichungen der Bewegung . . . . .                               | 45          |
| 2.4.2 Hamiltonsches Prinzip - Bewegungsdifferentialgleichung . . . . .      | 46          |
| 2.4.3 Volumenintegrale . . . . .  | 49          |
| 2.4.4 Zeitintegration . . . . .   | 50          |
| <b>3 Einbindung thermomechanischer Körper in Mehrkörpersimulationen</b>     | <b>52</b>   |
| <b>4 Einbindung thermomechanischer Gleitlager in Mehrkörpersimulationen</b> | <b>55</b>   |
| 4.1 Kinematische Eingangsgrößen . . . . .                                   | 56          |
| 4.1.1 Parallelsplatt - HD parallel . . . . .                                | 57          |
| 4.1.2 Schiefstellung - HD schief . . . . .                                  | 58          |
| 4.1.3 Elastische Deformation - EHD . . . . .                                | 59          |
| 4.2 Mischreibung . . . . .  | 60          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3      | Resultierende Kräfte und Momente . . . . .   | 62         |
| 4.3.1    | Tragkraft . . . . .  | 62         |
| 4.3.2    | Lagermoment . . . . .  | 63         |
| 4.3.3    | Reibmoment . . . . .   | 63         |
| 4.4      | Zeitschrittübergreifender Datentransfer . . . . .                                    | 65         |
| <b>5</b> | <b>Referenzmodelle</b>   | <b>67</b>  |
| 5.1      | Quasistatisches Vergleichsmodell mit Temperatureinfluss . . . . .                    | 67         |
| 5.2      | Rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss . . . . .                  | 69         |
| <b>6</b> | <b>Anwendungsbeispiel Lagerbock</b>  | <b>74</b>  |
| 6.1      | Berücksichtigung der Elastizität des Lagerbocks . . . . .                            | 75         |
| 6.1.1    | Auswahl der Eigenformen zur Beschreibung der mechanischen Deformation . . . . .      | 78         |
| 6.2      | Berücksichtigung der thermischen Eigenschaften des Lagerbocks . . . . .              | 79         |
| 6.3      | Berücksichtigung thermischer und mechanischer Deformationen des Lagerbocks . . . . . | 81         |
| 6.4      | Berücksichtigung der thermomechanischen Eigenschaften der Welle . . . . .            | 83         |
| <b>7</b> | <b>Anwendungsbeispiel Kurbeltrieb</b>  | <b>85</b>  |
| 7.1      | Kurbeltrieb starr - Einfluss Kavitation . . . . .                                    | 89         |
| 7.2      | Kurbeltrieb elastisch . . . . .  | 91         |
| 7.2.1    | Berücksichtigung der Schiefstellung der Kurbelwelle . . . . .                        | 96         |
| 7.2.2    | Einfluss der Master-Slave-Reduktion . . . . .  | 97         |
| 7.2.3    | Berechnung der resultierenden Spannungen . . . . .                                   | 98         |
| <b>8</b> | <b>Zusammenfassung</b>   | <b>100</b> |
| <b>A</b> | <b>Anhang</b>  | <b>102</b> |
| A.1      | Notwendige mathematische Beziehungen . . . . .                                       | 102        |
| A.2      | Strukturdynamik . . . . .  | 104        |
| A.3      | Mehrkörperdynamik . . . . .  | 106        |
| A.4      | Referenzmodelle . . . . .  | 110        |
| A.5      | Anwendungsbeispiel Kurbeltrieb . . . . .   | 112        |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>113</b> |

# Formelzeichen

## Indizes

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $(\cdot)_I$                  | Lagerschale   |
| $(\cdot)_{II}$               | Welle   |
| $(\cdot)^*$                  | Bezugsgröße   |
| $(\cdot)'$                   | zeitliche Ableitung im körperfesten Bezugssystem  |
| $(\cdot)$                    | zeitliche Ableitung im Inertialsystem   |
| $(\cdot)^{-1'}$              | Pseudoinverse   |
| $(\cdot)$                    | Amplitude   |
| $(\cdot)$                    | modal   |
| $(\cdot)$                    | Tildematrix   |
| $(\cdot)_a$                  | äußere  |
| $(\cdot)_A$                  | körperfestes Bezugssystem   |
| $(\cdot)_{amb}$              | Umgebung  |
| $(\cdot)_{aus}$              | Austritt  |
| $(\cdot)_{ax}$               | axial   |
| $(\cdot)^b$ bzw. $(\cdot)_b$ | bzgl. des Randgebiets   |
| $(\cdot)_c$                  | Festkörperkontakt   |
| $(\cdot)_C$                  | Couette-Strömung  |
| $(\cdot)_{cav}$              | Kavitationsgebiet   |
| $(\cdot)_{CG}$               | Massenmittelpunkt   |
| $(\cdot)_{CMS}$              | Component-Mode-Synthesis  |
| $(\cdot)_{diss}$             | Dissipation   |
| $(\cdot)_{e, w, n, s}$       | Diskretisierung auf den Grenzen des Kontrollvolumens  |
| $(\cdot)_{E, W, N, S, 0,}$   | Diskretisierung in der Mitte des aktuellen Kontrollvolumens bzw. der angrenzenden Kontrollvolumen |
| $(\cdot)_{el}$               | elastisch   |
| $(\cdot)_{fric}$             | Reibung   |
| $(\cdot)_{frm}$              | Frequency-Response-Mode   |
| $(\cdot)_G$                  | Guyan-Reduktion   |
| $(\cdot)_{gas}$              | Luft  |
| $(\cdot)_{grav}$             | Gravitation   |
| $(\cdot)_h$                  | hydrodynamisch  |
| $(\cdot)^h$                  | homogen   |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $I(\cdot)$                   | inertialsystemfest                                |
| $(\cdot)_{in}$               | innere  |
| $(\cdot)_{IRS}$              | Improved Reduction System                         |
| $(\cdot)_{kin}$              | kinetisch   |
| $(\cdot)_{\Delta kin}$       | Änderung kinematischer Größen                     |
| $(\cdot)_{kond}$             | Konduktion  |
| $(\cdot)_{konv}$             | Konvektion  |
| $(\cdot)_{liq}$              | Schmierstoff                                      |
| $(\cdot)_m$                  | gemittelt   |
| $(\cdot)_{max}$              | maximal   |
| $(\cdot)_{mean}$             | in Breiten- und Umfangsrichtung gemittelt         |
| $(\cdot)_{MBS}$              | Mehrkörpersystem                                  |
| $(\cdot)_{nom}$              | normal  |
| $(\cdot)^o$                  | orthogonal  |
| $(\cdot)^p$                  | partikulär  |
| $(\cdot)_P$                  | Poiseuille-Strömung                               |
| $(\cdot)_{pres}$             | Druckgebiet                                       |
| $(\cdot)^r$                  | residual  |
| $(\cdot)_{rad}$              | radial  |
| $(\cdot)_{red}$              | reduziert   |
| $(\cdot)_{res}$              | resultierend                                      |
| $(\cdot)_{rot}$              | rotatorisch                                       |
| $(\cdot)_{sph}$              | kreisförmig                                       |
| $(\cdot)_{SEREP}$            | System Equivalent Reduction and Expansion Process |
| $(\cdot)_t$                  | thermisch   |
| $(\cdot)_T$                  | Zuführbohrung/Tasche                              |
| $(\cdot)_{tang}$             | tangential  |
| $(\cdot)_{trans}$            | translatorisch                                    |
| $(\cdot)_u$                  | mechanisch  |
| $(\cdot)^v$ bzw. $(\cdot)_v$ | bzgl. des Volumens                                |
| $(\cdot)_{x, y, z}$          | in Richtung der Koordinate x, y, z wirkend        |
| $\mathbb{E}(\cdot)$          | elementlokal                                      |
| $(\cdot)_M$                  | Master  |
| $(\cdot)_S$                  | Slave   |
| $(\cdot)_{\Delta\theta}$     | Änderung der Spaltfüllung                         |
| $(\cdot)_\omega$             | aus Starrkörperrotation resultierend              |

## Skalare Größen

|                 |  |                           |
|-----------------|--|---------------------------|
| $a$             | Residualkoeffizienten  | elementspez.              |
| $A$             | Abkürzung  | –                         |
| $b$             | Breite des Lagers  | $m$                       |
| $B$             | Fläche   | $m^2$                     |
| $c_1, c_2, c_3$ | Konstanten der Vogelgleichung  | $Pa\ s, K, K$             |
| $c_4, c_5, c_6$ | Konstanten der Elastizitätsmatrix  | $N/m^2$                   |
| $c_v$           | spezifische Wärmekapazität   | $J/kg/K$                  |
| $d$             | Durchmesser der Lagerpartner   | $m$                       |
| $e$             | Entropiedichte   | $J/m^3/K$                 |
| $E$             | Energie  | $J$                       |
| $ex$            | Exzentrizität  | $m$                       |
| $F$             | Kraft  | $N$                       |
| $g$             | Gravitationskonstante  | $m/s^2$                   |
| $G$             | Gibbs-Potential  | $J/m^3$                   |
| $h, \dot{h}$    | Spalt- und Spaltänderungsfunktion  | $m, m/s$                  |
| $H$             | dim.-lose Spaltfunktion<br>$H = h/\Delta r$                                    | –                         |
| $\dot{H}$       | dim.-lose Spaltänderungsfunktion<br>$\dot{H} = \dot{h} r_I / ( u_m  \Delta r)$ | –                         |
| $hf$            | Konvektions- bzw. Filmkoeffizient  | $W/K/m^2$                 |
| $l$             | Abstand  | $m$                       |
| $L$             | Moment   | $Nm$                      |
| $k$             | Kavitationsindex   | –                         |
| $Kd$            | Dissipationsfaktor<br>$Kd = \eta^*  u_m  / (\rho c_v T^* \psi \Delta r)$       | –                         |
| $m$             | Masse  | $m^2$                     |
| $MAC$           | Modal Assurance Criterion  | –                         |
| $MPF$           | Mode Participation Factor  | –                         |
| $p$             | Druck  | $N/m^2$                   |
| $P$             | dim.-loser hydrodynamischer Druck<br>$P = p_h \Delta r^2 / (\eta^*  u_m  r_I)$ | –                         |
| $Pe$            | Péclet-Zahl<br>$Pe = \mathcal{V} \Delta x / \Gamma$                            | –                         |
| $Pr$            | Prandtl-Zahl<br>$Pr = \eta^* c_v / \lambda$                                    | –                         |
| $q$             | Wärmestromdichte   | $W/m^2, W/m^3,$<br>$W/kg$ |
| $Q$             | dim.-loser Volumenstrom  | –                         |
| $r$             | Radius der Lagerpartner  | $m$                       |
| $\Delta r$      | absolutes Lagerspiel<br>$\Delta r = r_I - r_{II}$                              | $m$                       |
| $Re$            | Reynolds-Zahl<br>$Re = \rho  u_m  \Delta r / \eta^*$                           | –                         |
| $s$             | Volumenlast  | $N/m^3$                   |
| $S$             | Wärmequellendichte   | $W/m^3$                   |

|                      |   |              |
|----------------------|---|--------------|
| $t$                  | Zeit  | $s$          |
| $\bar{t}$            | dim.-lose Zeit<br>$\bar{t} = t  u_m  / r_I$   | —            |
| $\Delta\bar{t}$      | dim.-lose zeitliche Differenz zum vorangegangenen Lösungsschritt $\Delta\bar{t} = \Delta t  u_m  / r_I$ | —            |
| $u, v, w$            | Geschwindigkeiten in x-, y-, z-Richtung   | $m/s$        |
| $U$                  | dim.-lose Geschwindigkeit in X-Richtung<br>$U = u /  u_m $  | —            |
| $V$                  | Volumen   | $m^3$        |
| $W$                  | Arbeit der mechanischen Lasten  | $Nm$         |
| $x, y, z$            | kartesische Koordinaten   | $m$          |
| $X, Y, Z$            | dim.-lose kartesische Koordinaten<br>$X, Y = x, y / r_I, Z = z / \zeta$                                 | —            |
| $\Delta X, \Delta Y$ | dim.-lose Abstände in x-, y-Richtung<br>$\Delta X, \Delta Y = \Delta x, \Delta y / r_I$                 | —            |
| $\bar{z}$            | auf die Spaltfunktion bezogene Spalthöhenkoordinate<br>$\bar{z} = z / h$                                | —            |
| $\mathbb{E}$         | Elastizitätsmodul   | $N/m^2$      |
| $\mathcal{H}$        | Wärmestrompotential/ -flusspotential  | $W K/m^3$    |
| $n$                  | Anzahl  | —            |
| $s$                  | Abstand zur Profilmittellinie   | $m$          |
| $\bar{s}$            | dim.-loser Abstand zur Profilmittellinie<br>$\bar{s} = s / \zeta$                                       | —            |
| $\mathcal{V}$        | dim.-lose konvektive Terme der Energiegleichung   | —            |
| $\eta$               | Dichte der Rauheitsgipfel   | $1/m^2$      |
| $\alpha$             | Wärmeausdehnungskoeffizient   | $1/K$        |
| $\check{\alpha}$     | Krümmungswinkel zwischen den Lageroberflächen   | $rad$        |
| $\beta, \gamma$      | Faktoren der Rayleigh-Dämpfung  | elementspez. |
| $\Gamma$             | dim.-lose konduktive Terme der Energiegleichung   | —            |
| $\zeta$              | Standardabweichung der Rauheitsverteilung   | $m$          |
| $\eta$               | dynamische Viskosität   | $Pa s$       |
| $\bar{\eta}$         | dim.-lose dynamische Viskosität<br>$\bar{\eta} = \eta_{liq} / \eta^*$                                   | —            |
| $\theta$             | absolute Temperatur   | $K$          |
| $\vartheta$          | Spaltfüllungsgrad   | —            |
| $\Theta$             | dim.-lose Temperatur<br>$\Theta = T / T^*$  | —            |
| $\lambda$            | Wärmeleitfähigkeit  | $W/m/K$      |
| $\nu$                | Querkontraktionszahl  | —            |
| $\mu$                | mittlerer Radius der Rauheitsgipfel   | $m$          |
| $\Pi$                | druckähnliche Funktion  | —            |
| $\xi$                | Winkelkoordinate des kleinsten Schmierspalts  | $rad$        |
| $\Xi$                | thermodynamische Funktion   | $J$          |
| $\rho$               | Dichte  | $kg/m^3$     |

|                  |                                |         |
|------------------|--------------------------------|---------|
| $\sigma$         | Normalspannung                 | $N/m^2$ |
| $\Sigma$         | thermische Funktion            | $W K$   |
| $\tau$           | Schubspannung                  | $N/m^2$ |
| $\phi$           | Verteilungsdichtefunktion      | –       |
| $\varphi$        | Winkelkoordinate               | $rad$   |
| $\Phi$           | Dissipationsfunktion           | $1/s^2$ |
| $\psi$           | relatives Lagerspiel           | –       |
|                  | $\psi = \Delta r/r_I$          |         |
| $\Psi$           | dim.-lose Dissipationsfunktion | –       |
| $\omega$         | Winkelgeschwindigkeit          | $1/s$   |
| $\tilde{\omega}$ | Eigenkreisfrequenz             | $1/s$   |
| $\Omega$         | Drehfrequenz der Anregung      | $1/s$   |

### Vektorielle und matrizielle Größen

|  |   |              |
|--|---|--------------|
| $\underline{b}$                            | Zustandsvektor des Mehrkörpersystems  | elementspez. |
| $\underline{\underline{B}}$                | Verzerrungsmatrix   | elementspez. |
| $\underline{c}$                            | Ortsvektor vom Referenzsystem zu einem Punkt (starr)                                | $m$          |
| $\underline{\underline{C}}$                | Matrizen zur Beschreibung der Kopplung zwischen Starrkörperbewegung und Deformation | elementspez. |
| $\underline{d}$                            | Ortsvektor vom Referenzsystem zu einem Punkt (elastisch)                            | $m$          |
| $\underline{\underline{D}}$                | Dämpfungsmatrix   | elementspez. |
| $\underline{\underline{e}}$                | Orientierung  | –            |
| $\underline{F}$                            | Kraftvektor   | $N$          |
| $\underline{\underline{G}}$                | Matrizen zur Beschreibung der Corioliskräfte  | elementspez. |
| $\underline{h}$                            | Lastvektor  | elementspez. |
| $\underline{\underline{J}}$                | Massenträgheitsmatrix   | $kg m^2$     |
| $\underline{\underline{K}}$                | Steifigkeitsmatrix  | elementspez. |
| $\underline{L}$                            | Momentenvektor  | $Nm$         |
| $\underline{\underline{M}}$                | Massenmatrix  | elementspez. |
| $\underline{n}$                            | Normalenvektor  | –            |
| $\underline{\underline{N}}$                | Matrix der Ansatzfunktionen   | –            |
| $\underline{\underline{O}}, \underline{o}$ | Matrizen bzw. Vektoren zur Beschreibung der Zentrifugalkräfte                       | elementspez. |
| $\underline{\underline{P}}$                | Reduktionsmatrix für IRS-Reduktion  | elementspez. |
| $\underline{q}$                            | Vektor der Wärmestromdichte   | $W/m^2$      |
| $\underline{\underline{Q}}$                | Transformationsmatrix   | –            |
| $\underline{r}$                            | Ortsvektor vom Inertialsystem zu einem Punkt  | $m$          |
| $\underline{\underline{R}}$                | Transformationsmatrizen einzelner kinematischer Komponenten                         | elementspez. |

|  |  |                  |
|--|--|------------------|
| $\underline{s}$  | Lastvektor                                     | elementspez.     |
| $\underline{S}$  | Systemmatrix                                   | elementspez.     |
| $\underline{u}$  | Verschiebungsvektor                            | elementspez.     |
| $\underline{z}$  | Vektor der Knotenkoordinaten                   | elementspez.     |
| $\underline{\mathbb{H}}, \underline{\mathbb{H}}, \underline{\mathbb{H}}$ | Elemente zur Beschreibung des Materialgesetzes | elementspez.     |
| $\underline{\mathcal{L}}$ bzw. $\underline{\mathcal{L}}$                 | Differentialoperator                           | elementspez.     |
| $\underline{\mathcal{S}}$  | Sammelmatrix elementlokal zu global            | –                |
| $\underline{\mathbf{p}}$   | formaler Vektor zur Zustandsraumdarstellung    | elementspez.     |
| $\underline{\Gamma}$   | Transformationsmatrix ins Bezugssystem         | –                |
| $\underline{\Lambda}$  | Konduktivitätsmatrix                           | W/m/K            |
| $\underline{\epsilon}$   | Dehnungsvektor (Voigt-Notation)                | –                |
| $\underline{\sigma}$   | Spannungsvektor (Voigt-Notation)               | N/m <sup>2</sup> |
| $\underline{\varphi}$  | Verdrehungsvektor                              | rad              |
| $\underline{\Phi}$   | Modalmatrix                                    | elementspez.     |
| $\underline{\Psi}$   | Modalmatrix der Verdrehungen                   | elementspez.     |
| $\underline{\omega}$   | Vektor der Winkelgeschwindigkeiten             | 1/s              |
| $\underline{\Omega}$   | Sammelvektor der Winkelgeschwindigkeiten       | 1/s <sup>2</sup> |
| $\underline{\nabla}$   | Nabla-Operator                                 |                  |

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zur numerischen Simulation dynamisch belasteter gleitgelagerter Systeme dar, deren Beschreibung innerhalb einer Mehrkörpersimulation erfolgt. Die Einbindung der Gleitlager wird als Formulierung nichtlinearer Krafterelemente unter Lösung der vollständigen Reynoldsgleichung umgesetzt, deren Eingangsparameter die kinematischen Größen und äußeren Kräfte innerhalb einer Zeitintegration sind. Zusätzlich werden thermische Effekte durch numerische Lösung der Energiegleichung und ihre Rückwirkung auf die hydrodynamischen Eigenschaften berücksichtigt. Ferner können neben der Abbildung der Lagerpartner durch starre Körper elastische Deformationen aufgrund wirkender mechanischer und thermischer Lasten im Sinne einer vollständigen rückwirkungsbehafteten TEHD-Modellierung in die Simulationen einbezogen werden. Die resultierende Notwendigkeit der Einbindung thermomechanisch gekoppelter Körper in die Mehrkörpersimulation wird unter Verwendung modaler Ansätze erreicht, um eine numerisch effiziente Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen im Zeitbereich zu realisieren.

# Abstract

The present thesis represents a contribution to the field of numerical simulation of dynamically loaded systems within floating bearings, which are described in multibody-simulations. The implementation of the floating bearings is realised as formulation of nonlinear force-elements under solution of the complete Reynolds equation within a time integration formulation. The input parameters are given by the kinematic quantities and the outer forces during every timestep. Additionally thermal effects are included by numerical solution of the energy equation. Their retroactions on the hydrodynamic characteristics are also taken into account. Further, besides the modelling of the bearing partners as rigid bodies, elastic deformations due to mechanical and thermal loads in terms of a complete retroactive TEHD-modelling can be considered in the simulation. The resulting need of implementation of thermomechanically coupled bodies in a multibody-simulation is achieved by usage of modal transformations to increase the numerical efficiency of the solution of the equation of motion in time domain.

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Bedingt durch die unablässig steigende Anzahl technischer Anwendungsgebiete und die beständig zunehmenden Anforderungen ist die Prognose des Systemverhaltens rotordynamischer Systeme auf Basis numerischer Simulationen von zentraler Bedeutung. Damit einher geht die Forderung die Güte der Systembeschreibung zu erhöhen, was dazu führt, dass kontinuierlich die Komplexität der Abbildung technischer Systeme gesteigert, zusätzliche Wechselwirkungen berücksichtigt und die Systemgrenzen erweitert werden. In diesem Rahmen ergeben sich Möglichkeiten zur verbesserten Prognose des Stabilitätsverhaltens oder zur Identifizierung von Potentialen zur Steigerung der Effizienz der Systeme.

Für den sicheren Betrieb und die fehlerfreie Nutzung von Rotorsystemen stellen die Dimensionierung der Lagerung und die Kenntnis der Interaktion mit dem Rotorsystem einen kritischen Punkt dar. Bereits in einem frühen Stadium der Konzeptionierung müssen, aufgrund des Übergangs vom rotierenden in das stehende System und der damit verbundenen Auswirkungen auf die Anschlussmaße sowohl des Rotors als auch des Fundaments, die Lagereigenschaften und das dadurch beeinflusste Verhalten des Gesamtsystems zuverlässig vorausberechnet werden. Die mechanischen und thermischen Anforderungen im Bereich der Lagerung von Maschinenwellen werden in einer Vielzahl von Anwendungen, bedingt durch ihre Langlebigkeit, die guten Dämpfungs- und Kühlungseigenschaften, den geringen Bauraum und die potentiellen Notlaufeigenschaften, am besten von flüssigkeitsgeschmierten Radialgleitlagern erfüllt.

Die Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften der Gleitlagerung basiert auf den fundamentalen Gesetzen der Hydrodynamik, welche sich aus Erhaltungssätzen ableiten lassen und auf Navier und Stokes zurückgehen. Unter Einführung von Annahmen, deren Gültigkeit im Rahmen der Gleitlagersimulation gegeben ist, konnte durch Reynolds die bis zum heutigen Zeitpunkt verwendete Reynoldsgleichung zur Abbildung der hydrodynamischen Druckentwicklung und damit der Lagereigenschaften im Gleitlager determiniert werden. Zusätzlich existieren Wechselwirkungen zwischen den thermischen und mechanischen Eigenschaften von Gleitlagern, wodurch neben der Bestimmung der Tragkraft auch die Temperaturverteilung innerhalb des Gleitlagers, welche durch die Energiegleichung beschrieben wird, von Interesse ist. Damit stehen prinzipiell mathematische Modelle zur Verfügung, welche das physikalische Verhalten des Schmiermittels innerhalb der Lagerung beschreiben und somit unter Definition geeigneter Randbedingungen eine Simulation der Lagereigenschaften ermöglichen.

Problematisch gestaltet sich die realitätsnahe Definition dieser Randbedingungen wie z.B. die Abbildung der Auswirkungen elastischer Deformationen des Rotors oder der Schale und die Einbindung zusätzlicher Effekte, wie z.B. Kavitation oder Mischreibung, welche unter bestimmten Bedingungen einen wesentlichen Einfluss auf die Lagerung aufweisen können und sich deshalb beständig im Fokus aktueller Forschung befinden.

Grundlage der Gleitlagersimulation sind die wirkenden äußeren Lasten und der aktuelle Bewegungszustand der Lagerpartner. Ausgehend von dieser Kenntnis wird in der Mehrzahl der Veröffentlichungen zur Simulation von Radialgleitlagern die Position und ggf. Orientierung der Welle innerhalb der Lagerschale iterativ bestimmt, die zu einem Druckaufbau führt, welcher mit der äußeren Last im Gleichgewicht steht. Innerhalb der Iteration wird abhängig vom Detaillierungsgrad zusätzlich die Temperaturverteilung im Gleitlager berechnet und deren Rückwirkung auf den Druckverlauf berücksichtigt. Die Veränderung der Lage der Welle und etwaige Deformationen können innerhalb der beschriebenen Vorgehensweise zeitlos erfolgen, was aus der Vernachlässigung der Trägheitseffekte der beteiligten Lagerpartner resultiert. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist auf quasistatische Bewegungen reduziert, wodurch das Anwendungsgebiet dieser Verfahren beschränkt wird.

Für die Berücksichtigung dynamischer Effekte sowie die Untersuchung der Auswirkungen der Lagerung auf das Systemverhalten des Rotorsystems bietet sich die Verwendung von MKS<sup>1</sup>-Programmen an, innerhalb derer die Bewegungsdifferentialgleichungen der beteiligten Körper unter Einbeziehung aller Trägheitseinflüsse auf das System sowie potentieller transients elastische Deformationen gelöst werden. Die Abbildung der Gleitlagerungen erfolgt, bedingt durch die notwendigen Rechenzeiten, üblicherweise unter Verwendung von linearisierten Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften in Form von Kennfeldlösungen.

Im Zuge des kontinuierlichen Trends zur Steigerung des Wirkungsgrads technischer Systeme verringern sich die Trägheitseigenschaften der Rotoren, während häufig gleichzeitig die Drehzahlen gesteigert werden sollen. Beides verstärkt den Einfluss dynamischer Effekte auf das Rotorsystem. Zudem besteht die Notwendigkeit der realitätsnahen Abbildung der Gleitlager in einer Güte, wie sie bei quasistationären Lösungen etabliert ist, innerhalb einer ganzheitlichen rückwirkungsbehafteten dynamischen Simulation, wodurch umfassendere Lösungskonzepte Anwendung finden müssen.

## 1.2 Stand der Forschung

Die Simulation des dynamischen Verhaltens gleitgelagerter Rotoren zeichnet sich durch eine hohe Interdisziplinarität verschiedener mechanischer Aspekte aus. Die Abbildung der mechanischen Gleitlagereigenschaften wird durch die Hydrodynamik beschrieben. Aufgrund der Wechselwirkungen zwischen thermischen und mechanischen Eigenschaften müssen zusätzliche thermodynamische Effekte berücksichtigt werden. Bei hohen Beanspruchungen durch mechanische und thermische Lasten ist ferner die Vernachlässigung der entsprechenden Eigenschaften der Lagerpartner nicht mehr zulässig, wodurch sich ein strukturdynamischer Aspekt der Gleitlagersimulation ergibt. Abschließend besteht für dynamische Untersuchungen die Notwendigkeit der Einbeziehung von Trägheitseffekten, um eine ganzheitliche Simulation zu ermöglichen.

Bei hydrodynamischen Radialgleitlagern kommt es aufgrund wirkender Kräfte zu Verschiebungen und einer exzentrischen Lage der Welle innerhalb der Lagerschale. Die Überlagerung der Einflüsse aus der Verdrängungsbewegung in radialer Richtung und der Förderung des an der Welle anhaftenden viskosen Schmiermittels in den sich verengenden Spalt führt zu einem hydrodynamischen Druckaufbau und damit zur Trennung der Oberflächen von Welle und Schale. Dabei liefert die aus den Navier-Stokes-Gleichungen und der

---

<sup>1</sup>Mehrkörpersystem

Kontinuitätsgleichung abgeleitete Reynoldsgleichung die Grundlage für die Bestimmung des hydrodynamischen Verhaltens [Rey86]. Die notwendige numerische Lösung der Reynoldsgleichung führt auf die Druckfunktion, welche die dynamischen Eigenschaften des Gleitlagers in Abhängigkeit der kinematischen Größen der Lagerpartner, des Schmierstoffs sowie der Lagergeometrie und der verwendeten Randbedingungen beschreibt. Im Bereich des divergenten Schmierpalts führt die Lösung der Reynoldsgleichung auf unphysikalische Zugkräfte, die vom Fluid nicht übertragen werden können. In diesem Kavitationsgebiet kommt es zum Aufreißen des Schmierfilms, was zum Austritt der im Schmiermittel gelösten Luft und zum Ansaugen der Umgebungsluft führt. Für die Beschreibung der Kavitation und Berücksichtigung der Auswirkungen auf die hydrodynamische Druckverteilung müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden. In der Literatur erfolgt eine Unterteilung in Verfahren ohne Berücksichtigung der Masseerhaltung [But76], [LS78], [Moß93], und mit Masseerhaltung [Elr81], [KB91a], [KB91b], welche in weiten Bereichen auf der JFO<sup>2</sup>-Kavitationstheorie [Flo57], [JF57], [Ols65] basieren und eine effiziente numerische Umsetzung durch Einführung einer zusätzlichen Variable im Kavitationsgebiet realisieren.

Die hydrodynamischen Eigenschaften von Radialgleitlagern werden neben anderen Faktoren dominant von den Stoffeigenschaften des Schmiermediums beeinflusst. Speziell die Temperaturabhängigkeit der Viskosität besitzt einen großen Einfluss, wodurch eine Bestimmung der thermischen Eigenschaften des Gleitlagers notwendig wird. Grundlegende und für die meisten Anwendungen ausreichende Ansätze zur Beschreibung der temperaturabhängigen Viskosität wurden durch Vogel [Vog21] oder Falz [Fal31] beschrieben. Die Bestimmung der Temperatur im Schmierfilm bedingt die Lösung der dreidimensionalen Energiegleichung [PH95], [Mit90], [Mer07], [Fuc02]. Aufgrund der teilweise hohen Gradienten der Temperaturverteilung in Spalthöhenrichtung besteht die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Wärmeflüsse in die Lagerschale und Welle, wodurch die entsprechenden Wärmeleitungsgleichungen mitberücksichtigt werden müssen [Mit90]. Damit ergibt sich ein erheblicher numerischer Mehraufwand im Vergleich zur Lösung der zweidimensionalen Reynoldsgleichung. Mit Hinblick auf die Rechenzeit sind entsprechende Vereinfachungen für die Lösung der Energiegleichung in der Literatur zu finden. Um die Wärmeflüsse in Spalthöhenrichtung berücksichtigen zu können und trotzdem eine analog zur Reynoldsgleichung zweidimensionale Formulierung für die Temperaturverteilung zu gewinnen, wurde durch Knight und Barrett die Annahme eines quadratischen Temperaturverlaufs über die Spaltdicke vorgeschlagen [KB83], [KB87], [Kni90], welche das globale Verhalten der Temperatur im Schmierfilm abbildet.

Als Resultat der hydrodynamischen Druckverteilung im Lager kommt es zu Deformationen der Lagerpartner. Die daraus resultierende Veränderung der Spaltfunktion führt rückwirkungsbehaftet zu einer Modifikation des Druckaufbaus. Die Berechnung der Verformungen der elastischen Lagerpartner erfolgt auf Grundlage der Finite-Element-Methode. Um eine numerisch aufwändige Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen zu vermeiden und mit der Annahme quasistationären Verhaltens die Kopplung zwischen Hydrodynamik und mechanischer Verformung abzubilden, müssen die deformierbaren Körper als statisch gelagert idealisiert werden. Die Vorgehensweisen variieren dabei von der direkten Kopplung der Gleitlagerrouninen an die FE<sup>3</sup>-Software [Fuc02], [Mer07] über die Implementierung von

---

<sup>2</sup>Jakobsson-Floberg-Olsson

<sup>3</sup>Finite-Elemente

Nachgiebigkeitsmatrizen [Sch92], [Lün98], [Mof93], [Bob08] bis zur Einbindung der auf den Lagerbereich reduzierten Steifigkeitsmatrizen in die Simulation der Gleitlager [BB01]. Die statische Abbildung bedingt konsequent die eindeutige Lagerung der elastischen Struktur, welche allerdings im allgemeinen Fall nicht vorliegt. Die daraus resultierende Notwendigkeit der Formulierung zusätzlicher Lagerungsbedingungen führt zu einer künstlichen Versteifung der Struktur und damit zu Abweichungen zum realen Verhalten.

Analog zu den mechanischen Deformationen kommt es aufgrund der Temperaturbelastung der Radialgleitlager und der Wärmeflüsse auf die Lagerpartner zu thermischen Deformationen. Mit der Annahme einer mittleren Temperatur und der Idealisierung der Geometrie sowie der Randbedingungen der Lagerpartner können die thermischen Deformationen unter Verwendung der Wärmeausdehnungskoeffizienten und verschiedener Näherungsbeziehungen analytisch bestimmt werden [Mit90], [Fuc02]. Bei hohen Belastungen bzw. starken Einflüssen der thermischen Randbedingungen ist die Verwendung von FE-Algorithmen für die Bestimmung der Temperaturverteilung und der daraus resultierenden thermischen Deformationen der Lagerpartner unumgänglich [Fuc02], [Mer07]. Dabei ist der Einfluss der nicht uniformen Lagertemperatur auf die Veränderung des kleinsten Lagerspiels dominant für die Rückwirkung auf die hydrodynamischen Eigenschaften des Gleitlagers.

Unter der Berücksichtigung technisch rauer Oberflächen wird die Beschreibung der Hydrodynamik durch die Reynoldsgleichung mit Unterschreitung einer kritischen Schmierpalthöhe unzureichend. Aufgrund von Kontakten einzelner Rauheitserhebungen kommt es zu Festkörpertragdrücken, welche der reinen Hydrodynamik im Mischreibungsbereich überlagert wirken. Ausgehend von vereinfachten Annahmen statistisch verteilter Rauheitsgipfel mit einem mittleren kugelförmigen Kuppelradius können die Festkörpertraganteile unter Verwendung des Kontaktmodells nach Hertz bestimmt werden [GW66]. Weiterführende Modelle auf Basis des elastischen Halbraums erlauben eine detaillierte Abbildung realer Oberflächenstrukturen und eine Rückwirkung der Deformation einzelner Mikrokontakte [Bar00].

Für quasistationäre Betrachtungen kann die Zeitintegration für die Beschreibung der hydrodynamischen Zusammenhänge im Gleitlager unter Kenntnis der Lasten auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt werden. Dabei muss für jeden diskreten Zeitschritt das quasistatische Kräftegleichgewicht zwischen äußerer Last und den resultierenden Tragdrücken, welche sich aufgrund der Kopplung der thermischen, mechanischen und hydrodynamischen Feldprobleme ergeben, gelten. Unter Annahme dieser Bedingung lässt sich ein System nichtlinearer Gleichungen formulieren, welches unter Verwendung geeigneter Verfahren iterativ gelöst werden kann [Bob08], [OG85], [Rie95], [Wal92], [Mer07]. Für die Berechnung rotordynamischer Fragestellungen sind diese Ansätze nur unter den Bedingungen kleiner Schwingungsamplituden und langsamer Veränderung kinematischer Größen gültig. Für allgemeine Untersuchungen in diesem Anwendungsbereich müssen erweiterbare Algorithmen Anwendung finden, welche primär die Bewegungsdifferentialgleichungen der Körper lösen. An dieser Stelle hat sich aufgrund der großen Referenzbewegungen und kleinen elastischen Deformationen der Lagerpartner die Verwendung von Mehrkörperprogrammen etabliert. Im Gegensatz zur quasistatischen Vorgehensweise erfolgt auf Basis der kinematischen Größen (Position, Orientierung, Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit) der Lagerpartner in jedem Schritt der Zeitintegration eine Bestimmung der resultierenden Kräfte. Unter Wirkung der inneren und äußeren Kräfte sowie aller Trägheitseinflüsse ergeben sich für alle weiteren Zeitschritte formal die kinematischen Größen, wobei implizit das Kräftegleichgewicht gewährleistet wird. Bedingt durch die numerische Steifigkeit des

Differentialgleichungssystem muss die Schrittweite sehr klein sein, wodurch es zu einer hohen Anzahl an Berechnungen der hydrodynamischen Kräfte kommt [DSW08], [DSW09], [Lan97], [Man02], [Sch01], [KBLW98], [KLHK02]. Aus diesem Grund ist der Modellierungsgrad bei der Implementierung der Gleitlager in Mehrkörpersimulationen meist geringer als bei quasistatischen Untersuchungen, da der Fokus nicht auf der Abbildung der Lagerung sondern der Berücksichtigung der rotordynamischen Effekte liegt. Die Wechselwirkungen zwischen Rotordynamik und Hydrodynamik sind jedoch sehr nichtlinear, wodurch speziell für transiente Simulationen eine konsequente Weiterentwicklung der Abbildungsgüte der Lagerung in Mehrkörpersimulationen erfolgt [Bac03], [WDNS11]. Nichtsdestotrotz bestehen vor allem im Bereich erweiterter masseerhaltender Kavitationsmodelle und der Berücksichtigung thermischer Einflüsse auf die Lagerung noch große Potentiale zur Verbesserung der Gleitlagersimulation.

Neben der vorteilhaften Berücksichtigung dynamischer Effekte auf die Lagerung ergibt sich zudem unter Verwendung geeigneter Reduktionsmethoden [KBQ06], [KB07], [WDS07] die Möglichkeit der Einbindung dynamischer elastischer Komponenten in Mehrkörperprogramme, welche die Einschränkung einer statisch bestimmten Lagerung nicht aufweisen [WS94], [Wal94], [SW99]. Damit besteht die Möglichkeit transienter Simulationen elastischer Rotorsysteme unter Einbeziehung der nichtlinearen Effekte, welche durch die Gleitlagerung induziert werden.

Für die zu den quasistatischen Gleitlagersimulationen analoge Berücksichtigung thermischer Effekte innerhalb von Mehrkörpersimulationen müssen neben den vorhandenen Zustandsvariablen für die Beschreibung der elastischen Freiheitsgrade zusätzliche Zustandsvariablen implementiert werden, die das thermische Verhalten beschreiben. In [Hec05] und daran angelehnt [WSD08] wird ein Verfahren zur Einbindung thermischer Zustandsvariablen in Mehrkörpersimulationen vorgestellt, welches zu den elastischen Körpern analoge modale Formulierungen für die Implementierung verwendet. Die Kopplung zwischen thermischem und mechanischem Feldproblem erfolgt über interne Kräfte, welche aus den Temperaturen bestimmt und in jedem Schritt der Zeitintegration modal auf die elastischen Körper aufgeprägt werden. Dabei ergeben sich Fragestellungen bzgl. der Wahl der Eigenformen zur Abbildung der thermischen Deformationen.

Zusammenfassend lässt sich formulieren, dass die quasistatische Simulation von Gleitlagern einen hohen Detaillierungsgrad erreicht hat, welcher bei Übereinstimmung der Annahmen zwischen Simulation und Experiment eine zuverlässige Vorausberechnung der Lagereigenschaften und ihrer Rückwirkung auf das Rotorsystem ermöglicht [Gli70], [Gli72], [GWWW78]. Für die Beschreibung des rotordynamischen Verhaltens von gleitgelagerten Systemen werden vereinfachte Annahmen getroffen, die das globale Verhalten abbilden, jedoch einzelne Effekte nicht zufriedenstellend reproduzieren können. Eine Verbindung beider Verfahren zur vollständigen rückwirkungsbehafteten TEHD<sup>4</sup>-Abbildung von gleitgelagerten Rotoren stellt deshalb einen aktuellen Forschungsbereich mit großer Anwendungsbreite dar.

### 1.3 Ziele der Arbeit und Umsetzung

Bedingt durch die sukzessive Mehrzieloptimierung hin zu höherer Drehzahlen zur Maximierung des Wirkungsgrads, bei gleichzeitiger Verbesserung der akustischen Eigenschaf-

---

<sup>4</sup>thermo-elasto-hydrodynamisch

ten, steigen die dynamischen Belastungen auf Rotorsysteme kontinuierlich. Ursächlich dafür sind zunehmend schlankere Konstruktionen, die zum einen den Materialbedarf, zum anderen unerwünschte Trägheitsverluste verringern sollen. Eine genaue Abbildung der Interaktion zwischen Rotor und Lager gewinnt damit aufgrund der nichtlinearen rückwirkungsbehafteten dynamischen Eigenschaften der Gleitlagerung zunehmend an Bedeutung. Ziel der Arbeit soll in diesem Kontext die Entwicklung und numerische Umsetzung von Algorithmen sein, welche ausgehend von rotordynamischen Fragestellungen eine detaillierte voll-dynamische Gleitlagersimulation unter instationärer Lastaufprägung erlauben.

Hierzu soll ausgehend von einem Mehrkörperalgorithmus die Reynoldsgleichung für den allgemeinen instationären Fall in jedem Schritt der Zeitintegration ohne Einschränkung der kinematischen Zustände (Abbildung von Schiefstellung, Rotation von Welle und Schale etc.) gelöst werden. Die Berücksichtigung von Kavitationseffekten soll auf Algorithmen basieren, welche variabel gestaltet sind und in Abhängigkeit der Anwendung eine transiente Einhaltung der Massenbilanz realisieren oder zur Verringerung des numerischen Aufwands vereinfachte Ansätze verwenden. Es sind ferner thermische Effekte auf Grundlage einer vereinfachten Energiegleichung zu implementieren, um die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und deren Wirkung auf den Druckaufbau abbilden zu können. Das impliziert die Einbindung thermischer Körper in die Mehrkörpersimulation zur realistischen Abbildung der Randbedingungen der Energiegleichung. Trotz der geringen zeitlichen Varianz der thermischen Zustände sollen transiente Einflüsse aufgrund der Wärmekapazität berücksichtigt werden. Dies ermöglicht die allgemeingültige Beschreibung transienter thermischer Effekte, wie sie bei Kantenträgern oder Havariesituationen auftreten können, darüber hinaus wird eine Erhöhung der Rechenzeit durch iterative Lösung zwischen Druck und Temperatur in jedem Zeitschritt, wie sie aus der quasistatischen Einbindung thermischer Komponenten resultieren würde, vermieden. Zusätzlich sollen dynamische Verformungen der Lagerpartner in die Algorithmen einbezogen werden, um den rückwirkungsbehafteten Einfluss auf den Druckaufbau abbilden zu können. Diese können Resultat der wirkenden Kräfte innerhalb des Gleitlagers oder der thermomechanischen Kopplung und damit der Temperaturverteilung der Lagerpartner sein. Die Tragdrücke bei Unterschreitung einer definierten Schmierstalthöhe sollen durch einfache Mischreibungsmodelle abgebildet werden. Auf weiterführende hydrodynamische Effekte wie die Druckabhängigkeit der Viskosität, Turbulenz- oder Mischungsmodelle im Bereich der Schmierstoffzuführung soll aus Gründen der erforderlichen Rechenzeit verzichtet werden. Die resultierenden Algorithmen müssen bedingt durch die Lösung innerhalb einer Zeitintegration sehr robust umgesetzt werden. Infolge der hohen Anzahl der Berechnungsschritte ist eine numerisch effiziente Umsetzung zur Minimierung des Rechenzeitbedarfs indiziert.

Der erste Teil der Arbeit soll die notwendigen theoretischen Grundlagen für die komplexen Berechnungen zur ganzheitlichen TEHD-Simulation instationär belasteter Radialgleitlager aufbereiten. Dazu werden die einzelnen Teilgebiete und ihre Kopplung untereinander vorgestellt.

Im Bereich der Hydrodynamik erfolgt ausgehend von der Masse- und Impulserhaltung die Ableitung der Reynoldsgleichung für instationäre Radialgleitlager. Die Einbindung der Kavitationsbedingungen beinhaltet die Modifikation der Reynoldsgleichung und Unterteilung der Lösungsvariablen in Druck und Spaltfüllung. Die numerische Lösung auf Grundlage finiter Volumen erlaubt eine Überführung der Differentialgleichung auf ein nichtlineares Gleichungssystem, welches unter Verwendung einer Fixpunktiteration gelöst

wird. Alternativ wird auf die Vereinfachungen unter Verzicht der Masseerhaltung zur Verringerung des numerischen Aufwands eingegangen. Zur Beschreibung der thermodynamischen Effekte innerhalb des Schmierfilms wird auf Grundlage von Energiebetrachtungen die Energiegleichung abgeleitet. Es erfolgt eine Vereinfachung auf eine zweidimensionale Form, welche in Spalthöhenrichtung einen quadratischen Ansatz postuliert. Unter Einführung notwendiger Randbedingungen können aufgrund struktureller Ähnlichkeiten analoge Verfahren zur Diskretisierung und numerischen Lösung der Energiegleichung verwendet werden, wie sie auch bei der Reynoldsgleichung Anwendung finden, wodurch eine hohe numerische Effizienz erreicht wird. Zur Abbildung des thermomechanischen Feldproblems werden die notwendigen FE-Formulierungen abgeleitet. Aufgrund der hohen resultierenden Anzahl an Freiheitsgraden sind Reduktionen unumgänglich. Diese erfolgen sowohl für die mechanischen als auch die thermischen Zustandsgrößen durch Reduktion auf Hauptfreiheitsgrade und anschließende Transformation der beschreibenden Systemmatrizen in den Modalraum. Die Grundlagen der Mehrkörperdynamik beinhalten die Ableitung der um elastische Komponenten erweiterten Bewegungsdifferentialgleichung und die Bestimmung der notwendigen Informationen zur Beschreibung der elastischen Körper aus den modal reduzierten Systemmatrizen.

Der zweite Teil der Arbeit beinhaltet die Implementierung der thermomechanischen Körper und Gleitlagerformulierungen in die Mehrkörpersimulation und die Umsetzung in ein ganzheitliches, gekoppeltes Rechenmodell.

Dabei wird die Berücksichtigung thermischer Zustandsgrößen innerhalb von Mehrkörpersimulationen und die Umsetzung der Kopplung zwischen den modal reduzierten thermischen und mechanischen Systemeigenschaften in Kapitel (3) vorgestellt. Anschließend wird in Kapitel (4) die Einbindung der Gleitlagerrouitinen innerhalb der Zeitintegration als Kraftelement untersucht. Im Kontext verschiedener Modellierungstiefen wird die Bestimmung der notwendigen Simulationsparameter auf Basis der kinematischen Eingangsgrößen und die Bestimmung und Aufprägung der resultierenden Kräfte dargestellt.

Der dritte Teil umfasst Anwendungsbeispiele an denen zunächst in Kapitel (5) die entwickelten Algorithmen mit Ergebnissen aus der Literatur abgeglichen werden. Anschließend werden am Modell eines Lagerbocks vollständige rückwirkungsbehaftete Simulationen durchgeführt. Dies beinhaltet zudem notwendige Untersuchungen zur Abbildungsgüte der modalen Reduktionen des thermischen, mechanischen und thermomechanisch gekoppelten Problems sowie Ableitung von Aussagen zur Selektion dominanter Eigenformen und ist in Kapitel (6) dargestellt. Als abschließendes Beispiel wird das dynamische Verhalten der Pleuellagerung eines Verbrennungsmotors in Kapitel (7) untersucht. Dabei werden die Ergebnisse im Kontext unterschiedlicher Kavitationsmodelle sowie der Berücksichtigung elastischer Komponenten untersucht.

Der letzte Teil umfasst eine Zusammenfassung der zentralen Punkte der Arbeit und der wichtigsten Ergebnisse sowie die Darstellung weiterführender Aspekte anschließender Forschungsarbeiten.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Hydrodynamik

Die Beschreibung des Strömungsverhaltens einer Newtonschen Flüssigkeit kann auf Basis der Erhaltungssätze von Masse und Impuls an einem infinitesimalen Volumenelement abgeleitet werden [OBD09]. Nach Einführung von Annahmen zur Vereinfachung der resultierenden Gleichungen auf das Problem der hydrodynamischen Radialgleitlager werden die Randbedingungen und die numerische Lösung der beschreibenden Reynoldsgleichung vorgestellt.

#### 2.1.1 Masse- und Impulserhaltung einer Strömung

Die Beschreibung erfolgt an einem raumfesten Element, dessen Kanten parallel zu einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  ausgerichtet sind.

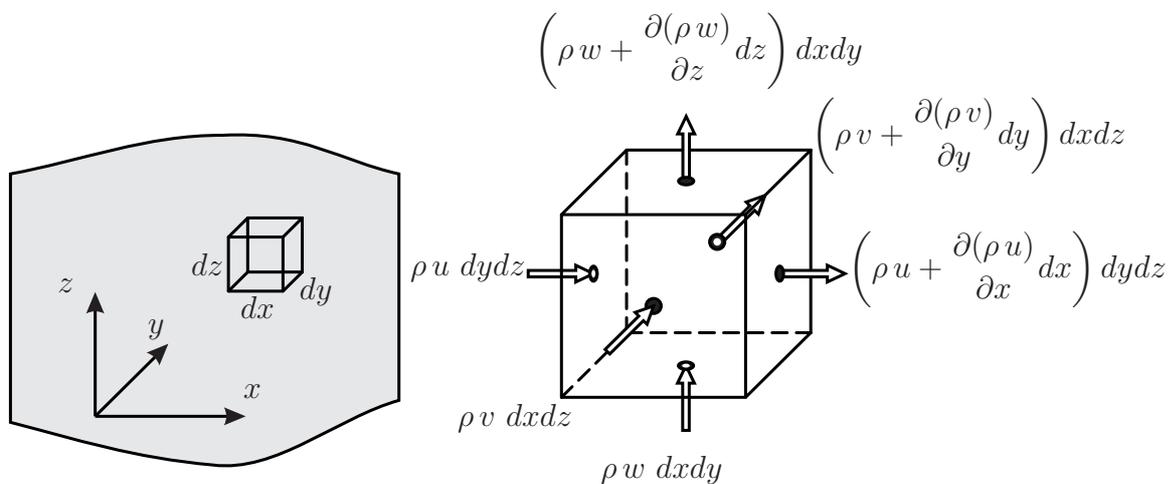


Abbildung 2-1: Ein- und austretende Massenströme

Ziel ist es dabei, die Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$ , die Dichte  $\rho$  und den hydrodynamischen Druck  $p_h$  in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten zu ermitteln.

Werden zunächst die in Abb. (2-1) dargestellten in das bzw. aus dem Volumen strömenden Massenströme untersucht, deren Differenz nach dem Prinzip der Erhaltung der Masse der zeitlichen Änderung der Masse entspricht, ergibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (2-1)$$

Die Untersuchung der Impulserhaltung führt zunächst auf die Bilanzierung der Impulsströme, wie sie in Abb. (2-2) dargestellt sind.

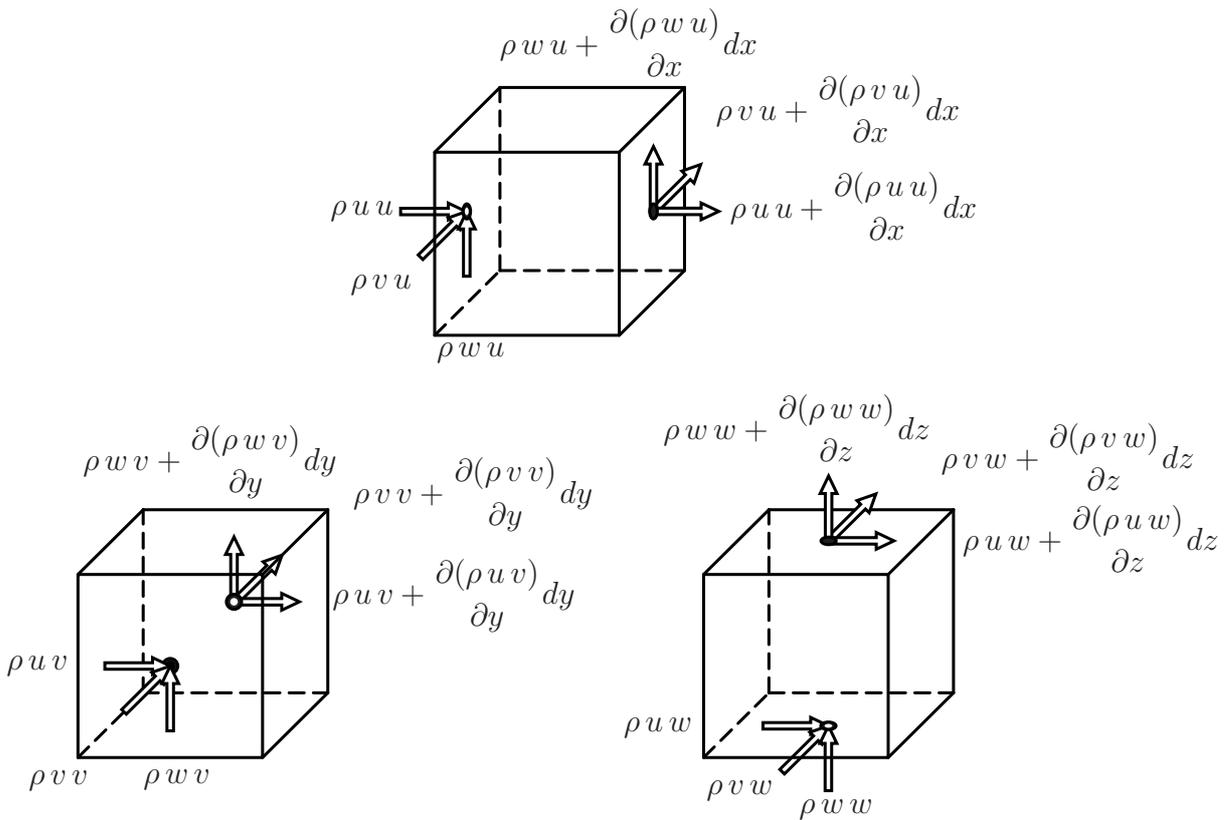


Abbildung 2-2: Ein- und austretende Impulsströme

Ferner stellen die auf das Volumen wirkenden Normal- und Schubspannungen, der allseitig wirkende Druck  $p_h$  (siehe Abb. (2-3)) sowie zusätzliche äußere Volumenlasten  $s_x, s_y, s_z$ , die parallel zu den Koordinatenachsen wirken, eine weitere Ursache für die zeitliche Änderung des Impulses im betrachteten Volumenelement dar.

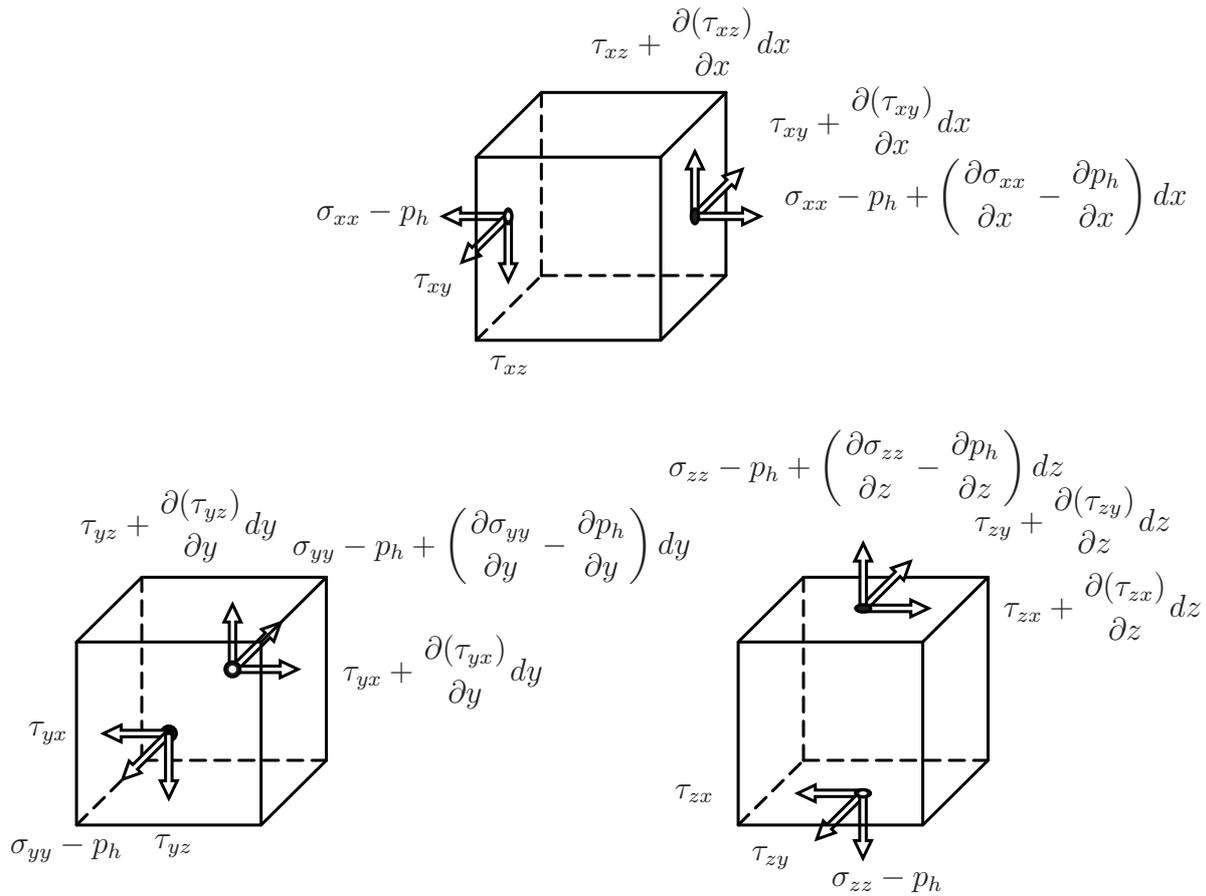


Abbildung 2-3: Normal- und Schubspannungen

Unter Beschränkung auf Newtonsche Fluide und Ausnutzung des Stokesschen Reibungssatzes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\
 \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\
 \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) , \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \eta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) ,
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

der den Zusammenhang zwischen den Normalspannungen und den Geschwindigkeitsgradienten beschreibt, ergeben sich nach Bilanzierung über das Volumenelement die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= s_x - \frac{\partial p_h}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad , \\
\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= s_y - \frac{\partial p_h}{\partial y} \tag{2-3} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad , \\
\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= s_z - \frac{\partial p_h}{\partial z} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad .
\end{aligned}$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind partielle nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für die keine geschlossene analytische Lösung existiert. Sie beschreiben das Gleichgewicht der Trägheitskräfte, der äußeren Volumenlasten, der Druckkräfte und der Reibungskräfte.

### 2.1.2 Reynoldsgleichung

Unter Annahme geeigneter Bedingungen lässt sich Gl. (2-3) für den Anwendungsfall der Radialgleitlager vereinfachen [LS78] und ermöglicht eine analytische Weiterverarbeitung.

- Der Druck kann als konstant über die Schmierspalthöhe angenommen werden.
- Die Änderung der Geschwindigkeit  $w$  ist in allen Richtungen vernachlässigbar.
- Die Geschwindigkeitsgradienten von  $u$  und  $v$  in x- und y-Richtung sind vernachlässigbar gegenüber denen in z-Richtung.
- Trägheitskräfte und äußere Volumenlasten (vorrangig Gravitationskräfte) sind vernachlässigbar gegenüber den Reibungskräften.
- Die Schmierspalthöhe ist klein gegenüber Lagerradius und -breite. Dies ermöglicht die Abwicklung des Schmierspalts, wodurch die Behandlung als ebenes Problem zulässig ist (siehe Abb. (2-4)).
- Die Lageroberflächen sind ideal glatt. Das Schmiermittel haftet an den Oberflächen der Lagerpartner, wodurch definierte Randbedingungen existieren (siehe Gl. (2-6)).

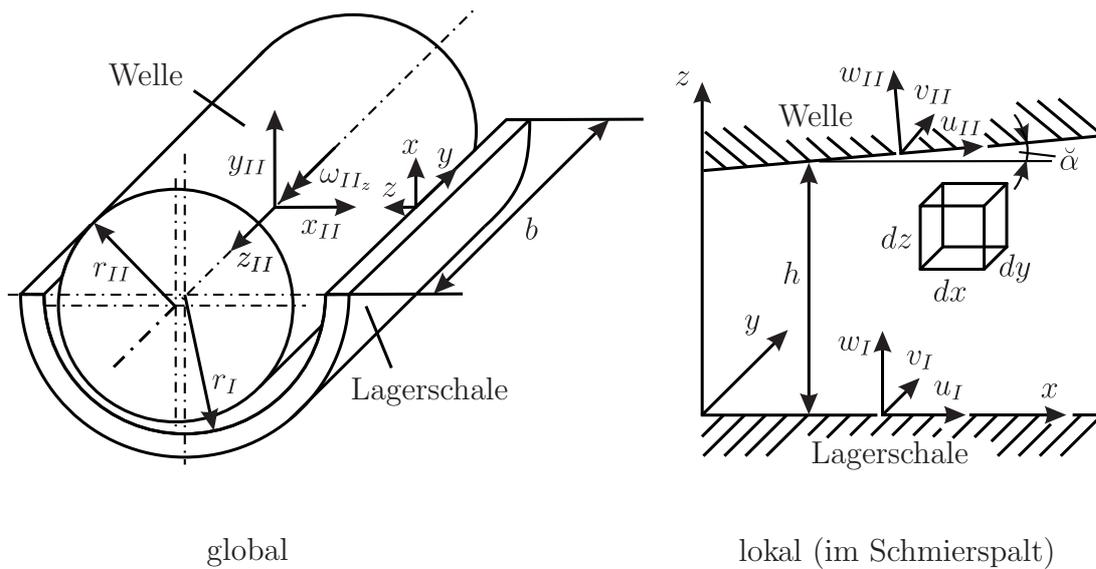
- Die Lageroberflächen weisen eine schwache Krümmung zueinander auf, was in einer geringen Veränderlichkeit des Schmierfilms resultiert.

Damit ergeben sich folgende Vereinfachungen:  $\cos(\check{\alpha}) \approx 1$ ,  $\sin(\check{\alpha}) \approx \tan(\check{\alpha}) \approx \frac{\partial h}{\partial x}$  (siehe Abb. (2-4)).

Die Einarbeitung der Annahmen führt zunächst auf zwei vereinfachte Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p_h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad , \\ 0 &= -\frac{\partial p_h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2-4)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Hydrodynamik werden ein im Mittelpunkt der Lagerschale fixiertes körperfestes und ein im hydrodynamischen Schmierspalt positioniertes lokales Koordinatensystem verwendet. Die Unterscheidung der geometrischen und kinematischen Größen bzgl. Lagerschale (I) und Welle (II) erfolgt durch entsprechende Indizierung (siehe Abb. (2-4)).



**Abbildung 2-4:** Lagergeometrie und Koordinatensysteme

Die Geschwindigkeiten in spaltlokaler y-Richtung sind für Radialgleitlager vernachlässigbar, die Geschwindigkeiten in Umfangsrichtung ergeben sich zu

$$u_i = \omega_{iz} r_i \quad \text{mit} \quad i = I, II \quad . \quad (2-5)$$

Die zweifache Integration von Gl. (2-4) über die Spalthöhenkoordinate liefert, mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} z = 0, \quad u &= u_I, \quad v = 0, \quad w = w_I, \\ z = h, \quad u &= u_{II}, \quad v = 0, \quad w = u_{II} \frac{\partial h}{\partial x} + w_{II} \end{aligned} \quad (2-6)$$

sowie der Annahme der Konstanz der dynamischen Viskosität über der Schmier-spalthöhe und der Voraussetzung einer laminaren Strömung, die Geschwindigkeiten in Umfangs- und Breitenrichtung

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_h}{\partial x} (z^2 - hz) + (u_{II} - u_I) \frac{z}{h} + u_I \quad , \\ v &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_h}{\partial y} (z^2 - hz) \quad . \end{aligned} \quad (2-7)$$

Nach Integration der Kontinuitätsgleichung Gl. (2-1) mit der Integrationsregel nach Leibnitz Gl. (A-1) und der Annahme der Konstanz der Dichte über der Schmier-spalthöhe kann folgende Gleichung abgeleitet werden

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \int_0^h u dz \right) - \rho u_{II} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \int_0^h v dz \right) + [\rho w]_0^h = 0 \quad , \quad (2-8)$$

wobei gilt

$$[\rho w]_0^h = \rho \left( u_{II} \frac{\partial h}{\partial x} + w_{II} - w_I \right) = \rho \left( u_{II} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad . \quad (2-9)$$

Werden anschließend die Geschwindigkeiten Gl. (2-7) eingesetzt, ergibt sich die Reynoldsgleichung in der Form

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p_h}{\partial x} \right)}_{\text{Poiseuille-Strömung}^5} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p_h}{\partial y} \right)}_{\text{Couette-Strömung}^6} = \underbrace{\frac{(u_I + u_{II})}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x}}_{\text{Verdrängungs-Strömung}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}}_{\text{Verdrängungs-Strömung}} \quad . \quad (2-10)$$

Die Reynoldsgleichung stellt eine Bilanzgleichung für die Flüssigkeitsbewegung im Lager dar und beschreibt den dadurch entstehenden Tragdruckaufbau  $p_h$  in Abhängigkeit des Ortes  $(x, y)$  und der Zeit  $t$ . Sie ist eine partielle, inhomogene elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne geschlossene analytische Lösung. Die einzelnen Terme lassen sich Strömungsanteilen zuordnen, die hinlänglich in der Literatur beschrieben sind [LS78].

### 2.1.3 Randbedingungen der Reynoldsgleichung

Zur Eindeutigkeit der Lösung der Reynoldsgleichung bedarf es der Definition von Druckrandbedingungen auf den Grenzen des Lösungsgebiets.

1. An den Rändern des Lagers liegt der Umgebungsdruck  $p_{amb}$  vor

$$p_h(y = 0) = p_h(y = b) = p_{amb} \quad . \quad (2-11)$$

2. Der Druck im Bereich der Ölzuführungstaschen entspricht dem Taschendruck  $p_T$

$$p_h(x_{T1} \leq x \leq x_{T2}, y_{T1} \leq y \leq y_{T2}) = p_T \quad . \quad (2-12)$$

<sup>5</sup>Druck-Strömung

<sup>6</sup>Scher-Strömung

Die Drücke innerhalb der einzelnen Ölzuführungstaschen hängen von verschiedenen Parametern der Schmierstoffzuführung und Lagerbohrungsgeometrie sowie den hydrodynamischen Betriebsbedingungen ab. Für detaillierte Untersuchungen müssen sie iterativ aus einer hydrostatischen Schmierstoffmengenbilanz ermittelt werden [Mit90]. Zur Verringerung des numerischen Aufwands und der damit verbundenen Rechenzeiten werden die Taschendrucke als identisch dem Zuführdruck angenommen.

- Die  $2\pi$ -Periodizität der Druckverteilung in Umfangsrichtung bedingt die Kontinuität des Drucks und des Volumenstroms

$$p_h(x, y) = p_h(x + 2\pi, y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} p_h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} p_h(x + 2\pi, y) \quad . \quad (2-13)$$

- Die Lösung der Reynoldsgleichung führt, resultierend aus der Einhaltung der Kontinuitätsgleichung Gl. (2-1), welche eine Vollfüllung des Schmierspalts zu jedem Zeitpunkt fordert, vor allem im Bereich des divergenten Spalts zu negativen Drücken. Die mathematische Lösung erzeugt bei ungenügendem Schmierstoffangebot Unterdrücke zur Realisierung des Einströmens zusätzlichen Schmierstoffs von außen. Da Flüssigkeiten nur begrenzt in der Lage sind Zugkräfte zu übertragen, kommt es zum Aufreißen des Schmierspalts, was als Kavitation bezeichnet wird. An dieser Stelle besteht die Notwendigkeit der Implementierung von Kavitationsrandbedingungen, die dieses Verhalten abbilden können.

### Kavitationsmodelle

Die ersten Lösungen der Reynoldsgleichung gehen auf Sommerfeld zurück und berücksichtigen keine Kavitationsgebiete, wodurch sich ein punktsymmetrischer Druckverlauf zum engsten Schmierpalt ergibt (siehe Abb. (2-5)).

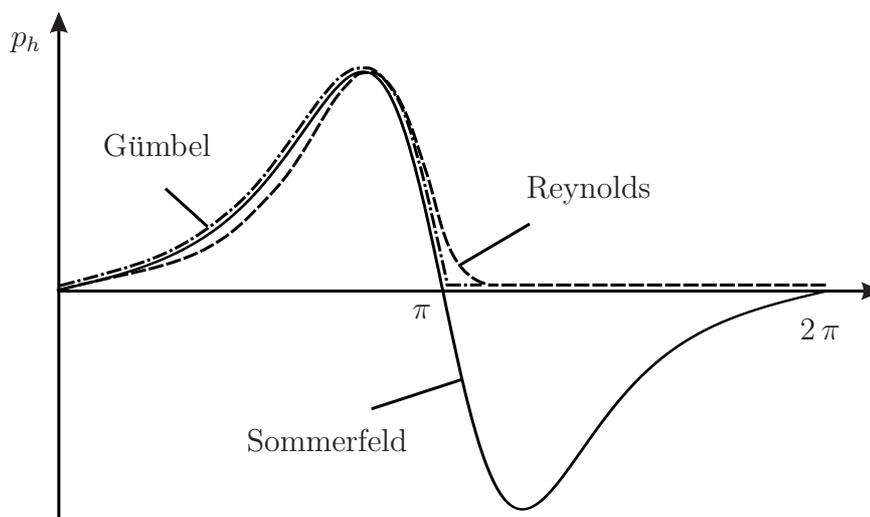


Abbildung 2-5: Schematische Druckverläufe mit variierten Kavitationsmodellen [LS78]

Die einfachste Korrektur erfolgte durch Gümbel, wobei die negativen Drücke zu Null gesetzt werden. Dieses Vorgehen führt zu einer Diskontinuität am Übergang zwischen Druck- und Kavitationsgebiet, was der Kontinuitätsgleichung widerspricht [But76].

Eine Korrektur der Diskontinuität wurde durch Reynolds formuliert und fordert am Übergang zum Kavitationsgebiet

$$\frac{\partial}{\partial x} p_h(x_{cav}, y) = 0 \quad . \quad (2-14)$$

Nachteilig ist die apriori nicht bekannte Lage des Übergangs, welche nur durch iterative Lösung der Reynoldsgleichung bestimmt werden kann [Mof93].

Aufgrund des Widerspruchs der Massenbilanz im Kavitationsgebiet durch die Algorithmen nach Sommerfeld, Gümbel und Reynolds formulierten Jakobsson, Floberg und Olssen aufbauend auf dem Effekt des Aufreiens des Schmierfilms im Kavitationsgebiet eine Kavitationstheorie mit Einhaltung der Massenbilanz. Die Folge des Aufreiens ist die Entstehung einer zweiphasigen Strömung aus flüssigem Schmierstoff und kompressiblem Gas, welche in einer Teilfüllung des Kavitationsgebiets resultiert [Flo57], [JF57], [Ols65].

Eine numerische Umsetzung der JFO-Kavitationstheorie mit akzeptablem Aufwand stellt der Elrod-Algorithmus dar [Elr81]. Im Kavitationsgebiet, welches nur teilweise mit Schmierstoff gefüllt ist, wird eine homogene Mischdichte aus viskosem Schmierstoff und kompressiblem Gas definiert

$$\rho = \vartheta \rho_{liq} + (1 - \vartheta) \rho_{gas} \cong \vartheta \rho_{liq} \quad . \quad (2-15)$$

Als Proportionalitätsfaktor wird der Spaltfüllungsgrad  $\vartheta$  eingeführt, welcher Werte zwischen Null und Eins annehmen kann. Analog erfolgt die Einführung einer Mischviskositat

$$\eta = \vartheta \eta_{liq} + (1 - \vartheta) \eta_{gas} \cong \vartheta \eta_{liq} \quad . \quad (2-16)$$

Im Druckgebiet liegt konsequent Vollfüllung vor, wodurch sich ein Spaltfüllungsgrad  $\vartheta_{pres} = 1$  einstellt. Im Kavitationsgebiet wird der Druck als Umgebungsdruck  $p_{cav} = p_{amb}$  angenommen und ist damit apriori bekannt<sup>7</sup>. Dementsprechend ist die Ausprägung eines Druckgradienten und damit die Entstehung der Poiseuille-Strömung unmöglich. Aufgrund des Aufreiens des Spalts ergibt sich im Kavitationsgebiet ein Spaltfüllungsgrad  $\vartheta_{cav} < 1$ . Unter der Bedingung der Unabhängigkeit der Dichte des Schmiermittels  $\rho_{liq}$  von der Position im Schmier spalt ergibt sich mit der mittleren Umfangsgeschwindigkeit  $u_m$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12 \eta_{liq}} \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{12 \eta_{liq}} \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) = u_m \frac{\partial(\vartheta h)}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta h)}{\partial t} \quad . \quad (2-17)$$

In der resultierenden modifizierten Reynoldsgleichung Gl. (2-17) sind somit im Druckgebiet der hydrodynamische Druck  $p_h$  und im Kavitationsgebiet die Spaltfüllung  $\vartheta$  die zu bestimmenden Unbekannten.

Bedingt durch die numerische Komplexität der dynamischen Simulation von thermoelastischen Gleitlagern in Mehrkorperanwendungen und der damit einhergehenden Rechenzeit, werden weiterführende Modelle, die auf der JFO-Kavitationstheorie basierten, wie z.B. das Zweiphasenmodell (vgl. [Mer07]) nicht verwendet.

<sup>7</sup>In experimentellen Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass der Druck im Kavitationsgebiet und der Atmosphärendruck die gleiche Größenordnung besitzen ( $p_{cav} \approx p_{amb}$ ) [MRSR91].

### 2.1.4 Numerische Lösung der Reynoldsgleichung

Zur numerischen Lösung der Reynoldsgleichung existieren verschiedene Methoden der Diskretisierung (Finite-Element-Methode, Finite-Differenzen-Methode oder Finite-Volumen-Methode), die in allen Fällen auf ein lineares Gleichungssystem führen. Im Folgenden soll die FVM<sup>8</sup> Anwendung finden, welche eine Methode der gewichteten Residuen darstellt. Dabei werden für die Wichtung Funktionen verwendet, die im betrachteten Volumen den Wert Eins und überall sonst den Wert Null besitzen. In Analogie zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung und Kontinuitätsgleichung basiert sie auf der Bilanzierung von Volumenströmen über ein Kontrollvolumen. Die anschließende Superposition der einzelnen Flüsse über alle Kontrollvolumina des Lösungsgebiets beschreibt die über die Ränder des Lösungsgebiets ein- und austretenden Flüsse. Für weiterführende Betrachtungen ist die Überführung der Reynoldsgleichung Gl. (2-17) in eine dimensionslose Form von Vorteil. Unter Verwendung der dimensionslosen Größen

$$H = \frac{h}{\Delta r}, \quad X = \frac{x}{r_I}, \quad Y = \frac{y}{r_I}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_{liq}}{\eta^*}, \quad P = \frac{p_h \Delta r^2}{\eta^* |u_m| r_I}, \quad \bar{t} = \frac{t |u_m|}{r_I} \quad (2-18)$$

kann die Reynoldsgleichung wie folgt formuliert werden

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = \text{sgn}(u_m) \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial X} + \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial \bar{t}} \quad (2-19)$$

Als Kavitationsalgorithmus wird die Formulierung nach Elrod verwendet. Davon ausgehend können die abgeleiteten Algorithmen zur Verringerung des numerischen Aufwands modular auch unter Verwendung des Gumbel-Algorithmus Anwendung finden, indem die Vollfüllung  $\vartheta = 1$  im gesamten Schmier-spalt gefordert wird. Zur Unterscheidung zwischen Druck- und Kavitationsgebiet wird ein Kavitationsindex  $k(\vartheta)$  eingeführt

$$\begin{aligned} k(\vartheta = 1) &= 1 \quad \rightarrow \quad \text{Druckgebiet} \quad \rightarrow \quad P > P_{amb} \quad , \\ k(\vartheta < 1) &= 0 \quad \rightarrow \quad \text{Kavitationsgebiet} \quad \rightarrow \quad P = P_{amb} \quad , \end{aligned} \quad (2-20)$$

der als Schalterfunktion wirkt und zwischen den gesuchten Variablen Druck und Spaltfüllung und den damit einhergehenden Differentialgleichungen unterscheidet. Ferner erfolgt die Einführung einer druckähnlichen Funktion  $\Pi$ , die im Druckgebiet dem Druck  $P$  entspricht und im Kavitationsgebiet den Wert  $\vartheta - 1$  annimmt. Diese Funktion erweist sich als hilfreich für die Unterscheidung der Ergebnisse und die Einordnung bzgl. Druckgebiet  $\Pi > 0$  bzw. Kavitationsgebiet  $\Pi < 0$ .

Zur numerischen Diskretisierung wird das Lösungsgebiet in Breiten- und Umfangsrichtung äquidistant unterteilt. Es werden die Volumenströme vom und in das zentrale Kontrollvolumen 0 untersucht (vgl. Abb. (2-6)).

### Diskretisierung der Poiseuille-Strömung

Die Ausbildung der Poiseuille-Strömung erfolgt wie in Kapitel (2.1.3) beschrieben nur im Druckbereich. Nach Integration über die Grenzen des Kontrollvolumens und die Überführung des Differentialquotienten in einen zentralen Differenzenquotienten ergibt sich für den Term in Umfangsrichtung

$$\iint_{B_0} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) dX dY = \left( \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right)_e \Delta Y - \left( \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right)_w \Delta Y \quad (2-21)$$

<sup>8</sup>Finite-Volumen-Methode

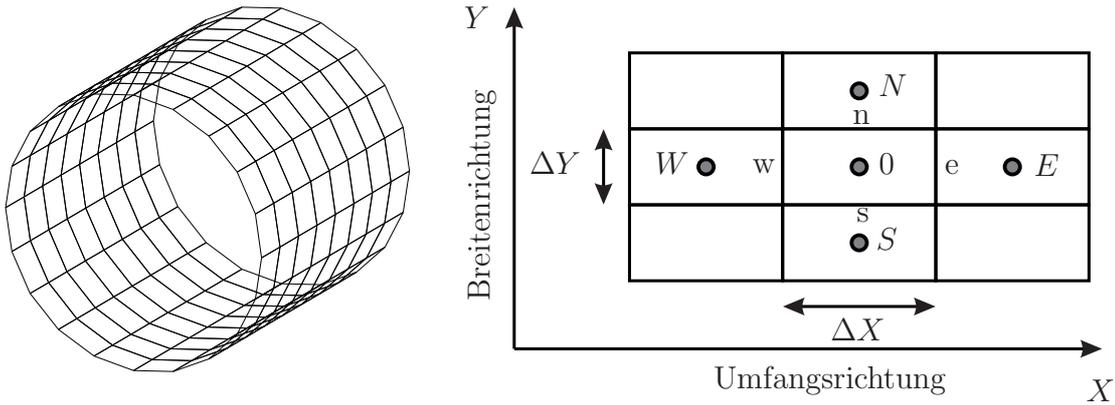


Abbildung 2-6: Diskretisierung des Lösungsgebiets

Die Auswertung an den Grenzen der Kontrollvolumina (Indizes:  $e, w, n, s$ ) erfolgt durch Interpolation der Gitterpunkte der angrenzenden Kontrollvolumina (Indizes:  $E, W, N, S$ )

$$\left( \frac{H^3}{12\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{e,w} = \frac{\left( \frac{1}{2}(H_{E,0} + H_{0,W}) \right)^3}{12 \left( \frac{1}{2}(\bar{\eta}_{E,0} + \bar{\eta}_{0,W}) \right)} \frac{P_{E,0} - P_{0,W}}{\Delta X} \quad (2-22)$$

Unter Verwendung des analogen Vorgehens für die Breitenrichtung ergibt sich folgende Formulierung für die Poiseuille-Strömung

$$\begin{aligned} & \iint_{B_0} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{12\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) dXdY + \iint_{B_0} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{H^3}{12\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) dXdY = \\ & A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S - (A_E + A_W + A_N + A_S) P_0 = \\ & \sum_i k_i A_i \Pi_i - k_0 \sum_i A_i \Pi_0 \end{aligned} \quad (2-23)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{(H_E + H_0)^3}{48(\bar{\eta}_E + \bar{\eta}_0)} \frac{\Delta Y}{\Delta X}, & A_W &= \frac{(H_0 + H_W)^3}{48(\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_W)} \frac{\Delta Y}{\Delta X}, \\ A_N &= \frac{(H_N + H_0)^3}{48(\bar{\eta}_N + \bar{\eta}_0)} \frac{\Delta X}{\Delta Y}, & A_S &= \frac{(H_0 + H_S)^3}{48(\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_S)} \frac{\Delta X}{\Delta Y}. \end{aligned} \quad (2-24)$$

Die Berücksichtigung des Kavitationsindex und die Überführung auf die druckähnliche Funktion liefern anschließend mit  $i = E, W, N, S$

$$(Q_P)_e - (Q_P)_w + (Q_P)_n - (Q_P)_s = \sum_i k_i A_i \Pi_i - k_0 \sum_i A_i \Pi_0 \quad (2-25)$$

Die Summation über alle Kontrollvolumina führt auf ein pentadiagonales Gleichungssystem.

### Diskretisierung der Couette-Strömung

Die Formulierung des Differentialoperators als zentraler Differenzenquotient und die anschließende Integration über die Grenzen des Kontrollvolumens führen für die Couette-Strömung auf

$$\iint_{B_0} \operatorname{sgn}(u_m) \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial X} dX dY = \operatorname{sgn}(u_m) \Delta Y [(\vartheta H)_e - (\vartheta H)_w] = (Q_C)_e - (Q_C)_w \quad . \quad (2-26)$$

Die Auswertung der Ausdrücke an den Grenzen des Kontrollvolumens (Indizes  $e$ ,  $w$ ) analog zur Poiseuille-Strömung durch lineare Interpolation aus den angrenzenden Gitterpunkten beinhaltet nachteilige numerische Oszillationen durch periodische Wechsel von Kavitations- und Druckgebiet am Übergang zwischen konvergentem und divergentem Schmierpalt. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, wird eine stromaufwärtsgerichtete Rückwärtsdifferenz<sup>9</sup> verwendet. Damit ergibt sich per se eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens der mittleren Umfangsgeschwindigkeit  $u_m$ . Nachteilig bzgl. der numerischen Lösung erweist sich, dass resultierend aus der Rückwärtsdifferenz das Gleichungssystem unsymmetrisch wird. Bei Voraussetzung einer Strömungsrichtung  $w \rightarrow e$  und damit  $u_m > 0$  erfolgt die Approximation der Stellen  $e$  und  $w$  durch die stromaufwärtsgelegenen Kontrollvolumenwerte 0 und  $W$ .

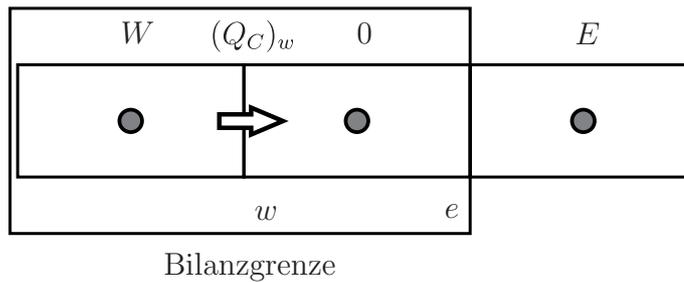


Abbildung 2-7: Einfließender Volumenstrom [Mer07]

Für die Bilanzierung des einfließenden Volumenstroms an der Stelle  $w$  müssen drei Fälle unterschieden werden.

- Das stromaufwärts gelegene Element  $W$  liegt im Kavitationsgebiet ( $k_W = 0$ )

$$(Q_C)_w = \Delta Y (\vartheta H)_W \quad . \quad (2-27)$$

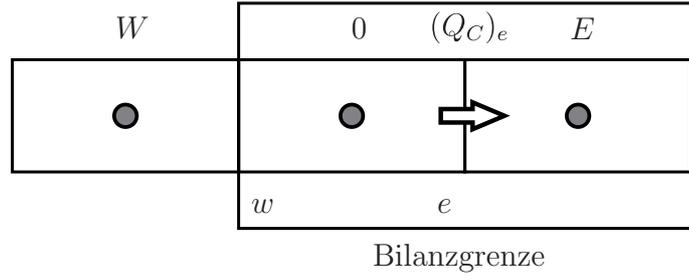
- Das stromaufwärts gelegene Element  $W$  liegt im Druckgebiet ( $\vartheta_W = 1$ ) und das stromabwärts gelegene Element  $0$  liegt im Kavitationsgebiet ( $k_W = 1$  und  $k_0 = 0$ )

$$(Q_C)_w = \Delta Y H_W \quad . \quad (2-28)$$

- Beide Elemente liegen im Druckgebiet ( $k_W = 1$  und  $k_0 = 1$ )

$$(Q_C)_w = \Delta Y H_w = \Delta Y \left( \frac{H_W + H_0}{2} \right) \quad . \quad (2-29)$$

<sup>9</sup>Upwind-Methode



**Abbildung 2-8:** Ausfließender Volumenstrom [Mer07]

Analog ergeben sich für den ausfließenden Volumenstrom an der Stelle  $e$  folgende Ausdrücke unter Berücksichtigung der Fallunterscheidung.

- Das stromaufwärts gelegene Element 0 liegt im Kavitationsgebiet ( $k_0 = 0$ )

$$(Q_C)_e = \Delta Y (\vartheta H)_0 \quad . \quad (2-30)$$

- Das stromaufwärts gelegene Element 0 liegt im Druckgebiet ( $\vartheta_0 = 1$ ) und das stromabwärts gelegene Element  $E$  liegt im Kavitationsgebiet ( $k_0 = 1$  und  $k_E = 0$ )

$$(Q_C)_e = \Delta Y H_0 \quad . \quad (2-31)$$

- Beide Elemente liegen im Druckgebiet ( $k_0 = 1$  und  $k_E = 1$ )

$$(Q_C)_e = \Delta Y H_e = \Delta Y \left( \frac{H_0 + H_E}{2} \right) \quad . \quad (2-32)$$

Die Mengenflussbilanz der Couette-Strömung für  $u_m > 0$  kann somit als Superposition aller Fälle wie folgt formuliert werden

$$\begin{aligned} \iint_{B_0} \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial X} dX dY &= \Delta Y \left\{ \left[ (1 - k_0) (\vartheta H)_0 + k_0 H_0 + k_0 k_E \left( \frac{H_E - H_0}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ (1 - k_W) (\vartheta H)_W + k_W H_W + k_W k_0 \left( \frac{H_0 - H_W}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-33)$$

bzw. mit der druckähnlichen Funktion

$$\begin{aligned} (Q_C)_e - (Q_C)_w &= \Delta Y \left\{ \left[ (1 - k_0) (\Pi H)_0 + H_0 + k_0 k_E \left( \frac{H_E - H_0}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ (1 - k_W) (\Pi H)_W + H_W + k_W k_0 \left( \frac{H_0 - H_W}{2} \right) \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (2-34)$$

### Verdrängungs-Strömung

Für die Berücksichtigung dynamischer Effekte im Sinne einer Zeitintegration, deren Zustandsvariablen die Lage und die Geschwindigkeit der beteiligten Lagerpartner beschreiben, ist der Term der zeitlichen Änderung aufgrund der resultierenden dämpfenden Eigenschaften unerlässlich. Die Integration der Verdrängungs-Strömung ergibt unter Anwendung der Produktregel

$$\iint_{B_0} \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial \bar{t}} dX dY = (\dot{\vartheta} H + \vartheta \dot{H})_0 \Delta X \Delta Y = Q_{\Delta\vartheta} + Q_{\Delta kin} \quad . \quad (2-35)$$

Dabei beschreibt der Term

$$Q_{\Delta\vartheta} = (\dot{\vartheta} H)_0 \Delta X \Delta Y = \frac{\vartheta_{0,\bar{t}} - \vartheta_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}}}{\Delta\bar{t}} H_{0,\bar{t}} \Delta X \Delta Y$$

die Änderung des Spaltfüllungsgrads. Da es sich hierbei nicht um eine kinematische Größe handelt, wird die Zeitableitung durch eine finite Differenz zwischen dem aktuellen und dem letzten Zeitschritt gebildet. Dies führt innerhalb der Zeitintegration zu einem erhöhten organisatorischen Aufwand. Bei der Verwendung von Solvern mit variabler Schrittweite müssen zur Sicherstellung der notwendigen Stetigkeit der Lösung über der Zeit verschiedene Zusatzbedingungen erfüllt werden, auf die im Kapitel (4.4) näher eingegangen wird. Der Term

$$Q_{\Delta kin} = (\vartheta \dot{H})_0 \Delta X \Delta Y$$

hingegen, welcher durch die Spaltänderung zeitlich determiniert wird, kann direkt aus den Zustandsvariablen abgeleitet werden.

Bedingt durch die Abhängigkeit der Verdrängungs-Strömung vom Kavitationsindex, erfolgt auch hier eine Fallunterscheidung analog zur Diskretisierung der Couette-Strömung.

- Das Element 0 liegt zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  und lag zum Zeitpunkt  $\bar{t} - \Delta\bar{t}$  im Kavitationsgebiet ( $k_{0,\bar{t}} = 0$  und  $k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} = 0$ )

$$Q_{\Delta\vartheta} + Q_{\Delta kin} = \left( \frac{\vartheta_{0,\bar{t}} - \vartheta_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}}}{\Delta\bar{t}} H_{0,\bar{t}} + \vartheta_{0,\bar{t}} \dot{H}_{0,\bar{t}} \right) \Delta X \Delta Y \quad . \quad (2-36)$$

- Das Element 0 liegt zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  im Kavitationsgebiet ( $k_{0,\bar{t}} = 0$ ) und lag zum Zeitpunkt  $\bar{t} - \Delta\bar{t}$  im Druckgebiet ( $k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} = 1$ )

$$Q_{\Delta\vartheta} + Q_{\Delta kin} = \left( \frac{\vartheta_{0,\bar{t}} - 1}{\Delta\bar{t}} H_{0,\bar{t}} + \vartheta_{0,\bar{t}} \dot{H}_{0,\bar{t}} \right) \Delta X \Delta Y \quad . \quad (2-37)$$

- Das Element 0 liegt zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  im Druckgebiet ( $k_{0,\bar{t}} = 1$ ) und lag zum Zeitpunkt  $\bar{t} - \Delta\bar{t}$  im Kavitationsgebiet ( $k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} = 0$ )

$$Q_{\Delta\vartheta} + Q_{\Delta kin} = \left( \frac{1 - \vartheta_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}}}{\Delta\bar{t}} H_{0,\bar{t}} + \dot{H}_{0,\bar{t}} \right) \Delta X \Delta Y \quad . \quad (2-38)$$

- Das Element 0 liegt zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  und lag zum Zeitpunkt  $\bar{t} - \Delta\bar{t}$  im Druckgebiet ( $k_{0,\bar{t}} = 1$  und  $k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} = 1$ )

$$Q_{\Delta\vartheta} + Q_{\Delta kin} = \dot{H}_{0,\bar{t}} \Delta X \Delta Y \quad . \quad (2-39)$$

Durch Superposition wird folgende Gleichung erhalten

$$\begin{aligned} \iint_{B_0} \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial \bar{t}} dX dY = \Delta X \Delta Y & \left[ k_{0,\bar{t}} \dot{H}_{0,\bar{t}} + (1 - k_{0,\bar{t}}) \vartheta_{0,\bar{t}} \dot{H}_{0,\bar{t}} \right. \\ & + \left( k_{0,\bar{t}} - k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} + \vartheta_{0,\bar{t}} - \vartheta_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} \right. \\ & \left. \left. + k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} \vartheta_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} - k_{0,\bar{t}} \vartheta_{0,\bar{t}} \right) \frac{H_{0,\bar{t}}}{\Delta\bar{t}} \right] \end{aligned} \quad (2-40)$$

bzw. mit der druckähnlichen Funktion

$$\begin{aligned} \iint_{B_0} \frac{\partial(\vartheta H)}{\partial \bar{t}} dX dY = \Delta X \Delta Y & \left[ \dot{H}_{0,\bar{t}} + (1 - k_{0,\bar{t}}) \Pi_{0,\bar{t}} \dot{H}_{0,\bar{t}} \right. \\ & \left. + \left( (1 - k_{0,\bar{t}}) \Pi_{\bar{t}} - (1 - k_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}}) \Pi_{0,\bar{t}-\Delta\bar{t}} \right) \frac{H_{0,\bar{t}}}{\Delta\bar{t}} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2-41)$$

## Lösung des linearen Gleichungssystems

Das resultierende lineare Gleichungssystem besitzt eine schwach besetzte Koeffizientenmatrix mit einer apriori bekannten Anzahl an Einträgen, wodurch sie für eine Kompaktspeicherung prädestiniert ist. Aufgrund der Unsymmetrie der Systemmatrix können nur problemangepasste Gleichungssystemlöser Verwendung finden, was sich nachteilig auf die Rechenzeit für die Lösung der Reynoldsgleichung auswirkt. Entsprechende Verfahren sind z.B. eine auf die Kompaktspeicherung angepasste Variante des SOR<sup>10</sup>-Verfahrens, welches eine Verallgemeinerung des Gauß-Seidel-Verfahrens darstellt, oder eine entsprechende Variante des BiCGStab<sup>11</sup>-Verfahrens, welches im konkreten Fall Rechenzeitvorteile lieferte und daraus resultierend Anwendung fand. Die Einarbeitung der periodischen Randbedingungen und der Bedingungen an den Rändern des Lagers erfolgt direkt bei der Aufstellung der Koeffizientenmatrix. Die Ölzuführungstaschen können entweder durch Verwendung von Penalty-Termen oder durch die Transformation des Problems in den korrespondierenden Unterraum realisiert werden. Die zweite Variante wurde aufgrund der numerischen Vorteile (Verkleinerung des Gleichungssystems bei unveränderter Kondition) trotz erhöhten algorithmischen Aufwands (bedingt durch die Kompaktspeicherung) umgesetzt.

## Berücksichtigung der Nichtlinearität

Aufgrund der zu jedem Zeitpunkt  $\bar{t}$  variierenden kinematischen Größen, welche maßgeblich die Eingangsdaten für die Reynoldsgleichung determinieren, ist die Lage des Kavitationsgebiets nicht apriori bekannt. Bedingt durch die Dualität der Differentialgleichung Gl. (2-19) ist damit eine direkte Berechnung der Unbekannten Druck und Spaltfüllung durch einmalige Gleichungssystemlösung im allgemeinen Fall nicht möglich. Die Aufstellung des

<sup>10</sup>Successive Over-Relaxation

<sup>11</sup>Biconjugate Gradients Stabilised [SW98]

Gleichungssystem basiert konsequent auf der Kenntnis, in welchen Bereichen die Differentialgleichung für den Druck bzw. für die Spaltfüllung Gültigkeit besitzt. Nach Lösung des Gleichungssystems liegt eine potentiell differierende Aufteilung in Druck- und Kavitationsgebiet vor, wodurch die Reynoldsgleichung nicht mehr erfüllt ist. Als Resultat ist eine Gesamtlösungsstrategie notwendig, welche diese Nichtlinearität berücksichtigt.

Wegen der diskreten Art der Nichtlinearität (eine Veränderung der Differentialgleichung ist in jedem diskreten Kontrollvolumen möglich) findet eine Fixpunktiteration der Form

$$\underline{x}_{i+1} = f(\underline{x}_i) \quad i = 0, 1 \dots n \quad (2-42)$$

Anwendung. Dabei gilt eine Lösung als konvergent, wenn keine Veränderungen zwischen Druck- und Kavitationsgebiet in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen auftreten. Die Konvergenz kann dabei aufgrund der diskreten Formulierung der Nichtlinearität nicht garantiert werden. Bei oszillierenden Iterationen findet die Lösung Verwendung, welche die Kontinuitätsgleichung besser erfüllt.

Unter der Bedingung, dass die masseerhaltende Kavitation keinen dominanten Einfluss auf die Lösung besitzt, können modular die Vereinfachungen des Kavitationsalgorithmus nach Gümbel Verwendung finden, wodurch das resultierende Gleichungssystem eine symmetrische Systemmatrix erhält, welche numerisch vorteilhaft zu lösen ist. Zudem entfällt die Nichtlinearität, da kein Dualismus der beschreibenden Ergebnisgröße existiert und somit die Lage des konvergenten Kavitationsgebiets nach der ersten Lösung des Gleichungssystems vorliegt. Hinzu kommt, dass die Algorithmen geringere Gradienten der Lösung innerhalb der Zeitintegration erzeugen und damit das System im Vergleich zur Elrod-Formulierung numerisch nicht so steif reagiert.

## 2.2 Thermodynamik

Die Beschreibung des thermischen Verhaltens innerhalb einer strömenden Flüssigkeit kann durch die zeitliche Änderung der Gesamtenergie an einem infinitesimalen Volumenelement abgeleitet werden [OBD09]. Die resultierenden Energiegleichungen beschreiben die dreidimensionale Energieverteilung der Strömung. Unter Einführung von Annahmen werden die Gleichungen analog Kapitel (2.1.2) auf ein zweidimensionales Problem reduziert. Abschließend wird die Einbindung von Randbedingungen, die numerische Lösung und die Rückwirkung auf die Hydrodynamik vorgestellt.

### 2.2.1 Energieerhaltung einer Strömung

Die Gesamtenergie eines Volumenelements  $E$  setzt sich gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik aus der inneren Energie  $E_{in}$  und der kinetischen Energie  $E_{kin}$  zusammen

$$E \, dx \, dy \, dz = \left[ \rho \left( E_{in} + \frac{E_{kin}^2}{2} \right) \right] \, dx \, dy \, dz \quad . \quad (2-43)$$

Eine Veränderung der Gesamtenergie kann durch folgende Vorgänge stattfinden:

- konvektiver Energietransport infolge der Strömung pro Zeit  $d\dot{E}_{konv}$
- Energietransport durch Wärmeleitung pro Zeit  $d\dot{E}_{kond}$
- durch Druck-, Normal- und Schubspannungen geleistete Arbeit pro Zeit  $d\dot{E}_{diss}$
- dem Fluid von außen zugeführte Energie (Strahlung etc.) pro Zeit  $d\dot{E}_a$
- infolge der Wirkung der Schwerkraft verrichtete Arbeit pro Zeit  $d\dot{E}_{grav}$

Werden zunächst die in das Kontrollvolumen ein- und ausfließenden Energieströme, wie in Abb. (2-9) dargestellt, bilanziert, ergibt sich die Änderung der Gesamtenergie durch Konvektion zu

$$d\dot{E}_{konv} = - \left[ \frac{\partial \left( \rho \left( E_{in} + \frac{E_{kin}^2}{2} \right) u \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \rho \left( E_{in} + \frac{E_{kin}^2}{2} \right) v \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \rho \left( E_{in} + \frac{E_{kin}^2}{2} \right) w \right)}{\partial z} \right] \, dx \, dy \, dz \quad . \quad (2-44)$$

Der Energietransport durch Wärmeleitung  $d\dot{E}_{kond}$  kann unter Berücksichtigung des Fouriersonen Wärmeleitungsgesetzes mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  durch analoge Bilanzierung zu folgendem Term zusammengefasst werden

$$d\dot{E}_{kond} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \, dx \, dy \, dz \quad . \quad (2-45)$$

Die Wirkung der Reibkräfte an allen Seiten des Volumenelements kann durch die resultierenden Normal- und Schubspannungen sowie den allseitig wirkenden statischen Druck  $p$  (vgl. Abb. (2-3)) beschrieben werden. Die dem Volumenelement zugeführte Leistung  $d\dot{E}_{diss}$  ergibt sich aus der Summation des Produkts aus wirkender Spannung und Geschwindigkeit über den zugeordneten Flächen

$$d\dot{E}_{diss} = d\dot{E}_{diss_x} + d\dot{E}_{diss_y} + d\dot{E}_{diss_z} \quad (2-46)$$

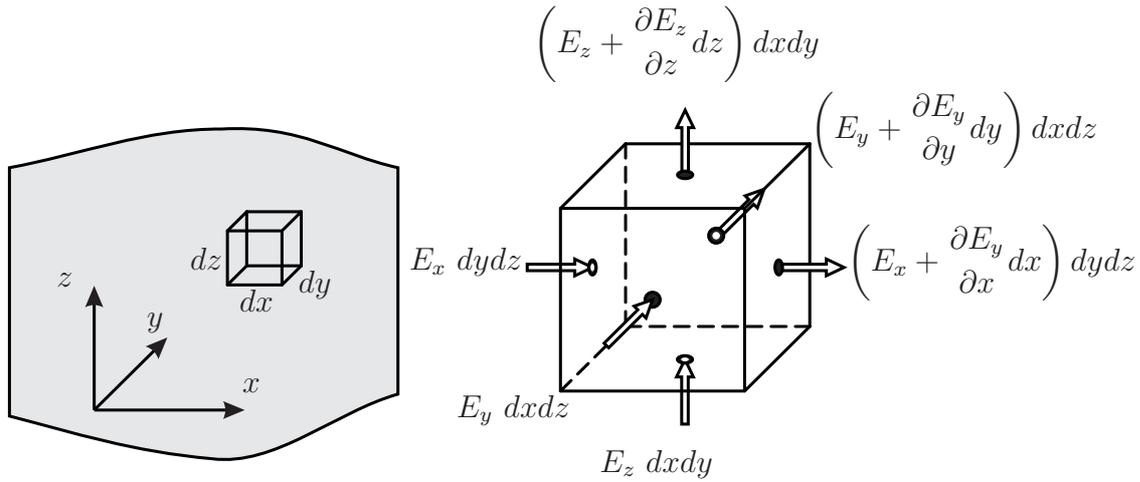


Abbildung 2-9: Ein- und austretende Energieströme

mit

$$\begin{aligned}
 d\dot{E}_{diss_x} &= \left[ -\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xx}u}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}v}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}w}{\partial x} \right] dx dy dz \quad , \\
 d\dot{E}_{diss_y} &= \left[ -\frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}u}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yy}v}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}w}{\partial y} \right] dx dy dz \quad , \\
 d\dot{E}_{diss_z} &= \left[ -\frac{\partial(pw)}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{zx}u}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{zy}v}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{zz}w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad .
 \end{aligned}$$

Die Energiezufuhr von außen  $d\dot{E}_a$  und die aus der Schwerkraft resultierende Leistung  $d\dot{E}_{grav}$  können zu folgenden Termen zusammengefasst werden

$$\begin{aligned}
 d\dot{E}_a &= q_a dx dy dz \quad , \\
 d\dot{E}_{grav} &= \rho g (u + v + w) dx dy dz \quad .
 \end{aligned} \tag{2-47}$$

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung Gl. (2-1) und der Identität

$$\begin{aligned}
 &\rho \left[ \frac{\partial \left( \frac{E_{kin}^2}{2} \right)}{\partial t} + u \frac{\partial \left( \frac{E_{kin}^2}{2} \right)}{\partial x} + v \frac{\partial \left( \frac{E_{kin}^2}{2} \right)}{\partial y} + w \frac{\partial \left( \frac{E_{kin}^2}{2} \right)}{\partial z} \right] \\
 &= -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} - w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g (u + v + w) \\
 &\quad + u \left( \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) \\
 &\quad + w \left( \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2-48}$$

kann eine allgemeine Form der Energiegleichung abgeleitet werden

$$\begin{aligned}
 & \rho \left[ \frac{\partial E_{in}}{\partial t} + u \frac{\partial E_{in}}{\partial x} + v \frac{\partial E_{in}}{\partial y} + w \frac{\partial E_{in}}{\partial z} \right] \\
 = & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho q_a \\
 & + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \\
 & \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} .
 \end{aligned} \tag{2-49}$$

Werden anschließend die Normal- und Schubspannungen unter Verwendung des Stokes-schen Reibungsgesetzes Gl. (2-2) eliminiert, ergibt sich eine kompakte Schreibweise

$$\begin{aligned}
 & \rho \left[ \frac{\partial E_{in}}{\partial t} + u \frac{\partial E_{in}}{\partial x} + v \frac{\partial E_{in}}{\partial y} + w \frac{\partial E_{in}}{\partial z} \right] \\
 = & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\
 & - p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho q_a + \eta \Phi
 \end{aligned} \tag{2-50}$$

mit der Dissipationsfunktion  $\Phi$

$$\begin{aligned}
 \Phi = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\
 & + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{2-51}$$

## 2.2.2 Energiegleichung

Die aus der Energieerhaltung abgeleitete Gl. (2-50) kann unter Berücksichtigung der eingeführten Annahmen in Kapitel (2.1.2) für die Berechnung von Radialgleitlagern weiter vereinfacht und in eine für die numerische Simulation geeignete Form überführt werden. Erfolgt zunächst eine Beschränkung auf inkompressible Fluide mit konstanter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  kann, unter Ausnutzung der Beziehung

$$E_{in} = c_v T \tag{2-52}$$

und der Kontinuitätsgleichung Gl. (2-1) sowie der Vernachlässigung der Terme aus Energiezufuhr und Schwerkraft gegenüber denen aus den Scherkräften, die Energiegleichung in der Form

$$\begin{aligned}
 \rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\
 2\eta \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2-53}$$

abgeleitet werden. Die Vernachlässigung aller Geschwindigkeitsgradienten in Breiten- und Umfangsrichtung sowie die in der Literatur häufig verwendete Vernachlässigung des Geschwindigkeitsgradienten von  $w$  in Spaltdickenrichtung als Resultat der Konstanz des Drucks über die Spalthöhe führt auf die Gleichung

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \eta \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] . \quad (2-54)$$

An dieser Stelle schließt sich in der Mehrzahl der Publikationen über die Energiegleichung die Einführung einer auf den Spalt bezogenen Höhenkoordinate an, um die Überführung auf ein quaderförmiges Kontrollvolumen zu ermöglichen

$$\bar{z} = \frac{z}{h(x, y)} . \quad (2-55)$$

Nach Integration über die Schmierspalthöhe kann unter Verwendung der Leibnitzregel Gl. (A-1) und Vernachlässigung der Konvektion in Spalthöhenrichtung sowie mit der Vereinfachung, dass der Temperaturgradient keine Funktion der Spalthöhe ist [PW79], folgende vereinfachte Gleichung für die Beschreibung des Temperaturfelds des Schmierfilms innerhalb eines Radialgleitlagers abgeleitet werden

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left[ \int_0^1 h u d\bar{z} \frac{\partial T}{\partial x} + \int_0^1 h v d\bar{z} \frac{\partial T}{\partial y} + \int_0^1 h d\bar{z} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \\ &= \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\eta}{h} \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] d\bar{z} . \end{aligned} \quad (2-56)$$

Der dreidimensionale Charakter der Gleichung bedingt eine numerisch aufwendige Diskretisierung, welche durch die resultierenden Rechenzeiten für die Verwendung als Kraftelement innerhalb einer Mehrkörpersimulation ungeeignet ist. Aus diesem Grund wird ein durch Knight [KB83], [KB87], [Kni90], beschriebener quadratischer Ansatz der Temperatur in Spaltdickenrichtung verwendet

$$T = T_I + 2(3T_m - T_{II} - 2T_I)\bar{z} + 3(T_{II} - 2T_m + T_I)\bar{z}^2 , \quad (2-57)$$

der sowohl mit experimentellen Daten gute Übereinstimmungen aufweist, als auch numerisch aufgrund der resultierenden zweidimensionalen Form der Differentialgleichung<sup>12</sup> vorteilhaft ist.<sup>13</sup> Dabei beschreibt  $T_m$  die mittlere Schmierfilmtemperatur

$$T_m = \int_0^1 T d\bar{z} , \quad (2-58)$$

<sup>12</sup>Algorithmisch ergibt sich damit die Möglichkeit der Verwendung der gleichen Routinen wie für die Berechnung des Drucks aus der Reynoldsgleichung.

<sup>13</sup>Weiterführende Approximationen (z.B. vierter Ordnung [SR09]) können unter Einführung zusätzlicher Annahmen formuliert werden.

welche für die Definition der dynamischen Viskosität maßgeblich ist. Die Lösungsgüte der Approximation ist mit der Verwendung zweier linearer Elemente über die Spaltdicke identisch.

Resultierend ergibt sich die Energiegleichung in der Form

$$\begin{aligned} & \rho c_v \left[ \left( u_m h - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial T_m}{\partial x} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial T_m}{\partial y} + h \frac{\partial T_m}{\partial t} \right] \\ = & \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) + \frac{6T_I - 12T_m + 6T_{II}}{h} \right] \\ & + \frac{\eta}{h} (u_{II} - u_I)^2 + \frac{h^3}{12\eta} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] . \end{aligned} \quad (2-59)$$

Obleich die Terme der Wärmeleitung in Umfangs- und Breitenrichtung gegenüber denen in radialer Richtung klein sind, sollen sie wegen der Erhaltung der elliptischen Form der Differentialgleichung und der damit verbundenen Analogie zur Reynoldsgleichung nicht vernachlässigt werden. Zudem können damit bei hochbelasteten Lagern mit hohen Taschendrücken aufgrund der großen Druckgradienten Rückströmungen des Schmiermittels abgebildet werden [Mit90].

### 2.2.3 Randbedingungen der Energiegleichung

Der thermische Zustand innerhalb des Lagers ist durch Gl. (2-59) nur unter Einbeziehung von Randbedingungen eindeutig beschreibbar. Von Bedeutung sind dabei folgende Punkte.

1. Die stoffgebundene Energiezufuhr aus der Versorgung des Lagers mit Schmiermittel definiert die Temperatur im Bereich der Ölzuführungstaschen. Die Beschreibung des thermischen Mischungsvorgangs, welcher die Rückströmung des erwärmten Schmierstoffs, dessen Vermischung mit dem frischen Schmierstoff und die daraus resultierenden erhöhten Schmierstofftemperaturen umfasst, bedarf einer iterativen Lösung der Energiegleichung. Zur Verringerung des numerischen Aufwands und der damit verbundenen Rechenzeiten werden die Taschentemperaturen als identisch der Zuführtemperatur  $T_T$  angenommen

$$T_m(x_{T1} \leq x \leq x_{T2}, y_{T1} \leq y \leq y_{T2}) = T_T \quad . \quad (2-60)$$

Eine nachträgliche Einbindung der Routinen für die Beschreibung des Mischungsvorgangs kann prinzipiell, wie z.B. in [Mer07], [Fuc02] beschrieben, vorgenommen werden.

2. Die stoffgebundene Energieabfuhr aus dem Schmierstoffseitenfluss führt an den Rändern des Lagers auf einem Temperaturgradienten gleich Null [Pat80]

$$\frac{\partial}{\partial y} T_m(y = 0) = \frac{\partial}{\partial y} T_m(y = b) = 0 \quad . \quad (2-61)$$

3. Die  $2\pi$ -Periodizität der Temperaturverteilung in Umfangsrichtung bedingt die Kontinuität der Temperatur und des Wärmestroms

$$T_m(x, y) = T_m(x + 2\pi, y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} T_m(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} T_m(x + 2\pi, y) \quad . \quad (2-62)$$

4. Der Wärmeübergang an den Oberflächen der beteiligten Lagerpartner wird zum einen durch die Kontinuität der Temperatur an den Kontraktflächen gewährleistet, was durch den Ansatz Gl. (2-57) per se erfüllt ist

$$T(x, y, z = 0) = T_I(x, y) \quad , \quad T(x, y, z = h) = T_{II}(x, y) \quad . \quad (2-63)$$

Des Weiteren bedarf es der Kontinuität des Wärmestroms an den Kontaktflächen, die mit folgenden Übergangsbedingungen beschreibbar ist

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y) \lambda_{liq} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z = 0) &= -\lambda_I \frac{\partial}{\partial z} T_I(x, y) \quad , \\ \vartheta(x, y) \lambda_{liq} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z = h) &= -\lambda_{II} \frac{\partial}{\partial z} T_{II}(x, y) \quad . \end{aligned} \quad (2-64)$$

Die Wärmeleitung innerhalb der Welle bzw. der Lagerschale, welche die Oberflächentemperatur der Lagerpartner determiniert, wird innerhalb der Modellierung der Lagerpartner als finite Elemente mit entsprechenden eigenen Randbedingungen abgebildet. Eine detaillierte Beschreibung erfolgt in Kapitel (2.3.1). Somit dienen die Wärmeströme an den Kontaktflächen als Lasten für die Lagerpartner, welche ihrerseits durch die Oberflächentemperaturen die Randbedingungen für die Energiegleichung darstellen.

## 2.2.4 Numerische Lösung der Energiegleichung

Die numerische Lösung der Energiegleichung erfolgt analog zur Reynoldsgleichung (siehe Kapitel (2.1.4)) unter Verwendung der Finite-Volumen-Methode. Nach Einführung der dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned} U &= \frac{u}{|u_m|}, \quad \Theta = \frac{T}{T^*}, \quad \psi = \frac{\Delta r}{r_I} \quad , \\ Re &= \frac{\rho |u_m| \Delta r}{\eta^*}, \quad Pr = \frac{\eta^* c_v}{\lambda}, \quad Kd = \frac{\eta^* |u_m|}{\rho c_v T^* \psi \Delta r} \end{aligned} \quad (2-65)$$

kann die Energiegleichung mit den getroffenen Vereinfachungen und Annahmen in die Form

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \operatorname{sgn}(u_m) H - \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \frac{\partial \Theta_m}{\partial X} - \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial \Theta_m}{\partial Y} + H \frac{\partial \Theta_m}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{Re Pr \psi} \left[ \psi^2 \frac{\partial}{\partial X} \left( H \frac{\partial \Theta_m}{\partial X} \right) + \psi^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( H \frac{\partial \Theta_m}{\partial Y} \right) + \frac{6\Theta_I - 12\Theta_m + 6\Theta_{II}}{H} \right] \\ &+ Kd \frac{\bar{\eta}}{H} (U_{II} - U_I)^2 + Kd \frac{H^3}{12 \bar{\eta}} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2-66)$$

überführt werden. Die zweidimensionale Differentialgleichung kann unter der Bedingung linearer Variation der Wärmeflüsse und Konstanz der Temperaturen auf den Seitenflächen der Kontrollvolumen in einer diskreten Differenzenform abgebildet werden

$$\underbrace{\mathcal{V}_x [(\Theta_m)_e - (\Theta_m)_w] + \mathcal{V}_y [(\Theta_m)_n - (\Theta_m)_s] + H \frac{\partial \Theta_m}{\partial t}}_{\text{konvektive Wärmeflüsse}} = \quad (2-67)$$

$$\underbrace{\left( \Gamma \frac{\partial \Theta_m}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \Theta_m}{\partial x} \right)_w + \left( \Gamma \frac{\partial \Theta_m}{\partial y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \Theta_m}{\partial y} \right)_s + \frac{6\Theta_I - 12\Theta_m + 6\Theta_{II}}{H}}_{\text{konduktive Wärmeflüsse}} + \underbrace{\Psi}_{\text{Dissipationsterm}} \quad .$$

Mit der Annahme, dass der Energietransport durch Konvektion und Konduktion über die Kontrollvolumenseiten sowie der Dissipationsterm mit dem Spaltfüllungsgrad  $\vartheta$  linear abnimmt [Mit90], können analog Gl. (2-15) und Gl. (2-16) folgende Bedingungen angegeben werden

$$\begin{aligned}\rho c_v &= \vartheta \rho_{liq} c_{vliq} + (1 - \vartheta) \rho_{gas} c_{vgas} \cong \vartheta \rho_{liq} c_{vliq} \quad , \\ \lambda &= \vartheta \lambda_{liq} + (1 - \vartheta) \lambda_{gas} \cong \vartheta \lambda_{liq} \quad .\end{aligned}\quad (2-68)$$

Als Folge ergeben sich die resultierenden konvektiven Terme zu

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_{e,w} &= \vartheta_0 \left( H_0 \operatorname{sgn} u_m - \frac{H_0^3}{12\bar{\eta}\vartheta_0} \frac{P_E - P_W}{2\Delta X} \right) \Delta Y \quad , \\ \mathcal{V}_y = \mathcal{V}_{n,s} &= -\vartheta_0 \left( \frac{H_0^3}{12\bar{\eta}\vartheta_0} \frac{P_N - P_S}{2\Delta Y} \right) \Delta X \quad , \\ H \frac{\partial \Theta_m}{\partial \bar{t}} &= \vartheta_0 H_0 \frac{\Theta_{m_0, \bar{t}} - \Theta_{m_0, \bar{t} - \Delta \bar{t}}}{\Delta \bar{t}} \Delta X \Delta Y \quad .\end{aligned}\quad (2-69)$$

Mit den eingeführten Annahmen erhalten die konduktiven Terme die Gestalt

$$\begin{aligned}\Gamma_{e,w} &= \left( \frac{\psi}{Re Pr} \frac{\vartheta_{E,0} H_{E,0} - \vartheta_{0,W} H_{0,W}}{\Delta X} \right) \Delta Y \quad , \\ \Gamma_{n,s} &= \left( \frac{\psi}{Re Pr} \frac{\vartheta_{N,0} H_{N,0} - \vartheta_{0,S} H_{0,S}}{\Delta Y} \right) \Delta X \quad .\end{aligned}\quad (2-70)$$

Abschließend kann der Dissipationsterm in der Form

$$\Psi = Kd \vartheta_0 \left[ \frac{\bar{\eta}}{H_0} (U_{II} - U_I)^2 + \frac{H_0^3}{12\bar{\eta}\vartheta_0} \left[ \left( \frac{P_E - P_W}{2\Delta X} \right)^2 + \left( \frac{P_N - P_S}{2\Delta Y} \right)^2 \right] \right] \Delta X \Delta Y$$

formuliert werden.

Die Temperaturen auf den Kontrollvolumenseiten  $\Theta_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) werden durch die Mittelwerte der Temperaturen aus den anliegenden Kontrollvolumen bestimmt, die Temperaturgradienten in den konduktiven Termen  $(\partial\Theta/\partial x)_{e,w}$  bzw.  $(\partial\Theta/\partial y)_{n,s}$  durch zentrale Differenzenquotienten approximiert.

Für den Fall, dass die Kontrollvolumen-Péclet-Zahlen

$$(Pe)_{e,w} = \left( \frac{\mathcal{V} \Delta x}{\Gamma} \right)_{e,w} \quad (Pe)_{n,s} = \left( \frac{\mathcal{V} \Delta y}{\Gamma} \right)_{n,s}\quad (2-71)$$

betragsmäßig den Wert Zwei überschreiten, führt die Verwendung zentraler Differenzenapproximationen auf physikalisch unrealistische Lösungen [Pat80]. Eine verbesserte Abbildung des Verhaltens kann durch Approximation der konvektiven Terme mit stromaufwärtsgerichteten Rückwärtsdifferenzen realisiert werden. Das verwendete Hybrid-Schema stellt dabei eine Kombination aus Zentraldifferenzen- und Rückwärtsdifferenzapproximationen dar. Für  $|Pe|_i > 2$  finden für die Konvektionsterme Rückwärtsdifferenzen Anwendung, während die Konduktionsterme vernachlässigt werden. Für  $|Pe|_i \leq 2$  werden wie zuvor beschrieben für alle Terme zentrale Differenzen verwendet.

Die dargestellte Vorgehensweise führt auf die Ausbildung eines dünn besetzten unsymmetrischen linearen Gleichungssystems mit pentadiagonaler Bandstruktur. Bedingt durch

die strukturelle Ähnlichkeit zur Reynoldsgleichung können die Algorithmen zur Einarbeitung von Randbedingungen und zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems ohne Einschränkung übernommen werden. Lediglich für die Berücksichtigung der Ausflussrandbedingungen bedarf es der Einbindung zusätzlicher Algorithmen zur numerischen Differentiation (siehe Gl. (A-5)).

### Einfluss auf die Reynoldsgleichung

Als Resultat der Temperaturabhängigkeit der Viskosität, welche durch die Vogelgleichung [Vog21] beschrieben werden kann

$$\eta(T) = c_1 e^{\left(\frac{c_2}{T - c_3}\right)}, \quad (2-72)$$

existiert eine nichtlineare Kopplung zwischen Temperatur und Druck und damit zwischen Reynoldsgleichung und Energiegleichung. Während die Temperatur eine Beeinflussung der dynamischen Viskosität und damit des Druckaufbaus bewirkt, werden sowohl die konvektiven Wärmeflüsse als auch die Dissipationsfunktion maßgeblich von der Druckfunktion determiniert. Da eine direkte Lösung der Reynoldsgleichung bei Berücksichtigung masseerhaltender Kavitationsalgorithmen nicht möglich ist, kann die Lösung der Energiegleichung in die Fixpunktiteration integriert werden, wodurch sich ein ganzheitliches Lösungskonzept des gekoppelten Differentialgleichungssystems aus Reynoldsgleichung und Energiegleichung ergibt.

Die direkte Rückkopplung der Energiegleichung auf die Lösung der Reynoldsgleichung führt zu einem aufwändigen iterativ zu lösenden Problem. Unter der Voraussetzung kleiner Schrittweiten bei der transienten Lösung des Gesamtsystems und den im Vergleich zur Reynoldsgleichung hohen thermischen Beharrungsvermögen kann die Rückwirkung der Temperatur als für einen Zeitschritt konstant angenommen werden, wodurch sich der Aufwand der Lösung der Gleichungssysteme drastisch verringert.

## 2.3 Strukturdynamik

Für die realitätsnahe Abbildung von Gleitlagerungen ist neben der genauen Beschreibung der hydro- und thermodynamischen Eigenschaften zusätzlich die Berücksichtigung mechanischer bzw. thermomechanischer Deformationen notwendig. Nach Ableitung der resultierenden körperfesten Bewegungsdifferentialgleichungen erfolgt eine Diskretisierung der mechanischen und thermischen Eigenschaften auf Basis Finiten-Element-Formulierungen. Bedingt durch die differierenden Beschreibungsformen von FE-System und MKS wird zur Verringerung der Anzahl der Freiheitsgrade eine Reduktion in den Modalraum vorgenommen. Die Auswahl der für die Beschreibung der Deformation maßgeblichen Eigenformen kann durch eine vorangestellte Systemreduktion vereinfacht werden. Im Folgenden werden die notwendigen theoretischen Grundlagen für das beschriebene Vorgehen zur Vorbereitung der Einbindung thermomechanischer Komponenten in Mehrkörpersimulationen vorgestellt. Abschließend wird ein Verfahren zur Einbindung spezifischer Deformationsvektoren in die Modalmatrix beschrieben, welches für eine rechenzeiteffiziente Einbindung thermischer Lasten in Mehrkörperanwendungen geeignet ist.

### 2.3.1 Thermomechanische FE-Formulierung

#### Konstitutive Gleichungen

Für die Ableitung der Grundgleichungen des gekoppelten thermomechanischen Feldproblems (vgl. [Hec05]) ist die Definition des Gibbs-Potentials als thermomechanische Verallgemeinerung des elastischen Potentials mit der Entropiedichte  $e$  und der absoluten Temperatur  $\theta$  von Vorteil

$$dG = \delta \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} - e \theta \quad . \quad (2-73)$$

Die Formulierung des Verzerrungs- bzw. Spannungsvektors wird hierbei konsequent in der Voigtschen Notation [Voi10] verwendet, es erfolgt demnach generell eine Beschränkung auf hyperelastisches Materialverhalten

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz}) \quad , \\ \underline{\sigma} &= (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) \quad . \end{aligned} \quad (2-74)$$

Zudem erweist sich die Linearisierung der Temperatur bzgl. einer absoluten Referenztemperatur  $\theta^*$

$$T = \theta - \theta^* \quad (2-75)$$

für weitere Schritte als vorteilhaft. Die Entwicklung des Gibbs-Potentials in einer Taylorreihe um einen Arbeitspunkt an dem per Definition das Gibbs-Potential verschwinden soll und der Abbruch nach der ersten Ordnung liefert die konstitutiven Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{H}}_{uu} & -\underline{\mathbb{H}}_{tu}^T \\ \underline{\mathbb{H}}_{tu} & \mathbb{H}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ T \end{bmatrix} \quad . \quad (2-76)$$

- Die Elastizitätsmatrix  $\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{uu}$

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{uu} = \left. \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right|_0 \quad (2-77)$$

kann unter der Bedingung isotropen, linear elastischen Materials als Erweiterung des Hookeschen Gesetzes in der Form

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{uu} = \begin{bmatrix} c_4 & & & & & & \\ & c_5 & c_4 & & & & \\ & c_5 & c_5 & c_4 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & c_6 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix} \text{ mit: } \begin{aligned} c_4 &= \frac{\mathbb{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_5 &= \frac{\mathbb{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_6 &= \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2-78)$$

geschrieben werden.

- Der Vektor der thermischen Moduln  $\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{tu}$  lässt sich aus

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{tu} = \left. \frac{\partial e}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right|_0 = - \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right|_0 = \left[ - \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^T \partial \theta} \right|_0 \right]^T = \left[ - \left. \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \theta} \right|_0 \right]^T \quad (2-79)$$

ableiten. Wird ein isotropes Materialmodell verwendet, ergibt sich

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{tu} = \frac{\mathbb{E}}{1-2\nu} \alpha [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (2-80)$$

mit dem Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$ .

- Der Koeffizient der spezifischen Wärmekapazität ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}}_{tt} = \left. \frac{\partial e}{\partial \theta} \right|_0 = - \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right|_0 = \frac{\rho c_V}{\theta^*} \quad (2-81)$$

## Generalisiertes Hamiltonsches Prinzip

Für die Ableitung der Bewegungsdifferentialgleichung wird das Hamiltonsche Prinzip verwendet [Par70]. Die Einführung der thermodynamischen Funktion  $\Xi$  in Verbindung mit der Arbeit der äußeren mechanischen Lasten  $W$  und der kinetischen Energie  $E_{kin}$  ergibt das Variationsfunktional des mechanischen Problems

$$0 \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - \Xi + W) dt \quad (2-82)$$

Die Definition der thermischen Funktion  $\Sigma$

$$\Sigma = \int_V (\mathcal{H} - e \theta \dot{\theta} - S \theta) dV + \int_{B^s} \underline{q}_b^T \underline{n}_b \theta dB \quad (2-83)$$

mit der Wärmequell-Dichte  $S$ , liefert die Grundlage für das thermische Variationsfunktional

$$0 \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \Sigma dt \quad . \quad (2-84)$$

Das Wärmeflusspotential  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \theta)^T \underline{\underline{\Lambda}} (\underline{\nabla} \theta) \quad (2-85)$$

und die Wärmestromdichte  $\underline{q}$

$$\underline{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\underline{\nabla} \theta)} = -\underline{\underline{\Lambda}} (\underline{\nabla} \theta) \quad (2-86)$$

können als Funktion der Temperatur und der Konduktivitätsmatrix  $\underline{\underline{\Lambda}}$  definiert werden.

Die einzelnen Terme aus Gl. (2-82) lassen sich dabei wie folgt formulieren.

Die thermodynamische Funktion  $\Xi$  ist definiert als

$$\Xi = \int_V (G + e \theta) dV \quad . \quad (2-87)$$

Die Beschreibung der äußeren mechanischen Lasten  $W$  lässt sich unter Berücksichtigung von Volumenlasten und Oberflächenlasten in der Form

$$W = W^v + W^s = \int_{V^s} \underline{u}^T \underline{s}^v dV + \int_{B^s} \underline{u}^T \underline{s}^b dB \quad (2-88)$$

realisieren. Wird im Anschluss die Variation der kinetischen Energie durch partielle Integration in den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_{kin} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \underline{\dot{u}}^T \underline{\dot{u}} \rho dV dt = \underbrace{\left[ \int_V \delta \underline{\dot{u}}^T \underline{\dot{u}} \rho dV \right]_{t_1}^{t_2}}_0 - \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\ddot{u}} \rho dV \quad (2-89)$$

überführt, können durch Separation der Variablen und mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Feldgleichungen in der folgenden schwachen Formulierung angegeben werden

$$0 \equiv \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\ddot{u}} \rho dV + \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \int_{V^s} \delta \underline{u}^T \underline{s}^v dV - \int_{B^s} \delta \underline{u}^T \underline{s}^b dB \quad , \quad (2-90)$$

$$0 \equiv \int_V [ -(\underline{\nabla} \delta \theta)^T \underline{q} + \delta \theta (\theta \dot{e} - S) ] dV + \int_{B^s} \delta \theta \underline{q}_b^T \underline{n}_b dB \quad .$$

Eine detailliertere Überführung von Gl. (2-84) in Gl. (2-90) kann Kapitel (A.2) entnommen werden. Erfolgt eine Beschränkung der thermischen Randbedingungen auf explizit vorgegebene Wärmeströme  $q_b$  (Neumann Randbedingungen) und Konvektion, welche durch den Filmkoeffizienten  $hf$  und die Umgebungstemperatur  $T_{amb}$  definiert wird, kann folgende Schreibweise verwendet werden

$$\underline{q}_b^T \underline{n}_b = -q_b + hf (T_b - T_{amb}) \quad . \quad (2-91)$$

Die schwache Formulierung des thermomechanischen Feldproblems weist erst nach Einführung der konstitutiven Gleichungen Gl. (2-76) die explizite Kopplung auf. Unter Annahme einer Linearisierung der thermischen Gleichung ergibt sich

$$0 \equiv \int_V \delta \underline{r}^T \underline{\dot{u}} \rho dV + \int_V (\delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\mathbb{H}}_{uu} \underline{\varepsilon} - \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\mathbb{H}}_{tu}^T T) dV - \int_{V^s} \delta \underline{u}^T \underline{s}^v dV - \int_{B^s} \delta \underline{u}^T \underline{s}^b dB \quad , \quad (2-92)$$

$$0 \equiv \int_V \left[ -(\underline{\nabla} \delta \theta)^T \underline{q} + \delta \theta \theta_0 (\underline{\mathbb{H}}_{tu} \underline{\dot{\varepsilon}} + \underline{\mathbb{H}}_{tt} \dot{T}) - \delta \theta S \right] dV - \int_{B^s} \delta \theta (q_b - hf T_b + hf T_{amb}) dB \quad .$$

Zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem Verschiebungsfeld  $\underline{u}$  und dem Vektor der Dehnungen  $\underline{\varepsilon}$  kann unter Beschränkung auf eine lineare Abbildung (geometrische Linearisierung) der Differentialoperator  $\underline{\underline{\mathfrak{L}}}_u$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{\mathfrak{L}}}_u \underline{u} \quad \text{mit (für Volumenelemente):} \quad \underline{\underline{\mathfrak{L}}}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-93)$$

Verwendung finden. Analog lässt sich der Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestromdichte formulieren

$$\underline{q} = -\underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{\mathfrak{L}}}_t T \quad \text{mit (für Volumenelemente):} \quad \underline{\underline{\mathfrak{L}}}_t = \underline{\underline{\nabla}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad . \quad (2-94)$$

### Diskretisierung (Finite-Elemente-Formulierung)

An dieser Stelle schließt sich die Notwendigkeit der Diskretisierung des Verschiebungsfelds  $\underline{u}$  und der Temperatur  $T$  auf den betrachteten Körpern an. Bedingt durch die weite Verbreitung und die universelle Anwendbarkeit, erfolgt die Beschreibung unter Verwendung finiter Elemente. Dabei erfolgt im Gegensatz zu den klassischen Verfahren der Variationsrechnung (Ritz-Verfahren, Galerkin-Verfahren) die Verwendung von Ansatzfunktionen, die nur in einem Teilbereich der Struktur (finites Element) Werte ungleich Null annehmen. In Abhängigkeit der Wahl des jeweiligen Elementtyps lässt sich auf diese Weise das elementlokale Verschiebungsfeld  ${}^{\mathbb{E}}\underline{u}$  aller Punkte durch die elementlokalen Verschiebungen und ggf. Verdrehungen der Knoten  ${}^{\mathbb{E}}z_u$  beschreiben

$${}^{\mathbb{E}}\underline{u} = \underline{\underline{N}}_u {}^{\mathbb{E}}z_u \quad . \quad (2-95)$$

Analog ergibt sich für die Temperatur

$$\underline{\mathbb{E}}T = \underline{\mathbb{E}}N_t \underline{\mathbb{E}}z_t \quad . \quad (2-96)$$

Die Beschreibung der Ansatzfunktionen für die jeweiligen Elementtypen kann unter anderem aus [Bat90], [ZT00] und [SB97] entnommen werden.

Die Summation über alle Elemente  $\underline{\mathbb{S}}$  und anschließende Transformation in die Basis des Bezugssystems  $\underline{\mathbb{E}}\Gamma^T$  ergibt den Vektor des Verschiebungsfelds bzw. die Temperatur in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade  $z_u$  bzw.  $z_t$

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{\mathbb{E}}\Gamma^T \underline{\mathbb{E}}N_u \underline{\mathbb{E}}S_u z_u \quad , \\ T &= \underline{\mathbb{E}}N_t \underline{\mathbb{E}}S_t z_t \end{aligned} \quad (2-97)$$

und damit die Dehnungen bzw. die Wärmestromdichte

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{\mathbb{L}}_u \underline{\mathbb{E}}\Gamma^T \underline{\mathbb{E}}N_u \underline{\mathbb{E}}S_u z_u = \underline{\mathbb{B}}_u \underline{\mathbb{E}}S_u z_u \quad , \\ \underline{q} &= -\underline{\mathbb{A}} \underline{\mathbb{L}}_t \underline{\mathbb{E}}N_t \underline{\mathbb{E}}S_t z_t = \underline{\mathbb{B}}_t \underline{\mathbb{E}}S_t z_t \quad . \end{aligned} \quad (2-98)$$

Nach Integration über das Volumen und Einführung einer geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung (Rayleigh-Dämpfung) der Verschiebungsfreiheitsgrade können die vorangegangenen Betrachtungen zu folgendem Bewegungsdifferentialgleichungssystem zusammengefasst werden

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_u \\ \ddot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}_{uu} & \underline{0} \\ \underline{D}_{tu} & \underline{D}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_u \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{ut} \\ \underline{0} & \underline{K}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_u \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_t \end{bmatrix} \quad (2-99)$$

bzw.

$$\underline{M} \ddot{z} + \underline{D} \dot{z} + \underline{K} z = \underline{F} \quad . \quad (2-100)$$

Die detaillierten Zusammenhänge zum Aufbau der einzelnen Systemmatrizen sind in Tab. (2.3.1) dokumentiert.

**Tabelle 2-1:** Integrale für die gekoppelten thermomechanischen Bewegungsgleichungen

| Massenmatrix       |  |
|--------------------|--|
| Verschiebungsterm  | $\underline{\underline{M}}_{uu} = \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u^T \int_V \underline{\underline{N}}_u^T \rho \underline{\underline{N}}_u dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u \right)$  |
| Dämpfungsmatrix    |  |
|                    | Rayleigh-Dämpfung  |
| Verschiebungsterm  | $\underline{\underline{D}}_{uu} = \gamma \underline{\underline{M}}_{uu} + \beta \underline{\underline{K}}_{uu}$  |
| Temperaturterm     | $\underline{\underline{D}}_{tt} = \theta_0 \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_V \underline{\underline{N}}_t^T \underline{\underline{H}}_{tt} \underline{\underline{N}}_t dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t \right)$   |
| Koppelterm         | $\underline{\underline{D}}_{tu} = \theta_0 \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_V \underline{\underline{N}}_t^T \underline{\underline{H}}_{tu} \underline{\underline{B}}_u dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u \right)$   |
| Steifigkeitsmatrix |  |
| Verschiebungsterm  | $\underline{\underline{K}}_{uu} = \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u^T \int_V \underline{\underline{B}}_u^T \underline{\underline{H}}_{uu} \underline{\underline{B}}_u dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u \right)$  |
| Temperaturterm     | $\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{tt} &= \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_V \underline{\underline{B}}_t^T \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{B}}_t dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t \right) \\ &+ \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_{B^s} \underline{\underline{N}}_t^T hf \underline{\underline{N}}_t dB \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t \right) \end{aligned}$ |
| Koppelterm         | $\underline{\underline{K}}_{ut} = - \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u^T \int_V \underline{\underline{B}}_u^T \underline{\underline{H}}_{tu}^T \underline{\underline{N}}_t dV \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t \right)$  |
| Kraftvektor        |  |
| Verschiebungsterm  | $\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_u &= \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u^T \int_{V^s} \underline{\underline{N}}_u^T \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{s}}^v dV \right) \\ &+ \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_u^T \int_{B^s} \underline{\underline{N}}_u^T \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{s}}^b dB \right) \end{aligned}$   |
| Temperaturterm     | $\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_t &= \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_V \underline{\underline{N}}_t^T S dV \right) \\ &+ \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_{B^s} \underline{\underline{N}}_t^T q_b dB \right) \\ &+ T_{amb} \sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \left( \underline{\underline{\mathbb{S}}}_t^T \int_{B^s} \underline{\underline{N}}_t^T hf dB \right) \end{aligned}$           |

Während der Einfluss der thermischen Größen auf das Verschiebungsfeld ausschließlich durch die Temperaturen  $z_t$  determiniert ist, besteht formal eine Abhängigkeit des Temperaturfelds von der Verformungsgeschwindigkeit, was als Gough-Joule Effekt bezeichnet wird. Aufgrund der geringen Einflüsse auf das Gesamtverhalten, wird der ursächliche Term in der Regel vernachlässigt  $\underline{D}_{tu} \approx \underline{0}$ . Mit dieser Vereinfachung ist die thermische Zustandsgleichung von der mechanischen Bewegungsgleichung entkoppelt und kann unabhängig gelöst werden. Anschließend können die bekannten Temperaturen zur Lösung des mechanischen Problems Verwendung finden

$$\begin{aligned} \underline{D}_{tt} \dot{z}_t + \underline{K}_{tt} z_t &= \underline{F}_t \quad , \\ \underline{M}_{uu} \ddot{z}_u + \underline{D}_{uu} \dot{z}_u + \underline{K}_{uu} z_u &= \underline{F}_u - \underline{K}_{ut} z_t \quad . \end{aligned} \quad (2-101)$$

Abschließend erfolgt die Formulierung der geometrischen Randbedingungen, die eine Einschränkung der Bewegung der Struktur gegen das Inertialsystem beschreiben.

Damit ist die Berechnung thermomechanischer Deformationen unter beliebiger dynamischer Lastaufprägung für einzelne Körper mit nicht bewegtem Referenzsystem möglich.

Bedingt durch die Tatsache, dass die FE-Approximation im Rahmen der Diskretisierung fehlerbehaftet ist, existieren zur Abschätzung der Güte verschiedene Fehlerindikatoren [ZZ87], [KGZB83]. Daraus resultierend können bei unzureichender Genauigkeit Verbesserung z.B. durch Erhöhung des Polynomgrads der Ansatzfunktionen (p-Methode) oder der Diskretisierung (h-Methode) erfolgen.

Das beschriebene Vorgehen führt in der Mehrzahl der technischen Anwendungen auf eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden für die Lösung der Differentialgleichungen, wodurch der numerische Aufwand speziell im Rahmen von Zeitintegrationen sehr hoch ist.

### 2.3.2 Systemreduktion

Für strukturmechanische Simulationen technischer Systeme auf Basis von FE-Formulierungen sind Systemreduktionen zur Verminderung des numerischen Aufwands und damit der Rechenzeit ein probates Mittel. Unter Kenntnis der Struktur und numerischen Steifigkeit von Bewegungsdifferentialgleichungen für Mehrkörpersysteme wird deutlich, dass entsprechende Reduktionen auch bei der Implementierung von FE-Strukturen für die Abbildung (thermo)mechanischer Körper in MKS unumgänglich sind.

#### Modale Reduktion

Ein Standardverfahren zur Ordnungsreduktion beliebiger diskreter Systeme stellt die modale Reduktion dar. Sie ist ein integraler Bestandteil bei der Einbindung elastischer Körper in MKS-Anwendungen, da sie aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften eine Entkopplung des Bewegungsdifferentialgleichungssystems in  $\mathbf{n}$  linear unabhängige Differentialgleichungen ermöglicht.

Grundlage bildet die homogene Lösung des entkoppelten Randwertproblems Gl. (2-101), bestehend aus den  $\mathbf{n}_k$  homogenen Eigenkreisfrequenzen  $\check{\omega}_k^h$  und korrespondierenden Eigenvektoren  $\underline{\Phi}_k^h$

$$\left[ \underline{K}_{uu} - (\check{\omega}_{u_k}^h)^2 \underline{M}_{uu} \right] \underline{\Phi}_{u_k}^h = \underline{0} \quad \text{bzw.} \quad \left( \underline{K}_{tt} + \check{\omega}_{t_k}^h \underline{D}_{tt} \right) \underline{\Phi}_{t_k}^h = \underline{0} \quad . \quad (2-102)$$

Unter Verwendung der Modalmatrix

$$\underline{\underline{\Phi}}^h = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}_{u_1}^h | \dots | \underline{\Phi}_{u_{n_u}}^h] & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & [\underline{\Phi}_{t_1}^h | \dots | \underline{\Phi}_{t_{n_t}}^h] \end{bmatrix}, \quad (2-103)$$

welche die thermischen und mechanischen Eigenvektoren der Struktur beinhaltet, erfolgt der Übergang von physikalischen Koordinaten  $\underline{z}$  auf modale Koordinaten  $\underline{q}^h$

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{z}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{z}} + \underline{\underline{K}} \underline{z} = \underline{F} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\underline{\underline{M}}}^{hh} \ddot{\underline{q}}^h + \widehat{\underline{\underline{D}}}^{hh} \dot{\underline{q}}^h + \widehat{\underline{\underline{K}}}^{hh} \underline{q}^h = \widehat{\underline{F}}^h. \quad (2-104)$$

Die Transformation ist zunächst exakt und es kann gezeigt werden, dass sich jeder thermo-mechanische Zustand als Superposition verschiedener Eigenvektoren darstellen lässt.

Um den Einfluss eines Eigenvektors auf die mechanische Deformation zu bestimmen kann folgende Abschätzung für die modalen Koordinaten unter Wirkung einer Flächenlast  $\underline{s}^b(\underline{c}, t)$  auf  $B^s$  mit der Erregerfrequenz  $\Omega$  und der Amplitude  $\check{\underline{s}}^b(\underline{c})$  am Punkt  $\underline{c}$  vorgenommen werden. Mit der Annahme, dass sowohl die modalen Koordinaten als auch die Last harmonische Funktionen der Zeit sind

$$\begin{aligned} \underline{s}^b(\underline{c}, t) &= \check{\underline{s}}^b(\underline{c}) e^{i\Omega t}, \\ \underline{q}_{u_j}^h(t) &= \check{\underline{q}}_{u_j}^h e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (2-105)$$

ergeben sich die Amplituden der modalen Koordinaten zu

$$\check{\underline{q}}_{u_j}^h = \frac{\underline{\Phi}_{u_j}^h(\underline{c}) \int_{B^s} \mathbb{E} \underline{N}_u^T(\underline{c}) \mathbb{E} \underline{\Gamma} \check{\underline{s}}^b(\underline{c}) dB}{(\check{\omega}_j^{h^2} - \Omega^2) \widehat{M}_{jj}^{hh}}. \quad (2-106)$$

Ein identisches Vorgehen erlaubt die Bestimmung des Einflusses thermischer Eigenvektoren auf die Temperaturverteilung.

Die Reduktion für strukturmechanische Sachverhalte findet statt, indem die Eigenvektoren aus der Modalmatrix eliminiert werden, die aufgrund des Frequenzspektrums der äußeren Lasten zu modalen Amplituden führen, die unterhalb einer definierten Grenze liegen [Die99]. Dabei handelt es sich vorwiegend um hochfrequente Anteile der Deformation bzw. Temperaturverteilung, die zudem meist eine starke Dämpfung aufweisen.

Für die Anwendung im Bereich der mechanischen Deformation von Gleitlagern müssen darüber hinaus lokale Deformationen aufgrund der hydrodynamischen Lasten berücksichtigt werden. Diese Deformationen werden durch mechanische Eigenvektoren beschrieben, deren Eigenfrequenz deutlich über jeder im Belastungssignal enthaltenen Frequenz liegt. Dabei ist die Rückwirkung der Verformung auf den Druckaufbau im Gleitlager und damit auf die Lasten entscheidend, wodurch ein Verzicht auf die korrespondierenden Eigenformen dazu führt, dass die resultierenden Maximaldrücke überschätzt werden. An dieser Stelle ist auch die Berücksichtigung spezieller Eigenformen, die eine bekannte Deformation abbilden denkbar (siehe Kapitel (2.3.3)).

Das beschriebene Vorgehen ist für mechanische Problemstellungen Stand der Technik, für thermische Strukturen finden derartige Reduktionen defacto keine Anwendung, weshalb kommerzielle Programme diese Möglichkeit nicht bieten.

Der entscheidende Punkt der modalen Reduktion ist somit durch die Auswahl der zur

Beschreibung der Deformation und Temperaturverteilung verwendeten Eigenvektoren gegeben. Um diese einzuschränken bzw. eine Reduktion der Eigenvektoren auf die Beschreibung der Freiheitsgrade, welche von Bedeutung sind, zu erreichen, können der modalen Reduktion zusätzliche Master-Slave-Reduktionen vorangestellt werden. Die Vorstellung der einzelnen Verfahren erfolgt in der Nomenklatur des mechanischen Problems, die Aussagen sind allerdings ohne Einschränkungen auf das thermische Problem übertragbar.

### Master-Slave-Reduktion

Die Systemreduktion verwendet geeignete Transformationen  $\underline{Q}_{red}$ , um die Slave-Freiheitsgrade auf die Master-Freiheitsgrade zurückzuführen. Daraus resultierend erfolgt für alle Beschreibungen eine Unterteilung der Systemmatrizen in der Form

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{MM} & \underline{S}_{MS} \\ \underline{S}_{MS}^T & \underline{S}_{SS} \end{bmatrix} \quad \underline{S} = \underline{M}, \underline{D}, \underline{K} \quad . \quad (2-107)$$

Die reduzierten Systemmatrizen ergeben sich zu

$$\underline{S}_{red} = \underline{Q}_{red}^T \underline{S} \underline{Q}_{red} \quad . \quad (2-108)$$

Die Reduktionen sind für dynamische Untersuchungen nicht exakt, bieten allerdings Vorteile bzgl. der Selektion geeigneter Eigenvektoren zur Beschreibung der Deformation der Master-Freiheitsgrade. Bedingt durch die hohe Anzahl der Reduktionsverfahren, welche in diesem Bereich Anwendung finden können, wird im Folgenden eine kurze Übersicht der gebräuchlichsten Verfahren gegeben, um die Einflüsse auf die Simulationsergebnisse abschätzen zu können. Die Verfahren unterscheiden sich dabei formal lediglich in der Definition der Transformationsmatrix  $\underline{Q}_{red}$ .

**Guyan-Reduktion** Die gängigste und einfachste Form der Reduktion der Freiheitsgrade wird als Guyan- oder statische Reduktion bezeichnet. Unter Vernachlässigung aller dynamischen Einflüsse und der Bedingung, dass auf den Slave-Freiheitsgraden keine Kräfte wirken, kann die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (2-100) in der Form

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{MM} & \underline{K}_{MS} \\ \underline{K}_{MS}^T & \underline{K}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_M \\ \underline{z}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_M \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

geschrieben werden, was nach Umstellung der Zeile für die Slave-Freiheitsgrade auf folgende Transformationsmatrix führt

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_M \\ \underline{z}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ -\underline{K}_{SS}^{-1} \underline{K}_{MS}^T \end{bmatrix} \underline{z}_M = \underline{Q}_G \underline{z}_M \quad , \quad (2-110)$$

welche für statische Untersuchungen exakte Ergebnisse liefert. Für dynamische Simulationen ergeben sich aufgrund der fehlenden Berücksichtigung der Massenmatrix Abweichungen, die mit steigender Frequenz in einem zu steif abgeschätzten Verhalten der Gesamtstruktur resultieren [Guy65].

Es kann gezeigt werden, dass die Guyan-Reduktion brauchbare Ergebnisse liefert, solange sichergestellt ist, dass der kleinste Eigenwert des Slave-Systems größer ist als der größte interessierende Eigenwert des nach Guyan reduzierten Systems

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{K}}_{\text{SS}} - (\check{\omega}_{\text{S}}^k)^2 \underline{\underline{M}}_{\text{SS}} \right] \underline{\underline{\Phi}}_{\text{S}}^k = 0 \quad \text{und} \quad \left[ \underline{\underline{K}}_{\text{G}} - (\check{\omega}_{\text{G}}^k)^2 \underline{\underline{M}}_{\text{G}} \right] \underline{\underline{\Phi}}_{\text{G}}^k = 0 \quad , \\ \check{\omega}_{\text{S}}^* = \min(\check{\omega}_{\text{S}}^k) \quad > \quad \check{\omega}^* = \max(\check{\omega}_k) \quad . \end{aligned} \quad (2-111)$$

Die reduzierten Systemmatrizen  $\underline{\underline{K}}_{\text{G}}$  und  $\underline{\underline{M}}_{\text{G}}$  folgen mit  $\underline{\underline{Q}}$  aus Gl. (2-108).

**Craig-Bampton-Reduktion** Eine Verbesserung dieses Ansatzes lässt sich durch Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der reduzierten Freiheitsgrade erreichen. Eine Möglichkeit wurde von Craig-Bampton beschrieben und wird als gemischt statisch-modale Reduktion<sup>14</sup> bezeichnet [CB68]. Dabei wird der Ansatz von Guyan durch die Eigenvektoren der Slave-Struktur, welche in den Master-Freiheitsgraden fixiert ist,  $\underline{\underline{\Phi}}_{\text{S}}$  ("natural Modes") ergänzt. Der Ansatz bedingt eine Erweiterung der Masterfreiheitsgrade um die zu verwendenden modalen Freiheitsgrade der Slave-Struktur. Die resultierende Transformationsmatrix hat daraus resultierend die Gestalt

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \\ \underline{\underline{z}}_{\text{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{K}}_{\text{SS}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\text{MS}}^T & \underline{\underline{\Phi}}_{\text{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \\ \underline{\underline{q}}_{\text{S}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}_{\text{CMS}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \\ \underline{\underline{q}}_{\text{S}} \end{bmatrix} \quad . \quad (2-112)$$

Ferner besteht bei diesem Verfahren die vergleichsweise einfache Berücksichtigung gemessener Eigenvektoren, weshalb das Anwendungsspektrum sehr groß ist.

**IRS<sup>15</sup>-Reduktion** Eine andere Reduktion, welche den Einfluss der Massenmatrix berücksichtigt, stellt die Improved Reduction System Method dar. Neben der statischen Transformation nach Guyan, welche auch die Grundlage der IRS-Reduktion darstellt, werden zusätzlich pseudostatische Kräfte als Folge von Trägheitstermen berücksichtigt [O'C89a]

$$\underline{\underline{M}}_{\text{G}} \ddot{\underline{\underline{z}}}_{\text{M}} + \underline{\underline{K}}_{\text{G}} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\underline{\underline{z}}}_{\text{M}} = \underline{\underline{M}}_{\text{G}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\text{G}} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \quad . \quad (2-113)$$

Mit der Differentiation der Transformationsvorschrift Gl. (2-110) kann für die Beschleunigungen der Slave-Freiheitsgrade die Beziehung

$$\ddot{\underline{\underline{z}}}_{\text{S}} = -\underline{\underline{K}}_{\text{SS}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\text{MS}}^T \underline{\underline{M}}_{\text{G}}^{-1} \underline{\underline{K}}_{\text{G}} \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \quad (2-114)$$

abgeleitet werden. Die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (2-100) führt unter Vernachlässigung der Dämpfung sowie aller auf die Slave-Freiheitsgrade wirkenden Kräfte auf

$$\underline{\underline{z}}_{\text{S}} = -\underline{\underline{K}}_{\text{SS}}^{-1} \left( \underline{\underline{M}}_{\text{MS}}^T \ddot{\underline{\underline{z}}}_{\text{M}} + \underline{\underline{M}}_{\text{SS}} \ddot{\underline{\underline{z}}}_{\text{S}} + \underline{\underline{K}}_{\text{MS}}^T \underline{\underline{z}}_{\text{M}} \right) \quad , \quad (2-115)$$

<sup>14</sup>Component Mode Synthesis

<sup>15</sup>Improved Reduction System Method

woraus sich nach wenigen Umformungen folgende Transformationsmatrix ergibt

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_M \\ \underline{z}_S \end{bmatrix} = \underline{Q}_{IRS} \underline{z}_M = (\underline{Q}_G + \underline{P} \underline{M} \underline{Q}_G \underline{M}^{-1} \underline{K}_G) \underline{z}_M \quad \text{mit} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_{SS}^{-1} \end{bmatrix} . \quad (2-116)$$

Eine Verbesserung der Transformation lässt sich durch ein wiederholtes Ausführen der Reduktion erlangen, indem die nach Guyan reduzierten Steifigkeits- und Massenmatrizen durch die resultierenden Matrizen des vorausgegangenen IRS-Schritts ersetzt werden

$$\underline{Q}_{IRS,i+1} = \underline{Q}_G + \underline{P} \underline{M} \underline{Q}_{IRS,i} \underline{M}_{IRS,i}^{-1} \underline{K}_{IRS,i} . \quad (2-117)$$

Der Index  $i$  bezeichnet dabei den  $i$ -ten Iterationsschritt.

Der Algorithmus konvergiert monoton bezüglich der Eigenwerte und Eigenvektoren der im Nachfolgenden beschriebenen SEREP<sup>16</sup>-Reduktion und bildet auch die hohen Eigenfrequenzen gut ab [FGP95] .

**SEREP-Reduktion** Abschließend sei an dieser Stelle auf den System Equivalent Reduction and Expansion Process hingewiesen [O'C89b]. Der Ausgangspunkt der SEREP-Reduktion liegt in der Bestimmung der Eigenvektoren des gesamten unreduzierten Systems. Da eine Verwendung der Eigenvektoren eine modale Darstellung der Deformation ermöglicht, kann auch die Modalmatrix unterteilt werden

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_M \\ \underline{z}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_M \\ \underline{\Phi}_S \end{bmatrix} \underline{\Phi}_M^{-1'} \underline{z}_M = \underline{Q}_{SEREP} \underline{z}_M , \quad (2-118)$$

mit der allgemeinen Definition der Pseudoinversen

$$\underline{\Phi}_M^{-1'} = (\underline{\Phi}_M^T \underline{\Phi}_M)^{-1} \underline{\Phi}_M^T . \quad (2-119)$$

Die SEREP-Reduktion approximiert sowohl Eigenfrequenzen als auch Eigenvektoren des Systems exakt bis zur definierten Grenze (Anzahl der verwendeten Eigenvektoren). Problematisch sind die mit steigender Anzahl an Master-Freiheitsgraden geringeren Orthogonalitätseigenschaften der Pseudoinversen, welche in Extremfällen zur fehlerhaften Abbildung des dynamischen Verhaltens führen können.

Die Approximationsgüte und individuellen Vor- und Nachteile der Reduktionsverfahrens sowie die Wahl der Master- und Slave-Freiheitsgrade sind problemspezifisch und können nicht apriori verallgemeinert werden.

<sup>16</sup>System Equivalent Expansion Reduction Process

### 2.3.3 Frequency-Response-Modes

Bei bekannter Belastung der Gesamtstruktur können unter Verwendung von FRMs<sup>17</sup> zusätzliche Eigenvektoren erzeugt werden, welche speziell auf den Anwendungsfall zugeschnitten sind, wodurch die Anzahl der modalen Freiheitsgrade bei gleicher oder teilweise besserer Abbildung der Deformation bzw. Temperaturverteilung deutlich verringert werden kann. Mit Hinblick auf die Problemstellung der Abbildung thermomechanischer Deformationen in MKS sind FRMs speziell für die Beschreibung lokaler Deformationen hilfreich. Zudem ermöglichen sie auch aus dem thermischen Zustand des Körpers einen mechanischen Lastvektor abzuleiten und den daraus resultierenden Deformationszustand direkt in die Modalmatrix zu integrieren. Die Ursache der Notwendigkeit dieses Vorgehens liegt in der mangelnden Abbildungsgenauigkeit thermischer Deformationen durch mechanische Eigenformen (siehe Kapitel (6.3)). Für eine gute Approximation einer thermischen Deformation werden sehr viele, auch hochfrequente Eigenvektoren, benötigt, die für strukturmechanische Untersuchungen keinen signifikanten Beitrag liefern. Hinzu kommt, dass eine Zuordnung, welche mechanischen Eigenvektoren notwendig wären, ein nichttriviales Problem darstellt. Zunächst werden die Verschiebungsvektoren  $\underline{z}_k^p$  des konkreten Belastungsfalls mit der Anregungsfrequenz  $\Omega$  berechnet

$$(\underline{K}_{uu} - \Omega^2 \underline{M}_{uu}) \underline{z}_k^p = \underline{F}_{u_k}^{frm} \quad . \quad (2-120)$$

Eine direkte Einbindung der Verschiebungsvektoren als partikuläre Lösungskomponenten in die Modalmatrix ist aufgrund der fehlenden Orthogonalität zu den Eigenvektoren des Systems, welche aus der homogenen Lösung des Randwertproblems erzeugt wurden, nicht möglich. Hinzu kommt, dass bei Verwendung mehrerer FRMs diese auch untereinander keine Orthogonalität aufweisen.

**Residualtransformation** Die Orthogonalisierung der FRMs bzgl. der homogenen Eigenvektoren kann mittels Residual-Transformation erreicht werden. Dabei werden die Komponenten der Deformation, die bereits durch die Eigenvektoren  $\underline{\Phi}_{u_j}^h$  beschrieben werden, aus den FRMs eliminiert

$$\underline{z}_{u_k}^r = \underline{z}_{u_k}^p - \sum_{j=1}^{n_h} \alpha_{jk} \underline{\Phi}_{u_j}^h \quad . \quad (2-121)$$

Die Orthogonalitätsbedingung der Eigenvektoren

$$\underline{0} = \underline{\Phi}_{u_j}^{hT} \underline{M}_{uu} (\underline{z}_{u_k}^p - a_{jk} \underline{\Phi}_{u_j}^h) = \underline{\Phi}_{u_j}^{hT} \underline{M}_{uu} \underline{z}_{u_k}^p - a_{jk} \underline{I} \quad (2-122)$$

führt auf die Residual-Koeffizienten

$$a_{jk} = \underline{\Phi}_j^{hT} \underline{M} \underline{z}_k^p \quad . \quad (2-123)$$

Die abgeleiteten Residualvektoren  $\underline{z}_{u_k}^r$  enthalten somit keine Deformationskomponenten der  $\mathbf{n}_h$  mechanischen Eigenvektoren. Unter Berücksichtigung der  $\mathbf{n}_p$  Residualvektoren ergibt sich die Modalmatrix für die Transformation von physikalischen zu modalen Koordinaten zu

$$\underline{\Phi}_{u}^r = \left[ \underline{\Phi}_{u_1}^h \mid \dots \mid \underline{\Phi}_{u_{n_h}}^h \mid \underline{z}_{u_1}^r \mid \dots \mid \underline{z}_{u_{n_p}}^r \right] \quad . \quad (2-124)$$

<sup>17</sup>Frequency-Response-Mode

Während bei Verwendung der partikulären Verschiebungen innerhalb der Modalmatrix die Transformation in den Modalraum zu Koppeleinträgen in den Systemmatrizen führen würde, führt die Residualtransformation zu einer Entkopplung der modalen Lösungskomponenten

$$\widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^p = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{hh} & \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{hp} \\ \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{hp^T} & \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{pp} \end{bmatrix} \Rightarrow \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^r = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{hh} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}}^T & \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{rr} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}} \in \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{D}}, \underline{\underline{K}} \quad . \quad (2-125)$$

Die Matrizen  $\widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{rr}$  besitzen allerdings noch keine Diagonalgestalt, da die Residualvektoren noch keine Orthogonalität zueinander aufweisen.

**Orthogonalisierung der Residualvektoren** Die Entkopplung der Residualvektoren kann nach einem durch Friberg [Fri91] definierten Schema erfolgen. Die Lösung des Eigenwertproblems

$$\left[ \widehat{\underline{\underline{K}}}_{uu}^{rr} - (\tilde{\omega}_{u_k}^o)^2 \widehat{\underline{\underline{M}}}_{uu}^{rr} \right] \underline{\underline{\Phi}}_{u_k}^o = \underline{\underline{0}} \quad (2-126)$$

ermöglicht die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen  $\tilde{\omega}_{u_k}^o$  und der Modalmatrix

$$\underline{\underline{Q}}_u^o = \left[ \underline{\underline{\Phi}}_{u_1}^o \mid \dots \mid \underline{\underline{\Phi}}_{u_{n_p}}^o \right] \quad . \quad (2-127)$$

Unter Verwendung der Transformationsmatrix  $\underline{\underline{Q}}_u^o$  ist es somit möglich die Systemmatrizen  $\widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{rr}$  zu entkoppeln

$$\widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{oo} = \underline{\underline{Q}}_u^{o^T} \widehat{\underline{\underline{S}}}_{uu}^{rr} \underline{\underline{Q}}_u^o \quad . \quad (2-128)$$

Werden anschließend die Residualvektoren in der Form

$$\underline{\underline{z}}_u^o = \underline{\underline{z}}_u^r \underline{\underline{Q}}_u^o \quad (2-129)$$

modifiziert, führen sie bzgl. der Systemmatrizen des unreduzierten Systems zu analogen Aussagen. Die vorher gewonnene Orthogonalität zu den homogenen Eigenvektoren der Struktur bleibt dabei unverändert. Die Implementierung der orthogonalen Residualvektoren führt auf folgende Gestalt der Modalmatrix

$$\underline{\underline{\Phi}}_u^o = \left[ \underline{\underline{\Phi}}_{u_1}^h \mid \dots \mid \underline{\underline{\Phi}}_{u_{n_h}}^h \mid \underline{\underline{z}}_{u_1}^o \mid \dots \mid \underline{\underline{z}}_{u_{n_p}}^o \right] \quad . \quad (2-130)$$

Als Resultat weisen alle Vektoren innerhalb der Modalmatrix Orthogonalität zueinander auf und die modale Reduktion des Bewegungsdifferentialgleichungssystems führt auf  $n_h + n_p$  linear unabhängige Differentialgleichungen. Das beschriebene Vorgehen erlaubt somit eine exakte Beschreibung der partikulären Deformationszustände unabhängig von der Anzahl der homogenen Eigenvektoren. Zusätzlich können durch die homogenen Eigenvektoren allgemeine Deformationen abgebildet werden. Analoge Betrachtungen sind identisch auch für die thermischen Differentialgleichungen ableitbar.

## 2.4 Mehrkörperdynamik

Die Mehrkörperdynamik beinhaltet die Grundlagen zur Beschreibung des zeitabhängigen dynamischen Verhaltens von Körpern unter Wirkung von Lasten. Dabei können sowohl starre als auch elastische Körper in ihrer Bewegung und Interaktion zu anderen Körpern beschrieben werden. Die Interaktion kann entweder auf der Definition beliebige Kraftgesetze oder der Einbindung von Gelenken basieren, was zur Berücksichtigung von Zwangsbedingungen und damit zur Notwendigkeit der Lösung von DAEs<sup>18</sup> führt. Die daraus resultierenden Fragestellungen sind weitestgehend bekannt und eng mit der Topologie des MKS verbunden.

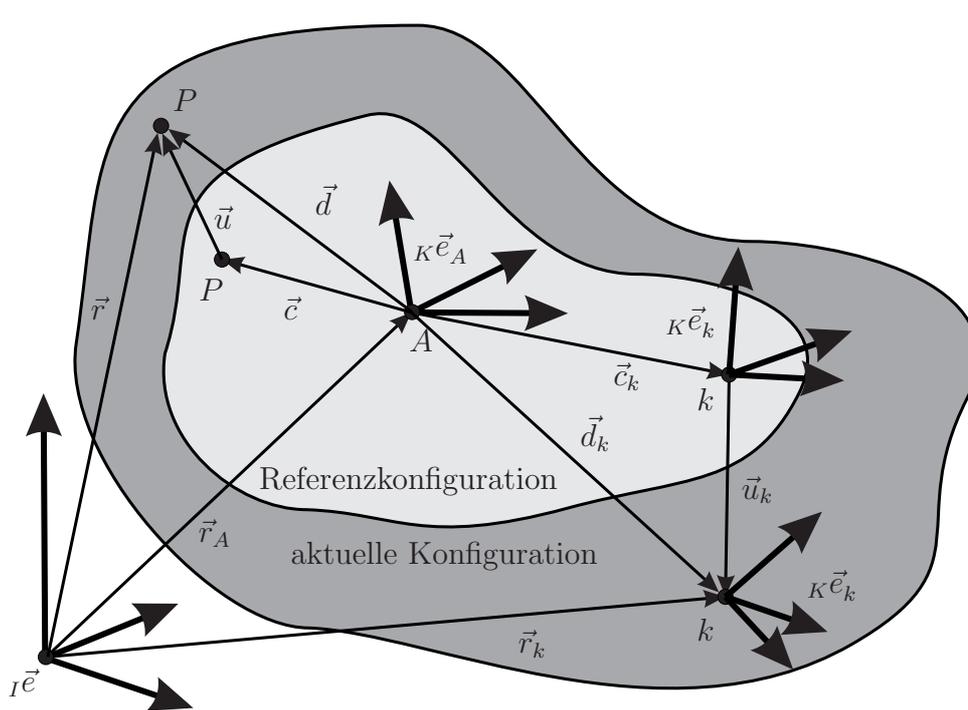


Abbildung 2-10: Vektoren zur Bewegungsbeschreibung eines Körpers im Mehrkörpersystem

Im Folgenden soll ausgehend von einem elastischen Körper (siehe Abb. (2-10)) der Aufbau der resultierenden Differentialgleichungen in Anlehnung an [SW99], [Die99] und [Hec05] zur analytischen Beschreibung der Bewegung unter Wirkung allgemeiner Lasten beschrieben werden. Ausgangspunkt sei die auf ein Referenzsystem bezogene Formulierung eines elastischen Körpers und deren Superposition mit den Starrkörperbewegungen des Referenzsystems.

<sup>18</sup>Differential Algebraic Equation

### 2.4.1 Grundgleichungen der Bewegung

Zunächst erfolgt die Untersuchung des Ortsvektors  $\vec{r}$  eines beliebigen Punktes des elastischen Körpers, welcher aus dem Ortsvektor vom Inertialsystem zum Referenzsystem  $\vec{r}_A$  und dem Vektor vom Referenzsystem zum betrachteten Punkt  $\vec{c}$  sowie dem Deformationsvektor  $\vec{u}$  besteht

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{c} + \vec{u} = \vec{r}_A + \vec{d} \quad . \quad (2-131)$$

Zur weiteren Beschreibung ist die Entwicklung von  $\vec{r}$  in den Komponenten des körperfesten Referenzsystems  $K$ , welche im Folgenden nicht explizit indiziert werden, aufgrund der zeitunabhängigen Beschreibung der inelastischen Trägheitsterme des Körpers, und die anschließende Transformation in das Inertialsystem  $I$ , beschrieben durch die Transformationsmatrix  ${}^I\underline{Q}$ , sinnvoll

$${}^I\underline{r} = {}^I\underline{Q} (\underline{r}_A + \underline{c} + \underline{u}) \quad . \quad (2-132)$$

Durch zeitliche Differentiation des inertialsystemfest beschriebenen Positionsvektors wird der Vektor der Absolutgeschwindigkeit  ${}^I\underline{\dot{r}}$  erhalten, wobei der Operator  $()'$  die relative zeitliche Ableitungen im körperfesten System indiziert

$$\begin{aligned} {}^I\underline{\dot{r}} &= {}^I\underline{Q} [\underline{\dot{r}}'_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_A + \underline{u}' + \underline{\omega} \times (\underline{c} + \underline{u})] \\ &= {}^I\underline{Q} [\underline{\dot{r}}_A + \underline{u}' + \underline{\omega} \times \underline{d}] \\ &= {}^I\underline{Q} \left[ \underline{\dot{r}}_A + \underline{u}' + \underline{\tilde{d}}^T \underline{\omega} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2-133)$$

Die Beschleunigungen ergeben sich analog zu

$$\begin{aligned} {}^I\underline{\ddot{r}} &= {}^I\underline{Q} [\underline{\ddot{r}}''_A + \underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'_A + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}_A + \underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'_A + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'_A) \\ &\quad + \underline{u}'' + \underline{\omega} \times \underline{u}' + \underline{\dot{\omega}} \times (\underline{c} + \underline{u}) + \underline{\omega} \times \underline{u}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (\underline{c} + \underline{u}))] \\ &= {}^I\underline{Q} [\underline{\ddot{r}}_A + \underline{u}'' + 2\underline{\omega} \times \underline{u}' + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{d} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{d})] \\ &= {}^I\underline{Q} \left[ \underline{\ddot{r}}_A + \underline{\tilde{d}}^T \underline{\dot{\omega}} + \underline{u}'' + 2\underline{\tilde{\omega}} \underline{u}' + \underline{\tilde{\omega}} \underline{\tilde{\omega}} \underline{d} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2-134)$$

Zur Beschreibung des Kreuzproduktes kann äquivalent die Tilde-Matrix verwendet werden. Die entsprechenden mathematischen Umformungen können Gl. (A-6) bis Gl. (A-8) entnommen werden. Durch Gl. (2-132) - Gl. (2-134) lassen sich die Lage und die Bewegung eines beliebigen Volumenelements  $dV$  mit der Geschwindigkeit  $\underline{\dot{r}}_A$  und der Beschleunigung  $\underline{\ddot{r}}_A$  des Referenzsystems eindeutig beschreiben. Eine Zuordnung der einzelnen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsterme zur Bewegungsart und den zugehörigen Trägheitseffekten kann Tab. (2-2) entnommen werden.

Wie bereits in Kapitel (2.3.2) beschrieben, ist eine Reduktion der Freiheitsgradanzahl bei Beschreibung der Elastizität durch finite Elemente notwendig. Eine eindeutige Entkopplung der Wirkung der elastischen und starren Komponenten ist vorteilhaft durch Überführung der Deformationen in den Modalraum realisierbar

$$\underline{u} = \underline{\Phi}_u \underline{q}_u \quad . \quad (2-135)$$

**Tabelle 2-2:** Zuordnung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten [Die99]

| Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten eines elastischen Körpers |   |                       |
|--|---|-----------------------|
| Komponenten der Geschwindigkeit bzgl.                                      | $\underline{r}'_A + \underline{u}'$   | Translation           |
|  | $\underline{\tilde{\omega}}(\underline{r}_A + \underline{c} + \underline{u})$                           | Rotation              |
| Komponenten der Beschleunigung bzgl.                                       | $\underline{r}''_A + \underline{u}''$   | Translation           |
|  | $\underline{\tilde{\omega}}(\underline{r}_A + \underline{c} + \underline{u})$                           | Rotation              |
|  | $2\underline{\tilde{\omega}}(\underline{r}'_A + \underline{u}')$  | gyroskopische Effekte |
|  | $\underline{\tilde{\omega}}\underline{\tilde{\omega}}(\underline{r}_A + \underline{c} + \underline{u})$ | zentrifugale Effekte  |
| Starrkörperbewegung:   | $\underline{r}_A + \underline{c}$   |                       |
| elastische Deformation:  | $\underline{u}$   |                       |

## 2.4.2 Hamiltonsches Prinzip - Bewegungsdifferentialgleichung

Zur Umsetzung des Hamiltonschen Prinzips, welches auf die Bewegungsdifferentialgleichungen führt (analog Kapitel (2.3.1)), werden die virtuellen Verschiebungen<sup>19</sup> benötigt

$$\delta \underline{r} = \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A + \underline{\tilde{d}}^T \delta \underline{\omega} + \underline{\Phi}_u \delta \underline{q}_u \quad . \quad (2-136)$$

Sie lassen sich durch Variation des Ortsvektors  $\underline{r}$  ableiten. Das Vorgehen führt auch für die Beschreibung der Orientierung  $\underline{\vec{e}}$  unter Annahme großer Starrkörperrotationen und kleiner elastischer Verdrehungen  $\underline{\varphi}$  bzgl. der Referenzkonfiguration  $\underline{\vec{e}}_A$  mit dem beschriebenen modalen Ansatz

$$\underline{\varphi} = \underline{\Psi}_u \underline{q}_u \quad (2-137)$$

auf

$$\delta \underline{\vec{e}} = \delta \underline{\omega} + \delta \underline{\varphi} = \delta \underline{\omega} + \underline{\Psi}_u \delta \underline{q}_u \quad . \quad (2-138)$$

<sup>19</sup>Virtuelle Verschiebungen sind Auslenkungen des Systems aus einer Gleichgewichtslage in eine infinitesimal benachbarte Lage. Dabei müssen die virtuellen Verschiebungen mit den Bindungsgleichungen des Systems kompatibel sein. Ihre Wirkung erfolgt zeitlos, sodass gilt  $\delta t = 0$ .

Das Integral über die Differenz der Variationen der inneren und der kinetischen Energie muss gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Lasten sein, welche sich aus Volumen-, Oberflächen- und Einzellasten zusammensetzen

$$\begin{aligned}
 0 &\equiv \int_{t_1}^{t_2} (\delta E_{kin} - \delta E_{in} + \delta W) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V \delta \underline{\dot{r}}^T \underline{\dot{r}} \rho dV - \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \right. \\
 &\quad \left. + \int_{V^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^v dV + \int_{B^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^b dB + \sum_i (\delta \underline{r}_i^T \underline{F}_i + \delta \underline{e}_i^T \underline{L}_i) \right) dt \quad .
 \end{aligned} \tag{2-139}$$

Unter Ausnutzung des Fundamentallemmas und der Tatsache, dass die Variation zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  verschwindet, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &\equiv \underbrace{\int_V \delta \underline{r}^T \underline{\ddot{r}} \rho dV}_{\text{Trägheitseffekte}} + \underbrace{\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV}_{\text{innere Kräfte}} \\
 &\quad - \underbrace{\left[ \int_{V^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^v dV + \int_{B^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^b dB + \sum_i (\delta \underline{r}_i^T \underline{F}_i + \delta \underline{e}_i^T \underline{L}_i) \right]}_{\text{äußere Lasten}} \quad .
 \end{aligned} \tag{2-140}$$

Die Umordnung des Terms der Trägheitseffekte in Abhängigkeit der translatorischen, rotatorischen und elastischen Beschleunigungen führt mit der Identität

$$\underline{\underline{I}}^Q{}^T \underline{\underline{I}}^Q = \underline{\underline{I}} \tag{2-141}$$

und den virtuellen Verschiebungen nach Gl. (2-136) auf

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta \underline{r}^T \underline{\ddot{r}} \rho dV &= \begin{bmatrix} \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A \\ \delta \underline{\omega} \\ \delta \underline{q}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_V \rho \underline{\underline{I}} dV & & \\ & \int_V \rho \underline{\underline{d}} dV & \int_V \rho \underline{\underline{d}} \underline{\underline{d}}^T dV \\ & & \int_V \rho \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{d}}^T dV & \int_V \rho \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\Phi}} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{r}}}_A \\ \underline{\underline{\dot{\omega}}} \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}_u \end{bmatrix} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\underline{\underline{M}}_{MBS}(\underline{\underline{q}}_u)} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\underline{\underline{\ddot{b}}}} \\
 &+ \begin{bmatrix} \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A \\ \delta \underline{\omega} \\ \delta \underline{q}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{\omega}}} (2 \underline{\underline{\Phi}}_u \underline{\underline{\dot{q}}}_u + \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{d}}) dV \\ \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{d}}} \underline{\underline{\tilde{\omega}}} (2 \underline{\underline{\Phi}}_u \underline{\underline{\dot{q}}}_u + \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{d}}) dV \\ \int_V \rho \underline{\underline{\Phi}}_u^T \underline{\underline{\tilde{\omega}}} (2 \underline{\underline{\Phi}}_u \underline{\underline{\dot{q}}}_u + \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{d}}) dV \end{bmatrix} \quad .
 \end{aligned} \tag{2-142}$$

$\underline{\underline{h}}_{\omega}(\underline{\omega}, \underline{q}_u, \underline{\dot{q}}_u)$

Durch Berücksichtigung der Elastizität ergeben sich Abhängigkeiten der generalisierten Massenmatrix  $\underline{M}_{MBS}(\underline{q}_u)$  und des Vektors der generalisierten gyroskopischen und Zentrifugalkräfte  $\underline{h}_\omega(\underline{\omega}, \underline{q}_u, \underline{\dot{q}}_u)$  von den modalen Koordinaten  $\underline{q}_u$ . Eine analoge Umformung für den Term der inneren Kräfte (siehe Kapitel (2.3.1)) führt mit einer Beschränkung auf das mechanische Feldproblem, der Einschränkung auf lineare Elastizität sowie ohne Berücksichtigung von Vorspannungen auf

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \begin{bmatrix} \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A \\ \delta \underline{\omega} \\ \delta \underline{q}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \int_V (\underline{\underline{\xi}}_u \underline{\Phi}_u)^T \underline{\underline{\mathbb{H}}}_{uu} \underline{\underline{\xi}}_u \underline{\Phi}_u \underline{q}_u dV \end{bmatrix} . \quad (2-143)$$

Wird zusätzlich Dämpfung unter Ausnutzung der Annahmen der Bequemlichkeitshypothese implementiert, ergibt sich folgende Form

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \begin{bmatrix} \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A \\ \delta \underline{\omega} \\ \delta \underline{q}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underbrace{\underline{\hat{K}}_{uu} \underline{q}_u + \underline{\hat{D}}_{uu} \underline{\dot{q}}_u}_{\underline{h}_{el}(\underline{q}_u, \underline{\dot{q}}_u)} \end{bmatrix} . \quad (2-144)$$

Die Implementierung von Vorspannungen und Berücksichtigung geometrischer Steifigkeiten ist unter Verwendung geeigneter Ansätze in vergleichbarer Weise durchführbar. Eine detaillierte Beschreibung kann unter anderem [Hec05] oder [SW99] entnommen werden. Die Berücksichtigung der äußeren Lasten führt unter Beschränkung auf konstante Volumenlasten über das gesamte Volumen (z.B. Gravitation) formal auf

$$\int_{V^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^v dV + \int_{B^s} \delta \underline{r}^T \underline{s}^b dB + \sum_i (\delta \underline{r}_i^T \underline{F}_i + \delta \underline{e}_i^T \underline{L}_i) = \quad (2-145)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{r}_A + \delta \underline{\tilde{\omega}} \underline{r}_A \\ \delta \underline{\omega} \\ \delta \underline{q}_u \end{bmatrix}^T \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \int_V \underline{I} dV \\ \int_V \underline{\tilde{d}} dV \\ \int_V \underline{\Phi}_u^T dV \end{bmatrix}}_{\underline{h}_a(\underline{q}_u)} \underline{s}^v + \begin{bmatrix} \int_{B^s} \underline{s}^b dB \\ \int_{B^s} \underline{\tilde{d}} \underline{s}^b dB \\ \int_{B^s} \underline{\Phi}_u^T \underline{s}^b dB \end{bmatrix} + \sum_i \left( \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{\tilde{d}}_i \\ \underline{\Phi}_{u_i}^T \end{bmatrix} \underline{F}_i + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \\ \underline{\Psi}_{u_i}^T \end{bmatrix} \underline{L}_i \right) \right\} .$$

Damit sind alle Terme als Funktionen der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}$ , sowie der modalen Koordinaten  $\underline{q}_u$  und ihrer Ableitungen  $\underline{\dot{q}}_u$  definiert

$$\underline{M}_{MBS}(\underline{q}_u) \underline{\ddot{b}} + \underline{h}_\omega(\underline{\omega}, \underline{q}_u, \underline{\dot{q}}_u) + \underline{h}_{el}(\underline{q}_u, \underline{\dot{q}}_u) = \underline{h}_a(\underline{q}_u) . \quad (2-146)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung enthält nun Volumenintegrale mit nichtlinearer Abhängigkeit von Ort und Zeit.

### 2.4.3 Volumenintegrale

Um eine rechenzeiteffiziente Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung zu gewährleisten, müssen die Volumenintegrale in matrizielle Formulierungen umgewandelt werden, welche es ermöglichen sollen zeitabhängige und zeitunabhängige Komponenten zu separieren. Unter dieser Prämisse resultieren folgende Formulierungen für die Massenmatrix

$$\underline{\underline{M}}_{MBS} = \begin{bmatrix} m \underline{\underline{I}} & & sym. \\ m \underline{\underline{\tilde{d}}}_{CG}(\underline{\underline{q}}_u) & \underline{\underline{J}}_A(\underline{\underline{q}}_u) & \\ \underline{\underline{C}}_{trans} & \underline{\underline{C}}_{rot}(\underline{\underline{q}}_u) & \widehat{\underline{\underline{M}}}_{uu} \end{bmatrix}, \quad (2-147)$$

den Vektor der gyroskopischen- und Zentrifugalkräfte

$$\underline{\underline{h}}_\omega = \begin{bmatrix} 2 \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{C}}_{trans}^T \dot{\underline{\underline{q}}}_u + m \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{d}}_{CG}(\underline{\underline{q}}_u) \\ \sum_{i=1}^{n_{q_u}} \underline{\underline{G}}_{r_i}(\underline{\underline{q}}_u) \dot{q}_{u_i} \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{J}}_A(\underline{\underline{q}}_u) \underline{\underline{\omega}} \\ \sum_{i=1}^{n_{q_u}} \underline{\underline{G}}_{el_i} \dot{q}_{u_i} \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{Q}}_{el}(\underline{\underline{q}}_u) \underline{\underline{\Omega}} \end{bmatrix} \quad (2-148)$$

mit

$$\underline{\underline{\Omega}} = [\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \omega_3^2 \quad \omega_1\omega_2 \quad \omega_2\omega_3 \quad \omega_3\omega_1]^T, \quad ,$$

sowie für den Vektor der inneren Kräfte

$$\underline{\underline{h}}_{el} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \widehat{\underline{\underline{K}}}_{uu} \underline{\underline{q}}_u + \widehat{\underline{\underline{D}}}_{uu} \dot{\underline{\underline{q}}}_u \end{bmatrix} \quad (2-149)$$

und den Vektor der äußeren Lasten

$$\underline{\underline{h}}_a = \begin{bmatrix} m \underline{\underline{I}} \\ m \underline{\underline{\tilde{d}}}_{CG}(\underline{\underline{q}}_u) \\ \underline{\underline{C}}_{trans} \end{bmatrix} \underline{\underline{s}}^v + \int_{B^s} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\tilde{d}}} \\ \underline{\underline{\Phi}}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{s}}^b dB + \sum_i \left( \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\tilde{d}}}_i \\ \underline{\underline{\Phi}}_{u_i}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}_i + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\Psi}}_{u_i}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{L}}_i \right) . \quad (2-150)$$

Alle Submatrizen in Gl. (2-147) bis Gl. (2-150) lassen sich, ausgehend von der Massenmatrix des elastischen Körpers, ableiten, dabei ist die Abhängigkeit einiger Integrale von den elastischen Deformationen  $\underline{\underline{u}}$  zu beachten.

Am Beispiel des Trägheitstensors soll das Vorgehen erläutert werden

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_A &= \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{d}}} \underline{\underline{\tilde{d}}}^T dV = \int_V \rho (\underline{\underline{\tilde{c}}} + \underline{\underline{\tilde{u}}}) (\underline{\underline{\tilde{c}}} + \underline{\underline{\tilde{u}}})^T dV \\ &= \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{c}}} \underline{\underline{\tilde{c}}}^T dV + \underbrace{\int_V \rho \underline{\underline{\tilde{c}}} \underline{\underline{\tilde{u}}}^T dV + \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{u}}} \underline{\underline{\tilde{c}}}^T dV + \int_V \rho \underline{\underline{\tilde{u}}} \underline{\underline{\tilde{u}}}^T dV}_{\text{Rückwirkung der elastischen Deformation}} . \end{aligned} \quad (2-151)$$

Während der erste Term die Trägheitsmomente des starren Körpers repräsentiert, beschreiben die übrigen drei Terme die Änderung der Trägheitsmomente aufgrund der elastischen Deformation. Unter Verwendung der modalen Koordinaten  $\mathbf{q}_u$  können die Einflüsse der elastischen Deformation auf den Trägheitstensor folgendermaßen formuliert werden

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{J}}_A &= \int_V \rho \tilde{\underline{\underline{d}}} \tilde{\underline{\underline{d}}}^T dV = \underbrace{\int_V \rho \tilde{\underline{\underline{c}}} \tilde{\underline{\underline{c}}}^T dV}_{\underline{\underline{J}}^0} - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underbrace{\int_V \rho \tilde{\underline{\underline{c}}} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_{u,i} dV}_{\underline{\underline{C}}_{4_i}} \mathbf{q}_{u_i} - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underbrace{\int_V \rho \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_{u,i}^T \tilde{\underline{\underline{c}}}^T dV}_{\underline{\underline{C}}_{4_i}^T} \mathbf{q}_{u_i} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \underbrace{\int_V \rho \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_{u,i} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_{u,j} dV}_{\underline{\underline{C}}_{6_{ij}}} \mathbf{q}_{u_i} \mathbf{q}_{u_j} \\
&= \underline{\underline{J}}^0 - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{4_i} \mathbf{q}_{u_i} - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{4_i}^T \mathbf{q}_{u_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{6_{ij}} \mathbf{q}_{u_i} \mathbf{q}_{u_j}}_{\text{vernachlässigt}} . \quad (2-152)
\end{aligned}$$

Aus Rechenzeitgründen werden für Berechnungen in Mehrkörpersystemen alle Terme der zweiten Ordnung vernachlässigt, was zur Einschränkung auf kleine Deformationen (Theorie erster Ordnung) führt. Die Matrizen  $\underline{\underline{J}}^0$ ,  $\underline{\underline{C}}_{4_i}$  und  $\underline{\underline{C}}_{6_{ij}}$  sind zeitinvariant und damit vor Beginn der Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung in einem Preprocessing-Schritt bestimmbar. Die Ableitung dieser Matrizen aus den Systemmatrizen der FE-Struktur sowie die Aufteilung der übrigen Integrale in Starrkörper- und elastische Anteile und ihre Approximation [Wal06], [Wal94], [SW99] kann Kapitel (A.3) entnommen werden. Das Resultat ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODE<sup>20</sup>), wobei die kleinen elastischen Deformationen großen Starrkörperbewegungen überlagern werden.

#### 2.4.4 Zeitintegration

Zur Lösung des aus den vorangegangenen Betrachtungen resultierenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung Gl. (2-146) im Zeitbereich werden standardisierte ODE-Solver verwendet. Dazu ist die Überführung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung unter Verwendung der Zustandsraumdarstellung notwendig. Mit der Einführung des Geschwindigkeitsvektors  $\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{q}}}$  ergibt sich formal

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\underline{M}}_{MBS}(\underline{\mathbf{q}}_u) \underline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{q}}} \\ -\underline{h}_\omega(\omega, \underline{\mathbf{q}}_u, \dot{\underline{\mathbf{q}}}_u) - \underline{h}_{el}(\underline{\mathbf{q}}_u, \dot{\underline{\mathbf{q}}}_u) + \underline{h}_a(\underline{\mathbf{q}}_u) \end{bmatrix} . \quad (2-153)$$

Für die numerische Integration von Gl. (2-153) stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Dabei unterscheidet man zunächst in explizite und implizite Zeitintegrationsverfahren. Die Eigenschaften beider Verfahrensgruppen differieren zum einen durch den numerischen Aufwand für die Berechnung eines Einzelschritts, welcher bei expliziten Verfahren

<sup>20</sup>Ordinary Differential Equation

deutlich geringer ist. Zum anderen weicht die bei gleicher Genauigkeit der Lösung verwendbare Schrittweite ab, welche bei impliziten Verfahren größer ist. Die Auswahl des spezifischen numerischen Algorithmus zur Lösung wird somit entscheidend von der Charakteristik der Differentialgleichung beeinflusst. Aufgrund der numerischen Steifigkeit<sup>21</sup> der Bewegungsdifferentialgleichung von MKS, welche sich durch Berücksichtigung elastischer und thermischer Komponenten sowie der Modellierung von Radialgleitlagern noch erhöht, können bei Forderung akzeptabler Rechenzeiten nur angepasste implizite Solver zum Einsatz kommen. Weit verbreitet ist in diesem Zusammenhang der auf Basis von NDF<sup>22</sup>-Algorithmen variabler Ordnung bzw. der BDF<sup>23</sup>-Methode arbeitende Integrator ODE15s, welcher Mehrschrittverfahren verwendet. Eine Alternative stellt der Integrator ODE23s dar, welcher im Gegensatz zum ODE15s auf einem Einzelschrittverfahren unter Verwendung einer modifizierten Rosenbrock-Formel basiert [SR97]. Da der Einfluss numerischer Dämpfung bei beiden Verfahren eine Veränderung der Ergebnisse ermöglicht und sich in Referenzuntersuchungen zeigte, dass die benötigten Rechenzeiten beider Algorithmen sehr hoch sind, wurde für alle in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse der Integrator ODE23t verwendet, welcher eine Umsetzung der Trapezregel realisiert.

---

<sup>21</sup>Eine einheitliche Definition des Begriffs "numerische Steifigkeit" existiert nicht. Im Kontext der Bewegungsdifferentialgleichung werden damit unterschiedliche Zeitskalen und damit Frequenzbereiche einzelner Lösungskomponenten beschrieben. Zusätzlich kann gezeigt werden, dass bei steifen Systemen die Eigenwerte der Jacobi-Matrix konsequent negative Realteile aufweisen, die zudem von unterschiedlicher Größenordnung sind.

<sup>22</sup>Numerical Differentiation Formula

<sup>23</sup>Backward Differentiation Formula - auch Gearsche Methode

### 3 Einbindung thermomechanischer Körper in Mehrkörpersimulationen

Für die Berechnung des thermischen und mechanischen Feldproblems für beliebige Körper mit unbewegtem Referenzsystem stellt die Finite-Element-Methode ein weitverbreitetes Instrument dar. Zur detaillierten Beschreibung der Geometrie und des daraus resultierenden thermischen und elastischen Verhaltens ist eine Unterteilung in eine endliche Anzahl von geeigneten Elementen notwendig, was mit der Beschränkung auf lineare Materialmodelle zu gekoppelten linearen Differentialgleichungssystemen mit einer in der Regel großen Anzahl von Freiheitsgraden führt. Die Kopplung kann unter Vernachlässigung des Gough-Joule-Effekts<sup>24</sup> einseitig aufgelöst werden, wodurch vom mechanischen Gesichtspunkt aus das Temperaturfeld als zusätzliche Lastkomponente interpretiert werden kann (siehe Kapitel (2.3.1)).

Für Anwendungen, in denen die Bewegung des Referenzsystems von Interesse ist, wie Untersuchungen zur Rotordynamik, oder in denen die Beschreibung der Interaktion zwischen verschiedenen Körpern dominiert, bieten sich Beschreibungen auf Basis der Mehrkörperdynamik an, wie sie in Kapitel (2.4.2) hergeleitet wurden. Derartige Berechnungen sind zwar auch mit FE-Simulationen umsetzbar, bedingt durch die großen Referenzbewegungen der Körper und die überlagerten kleinen Deformationen ergeben sich allerdings für FE-Formulierungen große nichtlineare Differentialgleichungssysteme, deren Lösung extrem rechenzeitintensiv ist. Die Algorithmen der Mehrkörpersimulation hingegen sind explizit für die Beschreibung großer Referenzbewegungen konzipiert. Die Berücksichtigung elastischer Körper wiederum kann vorteilhaft aus FE-Formulierungen übernommen werden. Problematisch erweist sich dabei die hohe Anzahl an Freiheitsgraden der FE-Modelle. An dieser Stelle erfolgt eine Reduktion in den Unterraum der Eigenvektoren (modale Reduktion siehe Kapitel (2.3.2)), zur Verringerung der Dimension des Problems. Das beschriebene Vorgehen stellt den aktuellen Stand der Technik für elastische Körper und ihre Rückwirkung auf die Mehrkörpersimulation dar.

Die Einbindung thermischer Komponenten ist hingegen nicht allgemein vorgesehen, kann allerdings ebenfalls aus der FE-Formulierung abgeleitet werden. Zu diesem Zweck ist es erforderlich, dass während der Zeitintegration die thermische Differentialgleichung gelöst wird. Dies bewirkt analog zu den elastischen Freiheitsgraden eine Erhöhung der Anzahl der Lösungsvariablen. Aufgrund der Forderung nach moderaten Rechenzeiten ist auch hier eine Reduktion notwendig, die durch eine Transformation in den thermischen Modalraum umsetzbar ist. Als Resultat der Möglichkeit der einseitigen Entkopplung von thermischem und mechanischem Feldproblem und der Umsetzung des Temperaturfelds als äquivalenten mechanischen Lastvektor ist eine direkte Implementierung der thermischen Systemmatrizen in die Bewegungsdifferentialgleichung nicht notwendig.

---

<sup>24</sup>Temperaturänderung aufgrund mechanischer Deformationen (in der Mehrzahl der Anwendungen von höherer Ordnung kein)

Damit ist die Einbindung thermomechanischer Körper in Mehrkörpersimulationen formal beschrieben. Als problematisch erweist sich allerdings die Wahl der Eigenvektoren für das thermische und das mechanische Problem. Zur Verringerung der Anzahl der potentiellen Eigenvektoren und Fokussierung auf die Bereiche, welche für weitere Untersuchungen von Interesse sind (für den Fall der Gleitlagersimulation ist der Bereich des Lagers dominierend für die Güte der Simulation), sollen vorangestellte Master-Slave-Reduktionen Verwendung finden (siehe Kapitel (2.3.2)).

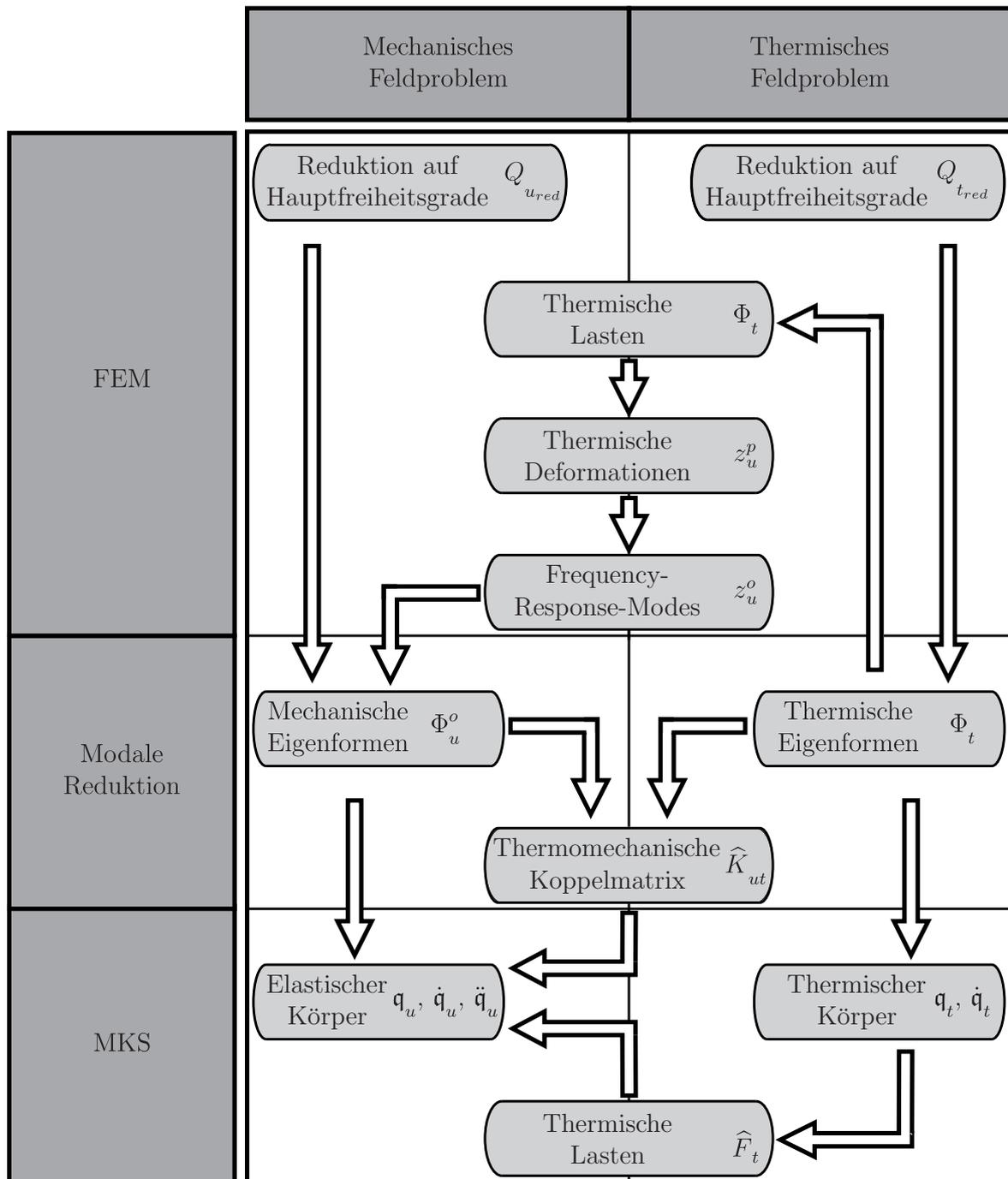


Abbildung 3-1: Einbindung thermomechanischer Körper in Mehrkörpersysteme

Ferner können auch bekannte Belastungsvektoren und die daraus resultierenden Deformationen als Frequency-Response-Modes (siehe Kapitel (2.3.3)) umgesetzt werden, was eine exakte Abbildung dieser Verschiebungsvektoren innerhalb der Mehrkörpersimulation ermöglicht. Das Vorgehen kann für die Verbesserung der Abbildungsgüte des gekoppelten thermomechanischen Feldproblems verwendet werden. Die Eignung der mechanischen Eigenvektoren für die Abbildung thermischer Lasten ist aufgrund der abweichenden physikalischen Grundlagen sehr gering (siehe Kapitel (6.3)). Damit müsste für eine ausreichende Approximationsgüte eine große Zahl an mechanischen Eigenformen berücksichtigt werden. Alternativ könnten für die abbildbaren thermischen Lasten, welche durch die verwendeten thermischen Eigenvektoren determiniert sind, thermische Frequency-Response-Modes Verwendung finden. Zusammenfassen ist in Abb. (3-1) der Ablaufplan des Preprocessings und der Implementierung thermomechanischer Komponenten in Mehrkörpersysteme dargestellt.

## 4 Einbindung thermomechanischer Gleitlager in Mehrkörpersimulationen

Die formale Einbindung der nichtlinearen Gleitlager erfolgt als Kraftelement innerhalb der Mehrkörpersimulation und führt somit zu einer Modifikation des Vektors der äußeren Lasten  $\underline{h}_a(\underline{q}_u)$  (siehe Kapitel (2.4.3)). Eine schematische Darstellung des gesamten Vorgehens zur Einbindung thermomechanischer Gleitlager kann Abb. (4-1) entnommen werden.

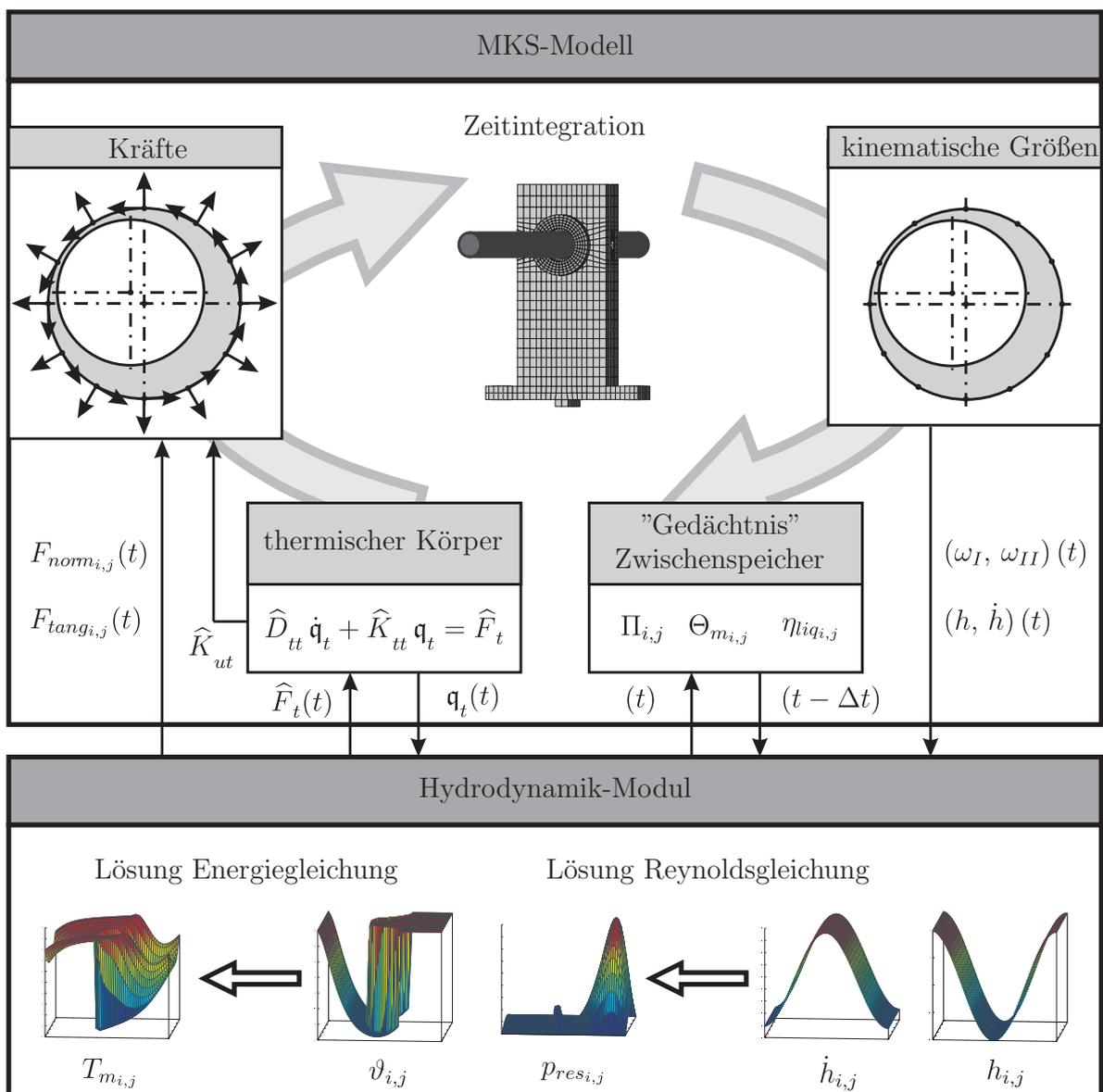


Abbildung 4-1: Einbindung des thermomechanischen Gleitlagers als Kraftelement

Für die Berücksichtigung der Wirkung äußerer Lasten (im Kontext der Gleitlagersimulation sind dies die resultierenden Druckkräfte und die tangential wirkenden Kraftkomponenten) wird jedem FE-Knoten der elastischen Struktur (nach der Master-Slave-Reduktion existieren nur noch die Master-Knoten) innerhalb der MKS-Formulierung ein Marker zugewiesen. Jeder Marker besitzt eine Orientierung und die Möglichkeit der Aufprägung von Kräften und Momenten in allen Raumrichtungen. In Abhängigkeit der Position des Markers vom körperfesten Referenzsystem bewirken Markerlasten zunächst eine Veränderung der kinematischen Größen des starren Körpers. Ferner wirken die Lasten auf die deformierbaren Komponenten und führen somit zu einer überlagerten elastischen Verformung, welche bedingt durch die beschriebenen Koppelterme Rückwirkungen auf die Gesamtbewegung des Körpers besitzt. Zudem wird durch Einführung der Marker die Bestimmung aller kinematischen Größen an einem Punkt ermöglicht. Dies beinhaltet sowohl die starren als auch die elastischen Komponenten und ist ein essentieller Bestandteil der Bereitstellung der Eingangsdaten für die Gleitlagersimulation.

## 4.1 Kinematische Eingangsgrößen

Für die Lösung der Reynoldsgleichung besteht die Notwendigkeit der Aufbereitung der Zustandsgrößen der MKS. Die kinematischen Eingangsparameter Spalt- und Spaltänderungsfunktion sind in Abhängigkeit der Modellierung des Radialgleitlagers zu formulieren. Dabei unterscheidet man vorrangig drei Varianten.

Die Verwendung starrer Lagerpartner bedingt, dass sich Spalt- und Spaltänderungsfunktion direkt aus der Orientierung sowie den Lage-, Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Lagerpartner bestimmen lassen. Wird ferner die Schiefstellung zwischen Welle und Schale ausgeschlossen ergibt sich als einfachste Variante der Modellierung der kinematischen Größen ein Parallelspalt. Die Spaltänderungsfunktion ist in diesem Zusammenhang direkt aus der Formulierung der Spaltfunktion ohne Näherungen bestimmbar.

Bei Berücksichtigung der Schiefstellung ergeben sich in Breitenrichtung aufgelöst variierende Exzentrizitäten der Welle. Die formale Bestimmung der Spaltfunktion ändert sich allerdings nicht gravierend, wohingegen eine zum Parallelspalt analoge Ableitung der Spaltänderungsfunktion nicht möglich ist. Diese Abbildungsvarianten der Gleitlager werden unter dem Begriff HD<sup>25</sup>-Modellierung zusammengefasst.

Wird neben einer Schiefstellung der Welle auch die elastische Deformation der Lagerpartner zugelassen, können keine teilanalytischen Funktionen zur Bestimmung der Spalt- und Spaltänderungsfunktion mehr angegeben werden, was als EHD<sup>26</sup>-Modellierung bezeichnet wird.

Im Folgenden werden die einzelnen Varianten und die daraus resultierende Ableitung der kinematischen Eingangsgrößen der Reynoldsgleichung vorgestellt. Die Darstellungen beschränken sich auf ideal kreisförmige Konturen für Welle und Lagerschale. Bei Abweichungen von der Kreiszyylinderform (Offset-Halves-Lager, Zitronen-Lager, Tragspiegel-Lager etc.) sind zusätzliche geometrische Beschaffenheiten für die Bestimmung der Spaltfunktion zu berücksichtigen. Die Definition der Spaltänderungsfunktion bedarf aufgrund der zeitlichen Konstanz der geometrischen Abweichungen keiner Anpassung.

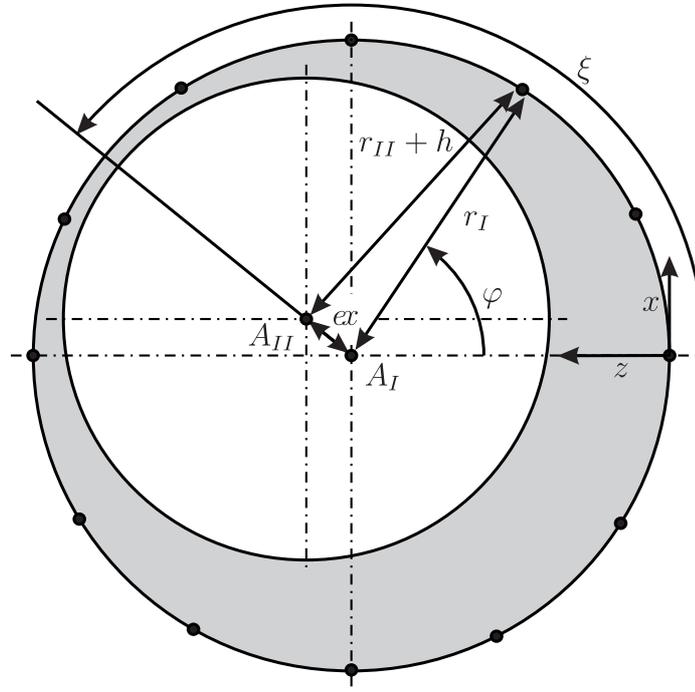
---

<sup>25</sup>hydrodynamisch

<sup>26</sup>elasto-hydrodynamisch

### 4.1.1 Parallelspalt - HD parallel

Unter Verzicht auf Schiefstellung und elastische Deformation stellt sich bei radialer Wellenverlagerung ein in Umfangsrichtung exzentrischer Verlauf der Spaltfunktion ein.



**Abbildung 4-2:** Bestimmung der diskretisierten Spaltfunktion (Parallelspalt)

Die Verwendung des Kosinussatzes führt nach Abb. (4-2) auf folgenden Zusammenhang

$$(r_{II} + h)^2 = (r_I)^2 + ex^2 - 2r_I ex \cos(\varphi - \xi) \quad , \quad (4-1)$$

woraus durch Umformungen die Spaltfunktion in Abhängigkeit der Koordinate  $\varphi$  bzw. der lokalen Spaltkoordinate  $x$  abgeleitet werden kann

$$h(\varphi) = -r_{II} + \sqrt{[r_I - ex \cos(\varphi - \xi)]^2 + ex^2 \sin^2(\varphi - \xi)} \quad . \quad (4-2)$$

Mit der Vereinfachungen  $\frac{ex}{r_I} \ll 1$  ergibt sich folgende in der Literatur übliche Näherung

$$h(\varphi) = \Delta r - ex \cos(\varphi - \xi) \quad . \quad (4-3)$$

Die Bestimmung der Spaltänderungsfunktion erfolgt durch zeitliche Differentiation der schalenfest beschriebenen Spaltfunktion

$$\dot{h}(\varphi) = -ex \cos(\varphi - \xi) - ex \dot{\xi} \sin(\varphi - \xi) \quad . \quad (4-4)$$

Die Exzentrizität und der Winkel der Exzentrizität sowie deren zeitliche Ableitungen lassen sich in Abhängigkeit der Differenz der Koordinaten der Welle und der Schale sowie ihrer zeitlichen Ableitungen im körperfesten Koordinatensystem der Schale formulieren

$$ex = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} \quad , \quad \dot{ex} = \frac{\Delta \dot{y} \Delta y + \Delta \dot{x} \Delta x}{ex} \quad ,$$

$$\xi = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad , \quad \dot{\xi} = \frac{\Delta \dot{y} \Delta x - \Delta \dot{x} \Delta y}{ex^2} \quad .$$

#### 4.1.2 Schiefstellung - HD schief

Wird ferner eine Verkipfung der Welle in der Lagerschale zugelassen, ergibt sich als Resultat der globalen Rotationsfreiheitsgrade eine Abhängigkeit der Spaltfunktion von der lokalen Breitenrichtung. Algorithmisch kann dies durch eine Anpassung der Exzentrizität für jede diskretisierte Breitenteilung berücksichtigt werden. Unter Verwendung der Orientierungsmatrizen der Schale  ${}^I Q_{II}$  und der Welle  ${}^I Q_{II}$  werden die Ortsvektoren der Diskretisierungspunkte in das Schalenkoordinatensystem überführt, in welchem die Beschreibung der Reynoldsgleichung erfolgt. Damit kann analog Kapitel (4.1.1) für jede Breitenreihe in Abhängigkeit der kinematischen Größen eine allgemeine Bestimmung der Spaltfunktion für beliebige Diskretisierungen erreicht werden.

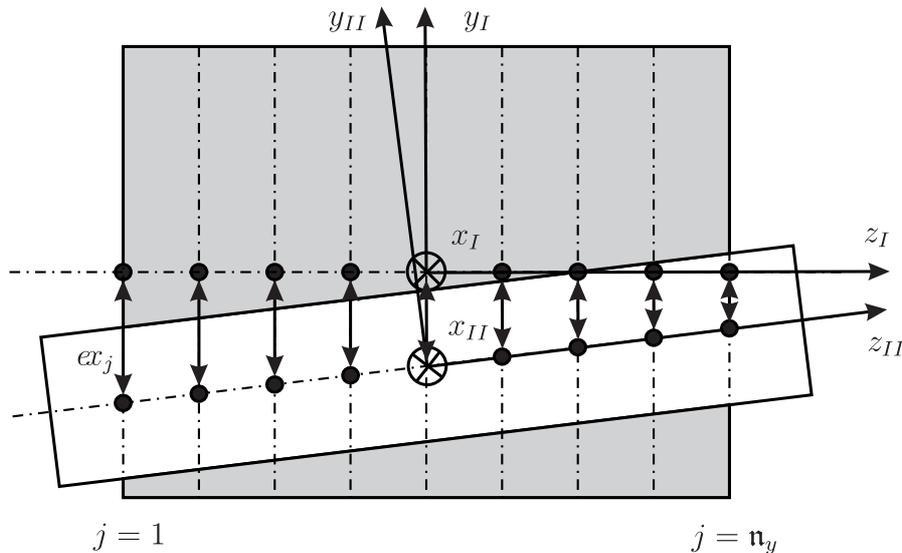


Abbildung 4-3: Bestimmung der diskretisierten Spaltfunktion (Schiefstellung)

Die Berechnung der Spaltänderungsfunktion ist für diesen Fall nicht trivial als formale Differentiation der Spaltfunktion möglich. Vielmehr muss sie durch die Differenz der Absolutgeschwindigkeiten der Punkte auf den Lageroberflächen in Normalenrichtung ausgewertet werden. Dazu ist für jeden Diskretisierungspunkt auf dem Berechnungsnetz der Schale ein korrespondierender Punkt auf der Welle zu konstruieren (siehe Abb. (4-4)). Die anschließende Berechnung der inertialsystemfesten Absolutgeschwindigkeit des Wellenpunktes bzw. des Schalenpunktes erfolgt unter Verwendung der Eulerschen Formel

$${}^I \dot{\underline{r}}_{iP} = {}^I \underline{Q}_i \left( \dot{\underline{r}}_{Ai} + \underline{\omega}_i \times \underline{r}_{iP} \right) \quad \text{mit} \quad i = I, II \quad . \quad (4-5)$$

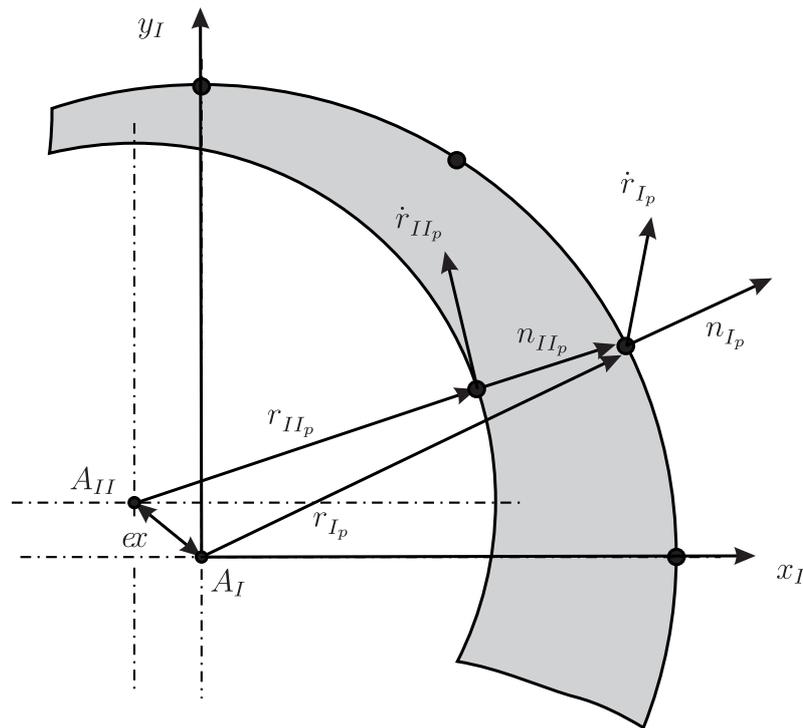


Abbildung 4-4: Bestimmung der Spaltänderungsfunktion (Schiefstellung)

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die in der Literatur häufig anzutreffende Formulierung

$$\dot{h}_t = \frac{h_{t-\Delta t} - h_t}{\Delta t} \quad (4-6)$$

für allgemeine Betrachtungen und speziell bei mitrotierender Schale und schalenfester Betrachtung falsche Ergebnisse liefert.

### 4.1.3 Elastische Deformation - EHD

Wird die Einschränkung der starren Lageroberflächen aufgegeben, beinhaltet die Definition der Spaltfunktion und deren zeitlicher Ableitung die konkrete Auswertung der Abstände und Geschwindigkeiten an den jeweiligen Diskretisierungspunkten normal zur Lagerschale. Dazu werden analog zur Berücksichtigung der Schiefstellung die zu den Schalensystemen korrespondierenden Wellenpunkte unter Einbeziehung der elastischen Deformationen konstruiert. Dies erfolgt für jede diskretisierte Breitenreihe unter Beachtung der lokalen Orientierung des Wellenmarkers. Die anschließende Konstruktion der Differenz der Ortsvektoren und der inertialsystemfesten Geschwindigkeitsvektoren (einschließlich der Deformationsgeschwindigkeiten) in Normalenrichtung in Koordinaten des Schalensystems erfolgt wieder durch Verwendung der Orientierungsmatrizen für Welle und Schale.

## 4.2 Mischreibung

Neben der Wirkung der reinen Hydrodynamik, beschrieben durch die Reynoldsgleichung, kommt es bei technisch rauen Oberflächen mit Unterschreitung einer kritischen Schmier-spalthöhe zur Ausbildung von Mikrokontakten zwischen den Erhebungen der Oberflächentopographien. Als Summe der einzelnen Mikrokontaktflächen ergibt sich eine Gesamtkontaktfläche, deren Größe und Geometrie vom Abstand und den Oberflächentopographien der Lagerpartner sowie deren elastischen und plastischen Deformationsverhalten determiniert wird. Daraus resultierend ergibt sich allgemein im Mischreibungsgebiet eine Überlagerung von hydrodynamischem Druck und Festkörperdruck als Resultat der Mikrokontakte

$$p_{res}(x, y) = p_h(x, y) + p_c(x, y) \quad . \quad (4-7)$$

Die Beschreibung und der Detaillierungsgrad der Abbildung des Festkörperdrucks variieren von vollständigen elasto-plastischen FE-Simulationen an repräsentativen Flächenelementen über Formulierungen auf Basis des elastischen Halbraums bis hin zu statistischen Mittelungen auf Grundlage Hertzscher Kontakte.

Um keine maßgebliche Vergrößerung der Simulationszeit durch die Berechnung der resultierenden Festkörpertraganteile zu erhalten, wird das verbreitete Greenwood-Williamson Rauheitskontaktmodell verwendet [GW66]. Ausgehend von der Modellierung der Rauheitsgipfel als kugelförmige Erhöhungen mit einem mittleren Radius  $\mu$  auf den Oberflächen der Lagerpartner wird der Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung für Einzelkontakte abgeleitet.

Als Grundmodell wird der Kontakt einer ideal glatten Oberfläche mit einer rauen Oberfläche verwendet (siehe Abb. (4-5)).

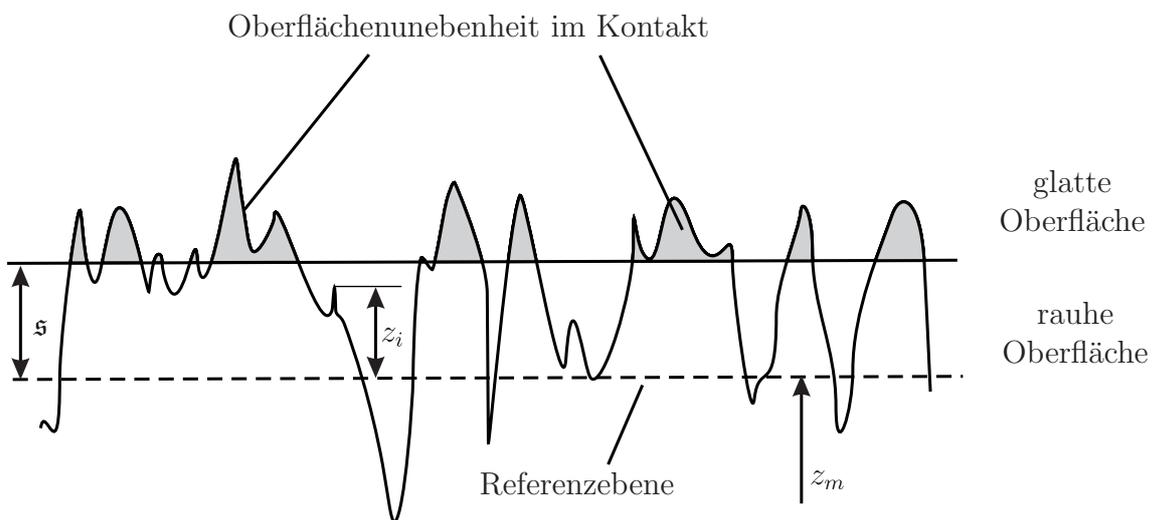


Abbildung 4-5: Kontakt einer rauen Oberfläche [GW66]

Mit der Annahme einer statistischen Verteilung der Rauheitshöhen, beschrieben durch die Verteilungsdichtefunktion  $\phi(z)$  und der Anzahl der Rauheitsgipfel  $n$ , deren Höhe bezüglich der Referenzebene  $z_i$  entspricht, kann die Anzahl der Rauheiten, deren Höhe größer ist als

der Abstand  $\mathfrak{s}$ , wie folgt beschrieben werden

$$\mathbf{n}_{res} = \mathbf{n} \int_{z=\mathfrak{s}}^{\infty} \phi(z) dz \quad . \quad (4-8)$$

Die Betrachtung der Verformung eines Rauheitsgipfels ergibt unter Verwendung der Hertz-schen Gleichungen [BK83] die Einzelkontaktfläche zu

$$B_i = \pi (z_i - \mathfrak{s}) \mu \quad . \quad (4-9)$$

Die Gesamtkontaktfläche resultiert aus der Summation über alle im Kontakt stehenden Einzelflächen

$$B_c = \pi \mathbf{n} \mu \int_{z=\mathfrak{s}}^{\infty} (z - \mathfrak{s}) \phi(z) dz \quad . \quad (4-10)$$

Analoges Vorgehen führt mit dem reduzierten Elastizitätsmodul  $E_{red}$  der Kontaktpaarung auf die Kontaktkraft

$$F_c = \frac{4}{3} E_{red} \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{n} \int_{z=\mathfrak{s}}^{\infty} (z - \mathfrak{s})^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz \quad (4-11)$$

bzw. mit der Dichte der Rauheitsgipfel  $\eta = \frac{\mathbf{n}}{B_0}$  auf den Kontaktdruck

$$p_c = \frac{4}{3} E_{red} \mu^{\frac{1}{2}} \eta \int_{z=\mathfrak{s}}^{\infty} (z - \mathfrak{s})^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz \quad . \quad (4-12)$$

Nach Greenwood und Williamson wird für die Einzelrauheiten eine Gauss-Verteilung angenommen

$$\phi(z) = \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\zeta^2}} \quad , \quad (4-13)$$

wodurch nach Koordinatentransformation  $Z = \frac{z}{\zeta}$  und  $\bar{\mathfrak{s}} = \frac{\mathfrak{s}}{\zeta}$  die folgenden Terme für den Festkörperkontaktdruck

$$p_c = \frac{4}{3} E_{red} \mu^{\frac{1}{2}} \eta \zeta^{\frac{3}{2}} \int_{Z=\bar{\mathfrak{s}}}^{\infty} (Z - \bar{\mathfrak{s}})^{\frac{3}{2}} \phi(Z) dZ \quad (4-14)$$

und das Kontaktflächenverhältnis

$$\frac{B_c}{B_0} = \pi \eta \mu \zeta \int_{Z=\bar{\mathfrak{s}}}^{\infty} (Z - \bar{\mathfrak{s}}) \phi(Z) dZ \quad (4-15)$$

abgeleitet werden können.

Als Resultat liegt ein integrales Modell für den Festkörperkontakt vor, welches durch die aus Messungen bestimmbaren Parameter

|           |  |
|-----------|--|
| $E_{red}$ | reduzierter Elastizitätsmodul der Kontaktpaarung |
| $z_m$     | Mittelwert der Rauheitserhebungen                |
| $\zeta$   | Standardabweichung der Rauheitshöhenverteilung   |
| $\mu$     | Durchschnittlicher Radius der Rauheitsgipfel     |
| $\eta$    | Dichte der Rauheitsgipfel                        |

beschrieben wird.

Damit kann der Gesamtdruck im Mischreibungsgebiet nach Gl. (4-7) unter Berücksichtigung des Kontaktflächenverhältnisses in der Form

$$p_{res}(x, y) = p_h(x, y) \left(1 - \frac{B_c}{B_0}\right) + p_c(x, y) \frac{B_c}{B_0} \quad . \quad (4-16)$$

angegeben, welche durch Integration über das gesamte Lager auf die resultierenden Tragkräfte für das hydrodynamische Radialgleitlager unter Berücksichtigung von Mischreibung führt.

## 4.3 Resultierende Kräfte und Momente

Die Bestimmung der sich ergebenden Lasten, welche aus den normal zur Oberfläche wirkenden Drücken sowie den tangentialen Schubanteilen resultieren, variiert in Abhängigkeit der verwendeten Modellierungsvariante zur Abbildung der Gleitlager. Dabei bedarf es im Fall der EHD-Modellierung der Aufprägung der markerlokalen Lasten in normaler und tangentialer Richtung, bei der Abbildung durch HD-Lager ist eine Summation der Einzellasten (für jede Breitenrichtung bzw. für das gesamte Gleitlager) erforderlich sowie die anschließende Aufprägung auf den Marker der Welle und Schale. Die im Folgenden dokumentierten Schritte sind somit auf den jeweiligen Simulationstyp abzustimmen.

### 4.3.1 Tragkraft

Zur Bestimmung der Tragkraft, werden zunächst die an den Diskretisierungspunkten wirkenden lokalen Kräfte, welche normal zur Oberfläche der Lagerschale wirken, berechnet. Mit der Annahme der Konstanz des Drucks innerhalb eines Kontrollvolumens ergibt sich die lokale Kraft zu

$$F_{nom_{i,j}} = \int_{B_0} p_{res_{i,j}} dB \cong B_{0_{i,j}} p_{res_{i,j}} \quad . \quad (4-17)$$

Die Aufteilung der Einzellasten in Komponenten des körperfesten Referenzsystems und die anschließende Summation ergibt die resultierenden Tragkräfte des Radialgleitlagers (siehe Abb. (4-6)).



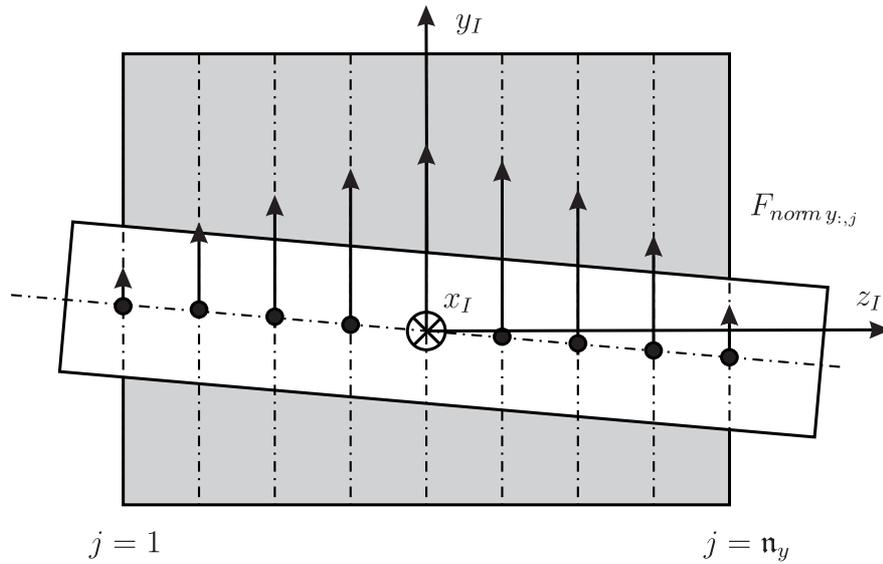


Abbildung 4-7: Bestimmung des Lagermoments um die x-Achse

wobei  $f_c$  die Grenzreibungszahl ist, welche entweder durch energetische und mechanische Betrachtungen [FGT80] oder experimentell bestimmt werden kann. Unter Berücksichtigung der Vereinfachungen für die Reynoldsgleichung ergeben sich die Tangentialkräfte mit dem Stokesschen Reibungssatz Gl. (2-2) zu

$$F_{tang,i,j} = \int_{B_0} \vartheta_{i,j} \eta_{liq,i,j} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial z} + f_c p_{c,i,j} dB \quad . \quad (4-20)$$

Die Auswertung des Differentialoperators in Gl. (4-20) führt mit Gl. (2-7) an der Oberfläche der Lagerschale auf den Ausdruck

$$F_{I tang,i,j} = \int_{B_0} -\frac{h_{i,j}}{2} \frac{\partial p_{h,i,j}}{\partial x} + \vartheta_{i,j} \eta_{liq,i,j} \frac{u_{II} - u_I}{h_{i,j}} + f_c p_{c,i,j} dB \quad (4-21)$$

bzw. an der Wellenoberfläche auf

$$F_{II tang,i,j} = \int_{B_0} \frac{h_{i,j}}{2} \frac{\partial p_{h,i,j}}{\partial x} + \vartheta_{i,j} \eta_{liq,i,j} \frac{u_{II} - u_I}{h_{i,j}} + f_c p_{c,i,j} dB \quad . \quad (4-22)$$

Obleich die Schubspannungen an Welle und Schale und damit per se die Tangentialkräfte unterschiedlich sind, muss nach dem Grundgesetz der Mechanik die Summe aller Momente um einen Punkt Null ergeben. Wird als Referenzpunkt der Wellenmittelpunkt gewählt, ergibt sich das Reibmoment auf die Welle zu

$$L_{II fric} = \sum_i \sum_j F_{tang,i,j} r_{II} = \sum_i \sum_j B_{0,i,j} (\tau_{II,i,j} + f_c p_{c,i,j}) r_{II} \quad . \quad (4-23)$$



relevante Ergebnisse, wie sie z. B. bei der Erstellung der Jacobi-Matrix entstehen, die Grundlage für die zeitliche Differenzenapproximation bilden, was zu einer Verfälschung des Systemverhaltens führt.

Der entwickelte Formalismus sieht deshalb die Einführung eines Zwischenspeichers vor. Bei Identifikation eines regulären Schritts werden die relevanten Informationen (druckähnliche Funktion  $\Pi$ , Temperatur des Schmierstoffs  $\Theta_m$  sowie die dynamische Viskosität des Schmiermittels  $\eta_{liq}$ ) unter Vermerk der aktuellen Simulationszeit abgelegt. Alle weiteren Zeitschritte greifen auf diese Daten unter Beachtung der tatsächlichen Zeitdifferenz zu, um die transienten Terme zu bestimmen. Bedingt durch die Predictor- und Corrector-Schritte, genügt es nicht diesen Zwischenspeicher bei Erreichen eines weiteren regulären Schritts zu überschreiben, vielmehr muss eine definierte Zeitspanne vorliegen, um für alle relevanten Punkte reguläre Informationen aus vergangenen Zeitschritten zur Verfügung stellen zu können. Neben der Notwendigkeit dieser Maßnahme bietet sich so auch die Möglichkeit der Definition angepasster Startvektoren zur Lösung der Reynoldsgleichung und der Energiegleichung aus dem letzten Zeitschritt, was die Konvergenzgeschwindigkeit unter Verwendung iterativer Lösungsverfahren erheblich steigert.

## 5 Referenzmodelle

Um die Funktionsfähigkeit der beschriebenen Algorithmen verifizieren zu können, bedarf es des Abgleichs mit experimentell ermittelten Daten bzw. mit in der Literatur verfügbaren Vergleichsrechnungen. Dabei besteht ein Dualismus zwischen den rotordynamisch relevanten Kenngrößen, welche primär durch die kinematischen Größen des Rotorsystems beschrieben werden (Amplituden des Rotors, Schiefstellung im Lager), und den hydrodynamisch relevanten Größen (Druck- und Temperaturverlauf).

### 5.1 Quasistatisches Vergleichsmodell mit Temperatureinfluss

Zur Untersuchung der Auswirkungen der Einbindung der Energiegleichung und der Einflüsse der getroffenen Vereinfachungen wird auf ein quasistatisches Referenzmodell nach Ferron zurückgegriffen [Fer82]. Der Modellaufbau beinhaltet ein Kreiszyylinderlager mit vergleichsweise niedrigen Wellendrehzahlen. In der Literatur finden sich für dieses Lager zudem quasistatische Simulationen mit sehr hohem Detaillierungsgrad, welche als Vergleichsmöglichkeiten Anwendung finden können [Mit90]. Eine Zusammenstellung der Lagerparameter kann Tab. (A-1) entnommen werden.

Neben den experimentell aufgenommenen Parametern sind für die Simulation zusätzliche Randbedingungen der thermischen Körper zu definieren. Übereinstimmend mit Mittwollen wird die Lagerschale mit einem Wärmeübergangskoeffizient in axialer Richtung  $hf_{I_{ax}} = 500 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  und in radialer Richtung  $hf_{I_{rad}} = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  modelliert. Die Welle wird als thermisches Stabelement der Breite der Lagerschale mit einem Wärmeübergangskoeffizienten  $h_{f_{II_{ax}}} = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  an den Stirnseiten abgebildet. Die nominelle Umgebungstemperatur der Lagerpartner wird innerhalb der Simulationen von Mittwollen auf die mittlere Ölaustrittstemperatur gesetzt. Um zusätzliche Abweichungen zu vermeiden, werden die entsprechenden Werte übernommen  $T_{amb} = T_{aus}$ . Die experimentellen Daten stellen nur das Kaltlagerspiel zur Verfügung, da allerdings die Temperatur maßgeblich das Radialspiel beeinflusst, müssen zusätzlich Wärmeausdehnungskoeffizienten für die Stahlwelle ( $\alpha_{II} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) und die Bronzeschale ( $\alpha_I = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) angenommen werden. Die Lagerschale wird als freier Ring idealisiert, wodurch die mittlere Temperatur die radiale Aufweitung determiniert.

Wie aus Abb. (5-1) zu erkennen ist, weisen zunächst die Temperaturen in der Lagerschale sowohl bei den Simulationen als auch bei den Messungen global den gleichen Verlauf auf. Während die Ergebnisse von Mittwollen eine im Vergleich zu den Messungen leicht erhöhte maximale Temperatur erkennen lassen, zeigen die Simulationen unter Verwendung der vereinfachten zweidimensionalen Form der Energiegleichung ein zu gering vorhergesagtes Temperaturniveau. Die Abweichungen als Resultat der zweidimensionalen Form sind auf verschiedene Ursachen zurückzuführen. Zunächst wird der Wärmefluss in Spalthöhenrichtung in den Simulationen nur in einer quadratischen Näherung erfüllt, welche zwar in

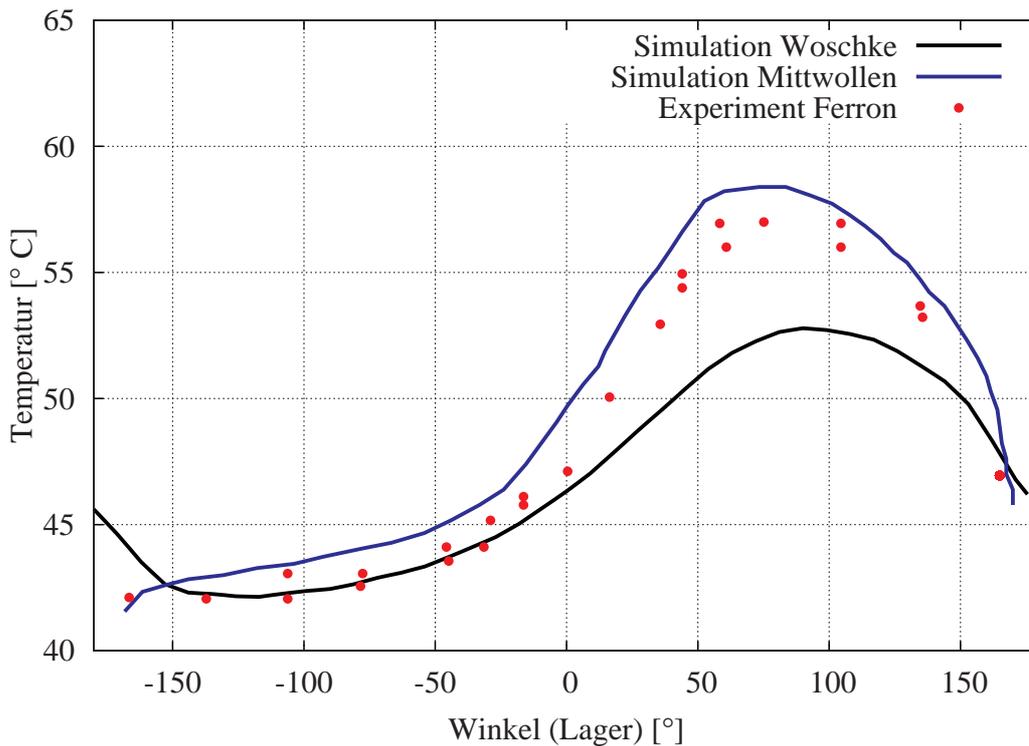


Abbildung 5-1: Temperaturverlauf - quasistatisches Vergleichsmodell mit Temperatureinfluss

weiten Bereichen eine gute Approximation darstellt [Kni90], jedoch nicht die Lösungsgüte einer dreidimensionalen Diskretisierung erreichen kann. Zudem beinhalten die Ergebnisse von Mittwollen ein auf einer Strömungsröhre basierendes Taschenmischungsmodell, welches in den vorliegenden Simulationen aus Gründen der Implementierbarkeit unter Verwendung der getroffenen Annahmen nicht enthalten ist.

Die Rückwirkungen auf den Druckverlauf Abb. (5-2) zeigen allerdings, dass die Beschreibung des globalen Temperaturverlaufs und der Hydrodynamik im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen nach Ferron und den Simulationen nach Mittwollen zu nahezu identischen Resultaten einschließlich des Maximaldrucks führt. Da diese die Rückwirkung auf das rotordynamische System charakterisieren, beschreiben die Algorithmen auch bei Einbindung in eine dynamische Simulation das mechanische Verhalten (einschließlich der darin enthaltenen Koppeleinflüsse durch die thermischen Größen) in guter Näherung.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Ergebnisse im Kontext der getroffenen Annahmen und der Konzipierung der Algorithmen für rotordynamische Anwendungen gute Ergebnisse aufweisen. Die Temperaturen werden global gut abgebildet und die Rückwirkung auf das Rotorsystem in Form des Druckverlaufs weist nur geringfügige Unterschiede zu den experimentellen Ergebnissen auf.

Weiterführende Untersuchungen bei Veränderung der statischen Last und Variation der Drehzahl zeigen prinzipiell ähnliche Ergebnisse. Die maximalen Temperaturen der Schale werden im Vergleich zu den Ergebnissen nach Mittwollen und den experimentellen Daten unterschätzt, liegen jedoch in der gleichen Größenordnung. Der funktionale Verlauf ist gleich, wodurch strukturell gleiches Verhalten erwartet werden kann.

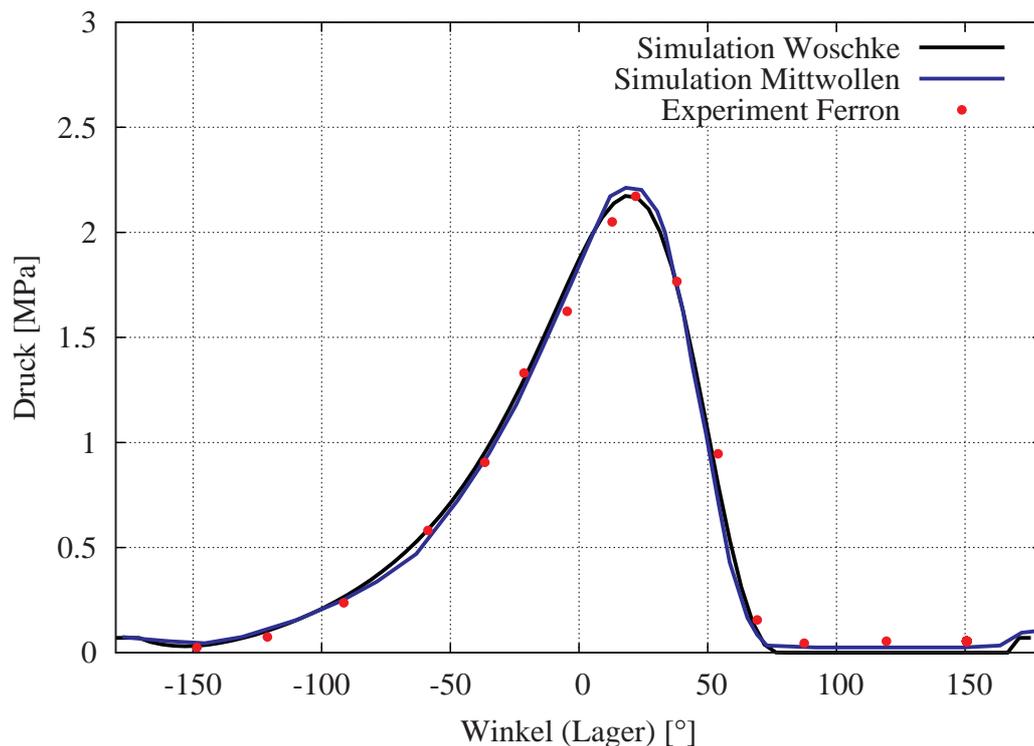


Abbildung 5-2: Druckverlauf - quasistatisches Vergleichsmodell mit Temperatureinfluss

## 5.2 Rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss

Nachdem an einem quasistatischen Vergleichsmodell die Funktionsfähigkeit der Algorithmen zur Abbildung der Hydrodynamik und der Energiegleichung gezeigt werden konnten, erfolgt nun ein Abgleich anhand des quasistationären Hochlaufverhaltens eines Laval-Rotors Abb. (5-3). Als Referenz soll eine Simulation unter Verwendung einer verifizierten Kennfeldlösung dienen. Neben dem Abgleich sollen auch die Unterschiede innerhalb dynamischer Simulationen zwischen Kennfeldlösungen, welche eine Linearisierung des Verhaltens des Gleitlagers um einen stationären Betriebspunkt beschreiben, und direkten Lösungen der vollständigen transienten Reynoldsgleichung in jedem Zeitschritt aufgezeigt werden. Die Einflüsse aus der Energiegleichung werden im Referenzmodell nicht berücksichtigt. Anschließend erfolgt die Untersuchung des Systems unter Vorgabe verschiedener Winkelbeschleunigungen, um den dynamischen Einfluss abschätzen zu können.

Das Modell des Laval-Rotors besitzt die in Tab. (A-2) zusammengefassten geometrischen Abmessungen und Parameter der Lagerung, welche als Mehrflächenlager MFL4x60° ausgeführt wurde. Das FE-Modell der elastischen Welle besteht aus 36 linearen Balkenelementen, welche den Schubeffekt nach der Timoshenko-Theorie berücksichtigen. Die zur Einbindung in die Mehrkörpersimulation notwendige modale Reduktion beinhaltet die ersten 20 Biegeeigenformen, welche das Verhalten in sehr guter Näherung beschreiben. Eine vorangestellte Master-Slave-Reduktion ist aufgrund der geringen Anzahl der Freiheitsgrade und der Eindeutigkeit der Belastung nicht notwendig.

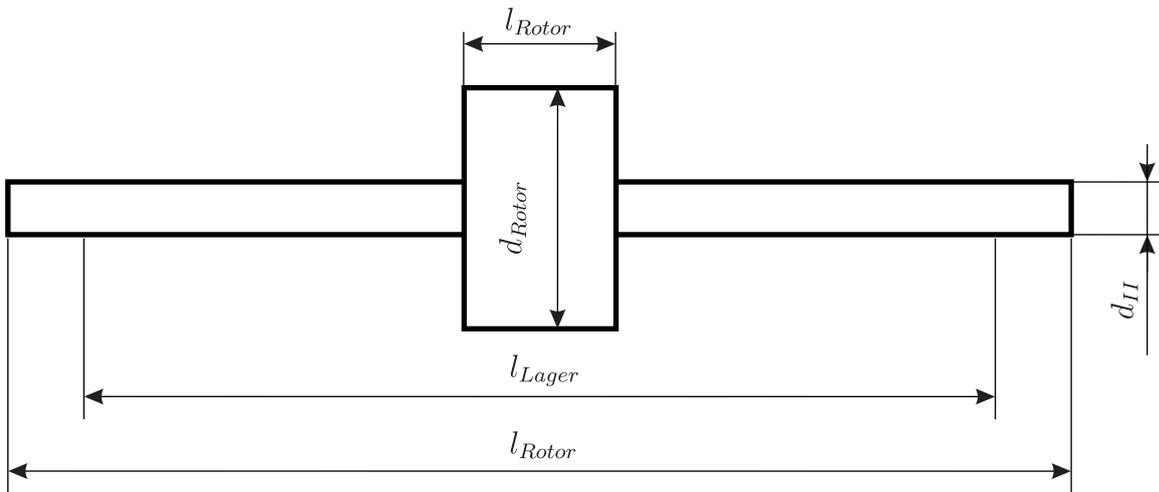


Abbildung 5-3: Modell - rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss

Für die Modellierung der Welle ist die Verwendung von Balkenelementen vorteilhaft, da die vorwiegend schlanken Rotoren damit gut abstrahiert werden können und lokale Deformationen von untergeordneter Bedeutung sind. Die Rotation der Welle würde zudem im Kontext der Gleitlagersimulation bei Abbildung durch Volumenelemente auf das Problem von Relativbewegungen der beschreibenden Netze von Welle und Lagerschale führen und damit verbunden, die Verwendung von Interpolationsalgorithmen bedingen (siehe [NWDS09] oder detaillierter [Nit09]).

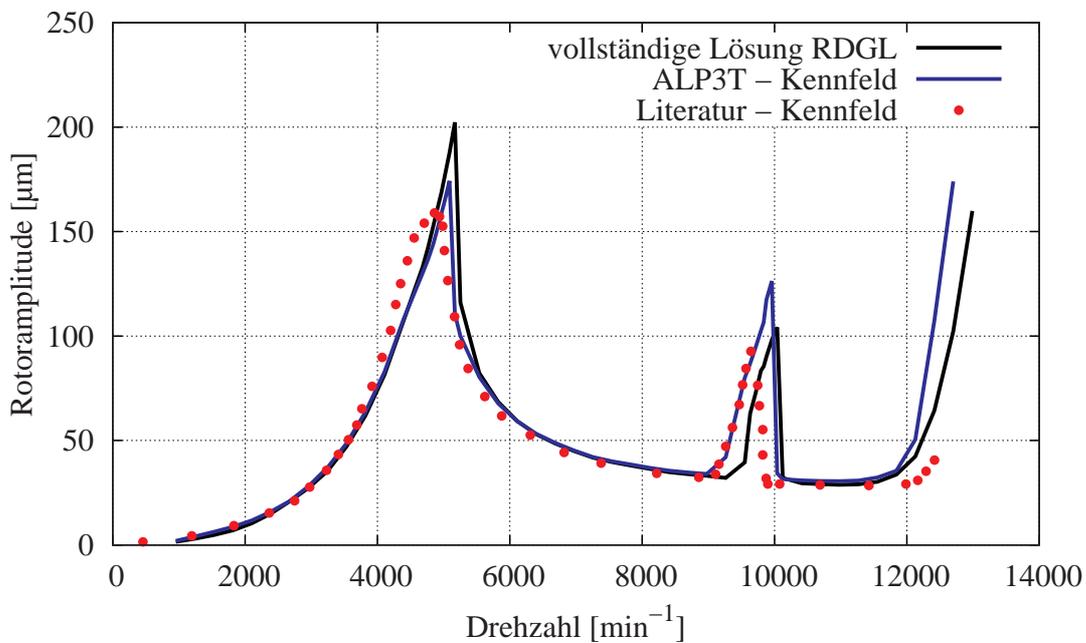


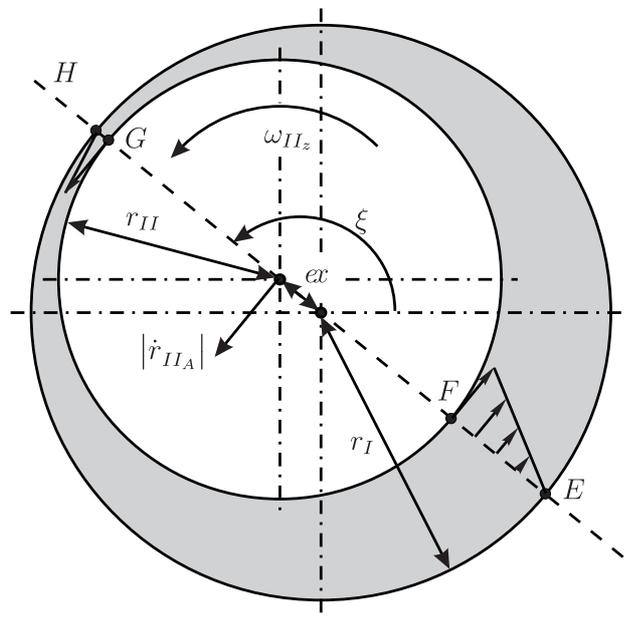
Abbildung 5-4: Rotoramplituden - rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss

Das Rotorsystem mit den vorgestellten Modellparametern wurde bereits in [GE93] untersucht, wodurch die Möglichkeit des Abgleichs der entwickelten Methoden gegeben ist. Zu diesem Zweck werden zunächst die quasistationären Rotoramplituden des Systems (partikuläre Lösung) zu diskreten Drehzahlen ermittelt und in Abb. (5-4) dargestellt.

Die Referenzlösung wurde unter Verwendung von Kennfeldern und deren Implementierung in das Programm MADYN/NOLIN erstellt, welches in weiten Belangen einem FE-System entspricht. Die Untersuchung rotordynamischer Eigenschaften gelingt durch zusätzliche Formulierung der gyroskopischen Matrix, wodurch Kreiseffekte und drehzahlabhängige Eigenfrequenzen beschreibbar werden. Die Kennfelder zur Abbildung der Gleitlagerung wurden mit dem Programm ALP3T erstellt, welches einen quasistatischen<sup>28</sup> Kavitationsalgorithmus nach Elrod verwendet.

Im Vergleich mit den Simulationsergebnissen, welche unter Verwendung der vollständigen Reynoldsgleichung erstellt wurden, zeigt sich global zunächst der gleiche Verlauf. Übereinstimmend weisen die Simulationen drei charakteristische Punkte auf.

Zunächst kann bei  $n_{krit1} = 5000 \text{ min}^{-1}$  die biegekritische Drehzahl identifiziert werden. Ferner ist im Drehzahlbereich um  $n_{krit2} = 9500 \text{ min}^{-1}$  eine weitere Amplitudenerhöhung festzustellen. Diese als Oil-Whirl charakterisierbare subharmonische Schwingung resultiert aus den Eigenschaften des Schmierfilms. Ursache für den Oil-Whirl oder Halbfrequenzwirbel ist die Selbsterregung des Systems durch die umlaufende Strömung des Fluidfilms. Unter Beachtung der Haftungsbedingung an Wellen- und Schalenoberfläche und der Annahme eines linearen Geschwindigkeitsfelds in Spalthöhenrichtung ergibt sich bei stehender Lagerschale eine mittlere Ölwinkelgeschwindigkeit  $\omega_m = \omega_{IIz}/2$ .



**Abbildung 5-5:** Geschwindigkeitsverteilungen im Gleitlager zur Beschreibung des Oil-Whirls

<sup>28</sup>In diesem Kontext wird der Begriff quasistatisch verwendet, um zu beschreiben, dass die Dämpfungseigenschaften des Lagers mit der Annahme identischer Kavitationszustände bei reiner Zapfenbewegung und reiner Zapfenverlagerungsbewegung abgeleitet wurden [Mit90]. Gültigkeit besitzt diese Annahme streng genommen nur unter der Voraussetzung moderater Auslenkungen um die statische Ruhelage.

Eine Betrachtung der Volumenströme in Abb. (5-5) in Anlehnung an [YI01] für ein idealisiertes vollgefülltes kreisförmiges Gleitlager ohne Schiefstellung ergibt zusammen mit der Wellenverschiebung folgende Volumenstrombilanz

$$\underbrace{(\omega_m r_{II} - |\dot{\xi}_{IIA}|)}_{\text{Volumenstrom in das Kontrollvolumen}}(r_I - r_{II} + ex) - \underbrace{(\omega_m r_{II} + |\dot{\xi}_{IIA}|)}_{\text{Volumenstrom aus dem Kontrollvolumen}}(r_I - r_{II} - ex) - \frac{r_{II}}{2} |\dot{\xi}_{IIA}| = 0 \quad . \quad (5-1)$$

Mit der Vereinfachung  $r_{II}/r_I \approx 1$  und der aus kinematischen Betrachtungen ableitbaren zeitlichen Änderung des Verlagerungswinkels  $\dot{\xi} = |\dot{\xi}_{IIA}|/ex$  folgt

$$\dot{\xi} = \omega_m = \frac{\omega_{II}}{2} \quad . \quad (5-2)$$

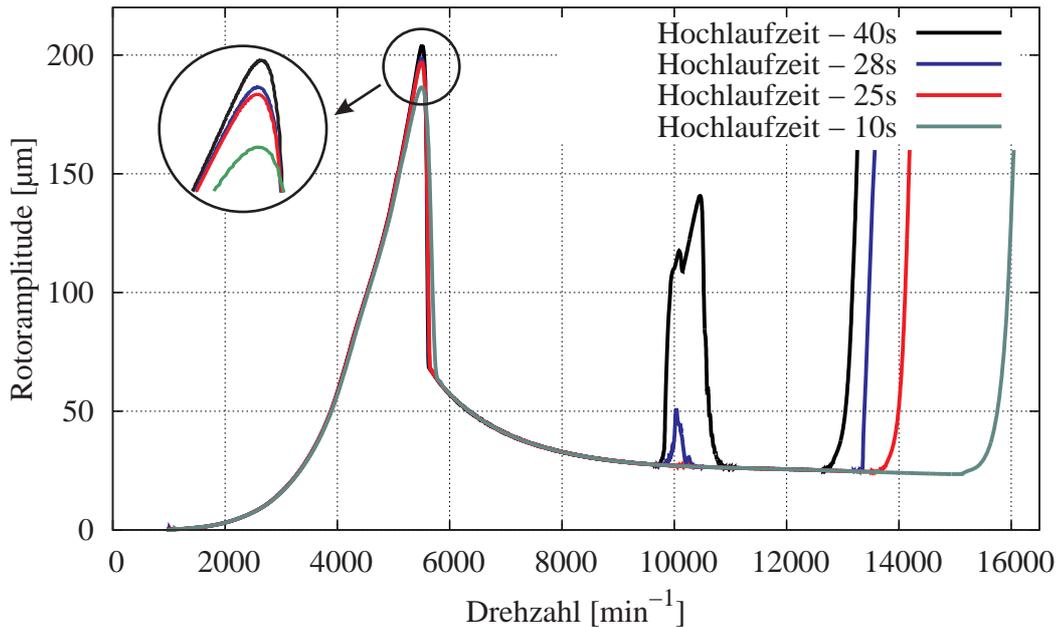
Werden zusätzlich Ölzuführungen und Kavitation berücksichtigt und einbezogen, dass das Lager seitlich nicht geschlossen ist, sodass Öl austreten kann, führt dies auf eine Absenkung der zeitlichen Änderung des Verlagerungswinkels im Bereich  $\dot{\xi} = 0.42 \dots 0.48 \omega_{II}$ . Das Resultat der betrachteten Volumenströme ist also eine umlaufende Bewegung der Welle in der Schale mit etwa der halben Winkelgeschwindigkeit der Welle. Da die Differenz zwischen umlaufender Wellengeschwindigkeit und mittlerer Geschwindigkeit des Ölfilms gering ist, wird weniger Öl in den engsten Spalt gefördert, was den Druckaufbau beeinflusst und zu größeren Exzentrizitäten führt. Somit wird zunehmend Öl seitlich aus dem Lager austreten und die Whirl-Frequenz sinkt. Die Rückwirkung führt dazu, dass sich ein Gleichgewicht im Lager einstellen kann [Mus05]. Das konkrete Auftreten der Whirl-Schwingung ist durch die äußere Belastung, die konkreten Gleitlagereigenschaften sowie die charakteristischen Steifigkeits- und Dämpfungsparameter des Rotors beeinflusst.

Ab einer Drehzahl  $n_{krit3} = 12000 \text{ umin}^{-1}$  wachsen die Amplituden des Rotors unbegrenzt an. Diese Stelle determiniert den Oil-Whip. Dabei trifft die subharmonische Anregung des Oil-Whirl die erste Biegeeigenfrequenz, wodurch die Amplituden im Lager schnell anwachsen und nur noch durch das Lagerspiel begrenzt werden. Diese weitestgehend phenomenologische Erklärung beschreibt weitere Effekte, wie die Konstanz der Schwingungsfrequenz des Whirls trotz steigender Drehzahl nicht. Dazu sind weiterführende Stabilitätsuntersuchungen notwendig, wie sie unter anderem in [Mus86], [Mus88], [YI01] vorgenommen wurden.

Obgleich der globale Verlauf der Rotoramplituden gute Übereinstimmungen aufweist, existieren lokal Unterschiede, die im Folgenden untersucht werden sollen. Zunächst soll der Einfluss des verwendeten Programmsystems analysiert werden. Dazu werden analog zur Referenzlösung Kennfelder mit dem Programm ALP3T erstellt und in die Mehrkörpersimulation integriert. Es zeigt sich, dass die Differenzen in den charakteristischen Punkten teilweise auf die unterschiedliche Beschreibung des elastischen Rotors zurückzuführen sind. Da im FE-Programm MADYN/NOLIN keine explizite Rotation beschrieben wird, kann die Materialdämpfung des elastischen Rotors nur als inertielle Dämpfung interpretiert werden, während in der Mehrkörpersimulation die Beschreibung im mitrotierenden Koordinatensystem erfolgt und damit den Effekt einer inneren Dämpfung besitzt (vgl. [Fis11]). Zudem ist die Beschreibung der Dämpfung aufgrund des modalen Ansatzes im Mehrkörpersystem nicht direkt mit der Referenzlösung vergleichbar. Die Unterschiede zwischen der Kennfeldlösung und der Simulation unter vollständiger Lösung der Reynoldsgleichung sind auf unterschiedliche Beschreibungen des Verdrängungsterms zurückzuführen. Wie bereits ausgeführt, besitzen die Kennfeldlösungen nur bei moderater Auslenkung um die statische

Ruhelage Gültigkeit. Daraus resultierend ergeben sich aufgrund differierender Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften Abweichungen in den Rotoramplituden an den Stellen der kritischen Drehzahlen und auch Verschiebungen der kritischen Drehzahlen. Unter Einbeziehung der algorithmischen und formalen Unterschiede in den Beschreibungen des elastischen Rotors und der Abbildung der Gleitlagerung zeigen die Simulationen vergleichbare Ergebnisse.

In einem weiterführenden Schritt wird die quasistationäre Forderung aufgehoben, um den Einfluss des transienten Verhaltens der Lagerung auf die Rotoramplituden zu untersuchen.

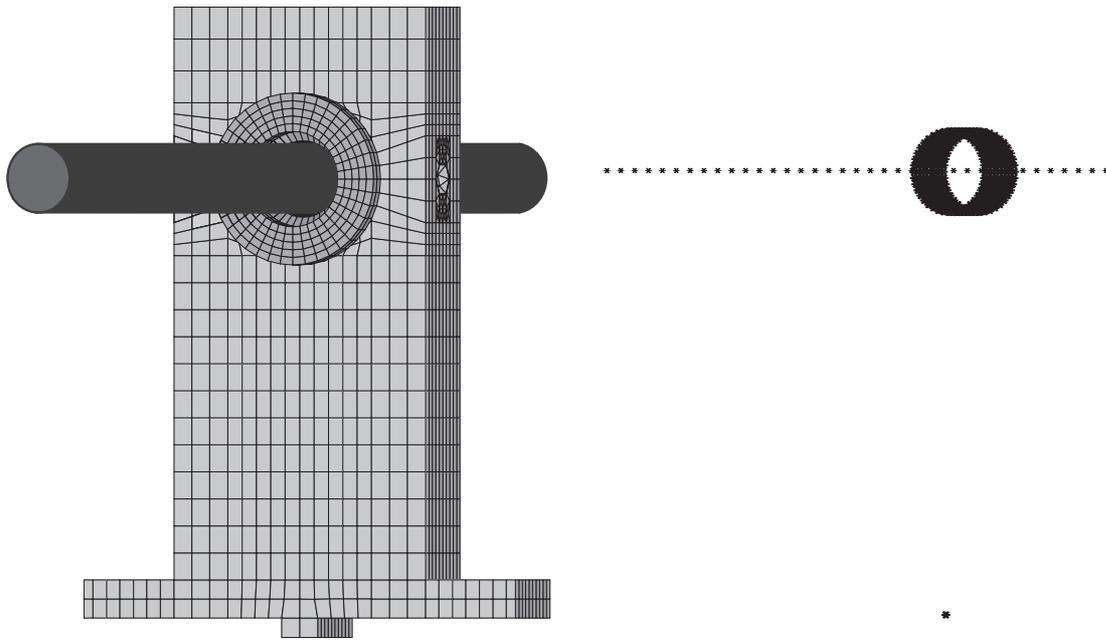


**Abbildung 5-6:** Rotoramplituden - rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss

Die in Abb. (5-6) dargestellten Simulationsergebnisse zeigen Variationen der Winkelbeschleunigung bei linearer Veränderung der Drehzahl, wie sie technisch relevant ist. Bei zunehmender Winkelbeschleunigung des Rotors kann eine leichte Erhöhung der biegekritischen Drehzahl  $n_{k1}$  beobachtet werden. Gleichzeitig werden die Amplituden bedingt durch das schnellere Durchfahren der Resonanzstelle und die fehlende Möglichkeit der Ausbildung der maximalen Schwingungsamplitude verringert. Eine deutlich stärkere Abhängigkeit weist das Auftreten der Schwingung des Oil-Whirl auf. Die Amplituden sinken sehr stark ab, bis sie ab einer Grenzwinkelbeschleunigung im Vergleich zur Unwuchtschwingung nicht mehr dominant sind. Auch die letztlich zum Systemversagen führende Ausbildung des Oil-Whip verzögert sich stark, wodurch höhere maximale Drehzahlen erreicht werden können. Die Auswirkungen der transienten Einflüsse auf das Systemverhalten selbst eines Laval-Rotors unter Berücksichtigung der Nichtlinearität der Lagerung sind vielfältig und beeinflussen nicht nur die Resonanzamplitude sondern auch die Stabilitätsgrenze und das Auftreten zusätzlicher kritischer Drehzahlen, was ihre Berücksichtigung und den daraus resultierenden Mehraufwand der Modellierung rechtfertigt.

## 6 Anwendungsbeispiel Lagerbock

Für die Abbildung allgemeiner rotordynamischer Systeme genügt es bei hohen Lasten (dynamisch oder statisch) häufig nicht, lediglich die Welle als deformierbaren Körper zu modellieren. Die Berücksichtigung des zeitabhängigen Deformationsverhaltens der Lagerschale und des umgebenden Materials kann von entscheidendem Einfluss auf die Simulationsgüte sein und sollte deshalb bei hohen Genauigkeitsanforderungen mit untersucht werden. In diesem Kontext ist vor allem auch die Definition der Systemgrenzen von Interesse, da eine transiente Deformation der Lagerschale und eine daraus resultierende Anregung des Fundaments auch zu Interaktionen zwischen verschiedenen Lagerungsstellen führen kann. Die Untersuchung der Einflüsse ist jeweils problemabhängig zu gestalten.



**Abbildung 6-1:** Modell - Lagerbock (FE-Modell - links, MKS-Modell - rechts)

Nachdem die Eignung der vorgestellten Algorithmen zur Abbildung rotordynamischer Systeme bei Verwendung von Gleitlagern mit Berücksichtigung des Temperatureinflusses durch Abgleich mit Referenzmodellen sichergestellt werden konnte (vgl. Kapitel (5)), soll im Folgenden am Modell eines Lagerbocks der Einfluss der thermischen und mechanischen Deformation der Lagerschale und die Abbildung des Temperaturverlaufs im Lager untersucht werden. Der verwendete Lagerbock (siehe Abb. (6-1)) mit den Hauptabmessungen  $70 \times 150 \times 25\text{mm}$  wurde mit ca. 7000 linearen Volumenelementen diskretisiert. Das Gleitlager wurde als Kreislager mit den in Tab. (A-2) aufgelisteten Parametern und einer einzelnen Zuführbohrung bei  $\varphi = 90^\circ$  ausgeführt. Die Welle wurde analog Kapitel (5.2) als

Balkenmodell abstrahiert. Um zusätzliche Einflüsse aus der Schiefstellung der Welle und der daraus resultierenden Unsymmetrie der Spalt- und Spaltänderungsfunktion im Kontext der Ableitung prinzipieller Aussagen zu verhindern, wurde der Einfluss des Biegewinkels und gegebenenfalls der Deformation der Welle im Bereich der Lagerschale eliminiert. Die Einschätzung der prinzipiellen Auswirkungen der verschiedenen Detaillierungsgrade bei der Modellierung der Schiefstellung ist unter anderem in [DSW09] veröffentlicht und wird an dieser Stelle nicht weiter untersucht.

Da die Lösungsgüte maßgeblich von den für die Abbildung der Deformationen und der Temperaturen verwendeten Eigenformen beeinflusst wird, stellt die Auswahl und Anzahl einen zentralen Punkt des Preprocessings dar. Per se sollten möglichst viele Deformationszustände und Temperaturverläufe abgebildet werden können, was allerdings in einer erhöhten Anzahl an modalen Freiheitsgraden resultiert, die zudem mit steigender Eigenfrequenz des zugehörigen Eigenvektors auch kritisch für die Steifigkeit des Differentialgleichungssystems und damit die maximale Schrittweite des Zeitintegrationsverfahrens sind. Bei Kenntnis der Belastung können allerdings die Zustände und zugehörigen Eigenformen selektiert werden, welche dominant für die Abbildung der maßgeblichen Eigenschaften sind. Die Untersuchung quasistationärer Zustände unter Berücksichtigung des Temperaturverhaltens der Lagerpartner, stellt für die Simulation aufgrund der unterschiedlichen Zeitskalen der physikalischen Eigenschaften eine zusätzliche Herausforderung dar. Ausgehend von den definierten Anfangsbedingungen würde die Simulation der Temperaturentwicklung in einem Gleitlager bis zum stationären Zustand einen erheblichen Rechenaufwand darstellen. Aus diesem Grund kann zur Beschleunigung die Wärmekapazität des Systems künstlich verringert werden, was in Abhängigkeit der Skalierung zu erheblichen Verringerungen der Simulationszeit führt. Bei Berücksichtigung zyklischer Laständerungen, wie sie z.B. durch Unwucht hervorgerufen werden, werden die resultierenden Änderungen auf die Temperaturen allerdings mit skaliert, wodurch eine Mittelung der Wärmeströme auf die Lagerpartner über einen Zyklus notwendig wird.

## 6.1 Berücksichtigung der Elastizität des Lagerbocks

Zunächst soll die Abbildung der mechanischen Deformation und die notwendige Anzahl der Eigenformen zur konvergenten Beschreibung untersucht werden. Dazu wird das Volumenmodell des Lagerbocks mit jeweils 20, 40, 70 und 100 Eigenformen modal reduziert. Um die Eigenformen auf den Bereich der Lagerschale zu konzentrieren, wird eine statische Reduktion (siehe Kapitel (2.3.2)) auf die  $40 \times 9$  Knoten, welche die Lagerschale diskretisieren, vorangestellt<sup>29</sup>. Da der Belastungszustand quasistatisch ist, können etwaige Modellierungseinflüsse aus der Guyan-Reduktion ausgeschlossen werden. Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass bereits mit wenigen Eigenformen die globale Deformation der Lagerschale und die damit einhergehende Ovalisierung gut abgebildet werden kann. Dies führt allerdings nur marginal zu Beeinflussungen der Druckfunktion und des maximalen Drucks bzw. des minimalen Spalts. Erst ab einer Verwendung von 40 Eigenformen zeigen sich erkennbare Veränderungen der hydrodynamischen Größen. Die Ursache liegt in der lokalen Deformation der Lagerschale, welche nur im Bereich weniger Zehntel  $\mu\text{m}$  liegt (siehe Abb. (6-2)). Eine weitere Erhöhung der Anzahl der Eigenformen führt auf eine

<sup>29</sup>Zur Verbesserung der Abbildungsgenauigkeit der hydro- und thermodynamischen Eigenschaften des Schmierfilms erfolgt eine interne Interpolation der Spalt- und Spaltänderungsfunktion auf  $80 \times 17$  Knoten.

genauere Abbildung der lokalen Deformation, welche monoton konvergiert. In Abb. (6-3) sind die Auswirkungen der Berücksichtigung auf die Druckfunktion dargestellt.

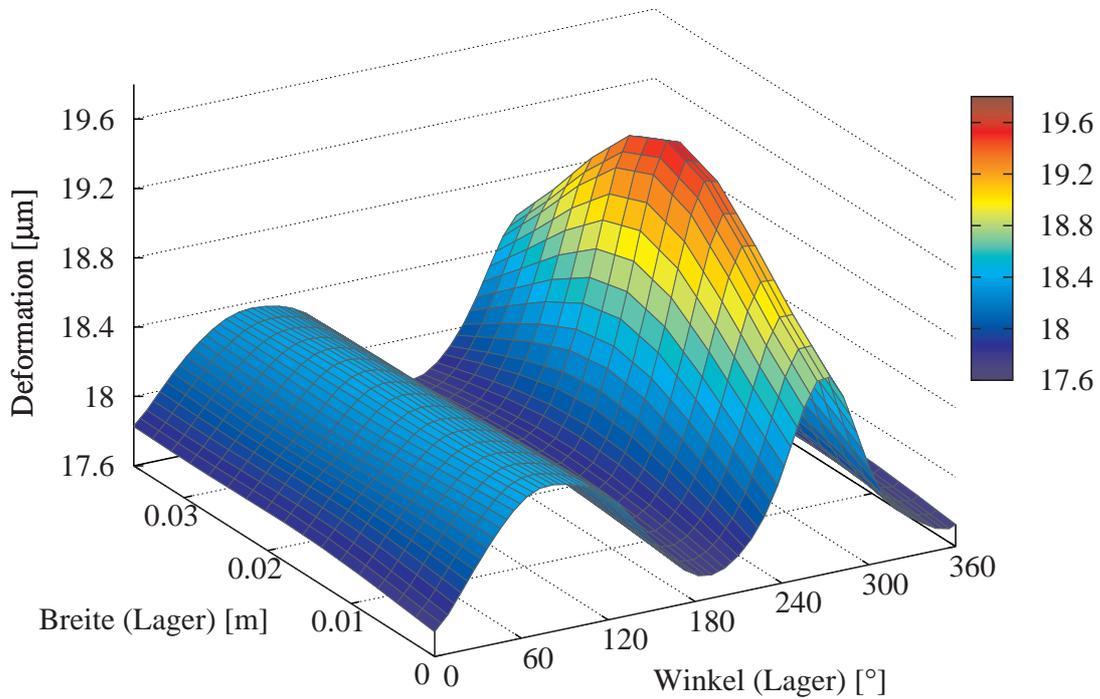


Abbildung 6-2: Elastische Deformation im konvergenten Zustand - Lagerbock

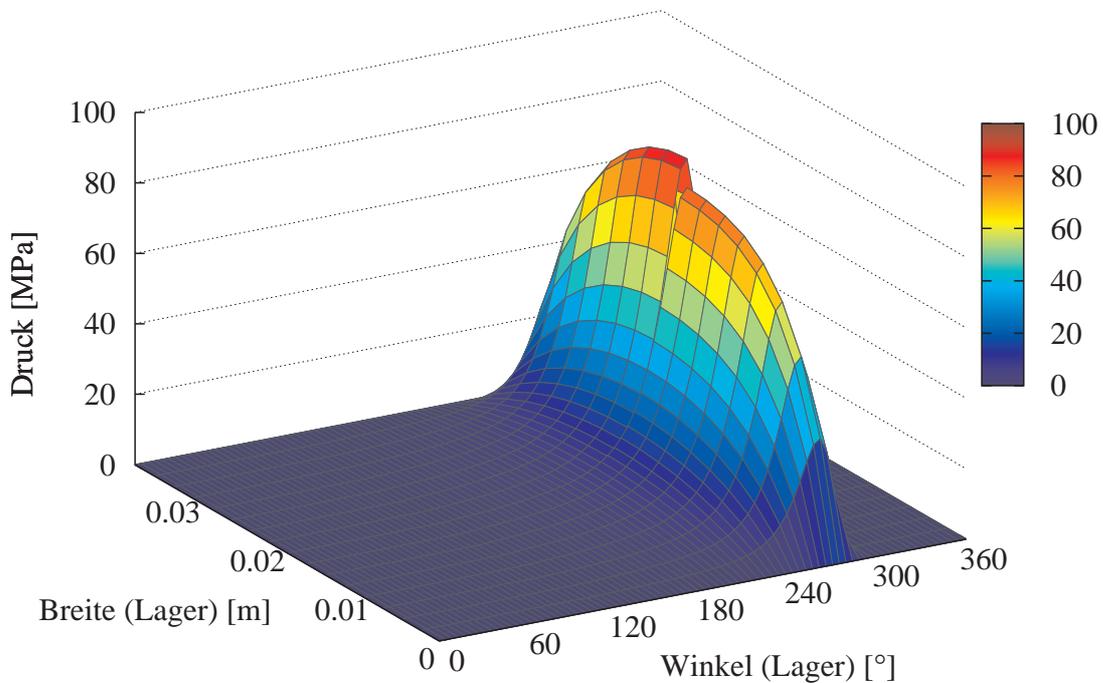


Abbildung 6-3: Druckverlauf - Lagerbock (hinten starr, vorn elastisch)

Die Einflüsse der mechanischen Deformation werden durch eine maßgebliche Verringerung des maximalen Drucks Abb. (6-5) sowie eine Verkleinerung des minimalen Schmierpalts Abb. (6-4) charakterisiert, welche auf das rotodynamische Verhalten in Form veränderter Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften zurückwirken.

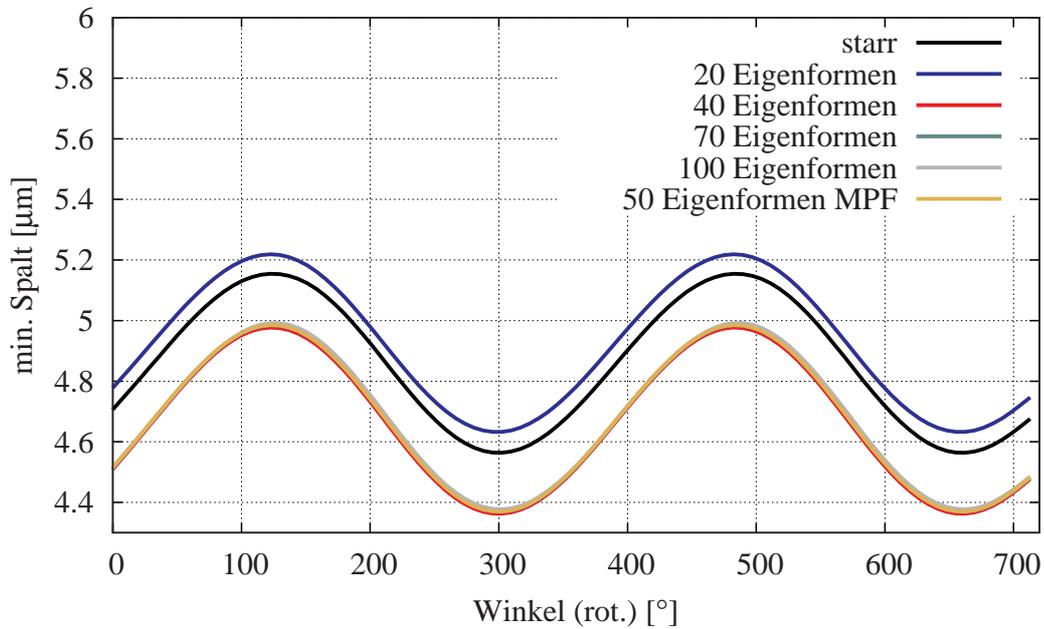


Abbildung 6-4: Einfluss der elast. Deformation auf den minimalen Schmierpalt - Lagerbock

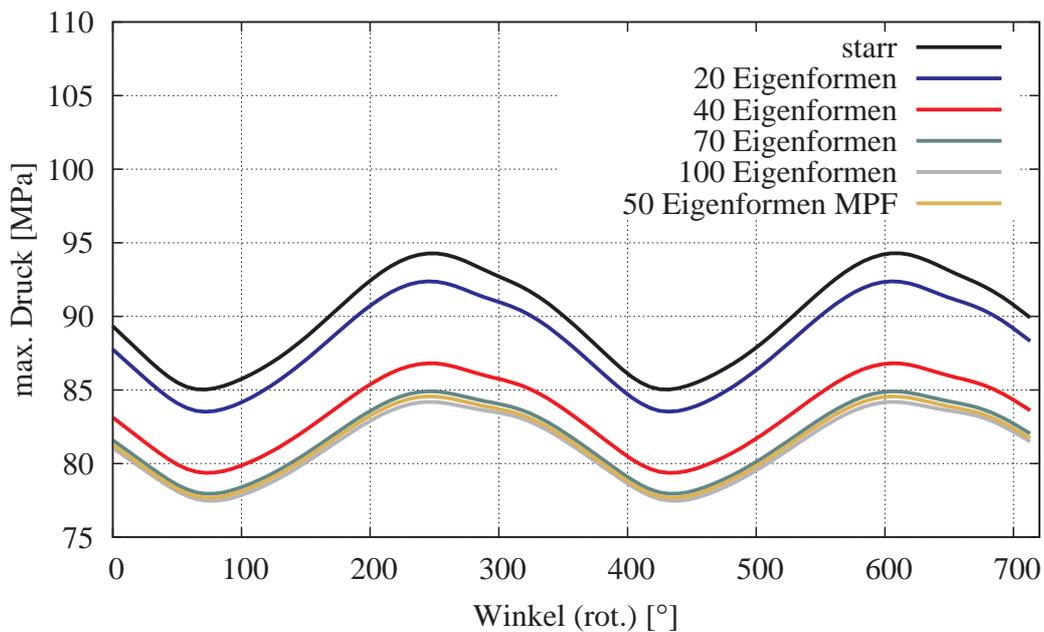


Abbildung 6-5: Einfluss der mechanischen Deformation auf den maximalen Druck - Lagerbock

### 6.1.1 Auswahl der Eigenformen zur Beschreibung der mechanischen Deformation

Die vorgestellten Ergebnisse der Simulation mit 100 Eigenformen beinhalten eine hohe Anzahl an modalen Zustandsvariablen, welche keinen signifikanten Einfluss auf die Deformation unter Wirkung der gegebenen äußeren Lasten besitzen. Bei Kenntnis der auf die Struktur wirkenden Kräfte ist allerdings eine explizite Selektion der an der Deformation beteiligten Eigenformen möglich [WW99].

Unter Vernachlässigung der Wirkung aller Massenkräfte und Einflüsse aus Dämpfung gegenüber denen aus der Steifigkeit

$$\underline{\widehat{M}}_{uu} \ddot{\underline{q}}_u + \underline{\widehat{D}}_{uu} \dot{\underline{q}}_u \ll \underline{\widehat{K}}_{uu} \underline{q}_u \quad (6-1)$$

kann die Bewegungsdifferentialgleichung eines modal reduzierten elastischen Körpers in der Form

$$\underline{\widehat{K}}_{uu} \underline{q}_u = \underline{\widehat{F}}_u \quad (6-2)$$

formuliert werden. Die Annahme gilt formal nur für sich langsam bewegende elastische Körper und bei Berücksichtigung geringer Dämpfung bzw. unter der Bedingung geringer Veränderungsgeschwindigkeiten der äußeren Lasten. Die erzielten Ergebnisse sind allerdings auch bei dynamisch belasteten Systemen im Kontext der Gleitlagersimulation anwendbar, da die lokalen Deformationen primär aus den wirkenden äußeren Lasten resultieren und die Deformationsgeschwindigkeiten moderat bleiben. Werden die modalen äußeren Lasten als bekannt vorausgesetzt, lassen sich die modalen Deformationen bestimmen. Werden diese bezüglich ihres Anteils am Gesamtdeformationszustand gewichtet

$$\widehat{MPF}_{u_i} = \frac{|\underline{q}_{u_i}|}{\sum_i |\underline{q}_{u_i}|} \cdot 100\% \quad , \quad (6-3)$$

ergibt sich eine Bewertungsmöglichkeit der Eigenformen durch den modalen Beteiligungs-faktor (MPF<sup>30</sup>). Eine entsprechende Selektion ist für jede zu berücksichtigende äußere Last möglich, wodurch aus der Superposition der Eigenformen auch Zusammenstellungen für Lastkollektive und damit dynamische Simulationen ableitbar sind.

Analog zur globalen Gewichtung der Eigenvektoren kann dies auch für den Beitrag an der physikalischen Deformation jedes Knotens  $k$  in der Richtung  $j$  untersucht werden

$$MPF_{u_i}^{k,j} = \frac{|\underline{\Phi}_{u_i}^{k,j} \underline{q}_{u_i}|}{\sum_i |\underline{\Phi}_{u_i}^{k,j} \underline{q}_{u_i}|} \cdot 100\% \quad , \quad (6-4)$$

was sich allerdings in Studien für der Gleitlagersimulation als nicht sinnvoll herausgestellt hat, da die lokalen mechanischen Deformationen gegenüber den globalen klein sind und aufgrund der notwendigen Diskretisierung und damit der Knotenanzahl häufig unberücksichtigt bleiben.

Für die Kenntnis der äußeren Lasten des deformierten Modells sind formal vollständige Simulationen mit einer hohen Anzahl an modalen Zustandsvariablen notwendig. Es konnte allerdings gezeigt werden, dass der strukturelle Verlauf der äußeren Lasten bei Simulationen mit starrer und elastischer Lagerschale ähnlich ist, wodurch als Eingangsdaten für die Selektion der beteiligten Eigenvektoren der Druckverlauf einer starren Rechnung mit geringerem numerischen Aufwand verwendet werden kann.

<sup>30</sup>Mode Participation Factor

Die Güte der Abbildung der mechanischen Deformation kann Abb. (6-4) und Abb. (6-5) entnommen werden. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Ergebnisse, obgleich mit einer drastisch verringerten Anzahl an Eigenformen nahezu der konvergenten Lösung entsprechen. Der minimale prozentuale Beitrag zur Verformung, der berücksichtigt werden muss, ist algorithmisch nicht allgemeingültig zu erfassen, sondern immer mit der konkreten Belastung verbunden. Eine Visualisierung der Deformationen mit dem ausgewählten Set im Vergleich zu einem allgemeinen Set mit vielen Eigenformen, bietet allerdings eine Möglichkeit der Einschätzung der zu erwartenden Lösungsgüte.

## 6.2 Berücksichtigung der thermischen Eigenschaften des Lagerbocks

Erfolgt analog zu den mechanischen Deformationen eine Untersuchung der Einflüsse der Eigenformen bzgl. der Temperaturen der Lagerpartner, erweisen sich bereits wenige thermische Eigenvektoren als hinreichend, um die maximale Temperatur der Lagerschale sowie daraus resultierend die gekoppelten Temperaturen des Ölfilms und der Welle im Bereich der Lagerschale abzubilden. Die Ergebnisse der Konvergenzstudie sind in Tab. (6-1) zusammengefasst.

**Tabelle 6-1:** Einfluss der Eigenformen zur Beschreibung des Temperaturverlaufs

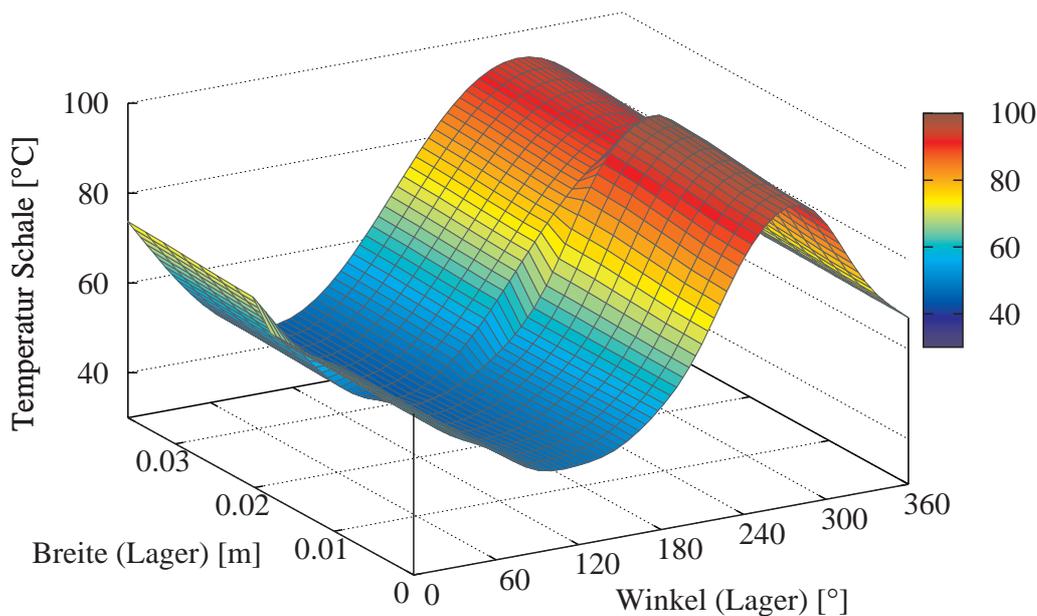
| $n$                | $T_{II_{max}} [^{\circ}C]$ | $T_{II_{mean}} [^{\circ}C]$ | $T_{I_{mean}} [^{\circ}C]$ | $T_{m_{mean}} [^{\circ}C]$ | Anmerkungen                               |
|--------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|---|
| 3                  | 94.13                      | 68.34                       | 90.73                      | 78.73                      | $T_{II_{max}}$ am Rand, unsym. Verlauf    |
| 5                  | 97.74                      | 67.11                       | 91.62                      | 78.09                      | $T_{II_{max}}$ am Rand, unsym. Verlauf    |
| 10                 | 97.6                       | 67.1                        | 91.62                      | 78.09                      | $T_{II_{max}}$ am Rand, unsym. Verlauf    |
| 20                 | 99.54                      | 67.13                       | 92.22                      | 78.26                      | $T_{II_{max}}$ in der Mitte, sym. Verlauf |
| 40                 | 99.04                      | 67.14                       | 92.23                      | 78.29                      | $T_{II_{max}}$ in der Mitte, sym. Verlauf |
| 10 $\widehat{MPF}$ | 98.84                      | 67.11                       | 92.20                      | 78.24                      | $T_{II_{max}}$ in der Mitte, sym. Verlauf |

Bereits ab der Verwendung von nur 5 Eigenvektoren zur Approximation des Temperaturverlaufs verändern sich die Ergebnisse der skalaren Parameter nur noch marginal. Allerdings besitzt der Temperaturverlauf erst ab ca. 20 Eigenformen den aufgrund der Symmetrie der Last zu erwartenden symmetrischen Verlauf mit einem definierten Maximum in der Mitte der Lagerschale. In Abb. (6-6) ist der Unterschied innerhalb der Temperaturverläufe zwischen drei und 40 Eigenformen dargestellt. Die Unsymmetrie bei Verwendung unzureichender Eigenformen führt bei integraler Betrachtung der Deformation nicht zu Abweichungen. Wird jedoch der Temperaturverlauf als Grundlage einer gekoppelten ther-

momechanischen Simulation verwendet, können die Effekte zu unsymmetrischen Spaltfunktionen führen, die den Druckaufbau und das rotordynamische Verhalten beeinflussen. Werden die in Kapitel (6.1.1) vorgestellten Algorithmen zur Selektion der dominanten Eigenformen für die Anwendung auf das thermische Feldproblem übertragen, ergibt sich analog folgender Zusammenhang

$$\widehat{MPF}_{t_i} = \frac{|\mathbf{q}_{t_i}|}{\sum_i |\mathbf{q}_{t_i}|} \cdot 100\% \quad . \quad (6-5)$$

Als Ausgangspunkt für die Bestimmung der modalen Beteiligungsfaktoren kann für das thermische Problem die Temperatur der Lagerschale als konstant definiert werden. Die sich so ergebenden Wärmeströme sind unter der Bedingung, dass die mittlere vorgegebene Temperatur nicht wesentlich von der zu erwartenden Temperatur abweicht, geeignet, um eine Auswahl der dominanten thermischen Eigenformen zu treffen. Aufgrund der im Vergleich zur Elastizität geringen Lokalität der thermischen Belastung sind die dominanten Eigenformen zur Beschreibung des Temperaturverlaufs von niedriger Ordnung und liegen eng beieinander.



**Abbildung 6-6:** Temperaturverlauf - Lagerbock (3 Moden vs. 40 Moden)

Aus den berechneten lokalen Temperaturverläufen können unter Verwendung der Transformationsmatrix der Master-Slave-Reduktion die Temperaturverläufe des vollständigen Bauteils ermittelt werden, welche in Abb. (6-7) dargestellt sind.

Die am unteren Ende des Lagerbocks geforderte thermische Randbedingung, der Identität der Temperatur mit der Umgebungstemperatur, wird eingehalten und bestimmt die thermischen Flüsse im gesamten Bauteil. Aufgrund der definierten Konvektion ist die Temperaturerhöhung im Bereich des Gleitlagers dominant und verringert sich zu den Außenflächen.

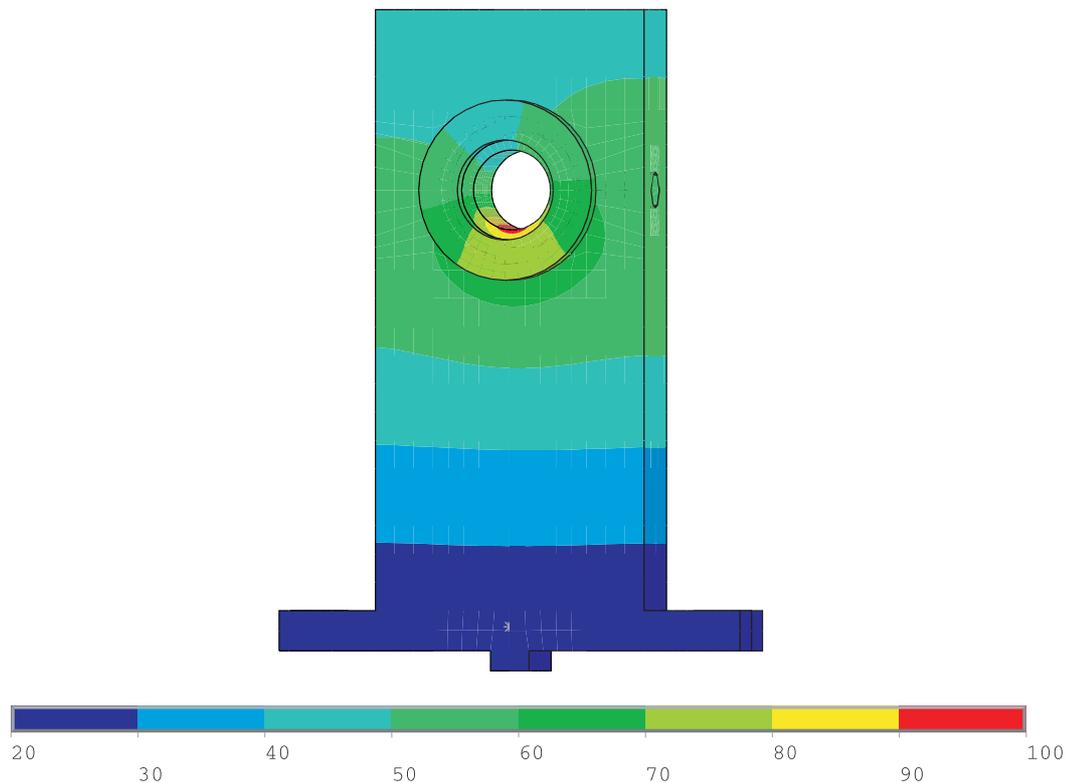


Abbildung 6-7: Expandierter Temperaturverlauf - Lagerbock

Zudem können die Drehrichtung der Welle und die Lage der Belastungszone erfasst werden, welche in Übereinstimmung mit den definierten Lasten und Modellparametern sind. Analoges Vorgehen erlaubt auch die Expansion der mechanischen Deformationen und die Berechnung resultierender Spannungen für jeden Schritt der Zeitintegration.

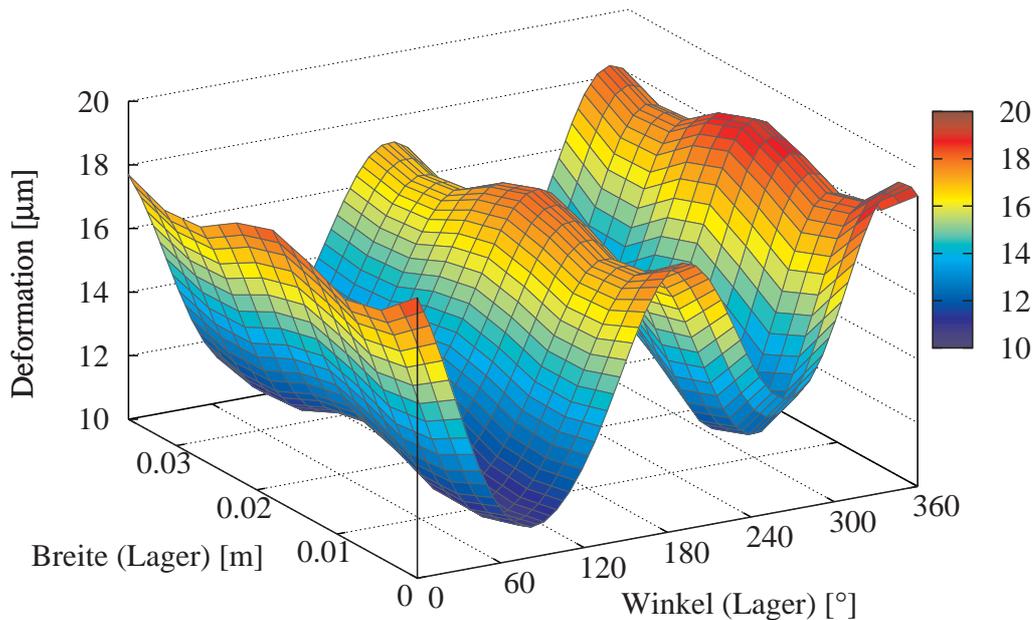
### 6.3 Berücksichtigung thermischer und mechanischer Deformationen des Lagerbocks

Im Rahmen der vorangegangenen Untersuchungen wurde konsequent der Einfluss des Temperaturverlaufs in der Lagerschale auf die Deformationen, welche sich stark auf den Druckaufbau auswirken, lediglich in Form einer Näherung berücksichtigt. Diese geht von einer freien kreisförmigen Struktur aus, welche sich unter Wirkung der mittleren Temperatur der Lagerschale verformt. Unter dieser Voraussetzung gilt in guter Näherung

$$\Delta r_{II} = \alpha_{II} (T_{II_{mean}} - T_{II_0}) r_{II} \quad . \quad (6-6)$$

Findet das vorgestellte Verfahren zur Einbindung thermomechanischer Körper in die Mehrkörpersimulation Anwendung, kann direkt die resultierende thermische Deformation aufgrund der lokalen Temperatur bestimmt werden. Bedingt durch den modalen Ansatz wird die Abbildungsgüte der Deformation von den verwendeten Eigenformen determiniert. In Abb. (6-8) ist die resultierende Deformation der Lagerschale unter Verwendung von 100

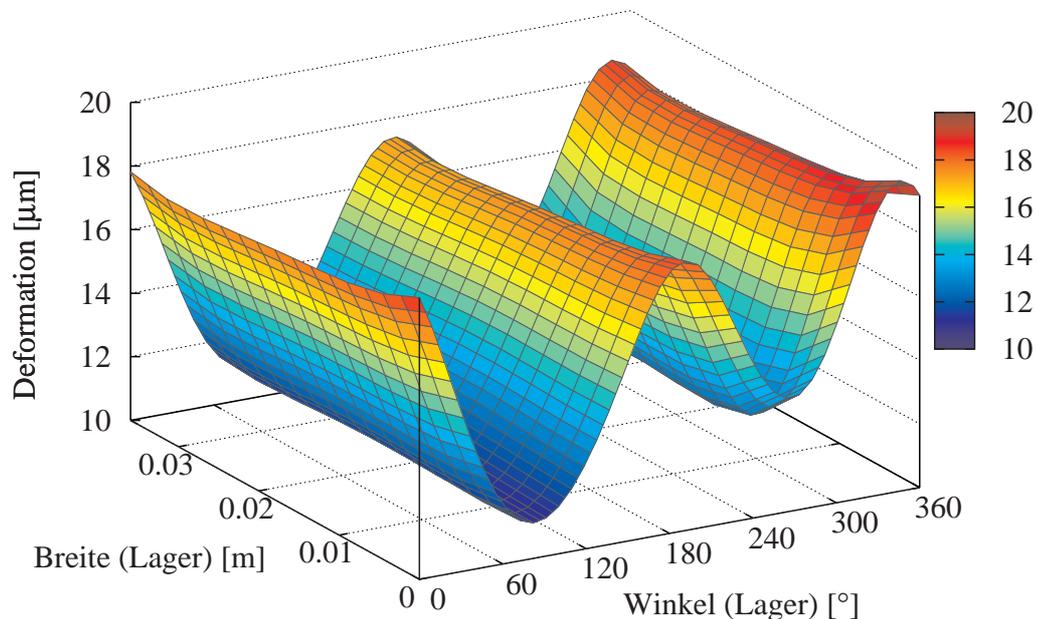
Eigenformen dargestellt, welche sogar für die lokale Wirkung der mechanischen Lasten eine konvergente Lösung ermöglichen. Vergleicht man diese mit der zu erwartenden Deformation aufgrund des Temperaturverlaufs aus Abb. (6-6), ergeben sich unphysikalische künstliche Abweichung in Breitenrichtung. Die fehlerhafte Beschreibung ist durch die verwendeten Eigenformen begründet, welche für die Abbildung mechanischer Deformationen konzipiert sind. Thermische Deformationen (auch globale) sind damit per se nur durch viele mechanische Eigenvektoren mit teilweise sehr hohen Eigenfrequenzen beschreibbar.



**Abbildung 6-8:** Thermomechanische Deformation mit 100 mechanischen Moden - Lagerbock

An dieser Stelle können allerdings die in Kapitel (2.3.3) zu diesem Zweck bereits eingeführten Frequency-Response-Moden Anwendung finden. Unter Kenntnis der aus der Temperaturverteilung resultierenden mechanischen Lasten, können zu den für die Abbildung der mechanischen Deformationen notwendigen Eigenvektoren zusätzliche Eigenvektoren konstruiert werden, die explizit die thermischen Deformationen beschreiben. Dies könnte für jeden einzelnen thermischen Zustand erfolgen, wodurch sich allerdings die Notwendigkeit einer Iteration zwischen Druckaufbau, Temperaturverlauf und thermischer Deformation ergeben würde. Um dies zu vermeiden und eine ganzheitliche Einbindung der thermomechanischen Körper in die Mehrkörpersimulation zu gewährleisten, können die thermischen Eigenformen als Ausgangspunkt für die Bestimmung der resultierenden mechanischen Lasten Verwendung finden. Unter der Prämisse, dass sämtliche thermischen Zustände in guter Näherung durch die verwendeten thermischen Eigenformen abgebildet werden, beschreiben die resultierenden mechanischen Kraftvektoren durch Superposition sämtliche potentiellen Lastkollektive für das mechanische Feldproblem. Diese normierten Lasten können zur Verwendung als FRMs genutzt werden und ermöglichen durch nur wenige Eigenformen eine adäquate Beschreibung der thermischen Deformationen (siehe Abb. (6-9)). Daraus resultie-

rend ergeben sich Abweichungen des maximalen Drucks, welche in Abb. (6-10) dargestellt sind.

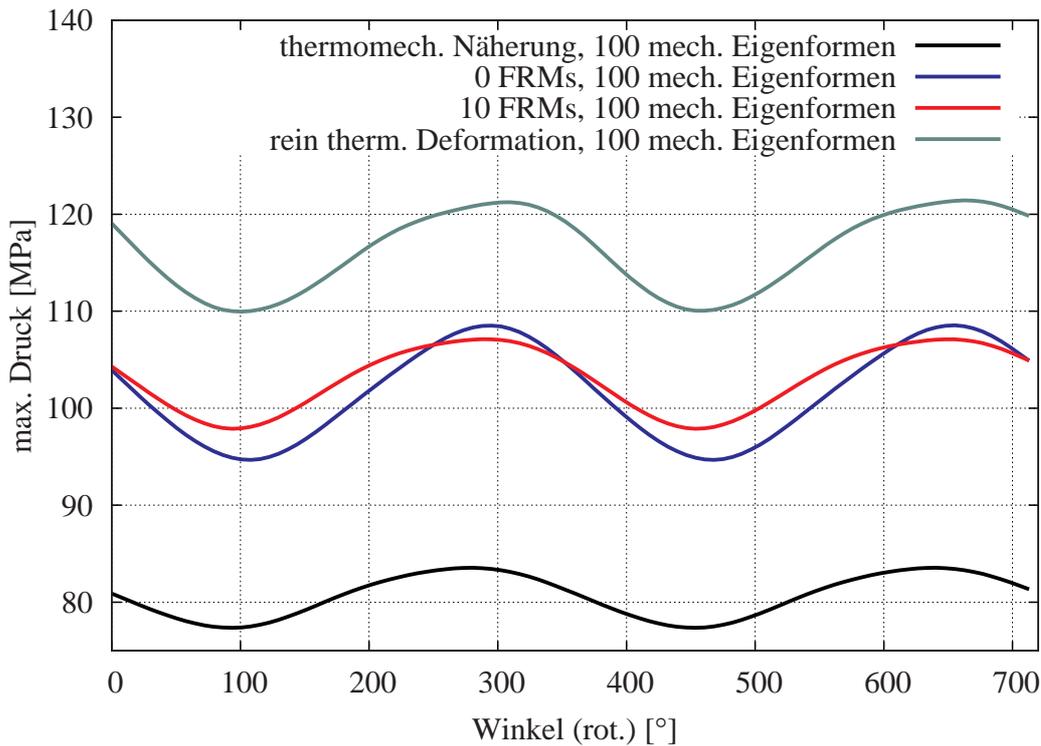


**Abbildung 6-9:** Thermomechanische Deformation mit 50 mechanischen Moden und 10 FRMs - Lagerbock

Im Vergleich zur Deformation der Lagerschale unter Verwendung der Näherung Gl. (6-6) (siehe Abb. (6-2)) ergeben sich unter vollständiger Einbeziehung der thermischen Lasten zunächst im Mittel vergleichbare Deformationen. Die Näherung der allseitigen gleichförmigen Aufweitung trifft jedoch nicht zu, vielmehr ergibt sich aufgrund der thermischen Belastungen und der Struktur des Lagerbocks eine Ovalisierung der Lagerschale. Im Bereich des Druckaufbaus sind die Deformationen minimal, was einen Anstieg des maximalen Drucks im Vergleich zur thermomechanischen Näherung zur Folge hat (siehe Abb. (6-10)). Bei detaillierter Untersuchung kann neben der großen thermischen Deformation auch die lokale Deformation aufgrund des wirkenden Drucks erkannt werden, ohne welche die berechneten maximalen Drücke bei rein thermischer Deformation deutlich überschätzt werden.

## 6.4 Berücksichtigung der thermomechanischen Eigenschaften der Welle

Die vorliegenden Simulationen zum thermischen, mechanischen und gekoppelten thermomechanischen Verhalten des Lagerbocks unter den definierten Modellparametern können nicht ohne Berücksichtigung der entsprechenden Eigenschaften der Welle realisiert werden. Es wurde daher konsequent vorausgesetzt, dass die modale Reduktion der Welle keinen zusätzlichen Einfluss auf die Simulationen ausübt. Zu diesem Zweck wurden analog zum



**Abbildung 6-10:** Einfluss der thermischen Deformation auf den maximalen Druck - Lagerbock

Lagerbock Betrachtungen zur Auswahl der beschreibenden mechanischen und thermischen Eigenformen getroffen.

Aufgrund der Abbildung der Welle als Balkenmodell ist keine Master-Slave-Reduktion auf etwaige Hauptfreiheitsgrade notwendig, da die dominanten Eigenformen gut identifiziert werden können. Als Ausgangspunkt zur Selektion der maßgeblichen Eigenformen für die modale Reduktion wurden die aus der über den Umfang summierten Druckverteilung gewonnenen Kräfte und die analog bestimmten Wärmeströme an der Stelle des Gleitlagers verwendet. Für die Abbildung der konvergenten mechanischen Eigenschaften der Welle genügten die ersten 20 Eigenvektoren, welche die Biegung um beide Achsen beschreiben. Für die Temperaturverteilung ergaben sich erst ab der Verwendung von 25 thermischen Eigenvektoren keine Veränderungen mehr. Die vergleichsweise hohe Anzahl an thermischen Eigenformen war notwendig, da das entsprechende Stabelement zum Überschwingen neigt. Dies führte zu hohen Abweichungen der Temperatur im Bereich außerhalb der Lagerung und daraus resultierend zu differierenden konvektiven Wärmeströmen.

Für die Beschreibung der thermischen Deformation gilt in erster Näherung die Beschreibung der Welle als freier Kreiszyylinder analog Gl. (6-6). Für schnell drehende Rotoren ergibt sich aufgrund der Fliehkraftwirkung ein zusätzlicher Anteil. Die Superposition beider Effekte bewirkt eine Veränderung des Wellenradius in der Form

$$\Delta r_I = \alpha_I (T_{I_{mean}} - T_{I_0}) r_I + \rho_I \Omega_I^2 r_I^3 (1 - \nu_I) \frac{1}{16 E_I} \quad , \quad (6-7)$$

welche sich zusätzlich zur Deformation der Welle und der Lagerschale auf das Lagerspiel und damit den Druckaufbau auswirkt.

## 7 Anwendungsbeispiel Kurbeltrieb

Als weiteres Berechnungsbeispiel soll in diesem Kapitel das Modell eines Kurbeltriebs untersucht werden. Aufgrund der hochdynamischen Belastung der Radialgleitlager und der dominanten Wirkung der Massenkräfte ist das System für eine Untersuchung im Rahmen einer Mehrkörpersimulation unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten aus der Gleitlagerung prädestiniert.

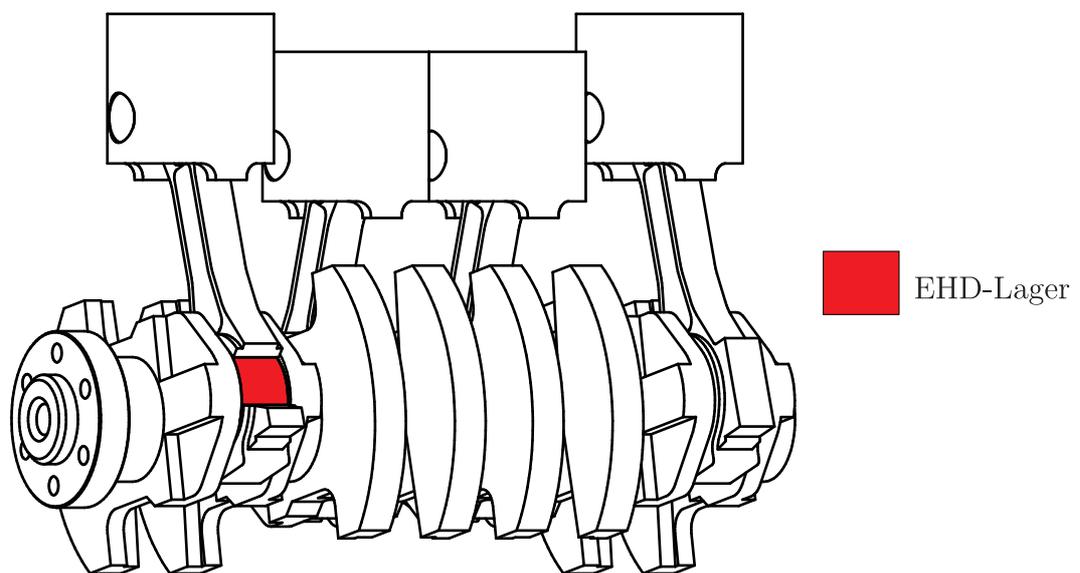


Abbildung 7-1: Modell - Kurbeltrieb

Für die Simulation wird das Modell des Kurbeltriebs eines Vierzylinder-Dieselmotors mit zwei Liter Hubraum verwendet. Die maximale Leistung wird bei einer Drehzahl von  $4000\text{min}^{-1}$  erreicht, was unter Vollastbedingungen einen der kritischen Betriebspunkte des Motors darstellt und deshalb Gegenstand der Untersuchung sein soll. Das Mehrkörpermodell besteht aus der Kurbelwelle sowie den vier Pleueln und Pleuellagerungen, welche zunächst als Starrkörperelemente modelliert werden. In einem weiteren Schritt soll ein Pleuel als deformierbarer Körper abgebildet werden, um die Auswirkungen auf die hydrodynamischen Eigenschaften untersuchen zu können.

Die Abbildung der Lagerung kann mit den vorgestellten Algorithmen in verschiedener Modellierungstiefe ausgeführt werden. Für die folgenden Untersuchungen soll der Einfluss der Temperatur auf die Deformation des elastischen Körpers nur über die in Gl. (6-6) definierte Näherung berücksichtigt werden. Der definierte Lastfall stellt einen thermisch stationären Zustand dar, wodurch sich lediglich eine konstante thermische Deformation ergibt, die im Vergleich zu den dynamischen Deformationen aufgrund der mechanischen Lasten nur geringe lokale Unterschiede aufweist. Zudem stellen die thermischen Eigenschaften des Systems

und die Wechselwirkungen mit weiteren Anbauteilen sowie eine konsistente Definition der Systemgrenzen in diesem Fall einen erheblichen Mehraufwand dar, der mit der momentan zur Verfügung stehenden Rechnerleistung einen drastischen Anstieg der Simulationszeit zur Folge hat. Prinzipiell sind allerdings die vorgestellten Algorithmen zur Berücksichtigung der Auswirkungen thermischer Deformationen auch auf dieses System übertragbar, wodurch für weiterführende Arbeiten die Auswirkungen auf das Kaltstartverhalten, die Durchwärmung bis hin zum thermisch stationären Zustand oder die transiente Wirkung von Lastwechseln untersucht werden können.

Insgesamt besitzt das System zwölf Gleitlager. Die detaillierte EHD-Untersuchung soll sich allerdings auf ein großes Pleuelauge (siehe Abb. (7-1)) beschränken. Die Lager in den weiteren großen Pleuelaugen und den Grundlagern, werden als HD-Gleitlagerelemente abgebildet. In einem ersten Schritt wird die Schiefstellung der Kurbelwelle verhindert, wodurch sich mit Ausnahme des EHD-Lagers konsequent parallele Schmierpalte ausbilden, welche aufgrund der Symmetrie der resultierenden Systemmatrix bei Diskretisierung der Reynoldsgleichung numerisch vorteilhaft gelöst werden können. In einem weiteren Schritt wird die Schiefstellung der Kurbelwelle zugelassen, wodurch sich unsymmetrische Schmierpalte ergeben. Die Lagerstellen in den kleinen Pleuelaugen werden durch lineare Feder-Dämpfer-Elemente idealisiert. Die Wirkung der Gaskräfte siehe Abb. (7-2) wird transient entsprechend der Zündreihenfolge auf die Kolben aufgeprägt und führt zu einer potentiellen Beschleunigung des Systems. Um die Drehzahl konstant zu halten wurde ein Verbraucher modelliert, der über ein idealisiertes Zweimassenschwungrad mit der Kurbelwelle verbunden ist.

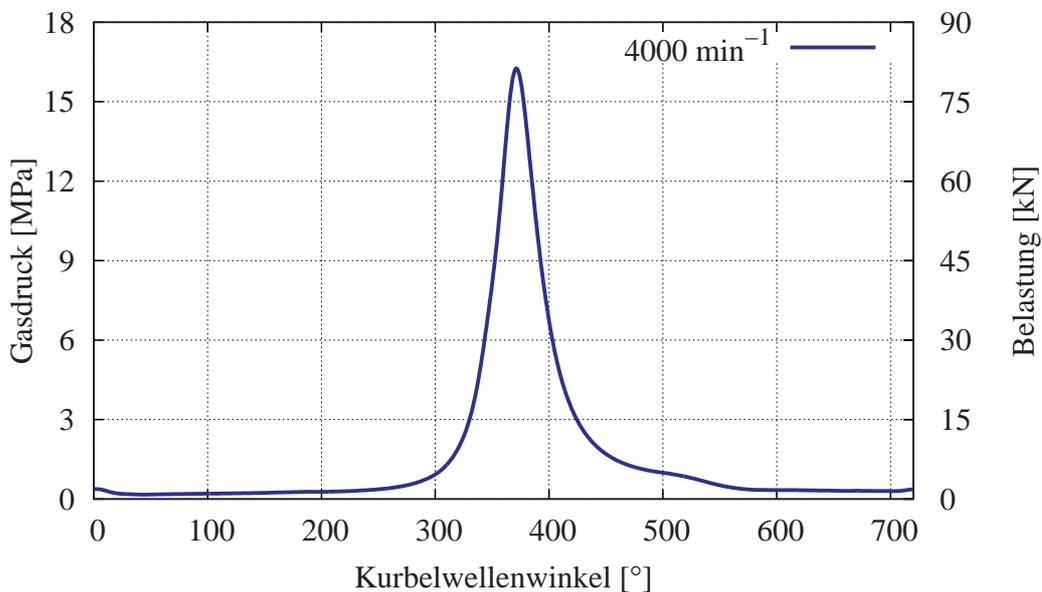


Abbildung 7-2: Gasdruck bzw. Belastung - Kurbeltrieb

Die dominanten Eigenschaften des Pleuels und der Lagerung im großen Pleuelauge sind in Abb. (7-3) zusammengefasst. Die Versorgung des Lagers erfolgt durch eine Bohrung in der Kurbelwelle, welche aus den Grundlagern gespeist wird. Bedingt durch die Interaktion der Lager ergibt sich ein mit der Kurbelwellenbewegung variierender Zuführdruck, welcher im Folgenden als mittlerer Druck idealisiert wird. Die Darstellung der Lage der

Ölzuführung bezieht sich auf den Zünd-OT<sup>31</sup>. Eine Auflistung der weiteren Parameter des Mehrkörpermodells kann Kapitel (A.5) entnommen werden.

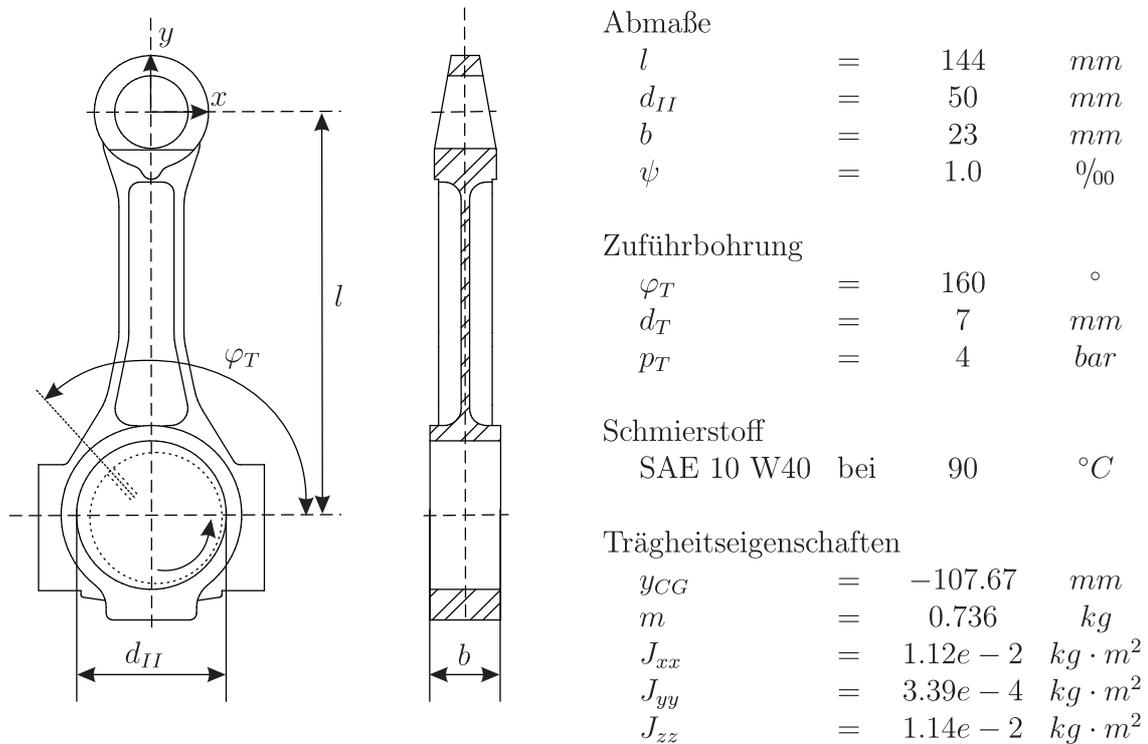


Abbildung 7-3: Parameter Pleuellager

Bedingt durch die hohen Gradienten des Belastungsverlaufs ist das Auftreten von Mischreibung im Bereich der Lagerränder sehr groß. Um diesem Verhalten entgegenzuwirken, wird die Pleuellagerung zur Verringerung der Belastung im Bereich der Pleuellagerung ballig ausgeführt. Die Beschreibung der Balligkeit (siehe Abb. (7-4)) kann unter anderem durch eine kreisförmige Konturierung in der Form

$$r_{sph} = \frac{1}{8} \frac{b}{l_{sph}} + \frac{1}{2} l_{sph} \quad (7-1)$$

beschrieben werden [Bob08]. Daraus resultierend kann eine modifizierte Spaltfunktion

$$h(\varphi, y)_{sph} = h(\varphi) + r_{sph} - \sqrt{r_{sph}^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2} \quad (7-2)$$

abgeleitet werden. Weiterführende Auswirkungen auf die Spaltänderungsfunktion besitzt dieser additive Term nicht.

<sup>31</sup>oberer Totpunkt

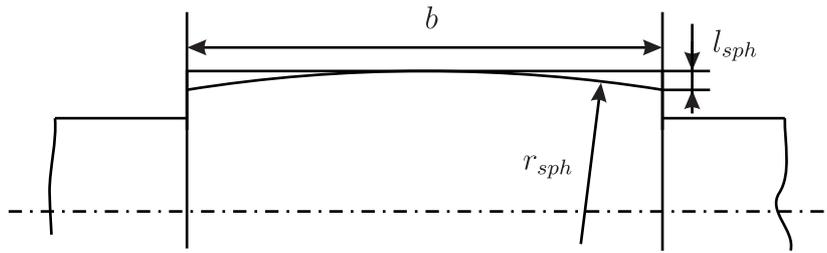


Abbildung 7-4: Modellierung Balligkeit

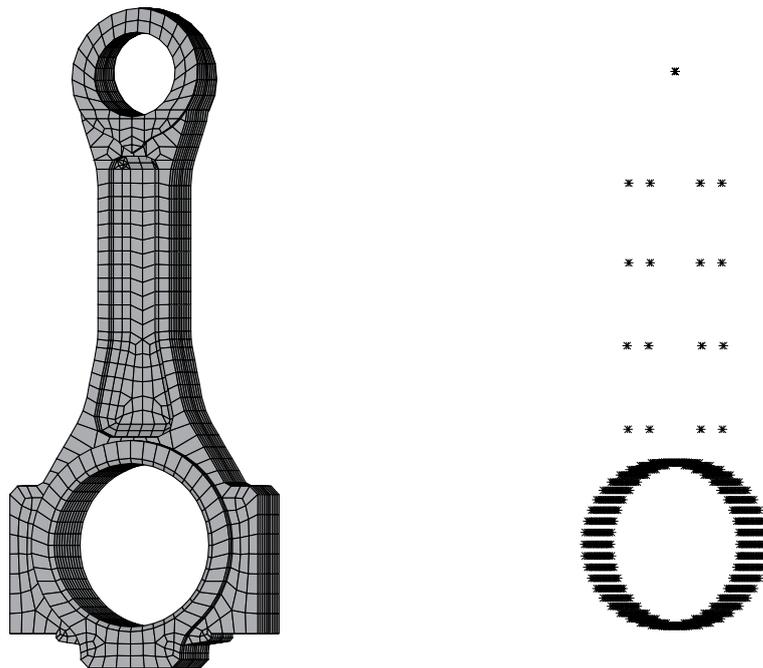


Abbildung 7-5: Modell - Pleuel (FE-Modell - links, MKS-Modell - rechts)

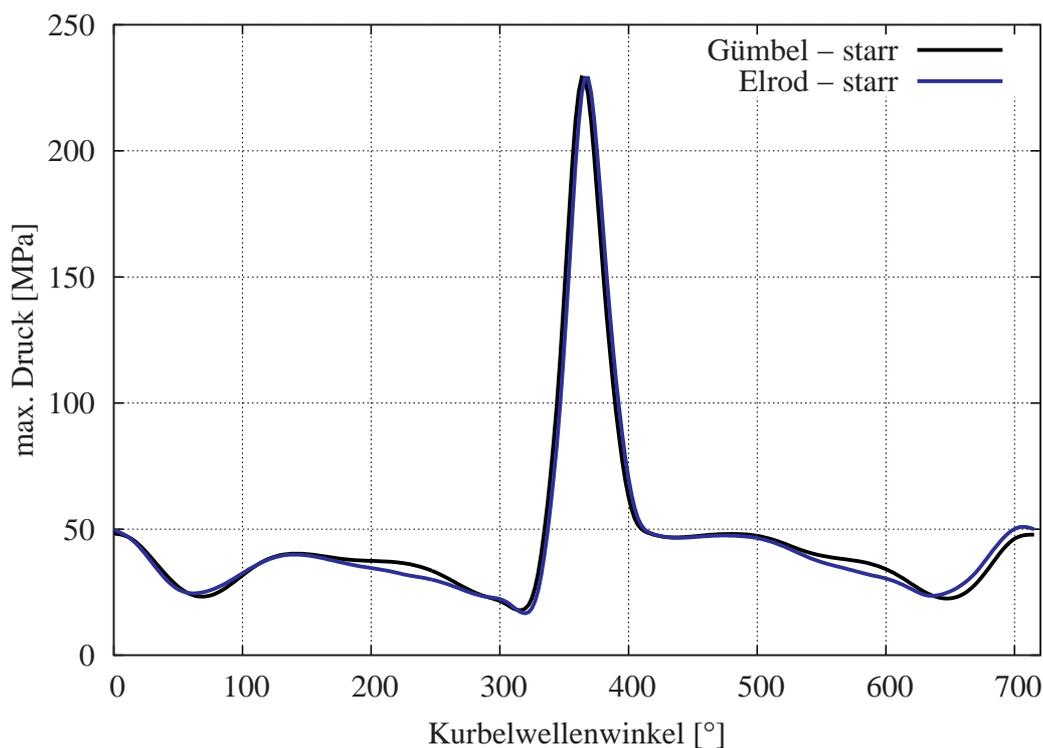
Zur Einbindung der elastischen Eigenschaften des Pleuels in die Mehrkörpersimulation wird dieses zunächst als FE-Modell abgebildet. Bereits an dieser Stelle muss die spätere Diskretisierung für die Reynoldsgleichung berücksichtigt werden. Anschließend erfolgt eine Systemreduktion (siehe Kapitel (2.3.2)) auf ausgewählte Master-Knoten (siehe Abb. (7-5) rechts), welche die Deformation beschreiben sollen. Um den potentiellen Einfluss der Reduktion zu untersuchen, finden im Rahmen der Simulation des Kurbeltriebs verschiedene Reduktionsmethoden Anwendung auf das Pleuel. Die resultierenden Ergebnisse werden im Folgenden vorgestellt. Die Wahl der Master-Knoten ergibt sich zum einen aus der Notwendigkeit die lokale Deformation der Lagerschale detailliert abzubilden, zum anderen aus dem Zwang die globale Deformation ebenfalls korrekt zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck werden alle  $44 \times 11$  FE-Knoten, die sich auf der Lagerschale befinden sowie 17 Knoten, welche die globale Deformation des Pleuelstegs beschreiben, selektiert. Darauf aufbauend wird eine modale Reduktion des Pleuels vorgenommen. Davon ausgehend können die Eigenformen

selektiert werden, welche für die Simulation und die Beschreibung der EHD-Modellierung notwendig sind.

Eine Diskretisierung der Reynoldsgleichung mit  $44 \times 11$  Stützstellen führt aufgrund der unzureichenden Abbildung der Kavitationsränder und des maximalen Drucks zu numerischen Sprüngen innerhalb der Zeitintegration und zu ungenauen Ergebnissen. Da eine feinere Diskretisierung der Lagerschale aber mit einer deutlichen Erhöhung der Anzahl der Master-Knoten und darauf aufbauend auch einer höheren Anzahl an Eigenformen zur Beschreibung der lokalen Elastizität einhergeht, erfolgt stattdessen innerhalb der Gleitlagersimulation eine Interpolation der Spalt- und Spaltänderungsfunktion auf eine Diskretisierung mit  $88 \times 21$  Stützstellen, um eine detailliertere Abbildung der hydrodynamischen Eigenschaften zu ermöglichen.

## 7.1 Kurbeltrieb starr - Einfluss Kavitation

Zunächst soll der Einfluss des erweiterten Kavitationsalgorithmus nach Elrod auf die hydrodynamischen Eigenschaften des Kurbeltriebs unter Wirkung der definierten dynamischen Lasten und der resultierenden Massenkräfte untersucht werden.



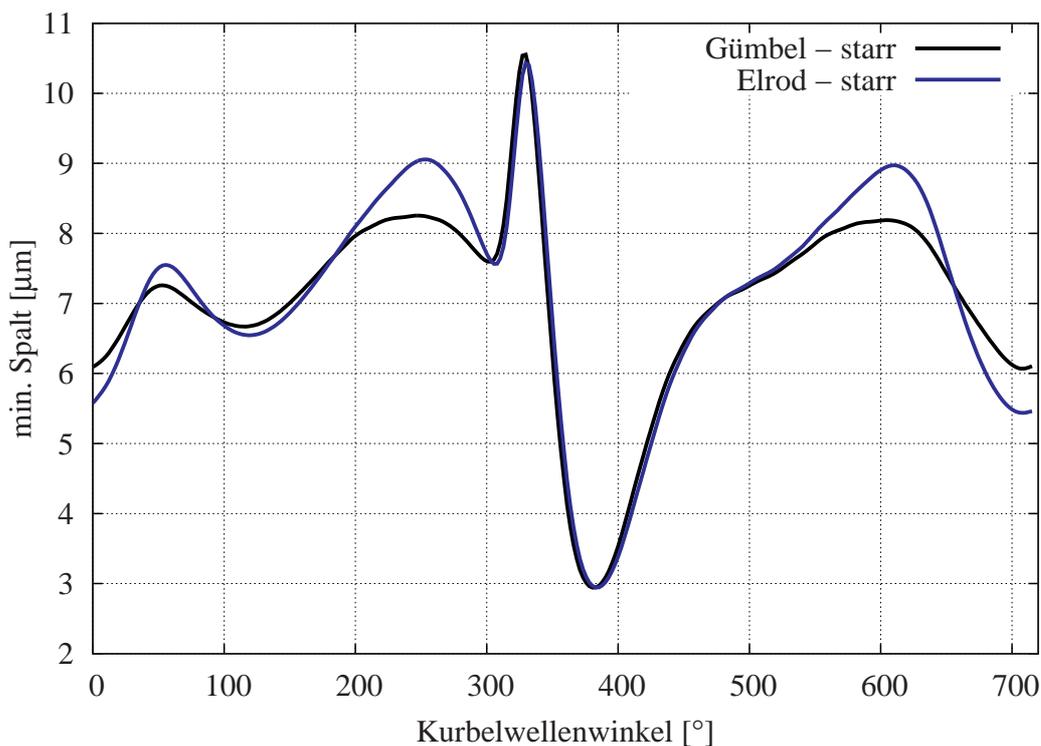
**Abbildung 7-6:** Einfluss des Kavitationsmodells auf den maximalen Druck - Kurbeltrieb

In Abb. (7-6) ist der Verlauf des maximalen Drucks über einen Belastungszyklus dargestellt. Die Verläufe der beiden Kurven sind nahezu identisch. Während des Zünd-OTs werden im starren Fall übereinstimmend  $p_h = 230 \text{ MPa}$  erreicht, in allen weiteren Bereichen liegt die Belastung unterhalb von  $p_h = 50 \text{ MPa}$ . Lediglich im Bereich  $190 - 250^\circ$  und  $550 - 620^\circ$  Kurbelwellenwinkel weist die Simulation ohne masserhaltende Kavitation einen höheren

maximalen Druck auf, während dieser im Bereich  $620 - 720^\circ$  Kurbelwellenwinkel geringer berechnet wird. Die Unterschiede sind jedoch nur marginal.

Ein analoges Verhalten ist bei der Untersuchung des kleinsten Schmierpalts (siehe Abb. (7-7)) zu erkennen. Die Unterschiede sind vorrangig im Bereich großer Spaltweiten zu erkennen, welche allerdings nicht maßgeblich für die Auslegung des Systems sind.

Die Belastung des Lagers ist außerhalb des Zünd-OTs primär durch die Schwenkbewegung des Pleuels determiniert. In diesen gering belasteten Bereichen wirken sich Veränderungen der Spaltfüllung und der Einfluss der Kavitation auf den Druckaufbau im gesamten Lager aus. Im Zünd-OT dominieren die äußeren Lasten. Der Einfluss der Poiseuille-Strömung, resultierend aus dem kleinen Schmierpalt, und der Einfluss der Verdrängungs-Strömung, aufgrund der Spaltänderung, bestimmen die hydrodynamischen Eigenschaften, wodurch kavitative Effekte der Couette- und der Verdrängungs-Strömung von untergeordneter Bedeutung sind und keinen wesentlichen Beitrag leisten.



**Abbildung 7-7:** Einfluss des Kavitationsmodells auf den maximalen Druck - Kurbeltrieb

Nichtsdestotrotz existieren auch im Bereich der Kurbeltriebsimulation Anwendungen, in denen die Verwendung erweiterter Kavitationsmodelle notwendig ist. Die Aussage über den mittleren Spaltfüllungsgrad aus Abb. (7-8) ermöglicht eine genauere Vorhersage des Ölbedarfs des Lagers und bietet dadurch Optimierungsansätze.

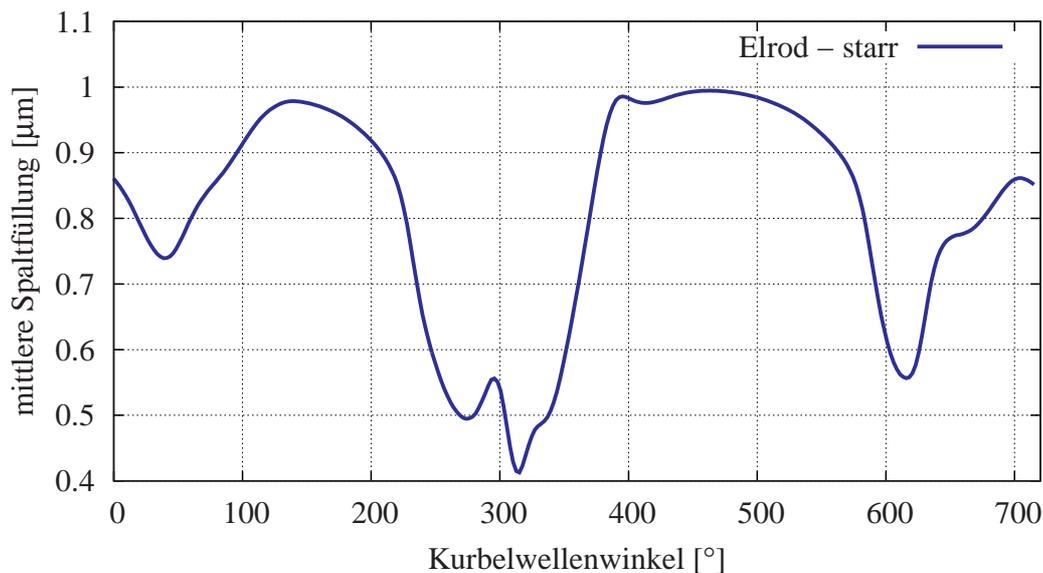


Abbildung 7-8: Mittlere Spaltfüllung des Pleuellagers - Kurbeltrieb

Ferner sind thermische und gekoppelte thermomechanische Simulationen aufgrund der Beschreibung der resultierenden Wärmeströme auf Basis des lokalen Spaltfüllungsgrads nur mit entsprechenden Algorithmen möglich.

## 7.2 Kurbeltrieb elastisch

Im vorangehenden Kapitel konnte gezeigt werden, dass beim Modell des Kurbeltriebs der Einfluss der masseerhaltenden Kavitationsalgorithmen unter den definierten Bedingungen vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grund wurden die im Folgenden vorgestellten Simulationen unter Verwendung des Kavitationsalgorithmus nach Gümbel durchgeführt.

Für die Beschreibung der Elastizität wurden die ersten 100 Eigenformen der auf die Master-Knoten reduzierten Struktur verwendet. Aus diesen wurde mit der in Kapitel (6.1.1) beschriebenen Vorgehensweise 46 Eigenformen extrahiert. Die Simulationen zeigten allerdings zunächst nicht wie erwartet eine Reduktion des maximalen Drucks, sondern eine weitere Erhöhung. Nach Auswertung der elastischen Deformation konnte die Ursache in der zu geringen Anzahl an Eigenvektoren zur Beschreibung der lokalen Deformationseffekte bestimmt werden, welche invers zur Druckverteilung wirkten. Eine Erweiterung auf die ersten 200 Eigenformen und eine Extraktion von 74 Eigenvektoren zur Beschreibung der Deformationen zeigte nach iterativer Erhöhung ein konvergentes Verhalten der Lösung.

Die hydrodynamischen Ergebnisse der Simulationen zeigen bzgl. des maximalen Drucks eine konsequente Überschätzung durch die starre Simulation (vgl. Abb. (7-10)). Die Ursachen dafür sind zum einen im Bereich des Zünd-OTs die lokalen Deformationen (siehe Abb. (7-11)), welche eine Aufweitung des Druckberges und damit eine Verteilung der Last bewirken. Zum anderen kommt es durch die globale Deformation, welche ein Resultat der wirkenden Massenkräfte ist, während der gesamten Simulation zu einer ständig wechselnden Ovalisierung des Pleuelauges, welche für ausgewählte Punkte in Abb. (7-9) zusammengestellt wurde.

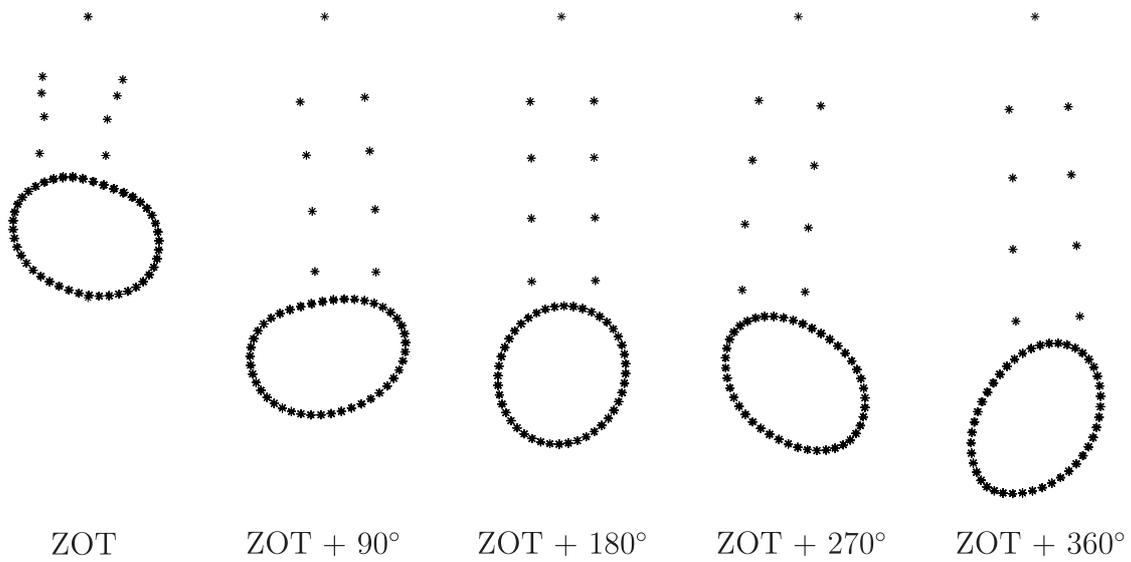


Abbildung 7-9: Deformation - Pleuel

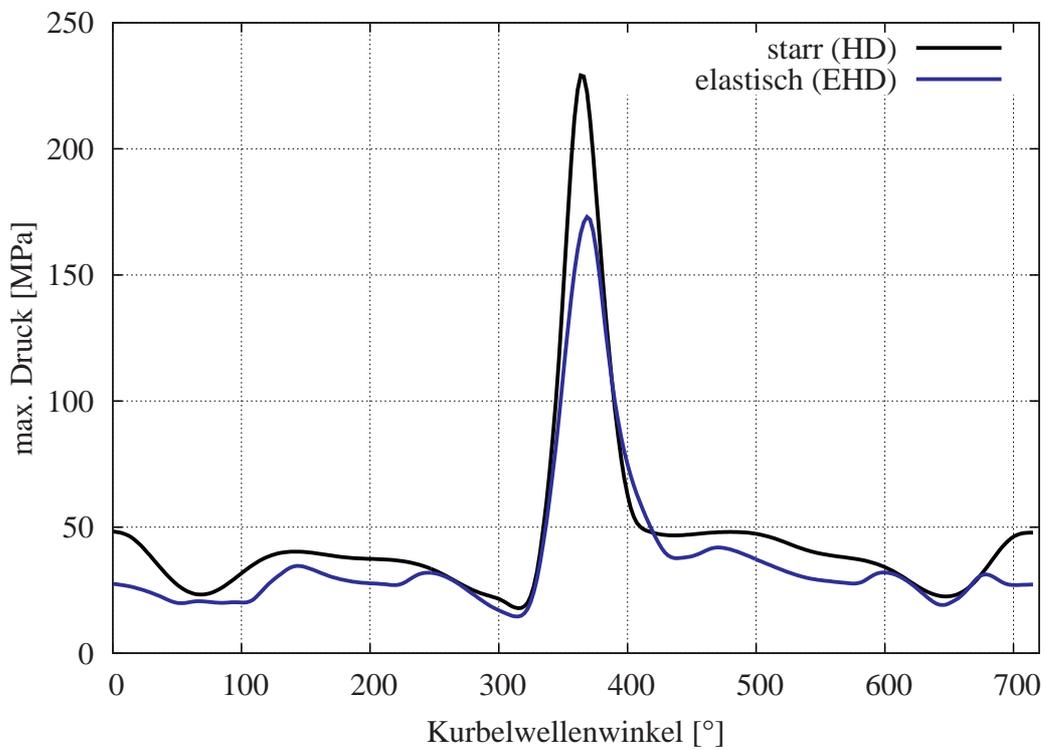
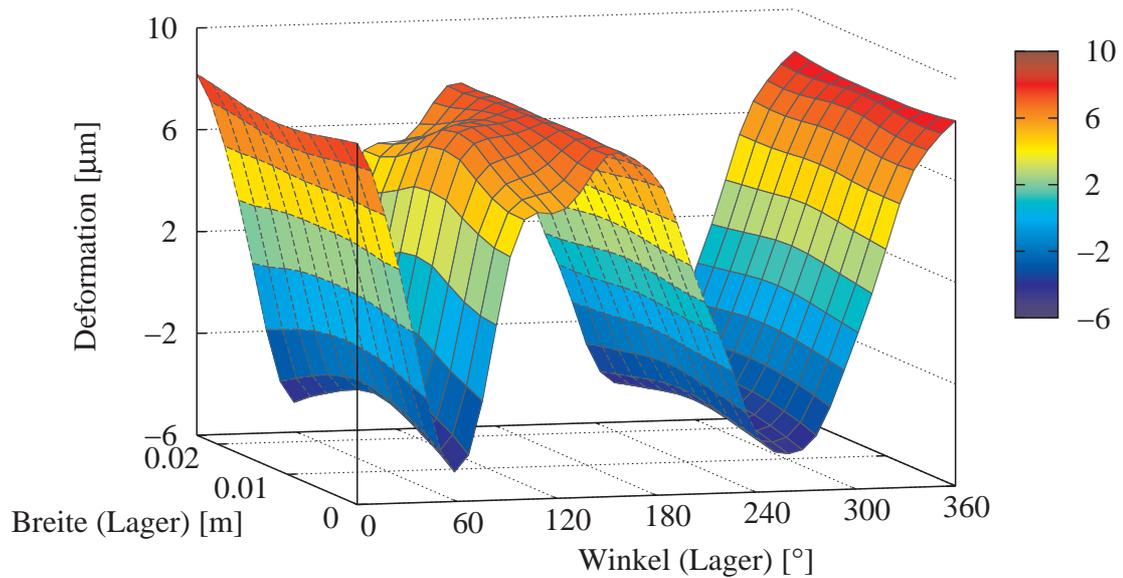


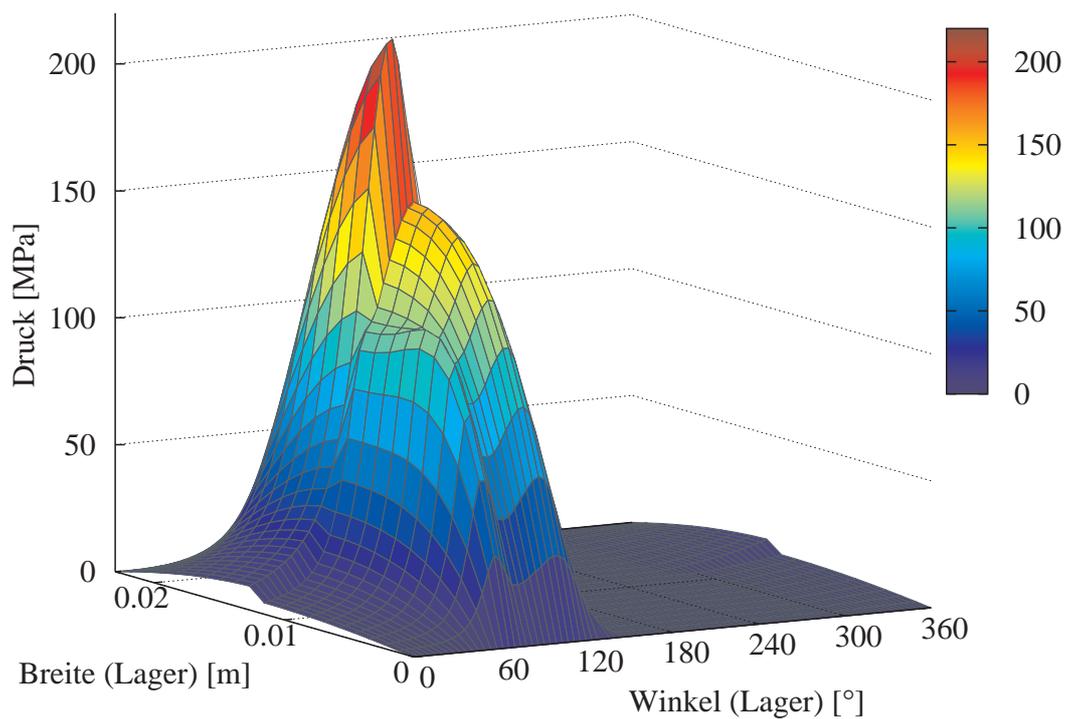
Abbildung 7-10: Einfluss der Elastizität auf den maximalen Druck - Kurbeltrieb



**Abbildung 7-11:** Elastische Deformation im Zündpunkt - Kurbeltrieb

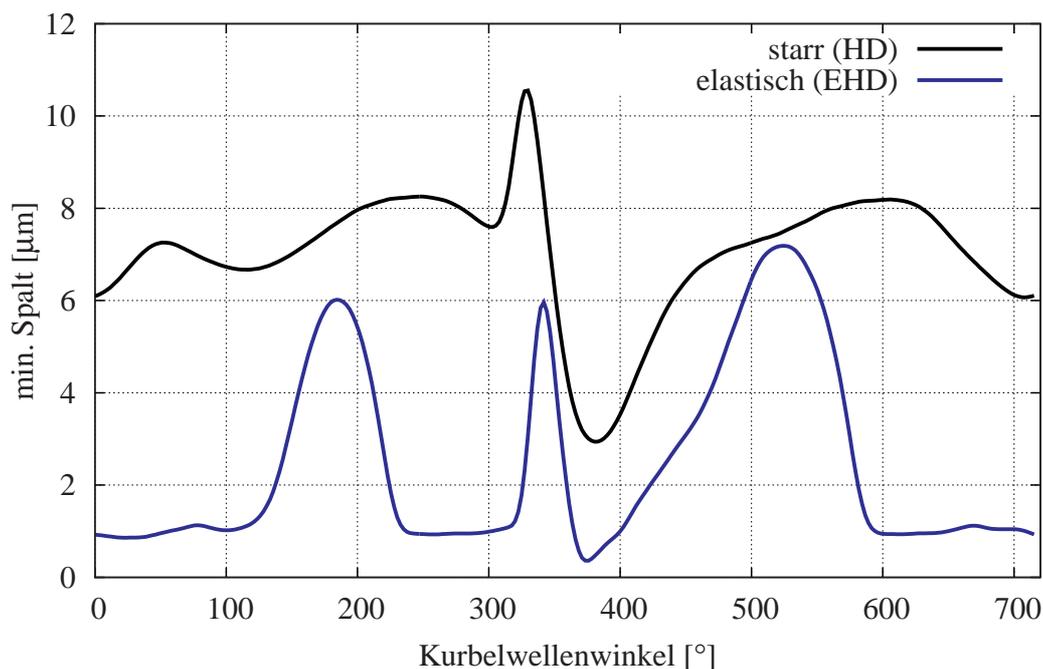
Speziell in der korrekten Berücksichtigung dieser Effekte liegt der Mehrwert der Einbindung der vorgestellten Algorithmen in Mehrkörperprogramme, da die sich aus der Bewegung ergebenden Kräfte ohne Vereinfachung und unter Wahrung der realen Lagerungsbedingungen berücksichtigt werden können. Vergleichbare Ergebnisse können unter Verwendung künstlich statisch bestimmt gelagerter Strukturen und analytisch genäherter Funktionale für die Massenkräfte nicht abgeleitet werden (vgl. [Bob08], [Rie95]).

Von Interesse ist auch die zu beobachtende Aufteilung des Druckbergs aus der starren Rechnung in zwei ineinander übergehende Druckberge, welche in der elastischen Simulation während des Zünd-OTs vorliegen (vgl. Abb. (7-12)). In Kombination mit der besseren Verteilung der Last in Breitenrichtung veranschaulicht dies die Wirkung der Deformation auf den Druckaufbau und zeigt die Ursache der Abminderung des maximalen Drucks bei unveränderter Tragkraft.



**Abbildung 7-12:** Einfluss der Elastizität auf den Druckverlauf im ZOT - Kurbeltrieb  
(starr - hinten, elastisch - vorn)

Zusätzlich zur Verringerung des Druckniveaus kann eine deutliche Verringerung des minimalen Schmierfilms beobachtet werden (siehe Abb. (7-13)). Diese ist nicht nur auf die lokalen Effekte der Deformationen aufgrund des hohen Drucks zurückzuführen, sondern vor allem auf die bereits angesprochenen Abweichungen zur Kreisform, welche den Druckaufbau durch die Poiseuille-Strömung aufgrund der Senkung des Gradienten der Spaltfunktion im Bereich der Ovalisierung und damit des kleinsten Spalts vermindert.



**Abbildung 7-13:** Einfluss der Elastizität auf den minimalen Schmierpalt - Kurbeltrieb

In weiten Bereichen der Simulation befinden sich die minimalen Spaltweiten unterhalb von  $2\mu\text{m}$ , wodurch neben der reinen Hydrodynamik auch Mischreibungszustände vorliegen, welche einen zusätzlichen Traganteil bewirken. Dieser ist allerdings bedingt durch die Balligkeit der Kurbelwelle im Bereich des Pleuellagers konsequent deutlich geringer ausgebildet als der hydrodynamische.

Als rotordynamisch relevantes Resultat der Simulationen kann die Wellenverlagerung innerhalb der Lagerschale untersucht werden, welche Rückwirkungen auf die globale Bewegung des Systems besitzt. In Abb. (7-14) ist die Verlagerung der Welle bzgl. des Mittelpunkts der deformierten Lagerschale in Koordinaten des Inertialsystems aufgetragen. Während die starre Simulation eine maximale relative Wellenverlagerung von 0.83 im Zünd-OT ergibt, zeigt die Berücksichtigung der Elastizität nahezu konsequent eine Überschreitung des starren Lagerspiels. Die größte Wellenverlagerung wird im Umkehrpunkt nach dem Zünd-OT festgestellt ( $530^\circ$  Kurbelwellenwinkel), welche fast vollständig aus der globalen Deformation des Pleuelstegs (Biegung und Streckung) und der Unrundheit der durch die Massenkräfte deformierten Lagerschale resultiert.

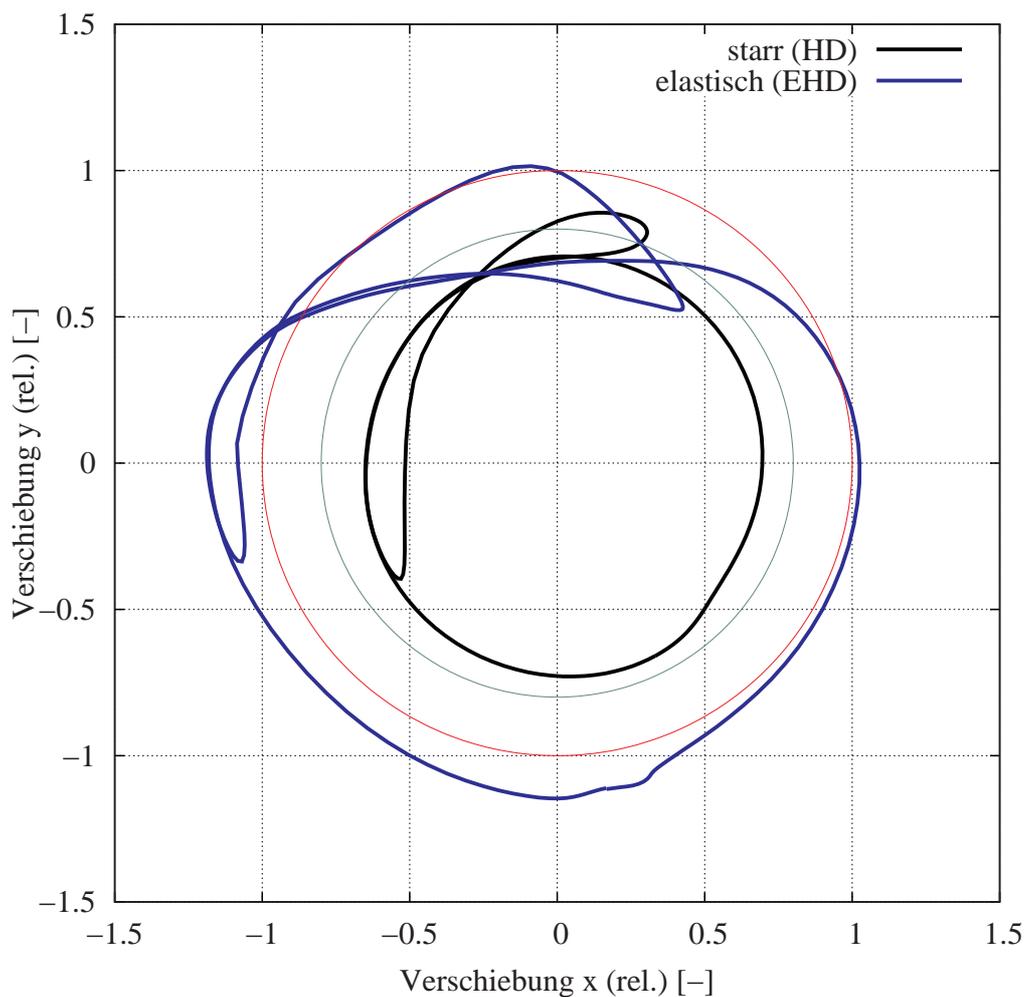


Abbildung 7-14: Einfluss der Elastizität auf den Orbit - Kurbeltrieb

### 7.2.1 Berücksichtigung der Schiefstellung der Kurbelwelle

Die bisher vorgestellten Ergebnisse basierten auf der Modellannahme einer nicht schief gestellten Kurbelwelle, wodurch die Interaktion der modellierten Gleitlager beschränkt war. Unter Berücksichtigung des rotatorischen Freiheitsgrads der Kurbelwelle um ihre Hoch- und Querachse ergeben sich zusätzlich Unsymmetrien in den Spaltfunktionen, was einen deutlichen numerischen Mehraufwand bedeutet. Die Simulationen zeigen mit den gewählten Parametern nur geringe Unterschiede im globalen Verhalten. Es existiert eine prinzipielle Verringerung des minimalen Schmierpalts als Resultat der Neigung der Welle und erhöhte Tendenzen zu Kantenträgern. Wird für diese Simulationen die Balligkeit der Welle nicht einbezogen, ergeben sich weitere Verringerungen des Schmierpalts, wodurch der Festkörpertraganteil zunehmend an Bedeutung gewinnt. Für einzelne Zeitpunkte ergeben sich Abweichungen im Druckverlauf, die allerdings keinen signifikanten Einfluss ausüben.

## 7.2.2 Einfluss der Master-Slave-Reduktion

Bei der Modellierung des Kurbeltriebs wurde das Pleuel mit den in Kapitel (2.3.2) vorgestellten Methoden auf die definierten Hauptfreiheitsgrade reduziert. Die Wahl der Master-Knoten wurde durch die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Lagerschale und die Forderung nach Abbildung der globalen Deformation definiert. Sämtliche präsentierten Ergebnisse für den elastischen Kurbeltrieb sind innerhalb geringer numerischer Abweichungen für alle vier Verfahren (Guyan, Craig-Bampton, IRS und SEREP) identisch. Dieses Verhalten konnte apriori nicht vorausgesetzt werden. Beim Vergleich der selektierten Eigenformen weisen zum einen die Eigenfrequenzen der Modellvarianten vor allem im hochfrequenten Bereich große Differenzen auf, zum zweiten ist die Abbildungsgüte der dynamischen Eigenschaften, welche z.B. durch den MAC<sup>32</sup>-Wert

$$MAC_{i,j} = \frac{\left( \Phi_{u_i}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \Phi_{u_j} \right)^2}{\left( \Phi_{u_i}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \Phi_{u_i} \right) \left( \Phi_{u_j}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \Phi_{u_j} \right)} \quad (7-3)$$

beschreibbar ist, bei allen Varianten unterschiedlich.

Die Ursache der Unabhängigkeit der Berechnungsergebnisse von der Master-Slave-Reduktion liegt in den hohen Eigenfrequenzen des Pleuels. Die maximale Anregungsfrequenz innerhalb des Belastungsspektrums der Gaskräfte liegt deutlich unterhalb der ersten relevanten Eigenfrequenz, welche die Deformation beschreibt. Somit haben transiente Effekte der Deformation keinen Einfluss und die Master-Slave-Reduktion bildet das Verhalten der Struktur im definierten Frequenzbereich vollständig ab. Damit sind die selektierten Eigenformen ausschließlich für die Beschreibung der Deformation des unterkritisch angeregten Systems verantwortlich.

Aus diesen Betrachtungen heraus ergibt sich der Schluss, dass die Dämpfung der Eigenvektoren, bedingt durch ihre vorrangige Wirkung im Bereich der Eigenfrequenzen, keinen signifikanten Einfluss besitzen kann und somit zur numerischen Verbesserung des Zeitintegrationsverfahrens die modalen Dämpfungswerte sehr groß gewählt werden können.

Trotz der beschriebenen Eigenschaften des elastischen modellierten Pleuels unterschieden sich die Simulationen bis zu einem Faktor von Zwei bzgl. der benötigten Rechenzeit. In Abhängigkeit des verwendeten Algorithmus der Master-Slave-Reduktion ergeben sich Abweichungen der Eigenfrequenzen zwischen reduzierter und unreduzierter Struktur. Diese sind in Tabelle Tab. (7-1) am Beispiel der niedrigsten und höchsten für die Deformation selektierten Eigenfrequenz zusammengefasst. Die Reduktionsverfahren prädiktiert konsequent ein steiferes Verhalten als durch die unreduzierte Struktur abgebildet wird, wobei verfahrensbedingt die Unterschiede mit steigender Ordnung der Eigenfrequenzen zunehmen. Die Abweichungen sind bei der Guyan-Reduktion aufgrund der unberücksichtigten dynamischen Eigenschaften der Slave-Struktur am größten. Die Unterschiede der Craig-Bampton-Reduktion sind abhängig von der Wahl der zusätzlichen Eigenvektoren, zeigen aber ein Verhalten analog zur Guyan Reduktion. Die IRS-Reduktion konvergiert mit zunehmender Zahl von Iterationen monoton gegen die Werte der SEREP-Reduktion, wobei sie den Vorteil besitzt keine Pseudoinverse der Modalmatrix der Hauptfreiheitsgrade zu benötigen. Bei erhöhter Anzahl an modalen Freiheitsgraden entstehen numerisch bedingt

---

<sup>32</sup>Modal Assurance Criterion

zunehmende Ungenauigkeiten bei der Erstellung der Pseudoinversen, welche im Extremfall zu vollständig falschen dynamischen Eigenschaften des Systems führen können und die Verwendung der SEREP-Reduktion unmöglich machen.

**Tabelle 7-1:** Abhängigkeit der Eigenfrequenz vom Algorithmus der Master-Slave-Reduktion

| Art der Master-Slave-Reduktion               | 1. EF [Hz] | ... | 188. EF [kHz] |
|--|------------|-----|---------------|
| unreduziert                                  | 2058       | ... | 120.9         |
| Guyan  | 2063       | ... | 262.1         |
| Craig-Bampton (10 zusätzliche Eigenvektoren) | 2063       | ... | 251.4         |
| Craig-Bampton (20 zusätzliche Eigenvektoren) | 2059       | ... | 244.8         |
| IRS ( 1 Iteration)                           | 2063       | ... | 262.1         |
| IRS ( 5 Iterationen)                         | 2063       | ... | 134.7         |
| IRS (10 Iterationen)                         | 2063       | ... | 123.0         |
| SEREP  | 2058       | ... | 122.1         |

Die höchste zu berücksichtigende Eigenfrequenz definiert die numerische Steifigkeit des resultierenden Differentialgleichungssystems und stellt somit einen für die Zeitintegration wichtigen Indikator bzgl. der maximalen Schrittweite dar. Daraus ergeben sich die festgestellten Unterschiede in den benötigten Rechenzeiten.

### 7.2.3 Berechnung der resultierenden Spannungen

Nach der Simulation elastischer Komponenten in Mehrkörpersimulationen schließt sich häufig der Wunsch nach einer Berechnung der Spannungen im Bauteil an. Unter vollständiger Kenntnis der Reduktionsprozesse ist eine Rücktransformation der zu jedem Zeitschritt aufgrund aller wirkenden Kräfte vorliegenden Deformationen möglich.

In einem ersten Schritt werden die modalen Verschiebungen wieder in physikalische Verschiebungen der Hauptfreiheitsgrade transformiert, anschließend erfolgt eine Expansion dieser Lösung unter Verwendung der Transformationsmatrix der Master-Slave-Reduktion auf die volle Struktur

$$\underline{z}_u = \underline{Q}_{red} \underline{\Phi}_u \underline{q} \quad . \quad (7-4)$$

Werden anschließend unter Nutzung des Verzerrungsmatrix  $\underline{\mathbb{B}}_u$  und der Sammelmatrix  $\underline{\mathbb{S}}_u$  die Dehnungen ermittelt, sind daraus mit dem Materialgesetz und der definierten Elastizitätsmatrix  $\underline{\mathbb{H}}_{uu}$  die Spannungen für jedes Element berechenbar

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbb{H}}_{uu} \underline{\mathbb{B}}_u \underline{\mathbb{S}}_u \underline{z}_u \quad . \quad (7-5)$$

Eine entsprechende Visualisierung kann wie in Abb. (7-15) für den Gaswechsel-OT vorgenommen werden.

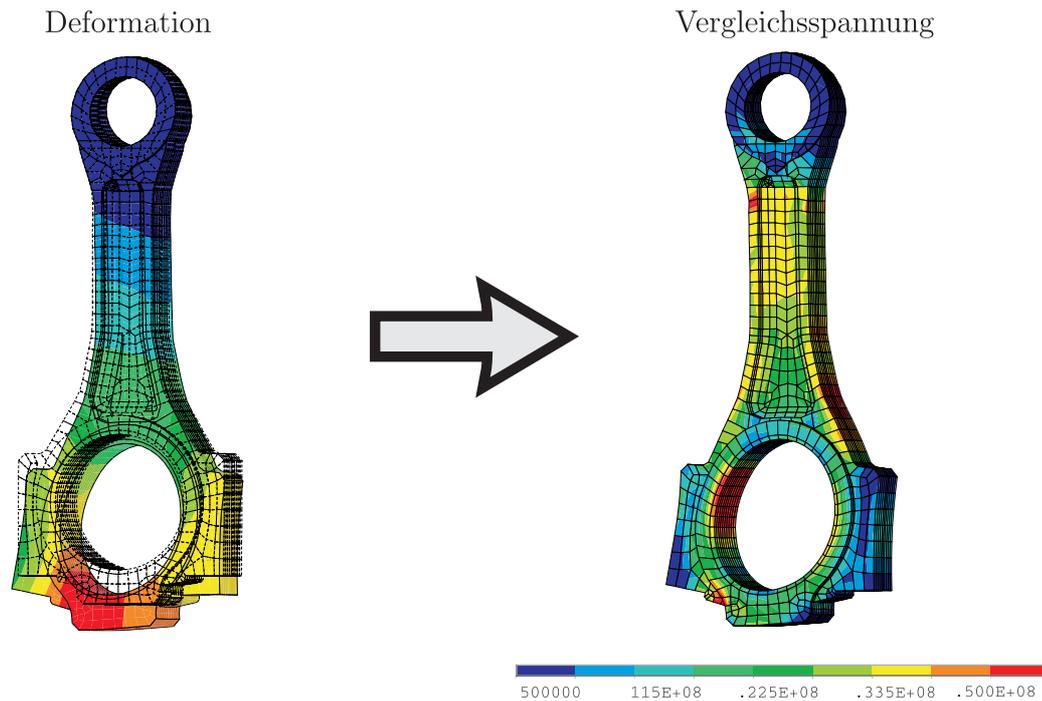


Abbildung 7-15: Spannungsbestimmung elastischer Komponenten - Pleuel GWOT

Durch vollständige Kenntnis aller Transformationen sowie Vermeidung von irreversiblen Reduktionen<sup>33</sup> können somit aufwändige Verfahren zur Spannungsberechnung, wie sie unter anderem in [Die99] vorgeschlagen werden oder die umständliche Aufprägung aller äußeren Lasten auf die FE-Struktur<sup>34</sup> und anschließende Spannungsberechnung entfallen.

<sup>33</sup>Im Rahmen der modalen Reduktion besteht formal nicht die Notwendigkeit alle Hauptfreiheitsgrade als Marker in die Mehrkörpersimulation zu übernehmen. Dies wirkt sich in einer Verkleinerung der Dimension der modalen Transformationsmatrix aus. Diese ist allerdings irreversibel, da die Freiheitsgrade ersatzlos gestrichen werden. Eine vollständige Rücktransformation auf das unreduzierte System ist damit nicht mehr möglich.

<sup>34</sup>Bei statisch unbestimmt gelagerten Systemen ergeben sich bei komplexen äußeren Lasten aufgrund numerischer Differenzen Starrkörperbewegungen, welche eine Spannungsberechnung verkomplizieren.

## 8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Algorithmus zur vollständigen rückwirkungsbehafteten Simulation von gleitgelagerten Systemen in Mehrkörperprogrammen vorgestellt. Ausgehend von den Grundgleichungen der Hydrodynamik und der Thermodynamik wurde ein Berechnungsmodell zur Beschreibung der Gleitlagerung unter Berücksichtigung thermischer Effekte abgeleitet und als Kraftelement innerhalb einer Mehrkörpersimulation implementiert.

Die Abbildung der hydrodynamischen Eigenschaften wurde durch numerische Lösung der nicht geschlossen analytisch lösbaren Reynoldsgleichung unter Verwendung der Finite-Volumen-Methode realisiert. Zur Berücksichtigung der kavitativen Effekte innerhalb der Lagerung wurde zunächst ein komplexes Modell nach Elrod implementiert, welches die Masseerhaltung innerhalb des Lagers fordert. Dabei ergibt sich ein Dualismus der Lösungsvariablen Druck im vollgefüllten Spaltbereich und Spaltfüllung im kavitativen Bereich des Lösungsgebiets. Als Resultat besteht die Notwendigkeit der iterativen Lösung des resultierenden Gleichungssystems, da die Lage des Kavitationsgebiets nicht apriori bekannt ist. Zusätzlich wurde für vereinfachte Berechnungen ein Kavitationsalgorithmus nach Gumbel umgesetzt. Die Lösung der Energiegleichung, welche die Grundlage der thermischen Einflüsse innerhalb der Gleitlagerung darstellt, wurde analog zur Reynoldsgleichung unter Verwendung einer Finite-Volumen-Diskretisierung erreicht. Die formal dreidimensionale Energiegleichung wurde durch Postulierung eines quadratischen Ansatzes in Spalthöhenrichtung auf eine zweidimensionale Form reduziert, wodurch sich numerische und algorithmische Vorteile ergeben. Die Einbindung der vorgestellten Algorithmen als Kraftelement innerhalb einer Mehrkörpersimulation ermöglicht die detaillierte Beschreibung des Einflusses transienter Lasten auf die Lagerung und daraus resultierend auf das rotordynamische Verhalten des untersuchten Systems.

Zusätzlich ergeben sich Koppelwirkungen zwischen elastischen Deformationen der Lagerpartner und dem thermo-hydrodynamischen Verhalten des Systems. Auf Grundlage von FE-Formulierungen wurde eine Möglichkeit der Einbindung thermomechanischer Körper in die Simulationen vorgestellt. Dies beinhaltet Reduktionen der Struktur, die primär zur Entkopplung der beschreibenden Differentialgleichungen auf einer Transformation in den Modalraum beruhen. Zur Einschränkung der zu verwendenden Eigenformen auf den für den Anwendungsfall relevanten Bereich kommen zusätzliche Master-Slave-Reduktionen zum Einsatz. Die vorgestellte Vorgehensweise bezieht sich dabei konsequent auf die gekoppelte thermomechanische Struktur und bietet somit die Möglichkeit, auch die thermischen Einflüsse der Lagerpartner sowie der vorliegenden Randbedingungen auf die Reynoldsgleichung und die Energiegleichung uneingeschränkt abzubilden.

Nach Definition der theoretischen Grundlagen und Beschreibung der Einbindung der resultierenden Algorithmen in die übergeordnete Mehrkörpersimulation wurde die Funktionsfähigkeit der Formulierungen durch Abgleich mit verschiedenen Referenzmodellen nachgewiesen. Dabei konnte zudem die Notwendigkeit der Berücksichtigung transienter

---

Veränderungen kinematischer Größen und der Einfluss auf das globale Verhalten gleitgelagerter Systeme gezeigt werden.

Abschließend wurden zwei komplexe Modelle untersucht. Die vollständige thermomechanische Abbildung eines Lagerbocks zeigt den Einfluss der Berücksichtigung mechanischer, thermischer sowie gekoppelt thermomechanischer Deformationen auf den Druckaufbau und daraus resultierend auf die dynamischen Eigenschaften der Lagerung. Dabei wurden Konvergenzstudien zur Selektion der dominanten Eigenformen durchgeführt und Möglichkeiten aufgezeigt, eine Minimierung der zur konvergenten Beschreibung der lastabhängigen Deformation notwendigen Eigenformen auf Grundlage starrer Simulationen zu ermöglichen. In diesem Kontext wurde dargelegt, dass zur Abbildung thermischer Deformationen die Verwendung von Frequency-Response-Modes vorteilhaft ist. Als zweites Berechnungsbeispiel wurde das Modell eines Kurbeltriebs gewählt. Unter Vernachlässigung der thermischen Effekte konnte gezeigt werden, dass vereinfachte Kavitationsalgorithmen auch bei hochdynamischen Systemen eine gute Abbildung der hydrodynamischen Eigenschaften ermöglichen. Ferner wurde der Einfluss der Deformationen auf das Systemverhalten unter Berücksichtigung der aus der Bewegung resultierenden dynamischen Kräfte sowie äußeren Lasten ohne Einschränkung der Lagerung des elastischen Körpers untersucht und eine Vorgehensweise zur Berechnung der resultierenden Spannungen innerhalb der deformierbaren Struktur zu jedem Zeitschritt vorgestellt.

Hinsichtlich der Weiterentwicklung des beschriebenen Verfahrens existieren verschiedene Ansatzpunkte. Im Bereich der Lösung der Energiegleichung besteht die Möglichkeit der Erweiterung des quadratischen Ansatzes auf Ansätze höherer Ordnung oder die Einführung zusätzlicher Diskretisierungsebenen in Spalthöhenrichtung, wodurch dem dreidimensionalen Charakter mehr Gewicht eingeräumt würde. Ferner können in dieser Arbeit getroffene Einschränkungen im Kontext steigender Rechnerentwicklungen wie der Verzicht auf Turbulenzmodelle, die Berücksichtigung von Mischungsmodellen im Bereich der Zuführungen oder die Einbeziehung der Druckabhängigkeit der Viskosität zunehmend aufgehoben werden. Damit werden perspektivisch allgemeine Beschreibungen komplexer dynamischer Vorgänge wie Hochläufe, Kaltstartverhalten oder das transiente Verhalten bei Lastwechseln einschließlich der Einflüsse thermischer und mechanischer Lasten ermöglicht, wobei unter Verwendung der Mehrkörpersimulation die Systemgrenzen der Modellierung zur Interaktion mit weiteren Bauteilen sukzessiv erweitert werden können.

Die vorliegende Arbeit stellt somit einen weiteren Schritt zur Erfüllung des einleitend formulierten Ziels der Verbesserung der Prognosegüte des Systemverhalten unter Wirkung dynamischer mechanischer und thermischer Lasten dar, welche sich z.B. in einem besseren Vorhersage von Stabilitätsgrenzen oder der Möglichkeit zur Identifizierung von Optimierungspotentialen widerspiegelt.

# A Anhang

## A.1 Notwendige mathematische Beziehungen

- Integrationsregel nach Leibnitz für einfache partielle Ableitungen

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz - f(x, b) \frac{\partial b}{\partial x} + f(x, a) \frac{\partial a}{\partial x} . \quad (\text{A-1})$$

- Integralsatz von Gauss

$$\int_V \underline{\nabla} \underline{f} dV = \int_B \underline{f} \underline{n} dB . \quad (\text{A-2})$$

- Die Taylorreihenentwicklung liefert für die Approximation  $f(x_1)$  mit Abbruch nach dem quadratischen Glied

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0) h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 . \quad (\text{A-3})$$

Die erste und zweite Ableitung ergibt sich durch Vorwärtsdifferentiation zu

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} , \\ f''(x_0) &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} . \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Nach Umstellung kann man folgende Vorschrift für die Approximation der ersten Ableitung am Rand durch Vorwärtsdifferentiation erhalten

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h} \\ &= \frac{-f(x_2) + 4f(x_1) - 3f(x_0)}{2h} , \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

welche auch für numerische Differentiationen Anwendung finden kann.

- Die zeitliche Ableitung der Transformationsmatrix kann unter Verwendung der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$  und mit der Einführung der Spinnmatrix

$$\underline{\underline{\tilde{\omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

als Skalarprodukt formuliert werden

$$\underline{\underline{\dot{Q}}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \quad . \quad (\text{A-7})$$

Ausgehend von den Eigenschaften der Spinnmatrix werden folgende Umformungen ermöglicht

$$\underline{\underline{\tilde{\omega}}} \underline{\underline{d}} = -\underline{\underline{\tilde{\omega}}}^T \underline{\underline{d}} = -\underline{\underline{\tilde{d}}} \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\tilde{d}}}^T \underline{\underline{\omega}} \quad . \quad (\text{A-8})$$

## A.2 Strukturdynamik

Die Variation der thermischen Funktion  $\Sigma$  führt auf die schwache Formulierung des thermischen Problems. Anschließend erlaubt die Anwendung der Produktregel folgende Formulierung des Wärmeflusspotentials

$$\delta\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\underline{\nabla}\theta)} \frac{\partial(\underline{\nabla}\theta)}{\partial\theta} \delta\theta = -(\underline{\nabla}\delta\theta)^T \underline{q} = -\underline{\nabla}^T(\delta\theta \underline{q}) + (\underline{\nabla}^T \underline{q}) \delta\theta \quad . \quad (\text{A-9})$$

Die Transformation unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes Gl. (A-2) führt auf

$$\begin{aligned} \int_V \delta\mathcal{H} dV &= - \int_V \underline{\nabla}^T(\delta\theta \underline{q}) dV + \int_V (\underline{\nabla}^T \underline{q}) \delta\theta dV \\ &= - \int_B \delta\theta \underline{q}^T \underline{n}_b dB + \int_V (\underline{\nabla}^T \underline{q}) \delta\theta dV \quad . \end{aligned}$$

Zur Variation des zweiten Terms aus Gl. (2-83) wird zunächst ausgenutzt, dass die Variation an den Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  verschwindet

$$\int_{t_1}^{t_2} (e\theta \delta\theta) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{e}\theta \delta\theta + e\dot{\theta} \delta\theta + e\theta \delta\dot{\theta}) dt = 0 \quad (\text{A-10})$$

und folgende Identität durch partielle Integration abgeleitet werden kann

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \theta \delta e dt = -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\theta \theta \delta \dot{e}) dt = 0 \quad . \quad (\text{A-11})$$

Damit besteht die Möglichkeit der Umformung in

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta(e\theta \dot{\theta}) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\theta} \theta \delta e + e\dot{\theta} \delta\theta + e\theta \delta\dot{\theta}) dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta(e\theta \dot{\theta}) - (e\theta \delta\dot{\theta})] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\theta} \theta \delta e - \dot{e} \theta \delta\theta) dt = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\theta \theta \delta \dot{e}) dt}_{\Delta\Sigma} - \int_{t_1}^{t_2} (\dot{e} \theta \delta\theta) dt \quad . \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung isentroper Variation kann der Term  $\Delta\Sigma$  zu Null angenommen werden und es ergibt sich

$$0 \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \Sigma dt = \int_V [\underline{\nabla}^T \underline{q} + \theta \dot{e} - S] \delta\theta dV + \int_B \delta\theta (\underline{q}_b^T \underline{n}_b - \underline{q}^T \underline{n}_b) dB \quad . \quad (\text{A-12})$$

Mit den Bedingungen

$$\underline{\nabla}^T \underline{q} = S - \theta \dot{e} \quad \text{im Gesamtvolumen} \quad , \quad (\text{A-13})$$

$$\underline{q}_b = \underline{q} \quad \text{auf den Randgebieten} \quad (\text{A-14})$$

ist Gl. (A-12) für beliebige Variationen  $\delta\theta$  und beliebige Zeiten  $t_1, t_2$  erfüllt. Damit kann die schwache Formulierung des thermischen Problems in der Form

$$0 \equiv \int_V [-(\underline{\nabla} \delta\theta)^T \underline{q} + \delta\theta (\theta \dot{e} - S)] dV + \int_{B^s} \delta\theta \underline{q}_b^T \underline{n}_b dB \quad (\text{A-15})$$

Verwendung finden.

### A.3 Mehrkörperdynamik

Da die Bestimmung der Volumenintegrale zur Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (siehe Kapitel (2.4.2)) auf Informationen basiert, die aus Finite-Element-Modellen stammen, soll deren Berechnung im Folgenden vorgestellt werden.

Dafür wird die Matrix der translatorischen und rotatorischen Starrkörperformen sowie eine modale Matrix, die einem "lumped mass" Ansatz entnommen wurde, definiert

$$\underline{\underline{R}}_{trans} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[ \underline{\underline{I}} \right] \\ \underline{\underline{0}} \\ \vdots \end{bmatrix}_i, \quad \underline{\underline{R}}_{rot} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[ \tilde{\underline{\underline{c}}}_i^T \right] \\ \underline{\underline{I}} \\ \vdots \end{bmatrix}_i, \quad \underline{\underline{R}}_{el_k} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[ \begin{array}{c} \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_{u_i,k} \\ \tilde{\underline{\underline{\Psi}}}_{u_i,k} \end{array} \right] \\ \vdots \end{bmatrix}_i, \quad i=1 \dots n_k \quad . \quad (\text{A-16})$$

Am Beispiel des Trägheitstensors Nullter Ordnung  $\underline{\underline{J}}^0$  soll das Vorgehen prinzipiell dargestellt werden. Analog kann mit allen weiteren Submatrizen vorgegangen werden.

Wird berücksichtigt, dass die Trägheitsmomente

$$\underline{\underline{J}}^0 = \int_V \rho \tilde{\underline{\underline{c}}} \tilde{\underline{\underline{c}}}^T dV \quad (\text{A-17})$$

direkte Folgen von Starrkörperrotationen sind und folgender Zusammenhang für die Beschreibung der Rotation des Punktes  $P$  eines finiten Elements  $\mathbb{E}()$  verwendet

$$\tilde{\underline{\underline{c}}}^T = \mathbb{E}\underline{\underline{\Gamma}} \mathbb{E}\underline{\underline{N}}_u \mathbb{E}\underline{\underline{S}}_u \underline{\underline{R}}_{rot} \quad , \quad (\text{A-18})$$

ergibt sich für die Trägheitsmomente des starren Körpers

$$\underline{\underline{J}}^0 = \underline{\underline{R}}_{rot}^T \underbrace{\sum_{\mathbb{E}=1}^{n_{\mathbb{E}}} \mathbb{E}\underline{\underline{S}}^T \int_V \rho \mathbb{E}\underline{\underline{N}}^T \mathbb{E}\underline{\underline{N}} dV \mathbb{E}\underline{\underline{S}} \underline{\underline{R}}_{rot}}_{\underline{\underline{M}}_{uu}} \quad . \quad (\text{A-19})$$

Prinzipiell repräsentiert dieses Vorgehen eine Transformation der Trägheitsmomente des elastischen Körpers unter Verwendung der Starrkörperrotationen als Transformationsmatrix. Ein vergleichbares Vorgehen für alle weiteren Terme mit der Unterscheidung in translatorische, rotatorische und elastische Komponenten führt auf die notwendigen Algorithmen zur Berechnung der Volumenintegrale und deren Überführung in matrizielle Formulierungen. Die resultierenden Umformungen sind nach [Wal06], [Wal94], [WS94], [SW99] im Folgenden komprimiert zusammengestellt.

Massenmatrix:

- Translation-Translation

$$m \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}_{trans}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{trans} \quad (\text{A-20})$$

- Rotation-Translation

$$m \underline{\underline{d}}_{CG}(\underline{\underline{q}}_u) = \underline{\underline{R}}_{rot}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{trans} + \underbrace{\left( \underline{\underline{R}}_{trans}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\Phi}}_u \right)}_{\underline{\underline{C}}_1} \underline{\underline{q}}_u \quad (\text{A-21})$$

- Deformation-Translation

$$\underline{\underline{C}}_{trans} = \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}_u^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{trans}}_{\underline{\underline{C}}_1^T} \quad (\text{A-22})$$

- Rotation-Rotation

$$\underline{\underline{J}}(\underline{\underline{q}}_u) = \underline{\underline{R}}_{rot}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{rot} - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{4_i}^{\otimes} \underline{\underline{q}}_{u_i} - \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{4_i}^{T \otimes} \underline{\underline{q}}_{u_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{6_{ij}}^{\otimes} \underline{\underline{q}}_{u_i} \underline{\underline{q}}_{u_j}}_{\text{vernachlässigt}} \quad (\text{A-23})$$

- Deformation-Rotation

$$\underline{\underline{C}}_{rot}(\underline{\underline{q}}_u) = \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}_u^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{rot}}_{\underline{\underline{C}}_2^T} + \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{\underline{C}}_{5_i}^{T \otimes} \underline{\underline{q}}_{u_i} \quad (\text{A-24})$$

- Deformation-Deformation

$$\widehat{\underline{\underline{M}}}_{uu} = \underline{\underline{\Phi}}_u^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\Phi}}_u \quad (\text{A-25})$$

Lastvektor der zentrifugalen und gyroskopischen Effekte:

- Rotation

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{G}_{r_i}(\underline{q}_u) \dot{\underline{q}}_{u_i} \cdot \underline{\omega} &= 2 \int_V \rho \tilde{d} \tilde{\omega} \underline{\Phi}_{\underline{u}} dV \dot{\underline{q}}_u \\
&= -2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \int_V \rho \tilde{c} \tilde{\Phi}_{\underline{u},i} dV \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \int_V \rho \tilde{\Phi}_{\underline{u},j} \tilde{\Phi}_{\underline{u},i} dV \mathbf{q}_{u_j} \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} \\
&= -2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{C}_{4_i}^{\otimes} \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} - 2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \underline{C}_{6_{ji}}^{\otimes} \mathbf{q}_{u_j} \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} \quad (\text{A-26})
\end{aligned}$$

- Deformation

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{G}_{el_i} \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} &= 2 \int_V \rho \underline{\Phi}_{\underline{u}}^T \tilde{\omega} \tilde{\Phi}_{\underline{u}} dV \dot{\underline{q}}_u \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \int_V \rho \underline{\Phi}_{\underline{u}}^T \tilde{\Phi}_{\underline{u},i}^T dV \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{C}_{5_i}^{\otimes} \dot{\underline{q}}_{u_i} \underline{\omega} \quad (\text{A-27})
\end{aligned}$$

- Deformation

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_{el}(\underline{q}_u) \underline{\Omega} &= \int_V \rho \underline{\Phi}_{\underline{u}}^T \tilde{\omega} \tilde{\omega} dV \\
&= \underline{\omega}^T \sum_{i=1}^{n_{qu}} \int_V \rho \tilde{\Phi}_{\underline{u},i}^T \tilde{c}^T dV \underline{\omega} \\
&\quad + \underline{\omega}^T \sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \int_V \rho \tilde{\Phi}_{\underline{u},i}^T \tilde{\Phi}_{\underline{u},j}^T dV \mathbf{q}_{u_j} \underline{\omega} \\
&= \underline{\omega}^T \sum_{i=1}^{n_{qu}} \underline{C}_{4_i}^{T \otimes} \underline{\omega} + \underline{\omega}^T \sum_{i=1}^{n_{qu}} \sum_{j=1}^{n_{qu}} \underline{C}_{6_{ij}}^{\otimes} \mathbf{q}_{u_j} \underline{\omega} \\
&= \underline{Q}_{el}^0 \underline{\Omega} + \underline{Q}_{el}^1 \underline{\Omega} \quad (\text{A-28})
\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_{el,,:}^0 &= [C_{4_{i11}} \quad C_{4_{i22}} \quad C_{4_{i33}} \quad C_{4_{i12}} + C_{4_{i21}} \quad C_{4_{i23}} + C_{4_{i32}} \quad C_{4_{i13}} + C_{4_{i31}}] \\
\underline{Q}_{el,,:}^1 &= \sum_i \underline{Q}_{ij} \mathbf{q}_{u_j} \\
\underline{Q}_{ij} &= [C_{6_{ij11}} \quad C_{6_{ij22}} \quad C_{6_{ij33}} \quad C_{6_{ij12}} + C_{6_{ij21}} \quad C_{6_{ij23}} + C_{6_{ij32}} \quad C_{6_{ij13}} + C_{6_{ij31}}]
\end{aligned}$$

Die in den Gleichung mit  $\otimes$  gekennzeichneten Elemente können nur durch eine Näherung bestimmt werden, da es bei nicht-isoparametrischen Elementen unmöglich ist, sie aus der Massenmatrix zu bestimmen.

Es wird zwischen verschiedenen Näherungen unterschieden:

- "Lumped Mass Approach" nach [WS94]:

$$\underline{\underline{C}}_{4_i} = -\underline{\underline{R}}_{rot}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{el_i} \quad (\text{A-29})$$

$$\underline{\underline{C}}_{5_{i,j}} = \underline{\underline{R}}_{el_j}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\Phi}}_{u.,i} \quad (\text{A-30})$$

$$\underline{\underline{C}}_{6_{ij}} = -\underline{\underline{R}}_{el_i}^T \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{R}}_{el_j} \quad (\text{A-31})$$

- "Arithmetische Mittelung" nach [Man94], [SW99] :

(Es kann abgeleitet werden, dass  $\underline{\underline{M}}_{4_k}$  immer antisymmetrisch sein sollte.)

$$C_{4_{i,j,k}} = -\underline{\underline{\Phi}}_{r.,j}^T \underline{\underline{M}}_{4_k} \underline{\underline{\Phi}}_{u.,i} \quad (\text{A-32})$$

$$\sum_i \underline{\underline{C}}_{5_i}^T \dot{\underline{\underline{q}}}_{u_i} = [\underline{\underline{M}}_{5_1} \dot{\underline{\underline{q}}}_u \quad \underline{\underline{M}}_{5_2} \dot{\underline{\underline{q}}}_u \quad \underline{\underline{M}}_{5_3} \dot{\underline{\underline{q}}}_u] \quad (\text{A-33})$$

$$C_{6_{ijkl}} = \underline{\underline{\Phi}}_{u.,i}^T \underline{\underline{M}}_{6_{kl}} \underline{\underline{\Phi}}_{u.,j} \quad (\text{A-34})$$

mit:

$$\underline{\underline{M}}_{4_k} \approx \frac{1}{2} (\underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\omega}}_k + \underline{\underline{\omega}}_k \underline{\underline{M}}_{uu}) \quad , \quad k = 1 \dots 3 \quad (\text{A-35})$$

$$\underline{\underline{\omega}}_k = \frac{\partial}{\partial \omega_k} \mathbf{diag} \left[ \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\omega}} \\ \underline{\underline{0}} \end{array} \right]^{n_k} \right] \quad (\text{A-36})$$

$$\underline{\underline{M}}_{5_k} = \underline{\underline{\Phi}}_u^T \underline{\underline{M}}_{4_k} \underline{\underline{\Phi}}_u \quad (\text{A-37})$$

$$\underline{\underline{M}}_{6_{kj}} = \underline{\underline{\omega}}_k \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\omega}}_j \quad (\text{A-38})$$

- "Erweiterte Arithmetische Mittelung" nach [SW99]

zur Wahrung der Antimetrie:

$$\overline{\underline{\underline{M}}}_k = \underline{\underline{M}}_{uu} \underline{\underline{\omega}}_k \quad (\text{A-39})$$

$$\text{für } \overline{\underline{\underline{M}}}_{k_i,j} = 0 \quad (\text{A-40})$$

$$M_{4_{k,j,i}} = \overline{\underline{\underline{M}}}_{k_j,i} \quad (\text{A-41})$$

$$M_{4_{k,i,j}} = -\overline{\underline{\underline{M}}}_{k_j,i} \quad (\text{A-42})$$

$$\text{für } \overline{\underline{\underline{M}}}_{k_j,i} \neq 0 \quad \text{und} \quad \overline{\underline{\underline{M}}}_{k_i,j} \neq 0 \quad (\text{A-43})$$

$$M_{4_{k,j,i}} = \frac{1}{2} \text{sgn}(\overline{\underline{\underline{M}}}_{k_j,i}) (|\overline{\underline{\underline{M}}}_{k_j,i}| + |\overline{\underline{\underline{M}}}_{k_i,j}|) \quad (\text{A-44})$$

$$M_{4_{k,i,j}} = -M_{4_{k,j,i}} \quad (\text{A-45})$$

Eine analoge Erweiterung kann auch für den "Lumped Mass Approach" Verwendung finden.

## A.4 Referenzmodelle

**Tabelle A-1:** Parameter - quasistatisches Vergleichsmodell mit Temperatureinfluss

|               | <b>Parameter</b>                | <b>Formelzeichen</b> | <b>Wert</b>                  |
|---------------|---------------------------------|----------------------|------------------------------|
| Lager         | Durchmesser (innen)             | $d_I$                | $100mm$                      |
|               | Durchmesser (außen)             | $d_a$                | $200mm$                      |
|               | Breite                          | $b$                  | $200mm$                      |
|               | Kaltspiel ( $20^\circ C$ )      | $\Delta r$           | $123\mu m$                   |
| Ölzuführung   | Lage                            | $\varphi_T$          | $90^\circ$                   |
|               | Länge                           | $x_T$                | $15.708mm \hat{=} 18^\circ$  |
|               | Breite (zentrisch)              | $y_T$                | $70mm$                       |
|               | Zuführdruck                     | $p_T$                | $0.07bar$                    |
|               | Zuführtemperatur                | $T_T$                | $40^\circ C$                 |
| Schmiermittel | Viskositätsparameter<br>(Vogel) | $c_1$                | $0.85193 \cdot 10^{-3} Pa s$ |
|               |                                 | $c_2$                | $250.7K$                     |
|               |                                 | $c_3$                | $-32.12K$                    |
|               | Dichte                          | $\rho$               | $850kg/m^3$                  |
|               | spez. Wärmekapazität            | $c_v$                | $2kJ/kg K$                   |
|               | Wärmeleitfähigkeit              | $\lambda$            | $0.13W/m K$                  |
| Belastung     | statische Last (y-Richtung)     | $F_y$                | $-7000N$                     |
|               | Drehzahl                        | $n_{II}$             | $3000min^{-1}$               |

**Tabelle A-2:** Parameter - rotordynamisches Vergleichsmodell ohne Temperatureinfluss

|               | <b>Parameter</b>             | <b>Formelzeichen</b> | <b>Wert</b>                    |
|---------------|------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| Geometrie     | Länge der Welle              | $l_{II}$             | 900mm                          |
|               | Länge des Rotors             | $l_{Rotor}$          | 100mm                          |
|               | Lagerabstand                 | $l_{Lager}$          | 800mm                          |
|               | Durchmesser Welle            | $d_{II}$             | $50mm - \Delta r$              |
|               | Durchmesser Rotor            | $d_{Rotor}$          | 150mm                          |
|               | Masse Rotor                  | $m_{Rotor}$          | 26.5kg                         |
|               | erste Biegeeigenfrequenz     | $\omega_{k_{ges}}$   | 105Hz                          |
|               | Lagerung "gelenkig-gelenkig" |                      |                                |
| Lager         | Durchmesser                  | $d_I$                | 50mm                           |
|               | Breite                       | $b$                  | 36mm                           |
|               | rel. Lagerspiel (minimal)    | $\psi_{min}$         | 2.4 ‰                          |
|               | rel. Lagerspiel (maximal)    | $\psi_{max}$         | 29.44 ‰                        |
| Ölzuführung   | Lage                         | $\varphi_T$          | $45^\circ + k \cdot 90^\circ$  |
|               | Länge                        | $x_T$                | $13mm \hat{=} 30^\circ$        |
|               | Breite (zentrisch)           | $y_T$                | $28.8mm \hat{=} 0.8 \cdot b$   |
|               | Zuführdruck                  | $p_T$                | 0.6bar                         |
| Schmiermittel | Viskosität                   | $\eta_{liq}$         | $8.4 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ |

## A.5 Anwendungsbeispiel Kurbeltrieb

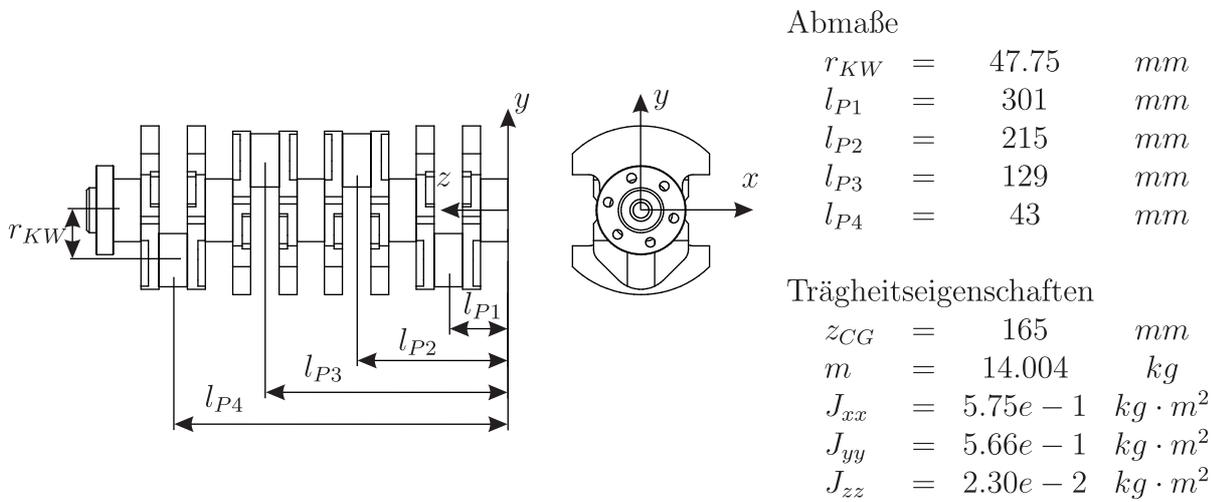


Abbildung 1-1: Parameter Kurbelwelle

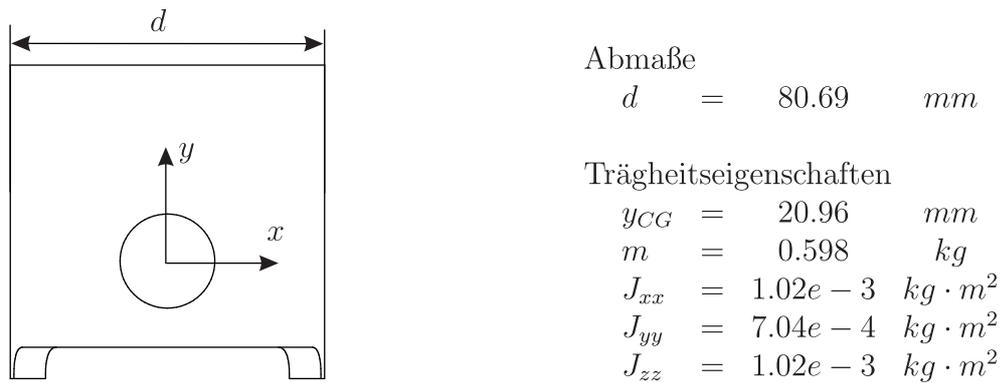


Abbildung 1-2: Parameter Kolben

---

# Literaturverzeichnis

- [Bac03] BACKHAUS, K.: *Instationärer Tragkraft- und Reibmomentenaufbau bei Kurbelwellen-Axiallagern und Synchronisierungen unter partiellem Mischreibungskontakt*, Universität Kassel, Dissertation, 2003
- [Bar00] BARTEL, D.: *Berechnung von Festkörper- und Mischreibung bei Metallpaarungen*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 2000
- [Bat90] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures in Engineering analysis*. Prentice-Hall, 1990
- [BB01] BOOKER, J. F.; BOEDO, S.: Finite element analysis of elastic engine bearing lubrication: Theory. In: *Traitement des problèmes de lubrification par la méthode des éléments finis, revue européenne des éléments finis*, 2001, vol. 10(6-7), pp. 705 – 724
- [BK83] BECKMANN, G.; KLEIS, I.: *Abtragsverschleiß von Metallen*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1983
- [Bob08] BOBACH, L.: *Simulation dynamisch belasteter Radialgleitlager unter Mischreibungsbedingungen*, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Dissertation, 2008
- [But76] BUTENSCHÖN, H. J.: *Das hydrodynamische, zylindrische Radialgleitlager endlicher Breite unter instationärer Belastung*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1976
- [CB68] CRAIG, R. R. J.; BAMPTON, M. C. C.: Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. In: *AIAA Journal*, 1968, vol. 6(7), pp. 1313 – 1319
- [Die99] DIETZ, S.: *Vibration and Fatigue of Vehicle Systems Using Component Modes*, Technische Universität Berlin, Dissertation, 1999
- [DSW08] DANIEL, C.; STRACKELJAN, J. ; WOSCHKE, E.: Enhanced Fluid bearing Simulation with standard MBS Systems. In: *GAMM Proceedings 2008*, 2008
- [DSW09] DANIEL, C.; STRACKELJAN, J. ; WOSCHKE, E.: Modellierung von Gleitlagern in rotordynamischen Modellen. In: *8th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*, 2009
- [Elr81] ELROD, H. G.: A Cavitation Algorithm. In: *Journal of Lubrication Technology*, 1981, vol. 103, pp. 350 – 354
- [Fal31] FALZ, E.: *Grundzüge der Schmiertechnik*. Springer-Verlag Berlin, 1931

- [Fer82] FERRON, J.: *Contribution à l'étude des phénomènes thermiques dans les paliers hydrodynamiques*, Université de Poitiers, Dissertation, 1982
- [FGP95] FRISWELL, M. I.; GARVEY, S. D. ; PENNY, J. E. T.: Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques. In: *Journal of Sound and Vibration*, 1995, vol. 186(2), pp. 311 – 323
- [FGT80] FLEISCHER, G.; GRÖGER, H. ; THUM, H.: *Verschleiß und Zuverlässigkeit*. Verlag Technik, Berlin, 1980
- [Fis11] FISCHER, J.: *Welle-Rotor-Verbindungen mit innerer Dämpfung. Simulation und Analyse von einfachen Läufnern und Laborzentrifugen*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 2011
- [Flo57] FLOBERG, L.: The infinite journal bearing considering vaporization. In: *Transactions of Chalmers University of Technologie*, 1957, vol. 189
- [Fri91] FRIBERG, O.: A Method for Selecting Deformation Modes in Flexible Multibody Dynamics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 32, pp. 1637 – 1655
- [Fuc02] FUCHS, A.: *Schnelllaufende Radialgleitlagerungen im instationären Betrieb*, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Dissertation, 2002
- [GE93] GLIENICKE, J.; EILERS, M.: Nichtlineare Rotordynamik - Berechnungsverfahren zur Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens realer Turbinengleitlager und Quetschfilmdämpfer bei allgemeinen rotordynamischen Untersuchungen. In: *Fortschritt-Berichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik*, Frankfurt/M., 1993, vol. 473
- [Gli70] GLIENICKE, J.: Experimentelle Ermittlung der statischen und dynamischen Eigenschaften von Gleitlagern für schnelllaufende Wellen - Einschluss der Schmierspaltgeometrie und der Lagerbreite. In: *Fortschritt-Berichte VDI-Z : Reihe 1*, 1970, vol. 22
- [Gli72] GLIENICKE, J.: Theoretische und experimentelle Ermittlung der Systemdämpfung gleitgelagerter Rotoren und ihre Erhöhung durch eine äußere Lagerdämpfung. In: *Fortschritt-Berichte VDI-Z : Reihe 11*, 1972, vol. 13
- [Guy65] GUYAN, R. J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices. In: *AIAA Journal*, 1965, vol. 3(2), pp. 380
- [GW66] GREENWOOD, J. A.; WILLIAMSON, J. B. P.: Contact of nominally flat surfaces. In: *Proc. of the Royal Soc. of London*, 1966, vol. A295, pp. 300 – 319
- [GWWW78] GLIENICKE, J.; WALLE, F.; WALTER, J. ; WIEDEMANN, R.: Unwuchtschwingungen und Systemdämpfung von gleitgelagerten Rotoren unter praxisnahen Bedingungen. In: *Fortschritt-Berichte Verbrennungskraftmaschinen*, 1978, vol. 251

- [Hec05] HECKMANN, A.: *Thermoelasticity in Multi-Body Dynamics*, University Hannover, Dissertation, 2005
- [JF57] JAKOBSSON, B.; FLOBERG, L.: The finite journal bearing considering vaporization. In: *Transactions of Chalmers University of Technologie*, 1957, vol. 190
- [KB83] KNIGHT, J. D.; BARRETT, L. E.: An Approximate Solution Technique for Multilobe Journal Bearings Including Thermal Effects, with Comparison to Experiment. In: *Tribology Transactions*, 1983, vol. 26(4), pp. 501 – 508
- [KB87] KNIGHT, J. D.; BARRETT, L. E.: Analysis of Axially Grooved Journal Bearings with Heat Transfer Effects. In: *Tribology Transactions*, 1987, vol. 30(3), pp. 316 – 323
- [KB91a] KUMAR, A.; BOOKER, J. F.: A Finite Element Cavitation Algorithm. In: *Transactions of the ASME*, 1991, vol. 113, pp. 276 – 286
- [KB91b] KUMAR, A.; BOOKER, J. F.: A Finite Element Cavitation Algorithm: Application / Validation. In: *Transactions of the ASME*, 1991, vol. 113, pp. 255 – 261
- [KB07] KOUTSOVASILIS, P.; BEITELSCHMIDT, M.: Model Reduction Comparison for the Elastic Crankshaft Mechanism. In: *Proc. International Operational Modal Analysis Conference*, 2007, vol. 1, pp. 95 – 106
- [KBLW98] KNOLL, G.; BACKHAUS, K.; LANG, J. ; WILHELM, K.: Berechnung von Motorengleitlagern unter Berücksichtigung der Deformation. In: *Motorentechnische Zeitschrift*, 1998, vol. 59
- [KBQ06] KOUTSOVASILIS, P.; BEITELSCHMIDT, M. ; QUARZ, V.: Zur Modellierung und Simulation der Kolbenmaschinendynamik unter Berücksichtigung von Struktur-elasticitäten. In: *Proc. International Congress on FEM Technology (CADFEM Users' Meeting)*, 2006, vol. 24
- [KGZB83] KELLY, D. W.; GAGO, S. R.; ZIENKIEWICZ, O. C. ; BABUSKA, I.: A posteriori error analysis and adaptive processes in the Finite Element Method. Part I: Error analysis, Part II: Adaptive mesh refinement. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, vol. 19, pp. 1593 – 1656
- [KLHK02] KNAUS, O.; LOIBNEGGER, B.; HERBST, H. M. ; KREUZWIRTH, G.: Einfluss von Struktur- und elastohydrodynamischer Lagerung auf die Pleuelgestaltung. In: *Motorentechnische Zeitschrift*, 2002, vol. 63, pp. 546 – 554
- [Kni90] KNIGHT, J. D.: Prediction of Temperatures in Tilting Pad Journal Bearings. In: *Tribology Transactions*, 1990, vol. 33(2), pp. 185 – 192
- [Lan97] LANG, J. R.: *Kolben-Zylinder-Dynamik - Finite Elemente Bewegungssimulation unter Berücksichtigung strukturdynamischer und elastohydrodynamischer Wechselwirkungen*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 1997

- [LS78] LANG, O. R.; STEINHILPER, W.: *Gleitlager: Berechnung und Konstruktion von Gleitlagern mit konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung*. Springer, 1978
- [Lün98] LÜNEBURG, B.: *Zur Berechnung der thermo-elastohydrodynamischen Kenngrößen stationär und instationär belasteter Gleitlager*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 1998
- [Man94] MANGLER, D.: *Die Berechnung geometrisch nichtlinearer Probleme der Dynamik unter Nutzung linearer FEM-Programme*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 1994
- [Man02] MANKE, B.: *Hochbelastete Pleuellager im Grenzbereich von Hydrodynamik und Mischreibung*, Universität Kassel, Dissertation, 2002
- [Mer07] MERMERTAS, Ü.: *Nichtlinearer Einfluss von Radialgleitlagern auf die Dynamik schnelllaufender Rotoren*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 2007
- [Mit90] MITTWOLLEN, N.: Betriebsverhalten von Radialgleitlagern bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten und hohen thermischen Belastungen : Theoretische Untersuchungen. In: *Fortschritt-Berichte VDI : Reihe 1*, Düsseldorf, 1990, vol. 187
- [Moß93] MOSSMANN, T.: *Ein Beitrag zur Elastohydrodynamik des instationär belasteten Radialgleitlagers*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1993
- [MRSR91] MITTWOLLEN, N.; RÜCKERT, A.; SCHMITZ, A. ; REINHARDT, W.-D.: Verbesserung der Berechnungsgrundlagen für schnelllaufende, hochbelastete Mehrgleitflächen- und Radialkippssegmentlager. In: *Abschlussbericht - BMFT-Verbundprojekt 03T0012A*, Technische Universität Braunschweig, 1991
- [Mus86] MUSZYNSKA, A.: Whirl and Whip - Rotor/Bearing Stability Problems. In: *Journal of Sound and Vibration*, 1986, vol. 110(3), pp. 443 – 462
- [Mus88] MUSZYNSKA, A.: Stability of Whirl and Whip in Rotor/Bearing Systems. In: *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol. 127
- [Mus05] MUSZYNSKA, A. ; GROUP, Taylor & F. (Hrsg.): *Rotordynamics*. Marcel Dekker Inc - Mechanical Engineering, 2005
- [Nit09] NITZSCHKE, S.: *Entwicklung eines Berechnungsverfahrens zur detaillierten Simulation der Kolben-Zylinder-Dynamik im Mehrkörpersystem SimPACK*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Diplomarbeit, 2009
- [NWDS09] NITZSCHKE, S.; WOSCHKE, E.; DANIEL, C. ; STRACKELJAN, J.: Simulation der Kolbendynamik unter Berücksichtigung der EHD-Kopplung. In: *Tagungsband 9. Magdeburger Maschinenbau-Tage*, 2009, pp. 84 – 92

- [OBD09] OERTEL, H.; BÖHLE, M. ; DOHRMANN, U.: *Strömungsmechanik: Grundlagen - Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. Vieweg & Teubner, 2009
- [O'C89a] O'CALLAHAN, J.: A procedure for an improved reduced system (IRS). In: *Proceedings of the 7th International Modal analysis conference, Society of Experimental Mechanics*, 1989, vol. 7, pp. 17 – 21
- [O'C89b] O'CALLAHAN, J.: System equivalent reduction and expansion process. In: *Proceedings of the 7th International Modal analysis conference, Society of Experimental Mechanics*, 1989, vol. 7, pp. 29 – 37
- [OG85] OH, K.; GOENKA, P. K.: The Elastohydrodynamic Solution of Journal Bearings Under Dynamic Loading. In: *Journal of Tribologie*, 1985, vol. 107, pp. 389 – 395
- [Ols65] OLSSON, K. O.: Cavitation in dynamically loaded bearings. In: *Transactions of Chalmers University of Technologie*, 1965, vol. 308
- [Par70] PARKUS, H.: *Variational Principles in Thermo- and Magneto-Elasticity*. Springer Verlag, 1970
- [Pat80] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1980
- [PH95] PARANJPE, R. S.; HAN, T.: A Transient Thermohydrodynamic Analysis Including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearings. In: *Journal of Tribology*, 1995, vol. 117, pp. 369 – 378
- [PW79] PINKUS, O.; WILCOCK, D. J.: Thermal Effects in Fluid Film Bearings. In: *6th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, Mech. Engng. Publ. Ltd., 1979
- [Rey86] REYNOLDS, O.: Über die Theorie der Schmierung und ihre Anwendung auf Herrn Beauchamp Towers Versuche. In: *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, 1927 (Urschrift englisch, 1886), vol. 218, pp. 39 – 107
- [Rie95] RIENÄCKER, A.: *Instationäre Elastohydrodynamik von Gleitlagern mit rauhen Oberflächen und inverse Bestimmung von Warmkonturen*, Rheinisch-Westfälisch Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 1995
- [SB97] SZABO, B.; BABUSKA, I.: *Finite Element Analysis*. John Wiley & Son, Inc., 1997
- [Sch92] SCHWARZE, H.: *Beitrag zur Erfassung der Schmierverhältnisse im Pleuellager*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 1992
- [Sch01] SCHÖNEN, R.: *Strukturdynamische Mehrkörpersimulation des Verbrennungsmotors mit elastohydrodynamischer Grundlagerkopplung*, Universität Kassel, Dissertation, 2001
- [SR97] SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W.: The MATLAB ODE suite. In: *SIAM - Journal on Scientific Computing*, 1997, vol. 18(1), pp. 1 – 22

- [SR09] STEFANI, F.; REBORA, A.: Steadily loaded journal bearings: Quasi-3D mass-energy-conserving analysis. In: *Tribology International*, 2009, vol. 42, pp. 448 – 460
- [SW98] SHEEN, S.-C.; WU, J.-L.: Preconditioning Techniques for the BiCGstab algorithm used in convection-diffusion problems. In: *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 1998, vol. 34(2)
- [SW99] SCHWERTASSEK, R.; WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Vieweg, 1999
- [Vog21] VOGEL, H.: In: *Phys.Z.*, 1921, vol. 22
- [Voi10] VOIGT, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik : mit Ausschluß d. Kristalloptik*. Teubner, Leipzig, 1910
- [Wal92] WALTERMANN, H.: *Optimierte thermo-elasto-hydrodynamische Berechnungsverfahren für Gleitlager*, Rheinisch-Westfälisch Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 1992
- [Wal94] WALLRAPP, O.: Standardization of Flexible Body Modeling in Multibody System Codes Part I: Definition of Standard Input Data. In: *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1994, vol. 22(3), pp. 283 – 304
- [Wal06] WALLRAPP, O.: *Flexible Multibody Dynamics with Space Flight Applications Using SIMPACK*, 2006
- [WDNS11] WOSCHKE, E.; DANIEL, C.; NITZSCHKE, S. ; STRACKELJAN, J.: Numerical run-up simulation of a turbocharger with full floating ring bearings. In: *The 10th International Conference on Vibration Problems*, 2011
- [WDS07] WOSCHKE, E.; DANIEL, C. ; STRACKELJAN, J.: Reduktion elastischer Strukturen für MKS- Anwendungen. In: *Tagungsband 8. Magdeburger Maschinenbau-Tage & 7. MAHREG Innovationsforum*, 2007
- [WS94] WALLRAPP, O.; SACHAU, D.: Space Flight Dynamic Simulations Using Finite Element Analysis Results in Multibody System Codes. In: *Seconde International Conference on Computational Structures Technology*, 1994
- [WSD08] WOSCHKE, E.; STRACKELJAN, J. ; DANIEL, C.: Modal approach for consideration of thermal states in multibody systems. In: *GAMM Proceedings 2008*, 2008
- [WW99] WALLRAPP, O.; WIEDEMANN, S. M.: Multibody System Simulation of Deployment of a Flexible Solar Array. In: *4th International Conference on Dynamics and Control of Structures in Space*, Cranfield, UK, 1999
- [YI01] YAMAMOTO, T.; ISHIDA, Y.: *Linear and Nonlinear Rotordynamics. A Modern Treatment with Applications*. John Wiley & Sons Inc, 2001

- 
- [ZT00] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.: *The finite element method Volume 2 - Solid mechanics*. Butterworth - Heinemann, 2000
- [ZZ87] ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.: A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, vol. 24, pp. 337 – 357

---

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name, Vorname: Woschke, Elmar  
Geburtsdatum: 23.03.1982  
Geburtsort: Magdeburg  
Familienstand: verheiratet, zwei Kinder  
Nationalität: deutsch

## Schulbildung

1988 - 1992 Grundschule "Richard-Dembny", Magdeburg  
1992 - 2000 Gymnasium "Wilhelm-Raabe", Magdeburg  
*Abschluss:* Allgemeine Hochschulreife

## Zivildienst

2000 2001 Zivildienst in der Bahnhofsmission Magdeburg,  
Magdeburger Stadtmission e.V.

## Studium

2001 - 2006 Maschinenbaustudium  
an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
Vertiefungsrichtung "Angewandte Mechanik"  
*Thema der Diplomarbeit:*  
"Numerische Simulation von Ultraschall-Scalern im  
Kontaktbereich zur Bestimmung des Untergrundmaterials"

## Berufserfahrung

seit 01.01.2007 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
Institut für Mechanik