

Frank Schadt

**Physikalische Modellierung und Analyse thermisch  
und mechanisch bedingter Messabweichungen in  
faseroptischen Rotationssensoren**







# **Physikalische Modellierung und Analyse thermisch und mechanisch bedingter Messabweichungen in faseroptischen Rotationsensoren**

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing.(FH) Frank Schadt  
geb. am 23.06.1976 in Erlenbach  
genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. (habil.) Jens Strackeljan  
Prof. Dr.-Ing. Friedemann Mohr  
Prof. Dr. Ing. Hans-Christian Möhring

Tag der Einreichung: 28.04.2012  
Promotionskolloquium am: 04.10.2012



## **Eigenständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Oberkochen, den 04.01.2013

---

Frank Schadt



## Danksagungen

Mein besonderer Dank gebührt meinen Eltern, die mit einem mir fast übermenschlich erscheinenden Einsatz ihrer Kräfte ihre Familie versorgten. Sie erweckten auf zwanglose Weise meine Freude am Lernen und ermöglichten mir eine sorglose Schulzeit und ein von Geldzwängen befreites Studium.

Herr Prof. Dr.-Ing. F. Mohr war nicht nur Vorgesetzter und Betreuer meiner Dissertation und vieler anderer Projekte, sondern auch Vorbild und ein großer Einfluss auf meine akademische und persönliche Entwicklung in den Jahren nach meinem Studium. Vielen Dank dafür!

Vielen Dank an meinen Doktorvater Univ.-Prof. Dr. J. Strackeljan für die Betreuung meiner Doktorarbeit, für wertvolle Diskussionen und Hinweise und die Übernahme des Hauptreferats.

Ein besonderer Dank geht auch an Herrn Dr. Auch, Herrn Oswald, Herrn Dr. Schirmacher und Herrn Dr. Erler der Firma Sagem Navigation GmbH für die fachliche und finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei Markus Holzer und Philip Partsch für die Hilfe bei der Korrektur bedanken, bei Hilmar Heiningner und Petr Kucera für fachliche Gespräche und Hilfe bei experimentellen Arbeiten und bei Philipp Gille für seinen Beitrag zum Thema Phasenmodulation.





## Kurzfassung

Faseroptische Rotationssensoren (Faserkreisel, Faseroptische Gyroskope, abgekürzt: FOG) sind hochpräzise Sensoren zur Messung der Rotationsgeschwindigkeit. Sie gehören zur Klasse der Inertialsensoren. Aufgrund ihrer herausragenden Präzision stellen sie neben Laserkreisel die Standardsensoren für die Drehratenmessung dar, die in inertialen Navigationssystemen der Luft- und Raumfahrt zum Einsatz kommen. Ihre hohe Robustheit, außerdem ihre im Vergleich zu konkurrierenden Sensortypen geringe Warmlaufzeit sind Eigenschaften, wegen deren sie auch für militärische Anwendungen eingesetzt werden.

Ein wichtiges Kriterium für die genannten Anwendungen ist die Nullpunktstabilität der FOGs, die Drift. Unter der Nullpunktstabilität versteht man die Forderung, dass zunächst bei völligem Stillstand des Sensors dessen Ausgangssignal ebenfalls „null ist“, und dass diese Bedingung auch unter variierenden Betriebsbedingungen sowie bei Alterung erfüllt bleibt. In der Praxis wird unter der Wirkung verschiedener Einflussgrößen und durch elektronisches Rauschen jedoch immer eine stochastische Fluktuation (Rauschen und Drift) des Nullsignals auftreten, die natürlich so klein wie möglich sein sollte, da sie die untere Unsicherheitsschwelle, somit die Auflösungsgrenze des Messsystems darstellt.

Optimierte Labormuster von Faserkreisel erreichen extrem kleine Driftwerte von  $10^{-3}$ °/h und darunter. In der realen Anwendungsumgebung verschlechtern dagegen Einflüsse wie elektrische und magnetische Felder, Vibration und Temperaturfluktuationen diese Daten beträchtlich, sodass handelsübliche FOGs eine Genauigkeit von nur noch etwa 1°/h aufweisen. Da zur Langstreckennavigation Driften von weniger als  $10^{-2}$ °/h nötig sind, können Faserkreisel für viele Navigationsanwendungen noch nicht eingesetzt werden.

Während optische und elektromagnetische Effekte im Faserkreisel sehr gut untersucht sind, erfuhren die Wirkungsmechanismen mechanischer Einflüsse auf den Faserkreisel bisher wenig Interesse bzw. Analyse. Nicht nur die Recherche von Veröffentlichungen zum Thema Faserkreisel, sondern auch Gespräche mit der Industrie zeigten, dass hier ein Wissensdefizit besteht. Dieses möchte die vorliegende Arbeit mindern.

Das Ziel der hier vorgestellten Untersuchungen ist, den Einfluss der Störfaktoren Temperatur und Vibration zu untersuchen. Es sollten mathematische Modelle entwickelt werden, mit denen die Entwicklung neuer Sensoren auf eine zuverlässigere Grundlage gestellt werden kann. Dadurch sollen die bisher

---

weitgehend üblichen experimentellen Verfahren durch leistungsfähigere Tools ersetzt werden können.

## Abstract

Fiberoptic rotation rate sensors (Fiberoptic Gyroscopes, abbr. FOG) are highly precise sensors to measure rotation rates. They belong to the class of inertial sensors. Due to their extraordinary precision, FOGs are, besides Ring Laser Gyroscopes, the most common choice for rotation rate sensors in inertial navigation systems for aeronautics and space flight. Their robustness and low warmup time make them a desirable choice for military applications.

An important criterion for the applications mentioned before is the zero point stability of FOGs, i.e. its drift. This is equivalent to demanding the sensor output to be zero if the sensor is absolutely still, thereby not being affected by external influences and aging effects. In practice, this will not be the case. Several external effectors and internal noise will always lead to statistical fluctuations (noise and drift) of the „zero signal“, thus defining the sensor's accuracy.

Optimized laboratory setups reach extremely low drifts below  $10^{-3}\text{°/h}$ . In real world applications, however, external influences like electric and magnetic fields, vibration, temperature fluctuations, etc. deteriorate this value considerably. It is due to those and other influences that commercial FOGs show drifts that are usually not better than about  $1\text{°/h}$ . Since long distance navigation applications demand drifts of less than  $10^{-2}\text{°/h}$ , FOGs cannot be used in this area, yet.

While optical and electromagnetic effects in FOGs are very well understood, mechanical and thermal effects have received little interest in the scientific community. Research of scientific papers about FOGs and discussions with industry experts in this field both clearly show a deficit of scientific knowledge of the aforementioned subject. It is this work's objective to improve this situation.

The goal of the present work is to investigate the effects of temperature variations and vibration on FOGs. Models are presented based on analytical calculations and Finite Element simulations that aim to assist the development of new and the refinement of existing FOGs. The usual „trial and error“ approach shall ideally be replaced, more realistically be assisted by simulations based on the presented models.



## Inhaltsverzeichnis

Danksagungen .....	VIII
Kurzfassung .....	X
Abstract .....	XII
Inhaltsverzeichnis .....	XIV
Abkürzungen .....	XX
Symbolverzeichnis .....	XXI
1 Einleitung .....	1
1.1 Zielsetzung .....	1
1.2 Aufbau der Arbeit .....	1
1.3 Notation und Vereinbarungen .....	2
2 Einige Grundlagen Faseroptischer Gyroskope .....	4
2.1 Drehratensensoren .....	4
2.1.1 Ausführungen und Einsatz von Drehratensensoren .....	4
2.1.2 Einsatz in Navigationsapplikationen .....	5
2.1.3 Übliche Genauigkeitsmaße für Faseroptische Gyroskope .....	6
2.1.4 Genauigkeitsanforderungen .....	10
2.2 Faseroptische Grundlagen .....	11
2.2.1 Funktionsweise von Lichtwellenleitern .....	11
2.2.2 Lichtausbreitung in Glasfasern .....	14
2.2.3 Elastooptischer Effekt in Glasfasern .....	15
2.3 Grundlagen der Interferometrie .....	16
2.3.1 Michelsoninterferometer .....	16
2.3.2 Der Sagnac-Effekt .....	18
2.3.3 Faseroptische Gyroskope als Sagnac-Interferometer .....	20
2.3.4 Phasenmodulation .....	21
2.3.5 Ringresonatoren und Ringlaser .....	23
2.4 Ursachen von Messabweichungen in Fasergyroskopen .....	24
2.4.1 Nichtreziproke Phasenverschiebung in Faseroptischen Gyroskopen .....	24

---

2.4.2	Thermisch und mechanisch verursachte Messabweichungen in Faseroptischen Gyroskopen.....	26
2.4.3	Rauschmechanismen.....	28
2.5	Gängige Maßnahmen zur Genauigkeitssteigerung.....	29
2.5.1	Symmetrisierung der Belastung der Faser .....	29
2.5.2	Quadrupolspulen als Maßnahme zur Reduzierung des Einflusses von Temperatur- und Spannungsgradienten .....	29
2.5.3	Superstrahlungsdioden als Maßnahme gegen Rayleigh-Rückstreuung .....	30
2.6	Ausführungen von Faserspulen und deren Auswirkung auf mechanisch verursachte Abweichungen .....	31
2.7	Stand der Wissenschaft und Technik .....	32
3	Elastizitätstheoretische Grundlagen .....	34
3.1	Überblick .....	34
3.2	Einige Zusammenhänge der linearen Elastizitätstheorie.....	35
3.2.1	Vorbemerkungen und Vereinbarungen .....	35
3.2.2	Materialgleichungen .....	35
3.2.3	Kinematische Grundgleichungen.....	36
3.2.4	Bewegungsgleichung.....	36
3.2.5	Gleichgewichtsbedingungen .....	37
3.2.6	Ebene Probleme in kartesischen Koordinaten.....	37
3.2.7	Ebene Probleme in Polarkoordinaten.....	39
3.2.8	Lösung ebener Probleme mit Airyschen Spannungsfunktionen.....	40
3.2.9	Michell-Lösung für ebene Probleme in Polarkoordinaten .....	40
3.2.10	Dreidimensionale rotationssymmetrische torsionslose Belastung ..	41
3.3	Mechanisches Verhalten von Elastomeren .....	42
3.3.1	Anforderungen an Kleb- und Füllstoffe für Faserkreisel .....	42
3.3.2	Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang.....	43
3.3.3	Temperaturabhängigkeit des E-Moduls .....	44
3.3.4	Viskoelastizität von Elastomeren.....	45
3.3.5	Silikone.....	47
3.3.6	Die Querkontraktionszahl von Elastomeren .....	48

---

3.3.7	Haftung an Grenzflächen .....	48
3.4	Lineare Elastizitätstheorie transvers-isotroper Körper .....	49
3.4.1	Allgemeine Anisotrope Materialien .....	49
3.4.2	Orthotrope Materialien .....	50
3.4.3	Transversal-Isotrope Körper .....	51
4	Modellierung thermischer und mechanischer Einflüsse auf FOGs .....	53
4.1	Einführung und Übersicht .....	53
4.2	Datenflussdiagramm des gesamten Berechnungsvorgangs .....	54
4.3	Nichtreziproke Phasenverschiebung durch Brechzahlmodulation .....	55
4.3.1	Berechnung der nichtreziproken Phasenverschiebung .....	55
4.3.2	Drehratenabweichungen aufgrund laufender thermischer Wellen („Shupe-Effekt“) .....	57
4.3.3	Drehratenabweichungen aufgrund thermoelastischer Verformungen .....	59
4.3.4	Auswirkung der Längsdehnung .....	59
4.3.5	Drehratenabweichung bei zeitlich transients elastischer Verformung der Faserspule .....	60
4.4	Makroskopisches Verzerrungsfeld .....	62
4.4.1	Modulbeschreibung .....	62
4.4.2	Annahmen und Näherungen .....	63
4.4.3	Differentialgleichungssystem und Randbedingungen .....	64
4.4.4	Lasten und Randbedingungen .....	65
4.4.5	Behandlung des Gehäuses .....	66
4.4.6	Symmetrien des FOG .....	66
4.5	Numerische Berechnung der Drehratenabweichung .....	67
4.5.1	Numerische Integration der Faserverzerrungen .....	67
4.5.2	Geometrische Gesichtspunkte .....	68
4.5.3	Besonderheiten dreidimensionaler Verzerrungsfelder .....	69
4.5.4	Faserkoordinaten von Quadrupolspulen .....	69
5	Homogenisierung und Dehomogenisierung von Faserspulen .....	71
5.1	Grundzusammenhänge .....	71
5.1.1	Repräsentative Volumenelemente .....	71



---

5.1.2	Berechnung makroskopischer Spannungs- und Deformationsfelder .....	74
5.1.3	Numerische Integration von FE-Simulationsergebnissen .....	75
5.1.4	Makroskopische Materialgleichungen .....	76
5.1.5	Bekannte analytische Näherungslösungen zur Berechnung effektiver Materialparameter linearfaserverstärkter Verbundwerkstoffe .....	76
5.2	Homogenisierung linearfaserverstärkter Verbundwerkstoffe mit mehrschichtigen Fasern .....	76
5.2.1	Modulbeschreibung .....	76
5.2.2	Spezifisches Gewicht .....	78
5.2.3	Longitudinaler Elastizitätsmodul .....	78
5.2.4	Simulationsbasierte Bestimmung mechanischer Kennwerte .....	78
5.2.5	Simulationsbasierte Bestimmung thermischer Ausdehnungskoeffizienten .....	80
5.3	Dehomogenisierung .....	82
5.3.1	Zusammenhang zwischen makroskopischer und mikroskopischer Deformation .....	82
5.3.2	Faserverzerrungen .....	83
5.3.3	Bestimmung der Dehomogenisierungsmatrix .....	83
5.3.4	Simulationsbasierte Bestimmung von Dehomogenisierungskoeffizienten .....	84
5.4	Analytisch näherungsweise Homogenisierung und Dehomogenisierung .....	84
5.4.1	Näherungslösung zur Randbedingung RB1 .....	85
5.4.2	Spannungs- und Verschiebungsmittelwerte .....	88
5.4.3	Randbedingung RB2 .....	89
5.4.4	Dehomogenisierung .....	91
5.5	Zusammenfassung: Homogenisierung und Dehomogenisierung per FE-Simulationen .....	92
6	Anwendungen .....	93
6.1	Übersicht .....	93
6.2	Homogenisierung .....	93
6.2.1	Aufbau der Faserspule .....	93

---

6.2.2	FE-Modell.....	95
6.2.3	Simulationsergebnisse .....	96
6.2.4	Materialparameter.....	96
6.3	Dehomogenisierung.....	97
6.4	FK-Mil.....	97
6.4.1	Aufbau.....	97
6.4.2	Simulationsmodelle .....	98
6.4.3	Ablösen der Spule und Vergusschicht vom Gehäuse .....	99
6.4.4	Drehratenabweichung bei thermischen Transienten .....	100
6.4.5	Drehratenabweichung bei Vibration.....	102
6.5	FOG-2M .....	103
6.5.1	Aufbau.....	103
6.5.2	Simulationsmodell.....	103
6.5.3	Drehratenabweichung bei Vibration.....	104
6.6	Optimierungsmöglichkeiten.....	106
6.6.1	Optimierung mit Simulationsreihen.....	106
6.6.2	Allgemeingültige Regeln zur Senkung der mechanischen Querempfindlichkeit.....	108
6.6.3	Symmetriebedingungen in der Spule.....	108
6.6.4	Verguss und Klebstoff.....	110
6.7	Verifikation der analytischen Näherungslösung .....	111
6.7.1	Analytisch und simulationsbasiert bestimmte Materialparameter.	111
6.7.2	Spannungen und Randverschiebungen .....	111
7	Zusammenfassung.....	114
8	Ausblick.....	115
A	Anhang.....	116
A.1	Elastooptischer Effekt in Lichtwellenleitern.....	116
A.1.1	Lineare Polarisation.....	116
A.1.2	Ausbreitung von Licht in anisotropen Medien.....	117
A.1.3	Elastooptischer Effekt.....	118

---

A.1.4	Brechzahländerungen in zylindrischen Wellenleitern aufgrund des elastooptischen Effekts .....	119
A.2	Symmetrische Belastung längs der Faser .....	120
A.3	Effektiver Brechungsindex von Glasfasern.....	121
A.4	Berechnung anisotroper Materialparameter aus Simulationsergebnissen.....	122
Literaturverzeichnis .....		124
Lebenslauf .....		129

## Abkürzungen

CCW	Counterclockwise
CW	Clockwise
DRA	Drehratenabweichung
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FK-Mil	Faserkreisel #1 mit kreissymmetrischer Zylinderspule
FKV	Faser-Kunststoffverbund
FOG	Fiberoptic Gyroscope, Faserkreisel
FOG-2M	Faserkreisel #2 mit quasielliptischer Quadrupolspule
FVW	Faser-Verbundwerkstoff
GLS	Gleichungssystem
IFOG	Interferometric Fiberoptic Gyroscope, Faserkreisel
IMU	Inertial Measurement Unit
INS	Inertial Navigation System
IOC	Integrated Optical Circuit
LSB	Least Significant Bit
LWL	Lichtwellenleiter
OOP	Out-of-Plane(-Vibration)
PE-Faser	Polarisationserhaltende Faser
RB1, 2, 3	Randbedingungssatz 1 (bzw. 2, 3) und die dabei ermittelten Simulationsergebnisse
RLG	Ring Laser Gyroscope, Laserkreisel
RVE	Repräsentatives Volumenelement
SLD	Superluminescent Diode, Superstrahlungsdiode
WLF	Williams-Landel-Ferry (-Gleichung)

## Symbolverzeichnis

$E$	Elastizitätsmodul oder Elektrische Feldstärke
$E_p, E_z$	Elastizitätsmodule orthotroper Werkstoffe
$\nu$	Querkontraktionszahl (Poissonzahl)
$\nu_{pz}, \nu_{zp}, \nu_p$	Querkontraktionszahlen orthotroper Werkstoffe
$G$	Schubmodul
$\vec{S}, S_{ijkl}$	Nachgiebigkeitstensor bzw. dessen Komponenten
$S, S_{ij}$	Nachgiebigkeitsmatrix bzw. deren Komponenten
$\lambda$	Erste Lamékonstante oder Wellenlänge
$\lambda_0$	Wellenlänge im Vakuum
$\mu$	Zweite Lamékonstante
$\alpha$	Thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_p, \alpha_z$	Thermische Ausdehnungskoeffizienten orthotroper Werkstoffe
$\rho$	Spezifisches Gewicht
$\vec{\sigma}$	Spannungstensor
$\sigma_{ij}$	Komponenten des Spannungstensors
$\vec{\epsilon}$	Linearer Verzerrungstensor
$\epsilon_{ij}$	Komponenten des linearen Verzerrungstensors
$\vec{u}$	Verschiebungsvektor
$u_i; u, v, w$	Komponenten des Verschiebungsvektors
$\vec{E}$	Elektrischer Feldstärkevektor
$\vec{H}$	Magnetischer Feldstärkevektor
$\vec{j}$	Jones-Vektor
$n$	Brechungsindex
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum oder im Medium
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
$\beta, \beta_0$	Ausbreitungskonstante in Lichtwellenleitern Medium bzw. im Vakuum

---

$r$	Radialkomponente in zylindrischen Koordinatensystemen; Abstand vom Ursprung
$\theta$	Azimut
$\Omega$	Drehrate
$\Delta T$	Temperaturunterschied zu einer Bezugstemperatur
$\Delta\Phi$	Phasendifferenz zwischen zwei interferierenden Lichtwellen
$\text{grad}(f), \nabla f$	Gradient eines Skalarfeldes $f$
$\text{grad}(\vec{u}), \nabla\vec{u}$	Gradient eines Vektorfeldes $\vec{u}$
$\text{div}(\vec{u}), \nabla \cdot \vec{u}$	Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{u}$
$\text{div}(\vec{\sigma}), \nabla \cdot \vec{\sigma}$	Divergenz eines Tensorfeldes $\vec{\sigma}$
$\text{rot}(\vec{u}), \nabla \times \vec{u}$	Rotation eines Vektorfeldes $\vec{u}$
$\Delta, \nabla^2$	Laplace-Operator, $\nabla^2 = \text{div} \circ \text{grad}$
$f_{,r}, f_{,i}$	Partielle Ableitung einer Funktion $f$ nach $r$ bzw. $x_i$
$\bar{\epsilon}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \text{etc.}$	Gemittelte Verzerrungen bzw. Spannungen im RVE
$\bar{u}_{x,r}, \bar{u}_{x,l}, \bar{u}_{y,o}, \bar{u}_{y,u}$	Mittlere normale Verschiebung des rechten, linken, oberen bzw. unteren RVE-Randes
$:=$	Gleichheit „per Definition“



# 1 Einleitung

## 1.1 Zielsetzung

Das Ziel der hier vorgestellten Untersuchungen ist, den Einfluss der Störfaktoren Temperatur und Vibration zu untersuchen. Es sollten mathematische Modelle entwickelt werden, mit denen die Entwicklung neuer Sensoren auf eine zuverlässigere Grundlage gestellt werden kann. Dadurch sollen die bisher weitgehend üblichen experimentellen Verfahren durch leistungsfähigere Tools ersetzt werden können.

Für die Temperaturänderungen sollte angenommen werden, dass der gesamte Sensor einer homogenen Temperaturänderung unterworfen ist, also keine räumlichen Variationen auftreten. Unter dieser Bedingung sollten nach dem Stand der Wissenschaft keine Nullpunktabweichungen des Sensorsignals auftreten, was jedoch in unserer Arbeitsgruppe bereits vor Beginn der Untersuchungen als sicher nicht zutreffende Annahme angezweifelt wurde und mit Hilfe der Untersuchungen belegt werden sollte.

Die bei der Modellierung des thermischen Verhaltens gewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen sollten dann eine Erweiterung erfahren zur Untersuchung der Effekte, die bei der mechanischen Vibration auftreten und die heute neben dem Temperaturproblem die zentrale Ursache von Messabweichungen darstellen.

Die Aufgabe bestand also darin, mathematische Modelle zu erstellen, mit denen die unerwünschte Querempfindlichkeit von FOGs auf die beiden genannten Klassen von Störungen zuverlässig berechenbar ist. Damit sollte auch erreicht werden, dass die Wirkung von Änderungen der Bauform oder der Materialwahl des Faserkreisels auf sein Fehlverhalten voraussagbar wird.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Im ersten Grundlagenkapitel (Kapitel 2) wird die Wirkungsweise von FOGs beschrieben, die Grundlagen der Lichtausbreitung in Fasern und der Interferometrie werden wiederholt, und es wird ein Überblick über mechanische, optische und elektromagnetische Fehlerursachen von FOGs gegeben. Das zweite Grundlagenkapitel (Kapitel 3) behandelt verschiedene Zusammenhänge der Elastizitätstheorie linearelastischer isotroper und anisotroper Körper. Da Elastomere, in der Praxis oft Silikone, im Faserkreisel als Klebstoff und Vergussmasse mechanisch eine große Rolle spielen, werden auch einige Besonderheiten des



mechanischen Verhaltens von Polymeren, Elastomeren und speziell Silikonen beschrieben.

Kapitel 4 ist gewissermaßen das thematische Zentrum dieser Arbeit: Hier wird ein mathematisches Modell der Querempfindlichkeit von Faserkreiseln in Bezug auf Temperaturänderungen und Vibration vorgestellt. Dabei wird auf Ergebnisse Bezug genommen, die in Kapitel 5 genauer beschrieben werden: die Homogenisierung und Dehomogenisierung von linearfaserverstärkten Kunststoffverbunden (eine in Silikon vergossene Glasfaserspule stellt in mechanischer Sicht einen ebensolchen Verbundwerkstoff dar).

In Kapitel 6 werden Simulationsergebnisse mit Messergebnissen verglichen, und es werden darüber hinaus einige Gestaltungsrichtlinien von Faserkreiseln vorgeschlagen, die sich aus dem mathematischen Modell bzw. durch Auswertung von Simulationsergebnissen ergeben.

### 1.3 Notation und Vereinbarungen

- Summations- und Integrationsgrenzen werden zuweilen nicht spezifiziert, wenn sie aus dem Zusammenhang klar sein sollten
- Es wird nicht zwischen ko- und kontravarianten Tensoren unterschieden. Indizes sind immer tiefgestellt
- Die Diagonalelemente des Spannungstensors  $\vec{\sigma}$  und des Verzerrungstensors  $\vec{\epsilon}$  werden oft zu  $\sigma_{xx} = \sigma_x$ ,  $\epsilon_{rr} = \epsilon_r$  etc. abgekürzt
- Partielle Ableitungen werden häufig im Subskript, durch ein Komma vom Funktionsnamen bzw. vom letzten Index getrennt, geschrieben (z. B.  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x}$  oder  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$ )
- Formeln, auf die besonders häufig Bezug genommen wird, werden fett geschrieben
- In einigen Fällen werden auch zusätzliche Indizierungen von der vorherigen durch ein Komma getrennt, z.B.  $\bar{\sigma}_{r,F}$  (Mittelwert von  $\sigma_r$  in der Faser) oder  $u_{x,re}$  (Verschiebung  $u_x$  am rechten Rand der Faser)
- Definitionen werden in Formeln mit „:=“ gekennzeichnet
- In der englischsprachigen Literatur werden rotationssymmetrische Körper bzw. Probleme (d.h.  $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ ) als „axisymmetric“ bezeichnet, Rotationssymmetrie als „axial symmetry“. Im Deutschen ist jedoch „Axiale Symmetrie“ oft gleichbedeutend mit Spiegelsymmetrie oder Symmetrie entlang einer Achse ( $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ ). In dieser Arbeit wird daher der Begriff „Rotationssymmetrie“ für Symmetrien des ersten Typs ( $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ ) benutzt

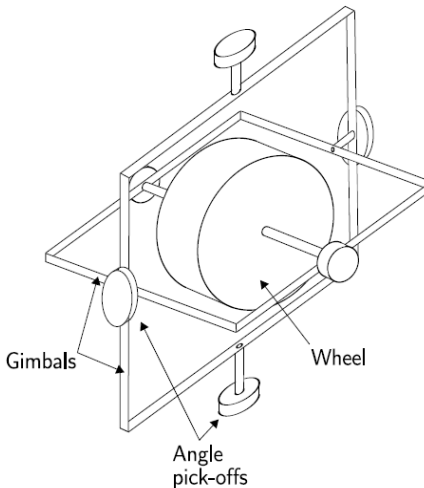
- 
- Es werden ausschließlich Lagrangekoordinaten benutzt, d.h. Punktkoordinaten beziehen sich immer auf den undeformierten Körper.
  - Glasfasern sind typischerweise aus einem Kern und einem diesen umgebenden Mantel aufgebaut, die beide aus demselben Material (hochreines Quarzglas) bestehen, das im Kern jedoch dotiert ist [11]. Mechanisch sind beide Bereiche nahezu identisch, so dass ihre mechanischen Eigenschaften in dieser Arbeit als gleich angenommen werden. Der Glaskörper ist i.d.R. von einem oder mehreren Kunststoff-Coatings umgeben. Kern und Mantel werden in dieser Arbeit kurz als Faser bezeichnet; Coatings werden bei Bedarf getrennt erwähnt.

## 2 Einige Grundlagen Faseroptischer Gyroskope

### 2.1 Drehratensensoren

#### 2.1.1 Ausführungen und Einsatz von Drehratensensoren

Wie in Unterkapitel 1.1 erläutert, sind FOGs hochpräzise Inertialsensoren zur Messung der Rotationsgeschwindigkeit. Bei FOGs findet die Wechselwirkung mit der Messgröße nicht wie beim mechanischen Kreisel (siehe Abbildung 1) über eine bewegte Masse statt, sondern der Sensoreffekt nutzt mit dem sog. Sagnac-Effekt einen relativistischen Effekt aus, der bei der Rotation eines Ringinterferometers mit Glasfasern im „inertialen“ Raum auftritt.



**Abbildung 1: Prinzipaufbau eines kardanisch gelagerten mechanischen Kreisels [2]. Mithilfe dieser in 2 Winkelfreiheitsgraden beliebig ausrichtbaren Anordnung kann ein Kreisel so ausgerichtet werden, dass er trotz einer Rotation des Trägerfahrzeugs (oder Flugzeugs) seine Orientierung im inertialen Raum beibehält.**

Aufgrund ihrer hohen Präzision stellen sie neben den noch etwas präziseren Laserkreiseln (und linearen Beschleunigungsmessern als dem zweiten dafür benötigten Sensortyp) den Standardsensor für inertielle Navigationssysteme (INS, Inertial Navigation Systems) in der Luft- und Raumfahrt dar.

Neben klassischen mechanischen Kreiseln und den optischen Faser- und Ringlaserkreiseln finden auch mikromechanische Rotationssensoren einen stetig wachsenden Markt. Sie sind wesentlich günstiger und auch robuster als zumindest die klassischen mechanischen und die Laserkreisel, doch ist ihre Genauigkeit noch zu niedrig, ihre Querempfindlichkeit gegenüber Vibration und ihre Temperaturdrift zu hoch für einen Einsatz in Navigationssystemen.

Hier ein Vergleich zwischen mechanischen, faseroptischen (IFOG, Interferometric Fiber Optic Gyroscopes), Ringlaser- (RLG, Ring Laser Gyroscopes) und anderen Kreiseln.

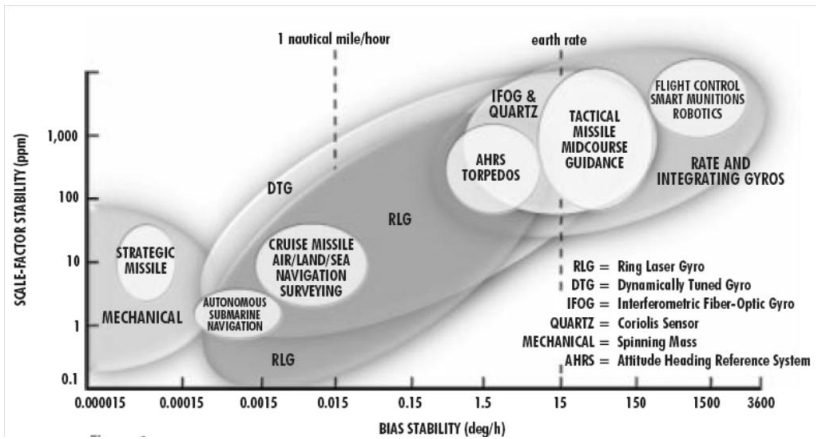
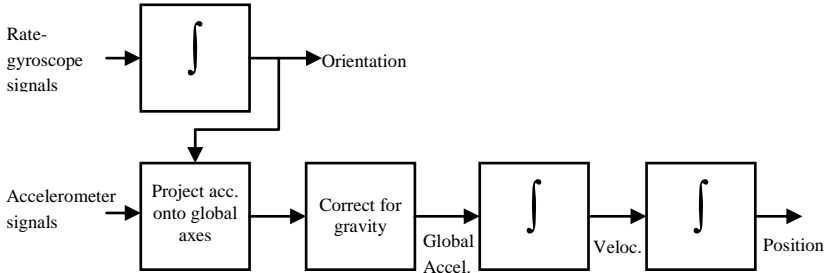


Abbildung 2: Leistungsdaten und Einsatzbereiche mechanischer, faseroptischer, Ringlaser- und anderer Kreisel [3]

### 2.1.2 Einsatz in Navigationsapplikationen

Neben Laserkreiseln sind Faserkreisel häufig verwendete Drehratensensoren in IMUs (Inertial Measurement Units). In IMUs werden Drehraten- und Beschleunigungssignale durch mehrfache Integration und Koordinatentransformation in eine Position umgerechnet (s. Abbildung 3). Eine dreidimensionale Bewegung – wie sie in Luft-, Raum- und Schifffahrt gegeben ist – kann durch drei Linearbeschleunigungs- und drei Rotationssensoren eindeutig berechnet werden; man spricht dann von einer dreiachsigen IMU bzw. INS (Inertial Navigation System). Die dazu erforderliche rechnerische Integration der Sensorsignale führt jedoch dazu, dass selbst kleinste Abweichungen vom genauen Wert sich immer weiter aufsummieren und dabei eine mit der Zeit immer größer werdende Abweichung der errechneten Positionskoordinate verursachen. Daher sind die Genauigkeitsanforderungen an solche Sensoren immens (s. Abschnitt 2.1.4).



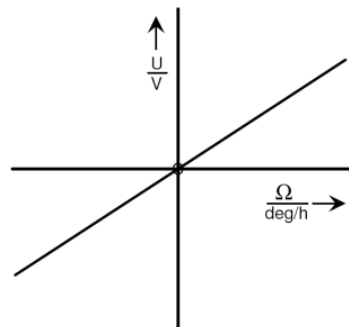
**Abbildung 3:** Schema einer Navigationseinheit, hier zur Vereinfachung nur für eine Achse dargestellt [2]

### 2.1.3 Übliche Genauigkeitsmaße für Faseroptische Gyroskope

In der Technik sind Begriffe wie Genauigkeit, Auflösung, Messfehler, Abweichung, Rauschen häufig anzutreffen; sie werden aber oft unpräzise gebraucht. Einige Begriffe, die bei der Spezifizierung von Faserkreiseln und speziell in dieser Arbeit verwendet werden, sollen hier genauer definiert werden.

Prinzipiell wird zwischen systematischen und zufälligen Abweichungen unterschieden. Systematische Abweichungen sind bauartbedingt und z.B. durch eine falsche Kalibration verursacht, somit reproduzierbar und – ggf. nachträglich – wieder herausrechenbar [22]. Werden sie durch Umgebungseinflüsse hervorgerufen, werden sie nur dann als systematisch bezeichnet, wenn die Umgebungsvariablen und deren Einfluss auf die Messgröße bestimmbar bzw. bekannt sind. und auch in diesem Fall wieder herausgerechnet werden – jedenfalls dann, wenn der Einfluss der wirksamen Umgebungsparameter (z.B. Temperatur, aber auch Luftdruck, Feuchte, Magnetfeld) bekannt ist und die jeweilige Größe erfasst wird.

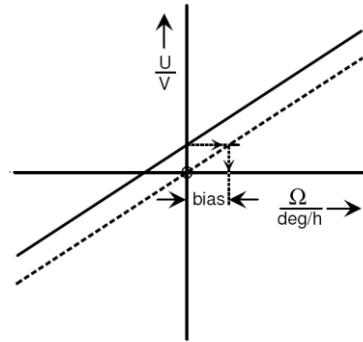
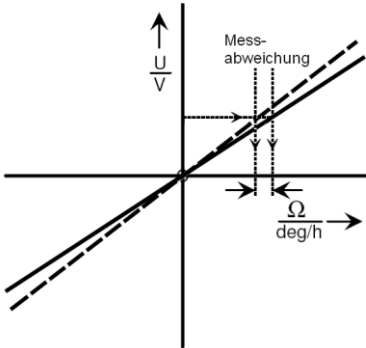
Bei einem Sensor wird i.d.R. ein linearer Zusammenhang zwischen der Messgröße und der elektrischen Ausgangsgröße angestrebt, so wie das in der rechtsstehenden Abbildung als Beispiel für einen Drehratensensor mit Spannungsausgang dargestellt ist. Die Sensorcharakteristik lautet hier einfach  $U = S \cdot \Omega$ . Der die Steilheit der Kennlinie beschreibende Parameter  $S$  wird als Skalenfaktor bezeichnet.



**Abbildung 4:** zwischen Drehrate und Sensorspannung wird ein linearer

### Zusammenhang angenommen

Unter Bezug auf diese Idealkennlinie lässt sich ein Fehlverhalten des Sensors - unter der Prämisse einer idealen Linearität - zwei möglichen Klassen zuordnen: a) Abweichender Skalenfaktor  $S$  und b) Achsenversatz. Beide Fehlerarten sind schematisch in den folgenden Abbildungen dargestellt.



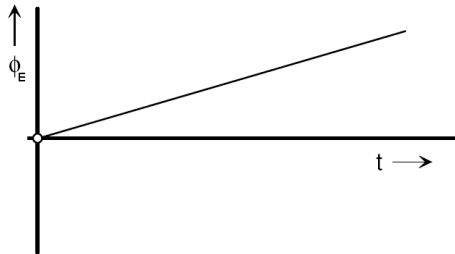
**Abbildung 5: Fehlerhafter Skalenfaktor**

**Abbildung 6: Achsenversatz (Bias)**

Im dargestellte Fall eines zu kleinen Skalenfaktors (Abbildung 5) nimmt die Signalverarbeitung die strichlierte Kurve als vermeintlich wirksame Kennlinie an, während tatsächlich der Sensor die durchgezogen gezeichnete Kennlinie aufweist. Damit liegt hier eine positive Messabweichung vor, das System interpretiert aber falsch und rechnet mit einem zu klein angenommenen Drehratenwert als Ursache des Ausgangssignals. Dieser Fehlermechanismus führt offensichtlich zu einer drehratenproportionalen Messabweichung. Bei Drehrate null tritt keine Abweichung auf.

Im Gegensatz dazu bezeichnet man mit Bias oder Offset eine drehratenunabhängige Messabweichung. In Abbildung 6 ist die tatsächlich wirksame Kennlinie wieder durchgezogen gezeichnet, während die strichliert gezeichnete wieder die ideale, aber eben wieder nicht wirklich vorhandene Kennlinie zeigt. Hier wird also z.B. bei einer Drehrate  $\Omega=0$  eine Ausgangsspannung ausgegeben, die unter der Prämisse der Gültigkeit der strichlierten Kennlinie dann einer Drehrate zugeordnet wird, die von null abweicht und als Bias bezeichnet wird.

Ein Bias ist vom Prinzip her zunächst zeitlich konstant und gehört damit zur Klasse der systematischen Messabweichungen; er kann also einmal bestimmt und dann immer aus dem Ausgabesignal herausgerechnet werden. Im Fall eines Kreisels führt ein konstanter Bias im Ausgangssignal dazu, dass das durch Integration der Drehrate berechnete Winkelsignal  $\Phi_E$  eine Drift aufweist (Abbildung 7):



**Abbildung 7: Bei einem zeitlich konstanten Drehratenbias steigt der Winkelfehler linear mit der Zeit**

Ist der Bias zeitlich nicht konstant, sondern ändert er sich langsam, so spricht man von Biasdrift oder einfach Drift (Die Ursache hierfür sind häufig Änderungen der Umgebungs- bzw. Betriebstemperatur, die ja i.d.R. langsam erfolgen). Auch hier ist immer noch eine Korrektur möglich, wenn die Parameteränderungen, die die Drift verursachen, bekannt sind und ihre Wirkungsmechanismen ebenfalls.

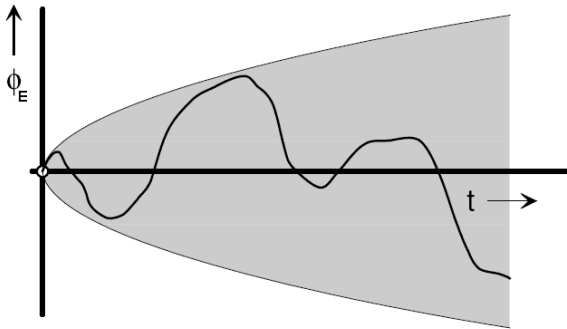
Sind die Ursachen dagegen nicht bekannt, so ist der Fehlermechanismus als zur Klasse der zufälligen Abweichungen gehörig einzustufen.

Auch eine dynamische Abweichung des Ausgabesignals aufgrund einer Vibration kann im Fall eines Kreisel systems als systematische Abweichung eingestuft werden - solange jedenfalls, wie der Wirkungsmechanismus klar nachvollziehbar ist und ein mathematisches Modell die aus gegebenen Vibrationsparametern resultierende Abweichung zu beschreiben erlaubt, so dass eine Korrekturrechnung möglich ist.

Hier können die Zusammenhänge aber auch leicht so kompliziert werden, dass eine Modellbildung mit einfachen Mitteln nicht mehr möglich ist und somit auch keine nachträgliche Korrektur mehr durchgeführt werden kann. Ist das der Fall, so muss die resultierende Messabweichung als zur Klasse der zufälligen Abweichungen gehörig eingestuft werden. Solche Abweichungen sind grundsätzlich nicht mehr systematisch berechenbar und können nur noch mit statistischen Methoden behandelt werden. Das gilt natürlich noch mehr, wenn die möglichen Störursachen und / oder ihre Wirkungswege gar nicht bekannt sind oder zumindest nicht erfasst wurden.

Zusätzlich zu den bereits genannten konstanten bzw. langsam veränderlichen Abweichungen ist das Sensorsignal auch mit Rauschen behaftet. Rauschgrößen werden typischerweise bandbreitebezogen mit der Einheit  $V^2/Hz$  (falls es sich um eine Spannung handelt) bzw.  $V/\sqrt{Hz}$  angegeben [73]. Man nimmt dabei zumindest über einen weiten Frequenzbereich weißes Rauschen an, also konstante Rauschleistungsdichte.

In Faserkreiseln wird diese unanschauliche Größe durch eine dazu äquivalente ersetzt: den „Random Walk“. Dieser gibt die Standardabweichung des Winkels an, der durch Integration der (verrauschten) Drehrate berechnet wird. Die Unsicherheit (genauer: die Standardabweichung) der Winkelabweichung  $\Phi_E$ , ausgehend von  $\Phi_E = 0$ , wird mit zunehmender Zeit immer größer. Sie steigt allerdings nicht proportional zur Zeit  $t$  sondern  $\sim\sqrt{t}$ . Der Random Walk wird daher in der Einheit  $^\circ/\sqrt{h}$  angegeben. Dabei entspricht, wie man durch Umrechnung der Einheiten zeigen kann,  $1^\circ/\sqrt{h} = 60 \frac{^\circ/h}{\sqrt{Hz}}$  [12].



**Abbildung 8: Der Unsicherheitsbereich des Winkelfehlers ( $1\sigma$ , grau markiert) steigt quadratwurzelförmig mit der Zeit**

Neben den Kenngrößen der genannten Messabweichungen – sie bezogen sich auf das Nullpunktsignal von FOGs, also auf das Sensorsignal bei Drehrate null – gibt es weitere Kenngrößen, die zur genauen Charakterisierung eines Sensors angegeben werden müssen. Dazu zählt in erster Linie die Empfindlichkeit, die i.d.R. als Skalenfaktor (s.u.) angegeben wird. Weitere Kenngrößen sind Kennlinien-Linearität, Reproduzierbarkeit, Langzeitverhalten, Temperaturabhängigkeiten etc.

Die Liste typischer Leistungsparameter von Faserkreiseln umfasst damit:

- Skalenfaktor. Dessen Einheit kann z.B. sein:  $^\circ/h$  pro Volt Ausgangsspannung
- Drehratenauflösung in  $^\circ/h$ . Diese Größe wird bei FOGs mit digitalem Ausgang angegeben und basiert auf 1 LSB (Least Significant Bit, also die Quantisierungsstufe) des verwendeten Analog-Digital-Wandlers
- Dynamikbereich in  $^\circ/h$ . Dies ist die maximale messbare Drehrate
- Skalenfaktorlinearität in  $\%/max$ . Dies ist die maximale Abweichung des tatsächlichen Ausgabesignals von der über den Skalenfaktor definierten ideal-linearen Kennlinie



- Drehratenbias in  $^{\circ}/h$
- Nullpunktunsicherheit oder „Random Walk“ in  $^{\circ}/\sqrt{h}$
- Skalenfaktorstabilität ( $1\sigma$ ). Dieser Parameter ist ein Maß für die langfristige Unsicherheit des Skalenfaktors

Durch die Nullpunkt- und Skalenfaktorstabilität wird das Langzeitverhalten des Faserkreisels bestimmt. Das höherfrequente Rauschen wird in diesem Fall durch Integration verringert („weggemittelt“), spielt aber bei Stabilisierungsanwendungen eine Rolle.

### 2.1.4 Genauigkeitsanforderungen

Die Anforderungen an Rotationssensoren in den Bereichen Navigation (inertial grade), ballistische Flugkörper / Lagestabilisierung (tactical grade) und Standardanwendungen (rate grade) sind sehr unterschiedlich [12]:

	Random Walk	Phase Bias	Skalenf.-Gen. ( $1\sigma$ )
<b>Inertial grade</b>	$< 10^{-3^{\circ}}/\sqrt{h}$	$< 10^{-2^{\circ}}/h$	$< 5\text{ppm}$
<b>Tactical grade</b>	$0.05 \dots 0.5^{\circ}/\sqrt{h}$	$0.1 \dots 10^{\circ}/h$	$10 \dots 1000\text{ppm}$
<b>Rate grade</b>	$> 0.5^{\circ}/\sqrt{h}$	$10 \dots 1000^{\circ}/h$	$0.1 \dots 10\%$

**Tabelle 1: Anforderungen an Drehratensensoren in verschiedenen Anwendungsbereichen**  
Hier eine feiner unterteilte Liste von Genauigkeitsanforderungen für Anwendungen von der Robotik bis zur Satellitenstabilisation:

<b>100<math>^{\circ}/h</math></b>	<b>10<math>^{\circ}/h</math></b>	<b>1<math>^{\circ}/h</math></b>	<b>0.1<math>^{\circ}/h</math></b>	<b>0.01<math>^{\circ}/h</math></b>	<b>0.001<math>^{\circ}/h</math></b>
Robotik, KFZ	Helikopter-stabilisierung	Neige- und Kippwinkel-messung	Kreisell-kompass, Telek.-Satelliten	Wissensch. Satelliten, Avionik, Raketen, Schiffe, U-Boote	Beobacht.-satelliten, militärische U-Boote und Schiffe

**Tabelle 2: Genauigkeitsanforderungen an Drehratensensoren [16]**

Es existieren derzeit nur wenige kommerziell verfügbare Faserkreisel, die die Anforderungen an Inertialnavigationssensoren unter luft- und raumfahrttypischen Bedingungen erfüllen<sup>1</sup>. Vermutlich werden diese thermisch und mechanisch sehr stark isoliert. Die hohen klimatischen (etwa  $-40 \dots +70^{\circ}\text{C}$  [8]) und mechanischen Belastungen (Vibration bis  $10g_{\text{rms}}$ ) in Luft- und Raumfahrt beschränken momentan

<sup>1</sup> s. [10]. Gespräche mit Faserkreiselherstellern lassen annehmen, dass in der Navigation weiterhin hauptsächlich Laserkreisel eingesetzt werden.

den Einsatz der meisten FOGs jedoch auf taktische und Stabilisations-Anwendungen.

Die nachfolgende Tabelle 3 enthält einige Genauigkeitsangaben kommerzieller FOGs [7], [8], [9].

	<b>Nullp.- Rauschen</b>	<b>Phase Bias</b>	<b>Skalenf.- Gen.</b>	<b>Anwendung</b>
<b>IMAR iOLFog-S-D-xx</b>	$0.1^\circ/\sqrt{h}$	$18^\circ/h$	0.2%	KFZ, Schifffahrt
<b>KVH TG-6000</b>	$0.25^\circ/\sqrt{h^{(2)}}$	$10^\circ/h$	0.5%	Luftfahrt, Militär
<b>Sagem FOG-1S</b>	$0.2^\circ/\sqrt{h}$	$10^\circ/h$	0.1%	Luftfahrt, Militär

**Tabelle 3: Daten einiger kommerziell verfügbarer Faserkreisel**

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Weiteren ausschließlich mit der Nullpunktstabilität und dem Nullpunktrauschen. Die Berechnung der Skalenfaktoränderung auf Grundlage dieser Arbeit sollte nicht allzu schwer sein. Es müssen jedoch andere Effekte berücksichtigt werden. So ist z.B. die durch Temperaturschwankungen hervorgerufene Nullpunkt drift proportional zur Temperaturänderungsrate (in K/min), die Skalenfaktoränderung aufgrund thermischer Expansion ist dagegen proportional zur Temperatur (in K).

## 2.2 Faseroptische Grundlagen

### 2.2.1 Funktionsweise von Lichtwellenleitern

Lichtwellenleiter (LWL) sind Medien zur geführten Leitung von Licht in Kabeln. Der mit Abstand größte Teil des LWL-Markts ist die Kommunikationstechnik. Das haben LWLs ihrer äußerst geringen Leistungsdämpfung – bis hinunter zu 0.2dB/km – zu verdanken, wie auch ihrer hohen Kanalkapazität: Es existieren Systeme, die per Wellenlängenmultiplex über eine Strecke von 500km Datenraten bis zu 30TBit/s übertragen können. Auch die Unempfindlichkeit von LWLs gegenüber elektrischen und magnetischen Feldern ist ein Vorteil.

Neben diesen haben LWLs auch einige Eigenschaften, die sie für die Messtechnik interessant machen. Die LWL-Sensorik ist ein eigenständiger Bereich der

---

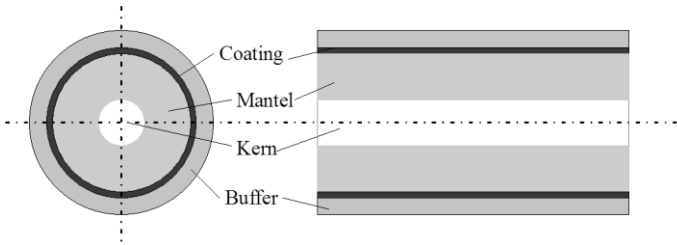
<sup>2</sup> Im Datenblatt wurde ein Nullpunktrauschen von  $0.03^\circ/s$  angegeben. Bei einer ebenfalls angegebenen Bandbreite von 50Hz erhält man daraus eine spektrale Rauschdichte von  $\frac{0.03^\circ/s}{\sqrt{50\text{ Hz}}} = 0.25^\circ/\sqrt{h}$

Messtechnik und reicht von der intensitätsbasierten Abstands- oder Objektkontrolle bis zur hochpräzisen interferometrischen Messung von Abständen, Geschwindigkeiten, Drücken, Temperaturen etc.

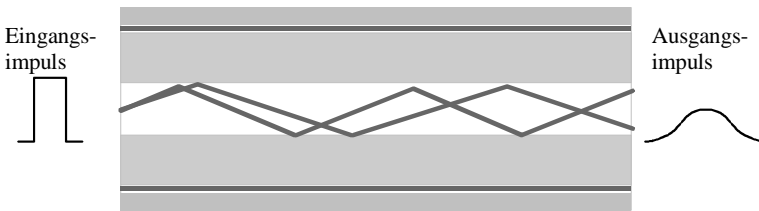
Der LWL ist im Faserkreislauf ein zentrales Element und soll deshalb hier kurz erläutert werden. LWLs bestehen üblicherweise aus einem zylindrischen Kern aus Glas und einem diesen konzentrisch umgebenden Mantel, ebenfalls aus Glas. Diese optisch wirksamen Bereiche sind zum mechanischen Schutz von einer Kunststoffbeschichtung (Coating) und/oder -abschirmung (Buffer) umgeben. (s. Abbildung 9). Durch ständige Totalreflexion eines in den Kern eingekoppelten Lichtstrahls an der Kern-Mantel-Grenze (s. Abbildung 10) ist es möglich, dass das Licht über mehrere hundert Kilometer mit äußerst geringen Verlusten geführt wird.

Dabei muss zur Erzielung der Totalreflexion der Faserkern einen höheren Brechungsindex haben als der Mantel. Dies wird durch eine leicht unterschiedliche Dotierung beider Bereiche erreicht, was aber keine nennenswerten unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften zur Folge hat. In der Interferometrie, also auch in Fasergyroskopen, kommt eine Faser mit besonders kleinem Kerndurchmesser zum Einsatz, die als Monomodefaser bezeichnet wird (s.u.). Deren Kern hat einen Durchmesser von typisch  $3\mu\text{m}$  bis  $10\mu\text{m}$ , ihr Mantel misst typisch zwischen  $80\mu\text{m}$  und  $200\mu\text{m}$ .

Kunststoff-LWLs sollen nicht unerwähnt bleiben, auch wenn sie für Faserkreisläufe keine Rolle spielen. In ihnen bestehen auch Kern und Mantel aus Kunststoff. Der Kern hat einen Durchmesser von bis zu  $1\text{mm}$ , was die Einkopplung von Licht wesentlich erleichtert. Kunststoff-LWLs werden zur Datenübertragung bis etwa  $1\text{ GB/s}$  über Strecken von  $1\text{...}100\text{ m}$  eingesetzt. Sie sind hinsichtlich Dämpfung und Pulsverbreiterung – und somit Kanalkapazität – dem LWL aus Glas deutlich unterlegen.



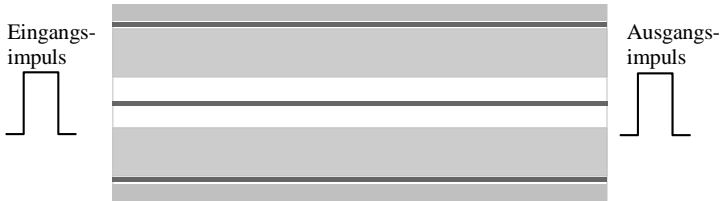
**Abbildung 9: Aufbau einer typischen Glasfaser**



**Abbildung 10: Ausbreitung von „Lichtstrahlen“ in einem Multimode-LWL. Es sind mehrere Lichtwege möglich, wodurch u.a. Lichtpulse „verschmiert“ werden**

In einer Multimode-Faser sind mehrere Ausbreitungswege (im Wellenbild „Moden“ genannt) möglich. Im strahlenoptischen Bild der Abbildung 10 ist ersichtlich, dass ein unter einem steileren Winkel eingekoppelter Lichtstrahl einen längeren Weg in der Faser zurücklegen muss als ein annähernd koaxial eingekoppelter. Die Folge davon ist, dass die Laufzeit „höherer“ Moden zum Faserende größer<sup>3</sup> ist als die „niedriger“ Moden, diese also gegenüber niedrigeren Moden verzögert an den Ausgang gelangen. Dies bewirkt in kommunikationstechnischen Anwendungen eine Verbreiterung von Lichtpulsen und damit eine Reduzierung der möglichen Pulsfolgefrequenz oder Bitrate. Wellenoptisch ausgedrückt bedeutet das, dass unterschiedliche Moden bis zum Faserende eine unterschiedliche Phasendifferenz zueinander aufbauen und somit unterschiedlich interferieren. Da dieser Effekt in hohem Maße zeitlichen Schwankungen unterworfen ist, Interferometer aber gerade auf höchste Stabilität der Signale angewiesen sind, kann man bei interferometrischen Anwendungen von LWLs – und dazu zählt der hier zu behandelnde Faserkreislauf in erster Linie – keine Multimode-Fasern einsetzen: Hier müssen zwingend solche Fasern eingesetzt werden, in denen nur eine Mode ausbreitungsfähig ist, also Monomodefasern.

<sup>3</sup> Genauer ist hier von transversalen Moden die Rede. Dies sind Moden, die sich in ihrem Feldverlauf senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unterscheiden. Longitudinalmoden sind solche mit unterschiedlichen Wellenlängen. Sie spielen v.a. in Lasern eine Rolle



**Abbildung 11:** In einem Monomode-LWL ist nur ein Lichtweg möglich. Man verringert damit drastisch die Pulsverbreitung sowie Mehrfachinterferenzen

### 2.2.2 Lichtausbreitung in Glasfasern

Im Folgenden sollen nun die für unsere Betrachtungen wichtigen Zusammenhänge bei der Lichtausbreitung in Monomodefasern besprochen werden.

Bei diesem Fasertyp versagt das o.a. Strahlenbild; stattdessen muss mit dem Wellenbild gearbeitet werden. Das bedeutet streng genommen die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes mit seinen beiden Vektorkomponenten  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und  $\vec{H}(\vec{x}, t)$ . Es ist jedoch allgemeine Praxis, auf den magnetischen Feldanteil zu verzichten und sich auf das elektrische Feld zu beschränken<sup>4</sup>.

Zwei weitere, im Zusammenhang mit Monomodefasern häufig gemachte Vereinfachungen, sollen auch hier vorgenommen werden: Man vernachlässigt die laterale Abhängigkeit des E-Feldes und behandelt es stattdessen als ein nur von  $z$  (Koordinate in Faserrichtung) und  $t$  abhängiges Feld, so wie man es bei einer ebenen Welle tun würde. Häufig nimmt man außerdem noch an, dass das Ausbreitungsmedium isotrop ist, in dem Sinne, dass sich die Orientierung des einmal eingestrahlteten Feldvektors (die Polarisation, s.u.) während der Ausbreitung nicht ändert. Dadurch kann man auch auf den Vektorcharakter des Feldes verzichten (sog. *skalare Näherung*).

In Fasergyroskopen werden zwar Fasern eingesetzt, die bewusst nicht isotrop sind (polarisationserhaltende Fasern, s. Abschnitt 2.3.3); die in dieser Arbeit betrachteten Effekte wirken jedoch in guter Näherung isotrop auf die Faser ein, sodass auch hier die skalare Näherung anwendbar ist.

Es werde nun am Faseranfang ( $z=0$ ) ein Feld der folgenden Form eingekoppelt:

$$E_0(t) := E(z = 0, t) = \hat{E} \cos(\omega t) \quad (1)$$

mit der Kreisfrequenz der Lichtwelle  $\omega = 2\pi f$ .

---

<sup>4</sup> Dies ist erlaubt, da das magnetische Feld durch das elektrische eindeutig bestimmt ist

Dann bekommt die sich daraus ergebende, in z-Richtung laufende Lichtwelle die Form<sup>5</sup>

$$E(z, t) = \hat{E} \cos(\omega t - \beta z) \quad (2)$$

wobei  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  die Ausbreitungskonstante der Welle bezeichnet.  $c$  sei die Lichtgeschwindigkeit im Medium, die wiederum über den Brechungsindex (Brechzahl)  $n$  des Mediums in Bezug zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gesetzt werden kann:

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (3)$$

Damit lässt sich auch  $\beta$  auf die entsprechende Größe im Vakuum beziehen:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c_0} = n\beta_0 \text{ mit } \beta_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (4)$$

$\beta_0$  ist also die Ausbreitungskonstante im Vakuum, die sich unter dem Einfluss der Brechzahl des Mediums auf das  $n$ -fache vergrößert. Damit ist der wesentliche Mechanismus angesprochen, der später bei der Behandlung des Fasergyroskops über externe Einflussgrößen (Temperatur, elastische Deformation, ...) zu einer unerwünschten Querempfindlichkeit führen wird.

Der Begriff Brechungsindex bedarf für den Fall der Monomodefaser einer Ergänzung: Die Tatsache, dass dort zwei Medien (Kern und Mantel) mit unterschiedlichen Brechungsindizes beteiligt sind, die Lichtenergie aber tatsächlich nicht nur im Kern, sondern zu einem kleinen Teil auch im Mantel propagiert, führt zum Begriff „effektiver Brechungsindex“  $n_{\text{eff}}$ <sup>6</sup>. Der Unterschied zum Brechungsindex des Kerns ist jedoch so gering, dass er im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden kann (s. Anhang A.2). Daher wird im Folgenden der Kern-Brechungsindex als für die Lichtausbreitung gültiger Parameter angenommen. Es wird dann meist nur noch von „der Brechzahl der Faser“ die Rede sein, und damit gemeint ist der Brechungsindex des Kerns.

### 2.2.3 Elastooptischer Effekt in Glasfasern

Medien mit einem hohen Brechungsindex werden umgangssprachlich als „optisch dicht“ bezeichnet. Und in der Tat haben Flüssigkeiten und Feststoffe höhere Brechungsindizes als Gase, deren Brechzahl sich von der des Vakuums ( $n=1$ ) erst ab

---

<sup>5</sup> Hier wurde auch die Faserdämpfung vernachlässigt und die Feldamplitude  $\hat{E}$  als zeitlich konstant angenommen

<sup>6</sup> Die effektive Brechzahl oder der effektive Brechungsindex ist ein rechnerischer Parameter, der wie zuvor beschrieben die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Glasfaser beschreibt und sich als mit den Leistungsanteilen gewichtetes Mittel aus Kern- und Mantelbrechzahl ergibt.

der dritten oder vierten Nachkommastelle unterscheiden. Diese Bezeichnung macht auch plausibel, dass z.B. durch Kompression eines Mediums dessen Brechungsindex (leicht) steigt. Man darf jedoch nicht annehmen, dass diese Änderung etwa gleich der Verzerrung  $\varepsilon$  oder anderer Verzerrungsmaße ist.

Zum einen ist der Zusammenhang zwischen Verzerrung und Brechzahländerung materialabhängig, zum anderen auch polarisationsabhängig, d.h. ein ursprünglich optisch isotropes Medium wird bei Verformung anisotrop. In Anhang A.1 wird der elastooptische Effekt genauer beschrieben und in isotroper Näherung für die Lichtausbreitung in Glasfasern hergeleitet.

Wird eine Glasfaser longitudinal und radial verformt, erfährt ihr Brechungsindex folgende Änderung (s. Anhang A.1.4):

$$\Delta n = -\frac{n^3}{2}((p_{11} + p_{12})\epsilon_r + p_{12}\epsilon_z) \quad (5)$$

$n$  ist dabei die Brechzahl des unbelasteten Mediums,  $p_{11}$  und  $p_{12}$  sind die materialabhängigen Pockelskoeffizienten. Für Glas betragen diese  $n=1.46$ ,  $p_{11}=0.126$  und  $p_{12}=0.27$ .

## 2.3 Grundlagen der Interferometrie

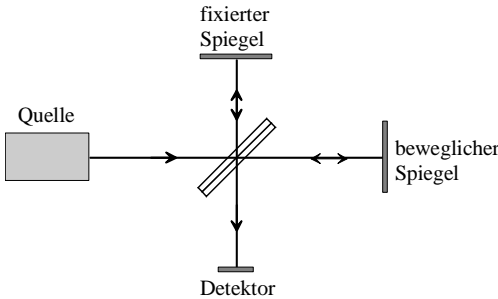
### 2.3.1 Michelsoninterferometer

Zur Einführung in das Gebiet der Interferometrie bietet sich eine Wiederholung des Aufbaus von Michelsoninterferometern an und als Fortführung dessen Umsetzung als Faserinterferometer. Das erleichtert das Verständnis des dem Faserkreisel zugrundeliegenden Sagnac-Interferometers.

Neben dem wohl bekanntesten Interferometertyp nach Michelson existieren eine Vielzahl anderer, wie z.B. nach Mach-Zehnder, Sagnac, Fabry-Perot, Twyman-Green etc. Auch der Anwendungsbereich von Interferometern ist groß. Außer zur Abstandsmessung und daraus abgeleiteten Größen wie Geschwindigkeit und Beschleunigung werden auch Winkel, Oberflächenbeschaffenheit, Durchmesser, Dicken, u.v.m. mit Interferometern hochpräzise ermittelt.

Das Michelson-Interferometer (Abbildung 12) erlangte im berühmten Michelson-Morley-Experiment Berühmtheit. In diesem wies Michelson 1881 und Morley 1887 nach, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht von einer Bewegung des Messaufbaus relativ zu einem hypothetischen Äther abhängt. Auch heute wird dieser Interferometertyp noch häufig für Weg-, Winkel-, Geschwindigkeitsmessungen u.ä. eingesetzt. Hier wird ein von einer kohärenten Lichtquelle emittierter Lichtstrahl in einem Strahlteiler geteilt. Die Teilstrahlen durchlaufen unterschiedliche Wegstrecken,

werden an einem der beiden Spiegel reflektiert und interferieren in demselben Strahlteiler.

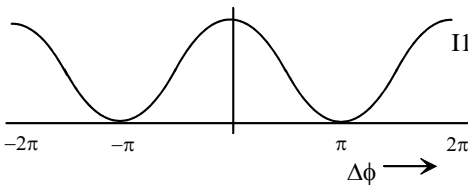


**Abbildung 12: Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers**

Die relative Laufzeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen bestimmt den Anteil des zum Detektor gelangenden Lichts:

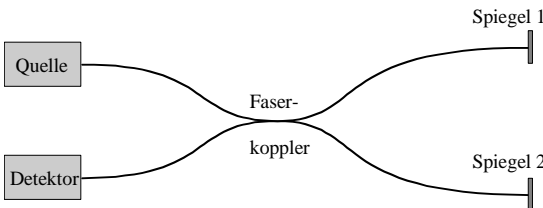
$$P_D = P_Q \cos^2(\Delta\Phi) \text{ mit } \Delta\Phi = 4\pi \frac{L_1 - L_2}{\lambda} \quad (6)$$

(s. a. Abbildung 13), wobei  $L_1$  und  $L_2$  die optischen Lichtwege der beiden Lichtstrahlen ist. Nachteilig ist beim Michelson-Interferometer die Reflexion eines Teils der optischen Leistung zurück zur Quelle, was v.a. bei Lasern zu Leistungs- und Wellenlängenschwankungen führen kann. Zudem ist die Quellenleistung  $P_Q$  prinzipiell zeitabhängig und begrenzt – falls sie nicht gemessen wird – die Genauigkeit eines Michelson-Interferometers. Beide Nachteile werden durch das Mach-Zehnder-Interferometer gemildert.



**Abbildung 13: Die Interferometerkennlinie gibt die Abhängigkeit der Detektorleistung von der Phasendifferenz der beiden Lichtwellen an**

In einer faseroptischen Realisierung findet die Lichtausbreitung in einer Glasfaser statt, der Strahlteiler wird z.B. durch einen Faserkoppler ersetzt [45]:



**Abbildung 14: Faseroptisches Michelson-Interferometer**



### 2.3.2 Der Sagnac-Effekt

Im Sagnac-Interferometer (s. Abbildung 15) wird ein in sich geschlossener Lichtweg in zwei unterschiedlichen Richtungen – im und gegen den Uhrzeigersinn – durchlaufen. Da für beide Richtungen der Lichtweg gleich ist, sollte die Phasendifferenz der beiden Lichtwellen verschwinden, die Lichtwellen sich somit konstruktiv überlagern. Diese Reziprozität (d.h. in diesem Zusammenhang Richtungsunabhängigkeit) wird jedoch aufgehoben, wenn die Anordnung um ihre Mittelachse gedreht wird. George Sagnac entdeckte 1913, dass bei einer solchen Drehung ein Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen von

$$\Delta\Phi = \frac{8\pi A}{\lambda_0 c_0} \Omega \quad (7)$$

besteht [12].

Hier ist  $\Delta\phi$  die Phasendifferenz zwischen den beiden Lichtwellen,  $A$  die vom Lichtweg eingeschlossene Fläche,  $\lambda_0$  die Vakuum-Lichtwellenlänge,  $c_0$  die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und  $\Omega$  die Drehrate des gesamten Aufbaus.

Diese Formel ist für beliebige Interferometerformen anwendbar. In Spulen muss dies mit der Windungszahl  $N$  multipliziert werden:

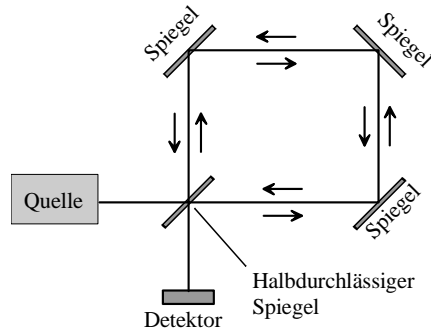


Abbildung 15: Prinzipschaubild eines Sagnac-Interferometers

$$\Delta\Phi = N \frac{8\pi A}{\lambda_0 c_0} \Omega \quad (9)$$

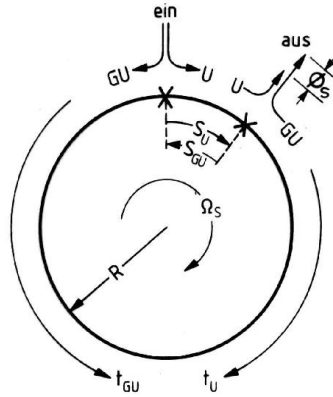
In kreisförmigen, u.U. als Spule ausgeführten Sagnac-Interferometern ist oft folgende Formel handlicher:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi L D}{\lambda_0 c_0} \Omega \quad (10)$$

In (7) ist besonders gut zu erkennen, dass sich der Skalenfaktor eines FOG, also die Abhängigkeit der Sagnacphase von der Drehrate, bei einer Verformung der Spule ändert.

(10) soll nun anhand einfacher geometrisch-optischer Argumente begründet werden. Die Herleitung wurde weitgehend [26] entnommen. Für eine relativistische Herleitung siehe [19] und [20].

Die Lichtwelle, die einen kreisförmigen Weg beschreibt, werde am Ein- und Auskoppelement X in zwei Teilwellen gleicher Intensität aufgeteilt, die das Interferometer im (U) und gegen (GU) den Uhrzeigersinn durchlaufen. Nach einem vollen Umlauf hat sich die Position von X aufgrund einer Drehung um den Mittelpunkt mit der Drehrate  $\Omega_S$  (im folgenden nur noch als  $\Omega$  bezeichnet) und den Weg  $S_U$  geändert. Anstatt der mittleren Umlaufzeit  $T = 2\pi R/c$  benötigt nun die im Uhrzeigersinn umlaufende Welle  $T_U = (2\pi R + S_U)/c$  und die gegen den Uhrzeigersinn laufende  $T_{GU} = (2\pi R - S_U)/c$ . Ferner gilt  $S_U = \Omega R T_U$  und  $S_{GU} = \Omega R T_{GU}$ . Ersetzt man die Zeiterme  $T_U$  und  $T_{GU}$ , erhält man  $S_U = \frac{1}{1+\frac{\Omega R}{c}} \frac{2\pi R^2}{c} \Omega$  und



**Abbildung 16: Der quadratische Lichtweg des oben abgebildeten Sagnac-Interferometers wird zur Herleitung von (7) durch einen kreisförmigen ersetzt[26]**

$$S_{GU} = \frac{1}{1+\frac{\Omega R}{c}} \frac{2\pi R^2}{c} \Omega.$$

Damit beträgt die Laufzeitdifferenz der beiden Lichtwellen

$$\Delta T = T_U - T_{GU} = \frac{S_U - S_{GU}}{c} \approx \left(1 + \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\right) \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega. \text{ Der Term } \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \text{ liegt bei üblichen Geometrien (Abmessungen kleiner als ein Meter) und Drehraten } (< 1000^\circ/h) \text{ in der Größenordnung } 10^{-18} \text{ und kann somit vernachlässigt werden.}$$

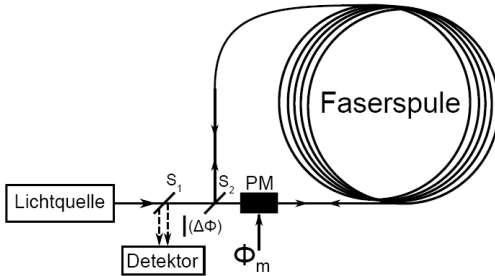
Bezieht man  $\Delta T$  auf die Periodendauer der Welle  $\tau = \frac{\lambda}{c}$ , so ergibt sich die Sagnacphase als die Phasendifferenz

$$\Phi_S = 2\pi \frac{\Delta T}{\tau} = \frac{8\pi^2 R^2}{\lambda c} \Omega = \frac{2\pi D L}{\lambda c} \Omega = \frac{8\pi A}{\lambda c} \Omega \quad (11)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie (7) bis (10) im Falle der Lichtausbreitung in einem isotropen Medium der homogenen Brechzahl  $n$  anzupassen sind. Da in  $c=c_0/n$  und  $\lambda=\lambda_0 \cdot n$  ist, sind die Produkte  $\lambda_0 \cdot c_0$  und  $\lambda \cdot c$  gleich, (7) und (10) somit für beliebige Ausbreitungsmedien gültig. Praktischerweise verwendet man für Rechnungen die Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge im Vakuum.

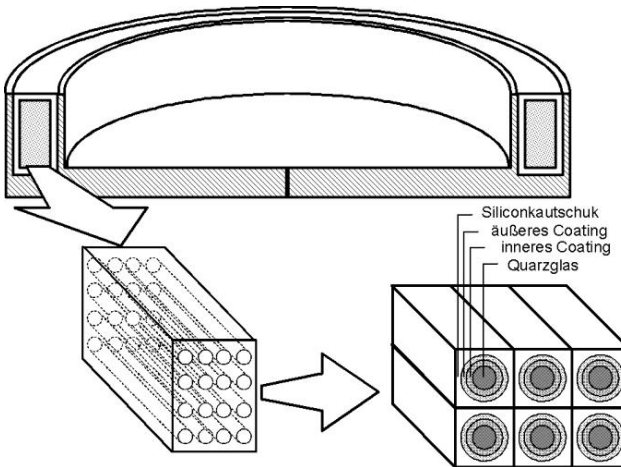
### 2.3.3 Faseroptische Gyroskope als Sagnac-Interferometer

Der Faserkreisel ist ein auf der Architektur des Sagnac-Interferometers (Abbildung 17) aufbauender Sensor, der es erlaubt, Drehraten mit sehr großer Empfindlichkeit zu messen. Der Lichtweg im FOG besteht aus einer Faserspule mit einer Faserlänge von typischerweise 100...1000m und einem Durchmesser in der Größenordnung mehrerer cm. Der Strahlteiler ist faserbasiert oder zusammen mit anderen optischen Elementen als IOC (Integrated Optical Circuit) ausgeführt.



**Abbildung 17<sup>7</sup>:**  
**Prinzipschaubild eines FOG mit zusätzlichem Phasenmodulator PM.** Aus Symmetriegründen werden oft zwei Strahlteiler (bzw. Koppler) eingesetzt: es wird so erreicht, dass die beiden Lichtwellen jeweils zweimal transmittiert und zweimal reflektiert werden, bevor sie interferieren

Die Faserspule ist das zentrale Element des FOG. Wie später noch dargelegt wird, bestimmt die Lagerung der Spule wesentlich die Querempfindlichkeit des FOG gegenüber Druck- und Temperaturerhöhungen sowie Vibration. Abbildung 18 zeigt eine typische Realisierung einer Faserspule, die mit einer Vergussmasse in ein Gehäuse eingebettet ist.



**Abbildung 18:**  
**Typische Geometrie einer Faserspule inkl. Gehäuse und Vergussmasse.**  
 Typ.  
 Durchmesser: 50..100mm, typ.  
 Höhe: 10..30mm.  
 Die Faserspule ist punktiert dargestellt

<sup>7</sup> Abbildung überlassen von F. Mohr

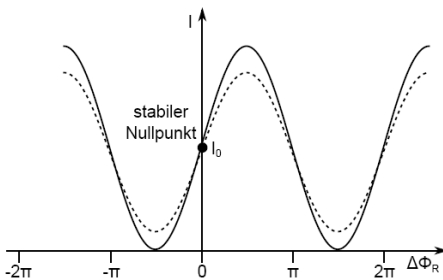
Polarisation spielt eine wichtige Rolle in Faserkreisläufen. Da nur Lichtwellen mit gleicher Polarisation Interferenzphänomene zeigen, müssen beide Wellen gleich polarisiert sein. Glasfasern ändern jedoch die Polarisation der sich in ihr ausbreitenden Lichtwelle aufgrund leicht elliptischer Kernquerschnitte, Biegungen und Verdrillungen. Zudem ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Glasfasern zu einem geringen Teil abhängig von der Polarisation (Polarisationsmodendispersion).

Dies lässt sich durch den Einsatz von polarisationserhaltenden (PE-) Fasern vermeiden. In diesen ändert sich – bei geeigneter Anregung – die Polarisation der Lichtwelle in der Faser praktisch nicht. Eine geeignete Anregung ist linear polarisiertes Licht (hierfür der Polarisator im IOC), dessen Polarisationsachse parallel zu einer der Hauptachsen der PE-Fasern liegt.

Die beiden Phasenmodulatoren fügen eine zusätzliche Phasenverschiebung der beiden Lichtwellen zueinander hinzu. Ihre Notwendigkeit wird im folgenden Abschnitt dargelegt.

### 2.3.4 Phasenmodulation

Im Bereich um  $\phi_s = 0$  ist die Steigung der Interferometerkennlinie (Abbildung 13)  $\frac{\partial P}{\partial \phi_s} |_{\phi_s=0} = 0$  und damit sehr kleine Drehraten nicht messbar. Zudem sind anhand des Detektorsignals Drehungen im und gegen den Uhrzeigersinn nicht unterscheidbar. Durch Addition einer zusätzlichen Phasenverschiebung mit Phasenmodulatoren lassen sich diese Einschränkungen umgehen. Im Idealfall ist der Arbeitspunkt der Punkt höchster Steigung (s. Abbildung 19). Dies wird mit einer Phasenverschiebung um  $90^\circ$  erreicht.



**Abbildung 19: Interferenzkennlinie bei zusätzlicher Phasenverschiebung um  $90^\circ$  (Punkt höchster Steigung) [17]**

Phasenmodulatoren verändern die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Faser, z.B. indem Sie die Brechzahl der Faser durch mechanischen Druck (elastooptischer

Effekt; technische Ausführung z.B. mit Piezokristallen) oder durch ein elektrisches Feld (Pockelseffekt, elektrooptischer Effekt) verändern [46]. Da der elektrooptische Effekt nur in bestimmten kristallinen Materialien wie z.B. Lithiumniobat auftritt, aus welchem wiederum das Grundsubstrat für IOCs besteht, werden elektrooptische Phasenmodulatoren, teilweise zusammen mit Strahlteiler und Polarisator, in IOCs integriert.

Praktisch werden oft zwei Phasenmodulatoren verwendet, die meistens invers zueinander angesteuert werden. Wir legen hier für den oberen Phasenmodulator den Suffix „o“ fest, für den unteren den Suffix „u“.

Die CW-Welle durchläuft bei ihrer Einkopplung den oberen, vor ihrer Auskopplung um die Laufzeit  $T$  versetzt den unteren Phasenmodulator. Die beiden Phasenmodulatoren tragen zu einer Phasenverzögerung von

$$\Delta\Phi_{cw}(t) = \Delta\Phi_o(t - T) + \Delta\Phi_u(t) \quad (12)$$

bei. Die CCW-Welle wird um

$$\Delta\Phi_{ccw}(t) = \Delta\Phi_u(t - T) + \Delta\Phi_o(t) \quad (13)$$

verzögert. Damit beträgt der gesamte Phasenunterschied  $\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi_{cw}(t) - \Delta\Phi_{ccw}(t) = \Delta\Phi_o(t - T) - \Delta\Phi_o(t) + \Delta\Phi_u(t) - \Delta\Phi_u(t - T) \approx T\Delta\dot{\Phi}_u(t) - T\Delta\dot{\Phi}_o(t)$ . Also ist

$$\Delta\Phi(t) \approx T \left( \Delta\dot{\Phi}_u(t) - \Delta\dot{\Phi}_o(t) \right) \quad (14)$$

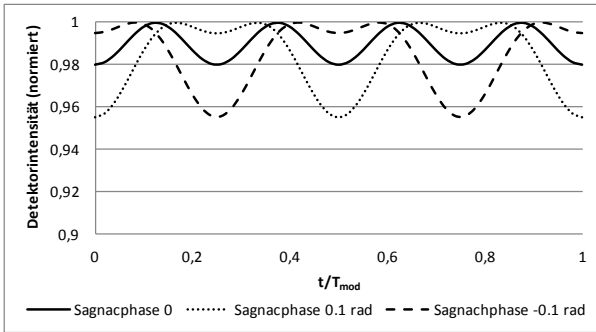
Mit einer zeitlich linear steigenden Phasenverzögerung durch die Phasenmodulatoren<sup>8</sup>  $\Delta\dot{\Phi}_u(t) = -\Delta\dot{\Phi}_o(t) = \frac{\Delta\Phi}{2T}t$  kann der Arbeitspunkt (d.h. die Phase bei verschwindender Drehrate) auf den Punkt maximaler Empfindlichkeit gelegt werden:  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ . Da ständig steigende Phasenverzögerungen natürlich nicht realisierbar sind, wird mit einer sägezahnförmigen Modulation ein ähnliches Ergebnis erreicht. Sägezahnfunktionen weisen bis auf ihre Sprungstellen ebenfalls eine konstante Steigung auf.

Weiterhin werden auch sinusförmige oder aufwändigere Modulationsverfahren praktisch eingesetzt [1], [26]. Eine sinusförmige Phasenmodulation fügt der Sagnacphase den Modulationsanteil  $\Phi_m(t) = \hat{\Phi} \sin(\Omega_{mod}t)$  hinzu. Das Detektor-signal nimmt dann die Werte  $P_D(t) = P_0 \cos^2(\Phi_S + \Phi_m(t))$  an. Abbildung 20 zeigt

---

<sup>8</sup> Da die Phasenmodulatoren zueinander invers angesteuert werden, ist  $\Delta\Phi_u(t) = -\Delta\Phi_o(t)$ . Dasselbe gilt dann auch für deren Zeitableitungen:  $\Delta\dot{\Phi}_u(t) = -\Delta\dot{\Phi}_o(t)$

drei simulierte Zeitverläufe des Detektorsignals bei sinusförmiger Modulation und drei verschiedenen Sagnacphasen:

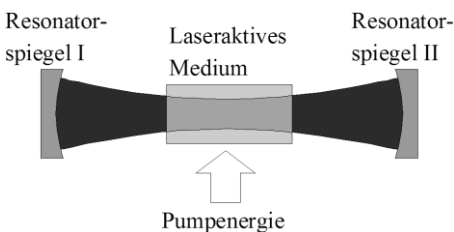


**Abbildung 20:**  
Detektorsignal bei  
sinusförmiger  
Phasenmodulation

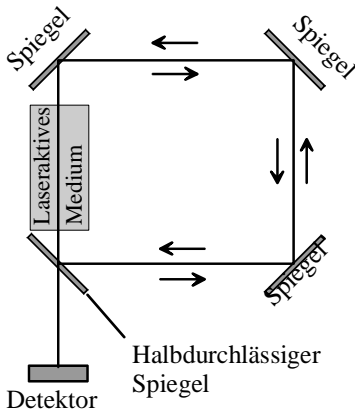
Bei verschwindender Sagnacphase (rot) weist das Detektorsignal ausschließlich Fourierkomponenten auf, deren Frequenzen geradzahlige Vielfache der Modulationsfrequenz sind. Eine zusätzliche Sagnacphase zerstört die Symmetrie des Signals und lässt somit auch ungeradzahlige Vielfache entstehen. Diese können leicht - z.B. durch Synchrongleichrichtung - gemessen werden.

### 2.3.5 Ringresonatoren und Ringlaser

Wegen seiner Ähnlichkeit zum Sagnac-Interferometer und seiner Konkurrenzposition zum FOG soll noch der Ringlaser erwähnt werden. In seiner Ausführung als Laserkreisel (Abbildung 22) wird auch dieser zur hochpräzisen Messung von Drehraten verwendet. Die Präzision handelsüblicher Laserkreisel liegt noch etwa zwei Größenordnungen über der von Faserkreiseln. Damit erfüllen sie die Anforderungen, die an Drehratensensoren zur Flugzeugnavigation gestellt werden.



**Abbildung 21:** Grundsätzlich besteht jeder Laser aus einem laseraktiven Medium und einem zum Beispiel aus zwei Spiegeln bestehenden optischen Resonator



**Abbildung 22: Der Laserkreisel ist im Prinzip ein Laserresonator**, in dem die Wellenlängen der resonierenden Moden bei einer Drehung um die Mittenachse verändert werden. Bei Drehung unterscheiden sich die Resonanzwellenlängen der CW- und CCW-Wellen

Die drehratenabhängigen Größen des Laserkreisels sind nicht die optischen Leistungen der beiden Teilwellen sondern die Wellenlängen der resonanzfähigen Lichtmoden in dem in sich geschlossenen optischen Resonator. Wird der Ringresonator nun gedreht, ändert sich der optische Weg innerhalb des Resonators – das Licht „läuft der Drehung nach“ bzw. „voraus“. Es lässt sich zeigen, dass die Drehung eine Frequenzverschiebung von  $\Delta f_R = \frac{4A}{\lambda U} \Omega$  beträgt (A... Flächeninhalt und U... Umfang des Lichtwegs im Resonator;  $\lambda$ ...nicht verschobene Wellenlänge des Laserlichts;  $\Omega$ ...Drehrate).

Der höheren Genauigkeit steht ein höherer Preis und höhere mechanische Komplexität entgegen: um Mode-Locking der beiden gegensinnig laufenden Lasermoden zu vermeiden, muss der zu messenden Drehrate eine künstlich hervorgerufene Jitterbewegung hinzugefügt werden. Die hierfür erforderliche Mechanik erhöht nicht nur den Preis, sondern auch die Anforderungen an mechanische Stabilität bzw. mechanische Entkopplung von der Umgebung.

## 2.4 Ursachen von Messabweichungen in Fasergyroskopen

### 2.4.1 Nichtreziproke Phasenverschiebung in Faseroptischen Gyroskopen

Ein wesentlicher Begriff in Sagnac-Interferometern ist der der Reziprozität. Elektrische Zweitore werden als reziprok bezeichnet, falls ihre Übertragungs-

eigenschaften gleich bleiben, wenn Ein- und Ausgang vertauscht werden<sup>9</sup>. Idealerweise ist auch die Faserspule inklusive aller die Interferenz beeinflussenden Elemente wie Strahlteiler und Phasenmodulator reziprok in dem Sinne, dass die Lichtlaufzeit in beiden Umlaufrichtungen gleich ist.

Die Faserspule im FOG ist dann reziprok, falls

- keine Drehung um ihre Mittelachse stattfindet (genauer: die Komponente einer eventuellen Drehung in Achsrichtung verschwindet)
- keine weiteren physikalischen Einflüsse eine Nichtreziprozität hervorrufen

Physikalisch bedingte Nichtreziprozitäten sind grundsätzlich von Rauschmechanismen zu unterscheiden, da erstere 1) deterministische Prozesse sind und 2) das durch sie erzeugte Sensorsignal im Gegensatz zu Rauschen nicht immer durch geeignete Tiefpassfilter, Mittelwertbildung oder Integratoren verringert werden kann. Die Nullpunktdrift wird hauptsächlich durch Nichtreziprozitäten verursacht.

Wichtige Ursachen von Nichtreziprozitäten sind:

- Polarisierungseffekte: Nicht-polarisationserhaltende Fasern haben stets doppelbrechende Eigenschaften, die eine polarisationsabhängige Lichtlaufzeit in der Faser zur Folge haben. Ferner sind in solchen Fasern Moden unterschiedlicher Polarisation gekoppelt, sodass selbst bei gezielter Anregung mit definierter Polarisation am Ende der Faser die Polarisation unbestimmt ist. Damit ist auch das Interferenzprodukt undefiniert, da nur Lichtwellen gleicher Polarisation mit vollem Kontrast interferieren können. Um dies zu vermeiden, werden polarisationserhaltende Fasern eingesetzt und diese mit linear polarisiertem Licht angeregt. Es existieren jedoch auch Systeme mit einer üblichen Single-Mode-Faser, die jedoch mit speziell depolarisiertem Licht beleuchtet werden muss [10].
- Optischer Kerr-Effekt: elektrische Felder in einem Festkörper verändern dessen Ausbreitungseigenschaften für überlagerte Lichtwellen. Sind das elektrische Feld und die Lichtwelle gleich polarisiert, lässt sich der Effekt des E-Feldes durch eine feldabhängige Brechzahl beschreiben:  $n(E) = n_0 + S_1 E + S_2 E^2 + \dots$  mit materialabhängigen Konstanten  $S_n$ . Ebenso moduliert die Lichtwelle selbst die Brechzahl ihres Ausbreitungsmediums. Im optischen Kerreffekt werden alle Taylor-

---

<sup>9</sup> In Mathematik, Naturwissenschaft und Technik wird der Begriff „Reziprozität“ mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. U.a. werden in der Elektrodynamik einige Vertauschungssätze von J, E und H als Reziprozitätstheoreme bezeichnet, in der Mechanik z.B. Bettis Reziprozitätstheorem



Koeffizienten außer  $S_2$  vernachlässigt. Damit wird eine intensitätsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit, die sich v.a. dann auswirkt, wenn die Lichtintensitäten in cw- und ccw-Richtung unterschiedlich sind

- Temperaturgradienten, Druckänderungen, Vibration wirken durch thermische Ausdehnung und/oder Brechzahländerung auf die Ausbreitungsdauer der Lichtwellen in der Faserspule ein. Der Einfluss von Temperaturgradienten und mechanischen Einflüssen wird genauer in Kap. 4 erläutert. Es sei bereits hier hervorgehoben, dass nur zeitlich veränderliche Drücke, Temperaturen und dergleichen eine nichtreziproke Phasenverschiebung bedingen. Eine der wirkungsvollsten Maßnahmen zur Verringerung solchermaßen verursachter Fehler ist die Anwendung besonderer Wickeltechniken [24]
- Magnetfelder (Faraday-Effekt): Ein Magnetfeld in Faserrichtung wirkt zirkular-doppelbrechend. U.a. wird dabei die Polarisationssebene linear polarisierten Lichts nichtreziprok gedreht. Abhilfe schafft hier eine wirkungsvolle Abschirmung von Magnetfeldern
- Offsets in der Auswerteelektronik, wie sie in jeder Analogschaltung auftreten

Generell werden echt-nichtreziproke Effekte („truly“ od. „genuinely nonreciprocal effects“ [14]) wie der Faraday-Effekt von solchen unterschieden, die nur bei zeitlicher Änderung eine nichtreziproke Phasenverschiebung bewirken. Druck- und Temperaturänderungen sind zwei Beispiele eines nicht-echt-nichtreziproken Effekts.

#### 2.4.2 Thermisch und mechanisch verursachte Messabweichungen in Faseroptischen Gyroskopen

Das Problem der Entstehung mechanischer Spannungen, zunächst bei einer Temperaturerhöhung, lässt sich anhand der schematischen Darstellung in den untenstehenden Bildern erläutern:

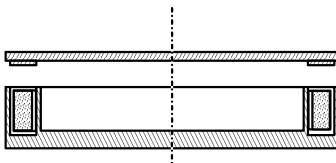
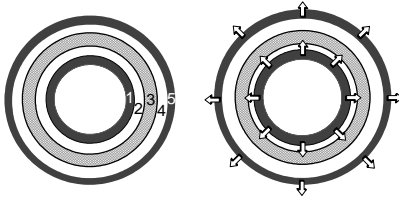
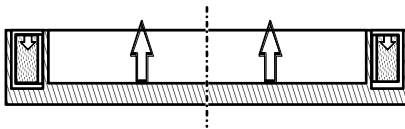


Abbildung 23: Schnittbild einer Beispieldspule



**Abbildung 24: Draufsicht auf die Sensorspule. Normaltemperatur (links) und erhöhte Temperatur (rechts)<sup>10</sup>**

In Abbildung 24 links ist die Situation bei Normaltemperatur gezeigt; der Faserwickel befindet sich dabei in der Mitte zwischen Innen- und Außenwand. Der Zwischenraum ist mit einem Elastomer ausgefüllt (Silikonkautschuk). Bei Temperaturerhöhung (Darstellung rechts) verringert sich wegen des im Vergleich zum Faserwickel (3) hohen thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Aluwände (1, 5) das Volumen des inneren Zwischenraums (2); das des äußeren vergrößert sich. Die Einwirkung einer Vibration auf den Faserkreislauf geschieht über die Massenbeschleunigungskräfte, die auf die unterschiedlichen Massen der beteiligten Materialien unterschiedlich ausfallen. Unter praktischen Bedingungen kann jede denkbare Art von Vibrationen auftreten. Dies gilt sowohl für die Wirkungsrichtung einer Vibration als auch für die Zusammensetzung von deren Frequenzspektrum. Auch hier ist wieder wie im – einfacher liegenden – Fall thermischer Einflüsse zunächst das Deformationsfeld der Gesamtanordnung zu berechnen und dann hieraus die lokalen Faser-Verzerrungen zu bestimmen. Mit deren Kenntnis gelingt dann, wie in Kap. 4 beschrieben wird, die Berechnung der Phasenabweichung.



**Abbildung 25: Zum inhomogenen Spannungsaufbau in der Spule bei Vibration (gezeichnet: Aufwärtsbewegung)**

Der Mechanismus der Entstehung von mechanischen Spannungen im Verbund, die inhomogen (d.h. ortsabhängig) und außerdem anisotrop sind, soll für den einfachsten denkbaren Fall anhand Abbildung 25 erläutert werden.

Angenommen sei eine Vibration in vertikaler Richtung (d.h. die Schwingungsachse liegt parallel zur Wickelachse der Spule). Die beiden großen Pfeile in der Mitte sollen eine beschleunigte Bewegung nach oben ausdrücken; das Bild steht somit symbolisch für eine Halbperiode der Schwingung. Aus der Bewegung resultiert ein „hydrostatischer“ Druck im Wickelraum der Faserspule, der analog zum Lehrbuchfall einer Flüssigkeitssäule mit größerer Tiefe zunimmt. Also werden die unteren Faserlagen in der aufwärts gerichteten Halbperiode unten stärker, oben

<sup>10</sup> Zeichnungen dankenswerterweise überlassen von Prof. F. Mohr

schwächer zusammengedrückt. In der zweiten Halbperiode dreht sich die Situation um; aus der Kompression wird jetzt eine Dehnung (Expansion) des Materials im Wickelraum, wobei anzunehmen ist, dass die unteren stärker, dagegen die oberen Faserlagen geringer expandiert werden.

Somit ergeben sich wieder örtlich und zeitlich veränderliche Werte der  $\varepsilon_r$  und  $\varepsilon_z$  der Faser; es stellt sich also eine nichtreziproke Phasenverschiebung ein, die sich berechnen lässt, wenn es gelingt,  $\varepsilon_r(z,t)$  und  $\varepsilon_z(z,t)$  zu bestimmen.

Reale Situationen sind natürlich komplexer. In einem realen Fall kann zunächst nicht angenommen werden, dass die Schwingungsrichtung gerade mit der Wickelachse zusammenfällt. Außerdem werden Abweichungen der Spule von der idealen Kreissymmetrie auftreten, d.h. es wird lokale Masseungleichgewichte geben.

Dies wird dazu führen, dass die Anordnung in komplizierteren Formen (Moden) zum Schwingen gebracht wird, die natürlich auch von der Anregungsfrequenz abhängen werden. Es wird die bekannten Modenbilder geben, bei denen periodische Verdichtungen/Expansionen des Materials entlang der Mittelachse bzw. des Umfangs auftreten.

### 2.4.3 Rauschmechanismen

Die untere Genauigkeitsgrenze von Faserkreiseln wird durch das Schrotrauschen der Lichtquelle festgelegt. Die dadurch verursachte Messunsicherheit eines FOG beträgt

$$\Omega_{E,N} = \frac{c_0}{LD} \frac{\lambda_0}{2\sqrt{n_{ph}\eta_D\tau}} \quad [13].$$

Hier ist  $n_{ph}$  die mittlere Photonenzahl pro Sekunde, die am

Detektor ankommt,  $\eta_D$  die Quanteneffizienz des Detektors und  $\tau$  die Zeitkonstante des Auswertesystems nach dem Detektor (bei Mittelung des Detektorsignals ist dies die Länge des Zeitfensters, bei Tiefpassfilterung die Zeitkonstante des Filters). Typische Werte liegen bei  $\Omega_{E,N} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \circ/h$ .

Ein weiterer wesentlicher Rauschprozess, der von einigen Autoren jedoch auch als Ursache von Nichtreziprozität aufgeführt wird, ist die Rayleighsche Rückstreuung. Rayleigh-Streuung bezeichnet die Streuung von Licht an Partikeln, die wesentlich kleiner als die Lichtwellenlänge sind. In Glas-Lichtwellenleitern wird Rayleighstreuung nicht nur durch Verunreinigungen und Dopanden verursacht, sondern auch durch statistische Brechzahlchwankungen im Glas, die u.a. aufgrund thermischer Bewegung unvermeidbar sind. Eine umfassende Analyse der Auswirkungen von Rayleighstreuung und anderen Rauschprozessen ist in [32] zu finden.

## 2.5 Gängige Maßnahmen zur Genauigkeitssteigerung

### 2.5.1 Symmetrisierung der Belastung der Faser

Wie in Abschnitt 2.4.2 erläutert, erhöht mechanischer Druck den Brechungsindex einer Faser und verzögert damit den Wellenzug, der zur Einwirkungszeit am Einwirkungsort war. Da dieser Teil der Lichtwelle mit einem interferiert, der diesen mechanischen Druck nicht gespürt hat, haben die zwei eine relative Phasenverschiebung zueinander. Dieser Vorgang passiert zwei Mal, da ein CW- und ein CCW-Wellenzug verzögert wird und jeweils mit einem ungestörten Wellenzug interferiert.

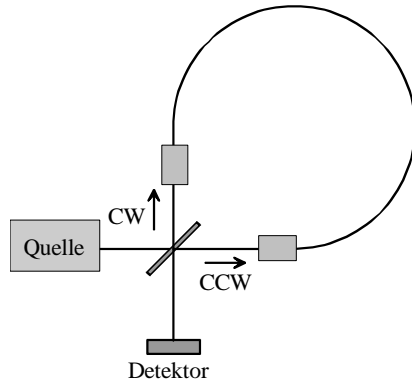


Abbildung 26: Schema einer Faserspule mit zwei Einwirkungsstellen in der Nähe und symmetrisch zum Strahlteiler

Wenn hingegen die beiden interferierenden Wellenzüge – das sind die, die zur gleichen Zeit den Strahlteiler verlassen haben – gleichermaßen gestört werden, ist ihre Phasenverschiebung zueinander Null. Dies geschieht z.B. dann, wenn wie in Abbildung 26 an zwei symmetrisch zueinander liegenden Orten in Bezug zum Strahlteiler oder zur Fasermittelpunkt die Brechzahl der Faser genau gleich (und gleichzeitig!) verändert wird.

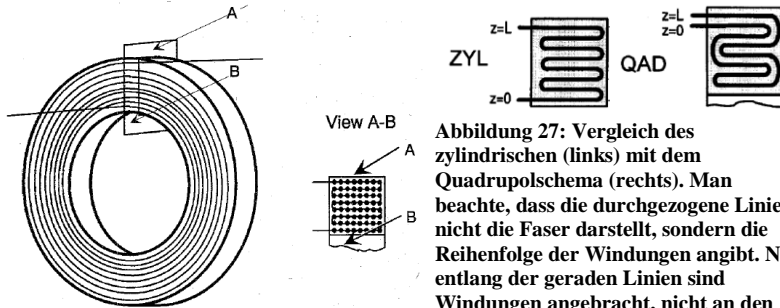
Dieser Umstand ist natürlich von großer praktischer Bedeutung und wird v.a. durch die im folgenden Abschnitt dargestellte Maßnahme ausgenutzt. Eine mathematische Konkretisierung und Herleitung des hier anschaulich erörterten Zusammenhangs ist im Anhang A.2 zu finden.

### 2.5.2 Quadrupolspulen als Maßnahme zur Reduzierung des Einflusses von Temperatur- und Spannungsgradienten

Die eben motivierte Forderung nach einer symmetrischen Belastung der Faser wird gerade bei einer einfachen zylindrischen Wicklung (s. Abbildung 28) nicht erfüllt. Die beiden Faserenden z.B. befinden sich an gegenüberliegenden Eckpunkten der Spule und erfahren daher potentiell sehr unterschiedliche Brechzahländerungen.

Daher werden in gängigen Faserkreisläufen Wickelschemata verwendet, die für eine geometrische Nähe symmetrisch liegender Faserpunkte sorgen. Nach Kenntnis des

Verfassers wird am häufigsten das Quadrupolwicklungsschema angewandt (s. Abbildung 27). In [24] werden weitere Wickelschemata beschrieben und verglichen.



**Abbildung 28:** zylindrisches Wicklungsschema [24]. Die Spule wird „von innen nach außen“ gewickelt

Es ist zu sehen, dass hier symmetrisch zu den Faserenden liegende Punkte sehr nah zueinander liegen. Die Wickeltechnologie ist jedoch aufwändig, da zum einen von der Mitte der Faser zu seinen Enden hin gewickelt werden muss, zum zweiten ständig zwischen zwei Faserhaltern gewechselt werden muss.

Durch den Einsatz von Quadrupolspulen wurden thermisch und mechanisch bedingte Abweichungen drastisch verringert. Nach [24] sollte die Verringerung bei rein thermischen (Shupeschen) Abweichungen  $3/N^2$  betragen ( $N$ =Windungszahl). In eigenen Simulationen (mit einer Windungszahl von 2500) wurden Verringerungen von 1:20 bis über 1:1000 festgestellt.

### 2.5.3 Superstrahlungsdioden als Maßnahme gegen Rayleigh-Rückstreuung

Rückgestreute Photonen interferieren mit solchen, die innerhalb der Kohärenzlänge<sup>11</sup> an anderer Stelle rückgestreut werden. Solchermaßen hervorgerufene Störungen werden durch Verwendung niedrigkohärenter

<sup>11</sup> Die Kohärenzlänge ist ein Maß für die Monochromatizität einer Lichtwelle. Ihre praktische Bedeutung lässt sich wie folgt formulieren: In Interferometern führen zwei Lichtstrahlen, die aus einer gemeinsamen Lichtquelle stammen, zu einer Interferenz mit vollem Kontrast, wenn der Unterschied der optischen Wege der beiden Strahlen genügend unterhalb der Kohärenzlänge liegt. In der Nähe oder oberhalb der Kohärenzlänge nimmt der Kontrast der Interferenzkurve ab, bis sie schließlich völlig verschwindet. Genauere Angaben können nur bei bekanntem Spektrum der Lichtquelle gemacht werden

Lichtquellen, die jedoch ein stabiles Spektrum aufweisen müssen, verringert. In Faserkreiseln werden daher hauptsächlich Superstrahlungsdioden (SLDs) eingesetzt.

## **2.6 Ausführungen von Faserspulen und deren Auswirkung auf mechanisch verursachte Abweichungen**

Geometrische und verfahrenstechnische Gründe erfordern oft, vom idealen oder einem gewünschten FOG-Aufbau abzuweichen. Ein Beispiel dafür sind elliptische Spulen, die verwendet werden, um die Abmessung des FOG-Systems zu verringern. Die Genauigkeit leidet darunter: elliptische Spulen ändern z.B. bei einer Formänderung ihren Skalenfaktor stärker als dies kreisförmige Spulen tun.

Eine vollständige Füllung der Faserspule mit Klebstoff ist technologisch nicht immer umsetzbar. Auch unterliegen die Materialdaten des Kautschuks, Klebstoffes oder der Glasfaser einer Unsicherheit.

Hier seien einige Ausführungsvarianten von FOGs inklusive deren Auswirkung auf die mechanische Querempfindlichkeit genannt:

- Es existieren verschiedene Wicklungsschemata (s. Kap. 2.5.2), die unterschiedliche Anforderungen hinsichtlich Symmetrie der Temperatur und Druck bzw. mechanischer Spannung an den Rändern stellen. Bei einer Zylinderspule genügt es, symmetrische Spannungsverläufe in horizontaler Richtung zu gewährleisten. Quadrupulspulen verlangen jedoch auch Symmetrie in vertikaler Richtung
- Der Klebeprozess wirkt sich auf die Steifigkeit der Spule und damit die Druckweitergabe auf die Faser aus: je mehr Klebstoff und je härter derselbe, desto größer dessen Druck auf die Faser. Doch auch die Wärmeleitungsseigenschaften der Klebestellen zwischen den Windungen sind von Bedeutung: bei schlechter Wärmeleitung innerhalb der Faserspule bilden sich Temperaturgradienten, die den Shupe-Effekt fördern. Da Wärmeleitfähigkeit von Klebstoff jedoch meist höher ist als die von Luft, verringert eine höhere Klebstoffmenge den Shupe-Effekt. Hier muss also ein „optimaler“ Zwischenweg zwischen vollständigem Eingießen und keiner Klebung gefunden werden.
- Zum einen muss die Faserspule fest gelagert werden: Bewegungen dürfen weder die Mittenachse noch die Innenfläche der Faserspule ändern, da sich sonst der Skalenfaktor bezüglich der Referenzachse ändert. Die Tatsache jedoch, dass (zeitlich veränderliche) Verformungen der Faser eine nicht-reziproke Phasenverschiebung bewirken, spräche für eine weiche Einbettung,

damit diese möglichst wenig Druck auf die Sensorfaser ausübt. In der Praxis werden Faserspulen meist weich eingebettet, z.B. durch Vergießen mit einem Kautschuk, teilweise sogar nur auf der Bodenfläche; die Seiten und die Oberfläche der Faserspule können sich dann frei bewegen und werden demnach nicht durch mechanischen Druck belastet.

## 2.7 Stand der Wissenschaft und Technik

Die universitäre Forschungsaktivität im Bereich Faserkreisel ist recht gering. Das liegt wohl u.a. daran, dass der Faserkreisel schon seit einiger Zeit das Forschungsstadium hin zum kommerziellen Einsatz verlassen hat und damit kein aktuelles Brennpunkthema in der Forschung mehr ist. Hersteller von Faserkreiseln forschen natürlich weiterhin, veröffentlichen ihre Ergebnisse jedoch nicht.

Die Mehrzahl gegenwärtiger oder nicht allzu weit zurückliegender Arbeiten befasst sich mit elektrischen und optischen Effekten wie dem Einfluss von Polarisation [26] und Spektrum der Lichtquelle [38] und von Magnetfeldern [37]. Auch die Komponenten werden optimiert: es werden moderne Glasfasern wie Photonic Crystal Fibers mit Luftkern [31] untersucht, Alternativen zur SLD wie z.B. Erbium-dotierte Faserverstärker [39]. Neue Erkenntnisse der Quantenoptik wurden angewandt, z.B. „squeezed light“ zur Verringerung des Schrotrauschens.

Temperaturfelder und deren Einwirkung auf die Faser in Form von Brechzahländerung und Längenausdehnung wurden zuerst von Shupe [25] und von Mohr [24] untersucht. Hier wurden jedoch noch nicht die mechanischen Spannungen in der Faserspule infolge thermischer Expansion des Einbettungsmediums berücksichtigt. Alle nachfolgenden Arbeiten, die sich mit Temperatureffekten im Faserkreisel befassen, beziehen sich auf den reinen Shupe-Effekt [29], [30].

Depolarisierte FOGs werfen zusätzliche Fragestellungen auf, die z.B. in [40], [41] und [42] diskutiert werden. Nicht zuletzt wird – dem hohen Entwicklungsstand von Faserkreiseln entsprechend – Integration, Miniaturisierung, Einsparung von Komponenten, Erweiterung des Anwendbarkeitsbereichs und Störungsunterdrückung mit Signalverarbeitungsalgorithmen u.ä. untersucht.

Es existieren Arbeiten, die – naturgemäß oft in Form von Patenten – konstruktive Maßnahmen zur Minimierung mechanisch und thermisch verursachter Messabweichungen vorstellen. [34] schlägt eine absichtlich zufällige Windungsfolge in der Faserspule vor. Damit werden Temperaturdifferenzen an von der Mitte der Faser entgegengesetzten Stellen angeglichen. [35] elaboriert über die Kompensation des Shupe-Effekts durch eine externe Temperaturregelung. [36] befasst sich mit der rechnerischen Kompensation dieses Effekts, d.h. die DRA wird vorausgesagt und

vom Sensorsignal abgezogen. Die wesentliche Messgröße ist hierbei die optische Faserlänge, die während des Betriebs kontinuierlich gemessen wird.

Nicht zuletzt seien auch Vorgehensweisen zur gezielten experimentellen Optimierung erwähnt. [33] schlägt vor, für eine gegebene Gehäusegeometrie verschiedene Spulen mit unterschiedlicher Faserlänge, unterschiedlicher Windungszahl pro Lage etc. zu testen. Zudem werden Kombinationen aus einer Quadrupolspule und einer oder mehrer Lagen mit zylindrischer Wicklung getestet. Durch diese Kombination kompensieren idealerweise die zylindrischen Lagen die DRAen der Quadrupolspule.

Nach Wissen des Verfassers wurde über den Shupe-Effekt hinausgehend keine grundlegende Untersuchung der Wirkmechanismen mechanischer Einflüsse auf Drehratenabweichungen vorgenommen. Der Shupe-Effekt beschreibt jedoch nur (und dies zudem nur teilweise) die Wirkung von Temperaturänderungen. Vibrationen können damit nicht behandelt werden. Die Ursache von Drehratenabweichungen bei Vibration wurde nur qualitativ, z.B. in [12], beschrieben.

Im Speziellen wurden inhomogene Spannungsfelder, wie sie bei Vibration und Temperaturänderungen entstehen, nach Wissen des Autors außerhalb der eigenen Forschergruppe nicht quantitativ untersucht. Dabei haben diese auch im thermischen Fall einen Einfluss, der mit dem reinen Shupe-Effekt vergleichbar oder sogar stärker ist [28] – je nach Ausführung des FOG. Für die Berechnung von DRAen bei Vibration sind diese Betrachtungen sogar unerlässlich. Dementsprechend ist das Ziel der vorliegenden Arbeit die quantitative Analyse dieser inhomogenen Spannungsfelder bei Vibration und Temperaturänderung sowie deren Auswirkung auf Drehratenabweichungen.



## 3 Elastizitätstheoretische Grundlagen

### 3.1 Überblick

Obwohl die vorliegende Arbeit sich mit einem optischen Sensor befasst, ist doch ihr wesentlicher Inhalt – die rechnerische Beschreibung der Einwirkung von Temperaturänderungen oder Vibration auf FOGs – elastomechanischer Natur. Daher soll in diesem Kapitel an einige Grundlagen der Elastomechanik erinnert und nicht unbedingt geläufige Themen wie die Elastomechanik anisotroper Körper und einige Besonderheiten des mechanischen Verhaltens von Kautschuken angesprochen werden.

Selbst bei großen Erwärmungen sind die Verzerrungen im Faserkreisel sehr klein<sup>12</sup>. Daher genügt eine linearelastische Behandlung. Die beliebte Annahme der Isotropie sämtlicher Medien ist jedoch nicht mehr gültig: die in Kautschuk vergossene Faserspule verhält sich nämlich (makroskopisch) anisotrop. Um dies richtig zu beschreiben, muss der Rechenapparat der Elastomechanik linearer isotroper Körper entsprechend erweitert werden.

Kautschuke verhalten sich noch deutlicher als etwa Metalle viskoelastisch<sup>13</sup>. Dieses sorgt z.B. dafür, dass Kautschuke bei sinusförmiger Beschleunigung ein frequenzabhängiges Spannungs-Dehnungs-Verhalten haben. Ebenso zeigen sie sich bei der vergleichsweise langsamen thermischen Expansion weicher als bei kurzen Schocks. Kurz sei auch noch auf das Haftverhalten von Kunststoffen auf metallischen Oberflächen eingegangen, da auch dies für den Faserkreisel eine große Rolle spielt.

---

<sup>12</sup> Bei einem maximalen thermischen Ausdehnungskoeffizienten von  $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} K^{-1}$  und einer unrealistisch hohen Temperaturänderung von  $\Delta T = 100 K$  würden Verzerrungen von 3% auftreten, was sich linear gut behandeln lässt. Reale Verzerrungen im Faserkreisel sind jedoch aufgrund von Dehnungsbehinderungen durch Faser und Gehäuse deutlich geringer

<sup>13</sup> viskoelastische Materialien sind solche mit zeitabhängigem Spannungs-Dehnungs-Verhalten (s. Abschnitt 3.3.4)

## 3.2 Einige Zusammenhänge der linearen Elastizitätstheorie

### 3.2.1 Vorbemerkungen und Vereinbarungen

Wie in der linearen Elastizitätstheorie üblich, werden in dieser Arbeit ausschließlich Lagrangesche Koordinaten, also Materialkoordinaten<sup>14</sup> verwendet.

Ferner sei daran erinnert, dass in manchen Fällen Gebrauch von der Einsteinschen Summationskonvention gemacht wird.

### 3.2.2 Materialgleichungen

Das Hookesche Gesetz (auch als Materialgleichung bezeichnet) für allgemeine linearelastische Körper ohne thermische Expansion lautet in Einsteinscher Summationskonvention [64]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} (= \sum_{k,l} C_{ijkl}\epsilon_{kl}) \quad (15)$$

$\sigma_{ij}$  sind hier die Komponenten des Spannungstensors  $\vec{\sigma}$ ,  $\epsilon_{kl}$  die des Verzerrungstensors  $\vec{\epsilon}$  und  $C_{ijkl}$  die des Steifigkeitstensors  $\vec{C}$ . Bei gleichzeitiger thermischer Expansion, beschrieben durch eine Temperaturdifferenz  $\Delta T$  und den Ausdehnungstensor  $\vec{\alpha}$  mit den Komponenten  $\alpha_{kl}$ , bewirkt eine mechanische Spannung nur eine Zunahme von  $\epsilon_{kl} - \alpha_{kl}\Delta T$  [54]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \alpha_{kl}\Delta T) \quad (16)$$

In isotropen Körpern ist  $\vec{C}$  durch zwei unabhängige Konstanten definiert, die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Materialgleichung nimmt dann die einfachere Form

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (17)$$

an mit  $e := \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$  bzw. bei thermischer Expansion mit der skalaren Ausdehnungskonstanten  $\alpha$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}(e - 3\alpha\Delta T) + 2\mu(\epsilon_{ij} - \delta_{ij}\alpha\Delta T) \quad (18)$$

Die Ingenieurskonstanten  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$  und  $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$  sind gebräuchlicher als die Lamékonstanten. In diesen lassen sich (15) und (18) umstellen zu

---

<sup>14</sup> Das sind solche, die sich auf den unverformten Körper beziehen. Ein bestimmter Punkt des Körpers behält bei Verformung also seine Koordinaten bei. Das Gegenstück zu den Lagrangeschen sind Eulersche Koordinaten, die sich auf den zugrundeliegenden Raum beziehen.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad (19)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \delta_{ij} \Delta T \quad (20)$$

Die Matrixform der obigen Gleichung erleichtert in vielen Fällen die Übersicht:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Der Schubmodul  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ist die dritte gebräuchliche Ingenieurskonstante und ist identisch mit  $\mu$ .

### 3.2.3 Kinematische Grundgleichungen

Die kinematischen Grundgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen einem Verschiebungsfeld und dem dazugehörigen Verzerrungsfeld. Ein bei kleinen Verzerrungen gebräuchliches Verzerrungsmaß ist der Verzerrungstensor

$$\vec{\epsilon} := \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) \quad (22)$$

In kartesischen Koordinaten ist dies äquivalent zu

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (23)$$

Insbesondere ist (unter Verwendung der üblichen Koordinatenbezeichnungen  $x=x_1$  etc.)  $\epsilon_x := \epsilon_{xx} = u_{x,x}$ ,  $\epsilon_y := \epsilon_{yy} = u_{y,y}$  und  $\epsilon_z := \epsilon_{zz} = u_{z,z}$

Die Volumenexpansion  $e := \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  lässt sich damit aus den Verschiebungen berechnen:

$$e = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} = \nabla \cdot \vec{u}. \quad (24)$$

### 3.2.4 Bewegungsgleichung

Bei dynamischen Problemen stellt sich ein zeitabhängiger Spannungs- bzw. Verformungszustand ein, der durch die Gleichung

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (25)$$

bzw. – in kartesischen Koordinaten –

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (26)$$

beschrieben wird (s. z.B. [63]). Mit  $\vec{f}$  werden hier Volumenkräfte wie Schwerkraft, Zentrifugalkräfte, die Kraftwirkung elektrischer und magnetischer Felder etc.

bezeichnet,  $\rho$  ist die Dichte des Materials und  $\ddot{\vec{u}}$  die Beschleunigung des jeweiligen Körperpunktes. Bei statischen Problemen verschwindet  $\ddot{\vec{u}}$  und die sich dann ergebende „Bewegungsgleichung“ wird Gleichgewichtsbedingung genannt.

### 3.2.5 Gleichgewichtsbedingungen

Für statische Probleme unter Einbezug von Volumenkräften verschwindet der Beschleunigungsterm in (25):

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad (27)$$

Obwohl in dieser Arbeit kein Bezug auf die Gleichgewichtsbedingung in Verschiebungskomponenten genommen wird, sollen diese genannt werden, da Finite-Elemente-Simulationen auf ihr basieren. Durch Einsetzen der Beziehung  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \varepsilon_{ij}$  erhält man:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla e + \vec{f} = 0 \quad (28)$$

Bei örtlich näherungsweise konstantem Beschleunigungsterm  $\ddot{\vec{u}}$  (d.h. wenn die reine Vibrationsbewegung aller Materialpunkte die zusätzliche Bewegung aufgrund von Deformation weit überragt) kann die Beschleunigung in die Volumenkräfte als „scheinbare Gravitation“ behandelt werden. In diesem Fall ist  $\vec{f} = -\rho a$  und die rechte Seite der Gleichung (25) verschwindet. Die oben genannte Bedingung sollte u.a. für Frequenzen genügend weit unterhalb der ersten Resonanz erfüllt sein<sup>15</sup>. Die niedrigste Resonanzfrequenz unseres Referenz-FOG FK-Mil liegt – wenn nur torsionslose rotationssymmetrische Belastungen und Verformungen betrachtet werden – bei etwa 5kHz, der für FOGs interessante Frequenzbereich geht typischerweise nur bis zu 1 oder 2kHz.

### 3.2.6 Ebene Probleme in kartesischen Koordinaten

Kann sich ein Körper in einer – etwa vertikaler – Richtung entweder völlig frei (Ebener Spannungszustand, ESZ) oder überhaupt nicht (Ebener Verzerrungszustand, EVZ) ausdehnen, so lässt sich die Dimension der bisher genannten Gleichungen auf zwei verringern [62]. Der ESZ lässt sich zum Beispiel für sehr flache Körper anwenden, während mit dem EVZ die Verformung von Körpern modelliert wird, die durch eine entsprechende Fixierung an der Ausdehnung in einer Richtung gehindert

---

<sup>15</sup> Eigene Simulationen belegten, dass unterhalb der ersten Resonanzfrequenz die quasistatische Näherung und eine echte transiente Simulation praktisch dieselben Verzerrungs- und Spannungsfelder liefern

werden. Im ersten Fall verschwindet – falls die z-Achse als die Richtung freier bzw. verschwindender Ausdehnung festgelegt wird –  $\sigma_z$  im ganzen Körper, im zweiten Fall  $\varepsilon_z$ .

In dieser Arbeit findet der EVZ bei der Untersuchung der elastischen Eigenschaften der Faserspule Anwendung: diese dehnt sich in Faserrichtung wesentlich geringer aus als senkrecht dazu. In bestimmten Fällen kann deren Ausdehnung in Faserlängsrichtung also vernachlässigt werden. Da in der vorliegenden Arbeit ebene Rechnungen ausschließlich auf dem EVZ basieren, soll nur dieser hier näher beschrieben werden.

In dieser Arbeit spielen zweidimensionale Probleme in zylindrischen Koordinaten bei der analytischen (De-) Homogenisierung der Faserspule in Kap. 5 eine Rolle. Daher werden nach einer sehr kurzen Erinnerung an die Grundgleichungen des EVZ in kartesischen dieselben in polaren Koordinaten abgeleitet und eine wichtige Partikulärlösung der Bewegungsgleichung vorgestellt: die Michel-Lösung.

Im EVZ verschwinden nicht nur die  $\varepsilon_z$  und  $u_z$ , sondern auch die Abhängigkeit der übrigen Feldgrößen von der z-Koordinate, d.h.  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Somit existieren nur die Verschiebungen  $u_x$ ,  $u_y$ , die Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\gamma_{xy}$  sowie die Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  und  $\sigma_{xy}$ .

Die Materialgleichung lautet nun

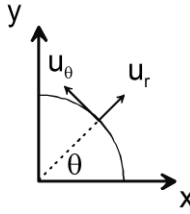
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Aus der Bedingung  $\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0$  folgt  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Somit lässt sich  $\sigma_z$  aus (29) entfernen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \nu^2)/E & -(\nu + \nu^2)/E & 0 \\ -(\nu + \nu^2)/E & (1 - \nu^2)/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

### 3.2.7 Ebene Probleme in Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten werden die Verschiebungskomponenten  $u_r =: u$  (Radialverschiebung) und  $u_\theta =: v$  (Azimutalverschiebung) eingeführt (s. Abbildung 29).



**Abbildung 29:**  
Verschiebungskomponenten in polaren Koordinaten

Für die Verzerrungen gilt [62]:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ und } \gamma_{r\theta} = 2\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (31)$$

Die Materialgleichungen bleiben prinzipiell gleich<sup>16</sup>. Im EVZ z.B. lauten sie:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\nu^2)/E & -(\nu+\nu^2)/E & 0 \\ -(\nu+\nu^2)/E & (1-\nu^2)/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

In manchen Fällen müssen Verschiebungen, Verzerrungen und/oder Spannungen zwischen kartesischen und polaren Koordinaten umgerechnet werden. Für die Verschiebungskomponenten  $u_r$  und  $u_\theta$  lässt sich durch geometrische Überlegungen leicht zeigen, dass bei einem Azimutwinkel  $\theta$  gilt:

$$u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \quad (33)$$

$$u_\theta = u_y \cos(\theta) - u_x \sin(\theta) \quad (34)$$

Nicht ganz trivial ist die Koordinatentransformation bei Tensoren. Die Komponenten des Spannungstensors transformieren sich nach [62] folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2\sigma_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) = \\ &= \sigma_x \frac{x^2}{r^2} + \sigma_y \frac{y^2}{r^2} + 2\sigma_{xy} \frac{xy}{r^2} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2(\theta) + \sigma_y \cos^2(\theta) - 2\sigma_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) = \\ &= \sigma_x \frac{y^2}{r^2} + \sigma_y \frac{x^2}{r^2} - 2\sigma_{xy} \frac{xy}{r^2} \end{aligned} \quad (36)$$

<sup>16</sup> Vereinfacht kann man sagen, dass bei der Verwendung eines krummlinigen Koordinatensystems diejenigen Gleichungen eine andere Form als bei geradlinigen annehmen, die Differentialoperatoren enthalten. Da die Materialgleichungen keine Differentialoperatoren enthalten, bleiben sie im Wesentlichen gleich. Dies setzt jedoch eine orthonormale Vektorbasis voraus, da dann die Komponenten von Vektoren und Tensoren physikalische Größen sind, also z.B. Spannungskomponenten in N/m<sup>2</sup>, Verschiebungen in m etc.

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{xy} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) \frac{xy}{r} + \sigma_{xy} \frac{x^2 - y^2}{r^2}\end{aligned}\quad (37)$$

Der Verzerrungstensor transformiert sich entsprechend.

### 3.2.8 Lösung ebener Probleme mit Airyschen Spannungsfunktionen

Einige ebene Probleme im EVZ oder ESZ lassen sich mithilfe der Airyschen Spannungsfunktion lösen [62]. Es lässt sich zeigen, dass mithilfe eines biharmonischen Skalarpotentials, also eines Potentials, das die Gleichung

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (38)$$

erfüllt, Lösungen der Gleichgewichtsbedingung für verschwindende Volumenkräfte berechnet werden können. Hierzu müssen die Spannungen folgenden Gleichungen genügen:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \text{ und } \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (39)$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \text{ und } \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (40)$$

### 3.2.9 Michell-Lösung für ebene Probleme in Polarkoordinaten

Eine allgemeine Lösung der biharmonischen Gleichung (38) in Polarkoordinaten ist die Michell-Lösung ([55], [56]):

$$\begin{aligned}\Phi &= A_0 r^2 + B_0 r^2 \ln(r) + C_0 \ln(r) + D_0 \theta \\ &+ (A_1 r + B_1 r^3 + B'_1 r \theta + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln(r)) \cos(\theta) \\ &+ (E_1 r + F_1 r^3 + F'_1 r \theta + G_1 r^{-1} + H_1 r \ln(r)) \sin(\theta) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{n+2} + C_n r^{-n} + D_n r^{2-n}) \cos(n\theta) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (E_n r^n + F_n r^{n+2} + G_n r^{-n} + H_n r^{2-n}) \sin(n\theta)\end{aligned}\quad (41)$$

Zwei Teillösungen, die später noch von Bedeutung sein werden, sind

$$\Phi_0 = Ar^2 + C \ln(r) \text{ und} \quad (42)$$

$$\Phi_2 = \left( Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos(2\theta) \quad (43)$$

Mit der ersten lässt sich eine rotationssymmetrische Spannungsverteilung ohne Schubspannungen beschreiben:

$$\sigma_r = 2A + \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_{\theta} = 2A - \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (44)$$

Der Ansatz

$$\mathbf{u}_r = A' \mathbf{r} + C'/r; \quad \mathbf{u}_{\theta} = \mathbf{0} \quad (45)$$

ist zu diesem äquivalent.

Aus  $\Phi_2$  können die Spannungsfelder

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos(2\theta) \quad (46)$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos(2\theta) \quad (47)$$

$$\sigma_{r\theta} = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin(2\theta) \quad (48)$$

berechnet werden. Die entsprechenden Verschiebungen  $u_r$  und  $u_\theta$  sind nach [56]:

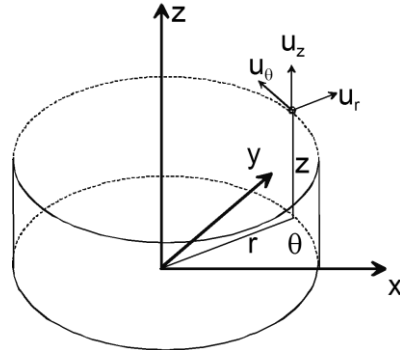
$$u_r = \frac{1}{2G} \left(-2Ar + (k-3)Br^3 + \frac{2C}{r^3} + \frac{(k+1)D}{r}\right) \cos(2\theta) \text{ und} \quad (49)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2G} \left(2Ar + (k+3)Br^3 + \frac{2C}{r^3} - \frac{(k-1)D}{r}\right) \sin(2\theta), \text{ wobei} \quad (50)$$

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{im EVZ} \\ \frac{3-4\nu}{1+\nu} & \text{im ESZ} \end{cases} \quad (51)$$

### 3.2.10 Dreidimensionale rotationssymmetrische torsionslose Belastung

Da Faserkreisel oft eine zylindrische Geometrie haben, liegt bei Berechnungen und Simulationen der Wechsel zu einem zylindrischen Koordinatensystem  $(r, \theta, z)$  nahe. In diesem lassen sich nicht nur Symmetrien der Geometrie, sondern auch die der Belastung bzw. der Randbedingungen einfacher fassen. Den Simulationen für diese Arbeit liegt sämtlich ein rotationssymmetrischer FOG und eine ebensolche Belastung



**Abbildung 30: Komponenten des Verschiebungsvektors in zylindrischen Koordinaten**

zugrunde, d.h. für sämtliche Felder inner- und außerhalb des FOG gilt  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ .

Bei einer reinen Out-of-plane-Vibration, also einer Bewegung in Richtung der Mittelachse des FOG, herrscht ferner Schubfreiheit in azimuthaler Richtung, d.h.  $u_\theta = \epsilon_{\theta r} = \epsilon_{\theta z} = 0$ . Übrig bleiben die Verschiebungskomponenten  $u_r =: u$  und  $u_z =: w$ , die Verzerrungen  $\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta, \epsilon_{rz}$  sowie die Spannungskomponenten  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_{rz}$ .



Die Verzerrungen lassen sich aus den Verschiebungen anhand der folgenden geometrischen Grundgleichungen berechnen [62]:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{rz} = 2\epsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (52)$$

Auch hier ändern die Materialgleichungen ihre grundsätzliche Form durch die Verwendung eines krummlinigen Koordinatensystems nicht – es sind nur die Indizes auszutauschen. Die Gleichgewichtsbedingungen unter Einbezug von Körperkräften  $\vec{f} = (f_r, 0, f_z)^T$  lauten nun [62]:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_{rz}) - \sigma_\theta + f_r r = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_z) + f_z r = 0 \quad (54)$$

bzw., in Verschiebungen formuliert:

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} + f_r r = 0 \quad (55)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + f_z r = 0 \quad (56)$$

Der Laplace-Operator für Skalarfelder in Zylinderkoordinaten ist  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , die Volumenexpansion

$$e = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (57)$$

### 3.3 Mechanisches Verhalten von Elastomeren

#### 3.3.1 Anforderungen an Kleb- und Füllstoffe für Faserkreisel

Die Windungen der Faserspule müssen verklebt werden, um den Formerhalt der Faserspule zu garantieren. Ändert diese nämlich ihre Form, so ändert sich auch der Skalenfaktor des FOG. Darüber hinaus muss die Faserspule am Gehäuse befestigt werden. Dies kann punktuell geschehen mit einzelnen Klebstofftropfen oder auch vollflächig durch Vergießen der Spule in einem wannenförmigen Gehäuse.

Zum Verkleben von FOG-Faserspulen und zum Vergießen des Raums zwischen Faserspule und Gehäuse werden weiche Materialien bevorzugt, um die mechanische Einwirkung auf die Sensorfaser möglichst gering zu halten.

Die mechanischen Eigenschaften des Klebstoffes bzw. Füllstoffes sollten allerdings über einen weiten Temperaturbereich (etwa zw.  $-40^\circ\text{C}$  und  $+70^\circ\text{C}$  [43]) möglichst konstant bleiben. So muss z.B. die Glasübergangstemperatur unterhalb von  $-40^\circ\text{C}$  liegen, eine Verflüssigung oder gar Zersetzung darf erst weit über  $100^\circ\text{C}$  anfangen.

Silikone eignen sich hierfür in besonderem Maße. Sie sind als elastomeres Gießharz erhältlich und haben einen größeren Temperaturbereich als die meisten kohlenstoffbasierten Polymere.

Die mechanischen Eigenschaften von Elastomeren sind allerdings wesentlich komplexer „vorherzusagen“ als die von Metallen. Sie sind sehr stark temperaturabhängig und nichtlinear und zeitabhängig. Die Nichtlinearität, maßgeblich im Spannungs-Dehnungs-Verhalten, spielt zwar bei den minimalen Dehnungen im Faserkreisel (<1%) keine Rolle, doch muss sie bei der Interpretation von Datenblattangaben berücksichtigt werden, wenn etwa der E-Modul bei großer Dehnung (z.B. 10% oder mehr) angegeben ist.

Gerade bei Vibration sind auch dynamische Effekte der Elastomere bedeutsam. FOGs haben Ausgaberraten bis zu mehreren tausend Messwerten pro Sekunde. Damit ist auch ihre Vibrations-Querempfindlichkeit bis zu einem oder mehreren kHz interessant. In diesem Frequenzbereich spielen (äußerst stark temperaturabhängige) viskoelastische Effekte eine Rolle. Zudem könnten Kriechprozesse thermische Verspannungen verringern.

Die nachfolgenden Abschnitte beschreiben einzelne mechanische Eigenschaften von Elastomeren, die für die Modellierung von FOGs wie auch für die Materialwahl und das FOG-Design beachtet werden müssen.

### 3.3.2 Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang

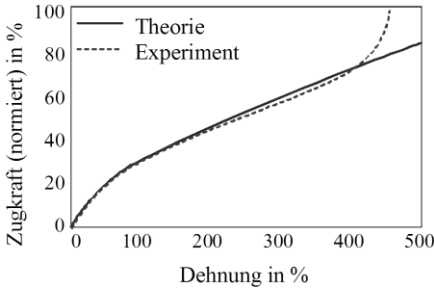
Das lineare Hookesche Gesetz gilt auch bei Kautschuken nur im Bereich kleiner Dehnungen oder bei geringer Abweichung von einem Arbeitspunkt, der sich z.B. aufgrund thermischer Vorspannungen einstellt. Das „Kettensegmentmodell“, ein mechanisches Modell, das die Polymerketten von Kunststoffen mit kurzen, durch freie Gelenke verbundene feste Stäbe modelliert und damit das mechanische Verhalten vieler Kautschuke sehr gut beschreibt, sagt folgenden Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang<sup>17</sup> voraus [65] (siehe Abbildung 31):

$$\sigma = \frac{kTN_{seg}}{V_0} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (58)$$

$N_{seg}$  sei hier die Gelenkdichte (cross-link density),  $V_0$  das Volumen des unverformten Probekörpers und  $\lambda = \frac{l}{l_0}$  die Dehnung (extension ratio) des Probekörpers.

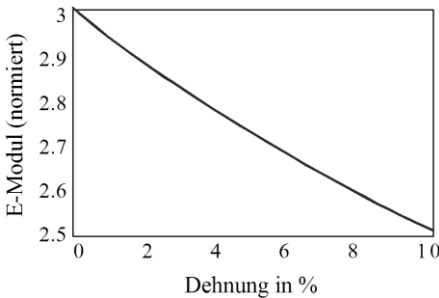
---

<sup>17</sup> Es wird hier einachsiger Zug bzw. Druck und Volumenerhaltung des Kautschuks bei Verformung vorausgesetzt. Letzteres ist bei üblichen Kautschuken in sehr guter Näherung gegeben.



**Abbildung 31: Typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Elastomers**

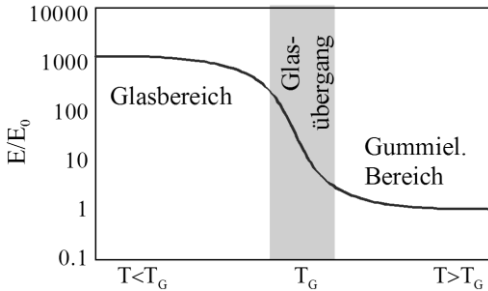
Es ist zu beachten, dass bei kleinen Dehnungen  $\epsilon \lesssim 1\%$  der E-Modul – definiert als Ableitung der Zugspannung eines Zugstabs nach der Dehnung  $\epsilon = \lambda - 1$  – dreimal so groß ist wie im Grenzwert großer Dehnung (siehe auch Abbildung 32). In Datenblättern von Kautschuken wird stattdessen eines E-Moduls oft ein Sekantenmodul bei gegebener Dehnung angegeben. Mit Hilfe der obenstehenden Formel bzw. der folgenden Abbildung kann eine Umrechnung des Sekantenmoduls in einen für kleine Dehnungen gültigen E-Modul erfolgen.



**Abbildung 32: Normierter E-Modul, definiert als Ableitung der Zugspannung eines Zugstabs nach der Dehnung  $\epsilon$ , für Deformationen bis 10%. Der normierte E-Modul strebt für große Dehnungen gegen eins**

### 3.3.3 Temperaturabhängigkeit des E-Moduls

Kunststoffe, insbesondere Thermoplaste und Elastomere, erscheinen bei Temperaturen unterhalb der Glasübergangstemperatur  $T_g$  wesentlich härter als darüber [69]. Wie weich ein Kunststoff bei Zimmertemperatur ist, hängt maßgeblich auch von seiner Glasübergangstemperatur ab. Polystyrol z.B. – ein bei Zimmertemperatur harter Kunststoff – erweicht bei etwa  $110^\circ\text{C}$ , während die Glasübergangstemperatur von Elastomeren weit unterhalb der Zimmertemperatur liegt. Die von Silikonem zw.  $-120^\circ\text{C}$  und  $-80^\circ\text{C}$  [71].



**Abbildung 33: Typischer Verlauf der Temperaturabhängigkeit des E-Moduls eines Elastomers**

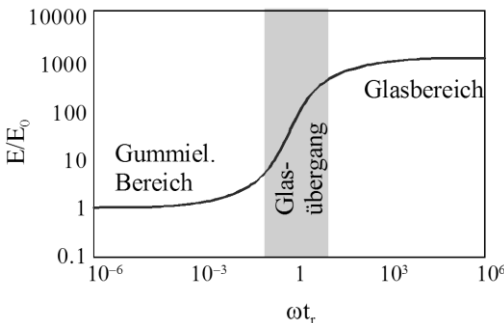
Bei sehr tiefen Temperaturen verändern die Atome im Kautschuk unter Krafteinwirkung nur geringfügig ihren Ort um ihre Ausgangslage. Die Konformation der Ketten bleibt erhalten, der Verformungsmechanismus ist wie etwa bei kristallinen Materialien. Oberhalb der Glasübergangstemperatur sind die Polymerketten genügend beweglich, sodass sich die Kettengestalt durch Konformationsänderungen ändern kann. Die Polymerketten „gleiten aneinander vorbei“.

In Thermoplasten kann dies zu einer irreversiblen Formänderung führen. Sie verhalten sich viskos. In Elastomeren beschränken jedoch Vernetzungen das Gleiten der Ketten und machen Verformungen reversibel.

Neben dem E-Modul ändern sich auch viele andere Materialparameter fast sprunghaft (Wärmeausdehnungskoeffizient, Wärmekapazität) bei Über- bzw. Unterschreiten der Glasübergangstemperatur.

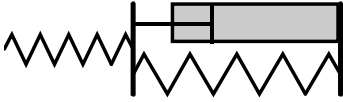
### 3.3.4 Viskoelastizität von Elastomeren

Konformationsänderungen sind im Vergleich zu Bewegungen um den Gitterplatz eines Atoms in einem Kristall recht langsame Prozesse. Daher ist der E-Modul von Kunststoffen auch ausgeprägt frequenzabhängig (s. Abbildung 34).



**Abbildung 34: Prinzipielle Frequenzabhängigkeit des E-Moduls von Elastomeren.** Mit  $t_r$  wird die Relaxationszeit bezeichnet. Sie ist eine ausgesprochen temperaturabhängige Größe

Das viskoelastische Verhalten von Elastomeren kann z.B. durch folgendes mechanisches Ersatzelement angenähert werden [69]:



**Abbildung 35:** Ein einfaches Modell viskoelastischen Verhaltens ist das links abgebildete Feder-Dämpfer-Modell

Bei hohen Frequenzen dehnt sich nur die (harte) links abgebildete Feder aus, bei niedrigen die rechte weichere. Das Dämpfungsglied modelliert die mechanische Trägheit der Konformationsänderungen in Polymeren. Es ist also im Hinblick dieser Zusammenhänge exakter, von einem kautschukelastischen Bereich zu sprechen, falls  $\omega t_r \ll 1$  ist, und von einem Glasbereich für  $\omega t_r \gg 1$ . Der Bereich dazwischen kann als Übergangsbereich betrachtet werden.

Die Temperatur-Frequenz-Äquivalenz wird mit der WLF- (Williams-Landel-Ferry)-Gleichung [65], [69] für viele Materialien gut angenähert. Nach dieser Gleichung gilt für den zeitabhängigen Schubmodul eines viskoelastischen Werkstoffes bei unterschiedlichen Temperaturen

$$G(T_0, t) = G(T, t/a_T) \quad (59)$$

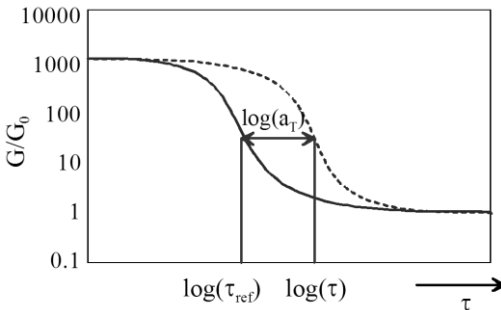
Entsprechend im Frequenzbereich:

$$G(T_0, \omega) = G(T, \omega \cdot a_T) \quad (60)$$

mit dem Skalenfaktor (shift factor)

$$\log a_T = \frac{-C_1(T-T_g)}{C_2+T-T_g} \quad (61)$$

$C_1$  und  $C_2$  sind material- und leicht temperaturabhängige Konstanten und betragen für die meisten Kunststoffe im Temperaturbereich zwischen  $T_g$  und  $T_g+100$  °C  $C_1 = -17.44$  und  $C_2 = 51.6$  °C [65]. Die folgende Abbildung zeigt die Zeitkonstanten-Abhängigkeit des G-Moduls eines fiktiven Werkstoffes bei zwei unterschiedlichen Temperaturen:



**Abbildung 36:** Kriechnachgiebigkeit (creep compliance) eines viskoelastischen Probekörpers vs Versuchsdauer. Bei Temperaturänderung erhält man eine um  $\log(a_T)$  verschobene Kurve

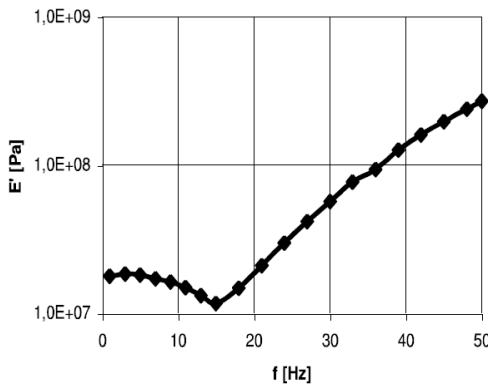
### 3.3.5 Silikone

Silikonische Elastomere weisen Eigenschaften auf, die sie für den Einsatz als Füllmaterial in Faserkreiseln prädestinieren [71]:

- hohe Temperaturfestigkeit, Einsatzbereich teilweise von  $-100^{\circ}\text{C}$  bis  $250^{\circ}\text{C}$
- geringe Wasserdurchlässigkeit, daher auch geringe Quellneigung
- ausgezeichnete Inertheit gegen Sauerstoff, Ozon und UV-Licht. Daher sind geringe Alterungserscheinungen zu erwarten

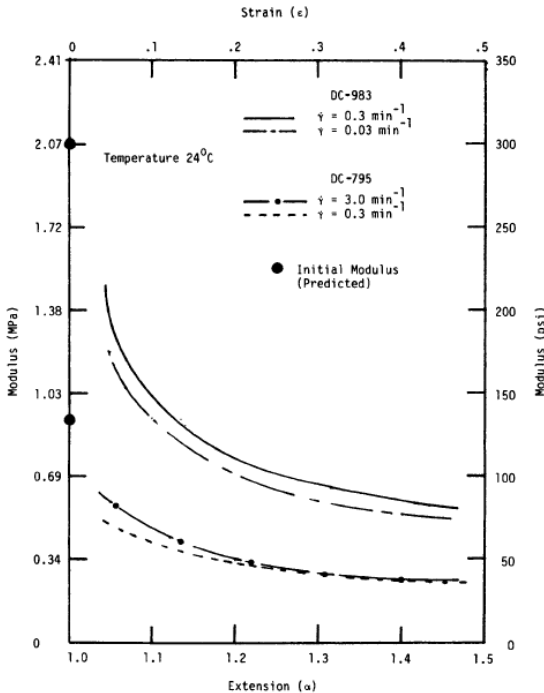
Ihre mechanischen Eigenschaften sind in weiten Bereichen einstellbar.

Es gibt Hinweise, dass sich das dynamische (viskoelastische) Verhalten von Silikonem von dem anderer Elastomere unterscheidet. So zeigt nach A. Huba und L. Molnar [67] der von ihnen untersuchte Silikon-Probekörper mit  $T_g = -40^{\circ}\text{C}$  im Temperaturbereich  $-20^{\circ}\text{C} \dots 50^{\circ}\text{C}$  fast keine Temperaturabhängigkeit des E-Moduls (genauer: des Speichermoduls); er hängt fast nur von der Frequenz ab. Die folgende Abbildung (Abbildung 37) zeigt diese Frequenzabhängigkeit des untersuchten Silikonkörpers:



**Abbildung 37: Frequenzabhängigkeit des E-Moduls (genauer: Speichermoduls) des von A. Huba et al. [67] untersuchten Silikons**

Abbildung 38 zeigt das nichtlineare Dehnungsverhalten zweier Probekörper. Wie erwartet nimmt der E-Modul deutlich mit zunehmender Dehnung ab.



**Abbildung 38:**  
Dehnungsabhängigkeit  
des E-Moduls zweier  
Silikone [70].

### 3.3.6 Die Querkontraktionszahl von Elastomeren

Datenblätter von Elastomeren geben oft nur den E-Modul (meist in der Form eines Sekantenmoduls) an. Die Poissonzahl  $\nu$  ist nur sehr selten darin zu finden. Ist zusätzlich der Schermodul  $G$  oder der Kompressionsmodul  $K$  angegeben, kann  $\nu$  leicht berechnet werden. Fehlen auch diese, ist nach Wissen des Verfassers für ungeschäumte Elastomere die Annahme eines Kompressionsmoduls  $K=2\text{GPa}$  gerechtfertigt: alle in [71] aufgeführten Elastomere besitzen in ordentlicher Näherung diesen Kompressionsmodul. Eigene Messungen verschiedener als Füllmaterial verwendeter Silikonkautschuke ergaben Kompressionsmoduli von  $K=600\text{MPa} \dots 1\text{GPa}$ .

### 3.3.7 Haftung an Grenzflächen

Für eine korrekte Modellierung des Systems Metallgehäuse – Verguss – Spule müssen alle Komponenten an der jeweils angrenzenden perfekt haften. Das Standardmittel, um dies zu erreichen, ist das Reinigen der Gehäuseinnenwand mit

organischen Lösungsmitteln und daraufhin die Behandlung mit einem geeigneten Primer. Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vibrierender FOGs haben jedoch gezeigt, dass der Verguss oft nicht vollflächig am Gehäuse haftet. Thermisch härtende Klebstoffe lösen sich vermutlich schon beim Abkühlen vom Gehäuse.

Dies zu vermeiden ist von hoher praktischer Bedeutung: Simulationen ergaben, dass durch das teilweise oder vollständige Ablösen des Vergusses die Drehratenabweichung stark erhöht wird: im Simulationsmodell um einen Faktor 10...20 (s. Kap. 6.4).

### 3.4 Lineare Elastizitätstheorie transvers-isotroper Körper

#### 3.4.1 Allgemeine Anisotrope Materialien

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen ist das in Gleichung (62) angegebene Hookesche Gesetz für Körper mit linear-elastischem anisotropem Verhalten [54]:

$$\epsilon_{ij} - \alpha_{ij}\Delta T = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (62)$$

bzw. in Matrixschreibweise[51]:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} - \alpha_{11}\Delta T \\ \epsilon_{22} - \alpha_{22}\Delta T \\ \epsilon_{33} - \alpha_{33}\Delta T \\ \gamma_{23} - \alpha_{23}\Delta T \\ \gamma_{31} - \alpha_{31}\Delta T \\ \gamma_{12} - \alpha_{12}\Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{3611} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$S_{ijkl}$  sind die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors  $\vec{S}$ ,  $S_{ij}$  die der Nachgiebigkeitsmatrix  $S$ . Sie beschreiben das elastische Verhalten eines linear-elastischen anisotropen Körpers vollständig.  $\alpha_{ij}$  sind die Temperatúrausdehnungskoeffizienten. Die Matrix  $S$  ist symmetrisch und hat damit maximal 21 unabhängige Komponenten. Man beachte, dass Schubverzerrungen durch  $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$  beschrieben werden.

Materialsymmetrien verringern die Anzahl unabhängiger Komponenten. Im Falle isotroper Materialien – also maximaler Symmetrie – lassen sich sämtliche Komponenten aus den „Ingenieurskonstanten“  $E$  und  $\nu$  berechnen.  $S$  nimmt dann die einfache Form



$$S = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \quad (64)$$

an [54].

### 3.4.2 Orthotrope Materialien

In orthotropen Materialien existieren drei zueinander senkrecht stehende Vorzugsrichtungen. Wird eine Normalspannung eingeprägt, die parallel zu einer dieser Vorzugsrichtungen zeigt, bewirkt diese Normaldehnungen in derselben und den beiden Richtungen senkrecht dazu, jedoch keine Schubverzerrung. Dieses Verhalten wird treffend damit beschrieben, dass eine Querdehnungskopplung existiert, aber keine Dehnungs-Schiebungs-Kopplung. Auch isotrope Werkstoffe verhalten sich so. In einem passenden Koordinatensystem<sup>18</sup> nimmt die Nachgiebigkeitsmatrix die Form

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symm.} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix} \quad (65)$$

an. Wie man an der Diagonalform ab der 4. Spalte bzw. Zeile sieht, sind auch die Schubspannungen bzw. -Dehnungen paarweise voneinander entkoppelt. Dem Vorbild isotroper Körper folgend, werden die Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix oft durch E-Moduli und Poissonzahlen ausgedrückt [54]:

$$S = \begin{pmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Man beachte, dass die Poissonzahlen nicht symmetrisch hinsichtlich der Vertauschung ihrer Indizes sind! Z.B. ist  $\nu_{zx} \neq \nu_{xz}$ . Aus der Symmetrie von S lassen sich jedoch beide ineinander umrechnen:

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j \quad (\text{keine Summation}) \quad (67)$$

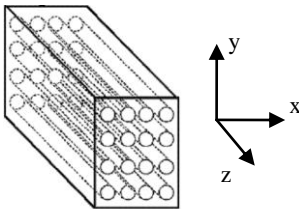
<sup>18</sup> In dem die Hauptrichtungen des Werkstoff mit den Koordinatenachsen zusammenfallen

Als Merkregel gilt:  $v_{ij}$  beschreibt die Querdehnung in j-Richtung bei einer Spannung in i-Richtung.

### 3.4.3 Transversal-Isotrope Körper

Orthotrope Materialien, bei denen zwei Hauptrichtungen eine Isotropieebene<sup>19</sup> bilden, werden transversal-isotrop genannt. Diese Werkstoffe haben nur eine ausgezeichnete Richtung. Diese steht senkrecht auf der Isotropieebene.

In der Faserspule eines FOG ist die Richtung, in der die Faser verläuft, gleichzeitig die Vorzugsrichtung. In der Ebene senkrecht dazu verhält sich die Spule in guter Näherung isotrop<sup>20</sup>. Faserspulen sind also transversal-isotrope Werkstoffverbunde. Wir definieren ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der z-Achse in Faserrichtung (s. Abbildung 39). In den Materialkoeffizienten werden die x- und die y-Achse mit dem Buchstaben "p" (perpendicular) indiziert.



**Abbildung 39 (links):** Definition des Material-Koordinatensystems in der Faserspule. Die z-Achse zeigt in Faserrichtung, die beiden anderen senkrecht dazu (perpendicular)

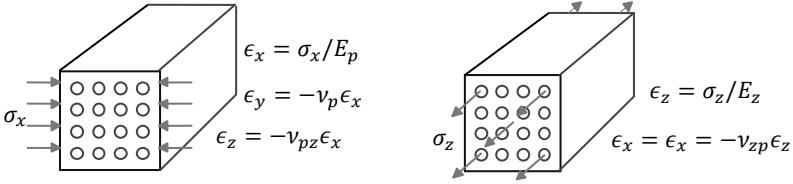
Die Materialgleichungen sind hier wie folgt [51]:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - \alpha_{11}\Delta T \\ \epsilon_{yy} - \alpha_{22}\Delta T \\ \epsilon_{zz} - \alpha_{33}\Delta T \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_p & -v_p/E_p & -v_{zp}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v_p/E_p & 1/E_p & -v_{zp}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -v_{pz}/E_p & -v_{pz}/E_p & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{zp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{zp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+v_p}{E_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \tag{68}$$

Die Bedeutung der Materialparameter  $E_p$ ,  $E_z$  etc. soll durch die folgenden Abbildungen veranschaulicht werden:

<sup>19</sup> Isotropieebenen sind so definiert, dass in ihnen keine Vorzugsrichtung existiert

<sup>20</sup> Dies gilt allerdings nur, wenn der Abstand zwischen zwei Windungen in radialer und vertikaler Richtung gleich ist. Diese sollte in der Praxis meist der Fall sein



**Abbildungen 40 a (links) und b (rechts), Veranschaulichung der Materialkennwerte  $E_p$ ,  $E_z$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{pz}$  und  $\nu_{zp}$**

In dem wichtigen Sonderfall einer torsionslosen Belastung eines rotations-symmetrischen Faserkreisels treten Scherungen nur in der zur Faser senkrechten x-y-Ebene auf;  $\epsilon_{yz}$  und  $\epsilon_{zx}$  verschwinden hier, so wie auch  $\sigma_{yz}$  und  $\sigma_{zx}$ , und es genügt eine zweidimensionale Simulation mit rotationssymmetrischer Symmetrie. (68)

kann dann erneut vereinfacht werden zu:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - \alpha_{11}\Delta T \\ \epsilon_{yy} - \alpha_{22}\Delta T \\ \epsilon_{zz} - \alpha_{33}\Delta T \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_p & -\nu_p/E_p & -\nu_{zp}/E_z & 0 \\ -\nu_p/E_p & 1/E_p & -\nu_{zp}/E_z & 0 \\ -\nu_{pz}/E_p & -\nu_{pz}/E_p & 1/E_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_p}{E_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (69)$$

Das elastische Verhalten der Faserspule wird somit – bei torsionsloser Belastung – von 5 Kennwerten bestimmt:  $E_p$ ,  $E_z$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{pz}$  und  $\nu_{zp}$ , von denen letzterer sich aus den vorangegangenen berechnen lässt.

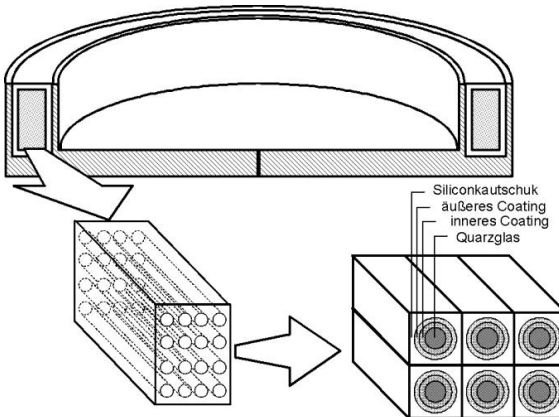
Ferner wird in der vorliegenden Arbeit davon ausgegangen, dass die Schubmodule  $G_{zp}$  und  $G_{pp} = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}$  näherungsweise gleich sind, d.h.

$$\mathbf{G}_{zp} \approx \mathbf{G}_{pp} = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)} \quad (70)$$

## 4 Modellierung thermischer und mechanischer Einflüsse auf FOGs

### 4.1 Einführung und Übersicht

Temperaturänderungen oder Beschleunigungen, etwa bei Vibration oder während des Start- und Landevorgangs eines Flugzeuges, bewirken über eine Deformation der Glasfaser Messabweichungen, also ein Drehratensignal selbst bei verschwindender Drehung des FOG. Dieses Drehratensignal (genauer: die Querempfindlichkeit des FOG auf Temperaturänderungen bzw. Beschleunigung) lässt sich berechnen, wenn die orts- und zeitabhängige Verformung der Faser bekannt ist. Dies wird in 4.2 erläutert.



**Abbildung 41:**  
Schnittbild des FOG mit detaillierter Auflösung der Faserspule. Die Faserspule wird in einem ersten Schritt als homogener, jedoch anisotroper Compound modelliert

Hierzu muss jedoch das Feld des Verzerrungstensors) im Faserkreiseln berechnet werden, z.B. mithilfe von Finite-Elemente-Simulationen. Möchte man jedoch jede Windung – in gängigen Faserkreiseln sind dies in der Größenordnung von 1000 – simulieren, wäre die Knotenzahl bei einem zweidimensionalen Modell zwar gerade noch durchführbar: man braucht mindestens 100 Elemente pro Windung, in Summe hätte man dann etwa  $10^5$  Elemente. Dreidimensionale Modelle wären damit jedoch zu umfangreich, um sie in vertretbarer Zeit zu berechnen. Daher ist es erforderlich, in einem ersten Schritt die Spule durch ein homogenes Ersatzmaterial zu beschreiben. Ist in diesem Ersatzmaterial das (als makroskopisch bezeichnete) Verzerrungsfeld bekannt, kann daraus die mikroskopische Verzerrung der Faser berechnet werden.

Die Berechnung der mechanischen Ersatzparameter dieses homogenen Ersatzmaterials wird Homogenisierung genannt, die der Faserverzerrung aus dem makroskopischen Verformungszustand Dehomogenisierung.

Der Homogenisierung und Dehomogenisierung wurde ein eigenes Kapitel (Kap. 5) gewidmet. Dies liegt zum einen an deren inhaltlichem Umfang. Zum anderen ist nach Meinung des Autors die makroskopische Betrachtung der Spule die didaktisch zugänglichere. Daher wird von den drei Rechenschritten

- 1) Homogenisierung der Faserspule (analytisch oder mit FE-Simulationen)
- 2) Bestimmung des makroskopischen Verformungszustandes durch eine FE-Simulation
- 3) Dehomogenisierung

zuerst in Kap. 4.4 Schritt 2) beschrieben.

## **4.2 Datenflussdiagramm des gesamten Berechnungsvorgangs**

Insgesamt müssen natürlich die Geometrie des FOG und die Materialparameter aller Konstituenten bekannt sein. Sogar der Aufbau der Faser inkl. seiner Coatingschichten spielt eine große Rolle. Im Einzelnen sind dies:

- Geometrie der Spule, der Vergusschichten und des Gehäuses
- E-Modul, Querkontraktionszahl, spezifisches Gewicht und thermischer Ausdehnungskoeffizient des Gehäusematerials, der Vergussmasse außerhalb der Spule und des innerhalb der Spule verwendeten Klebstoffes
- Abmessungen und Materialdaten der Faser (praktisch immer Quarzglas) und dessen Coatings
- Art und Quantifizierung der Anregung. Bei thermischer Belastung die Temperaturerhöhung pro Zeiteinheit, wobei in dieser Arbeit eine homogene Temperaturerhöhung angenommen wird, bei vibratorischer Belastung z.B. die Beschleunigungsamplitude

Aus diesen Daten wird in mehreren Schritten die DRA berechnet. Hier ein Datenflussdiagramm der drei Rechenschritte (Abbildung 42):

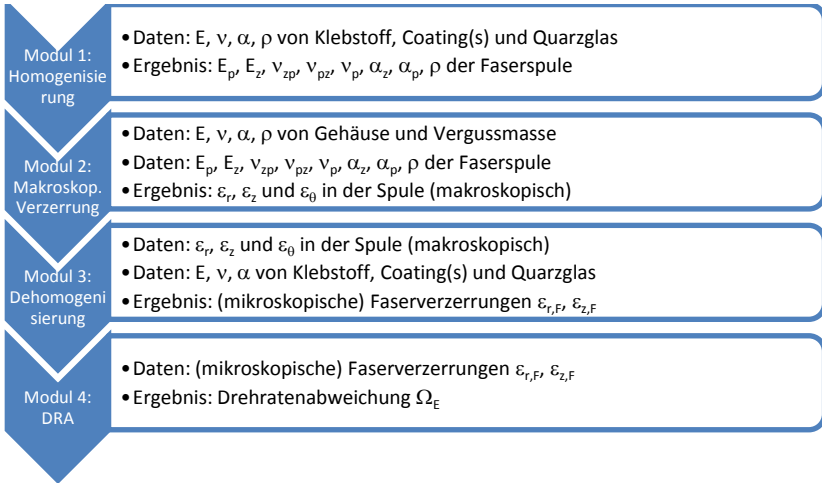


Abbildung 42: Rechenschritte und Datenfluss zur Berechnung der Drehratenabweichung

### 4.3 Nichtreziproke Phasenverschiebung durch Brechzahlmodulation

#### 4.3.1 Berechnung der nichtreziproken Phasenverschiebung

Die optische Weglänge der gesamten Faserschleife hängt von dem im Allgemeinen ortsabhängigen Brechungsindex der Faser ab. Seine Definition ist wie folgt:

$$L_{opt} = \int_0^L n(z) dz \tag{71}$$

Abbildung 43: Faserstück der Länge L. Seine optische Weglänge durch Integration des Brechungsindex über dem geometrischen Weg bestimmt

Damit trägt man der Tatsache Rechnung, dass Licht in einem Medium mit einer Brechzahl  $n > 1.0$  länger „verweilt“ – um den Faktor  $n$  länger – als im Vakuum.

Die Phasenverzögerung beim Lichtdurchgang durch die Faser ist proportional zum optischen Weg:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{opt} = \beta_0 L_{opt} \tag{72}$$

$\lambda_0$  ist hier die Wellenlänge der sich in der Faser ausbreitenden Lichtwelle im Vakuum,  $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  die Phasenkonstante im Vakuum. Hängt der Brechungsindex wie in den hier angestellten Untersuchungen von der Zeit ab, ist zu berücksichtigen, dass sich die Wellenfront mit endlicher Geschwindigkeit in der Faser ausbreitet und daher der Brechungsindex eines Faserstücks zu verschiedenen Zeiten auf die Phasenverzögerung am Ende der Faser wirkt:

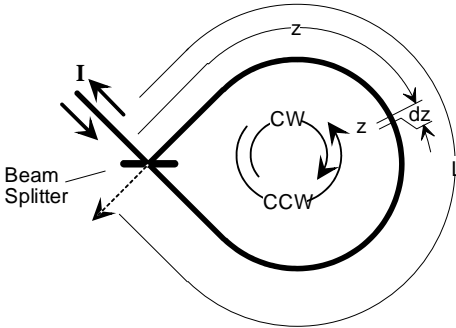
$$\Phi(t) = \beta_0 \int_0^L n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) dz \quad (73)$$

Hier ist  $c = c_0/n \approx c_0/n_0$  die Lichtgeschwindigkeit in der Glasfaser mit dem mittleren Brechungsindex  $n_0$ . Die Zeit- und Ortsabhängigkeit von  $c$  kann im Nenner des Bruches  $\frac{L-z}{c}$  in sehr guter Näherung vernachlässigt werden.

Legt man ein Koordinatensystem so fest, dass die  $z$ -Koordinate entlang der Faser zunimmt (im Folgenden als „Faserkoordinaten“ bezeichnet, s. Abbildung 44) lässt sich die Phasenverzögerung zwischen Ein- und Auskoppelende der beiden Lichtwellenfolgendermaßen berechnen:

$$\Phi_{\text{CW}}(t) = \beta_0 \int_0^L n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) dz \quad (74)$$

$$\Phi_{\text{CCW}}(t) = \beta_0 \int_0^L n\left(z, t - \frac{z}{c}\right) dz \quad (75)$$



**Abbildung 44:**  
**Faserkoordinatensystem im FOG**

Die Phasendifferenz („Fehlerphase“) zwischen ccw- und cw-Welle beträgt dann mit der Definition  $n(z, t) =: n_0 + \Delta n(z, t)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_E(t) &= \Phi_{\text{CCW}}(t) - \Phi_{\text{CW}}(t) = \beta_0 \int_0^L \left( n\left(z, t - \frac{z}{c}\right) - n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) \right) dz \\ &= \beta_0 \int_0^L \left( \Delta n\left(z, t - \frac{z}{c}\right) - \Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) \right) dz \end{aligned} \quad (76)$$

In erster Näherung lässt sich die Differenz der zu unterschiedlichen Zeiten ausgewerteten Brechzahländerungen  $\Delta n\left(z, t - \frac{z}{c}\right)$  und  $\Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)$  mithilfe der zeitlichen Ableitung der Brechzahl darstellen:

$$\begin{aligned} \Delta n\left(z, t - \frac{z}{c}\right) - \Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) &\approx \dot{n}(z, t)\Delta t = \dot{n}(z, t)\left(t - \frac{z}{c} - t + \frac{L-z}{c}\right) = \\ &= \dot{n}(z, t)\frac{L-2z}{c} \end{aligned} \quad (77)$$

Damit folgt für die Phasendifferenz:

$$\Phi_E(t) = \beta_0 \int_0^L \dot{n}(z, t) \frac{L-2z}{c} dz = \frac{\beta_0 n_0 L}{c_0} \int_0^L \dot{n}(z, t) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \quad (78)$$

Es ist zu erkennen, dass nur zeitliche Änderungen des Brechungsindex eine nichtreziproke Phasenverschiebung bewirken. Ferner verschwindet  $\Delta\Phi$  wegen  $\int_0^L \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz = 0$  auch bei ortskonstantem  $\dot{n}(z, t)$ . Sogar eine zum Fasermittelpunkt symmetrische Brechzahländerung belässt  $\Phi_E = 0$  (siehe Abschnitt 2.5.1).

Zusammenfassend seien hier Kriterien genannt, wie die reziproke Phasenverschiebung trotz Brechzahlmodulation in der Faser verschwindet:

- Die Brechzahländerung  $\Delta n(z, t)$  ist zeitlich konstant, d.h.  $\dot{n}(z, t) = 0$
- Die Änderungsrate  $\dot{n}(z, t)$  ist homogen
- $\dot{n}(z, t)$  ist symmetrisch zum Fasermittelpunkt, d.h.  $\dot{n}(z, t) = \dot{n}(L - z, t)$

Der letzte Punkt spielt bei der Minimierung der Querempfindlichkeit von FOGs eine zentrale Rolle. Sie wird zum einen durch ein geeignetes Wickelschema erreicht, bei dem die Faserenden nicht wie bei der simplen Zylinderspule an gegenüberliegenden Eckpunkten der Spule liegen, sondern möglichst nahe beieinander (s. Abschnitt 2.5.2). Weiterhin lässt sich diese Situation durch geeignete Einbettung erreichen: nicht der Betrag der Temperatur bzw. der Spannungskomponenten am Spulenrand ist ausschlaggebend, sondern deren Unterschied zwischen Innen- und Außenrand bzw. oberem und unterem Rand.

### 4.3.2 Drehratenabweichungen aufgrund laufender thermischer Wellen („Shupe-Effekt“)

Ein seit langem bekannter Effekt (nach dem Erstveröffentlicher des Effekts D. M. Shupe „Shupe-Effekt“ genannt [25]) ist die Auswirkung von zeitlich veränderlichen und örtlich inhomogenen Temperaturfeldern auf das Sensorsignal des FOG. Shupe erläuterte einen Mechanismus, wie Temperaturgradienten und –transienten eine nichtreziproke Phasenverschiebung in der Faserspule verursachen. Er berück-



sichtigte jedoch nur die direkte Wirkung der Temperatur auf den Brechungsindex und nahm eine ungehinderte Wärmeausdehnung der Faser an. Homogene Temperaturfelder sollten nach seiner Theorie den Sensorausgang nicht beeinflussen.

Durch Berücksichtigung elastischer Deformationen der Faser lässt sich zeigen, dass auch homogene Temperaturfelder, sofern sie zeitlich veränderlich sind, Sensorsignale hervorrufen, die in derselben Größenordnung liegen wie der reine Shupe-Effekt (als Shupe-Effekt wird üblicherweise und im Folgenden die rein thermische, nicht thermoelastische Wirkung von Temperaturänderungen bezeichnet).

Der zugrundeliegende physikalische Mechanismus des Shupe-Effekts ist die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindexes:

$$n(z, t) = n_0 + \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T(z, t) \quad (79)$$

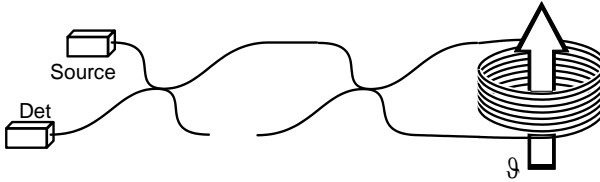
$\Delta T$  ist hier die Temperaturdifferenz zu der Temperatur, auf die sich die Angabe von  $n_0$  bezieht. Die Temperaturempfindlichkeit des Brechungsindexes von Quarzglas beträgt  $\frac{\partial n}{\partial T} \approx 10^{-5}$ .

Hinzu kommt noch die Auswirkung thermischer Dehnung (mit  $\alpha = 5 \cdot 10^{-7} K^{-1}$ ), die von Shupe ebenfalls berücksichtigt wurde. In jedem infinitesimalen Faserstück wird dann eine zusätzliche Phasenverschiebung von  $d\Phi(z, t) = \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} + \beta_0 \alpha\right) \Delta T(z, t) dz$  verursacht. Über die gesamte Länge der Faser stellt sich eine DRA ein von:

$$\Phi_{E,S}(t) = \beta_0 \int_0^L \left(\frac{\partial n}{\partial T} + \alpha\right) \dot{T}(z, t) \frac{L-2z}{c} dz \quad (80)$$

Der Index S steht hier für „Shupe“. Das Integral in (80) verschwindet, falls die Temperaturänderung homogen erfolgt.

Ursache für eine inhomogene Erwärmung könnte z.B. sein, dass sich wie in Abbildung 45 unter der Spule eine Wärmequelle befindet, die zu einer vertikal laufenden Wärmewelle führt. Ein Sensorsignal wird sich wegen der zeitlichen Ableitung in (80) so lange einstellen, bis einige Zeit nach Einschalten der Wärmequelle die thermische Situation ihren Gleichgewichtszustand erreicht hat und Transienten abgeklungen sind. Temperaturänderungen stellen sich u.a. nach dem Einschalten des FOG ein, da z.B. die Lichtquelle, die oft im Zentrum der Spule liegt, als Wärmequelle wirkt.



**Abbildung 45: Zur Entstehung einer Fehlerphase durch eine die Sensorspule durchlaufende Wärmewelle**

### 4.3.3 Drehratenabweichungen aufgrund thermoelastischer Verformungen

Im reinen Shupe-Effekt wird nur die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex und die freie thermische Ausdehnung der Faser berücksichtigt. Damit werden jedoch wesentliche Effekte vernachlässigt, die sich bei einer Temperaturänderung einstellen: thermische Spannungen infolge thermoelastischer Wechselwirkungen.

Bei homogenen Temperaturfeldern verschwindet das Integral in (80). Thermische Spannungen sind jedoch auch bei homogenen Temperaturfeldern inhomogen und verursachen damit eine nichtreziproke Phasenverschiebung.

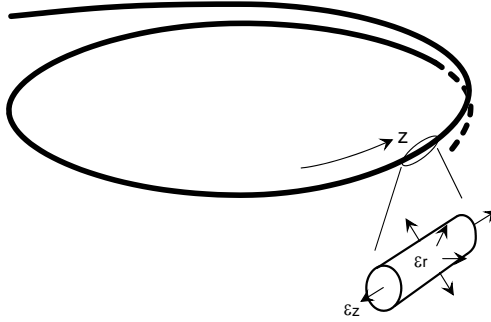
Die (thermo-)elastische Verformung ändert nun auf zweierlei Weise die optische Weglänge: 1.) durch die rein geometrische Längenänderung und 2.) durch eine elastooptische Änderung des Brechungsindex. Diese beiden Aspekte werden nun in den nächsten beiden Abschnitten untersucht.

### 4.3.4 Auswirkung der Längsdehnung

Die Längenänderung eines infinitesimalen Faserstückes wird im Allgemeinen nicht durch die bei freier thermischer Expansion gültige Formel  $dl' = dl(1 + \alpha\Delta T)$  beschrieben, sondern anhand der Verzerrung  $\epsilon_z$  in Faserrichtung mit  $dl' = dl(1 + \epsilon_z)$ .

Die optische Länge infinitesimal kleiner Faserstücke  $dL_{opt} = n_0 dz$  wird natürlich nicht nur durch den Brechungsindex, sondern auch durch die Länge  $dz' = (1 + \epsilon_z) dz$  bestimmt. Bei einer Änderung beider Größen wird sie zu

$$dL_{opt} = (n_0 + \Delta n) dz' = (n_0 + \Delta n)(1 + \epsilon_z) dz \quad (81)$$



**Abbildung 46: Lokale Verzerrungen in der Faserspule**

Die optische Länge der gesamten Faser beträgt somit bezogen auf die undeformierte Länge  $L$ :

$$L_{opt} = \int_0^L n(z)(1 + \epsilon_z) dz \quad (82)$$

Nun hängt im Allgemeinen nicht nur der Brechungsindex von der Zeit ab, sondern auch die Längsdehnung  $\epsilon_z$ :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t) &= \beta_0 \int_0^L n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) \left(1 + \epsilon_z\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)\right) dz \\ &= \beta_0 \int_0^L \left(n_0 + \Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)\right) \left(1 + \epsilon_z\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)\right) dz \\ &\approx \beta_0 \int_0^L \left[n_0 + \Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) + n_0 \epsilon_z\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)\right] dz \end{aligned} \quad (83)$$

Die Phasendifferenz zwischen cw- und ccw-Welle beträgt nun

$$\begin{aligned} \Phi_E(t) &= \beta_0 \int_0^L \left(\Delta n\left(z, t - \frac{z}{c}\right) - \Delta n\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right) + n_0 \epsilon_z\left(z, t - \frac{z}{c}\right) - \right. \\ &\quad \left. n_0 \epsilon_z\left(z, t - \frac{L-z}{c}\right)\right) dz \end{aligned} \quad (84)$$

Mit einer linearen Näherung von  $\Delta n$  und  $\epsilon_z$  ergibt sich die Phasendifferenz

$$\begin{aligned} \Phi_E(t) &\approx \beta_0 \int_0^L \left(\dot{n}(z, t) + n_0 \dot{\epsilon}_z(z, t)\right) \frac{L-2z}{c} dz \\ &= \frac{\beta_0 n_0 L}{c_0} \int_0^L \left(\dot{n}(z, t) + n_0 \dot{\epsilon}_z(z, t)\right) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \end{aligned} \quad (85)$$

#### 4.3.5 Drehratenabweichung bei zeitlich transients elastischer Verformung der Faserspule

Aufgrund des elastooptischen Effekts ändert sich die Brechzahl der Faser auch bei einer mechanischen Verspannung:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial n}{\partial \epsilon_r} \Delta \epsilon_r + \frac{\partial n}{\partial \epsilon_z} \Delta \epsilon_z \quad (86)$$

Bei einer Temperaturänderung wirken somit folgende Effekte auf die Faser:

- Abhängigkeit der Brechzahl von der Temperatur:  $\frac{\partial n}{\partial T} \approx 10^{-5}$  (Shupe-Effekt)
- Die geometrische Länge der Faser wird durch thermische Ausdehnung und elastische Verformung verändert
- Der Brechungsindex des Faserkerns ist deformationsabhängig

Bei Vibration wirken nur die beiden letzten Punkte.

In 2.2.3 wird gezeigt, dass sich  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_r}$  und  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_z}$  aus den materialabhängigen Pockelskoeffizienten berechnen lassen  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_r} = -\frac{1}{2} n_0^3 (p_{11} + p_{12})$  und  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_z} = -\frac{1}{2} n_0^3 p_{12}$ . Für Quarzglas ist  $p_{11} = 0.126$ ,  $p_{12} = 0.27$  und  $n_0 = 1.46$ . Damit sind  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_r} = -0.616$  und  $\frac{\partial n}{\partial \epsilon_z} = -0.420$ .

Der effektive Brechungsindex einer Glasfaser stimmt nicht exakt mit dem des Faserkerns überein, sondern wird durch die Indizes des Kerns und des Mantels, sowie durch den Kerndurchmesser bestimmt. Bei einer Radialdehnung wird der Kerndurchmesser verändert und somit auch das Verhältnis von effektivem Brechungsindex zu dem des Faserkerns. In Anhang A.2 wird jedoch gezeigt, dass dies hier vernachlässigbar ist. Auch die genaue Kenntnis von  $n_0$  ist nicht erforderlich.

Nimmt man noch die Längsdehnung der Faser in Rechnung, lässt sich die nichtreziproke Phasenverschiebung wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \Phi_E(t) &= \frac{\beta_0 n_0 L}{c_0} \int_0^L (\dot{n}(z, t) + n_0 \dot{\epsilon}_z(z, t)) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \\ &= \frac{\beta_0 n_0 L}{c_0} \int_0^L \left( \frac{\partial n}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial n}{\partial \epsilon_r} \dot{\epsilon}_r + \left( \frac{\partial n}{\partial \epsilon_z} \dot{\epsilon}_z + n_0 \right) \dot{\epsilon}_z(z, t) \right) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \\ &= \frac{\beta_0 n_0 L}{c_0} \int_0^L \left( \frac{\partial n}{\partial T} \dot{T} + A \dot{\epsilon}_z(z, t) - B \dot{\epsilon}_r \right) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \end{aligned} \quad (87)$$

Die Konstanten A und B sind Abkürzungen für

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}_0 \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{n}_0^2 \mathbf{p}_{12}\right) \text{ und } \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{n}_0^3 (\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12}) \quad (88)$$

Dieser Phasendifferenz entspricht mit  $\Delta \Phi = \frac{4\pi R L}{\lambda_0 c_0} \Omega$  eine Drehratenabweichung von

$$\Omega_E = \frac{n_0}{2R} \int_0^L \left( \frac{\partial n}{\partial T} \dot{T} + A \dot{\epsilon}_z - B \dot{\epsilon}_r \right) \left(1 - \frac{2z}{L}\right) dz \quad (89)$$

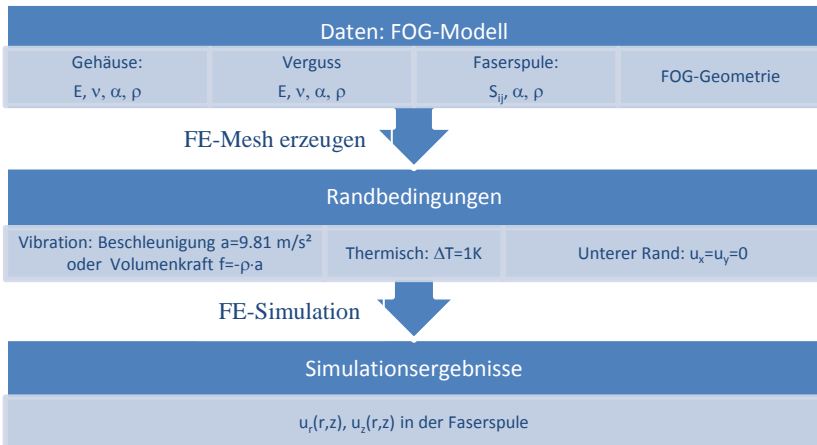
## 4.4 Makroskopisches Verzerrungsfeld

### 4.4.1 Modulbeschreibung

Nach der Homogenisierung der Faserspule (s. Kap. 5) kann das makroskopische Verzerrungsfeld (oder äquivalent dazu Verschiebungsfeld, Spannungsfeld) in der Faserspule bestimmt werden. Die Ergebnisse sind noch gemittelte Verzerrungen, die im dritten Schritt, der Dehomogenisierung, auf die Verzerrungen der Faser umgerechnet werden müssen.

Durch den mehrschichtigen Aufbau des FOG (Faserspule, Verguss, Gehäuse) ist eine analytische Berechnung des Verzerrungsfeldes nicht praktikabel. Dem Autor sind keine analytischen Lösungen einer äquivalenten Problemstellung bekannt und eigene Bemühungen fruchteten selbst bei einfacheren Geometrien nur in unhandlich umfangreichen Näherungslösungen, die weder genauer sind als etwa Finite-Elemente-Simulationen, noch einen Erkenntnisgewinn bringen. Daher wurde das makroskopische Deformationsfeld mit FE-Simulationen berechnet.

Das Datenflussdiagramm in Abbildung 47 zeigt, welche Daten des FOG für diesen Rechenschritt nötig sind, welche Randbedingungen eingepreßt werden und welche Ergebnisse das Modul liefert.



**Abbildung 47: Datenflussdiagramm zu Modul 2: Berechnung des makroskopischen Verzerrungsfeldes**

Aus den Feldern  $u_r(r,z)$ ,  $u_z(r,z)$  können natürlich das Verzerrungs- und Spannungsfeld berechnet werden.

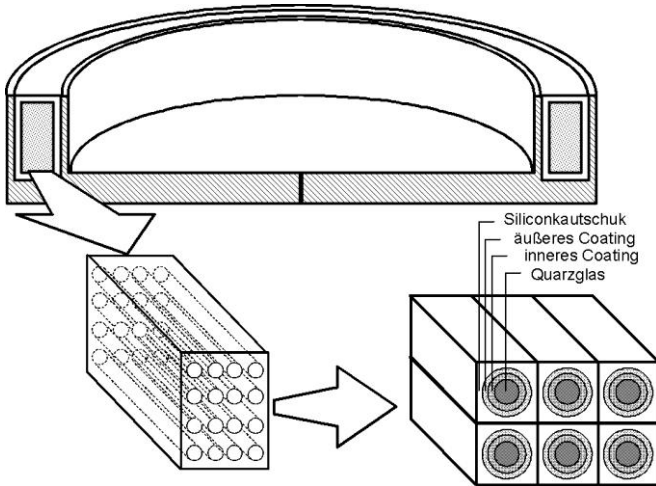
Die Beschleunigung in Form einer Volumenkraft anzugeben erleichtert bei manchen FE-Simulationsumgebungen die Datenanalyse oder verkürzt die Rechenzeit, da keine transiente Simulation nötig ist (s. Abschnitt 3.2.4).

#### 4.4.2 Annahmen und Näherungen

Reale FOGs existieren in einer Vielzahl verschiedener Ausführungsformen, die sich in ihren Abmessungen, Spulenformen, in der Art der Verklebung der Spule etc. unterscheiden. FOGs können sich u.a. in folgenden Punkten unterscheiden:

- Das Gehäuse und die Spule kann kreisförmig, elliptisch, rechteckig mit abgerundeten Ecken uvm. sein. Obwohl kreisförmige Spulen eine bessere Skalenfaktorkonstanz aufweisen, sind aus Platzgründen oft nichtkreisförmige Spulengeometrien anzutreffen
- Es existieren verschiedene Wicklungsschemata (s. Kap. 2.6), v.a. Zylinder- und Quadrupolwicklungen
- Die Windungen der Spule können punktuell oder vollvolumig verklebt werden. Vollvolumig bedeutet, dass im Inneren der Spule keine (gewollten) Lufteinschlüsse existieren. Bei punktueller Verklebung wird die Spule nur minimal stabilisiert; dafür wird aber die Faser vom Klebstoff kaum mechanisch belastet. Im zweiten Fall ist die Stabilisierung sehr gut, doch wirken größere mechanische Spannungen auf die Faser ein
- Dasselbe gilt für die Befestigung der Faserspule mit dem Gehäuse: sie kann punktuell erfolgen, etwa am Boden, vollvolumig oder in beliebigen Variationen zwischen diesen beiden Extremen

Die Gehäusegeometrie spielt keine Rolle. Es wurde sowohl ein FOG mit kreissymmetrischem Horizontalschnitt untersucht, als auch einer mit elliptischem (siehe Kap. 6). Abbildung 48 zeigt den Aufbau des kreissymmetrischen FOG FK-Mil.



**Abbildung 48: Schnittbild eines FOG mit Vergrößerung der Faserspule. Reale Spulen haben allerdings mehr Windungen als hier gezeigt: mehrere hundert oder gar mehrere tausend**

Beide in der Praxis bedeutenden Windungsschemata – Zylinder- und Quadrupolwicklung – wurden untersucht und in Abschnitt 4.5.4 beschrieben.

Punktuell verklebte Faserspulen lassen sich nach Meinung des Autors kaum verlässlich simulieren. Zu groß ist die Unsicherheit des Verfließens des Klebstoffes. Auch das Verhalten der nicht aneinander haftenden Faserstücke bei Vibration ist hochgradig komplex. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf vollvolumig verklebte Faserspulen.

Die Faserspule selbst wird durch ein Elastomer mit dem Gehäuse befestigt. Hier sind Änderungen leicht zu implementieren und wirken sich wohl kaum auf die Verlässlichkeit des Simulationsmodells aus. Eine Ausnahme sind wieder punktuelle Verklebungen, aus denselben Gründen wie oben angegeben.

Das FOG-Modell nach Abbildung 48 lässt sich in drei Schichten unterteilen: in Gehäuse, Vergusschicht und Faserspule. Gehäuse und Vergusschicht bestehen aus isotropen Materialien (im speziellen Fall Aluminium und Silikonkautschuk), die Spule wird als unidirektionaler Verbundwerkstoff beschrieben.

#### 4.4.3 Differentialgleichungssystem und Randbedingungen

Im allgemeinen Fall eines nicht-rotationssymmetrischen FOGs müssen die Bewegungsgleichungen (25) eingehalten werden, also  $\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}}$ . Weitere

Bedingungen gelten für die Ränder und Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Schichten:

- Sämtliche Verschiebungskomponenten sind stetig
- Die Normalspannung (bei einem zylindrischen FOG in zylindrischen Koordinaten wäre das z.B. meist  $\sigma_r$ ) ist stetig. Normalspannungskomponenten tangential zum Rand (im obigen Fall  $\sigma_\theta$  und  $\sigma_z$ ) sind im Allgemeinen unstetig
- Sämtliche Schubspannungen ( $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\theta z}$ ) sind stetig

Wird das makroskopische Verzerrungsfeld mit einer FE-Simulation berechnet, werden die Verschiebungsrandbedingungen bei korrekter Eingabe der Geometrie automatisch eingehalten, die Spannungsrandbedingungen nur näherungsweise.

In vielen Fällen genügt ein zweidimensionales Modell des FOG, und zwar dann, wenn sowohl der FOG, als auch die Belastung rotationssymmetrisch sind und die Belastung zusätzlich keine azimutalen Scherungen enthält. Die azimutale Verschiebungskomponente – hier mit  $v$  bezeichnet – verschwindet dann und die Gleichgewichtsbedingungen lauten (55):

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} + f_r r = 0 \quad (90)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + f_z r = 0 \quad (91)$$

mit  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  und  $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Da die analytische Lösung dieses Gleichungssystems für die vorliegende Geometrie extrem schwierig ist, wurde das makroskopische Verzerrungsfeld mit einer FE-Simulation berechnet. Einzelheiten hierzu sind in den nächsten Abschnitten aufgeführt.

#### 4.4.4 Lasten und Randbedingungen

Bei der thermischen Ausdehnung besteht die „Last“ aus einer Temperaturerhöhung um 1K. Das sich hierbei einstellende Verzerrungsfeld ist zugleich die Verzerrungserhöhung pro K.

Eine Beschleunigung kann bei einer transienten Simulation durch eine entsprechende Bewegung des Bodens eingeprägt werden. Einige FE-Simulationsprogramme (z.B. Ansys) berechnen den Steady-State bei Angabe einer konstanten Beschleunigung. Im Ergebnis entspricht dies sicherlich der hier verwendeten



Näherung, dass die Beschleunigung als örtlich konstant angenommen wird und durch eine Volumenkraft ersetzt wird (s. Abschnitt 3.2.4). Hier wird eine konstante Beschleunigung von  $\ddot{u}_z(\vec{x}) = g = 9.81 \text{ m/s}^2$  eingepreßt. Dies wird mit der (nun von Schicht zu Schicht unterschiedlichen) Volumenkraft  $\vec{f} = -\rho\vec{a}$  simuliert.

Bei einem sinusförmigen Beschleunigungsverlauf  $\vec{a}(t) = \hat{a} \cdot \sin(\omega t)$  führt man die Simulation mit  $\vec{f} = -\rho\hat{a}$  aus. Die Ergebnisse sind dann die Amplituden der Felder  $u_k(\vec{x}, t) = \hat{u}_k(\vec{x}) \cdot \sin(\omega t)$ ,  $\sigma_{ik}(\vec{x}, t) = \hat{\sigma}_{ik}(\vec{x}) \cdot \sin(\omega t)$  etc. Auch dies ist jedoch nur für Schwingungsfrequenzen unterhalb der ersten Resonanzfrequenz gültig. In der Nähe oder oberhalb derselben muss eine ortsabhängige Phasenverschiebung zur Anregung berücksichtigt werden. Da die für FOGs interessanten Frequenzen jedoch unterhalb der ersten Resonanz liegen (1.2 kHz im Vergleich zu 5 kHz beim FK-Mil), wurden in dieser Arbeit durchgehend „Niederfrequenznäherungen“ angewandt, also u.a. Phasenverschiebungen als verschwindend angenommen.

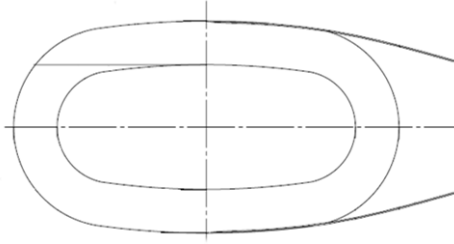
#### 4.4.5 Behandlung des Gehäuses

Faserspulen sind meist in ein Metallgehäuse eingegossen. Dieses ist wesentlich starrer als die weiche Spule oder das noch weichere Vergussmaterial. Zudem hat das Gehäuse oft eine komplexe Geometrie. Daher ist es oft angebracht, das Gehäuse als perfekt starr anzunehmen. Man braucht dann nicht die Geometrie des Gehäuses spezifizieren, sondern nur die Grenzfläche zwischen Verguss und Gehäuse als „starr“ definieren. Physikalisch bedeutet dies, dass dort sämtliche Verschiebungskomponenten verschwinden. Wird eine transiente Simulation mit bewegtem Boden gemacht, so müssen die Seitenränder relativ zum Boden starr sein.

#### 4.4.6 Symmetrien des FOG

Während die FE-Simulation eines fein vernetzten zweidimensionalen Modells nur Sekunden oder wenige Minuten in Anspruch nimmt, steigt die Rechenzeit bei dreidimensionalen Modellen stark an. Dies liegt an der viel höheren Knotenzahl bei gleicher Elementgröße: Faktoren von hundert oder tausend treten hier häufig auf. Daher sollte man bei der Modellierung vorhandene Symmetrien ausnutzen.

Dies sei anhand eines Beispiels erläutert: es soll eine nicht-rotationssymmetrische Spule mit folgendem horizontalem Querschnitt modelliert werden:



**Abbildung 49: horizontaler Querschnitt einer Faserspule**

Da die Spule nicht rotationssymmetrisch ist, kann man sie mit einem zweidimensionalen Modell nicht nachbilden. Ein dreidimensionales Modell eines Viertels der Spule enthält jedoch alle Informationen über sie. Die fehlenden drei Viertel müssen nun noch durch geeignete Randbedingungen definiert werden: Bei Vibration senkrecht zur Schnittebene und bei homogener Erwärmung dehnt sich die Spule nicht in Richtung der Schnittebenen aus, d.h. die azimutale Verschiebungskomponente  $u_\theta=0$ . Diese Randbedingung genügt schon für eine korrekte Simulation der gesamten Spule.

## 4.5 Numerische Berechnung der Drehratenabweichung

### 4.5.1 Numerische Integration der Faserverzerrungen

Die numerische Berechnung der DRA  $\Omega_E = \frac{n_0}{2R} \int_0^L \left( \frac{\partial n}{\partial T} \dot{T} + A \dot{\epsilon}_z(z, t) - B \dot{\epsilon}_r \right) \left( 1 - \frac{2z}{L} \right) dz$  nach der Dehomogenisierung geschieht durch Summation der Beiträge genügend kleiner Faserstücke zur DRA:

$$\Omega_E = \frac{n_0}{2R} \sum_k \left( \frac{\partial n}{\partial T} \dot{T}_k + A \dot{\epsilon}_{zk} - B \dot{\epsilon}_{rk} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2z_k}{L} \right) \Delta z_k \quad (92)$$

Die Felder  $\dot{T}_k$ ,  $\dot{\epsilon}_{zk}$  und  $\dot{\epsilon}_{rk}$  sind dabei Temperatur bzw. mikroskopische Faserdeformationen in der Mitte des jeweiligen Faserstücks,  $z_k$  die Faserkoordinate.

Liegen Ergebnisse einer zweidimensionalen Simulation vor, bestehen diese Faserstücke aus jeweils einer ganzen Windung. Man geht dann davon aus, dass die Faserverzerrung entlang einer Windung konstant ist. Es wird dann nur noch über Punkte summiert, die in einer Schnittebene liegen.  $\Delta z_k$  kann dann mit dem Umfang der  $k$ -ten Windung gleichgesetzt werden, bzw. zur weiteren Vereinfachung als konstant angenommen werden.

In drei Dimensionen teilt man die Faserspule sinnvollerweise in Sektoren (gleicher Breite) auf.

### 4.5.2 Geometrische Gesichtspunkte

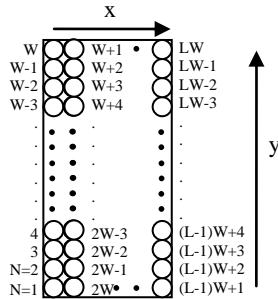
Die Feldvariablen  $\dot{\epsilon}_{zk}$  und  $\dot{\epsilon}_{rk}$  werden durch Dehomogenisierung makroskopischer Verzerrungen gewonnen, die im makroskopischen Modell jeweils genau in der Mitte der Faser liegen. Liegen die Knoten des FE-Modells nicht genau in diesen Mittelpunkten, müssen Interpolations- oder Regressionsverfahren angewandt werden, die die Feldvariablen an den Fasermitten berechnen.

Die Indizierung ist zunächst noch nicht definiert. Zwei sinnvolle Möglichkeiten sind folgende:

- Man indiziert gemäß dem geometrischen Ort. Z.B. von unten nach oben und von innen nach außen. In dreidimensionalen Modellen kommt noch die Sektornummer mit hinzu. Bei zylindrisch gewickelten Spulen steigt dann auch  $z_k$  monoton mit dem Index. In 2D-Modellen unter Annahme konstanten Umfangs ist  $z(k) = (k - 1/2)U = (2k - 1)\pi R$
- Die Indizierung orientiert sich an der Faser, d.h. das erste Teilstück bekommt den Index 1, das letzte den Index N. In der vorliegenden Arbeit wurde diese Variante gewählt

Für Zylinderspulen sind beide äquivalent, in Quadrupolspulen ist jedoch die Berechnung der Ortskoordinaten  $(x_k, y_k, z_k)$  im makroskopischen Faserspulenmodell nicht trivial. Dies wird in Abschnitt 4.5.4 beschrieben.

Bei Zylinderspulen lassen sich die Fasermittelpunkte leicht bestimmen. In Abbildung 50 ist das Wicklungsschema einer Zylinderspule mit  $N=L \cdot W$  Windungen gezeigt, deren erste Windung am unteren inneren Ende liegt und folglich den Index 1 bekommt.



**Abbildung 50: Wicklungsschema unseres Referenz-FOGs. L sei hier die Lagenzahl der Spule, W die Anzahl der Windungen pro Lage**

Zuerst seien hier zwei Funktionen eingeführt um nachfolgende Rechnungen zu vereinfachen. Die erste bezeichne die Windung innerhalb einer Lage:

$$w(k) := 1 + (k - 1) \bmod W \tag{93}$$

die zweite die Nummer der Lage:

$$l(k) := 1 + \text{floor}((k - 1)/W) \tag{94}$$

$\text{floor}(x)$  sei hier der „Vorkommawert“ einer reellen Zahl  $x$ ,  $a \bmod b$  der Rest der Division der ganzen Zahl  $a$  durch  $b$ .

Die Faserpositionen sind dann wie folgt ( $\Delta x$  sei hier der horizontale,  $\Delta y$  der vertikale Abstand zwischen zwei Windungen):

$$x_k = (l(k) - 0.5)\Delta x \quad (95)$$

$$y_k = \begin{cases} (w(k) - 0.5)\Delta y, & \text{falls } l(k) \text{ ungerade} \\ (W + 0.5 - w(k))\Delta y & \text{falls } l(k) \text{ gerade} \end{cases} \quad (96)$$

Die Berechnung der Faserkoordinaten von Quadrupolspulen wird in Abschnitt 4.5.4 hergeleitet.

Da durch eine FE-Simulation berechneten Feldwerte (Spannungen, Verzerrungen etc.) im Allgemeinen nicht genau an den Fasermittelpunkten vorliegen, müssen diese durch Interpolation oder Regression berechnet werden. In dieser Arbeit wurde zur Interpolation zweidimensionaler Verzerrungsfelder ein biharmonischer Splineinterpolationsalgorithmus eingesetzt, zur Interpolation dreidimensionaler Verzerrungsfelder ein linearer Interpolationsalgorithmus angewandt.

### 4.5.3 Besonderheiten dreidimensionaler Verzerrungsfelder

Auch dreidimensionale Verzerrungsfelder müssen zuerst interpoliert werden, um die makroskopischen Verzerrungen jeder Windung zu erhalten. Dabei sind die Stützpunkte wieder an den Mittelpunkten jeder Faser zu wählen. Zudem muss die Faserspule entlang ihres Azimuths unterteilt werden. Typischerweise werden die Stützpunkte in verschiedene Schnittebenen des FOG mit konstantem Azimuth gelegt. Ausgehend von (92) kann dann die DRA berechnet werden. Es bietet sich dabei an, die azimuthale Unterteilung der Faserspule so zu wählen, dass  $\Delta z_F(k)$  entlang einer Windung näherungsweise konstant ist. Das wäre bei zylindrischen FOGs dann der Fall, wenn ein konstanter Azimutwinkel  $\Delta\theta$  zwischen den Schnittebenen liegt. Bei  $N_\theta$  Sektoren ist dann  $\Delta z_F \approx \frac{U}{N_\theta}$ .

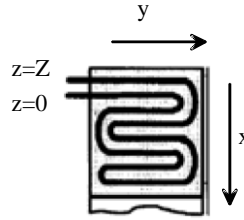
### 4.5.4 Faserkoordinaten von Quadrupolspulen

Von der Homogenisierung über die Berechnung des globalen Verzerrungsfeldes bis hin zur Dehomogenisierung gibt es zwischen Quadrupol- und Zylinderspulen keinen wesentlichen Unterschied<sup>21</sup>. Erst die DRA-Berechnung verlangt eine Andersbehandlung, und zwar bei der Berechnung der Fasermittelpunkte im makroskopischen Spulenmodell.

---

<sup>21</sup> In Quadrupolspulen können jedoch zwischen verschiedenen Lagen kleine Faserstücke „lose“ hängen oder undefiniert verlegt sein. Dieser Umstand wird jedoch in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Die z-Koordinate der k-ten Windung kann wieder mit  $z(k) \approx \left(k - \frac{1}{2}\right)U = (2k - 1)\pi R$  angenähert werden. Bei gegebenem  $w(k)$  und  $l(k)$  sind auch die Mittelpunktskoordinaten  $x_k$  und  $y_k$  wie bei den Zylinderwicklungen zu berechnen. Seien  $w(k)$  und  $l(k)$  wie zuvor definiert, so wird nun eine weitere Funktion  $q(l)$  eingeführt, die die Lagenreihenfolge in der Quadrupolspule berechnet. Mit einer wie in Abbildung 51 festgelegten z-Koordinate gilt für diese:



**Abbildung 51: Windungsschema einer Quadrupolspule[24]**

$$q(l) = \begin{cases} 2l & \text{falls } l \text{ ungerade und } l \leq L/2 \\ 2l - 1 & \text{falls } l \text{ gerade und } l \leq L/2 \\ 2(L - l) + 1 & \text{falls } L - l \text{ gerade und } l > L/2 \\ 2(L - l) + 2 & \text{falls } L - l \text{ ungerade und } l > L/2 \end{cases} \quad (97)$$

Im oben abgebildeten Beispiel ist  $L=8$  und  $q(l)$  für die Lagen  $l=1 \dots 8$ :

$$q: (1,2, \dots, 8) \mapsto (2,3,6,7,8,5,4,1) \quad (98)$$

Nun ist  $x_k = (q(l(k)) - 0.5)\Delta x$ .  $y_k$  lässt sich weiterhin gemäß (96) bestimmen.

## 5 Homogenisierung und Dehomogenisierung von Faserspulen

### 5.1 Grundzusammenhänge

#### 5.1.1 Repräsentative Volumenelemente

Jeder physikalische Körper weist eine Feinstruktur auf, die bei Verformungsberechnungen nur zu einem gewissen Grad berücksichtigt werden kann. Grundsätzlich muss die Feinstruktur umso genauer aufgelöst werden, je kleiner die Abmessungen des Körpers sind, dessen Deformation berechnet werden soll.

So ist etwa das mechanische Verhalten von polykristallinen Metallen bei Abmessungen im Bereich der Korngröße anisotrop und inhomogen, innerhalb eines Kristallites jedoch näherungsweise homogen. Doch schon millimetergroße Werkstücke werden meist ohne allzu großen Genauigkeitsverlust als isotrope und homogene Körper behandelt. In höherer Auflösung wiederum sind in Kristalliten z.B. punktförmige Kristalldefekte und Fremdatome zu beachten. Diese Auflösungserhöhung kann bis zur atomaren Ebene – etwa in der Nanotechnologie – weitergeführt werden und darüber hinaus. Es ist deutlich zu sehen, dass eine gewisse Homogenisierung, also eine Vernachlässigung von Parameteränderungen unterhalb eines festzulegenden Einflussbereichs bzw. Periodenlänge, immer notwendig ist.

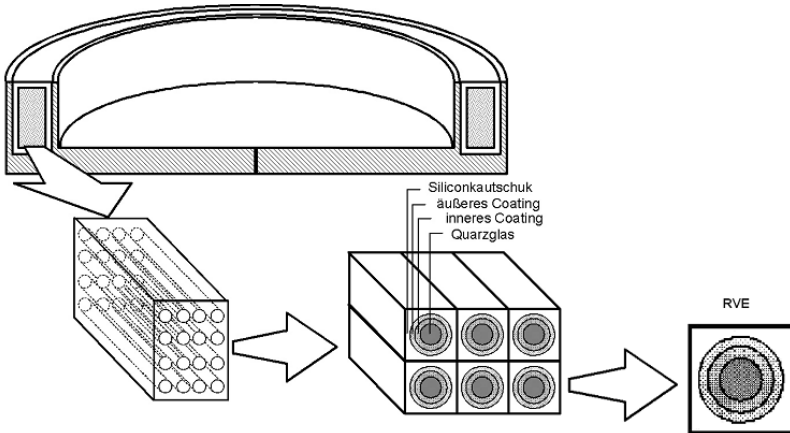
In den meisten technischen Berechnungen wird die „niedrigste“ Auflösungsstufe eines Werkstoffs betrachtet. Dies soll hier für die Faserspule erfolgen, von der die Feinstruktur bekannt ist, das makroskopische Verhalten – namentlich E-Module, Querkontraktionszahlen, Dichte und thermische Expansionskoeffizienten – aber noch bestimmt werden muss.

Im Gegensatz zu vielen metallischen und einphasigen polymeren Werkstoffen verhalten sich Verbundwerkstoffe oft auch makroskopisch anisotrop. Man denke z.B. an parallelfaserverstärkte Verbunde, die sich bei Belastung in Faserrichtung sicher anders deformieren als senkrecht dazu. Damit ist auch der Zusammenhang mit dem Faserkreisel hergestellt: die Faserspule ist aus dem Blickwinkel der (Komposit-)mechanik ein parallelfaserverstärkter Kunststoff.

In der Kompositmechanik sehr gebräuchlich ist das Konzept der Repräsentativen Volumenelemente (RVE). Diese lassen sich anschaulich so definieren, dass 1.) das Verbundmaterial aus der periodischen Aneinanderreihung von RVEs besteht, aber 2.) diese nicht weiter unterteilt werden können, ohne die erste Bedingung zu

verletzen. Eine häufig zitierte Definition des RVE wurde in [57] gegeben. Sie soll hier wörtlich angegeben werden: „This phrase (the “representative volume”, d. Verfasser) will be used when referring to a sample that (a) is structurally entirely typical of the whole mixture on average, and (b) contains a sufficient number of inclusions for the apparent overall moduli to be effectively independent of the surface values of traction and displacement, so long as these values are ‘macroscopically uniform.’ That is, they fluctuate about a mean with a wavelength small compared with the dimensions of the sample, and the effects of such fluctuations become insignificant within a few wavelengths of the surface. The contribution of this surface layer to any average can be made negligible by taking the sample large enough.”

Auch die Feinstruktur der Faserspule eines FOG ist vollständig durch den Aufbau eines ihrer RVEs definiert (Abbildung 52). Hier ist das RVE ein quadratischer oder rechteckiger (quadratisch, falls der vertikale Faserabstand gleich dem horizontalen ist, ansonsten rechteckig) Ausschnitt, der die Faser mitsamt ihrer Coatings enthält, sowie das die Faser umgebende Vergussmaterial.



**Abbildung 52: RVE einer Faserspule**

Die mechanischen Eigenschaften des Verbundes werden über geeignete Mittelungsverfahren berechnet. Besonders anschaulich ist dies bei der Massendichte. Diese ist lediglich das arithmetische Mittel der Dichte der RVE-Komponenten:

$$\bar{\rho} := \frac{1}{V_{RVE}} \int_{RVE} \rho(\vec{x}) dV \quad (99)$$

Die effektiven mechanischen Parameter E-Modul, Poissonzahl etc. lassen sich jedoch nicht durch eine solche Mittelung deren arithmetische Mittelwerte sind nur

eine sehr grobe Abschätzung der effektiven Materialparameter des Verbundwerkstoffes. Um diese zu berechnen, ist vielmehr eine Untersuchung des Verformungsverhaltens eines einzelnen RVEs nötig. Dies gleicht nämlich „im Kleinen“ dem Verformungsverhalten des Verbundes.

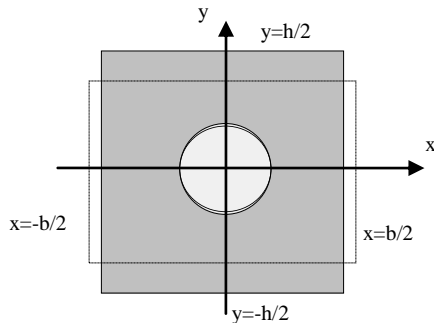
Deformiert sich der Verbund (die Faserspule), so werden die RVEs z.B. wie in Abbildung 53 verformt. Die im unverformten Zustand geradlinigen Ränder bleiben näherungsweise auch bei einer Verformung gerade, aber nicht unbedingt parallel. Die Verschiebungskomponente senkrecht zum Rand lässt sich durch eine lineare Funktion beschreiben. Der Verlauf der Spannungskomponenten entlang der Ränder ist jedoch keineswegs konstant, genauso wenig wie die Verschiebungskomponente parallel zu einer Randgeraden.

Letztere wird sich erwartungsgemäß so einstellen, dass die Verformungsenergie minimiert wird. Für das makroskopische Deformationsverhalten ist jedoch die parallele Verschiebungskomponente bedeutungslos.

Die Verformung in Faserrichtung schließlich ist über die gesamte Querschnittsfläche praktisch konstant.

Die effektiven Materialparameter werden aus der Verformung des RVE und der Kraftkomponenten, ermittelt durch Integration der Spannungskomponenten entlang

der Ränder, berechnet. Der E-Modul (bzw. im anisotropen Fall die E-Moduli) des RVE sei dann die „Gesamtspannung“/„Gesamtdeformation“ in der jeweiligen Richtung. Da sich der Verbundwerkstoff aus eben diesen RVEs zusammensetzt, sind die effektiven Materialparameter für den Werkstoff gleich denen eines einzelnen RVEs. Mehr dazu in Kap. 5.1.5. Die Termini „Gesamtspannung“ und „Gesamtverzerrung“ müssen noch geeignet definiert oder durch besser definierte Begriffe ersetzt werden. Dies erfolgt im folgenden Abschnitt.



**Abbildung 53: Verformung eines RVE bei Belastung in y-Richtung. Das grau ausgefüllte Quadrat stellt dabei den unverformten Zustand, das nicht ausgefüllte Rechteck mit strichliertem Rand das verformte RVE dar**



### 5.1.2 Berechnung makroskopischer Spannungs- und Deformationsfelder

Üblicherweise werden die makroskopischen Verzerrungskomponenten  $\bar{\epsilon}_{ij}$  bzw. die makroskopischen Spannungskomponenten  $\bar{\sigma}_{ij}$  als arithmetisches Mittel der entsprechenden mikroskopischen Feldgröße im RVE definiert (s. z.B. [59] bis [61]):

$$\bar{\epsilon}_{ij} := \frac{1}{A_{RVE}} \int_{RVE} \epsilon_{ij}(\vec{x}) dA \quad (100)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} := \frac{1}{A_{RVE}} \int_{RVE} \sigma_{ij}(\vec{x}) dA \quad (101)$$

Die Verformung des RVE kann auch anhand der Randverschiebung berechnet werden. Die Normalkomponenten  $\bar{\epsilon}_{xx}$  und  $\bar{\epsilon}_{yy}$  gehen auch aus den „mittleren Randverschiebungen“ hervor<sup>22</sup>:

$$\bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,l}}{b}, \quad \bar{\epsilon}_{yy} = \frac{\bar{u}_{y,o} - \bar{u}_{y,u}}{h} \quad (102)$$

$\bar{u}_{x,r}$  ist hier z.B. die mittlere horizontale Verschiebung des rechten Randes (siehe Abbildung 53);  $\bar{u}_{x,l}$ ,  $\bar{u}_{y,o}$  und  $\bar{u}_{y,u}$  sind entsprechend definiert. Auch die mittleren Verschiebungen sind arithmetische Mittelwerte, jedoch nicht über die Querschnittsfläche des RVE, sondern entlang des jeweiligen Randes. Z.B. ist

$$\bar{u}_{y,o} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} u_y \left( x, y = \frac{h}{2} \right) dx \quad (103)$$

Auch die Schubkomponenten können aus den mittleren Verschiebungen berechnet werden. Z.B. ist

$$2\bar{\epsilon}_{xy} = \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\bar{u}_{x,o} - \bar{u}_{x,u}}{h} + \frac{\bar{u}_{y,r} - \bar{u}_{y,l}}{b} \quad (104)$$

Nun soll die Äquivalenz der beiden Definitionen der mittleren Verzerrung anhand eines Beispiels, der mittleren Verzerrung  $\bar{\epsilon}_{xx}$ , gezeigt werden. Aus der üblichen Definition der (lokalen) Deformationskomponente  $\epsilon_{xx}$  ist z.B.

$$u_x \left( x = \frac{b}{2}, y \right) = u_x \left( x = -\frac{b}{2}, y \right) + \int_{-b/2}^{b/2} \epsilon_{xx}(x, y) dx \quad (105)$$

Für den Mittelwert  $\bar{u}_{x,r}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \bar{u}_{x,r} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_x \left( x = \frac{b}{2}, y \right) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( u_x \left( x = -\frac{b}{2}, y \right) + \int_{-b/2}^{b/2} \epsilon_{xx}(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

<sup>22</sup> Dies ergibt sich – im Gegensatz zur oberen Definition – aus der geometrischen Anschauung. Die Äquivalenz der beiden Definitionen wird weiter unten gezeigt

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_x \left( x = -\frac{b}{2}, y \right) dy + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \epsilon_{xx}(x, y) dx dy \\
&= \bar{u}_{x,l} + b \bar{\epsilon}_{xx},
\end{aligned}$$

was wiederum mit der oben erwähnten Definition der Verzerrungskomponenten übereinstimmt. Die Beweise für die übrigen Randverformungen verlaufen ähnlich.

Auch die mittleren Spannungskomponenten können wahlweise durch Mittelung der Randspannungen oder der Spannungen im Inneren des RVE berechnet werden. In dieser Arbeit wird dies jedoch nur auf Verzerrungen angewandt.

### 5.1.3 Numerische Integration von FE-Simulationsergebnissen

Die auf Integration basierende Berechnung des arithmetischen Mittelwerts lässt sich natürlich nur näherungsweise ausführen, wenn die lokalen Spannungen und Verzerrungen nur in diskret verteilten Punkten vorliegen. Die einfachste Möglichkeit der numerischen Berechnung dieses Integrals ist sicherlich dessen Ersetzung durch eine Summe:

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{A_{RVE}} \sum_k \sigma_{ij}(x_k, y_k) A_k \quad (106)$$

Die Summe wird hier über alle Elemente eines RVE gebildet.  $(x_k, y_k)$  spezifizieren das  $k$ -te Element des FE-Netzes,  $A_k$  dessen Fläche.

Es gibt eine Vielzahl genauerer numerischer Integrationsverfahren, doch wäre es für die vorliegende Arbeit wenig zweckdienlich, diesen Punkt zu vertiefen. Durch eine Netzverfeinerung lässt sich auf einfache Weise jederzeit der numerische und auflösungsbedingte Fehler von (106) verringern.

Sind die Flächen sämtlicher FE-Elemente näherungsweise gleich, kann auch über Knotenergebnisse gemittelt werden:

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{N} \sum_k \sigma_{ij}(x_k, y_k) \quad (107)$$

Auch Geometrien mit krummlinigen Rändern werden in FE-Netzen nur approximiert, doch wird dies in dieser Arbeit nur dahingehend berücksichtigt, dass die Vernetzung „genügend“ fein durchgeführt wird. Die Kriterien für „genügend fein“ sind: 1.) die Vernetzung wird so fein gewählt, dass krummlinigen Ränder subjektiv gut durch Geradenzüge angenähert werden; 2.) das Netz wird so lange verfeinert, bis sich die relevanten Ergebnisse der FE-Analyse nicht mehr merklich ändern.

### 5.1.4 Makroskopische Materialgleichungen

Die effektiven makroskopischen Moduli und andere Kennwerte gehorchen denselben Gesetzen, wie sie in Lehrbüchern zur (anisotropen) linearen Elastizitätstheorie vorgestellt werden. Hier die wesentlichen Zusammenhänge für die Materialkennwerte der Faserspule:

$$E_z = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\bar{\epsilon}_{zz}} \quad (108)$$

$$E_p = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\bar{\epsilon}_{xx}} = \frac{\bar{\sigma}_{yy}}{\bar{\epsilon}_{yy}} \quad (109)$$

$$\nu_p = -\frac{\bar{\epsilon}_{xx}}{\bar{\epsilon}_{yy}} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{zz}=0, \sigma_{yy} \neq 0} \quad (110)$$

$$\nu_{zp} = -\frac{\bar{\epsilon}_{xx}}{\bar{\epsilon}_{zz}} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=0, \sigma_{zz} \neq 0} = -\frac{\bar{\epsilon}_{yy}}{\bar{\epsilon}_{zz}} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=0, \sigma_{zz} \neq 0} \quad (111)$$

$$\nu_{pz} = -\frac{\bar{\epsilon}_{zz}}{\bar{\epsilon}_{xx}} \Big|_{\sigma_{zz}=\sigma_{yy}=0, \sigma_{xx} \neq 0} = -\frac{\bar{\epsilon}_{zz}}{\bar{\epsilon}_{yy}} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{zz}=0, \sigma_{yy} \neq 0} \quad (112)$$

$$\alpha_p = \bar{\epsilon}_{xx} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0, \Delta T=1K} = \bar{\epsilon}_{yy} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0, \Delta T=1K} \quad (113)$$

$$\alpha_z = \bar{\epsilon}_{zz} \Big|_{\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0, \Delta T=1K} \quad (114)$$

### 5.1.5 Bekannte analytische Näherungslösungen zur Berechnung effektiver Materialparameter linearfaserverstärkter Verbundwerkstoffe

Für zweikomponentige (Faser+Matrix) linearfaserverstärkte Verbundwerkstoffe existieren Näherungslösungen zur Berechnung effektiver Materialparameter (s. hierzu [51] bis [53]). Für FVWe mit mehr als zwei Komponenten, z.B. mit mehrschichtigen Fasern, sind diese Näherungen nicht mehr gültig. Näherungslösungen zur Homogenisierung von Verbundwerkstoffen, die einer Faserspule mit zwei Coatingschichten ähneln, sind dem Verfasser dieser Arbeit nicht bekannt. Daher wurde die Homogenisierung eigens durchgeführt.

## 5.2 Homogenisierung linearfaserverstärkter Verbundwerkstoffe mit mehrschichtigen Fasern

### 5.2.1 Modulbeschreibung

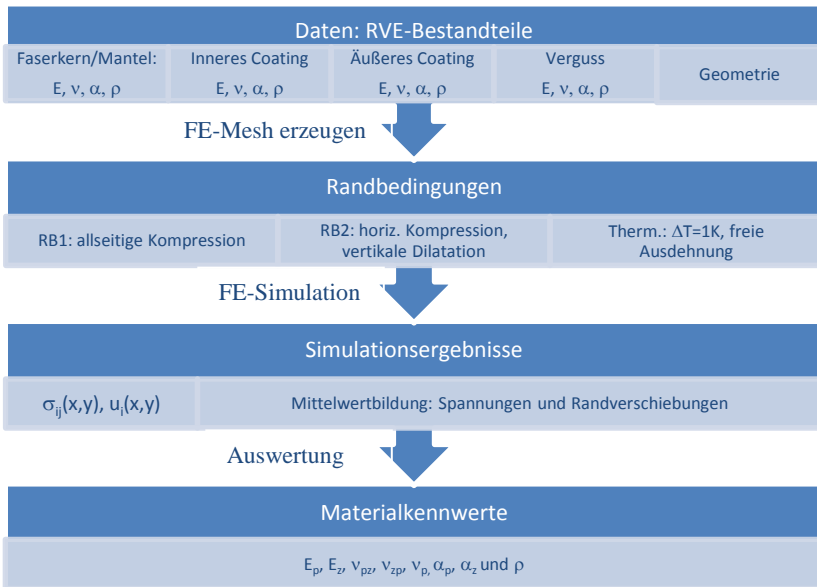
Wie schon in der Einführung zu RVEs erläutert, äußert sich eine makroskopische Verformung der Spule in einer näherungsweise linearen Verformung der RVE-Ränder. Aus der Verformung der RVE-Ränder und der dazu nötigen mittleren

Spannungen innerhalb der RVEs lassen sich die effektiven Materialparameter der Faserspule berechnen.

Durch Vorgabe geeigneter Randbedingungen lassen sich verschiedene Konstellationen von Verzerrungen und Spannungen einstellen und daraus die gesuchten effektiven Materialparameter berechnen. Die Feldberechnung kann analytisch oder mit FE-Simulationen erfolgen. In 5.1.5 wird die Homogenisierung mit FE-Simulationen beschrieben, in 5.4 wird eine analytische Näherungslösung zur Homogenisierung vorgestellt.

Die Dichte  $\rho$  und der longitudinale E-Modul  $E_z$  kann ohne FE-Simulationen anhand geometrischer Überlegungen, die elastischen Materialparameter  $E_p$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{zp}$  und  $\nu_{pz}$  anhand der Ergebnisse zweier verschiedener FE-Simulationen ohne Einschluss thermischer Expansion berechnet werden (d.h. zweier FE-Simulationen mit jeweils unterschiedlichen Randbedingungen). Die Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_p$  und  $\alpha_z$  bedürfen einer zusätzlichen dritten Simulation.

Hier ein Datenflussdiagramm des Homogenisierungsmoduls dargestellt:



**Abbildung 54: Datenflussdiagramm zu Modul 1: Homogenisierung der Faserspule**

### 5.2.2 Spezifisches Gewicht

Das spezifische Gewicht  $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$  der Faserspule gleicht dem des RVE und kann leicht basierend auf geometrischen Überlegungen berechnet werden:

$$\rho_{RVE} = \frac{m_{RVE}}{V_{RVE}} = \frac{m_{RVE}^*}{A_{RVE}} = \frac{\sum \rho_i A_i}{A_{RVE}} \quad (115)$$

wobei  $m_{RVE}^*$  die auf eine Längeneinheit bezogene Masse des RVE,  $A_{RVE}$  dessen Querschnittsfläche,  $\rho_i$  die Dichten der Schichten 1...N und  $A_i$  deren Flächen im RVE bedeuten.

### 5.2.3 Longitudinaler Elastizitätsmodul

Da die Faser viel härter als alle anderen Materialien im FKV ist, beschränkt sich die Spannung  $\sigma_z$  bei konstanter Dehnung  $\varepsilon_z$  fast vollständig auf den Bereich der Faser. Ihr Mittelwert entlang der Faser sei  $\bar{\sigma}_{z,F}$ . Für die mittlere Spannung  $\bar{\sigma}_{zz}$  des RVE gilt dann

$$\bar{\sigma}_{zz} := \frac{1}{A_{RVE}} \int_{RVE} \sigma_{zz}(\vec{x}) dA \approx \frac{1}{A_{RVE}} \int_F \sigma_{zz}(\vec{x}) dA = \frac{A_F}{A_{RVE}} \bar{\sigma}_{z,F} \quad (116)$$

Hierbei ist  $A_F$  der Flächeninhalt der Faser im RVE,  $A_{RVE}$  dessen Flächeninhalt. Die mittlere Verzerrung der Faser  $\bar{\varepsilon}_{z,F}$  ist gleich der des RVE:  $\bar{\varepsilon}_{z,F} = \bar{\varepsilon}_{zz}$ . Ferner ist

$$\frac{\bar{\sigma}_{z,F}}{\bar{\varepsilon}_{z,F}} = \frac{\bar{\sigma}_{z,F}}{\bar{\varepsilon}_{zz}} = E_F \quad (117)$$

mit dem E-Modul der Faser  $E_F$  (im Falle von Glas ist  $E_F=72\text{GPa}$ ). Der E-Modul  $E_Z$  des Faserverbundes lässt sich damit aus dem Flächenanteil der Faser und dessen E-Modul berechnen:

$$E_Z = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\bar{\varepsilon}_{zz}} \approx \frac{A_F}{A_{RVE}} \frac{\bar{\sigma}_{z,F}}{\bar{\varepsilon}_{z,F}} = \frac{A_F}{A_{RVE}} \frac{\bar{\sigma}_{z,F}}{\bar{\varepsilon}_{z,F}} = \frac{A_F}{A_{RVE}} E_F \quad (118)$$

### 5.2.4 Simulationsbasierte Bestimmung mechanischer Kennwerte

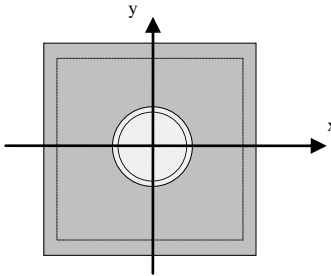
Die Materialparameter  $E_p$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{zp}$  und  $\nu_{pz}$  können nicht mit ähnlich einfachen Überlegungen bestimmt werden. Zu deren Berechnung sind zwei Simulationen mit unterschiedlichen Randbedingungen nötig, deren resultierende Verzerrungs- und Spannungsfelder gemittelt und geeignet ins Verhältnis gesetzt werden. Natürlich kann die Feldberechnung auch analytisch geschehen.

Unabhängig von der Art der Feldberechnung sind zwei verschiedene Sätze von Randbedingungen nötig, um sämtliche Materialkennwerte zu bestimmen. Ein einziger Satz würde ein unterbestimmtes Gleichungssystem ergeben, zusätzliche Sätze ein überbestimmtes, womit sich die numerische Genauigkeit zwar steigern lässt, was sich aber auch durch andere Maßnahmen (v.a. Verfeinerung des FE-

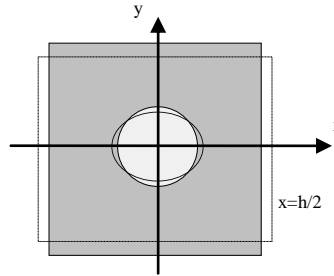
Netzes, Verwendung höherer Elemente) erreichen lässt. Obwohl die Zusammenhänge in 5.1.4 für beliebig verformte RVEs gültig sein sollten, wurden für beide Simulationen Randverschiebungen so festgelegt, dass sich die RVEs linear verformen.

Randbedingung RB1: Das quadratische RVE wird zu einem kleineren Quadrat komprimiert. Dies wird durch Vorgabe der Randverschiebungen  $u_{x,re} = -u_{x,li} = u_{y,o} = -u_{y,u}$  erreicht. Ferner wird ein ebener Verzerrungszustand angenommen (d.h.  $\epsilon_{zz} = 0$ ). Damit ist  $\bar{\epsilon}_{xx} = \bar{\epsilon}_{yy}$  und aus Symmetriegründen  $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy}$ . Es stellt sich ein annähernd hydrostatischer Spannungszustand ein, mit dem erwartungsgemäß u.a. die Poissonzahl  $\nu_p$  präzise bestimmt werden kann.

RB2: Vorgabe der Randverschiebungen:  $u_{x,re} = -u_{x,li} = u_{y,u} = -u_{y,o}$  und  $\epsilon_{zz} = 0$ . Damit ist  $\bar{\epsilon}_{xx} = -\bar{\epsilon}_{yy}$  und  $\bar{\sigma}_{xx} = -\bar{\sigma}_{yy}$ . Die Volumendehnung ist nun in erster Näherung gleich 0, die Poissonzahl  $\nu_p$  wirkt sich daher weit weniger auf die auftretenden Spannungen aus.



**Abbildung 55: Verformung bei RB1**  
(ausgefüllter Quader: unverformtes RVE,  
gestrichelt: verformtes RVE)



**Abbildung 56: Verformung bei RB2**

Aus der Materialgleichung (69) lassen sich für  $\Delta T = 0$  Beziehungen zwischen den mittleren Spannungen und Verzerrungen und den Materialparametern  $E_p$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{zp}$ ,  $\nu_{pz}$  und  $E_z$  herleiten. Diese Gleichungen bilden ein Gleichungssystem, mit dessen Hilfe die Materialkennwerte bestimmt werden können. Die Aufstellung des Gleichungssystems und dessen Auflösung kann im Anhang A.4 nachgelesen werden; nur die Ergebnisse seien hier genannt:

$$\nu_{zp} = \frac{\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{2\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \quad (119)$$

$$E_p = 2 \left( \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}} + \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} + \frac{\nu_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \right)^{-1} \quad (120)$$

$$\nu_p = \frac{E_p}{2} \left( \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}} - \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} + \frac{\nu_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \right) \quad (121)$$

Zur Wiederholung:  $\nu_{pz} = \frac{E_p}{E_z} \nu_{zp}$

Nach (70) lässt sich der Schubmodul  $G_{pp}$  aus  $E_p$  und  $\nu_p$  berechnen:

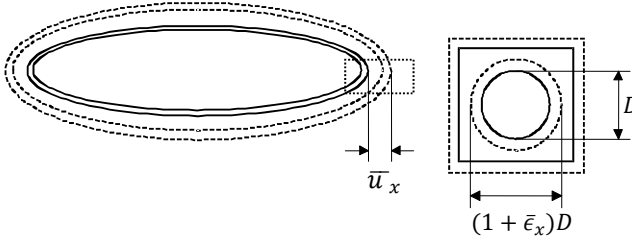
$$G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)} \quad (122)$$

Ferner wird angenommen, dass  $G_{zp} \approx G_p$  ist, dass also die Schubmodule des FKV in allen drei Richtungen annähernd gleich sind.

### 5.2.5 Simulationsbasierte Bestimmung thermischer Ausdehnungskoeffizienten

Die thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_p$  und  $\alpha_z$  lassen sich durch eine weitere Simulation ermitteln. Hierzu sind jedoch weder der EVZ, noch der ESZ geeignet. Im EVZ würde sich die Faserlängsdehnung  $\alpha_z$  nur in Form einer Querdehnung auswirken. Da  $\alpha_z$  jedoch, bedingt durch die geringe thermische Ausdehnung der Faser, um Größenordnungen unterhalb von  $\alpha_p$  liegt, wäre dieser Einfluss wohl zu gering um zuverlässig aus Simulationsergebnissen berechnet werden zu können. Im ESZ wiederum könnte sich jeder Bestandteil des RVE longitudinal frei ausdehnen – ein schlicht unphysikalischer Zustand.

Die freie thermische Ausdehnung eines RVE (d.h. mit spannungsfreien seitlichen Rändern) bei gleicher Verformung aller Komponenten in Faserrichtung lässt sich gut durch ein axialsymmetrisches Modell simulieren. Das RVE beschreibt dann einen Kreis, der sich bei Erwärmung ausdehnt (Abbildung 57). Der Durchmesser der Windung muss nur groß genug gewählt werden, um die Auswirkungen der Kreisgeometrie auf den Spannungszustand gering zu halten. In Anlehnung an die Faserspule wurde in späteren konkreten Rechnungen der Radius derselben als Krümmungsradius gewählt.



**Abbildung 57: Thermische Ausdehnung einer kreisförmig in sich geschlossenen Faserwindung.** (Durchgezogene Linien: unverformte Windung, Strichliert: verformte Windung)

Die Randbedingung RB3 ist nun folgende:  $\Delta T=1$ , die Ränder sind spannungsfrei. Damit verschwinden auch die mittleren Spannungen:  $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = 0$  (hier wurde bewusst auf die Verwendung von Polarkoordinaten verzichtet, da es sonst zu Konfusionen kommen kann zwischen der polaren z-Koordinate, die hier als y bezeichnet wird, und der in großen Teilen dieser Arbeit angewandten Konvention, dass die z-Koordinate in Faserrichtung zeigt)

Die mittleren Verzerrungen  $\bar{\epsilon}_{xx}$  und  $\bar{\epsilon}_{yy}$  sind:

$$\bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,l}}{\Delta x}, \bar{\epsilon}_{yy} = \frac{\bar{u}_{y,o} - \bar{u}_{y,u}}{\Delta y} \quad (123)$$

Die Dehnung in azimuthaler (Faser-) Richtung kann nach (31) aus der Verschiebung  $u_x$  berechnet werden:  $\epsilon_{zz}(x, y) = \frac{u_x(x, y)}{x}$  und daher

$$\bar{\epsilon}_{zz} = \left\langle \frac{u_x(x, y)}{x} \right\rangle \approx \frac{\bar{u}_x}{R} \quad (124)$$

(R ist hier der Abstand des Mittelpunktes des RVE vom Ursprung,  $\bar{u}_x$  die mittlere radiale Verschiebung des RVE). Die thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_p$ <sup>23</sup> und  $\alpha_z$  sind nun leicht zu ermitteln:

$$\alpha_p = \frac{\bar{\epsilon}_{xx} + \bar{\epsilon}_{yy}}{2} \quad (125)$$

$$\alpha_p = \bar{\epsilon}_{zz} \approx \frac{\bar{u}_x}{R} \quad (126)$$

<sup>23</sup> $\alpha_p$  sei hier also zur Steigerung der numerischen Genauigkeit der Mittelwert der Ausdehnung in x- und in y-Richtung



## 5.3 Dehomogenisierung

### 5.3.1 Zusammenhang zwischen makroskopischer und mikroskopischer Deformation

Zur Berechnung der DRA ist die Kenntnis der Faserverzerrungen  $\bar{\epsilon}_{r,F}$  und  $\bar{\epsilon}_{z,F}$  nötig. Lokale Variationen derselben werden vernachlässigt, nur die Mittelwerte werden für die Berechnung herangezogen.  $\bar{\epsilon}_{\theta,F}$  und Schubverzerrungen wirken sich nicht auf den elasto-optischen Effekt aus und werden daher hier nicht berücksichtigt.

Das makroskopische Verzerrungsfeld gibt nur die mittlere Verzerrung des RVE an, nicht die der Faser. Die Verformung des RVE-Randes und die Temperatur  $T$  legen jedoch eindeutig den mikroskopischen Verformungszustand innerhalb des RVE fest. Näherungsweise gilt dies auch für die makroskopischen Verzerrungskomponenten des RVE ( $\bar{\epsilon}_{xx}$ ,  $\bar{\epsilon}_{yy}$ ,  $\bar{\epsilon}_{zz}$  und  $\bar{\epsilon}_{xy}$ )<sup>24</sup> auf der einen Seite und denen der Faser ( $\bar{\epsilon}_{r,F}$  und  $\bar{\epsilon}_{z,F}$ ) auf der anderen. In linearelastischen Materialien ist dieser Zusammenhang erwartungsgemäß linear. Die genannten Verzerrungen und die Temperatur gehorchen also einem linearen Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{r,F} \\ \bar{\epsilon}_{z,F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{rx} & M_{ry} & M_{rz} & M_{rxy} & M_{rT} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} & M_{zxy} & M_{zT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\epsilon}_{zz} \\ \bar{\epsilon}_{xy} \\ \Delta T \end{pmatrix} \quad (127)$$

Die Ermittlung der Matrix  $M$  wird als Dehomogenisierung bezeichnet. Dieser Vorgang sei im Folgenden detailliert beschrieben.

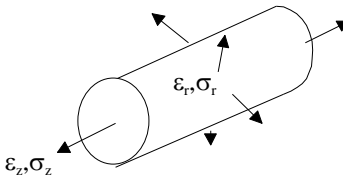


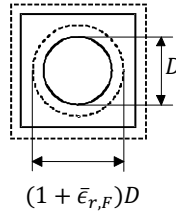
Abbildung 58: Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{r,F}$  und  $\epsilon_{z,F}$  der Faser

<sup>24</sup> Wie bereits erwähnt, wird eine torsionslose Verformung der Faserspule angenommen, d.h.

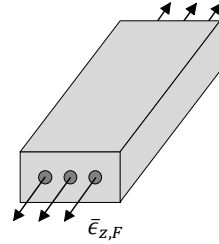
$$\bar{\epsilon}_{xz} = \bar{\epsilon}_{yz} = 0$$

### 5.3.2 Faserverzerrungen

Das natürliche Koordinatensystem zur Beschreibung des Verzerrungsfeldes in der Faser (im folgenden Faserkoordinatensystem genannt) ist ein zylindrisches mit den Komponenten  $(r, \theta, z)$ .  $\bar{\epsilon}_{r,F}$  bzw.  $\bar{\epsilon}_{z,F}$  sind wie gewohnt die arithmetischen Mittel der jeweiligen ortsabhängigen Feldgrößen, jedoch beschränkt auf das Fasergebiet F (Kern und Mantel), z.B.:



**Abbildung 59:**  
Darstellung der  
radialen Verformung  
der Faser



**Abbildung 60:** Verformung der Faser in z-Richtung

$$\bar{\epsilon}_{r,F} = \frac{1}{A_F} \int_F \epsilon_r(x, y) dA \approx \frac{1}{A_F} \sum_k \epsilon_r(x_k, y_k) A_k \quad (128)$$

Liegen die Verzerrungen nach einer FE-Simulation in kartesischen Koordinaten vor, müssen diese in zylindrische umgerechnet werden. Nach Kap. 3.2.6 ist

$$\epsilon_r(r, \theta) = \epsilon_x \cos^2(\theta) + \epsilon_y \sin^2(\theta) + 2\epsilon_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (129)$$

$\bar{\epsilon}_{z,F}$  wird ebenfalls als arithmetischer Mittelwert des ortsveränderlichen Verzerrungsfeldes  $\epsilon_z(r, \theta)$  definiert. Eine Koordinatentransformation ist nicht nötig. Hier eine Veranschaulichung der Bedeutung der beiden Deformationskomponenten:

### 5.3.3 Bestimmung der Dehomogenisierungsmatrix

In diesem Abschnitt sollen Schritt für Schritt die Komponenten der Dehomogenisierungsmatrix (127) berechnet werden. Es wird sich herausstellen, dass einige davon verschwinden, einige andere sich durch physikalische Überlegungen voraussagen lassen. Nur zwei Komponenten müssen durch FE-Simulationen bestimmt werden.

Scherungen in der xy-Ebene bewirken keine Verzerrung in z-Richtung, d.h.  $M_{zxy} = 0$ . Zudem sind Scherungen volumenerhaltende Verformungen, sodass auch deren Auswirkung auf  $\bar{\epsilon}_{r,F}$  verschwindet ( $M_{rxxy} = 0$ ). Die Faserverzerrungen in z-Richtung entspricht der des gesamten RVE (s. Abbildung 60). Damit ist  $M_{zz} = 1$  und  $M_{zx} = M_{zy} = M_{zT} = 0$  bzw.

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{r,F} \\ \bar{\epsilon}_{z,F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{rx} & M_{ry} & M_{rz} & M_{rT} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\epsilon}_{zz} \\ \Delta T \end{pmatrix} \quad (130)$$

Da Verzerrungen in  $x$ - und in  $y$ -Richtung gleichermaßen die radiale Faserverzerrung bestimmen, muss  $M_{rx} = M_{ry}$  sein. Für ihre Festlegung sind FE-Simulationen notwendig.

$M_{rz}$  lässt sich aus physikalischen Überlegungen herleiten. Seine Definition ist

$$M_{rz} = \frac{\bar{\epsilon}_{r,F}}{\bar{\epsilon}_{zz}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{xx}=\bar{\epsilon}_{yy}=\Delta T=0} = \frac{\bar{\epsilon}_{r,F}}{\bar{\epsilon}_{z,F}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{xx}=\bar{\epsilon}_{yy}=\Delta T=0} \quad (131)$$

Und quantifiziert damit die Querdehnung der Faser. Wenn man den seitlichen Druck bzw. Zug der Coatingschichten vernachlässigt, ist er näherungsweise gleich der negativen Poissonzahl des Fasermaterials (Quarzglas):  $M_{rz} = -\nu = -0.17$ . Somit bleiben nur noch die Koeffizienten  $M_{rx} = M_{ry}$  und  $M_{rT}$  unbestimmt bzw. müssen aus FE-Simulationsergebnissen errechnet werden (s. nächsten Abschnitt).

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{r,F} \\ \bar{\epsilon}_{z,F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{rx} & M_{ry} & -0.17 & M_{rT} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\epsilon}_{zz} \\ \Delta T \end{pmatrix} \quad (132)$$

### 5.3.4 Simulationsbasierte Bestimmung von Dehomogenisierungskoeffizienten

Die Simulationsergebnisse zur Randbedingung RB1 genügen, um  $M_{rx}$  und  $M_{ry}$  zu bestimmen:

$$M_{rx} = M_{ry} = \frac{\bar{\epsilon}_{r,F}}{2\bar{\epsilon}_{xx}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{xx}=\bar{\epsilon}_{yy};\Delta T=\bar{\epsilon}_{zz}=0} = \frac{\bar{\epsilon}^{(1)}_{r,F}}{2\bar{\epsilon}^{(1)}_{xx}} \quad (133)$$

Der Temperaturkoeffizient  $M_{rT}$  ergibt sich aus den Simulationsergebnissen mit Randbedingung RB3:

$$M_{rT} = \frac{\bar{\epsilon}^{(3)}_{r,F} - M_{rx}\bar{\epsilon}^{(3)}_{xx} - M_{ry}\bar{\epsilon}^{(3)}_{yy} + 0.17\bar{\epsilon}^{(3)}_{zz}}{\Delta T} \quad (134)$$

## 5.4 Analytisch näherungsweise Homogenisierung und Dehomogenisierung

In diesem Unterkapitel wird eine analytische Näherung zur Homogenisierung und Dehomogenisierung von Faserspulen vorgestellt, die dem bisher beschriebenen Typ entsprechen, also quadratische RVEs haben und Fasern mit zwei Coatingschichten. Zusätzliche Coatingschichten können durch entsprechende Änderungen hinzugefügt werden, die aus der Algorithmusbeschreibung klar sein sollten.

Es seien hier nur die rein mechanischen Parameter berücksichtigt, also alle bisher beschriebenen außer  $\alpha$  und  $M_{rT}$ . Dies bedeutet, dass Näherungslösungen für die Randbedingungen RB1 und RB2 vorgestellt werden. Es handelt sich dabei um

exakte Lösungen der elastomechanischen Differentialgleichungen, jedoch mit Randbedingungen, die nur näherungsweise denen von RB1 bzw. RB2 entsprechen.

Natürlich muss die analytische Lösung verifiziert werden, und zwar mit Finite-Elemente-Simulationen. Dies wird in Kap. 6.7 getan.

#### 5.4.1 Näherungslösung zur Randbedingung RB1

Randbedingung RB1 (allseitige Kompression im EVZ,  $\bar{\epsilon}_{xx} = \bar{\epsilon}_{yy}, \bar{\epsilon}_{zz} = 0$ ) wird näherungsweise mit einem rotationssymmetrischen Verformungszustand eingehalten, d.h. mit einer Verformung, die Kreise in (kleinere oder größere) Kreise überführt. Der quadratische Rand des RVE wird dabei zwar nicht exakt, doch in guter Näherung in ein Quadrat überführt.

Auch die intern auftretenden Spannungen werden mit dieser Näherung sehr gut beschrieben, wie im nächsten Abschnitt noch gezeigt wird.

Für jede der vier Schichten wird der Ansatz

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}, u_\theta(r) = 0 \quad (135)$$

mit noch zu bestimmenden und für jede Schicht unterschiedlichen Konstanten A und B angewandt werden (s. Abschnitt 3.2.9). In kartesischen Koordinaten lautet dieser Ansatz:

$$u_x(x, y) = u_r \cos(\theta) = Ax + \frac{Bx}{r^2} \quad (136)$$

$$u_y(x, y) = u_r \sin(\theta) = Ay + \frac{By}{r^2} \quad (137)$$

An den Berührungslinien der Schichten müssen gewisse Stetigkeitsbedingungen eingehalten werden. Stetig sein müssen

- Die Radialverschiebung  $u_r$
- Die Azimutalverschiebung  $u_\theta$ , die jedoch in diesem Ansatz verschwindet ( $u_\theta=0$ )
- Die Normalspannung  $\sigma_r$
- Die Schubspannung  $\sigma_{\theta r}$  (verschwindet hier ebenfalls)

Bei vier Schichten gibt es somit acht Parameter zu ermitteln, nämlich  $A_1 \dots A_4$  und  $B_1 \dots B_4$ , wobei der Index 1 für die innerste Schicht (Quarzglase) stehe, 4 für die äußerste (Verguss). Die nötigen acht Gleichungen ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

- $B_1=0$ , ansonsten würde die Verschiebung  $u_r$  für  $r \rightarrow 0$  divergieren.

- Jeweils zwei Stetigkeitsbedingungen müssen an den drei Grenzlinien im Inneren des RVE eingehalten werden (für  $u_r$  und  $\sigma_r$ ).
- Die achte Gleichung ergibt sich durch Minimierung der quadratischen Abweichung der Deformation des äußeren Randes von der „eigentlichen Randbedingung RB1“. Aufgrund der Symmetrie des RVE und des Verschiebungsansatzes genügt es, die Abweichung nur auf einer der Kanten zu berechnen, z.B. auf dem rechten Rand ( $\Delta$  sei die möglichst genau einzuhaltende Randverschiebung):

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( u_x \left( x = \frac{b}{2}, y \right) - \Delta \right)^2 dy = \min \quad (138)$$

Daraus lässt sich ein lineares Gleichungssystem für die acht Parameter  $A_1 \dots B_4$  aufstellen, welches nun entwickelt wird.

Mit den bekannten Formeln  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon_r = u_{r,r}$  und  $\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$  erhält man

$$\sigma_r = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta) + 2\mu\epsilon_r = (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \frac{\lambda u_r}{r} \quad (139)$$

Die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  lassen sich in den Ingenieurskonstanten  $E$ ,  $G$  und  $\nu$  ausdrücken:  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{r,r} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} \\ &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A - \frac{B}{r^2} \right) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( A + \frac{B}{r^2} \right) \\ &= A \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{B}{r^2} \frac{-E}{(1+\nu)} =: A\alpha + \frac{B\beta}{r^2} \end{aligned} \quad (140)$$

Dabei wurden der Übersichtlichkeit zuliebe Größen  $\alpha := \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  und  $\beta := \frac{-E}{(1+\nu)}$  eingeführt. Die Stetigkeit der Radialverschiebung  $u_r$  führt zu den ersten vier Gleichungen des GLS:

$$A_1 r_1 = A_2 r_1 + \frac{B_2}{r_1}, B_1 = 0, A_2 r_2 + \frac{B_2}{r_2} = A_3 r_2 + \frac{B_3}{r_2}, A_3 r_3 + \frac{B_3}{r_3} = A_4 r_3 + \frac{B_4}{r_3} \quad (141)$$

Weitere drei Gleichungen resultieren aus der Forderung der Stetigkeit der Radialspannung  $\sigma_r$ :

$$A_1 \alpha_1 + \frac{B_2 \beta_1}{r_1^2} = A_2 \alpha_2 + \frac{B_2 \beta_2}{r_1^2} \quad (142)$$

$$A_2 \alpha_2 + \frac{B_2 \beta_2}{r_2^2} = A_3 \alpha_3 + \frac{B_3 \beta_3}{r_2^2} \quad (143)$$

$$A_3 \alpha_3 + \frac{B_3 \beta_3}{r_3^2} = A_4 \alpha_4 + \frac{B_4 \beta_4}{r_3^2} \quad (144)$$

$r_1 \dots r_3$  sind die jeweiligen Außenradien der Schichten 1..3,  $r_4 = b/2$  der eines gedachten Inkreises des RVE.

Mit diesem System sieben linearer Gleichungen lassen sich sieben der acht Konstanten  $A_1 \dots B_4$  in Abhängigkeit der achten berechnen, etwa  $A_1(B_4)$ ,  $B_1(B_4)$  ...  $A_4(B_4)$ .  $B_4$  sei nun eine Variable, anhand derer die Optimierung (138) durchgeführt werden soll. Das unterbestimmte GLS ist wie folgt:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 1/r_1 & -r_1 & -1/r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 1/r_2 & -r_2 & -1/r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 1/r_3 & -r_3 & -1/r_3 \\ \alpha_1 & \beta_1/r_1^2 & -\alpha_2 & -\beta_2/r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2/r_2^2 & -\alpha_3 & -\beta_3/r_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3/r_3^2 & -\alpha_4 & -\beta_4/r_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (145)$$

Dieses unterbestimmte GLS lässt sich in ein bestimmtes umformulieren, indem man die Variable  $B_4$  „auf die rechte Seite“ bringt:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 1/r_1 & -r_1 & -1/r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 1/r_2 & -r_2 & -1/r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 1/r_3 & -r_3 & -1/r_3 \\ \alpha_1 & \beta_1/r_1^2 & -\alpha_2 & -\beta_2/r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2/r_2^2 & -\alpha_3 & -\beta_3/r_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3/r_3^2 & -\alpha_4 & -\beta_4/r_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_4/r_3 \\ 0 \\ 0 \\ B_4\beta_4/r_3^2 \end{pmatrix} \quad (146)$$

Mit der Bezeichnung  $L$  für die erhaltene  $7 \times 7$ -Matrix lässt sich dies auch kurz schreiben:

$$(A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_3 \ B_3 \ A_4)^T = L^{-1} \cdot (0 \ 0 \ 0 \ B_4/r \ 0 \ 0 \ B_4\beta_4/r_3^2)^T \quad (147)$$

Jede Konstante hängt damit linear von  $B_4$  ab; insbesondere ist

$$A_4 = \lambda B_4 \quad (148)$$

Es fehlt noch die „eigentliche“ Randbedingung der Verformung des RVE, nämlich die Verschiebung des äußeren Randes. Da sie nur näherungsweise eingehalten werden kann, kann nur die Abweichung von der gewollten Verformung minimiert werden. Gewöhnlich lässt sich die quadratische Abweichung besonders einfach minimieren:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( u_x \left( x = \frac{b}{2}, y \right) - \Delta \right)^2 dy = \min \quad (149)$$

$\Delta$  ist dabei die vorgegebene Verschiebung an den Kanten des RVE. Dieser Ausdruck muss noch umformuliert werden, um eine Gleichung für  $A_4$  und  $B_4$  zu erhalten. Setzt man den Verschiebungsansatz  $u_x = Ax + \frac{Bx}{r^2}$  in diese Gleichung ein, erhält man:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( u_x \left( x = \frac{b}{2}, y \right) - \Delta \right)^2 dy = \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{A_4 b}{2} + \frac{B_4 b}{2(b^2/4 + y^2)} - \Delta \right)^2 dy$$

$$= \frac{(2\pi+4)B_4^2 + (2\pi b^2 A_4 - 4\pi b \Delta)B_4 + b^4 A_4^2 - 4b^3 A_4 \Delta + 4b^2 \Delta^2}{4b} =: \text{err}(A_4, B_4) \quad (150)$$

Die Minimierung wird durch Differentiation des Fehlerintegrals nach  $B_4$  vorgenommen (man erinnere sich, dass  $A_4 = \lambda B_4$ ):

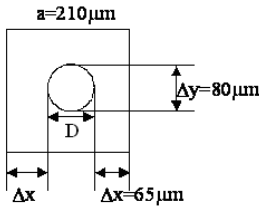
$$\frac{d}{dB_4} \text{err}(A_4, B_4) = \frac{\partial}{\partial B_4} \text{err}(A_4, B_4) + \frac{\partial A_4}{\partial B_4} \frac{\partial}{\partial A_4} \text{err}(A_4, B_4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial B_4} \text{err}(A_4, B_4) + \lambda \frac{\partial}{\partial A_4} \text{err}(A_4, B_4) = 0 \quad (151)$$

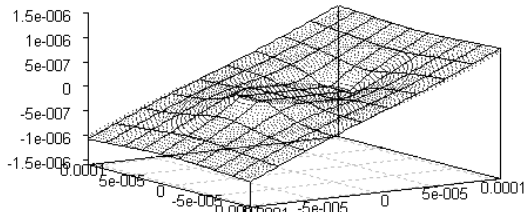
Die letzte unbestimmte Größe  $B_4$  ergibt sich hieraus zu:

$$B_4 = \frac{2\pi b \Delta + 2b^3 \lambda \Delta}{2\pi + 4 + 2\pi b^2 \lambda + b^4 \lambda^2} \quad (152)$$

Die hier beschriebene Näherung wird in Kap. 6.7 angewandt und verifiziert. Vorab soll schon mal gezeigt werden, wie das Verschiebungsfeld in einer einfachen Geometrie – Faser ohne Coatings in Elastomermatrix – durch die beschriebene Näherung im Vergleich zu Ergebnissen einer FE-Simulation beschrieben wird. Abbildung 61 zeigt die zugrundeliegende Geometrie des RVE, Abbildung 62 einen Vergleich der Verschiebungskomponente  $u_x$  zwischen Rechnung und Simulation.



**Abbildung 61:** zwei-schichtiges RVE, das gemäß RB1 komprimiert wird



**Abbildung 62:** Verschiebungskomponente  $u_x$  (in m) nach FE-Simulation (Punkte) bzw. der analytischen Näherung (liniert). Die beiden Abszissenachsen geben die Position innerhalb des RVE an, wobei der Ursprung auf den Mittelpunkt gelegt wurde.

## 5.4.2 Spannungs- und Verschiebungsmittelwerte

Zur Durchführung der Homogenisierung müssen noch die mittleren RVE-Verzerrungen und die Mittelwerte einiger Spannungskomponenten berechnet

werden. Bezüglich der mittleren Randverschiebungen des RVE genügt es aufgrund der Symmetrie, die mittlere Verschiebung des rechten Randes aus den Konstanten  $A_1 \dots B_4$  zu berechnen. Aus  $u_x(x, y) = Ax + \frac{Bx}{r^2}$  und  $x = b/2$  auf dem rechten Rand folgt:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{x,r} &= -\bar{u}_{x,l} = \bar{u}_{y,o} = -\bar{u}_{y,u} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} u_x(x = b/2, y) dy \\ &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left( A_4 b/2 + \frac{B_4 b/2}{b^2/4 + y^2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left( A_4 b + \frac{\pi B_4}{b} \right)\end{aligned}\quad (153)$$

Die Spannungsfelder  $\sigma_{ii}(x, y)$  lassen sich durch tensorielle Koordinatentransformation aus  $\sigma_r(r) = A\alpha + \frac{b\beta}{r^2}$  und  $\sigma_\theta(r) = A\alpha - \frac{b\beta}{r^2}$  berechnen [62]:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_r(r) \cos^2(\theta) + \sigma_\theta(r) \sin^2(\theta) = A\alpha + B\beta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (154)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \sigma_r(r) \sin^2(\theta) + \sigma_\theta(r) \cos^2(\theta) = A\alpha + B\beta \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (155)$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu A\alpha \quad (156)$$

Die Mittelwerte der Spannungen werden durch Integration über sämtliche RVE-Schichten gewonnen. Hierbei ist nützlich, dass Integrale der Form

$$\int_B \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2}{r^2} r d\theta dr = 0 \quad (157)$$

über ringförmige Bereiche  $B$  verschwinden. Daher nehmen die Spannungsmittelwerte die einfache Form an

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{A_{RVE}} \int \sigma_{xx}(x, y) dA = \frac{\sum A_i \alpha_i \pi r_i^2}{A_{RVE}} \quad \text{und} \quad (158)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sum 2\nu_i A_i \alpha_i \pi r_i^2}{A_{RVE}} \quad (159)$$

### 5.4.3 Randbedingung RB2

Ein näherungsweise die Randbedingung RB2 ( $\bar{\epsilon}_{xx} = -\bar{\epsilon}_{yy}$ ,  $\bar{\epsilon}_{zz} = 0$ ) einhaltendes Verschiebungsfeld ergibt sich mit einer weiteren Partikulärlösung der Lamé-Gleichungen im EVZ. Sie ist ein Teil der Michell-Lösung (s. Abschnitt 3.2.9) und folgt aus dem Ansatz für die Airysche Spannungsfunktion [62]

$$\Phi(r, \theta) = \left( Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos(2\theta) \quad (160)$$

Daraus lassen sich die Spannungsfelder

$$\sigma_r = - \left( 2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos(2\theta) \quad (161)$$



$$\sigma_\theta = \left( 2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos(2\theta) \quad (162)$$

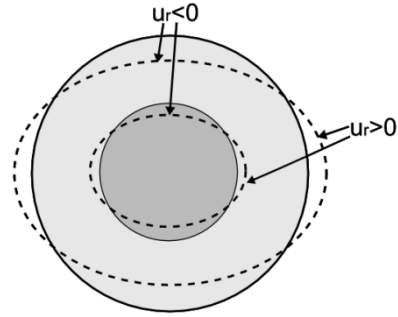
$$\sigma_{r\theta} = \left( 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin(2\theta) \quad (163)$$

berechnen. Die Verschiebungen  $u_r$  und  $u_\theta$  sind

$$u_r = \frac{1}{2G} \left( -2Ar + (k-3)Br^3 + \frac{2C}{r^3} + \frac{(k+1)D}{r} \right) \cos(2\theta) \quad \text{und} \quad (164)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2G} \left( 2Ar + (k+3)Br^3 + \frac{2C}{r^3} - \frac{(k-1)D}{r} \right) \sin(2\theta) \quad (165)$$

Durch die  $\cos(2\theta)$ - bzw.  $\sin(2\theta)$ -Abhängigkeit der Verschiebungen wird der obere und untere Rand in entgegengesetzter Richtung zum rechten und linken Rand verformt: die radiale Verschiebung des Außenrandes der Einheitszelle ist in diesem Ansatz für Winkel  $-45^\circ < \theta < 45^\circ$  und  $135^\circ < \theta < 225^\circ$  positiv, für  $45^\circ < \theta < 135^\circ$  und  $225^\circ < \theta < 315^\circ$  negativ und entspricht dann im Vorzeichen denen der Randbedingung RB2 (s. Abbildung 63).



**Abbildung 63: Elliptische Deformation eines Kreisrings**

Dieser Ansatz wird für jede der 4 Schichten mit jeweils unterschiedlichen Koeffizienten  $A_n, B_n, C_n, D_n$  ( $n = 1 \dots 4$ ) gemacht.

An den Materialgrenzen müssen die Verschiebungskomponenten  $u_r$  und  $u_\theta$  sowie die Normalspannung  $\sigma_r$  und Schubspannung  $\sigma_{r\theta}$  stetig sein. Ferner müssen in der innersten Schicht  $C_1$  und  $D_1$  verschwinden, da sonst für  $r \rightarrow 0$  die Spannungen und Verschiebungen divergieren. Damit sind 14 Gleichungen für 16 Koeffizienten vorhanden und es können somit 14 Koeffizienten in Abhängigkeit zweier weiterer (z.B.  $C_4$  und  $D_4$ ) bestimmt werden. Diese beiden können wieder so bestimmt werden, dass der Fehler der Normalverschiebung am Außenrand des RVE minimiert wird. Mit der Verschiebungskomponente  $u_{x,re}$  am rechten Rand  $u_{x,re}(y) = u_r(\sqrt{r_4^2 + y^2}) \cos(\theta) - u_\theta(\sqrt{r_4^2 + y^2}) \sin(\theta)$  lässt sich die Forderung nach der Minimierung der Abweichung der Randverschiebung formulieren:

$$\begin{aligned} \text{err}(C_4, D_4) &:= \int_h^h (u_{x,re}(y) - \Delta)^2 dy = \min \\ \Rightarrow \frac{d}{dC_4} \text{err}(C_4, D_4) &= \frac{d}{dD_4} \text{err}(C_4, D_4) = 0 \end{aligned} \quad (166)$$

Es existieren nun 16 Gleichungen für  $A_1 \dots D_4$ , die mit einer geeigneten CAS-Software gelöst werden können. Die analytische Lösung dieses Gleichungssystems hier abzudrucken wäre zu umfangreich, um von praktischem Nutzen zu sein.

#### 5.4.4 Dehomogenisierung

Auch die Dehomogenisierung wurde nur für die „rein mechanischen“ Matrixelemente  $M_{rx} = M_{ry}$  durchgeführt.

Nach (133) ist  $M_{rx} = M_{ry} = \frac{\bar{\epsilon}_{r,F}^{(1)}}{2\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)}}$  wobei das Superscript<sup>(1)</sup> wie üblich auf die Randbedingung RB1 hinweist. Auch die in diesem Abschnitt benutzten Konstanten  $A_1, B_1, A_4$  und  $B_4$  seien die Lösungen des auf RB1 basierenden Gleichungssystems. In der Faser ist  $u_{r,F} = A_1 r$  (der Term  $\frac{B_1}{r}$  verschwindet in der Faser). Die radiale Verzerrung ist dann

$$\epsilon_{r,F}(r) = \frac{\partial u_{r,F}}{\partial r} = A_1 = \bar{\epsilon}_{r,F}^{(1)} \quad (167)$$

$$\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} = \frac{\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,l}}{b} = \frac{A_4 h + \pi B_4 / h}{b} \quad (168)$$

Damit betragen

$$M_{rx} = M_{ry} = \frac{A_1 b}{2(A_4 h + \pi B_4 / h)} \quad (169)$$

## 5.5 Zusammenfassung: Homogenisierung und Dehomogenisierung per FE-Simulationen

Um das Aufstellen eines Algorithmus zur Homogenisierung und Dehomogenisierung allgemeiner Faserspulen zu erleichtern, seien hier die wichtigsten Schritte aufgezählt:

1. Effektiver longitudinaler E-Modul der Faserspule:  $E_z = \frac{A_F}{A_{RVE}} E_F$
2. FE-Simulation mit Randbedingungssatz RB1 im EVZ ( $u_{x,r} = u_{y,o} = -u_{x,l} = -u_{y,u} = \Delta$ )
3. Berechnung der arithm. Mittelwerte  $\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$  des RVE, sowie  $\bar{\sigma}_{r,F}^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta,F}^{(1)}$  und  $\bar{\sigma}_{z,F}^{(1)}$  der Faser
4. FE-Simulation mit Randbedingungssatz RB2 im EVZ ( $u_{x,r} = u_{y,u} = -u_{x,l} = -u_{y,o} = \Delta$ )
5. Berechnung des arithm. Mittelwerts  $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$
6. Daraus Bestimmung von  $E_p$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{zp}$  und  $\nu_{pz}$
7. Berechnung von  $\bar{\epsilon}_{r,F}^{(1)}$ , danach Berechnung von  $M_{rx} = M_{ry}$
8. Zweidimensionale rotationssymmetrische („axisymmetric“) FE-Simulation mit Randbedingungssatz RB3 (freie Ausdehnung des RVE,  $\Delta T=1K$ )
9. Berechnung der mittleren Verzerrungen  $\bar{\epsilon}_{xx}^{(3)}$ ,  $\bar{\epsilon}_{yy}^{(3)}$  und  $\bar{\epsilon}_{zz}^{(3)}$
10. Berechnung der therm. Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_p$  und  $\alpha_z$
11. Berechnung von  $\bar{\epsilon}_{r,F}^{(3)}$  und danach von  $M_{rT}$

## 6 Anwendungen

### 6.1 Übersicht

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die in den letzten Kapiteln vorgestellte Theorie und Algorithmen zur Modellierung zweier realer FOG-Typen (im weiteren Verlauf als „FK-Mil“ und „FOG-2M“ bezeichnet) angewandt wurden, an denen Messungen der Drehratenabweichungen bei Vibration und Temperaturänderung durchgeführt wurden.

Da die Faserspule beider FOGs denselben Aufbau hat und aus denselben Materialien besteht, wird zuerst – losgelöst von den Ausführungen der FOGs – in Kap. 6.2 ihre Homogenisierung und in 6.3 ihre Dehomogenisierung beschrieben. Daraufhin werden in Kap. 6.4 und 6.5 Simulations- und Messergebnisse der FOG-Typen FK-Mil bzw. FOG-2M verglichen.

In Kap. 6.6 wird beschrieben, wie Simulationen genutzt werden können, um die Querempfindlichkeit von FOGs zu verringern. Kap. 6.7 schließlich verifiziert die in Kap. 5.4 beschriebene Homogenisierung anhand analytischer Näherungslösungen mit dem Faserspulenmodell von Kap. 6.2. Die Ergebnisse daraus werden mit den aus Simulationen gewonnenen Ergebnissen verglichen, die hier als Referenz dienen.

### 6.2 Homogenisierung

#### 6.2.1 Aufbau der Faserspule

Das Datenblatt der eingesetzten Faser enthält Angaben über die Abmessungen und die E-Module der beiden Coatingschichten. Die Abstände der Windungen zueinander wiederum lassen sich leicht aus den Abmessungen der gesamten Spule ermitteln. Damit ist die Geometrie des RVE der Faserspule bekannt (Abbildung 64).

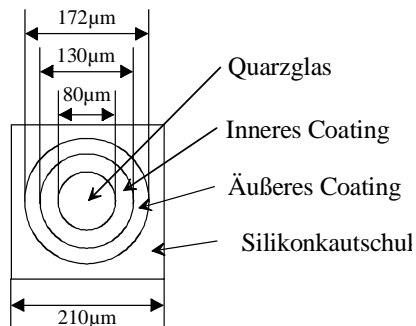


Abbildung 64: Einheitszelle des FKV

Die Querkontraktionszahlen oder Kompressionsmoduli der Coatings, aus denen sich erstere berechnen lassen, sind leider nicht in Datenblättern enthalten. Sie müssen durch sinnvolle Annahmen abgeschätzt werden. Nach [71] besitzen (nicht aufgeschäumte) Elastomere einen Kompressionsmodul von etwa  $K=2\text{GPa}$ , woraus sich mit  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  die Poissonzahl des Elastomers ausrechnen lässt. Für das „harte“ äußere Coating wurde eine Poissonzahl von  $\nu=0.4$  angenommen, ebenfalls in Anlehnung an Kunststoffe mit ähnlichem E-Modul. Das hochreine und gezielt dotierte Quarzglas, aus dem Kern und Mantel der Faser bestehen, unterscheidet sich in mechanischer Hinsicht nicht von gewöhnlichem Quarzglas.

Die Dichte der beiden Coatingschichten wurde auf  $1.1\text{ g/cm}^3$  geschätzt. Hier eine Auflistung der für die Homogenisierung und Dehomogenisierung benötigten Materialparameter:

	<b>Kern, Mantel</b>	<b>Inneres Coating</b>	<b>Äußeres Coating</b>	<b>Matrix</b>
<b>E</b>	72GPa	1.5MPa	1.1GPa	3MPa
$\nu$	0.17	0.499875	0.4	0.49975
$\alpha$	$5.5 \cdot 10^{-7} \text{K}^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ <sup>25</sup>	$10^{-4} \text{K}^{-1}$ <sup>26</sup>	$3 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$
$\rho$	$2.5 \text{g/cm}^3$	$1.1 \text{g/cm}^3$	$1.1 \text{g/cm}^3$	$1.1 \text{g/cm}^3$

**Tabelle 4: Materialdaten der RVE-Bestandteile**

<sup>25</sup> Typischer Wert oberhalb der Glastemperatur

<sup>26</sup> Typischer Wert unterhalb der Glastemperatur

## 6.2.2 FE-Modell

Das Netz des FE-Modells des RVE besteht aus linearen Dreieckselementen mit einer mittleren Kantenlänge von ca.  $3.5\mu\text{m}$  (s. re.). Weitere Einstellungen für die beiden nichtthermischen Simulationen (RB1 und RB2) sind:

- Mittelpunkt der Einheitszelle gleich Ursprung  $O(0|0)$
- Koordinatensystem ist zweidimensional kartesisch
- Ebener Verzerrungszustand

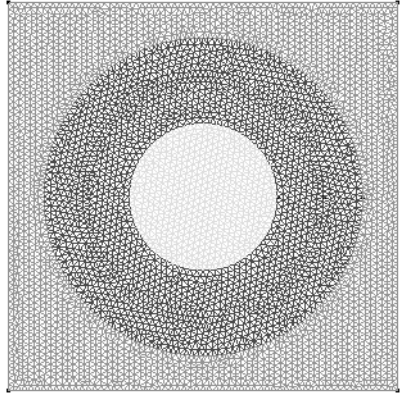


Abbildung 65: FE-Netz des RVE

Randbedingungssatz RB1:

- Kante rechts:  $u_x = 1\mu\text{m}$
- Kante links:  $u_x = -1\mu\text{m}$
- Kante oben:  $u_y = 1\mu\text{m}$
- Kante unten:  $u_y = -1\mu\text{m}$

Randbedingungssatz RB2:

- Kante rechts:  $u_x = 1\mu\text{m}$
- Kante links:  $u_x = -1\mu\text{m}$
- Kante oben:  $u_y = -1\mu\text{m}$
- Kante unten:  $u_y = 1\mu\text{m}$

Aus diesen Vorgaben können bereits die (makroskopischen) RVE-Verzerrungen im belasteten Zustand berechnet werden:

$$\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} = \bar{\epsilon}_{yy}^{(1)} = \bar{\epsilon}_{xx}^{(2)} = -\bar{\epsilon}_{yy}^{(2)} = \frac{2\mu\text{m}}{210\mu\text{m}} = 9.5 \cdot 10^{-3} \quad (170)$$

Zur Simulation der thermoelastischen Ausdehnung mit Randbedingung RB3 wurden folgende Einstellungen vorgenommen:

- Abstand des RVE-Mittelpunktes vom Koordinatenursprung im unbelasteten Zustand entspricht dem Radius des FOG-Typs FK-Mil (s. Kap. 6.4), also  $\vec{r}_M = (30\text{ mm}, 0)^T$
- Koordinatensystem: zweidimensional rotationssymmetrisch („axisymmetric“)

Randbedingung RB3:

- Die untere Kante wurde fixiert, d.h.  $u_y=0$ . Das widerspricht der Vorgabe freier Ausdehnung, doch die Abweichungen dazu sind sehr gering.

### 6.2.3 Simulationsergebnisse

Aus den Simulationsergebnissen wurden durch arithmetische Mittelwertbildung über Knotenspannungen bzw. -verschiebungen folgende für die Homogenisierung wesentlichen Werte berechnet.

Aus RB1:

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(1)} = \bar{\sigma}_{yy}^{(1)} = 42.71 \text{MPa} \quad (171)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{(1)} = 37.76 \text{MPa} \quad (172)$$

Aus RB2:

$$\bar{\sigma}_{xx}^{(2)} = 237.1 \text{kPa} \quad (173)$$

Aus RB3:

$$\bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,l}}{b} = \frac{1.37 \cdot 10^{-7} \text{m} - 7.41 \cdot 10^{-8} \text{m}}{2.1 \cdot 10^{-4} \text{m}} = 3.00 \cdot 10^{-4} \quad (174)$$

$$\bar{\epsilon}_{yy} = \frac{\bar{u}_{y,o} - \bar{u}_{y,l}}{h} = \frac{6.59 \cdot 10^{-8} \text{m} - 2.99 \cdot 10^{-9} \text{m}}{2.1 \cdot 10^{-4} \text{m}} = 2.99 \cdot 10^{-4} \quad (175)$$

$$\bar{\epsilon}_{zz} = \left\langle \frac{u_r}{r} \right\rangle = 3.52 \cdot 10^{-6} \quad (176)$$

### 6.2.4 Materialparameter

Nach (118) lässt sich  $E_z$  aus der Geometrie des RVE und dem E-Modul der Faser bestimmen ( $E_z \approx \frac{A_F}{A_{ges}} E_F$ ). Mit einem E-Modul von Quarzglas von  $E_{Gl} = 72 \text{GPa}$  erhält man für den Faserverbund  $E_z \approx 8.2 \text{GPa}$ .

Auch die Dichte kann ohne Simulationen berechnet werden:  $\rho_{RVE} = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i}{A_{RVE}} = 1.26 \text{g/cm}^3$ .

Die noch fehlenden Materialdaten lassen sich anhand der in Kap. 5.2 hergeleiteten Zusammenhänge errechnen. Hier eine Liste der so berechneten Ingenieurskonstanten:

$E_z$	$E_p$	$G_{pp}$	$G_{zp}$	$\nu_{zp}$
8.2GPa	49.5MPa	24.9MPa	24.9MPa	0.44
$\nu_{pz}$	$\nu_p$	$\alpha_z$	$\alpha_p$	$\rho$
$2.66 \cdot 10^{-3}$	0.987	$3.52 \cdot 10^{-6}$	$3.07 \cdot 10^{-4}$	1.26g/cm <sup>3</sup>

Tabelle 5: Materialparameter der Faserspule in Form von „Ingenieurs-konstanten“

### 6.3 Dehomogenisierung

Der arithmetische Mittelwert der Radialverzerrung in der Faser aus RB1 beträgt  $\bar{\epsilon}_{r,F}^{(1)} = 4.73 \cdot 10^{-4}$ , dieselbe aus RB3  $\bar{\epsilon}_{r,F}^{(3)} = -5.92 \cdot 10^{-8}$ . Damit sind

$$M_{rx} = M_{ry} = \frac{\bar{\epsilon}_{r,F}^{(1)}}{2\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)}} = 2.48 \cdot 10^{-2} \text{ sowie} \quad (177)$$

sowie

$$M_{rT} = \frac{\bar{\epsilon}^{(3)}_{r,F} - M_{rx}\bar{\epsilon}^{(3)}_{xx} - M_{ry}\bar{\epsilon}^{(3)}_{yy} + 0.17\bar{\epsilon}^{(3)}_{zz}}{\Delta T} = -1.44 \cdot 10^{-5} K^{-1} \quad (178)$$

Der Zusammenhang zwischen makroskopischer und mikroskopischer (d.h. Faser-) deformation lautet also für beide FOG-Typen:

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{r,F} \\ \bar{\epsilon}_{z,F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.48 \cdot 10^{-2} & 2.48 \cdot 10^{-2} & -0.17 & -1.44 \cdot 10^{-5} K^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\epsilon}_{zz} \\ \Delta T \end{pmatrix} \quad (179)$$

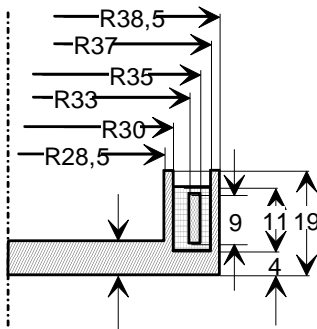
### 6.4 FK-Mil

#### 6.4.1 Aufbau

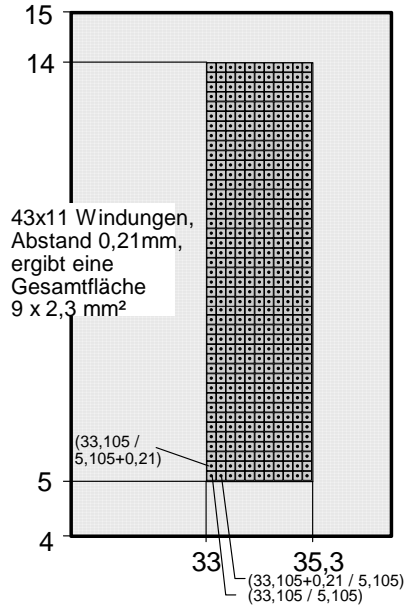
Der Kreisel FK-Mil besteht aus einer kreisförmigen, zylindrisch gewickelten (im Sinne von 2.5.2) Faserspule, die in ein zylindrisches Aluminiumgehäuse vergossen ist (siehe Abbildung rechts). Hier wurden natürlich nur die „passiven“ Komponenten dargestellt, die für die Fehlerberechnung von Bedeutung sind. Aktive optische Komponenten wie auch Strahlteiler und Fasern, die zu der eingegossenen Faserspule führen, sind hier nicht zu sehen.

Hier eine Illustrationen des FOG, die die Abmessungen seiner (wesentlichen) Komponenten enthält, sowie eine Zeichnung zum Aufbau der Faserspule:





**Abbildung 66: Schnittbild des Gehäuses inkl. Faserspule.** Abmessungen sind in mm angegeben. Die Faserspule ist diagonal schraffiert dargestellt, die Vergussmasse horizontal/vertikal schraffiert



**Abbildung 67: Windungsanordnung der Faserspule**

Die Spule besteht aus 43x11 Windungen, die nach einem zylindrischen Windungsschema angeordnet sind (s. Abbildung 67). Die erste Windung ist im Schnittbild links unten, die letzte rechts oben.

Das Vergussmaterial (ein Silikonkautschuk) hat bei Zimmertemperatur die Materialkennwerte  $E = 3\text{MPa}$ ,  $K = 2\text{GPa}$ ,  $\rho = 1.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und  $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ . Bis auf den Kompressionsmodul stammen alle Werte aus Datenblättern des FOG-Herstellers SEL. Zur Wahl des K-Moduls siehe Abschnitt 3.3.6. Temperaturabhängigkeiten wurden nicht berücksichtigt.

Das Gehäuse besteht aus Aluminium mit  $E=70\text{GPa}$ ,  $\nu=0.355$ ,  $\rho=2.7\text{g/cm}^3$  und  $\alpha=2.4 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$ .

## 6.4.2 Simulationsmodelle

Geometrische Grundlage des FE-Modells war Abbildung 66 inklusive Gehäuse. Die Geometrie wurde mit zweidimensionalen Viereckselementen erster Ordnung der Kantenlänge  $\approx 0.3\text{mm}$  vernetzt. Die Randbedingungen bei Vibration waren:

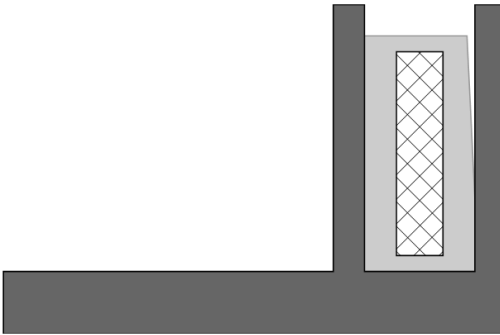
- Boden fest, d.h.  $u_x = u_y = 0$

- Quasistatische Beschleunigung, simuliert durch eine Volumenkraft von  $\vec{f} = \hat{e}_y \cdot \rho \cdot \hat{a}$  mit  $\hat{a} = 1g$

Auch bei der thermischen Simulation war der Boden fest. Die thermische Last bestand aus einer Temperaturänderung von  $\Delta T = 1K$  relativ zur Referenztemperatur der Materialien.

### 6.4.3 Ablösen der Spule und Vergusschicht vom Gehäuse

Besteht der Verguss aus thermisch härtendem Kautschuk, so kontrahiert dieser beim Abkühlen auf Zimmertemperatur. Dies kann dazu führen, dass trotz Reinigung und Verwendung eines Primers der Verguss sich vom Metallgehäuse ablöst (s. Abbildung 68). Dieser Effekt ist seit langem eine der möglichen Ursachen des „Tennischlägereffektes“ (s. Abschnitt 6.4.4) und wurde von unserer Arbeitsgruppe mit Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vibrierender FOG-Modelle beobachtet.



**Abbildung 68: Darstellung des Ablöses der Faserspule vom Gehäuse**

Um den Einfluss dieses Vorgangs auf die Querempfindlichkeiten zu Temperaturänderungen und Vibration zu ermitteln, wurden Simulationen mit unterschiedlichen Ablösegraden gemacht. Die Unterschiede waren drastisch: im Referenz-FOG stieg die simulierte DRA um das zeh- bis zwanzigfache, wenn sich die äußere oder beide Seitenwände lösten. Damit ließen sich auch die Messungen der Vibrationsquerempfindlichkeit des Referenz-FOG bestätigen. Leider lag kein FOG dieses Typs mit sicher haftenden Wänden vor.

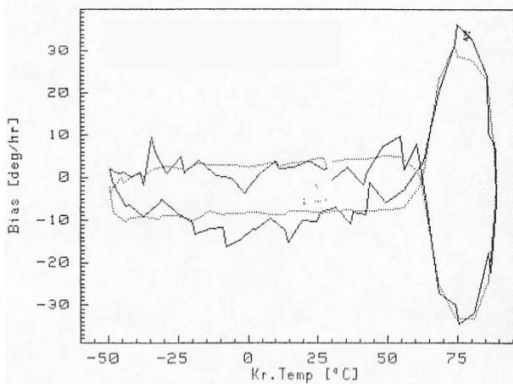
Im zweidimensionalen Modell kann nur eine Ablösung entlang des gesamten Umfangs simuliert werden. Die Simulationen wurden mit (einer) vollständig abgelösten Außenwand bzw. Seitenwänden durchgeführt. Dies lässt sich besonders einfach durch das Weglassen der jeweiligen Gehäusewand simulieren. Eine andere Möglichkeit wäre, als Randbedingung die horizontale Bewegung zu sperren und die vertikale Bewegung reibungs- und spannungsfrei zulassen. Dies ist jedoch

unphysikalisch, da der Rand der kontrahierten Vergusschicht sich auch horizontal vom Gehäuse ungestört bewegen kann.

#### 6.4.4 Drehratenabweichung bei thermischen Transienten

Bezüglich der Temperaturempfindlichkeit des FOG-Typs FK-Mil lagen mehrere Messungen von der Firma SEL vor. Die Prüflinge wurden dabei in einer Klimakammer mit einer konstanten Temperaturänderungsrate von 1K/min auf Temperaturen von -50°C bis +85°C erwärmt bzw. abgekühlt.

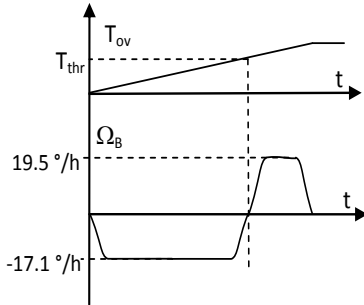
Die Messreihe zeigte – vermutlich aufgrund unterschiedlichen Ablösungsgrades der Spule und Unregelmäßigkeiten im Spulenwickel- und Vergussprozess – starke Schwankungen der DRA selbst gleich aufgebauter FOGs zwischen 10...30°/h. Zudem ist ein sprunghafter Wechsel in der Nähe der Aushärtetemperatur von etwa 60°C zu sehen (s. Abbildung 69). Es tritt sogar ein Vorzeichenwechsel auf.



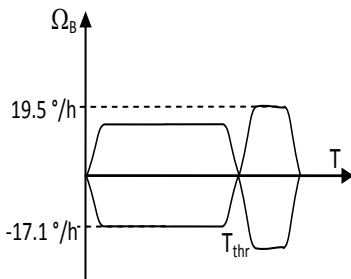
**Abbildung 69<sup>27</sup>: Durch Erwärmung verursachter Drehratenbias eines FK-Mil bei konstanter Erwärmung bzw. Abkühlung um 1K/min**

Zur Entstehung der Drehratenbiaskurve: Ein Prüfling wurde in einem temperaturgeregelten Klimaschrank wie oben beschrieben erwärmt und daraufhin mit derselben Temperaturänderungsrate abgekühlt. Während des gesamten Vorgangs werden Temperatur und Bias in einem Diagramm aufgetragen. Bei Abkühlung ändert dabei die DRA ihr Vorzeichen, weshalb das Temperatur-Bias-Diagramm annähernd x-Achsen-symmetrisch ist. Abbildung 70f. zeigen anhand berechneter Werte, wie die Biaskurve zustande kommt.

<sup>27</sup> Quelle: unveröffentlichte Messung der Fa. Sagem



**Abbildung 70: Simulierter Drehratenbias bei Temperaturänderung.** Die obere Kurve zeigt den Temperaturverlauf in der Klimakammer, unten ist der entsprechende berechnete Verlauf des Drehratenbias abgebildet. Die Übergänge wurden dabei abgeflacht. Zu den DRAen unter und über der „Schwelltemperatur“ s. Tabelle 6



**Abbildung 71: Biaskurve basierend auf den Diagrammen in Abbildung 70.** Dieses ist die übliche Darstellung der Temperatur-Querempfindlichkeit von FOGs.

Messungen verschiedener FOG-Typen zeigten, dass die Aushärtetemperatur des Vergussmaterials (Silikonkautschuk) jeweils in der Nähe der Temperaturschwelle liegt, an der sich der Bias fast sprunghaft ändert<sup>28</sup>. Offenbar wird diese sprunghafte Änderung also vom Wechsel zwischen Kontraktion und Dilatation im Vergleich zum spannungsfreien Zustand bei  $T_{thr}$  begleitet. Sehr wahrscheinlich löst sich unterhalb dieser Temperatur der Verguss teilweise vom Gehäuse und kann sich somit in diesen Bereichen „frei kontrahieren bzw. ausdehnen“.

Wie bei der Vibration wurden drei Simulationen durchgeführt, mit festen Wänden, mit loser äußerer Seitenwand und mit überall losen Seitenwänden. Hier die Simulationsergebnisse (man beachte dass auch hier ein Vorzeichenwechsel auftritt):

<sup>28</sup> Es sei hier erwähnt, dass nicht alle Fasergyroskope diesen Effekt aufzeigen. Insbesondere wird durch besonders weiche Befestigung der „Tennisschlägereffekt“ vermieden, jedoch auf Kosten höherer Vibrationsquerempfindlichkeit

Gemessen (ca.)	Seitenw. haften	Nur Innenw. h.	Seitenw. haften n.
+7°/h bzw. -30°/h	19.5°/h	6.3°/h	-17.1°/h

**Tabelle 6: Gemessene und berechnete Drehratenabweichung bei Erwärmung um 1K/min**

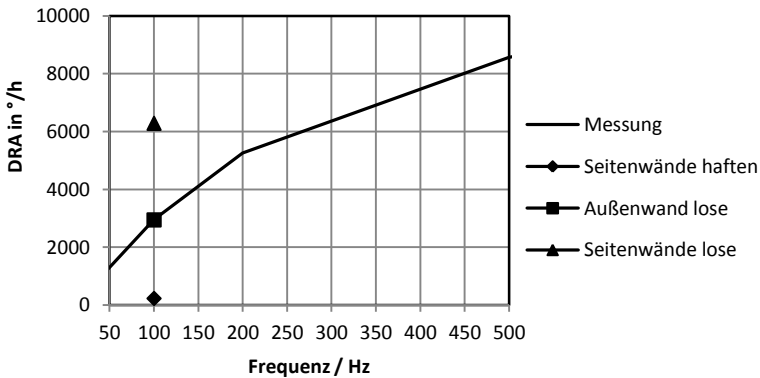
### 6.4.5 Drehratenabweichung bei Vibration

Ein Prüfling des Typs FK-Mil wurde auf einem elektrodynamischen Shaker zu sinusförmigen OOP- (Out-of-Plane-)Vibrationen angeregt mit konstanter Beschleunigungsamplitude  $\hat{a} = 9.81m/s^2$  und Frequenzen zwischen 50Hz und 1000Hz. Auch hier ist eine quasistatische Näherung gültig, da die niedrigste Resonanzfrequenz laut Simulationen bei ca. 5000Hz liegt, also weit oberhalb von 1000Hz.

Es wurden drei FE-Simulationen jeweils bei 100Hz durchgeführt: eine mit fest haftendem Verguss, die zweite mit einer gelösten äußeren Seitenwand und die dritte ganz ohne haftende Seitenwände. Die gemessenen bzw. berechneten DRAen bei dieser Frequenz sind:

Gemessen	Seitenw. haften	Nur Innenw. h.	Seitenw. haften n.
2950 °/h	235 °/h	2950 °/h	6290 °/h

**Tabelle 7: Gemessener und berechnete DRAen bei  $\hat{a}=1g, f=100Hz$**



**Abbildung 72: Vergleich berechneter mit der gemessenen DRA bei OOP-Vibration**

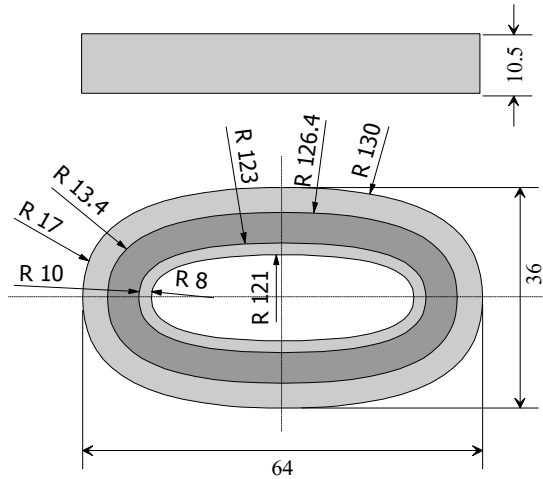
Das Abflachen der DRA-Kurve bei höheren Frequenzen liegt vermutlich am viskoelastischen Erhärten des Elastomers bei steigenden Frequenzen.

## 6.5 FOG-2M

### 6.5.1 Aufbau

Der FOG-2M ist ein zweiachsiger Faserkreisell mit zwei identischen, elliptischen Faserspulen. Beide sind vollständig in den Spulenträger eingegossen. Genauer betrachtet, lassen sich die Spulen aus vier Zylindersektoren zusammengesetzt denken (siehe Abbildung rechts).

Die Abstände der seitlichen Spulenwände zur jeweiligen Gehäuse-Innenwand sind dabei über den Umfang



**Abbildung 73: Schnittbild der Faserspule und der Vergusschichten des FOG-2M**

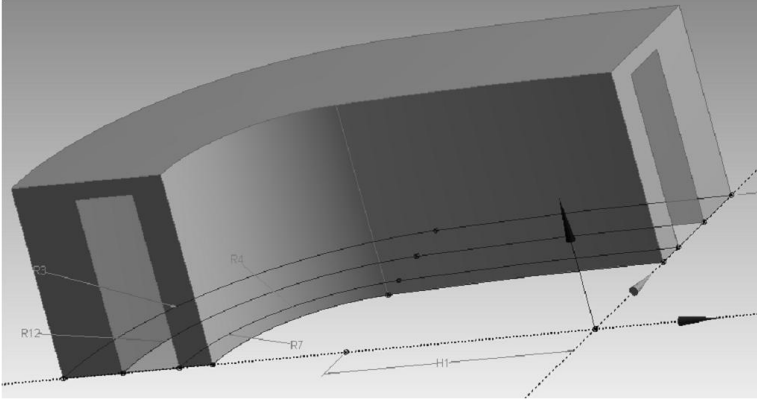
konstant. Die Spule selbst ist (möglichst) ohne Luft einschüsse verklebt. Vor dem Vergießen der Spule wird diese auf den Boden gelegt, d.h. zwischen Gehäuseboden und Spulenunterseite ist kein Spalt. Oberhalb der Spule liegt eine Vergusschicht von 1mm. Die Spule weist eine Dicke von 3.4mm und eine Höhe von 10.5mm auf.

Als Klebstoff und Verguss wurde ein Silikonkautschuk verwendet mit  $E=1.5\text{MPa}$ ,  $K=1\text{GPa}$  und  $\alpha=3\cdot 10^{-3}\text{K}^{-1}$ .

### 6.5.2 Simulationsmodell

Es wurde nur ein Viertel der Spule modelliert. Die verbleibenden Teile wurden durch Symmetrierandbedingungen berücksichtigt. Genauer: an den Schnittebenen wurde die Azimutalverschiebung  $u_\theta=0$  gesetzt.

Das Aluminiumgehäuse wurde „perfekt starr“ modelliert, d.h. am Boden, der Innen- und der Außenseite der Spule sind die Verschiebungskomponenten  $u_x=u_y=u_z=0$ . Hier die Geometrie der Spule und Vergusschicht:



**Abbildung 74: Geometrie des FE-Modells von Spule und Vergusschicht des FOG-2M. Die hellgraue transparente Schicht im Inneren stellt die Faserspule dar, die umgeben ist von hier dunkelgrau gezeichneten Verguss**

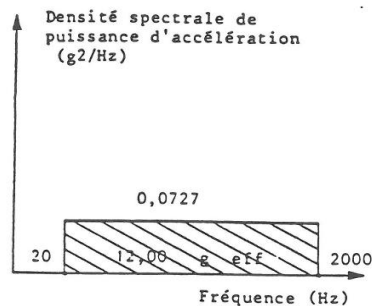
Das FE-Modell verwendet hexagonale Elemente mit einer Kantenlänge von  $2.5\mu\text{m}$ . Die Simulation war linear und statisch, da die Beschleunigung quasistatisch mit  $a = 1g = 9.81\text{m/s}^2$  modelliert wurde.

### 6.5.3 Drehratenabweichung bei Vibration

Zur Verifikation der bisherigen Rechnungen wurden mehrere FOG-2M, auf einem elektrodynamischen Shaker zu Schwingungen angeregt. Das dabei gemessene Drehratensignal ist dabei gleichzeitig die Querempfindlichkeit auf Vibration, da keine Rotation stattfindet.

Das Ergebnis der Simulation ist eine DRA bei  $f=1000\text{Hz}$  und  $\hat{a} = 1g = 9.81\text{m/s}^2$ . Dies sind hier  $\Omega_E(1000\text{Hz}, 1g) = -248.5^\circ/h$ .

Die Messungen wurden jedoch mit rauschförmiger Anregung gemacht. Ferner liegt nicht der Frequenzgang des Drehratensignals, sondern nur der Effektivwert vor. Dementsprechend muss aus der DRA des Simulationsmodells der Effektivwert berechnet werden, der sich bei Vibration mit dem vorgegebenen Beschleunigungsprofil (genauer: spektrale Beschleunigungsdichte) ergäbe. Die Messungen wurden



**Abbildung 75: Beschleunigungsprofil, mit dem die Prüflinge angeregt wurden**

mit einem Beschleunigungsprofil nach Abbildung 75 durchgeführt. Dies hat im Frequenzbereich 20Hz...2kHz eine konstante Beschleunigungsdichte<sup>29</sup> von

$$S_a(f) =: S_a = 0.0727 g^2 / \text{Hz} \quad (180)$$

Es wird nun der Effektivwert der DRA des Simulationsmodells berechnet. Bei sinusförmiger Anregung ist die DRA proportional zur Frequenz und zur Beschleunigungsamplitude<sup>30</sup>:

$$\widehat{\Omega}_E(f, \hat{a}) = \widehat{\Omega}_E(f_0, \hat{a}_0) \cdot \frac{f}{f_0} \cdot \frac{\hat{a}}{\hat{a}_0} =: \Omega_{E0} \cdot \frac{f}{f_0} \cdot \frac{\hat{a}}{\hat{a}_0} \quad (181)$$

Fasst man die Drehrate als Ausgangs- und die Vibrationsbeschleunigung als Eingangssignal auf, kann die Querempfindlichkeit des FOG als lineares frequenzabhängiges System betrachtet werden:

$$G_E(f) = \Omega_{E0} \cdot \frac{f}{f_0 \hat{a}_0} \quad (182)$$

bezeichnet wird. Generell gilt bei rauschförmiger Anregung eines Systems G mit einem Signal x für das Ausgangssignal y [73]:

$$S_y(f) = |G(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad (183)$$

Für das Drehratensignal bei Anregung nach Abbildung 75 ist dann

$$S_\Omega(f) = |G_E(f)|^2 \cdot S_a(f) = \left( \Omega_{E0} \cdot \frac{f}{f_0 \hat{a}_0} \right)^2 \cdot S_a \quad (184)$$

Der Effektivwert der DRA wird durch Integration über den relevanten Frequenzbereich berechnet:

$$\Omega_{E,rms} = \sqrt{\int_{f_{min}}^{f_{max}} S_\Omega(f) df} \quad (185)$$

Klammert man sämtliche Konstanten aus, erhält man

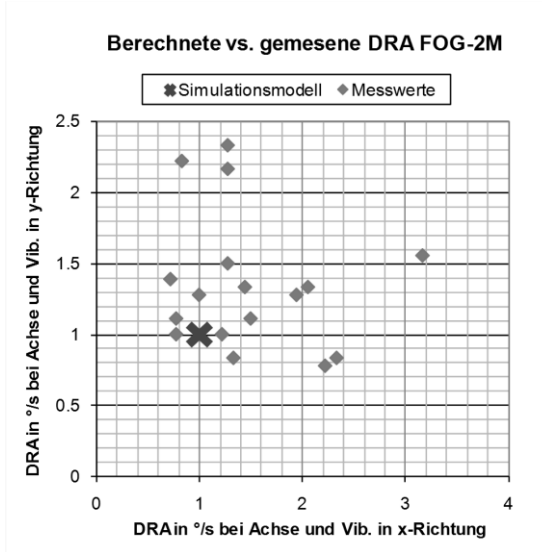
$$\Omega_{E,rms} = \frac{\Omega_{E0} \sqrt{S_a}}{f_0 \hat{a}_0} \sqrt{\int_{f_{min}}^{f_{max}} f^2 df} = \frac{\Omega_{E0} \sqrt{S_a}}{\sqrt{3} f_0 \hat{a}_0} \sqrt{f_{max}^3 - f_{min}^3} \quad (186)$$

<sup>29</sup> Die Beschleunigungsdichte ist ein Begriff der Anwendung der statistischen Signaltheorie auf die Schwingungstechnik. Sie gibt die Frequenzabhängigkeit der Beschleunigung an. Diesen Begriff und die Theorie hinter den Rechnungen auf dieser und der nächsten Seite einzuführen, würde hier zu weit führen und vom Hauptthema ablenken. In [73] ist z.B. eine solche Einführung zu finden.

<sup>30</sup> Die Phasenverzögerung ist bei Frequenzen genügend weit unter der ersten Resonanzfrequenz vernachlässigbar gering. Letztere liegt jedoch in der Größenordnung von 5kHz. Daher ist der Frequenzgang der DRA als reell angenommen.



Mit den bereits angegebenen Größen beträgt  $E_{rms} = 1.0^\circ/s$ . Dies liegt in guter Übereinstimmung mit der Untergrenze von Messergebnissen verschiedener FOG-2M, wie Abbildung 76 zeigt. Die große Streuung der Messergebnisse lässt sich durch die bereits beschriebene Wandablösung (s. Abschnitt 6.4.3), durch nicht perfekt gewickelte Spulen und andere Abweichungen von dem Idealzustand erklären, der von der Simulation abgebildet wird.



**Abbildung 76: Gemessene Drehratenabweichungen verschiedener Kreisel des Typs „FOG-2M“ (Rauten) und im Vergleich dazu die berechnete Abweichung (Kreuz). Jeder Punkt entspricht einem FOG. Die FOGs wurden in zwei Richtungen vibriert und es wurde jeweils das Drehratensignal der Spule gemessen, deren Achse parallel zur Vibrationsrichtung ist**

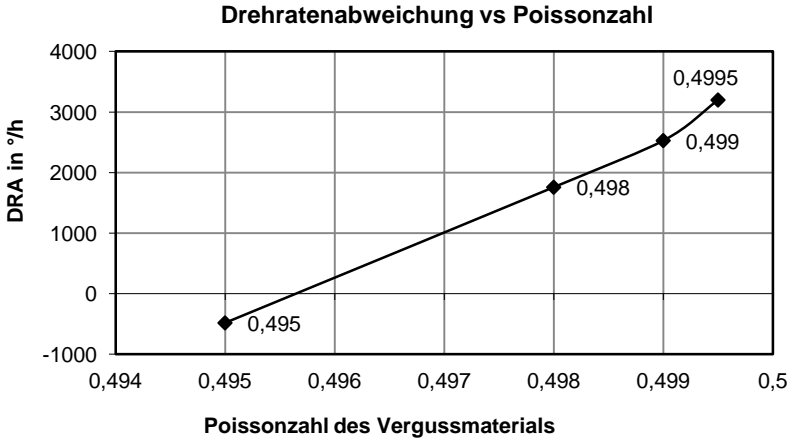
## 6.6 Optimierungsmöglichkeiten

### 6.6.1 Optimierung mit Simulationsreihen

Zweck der Modellierung von Faserkreiseln ist die Möglichkeit, die Auswirkung von Material- oder Geometrieänderungen zu testen. Man will damit ohne aufwändige Experimente oder Änderungen an bestehenden Prozessen „optimale“ Faserspulen entwerfen und dazu noch deren Parametersensitivität ermitteln, also vorhersagen, wie genau der ermittelte Wert eingehalten werden muss.

Ein Materialkennwert, der erwartungsgemäß große Auswirkung auf die internen Spannungen der Faserspule und damit auch auf die DRA bei Erwärmung und Vibration hat, ist die Poissonzahl des Vergussmaterials. Daher wurden Simulationen des Referenz-FOGs mit unterschiedlichen Poissonzahlen des Vergussmaterials durchgeführt. Abbildung 77 zeigt die Abhängigkeit der DRA bei Vibration ( $\hat{a}=1g$ ,

$f=1000\text{Hz}$ ) bei Poissonzahlen zwischen 0.495 und 0.4995. Man sieht eine starke Abhängigkeit und sogar einen Nulldurchgang bei  $\nu \approx 0.4955$ . Es ist jedoch auch zu bemerken, dass eine noch niedrigere Poissonzahl die DRA wieder steigen lässt. Die Aussage „je kompressibler, desto besser“ ist also nicht gültig. Im nächsten Kapitel wird genauer gezeigt, welche Anforderungen für eine möglichst niedrige DRA gelten.



**Abbildung 77: Abhängigkeit der DRA von der Poissonzahl des Vergussmaterials bei Vibration mit  $\hat{a}=1$  g und  $f=1000$  Hz**

Eine Minimierung der Vibrationssensitivität darf nicht auf Kosten der thermischen Sensitivität erfolgen und umgekehrt. Im Allgemeinen ist eine Optimierung beider Variablen nötig. Hier lag ein besonders glücklicher Fall vor: die Poissonzahl wirkte sich nur gering auf die thermisch bedingten Drehratenabweichungen aus ( $20^\circ/\text{h}$  bei  $\nu=0.495$  und  $28^\circ/\text{h}$  bei  $\nu=0.4995$ ).

Elastomere mit einer solchen Poissonzahl und einem E-Modul um 5MPa lassen sich durch Aufschäumen oder durch Vermischung mit Microballs<sup>31</sup>, Korkpartikeln oder anderen luftgefüllten Bestandteilen realisieren.

Andere, noch einfacher zu ändernde Parameter sind z.B. Abstände zwischen Spulen-Innen- bzw. Außenwand und Gehäuse, Abmessungen der Spule oder des Spulengrabens, etc.

<sup>31</sup> Das sind luftgefüllte Miniaturkugeln mit einer Kunststoffwand

### **6.6.2 Allgemeingültige Regeln zur Senkung der mechanischen Querempfindlichkeit**

Es gibt nur wenige Pauschalregeln zum Entwurf mechanisch möglichst insensitive Faserspulen. In der Industrie verbreitet ist die möglichst weiche Fixierung der Faserspule<sup>32</sup>, um die Querempfindlichkeit zur Temperatur zu verringern. Damit steigt jedoch die zu Vibrationen.

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass man durch gezielte Änderung von Materialkennwerten und Abmessungen die Querempfindlichkeit zumindest zu einer Belastungsform (Vibration oder Temperatur) theoretisch zu Null bringen kann, doch müssen die berechneten Werte genau eingehalten werden. Ein Unterschreiten wirkt sich genauso negativ aus wie ein Überschreiten dieser Werte. Das Optimum ist stark typabhängig.

### **6.6.3 Symmetriebedingungen in der Spule**

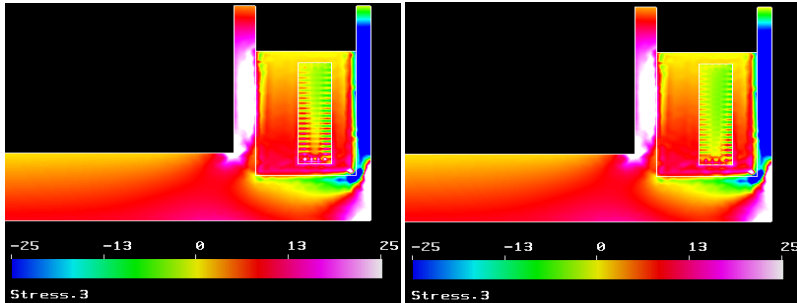
In Kap. 4.2 wurde gezeigt, dass nur Temperatur- und Spannungsgradienten in der Spule DRAen hervorrufen. Könnte man also durch konstruktive Maßnahmen die Temperatur- und Spannungsfelder im Spulenbereich „einebnen“, so würden demnach keine DRAen entstehen. Dies ist jedoch praktisch kaum zu leisten. Es wäre wünschenswert, wenn es genügen würde, etwa den horizontalen und/oder vertikalen Trend der genannten Felder zu verflachen.

Simulationen belegen, dass dies auch tatsächlich genügt. Dies sei am Beispiel einer Zylinderspule gezeigt, deren DRA durch gezielte Materialwahl um etwa 85% verringert wurde. Abbildung 78 zeigt, dass in der Spule mit der geringeren DRA auch die horizontalen Unterschiede geringer sind.

Es ist die z-Komponente des Spannungstensors zweier FK-Mil-Kreisel dargestellt, die sich in der Poissonzahl des Vergusses und Klebstoffs unterscheiden. Im rechts abgebildeten Schnittbild (gerine DRA) ist  $\sigma_z$  auf beiden Seiten der Spule ähnlicher als im links abgebildeten (hohe DRA), die horizontale Symmetrie ist weniger stark verletzt. Zudem verschob sich der „Schwerpunkt“ der Spannungen von links nach rechts, was den Vorzeichenwechsel der DRA erklärt.

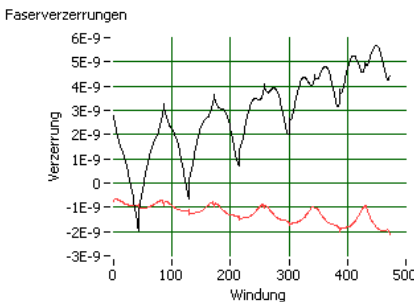
---

<sup>32</sup> Oft werden Faserspulen nicht vollständig in das Gehäuse eingegossen, sondern nur an wenigen Punkten oder nur am Boden angeklebt. Auch die Windungen der Spule werden oft nur punktuell verklebt



**Abbildung 78a (links) und b (rechts):** Feld der Spannung  $\sigma_z$  für  $\nu=0.4995$  (links,  $DRA \approx 3300^\circ/h$ ) und  $\nu=0.495$  (rechts,  $DRA \approx 500^\circ/h$ )

Eine sehr übersichtliche Möglichkeit, die Symmetrieverhältnisse in einer Faserspule zu begutachten, ist den Verlauf der Längs- und Radialdehnung der Faser entlang ihrer Windungszahl darzustellen (d.h. die Verzerrungen der ersten Windung sind links, die der letzten rechts):



ezf

erf

**Abbildung 79: Verlauf der Längs- ( $\epsilon_{zf}$ ) und Radialdehnung ( $\epsilon_{rf}$ ) der Faser.** Aus ihnen wird die DRA berechnet

Die Trends der oben abgebildeten Kurven spiegeln die (fehlende) horizontale Symmetrie wieder, die kurzperiodigen Schwankungen vertikale Änderungen der Faserverzerrungen. Simulationen mit Verzerrungskurven wie den oben abgebildeten, von denen jedoch der Trend (d.h. die Regressionsgerade) abgezogen wurde zeigen, dass dieser nahezu vollständig für die DRA verantwortlich ist<sup>33</sup>. Somit genügt es also (bei Zylinderspulen), beidseitig der Spule ähnliche Spannungssituationen herzustellen. Für die praktisch wichtigen Quadrupolspulen gilt das soeben Gesagte mit dem Zusatz, dass dieselbe Symmetrie auch in vertikaler Richtung existieren sollte.

<sup>33</sup> Dies gilt hauptsächlich für Zylinderspulen. In Quadrupolspulen ist konstruktionsbedingt nur ein verschwindender Trend vorhanden. Hier haben auch vertikale Verzerrungsgradienten einen großen Einfluss auf die DRA

Horizontale Symmetrie lässt sich praktisch am leichtesten mit gezielten Änderungen der Abstände der Spule von der Innen- und Außenwand erreichen. Aufgrund der Zylinderform des FOG sind die beiden Zwischenschichten dann nicht exakt gleich. Die ideale Geometrie kann durch Simulationen ermittelt werden.

Vertikale Symmetrie bei thermischen Spannungen lässt sich dadurch erreichen, dass Boden und Deckel denselben Abstand von der Spule haben. Dies gilt jedoch nicht für die vibratorische Belastung: hier wäre die Amplitude der Spannungen oben und unten im Betrag zwar ähnlich, aber vorzeicheninvers. Der Deckel könnte also die Querempfindlichkeit des FOG auf Vibration erhöhen, die auf Temperaturraten senken.

Eine Möglichkeit, dies zu vermeiden, wäre eine weiche Bettung unterhalb der Spule, z.B. mit einem Schaumstoff. Ferner könnte eine vertikale Asymmetrie durch eine horizontale ausgeglichen werden, die einen genau gegensätzlichen Effekt auf die DRA hat.

#### **6.6.4 Verguss und Klebstoff**

Die oben gezeigte Simulationsreihe hat gezeigt, dass die Poissonzahl und damit der Kompressionsmodul des Vergussmaterials (idealerweise auch des Klebstoffes, doch ist dies schwieriger zu erfüllen) ein wichtiger Parameter ist. Dem Verfasser sind jedoch keine „reinen“ (d.h. unverschäumten und nicht mit Zusatzstoffen versehenen) Elastomere bekannt, deren Kompressionsmodul wesentlich unterhalb von 1GPa liegt ([71] gibt für Elastomere stets  $K=2\text{GPa}$  an; eigene Messungen an verschiedenen Vergussmaterialien ergaben  $K=700\text{MPa}$  bis  $K=1.2\text{GPa}$ , möglicherweise aufgrund von Lufteinschlüssen). Beim einem E-Modul von  $3\text{MPa}$  entspräche  $K=2\text{GPa}$  einer Poissonzahl von 0.49975. Das für den FK-Mil theoretische Optimum von ca.  $\nu=0.4955$  entspräche beim selben E-Modul einem Kompressionsmodul von  $K=111\text{MPa}$ . Dies ist nach Kenntnis des Verfassers nur durch Verschäumen oder Beimengung geeigneter luftgefüllter oder poröser Partikel erreichbar.

## 6.7 Verifikation der analytischen Näherungslösung

### 6.7.1 Analytisch und simulationsbasiert bestimmte Materialparameter

Mit der in Kap. 5.4 beschriebenen analytischen Näherung wurden die mechanischen Ersatzparameter  $E_p$ ,  $\nu_p$  und  $\nu_{zp}$  der Faserspule berechnet<sup>34</sup>. In Tabelle 8 werden diese mit den Ergebnissen aus 0 verglichen:

Parameter	Analytisch	FEM	rel. Abw.
$E_p$	17.6 MPa	17.6 MPa	0.0 %
$\nu_p$	0.992	0.993	-0.1 %
$\nu_{zp}$	0.44	0.44	0.0 %

**Tabelle 8: Vergleich analytisch und per Simulation ermittelter Materialkennwerte**

Die Materialkennwerte stimmen mit einer Abweichung von maximal 0.1% ausgezeichnet mit den mittels FE-Simulation berechneten Größen überein.

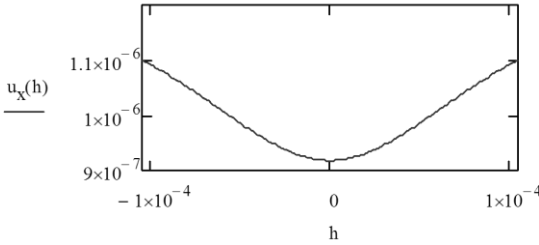
### 6.7.2 Spannungen und Randverschiebungen

Die Annahme „kreisförmiger“, also rotationssymmetrischer Verformung sämtlicher Schichten scheint für den vorliegenden Fall eines quadratischen RVE unphysikalisch. Doch zeigt sich, dass bei dem hier angenommenen Verschiebungsfeld der quadratische Rand des RVE in akzeptabler Näherung zu einem Quadrat (RB1) bzw. Rechteck (RB2) verformt wird (s. Abbildung 80).

Die Verschiebungskomponente senkrecht zum jeweiligen Rand sollte laut Randbedingung konstant sein. Natürlich wird dies beim angenommenen Verschiebungsfeld nicht exakt erfüllt, doch immerhin mit einer Abweichung von etwa  $\pm 10\%$  (s. Abbildung 80). Die mittlere Verformung des Randes wird im Fall RB1 praktisch exakt eingehalten (s. Tabelle 9), Im Fall RB2 mit einer Abweichung von ca. 3%.

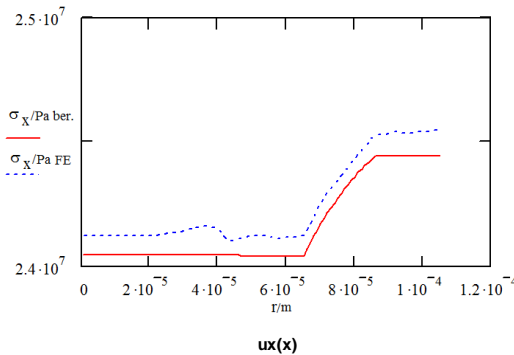
---

<sup>34</sup>  $E_z$  wird ohne Deformationsberechnungen bestimmt,  $\nu_{pz}$  ergibt sich aus den Materialkennwerten  $E_p$ ,  $\nu_{zp}$  und  $E_z$

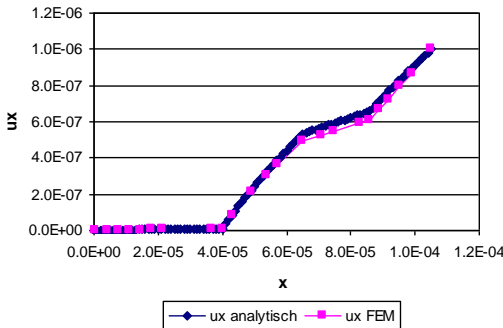


**Abbildung 80:**  
**Verschiebung  $u_x$  am rechten Rand der RVE (Einheit: 1m).** „Ideal“ wäre eine konstante Verschiebung von  $1\mu\text{m}$

Die Verschiebungs- und Spannungsfelder im Inneren des RVE werden besser angenähert. Hier zum Beispiel ein Vergleich des radialen Verlaufes der Verschiebungskomponente  $u_x$  und Spannungskomponente  $\sigma_x$  bei RB1:



**Abbildung 81:**  
**Näherungslösung (durchgezogen) und Ergebnis der FE-Simulation (punktiert) des Spannungsfeldes  $\sigma_x$  entlang der horizontalen Mittellinie der Einheitszelle vom Mittelpunkt zum rechten Rand**



**Abbildung 82:**  
**Näherungslösung (dick erscheinende Linie) und Ergebnis der FE-Simulation (Datenpunkte als Quadrat markiert) des Verschiebungsfeldes  $u_x$  entlang der horizontalen Mittellinie der Einheitszelle vom rechten Rand. Beide Achsen sind in m skaliert**

Die RVE-Mittelwerte haben großteils sehr geringe Abweichungen zueinander:

Mittelwert	Analytische Näherung	FEM	rel. Abw.
$\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)}$	$9.52 \cdot 10^{-3}$	$9.52 \cdot 10^{-3}$	0 %
$\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}$	24.4MPa	24.5MPa	-0.4 %
$\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}$	21.5MPa	21.6MPa	-0.5 %
$\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}$	$9.24 \cdot 10^{-3}$	$9.52 \cdot 10^{-3}$	-2.9 %
$\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$	83.5kPa	79.3kPa	5.3 %
$\bar{\sigma}_{xx,F}^{(1)}$	24.05MPa	24.15MPa	-0.4 %

**Tabelle 9: Vergleich verschiedener Spannungs- und Verformungsmittelwerte**

Die größte Abweichung tritt mit 5.3% bei  $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}$  auf. Die anderen Größen weichen nur wenig vom Simulationsergebnis ab. Insbesondere die Belastung der Faser ( $\bar{\sigma}_{xx,F}^{(1)}$ ) wird gut wiedergespiegelt.



## 7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Berechnung der Einflüsse von Temperaturänderungen und Vibration auf Messabweichungen Faseroptischer Gyroskope, genauer: die Querempfindlichkeit von FOGs auf die genannten Einwirkungen. Sind Geometrie und Zusammensetzung eines FOG bekannt, so können mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen und deren Auswertung Drehratenabweichungen vorhergesagt werden. Dies ist ein wertvolles Hilfsmittel zur Optimierung von Faserkreisel.

Dabei wurde als grundlegende physikalische Ursache eine thermoelastische oder durch Trägheitskräfte bedingte Deformation in der Faserspule angenommen, die dann zu einer Deformation der Faser führt. Dieser Vorgang ist zwar schon seit längerem bekannt [12], wurde jedoch nach Kenntnis des Verfassers noch von keiner anderen Arbeitsgruppe untersucht.

Für den gesamten Berechnungsvorgang sind vier Schritte nötig:

- die Homogenisierung der Faserspule. Diesem Aspekt wurde in der vorliegenden Arbeit viel Raum gegeben, da LWL-Fasern einen komplexeren Aufbau haben als übliche, nicht ummantelte Glasfasern eines faserverstärkten Kunststoffes. Die Homogenisierung eines solchen Compounds wurde in der Literatur nach Wissen des Verfassers noch nicht in der Detaillierung beschrieben
- die simulationsbasierte Berechnung des makroskopischen Deformationsfeldes in der Faserspule
- die Berechnung der mikroskopischen Faserverzerrungen in der Spule (Dehomogenisierung)
- letztendlich die Berechnung des Drehratensignals bei nun bekanntem Verzerrungsverlauf entlang der Faser

Die Theorie wurde mit Messergebnissen zweier verschiedener FOG-Typen verglichen. Zudem wurden exemplarisch mehrere Ansätze zur Minimierung von Messabweichungen gezeigt.

Als Ergänzung zu den hier aufgezeigten Überlegungen zur Homogenisierung von Faserspulen wurde eine analytische Näherungslösung vorgestellt, mit der die nichtthermischen Materialparameter der Spule berechnet werden können.

## 8 Ausblick

Die theoretischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sollten noch durch weitere Experimente getestet werden. Die bisherigen Vergleiche waren – v.a. für den FOG-2M – recht vielversprechend, doch sind die DRAen nur integrale Informationen über das Spannungsfeld im Inneren des FOG und entlang der Faser. Sehr unbefriedigend sind auch die großen Schwankungen gleich aufgebaute Prüflinge, die jedoch gemäß Industriepartner kaum in den Griff zu kriegen sind.

Zudem sollten Experimente durchgeführt werden, mit denen das Spannungsfeld in der Faserspule punktuell gemessen wird. Denkbar ist auch die Messung der Auslenkung der Oberfläche der Faserspule bei Vibration und bei Erwärmung.

Auch Faser und Faserspule sollten experimentell genauer untersucht werden. Die Theorie der Dehomogenisierung kann durch Messung der Empfindlichkeit mindestens einer Glasfaser mit definierten Coatingschichten hinsichtlich Druck und Erwärmung verifiziert werden. Zum Test der Homogenisierung könnte eine Spule wie in 6.2 gewickelt werden und makroskopisch verformt werden.

Auch theoretisch kann noch vieles getan werden. In weiteren Verfeinerungen der Simulation sollten viskoelastische Eigenschaften der Komponenten der Faserspule berücksichtigt werden. Dies setzt natürlich voraus, dass entsprechende Materialdaten v.a. der Elastomere bekannt sind oder gemessen werden. Es ist zu erwarten, dass die enthaltenen Elastomere bei der typischerweise langsamen Erwärmung „weicher“ scheinen als z.B. bei Vibration.

In dieser Arbeit wurde unterstellt, dass die Spule 1.) perfekt gewickelt wurde, also keine Windung einer Schicht „nach unten rutscht“. Dies ist technisch unrealistisch und eine der möglichen Gründe für die große Schwankungsbreite der Messergebnisse. Ebenso sind gewollt oder ungewollt Lufteinschlüsse enthalten, was sich sicherlich auf das Verhalten des FOG auswirkt. Zukünftige Arbeiten sollten diesen Aspekt genauer beleuchten.

Auch wenn durch Fertigungsunsicherheiten absolute Berechnungen der DRA eventuell nur geringe Vorhersagekraft haben, lassen sich Simulationen sinnvoll einsetzen. Die Sensitivitäten der DRA hinsichtlich veränderlicher Parameter wie Materialkonstanten oder Abmessungen sollten sich mit höherer Zuverlässigkeit „vorhersagen“ lassen. Ist die Sensitivität zu hoch, ist der optimale Wert oft nicht exakt einstellbar; ist sie zu niedrig, so bewirkt eine Änderung u.U. zu wenig. Gerade für Hersteller von Faserkreisel sollte eine Aufstellung verschiedener Sensitivitäten hinsichtlich Abmessungen und Materialkennwerten sehr hilfreich sein.

## A Anhang

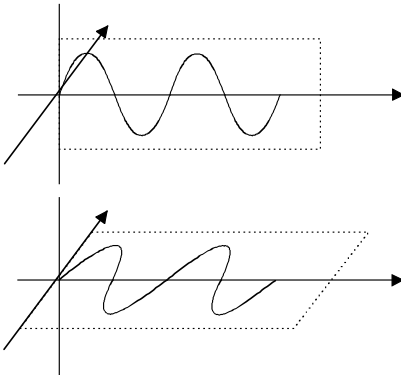
### A.1 Elastooptischer Effekt in Lichtwellenleitern

#### A.1.1 Lineare Polarisation

In der vorliegenden Arbeit wurde die optische Welle fast ausschließlich skalar beschrieben. Auch der elastooptische Effekt wurde isotrop angenommen. In diesem Kapitel soll jedoch der „isotrope“ elastooptische Effekt für Glasfasern aus dem grundlegenden elastooptischen Effekt für beliebige Medien hergeleitet werden, der von Natur aus anisotrop ist und daher eine vektorielle Betrachtung des elektrischen Feldes der optischen Welle erfordert.

In einer sich frei ausbreitenden optischen Welle – und näherungsweise auch in Lichtwellenleitern – zeigt der E-Feld-Vektor stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Damit ist jedoch die Richtung des Feldes nicht eindeutig festgelegt, sie muss ferner separat angegeben werden und wird als Polarisation bezeichnet.

Im Allgemeinen ist die Polarisation zeit- und ortsabhängig. Für die weiteren Betrachtung genügt es jedoch, den Fall der linearen Polarisation zu betrachten. In diesem ist die Polarisation räumlich und zeitlich konstant und kann als fester Vektor angegeben werden. Abbildung 83 zeigt zwei Beispiele linearer Polarisation: vertikal und horizontal polarisiertes Licht. Im ersten Fall liegt der elektrische Feldstärkevektor in vertikaler Richtung, im zweiten in horizontaler.



**Abbildung 83: Vertikal (oben) und horizontal (unten) polarisiertes Licht. Es wird die elektrische Feldstärke entlang der Ausbreitungsrichtung (Abszisse) an einem festen Zeitpunkt angezeigt**

### A.1.2 Ausbreitung von Licht in anisotropen Medien

Der „isotrope“ Zusammenhang zwischen Faserverzerrung und Brechzahländerung (5) ist eine Näherung. Bei anisotroper mechanischer Druckbelastung verlieren auch optisch isotrope Medien ihre Isotropie. Es ist leicht einzusehen, dass eine Druckbelastung eines optisch leitenden Mediums dessen „optische Dichte“, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit in ihm geführter elektromagnetischer Wellen ändert. Dass eine anisotrope Verzerrung, etwa bei einachsiger Belastung, zu einer optischen Anisotropie führt, sollte auch nicht verwundern. Das Medium scheint je nach Polarisation „optisch dichter“ oder „weniger dicht“. Ein Druck in Ausbreitungsrichtung wirkt sich wieder anders aus.

Im Folgenden wird, basierend auf den linearen elastooptischen Effekt für homogene Medien, hergeleitet, wie er sich auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Lichtwellenleitern auswirkt. Der Inhalt dieses Abschnitts orientiert sich stark an [44]. Es werden jedoch nur die Zusammenhänge erwähnt, die für das Verständnis der Arbeit nötig sind.

Die Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  in dem für (optisch bzw. elektrisch) isotrope Medien gültigen Zusammenhang  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  muss in anisotropen Medien durch den Dielektrizitätstensor

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (187)$$

ersetzt werden. Es gilt dann:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (188)$$

Für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ergeben sich damit einige Besonderheiten:

- D- und E-Feldvektor sind u.U. nicht mehr parallel zueinander
- Der Pointingvektor<sup>35</sup> der Welle ist u.U. nicht senkrecht zur Phasenfront
- Insbesondere: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle ist im Allgemeinen polarisations- und richtungsabhängig

---

<sup>35</sup> Der Pointingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  einer elektromagnetischen Welle gibt Richtung und Dichte des Energieflusses in der Welle an. Eine Phasenfront ist eine Fläche mit konstanter Phase. In isotropen Medien ist der Pointingvektor an jedem Punkt stets senkrecht zur jeweiligen Phasenfront.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in solchen Medien ist ein recht komplexer Vorgang. Für jedes anisotrope Material existieren jedoch drei Hauptachsen, in denen zwar die Ausbreitungsgeschwindigkeiten jeweils unterschiedlich sein können, jedoch wie im isotropen Fall  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  parallel sind und der Pointingvektor senkrecht zur Phasenfront ist. In einem sofestgelegten Koordinatensystem ist dann:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (189)$$

Nun lassen sich auch Brechzahlen  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_z$  definieren durch

$$n_x = \sqrt{\epsilon_x}, n_y = \sqrt{\epsilon_y} \text{ und } n_z = \sqrt{\epsilon_z} \quad (190)$$

Die Brechzahlen erlauben die Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtwelle. Die Brechzahl legt dabei fest, mit welcher Geschwindigkeit sich eine Welle ausbreitet, deren Feldvektor  $\vec{E}$  in die jeweilige Richtung zeigt. Z.B. breitet sich eine x-polarisierte ebene Welle in z-Richtung ( $E_y = E_z = 0$ ) nach folgender Formel aus:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_x \cos(\omega t - n_x k_0 z), \quad (191)$$

wobei  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  die Ausbreitungskonstante,  $\lambda_0$  die Wellenlänge der Welle im Vakuum wäre. Die Gruppengeschwindigkeit<sup>36</sup>  $c = c_0/n_x$ .

### A.1.3 Elastooptischer Effekt

Bei elastischer Verformung nehmen die mittleren Atomabstände in Körpern ab – das Material wird „(optisch) dichter“. Anschaulich bedeutet dies, dass bei Kompression die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Körper abnimmt, bei Dehnung zunimmt. Zudem wird der Körper bei anisotroper Verformung auch optisch anisotrop. d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nun von der Polarisationsrichtung ab. Diese Zusammenhänge sollen nun quantitativ abgeleitet werden. Die folgende Herleitung orientiert sich dabei stark an [44].

Unter Einführung eines Verformungs-6-Tupels

$$\vec{S} := (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})^T \quad (192)$$

---

<sup>36</sup> Die Gruppengeschwindigkeit  $c_g := \frac{\partial \omega}{\partial k}$  ist die näherungsweise die Geschwindigkeit, mit der sich ein schmales Wellenpaket durch ein Medium fortpflanzt. Sie wird meist als Geschwindigkeit des Energie- oder Informationstransportes interpretiert [49].

und den elastooptischen Koeffizienten  $p_{ij}$  lassen sich die Änderungen der Brechungsindizes durch elastische Verformung wie folgt berechnen

$$\Delta\left(\frac{1}{n_i^2}\right) = \sum_{j=1}^6 p_{ij} S_j, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (193)$$

Die Brechungsindizes  $n_1, n_2$  und  $n_3$  geben die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtwelle, die in  $\vec{e}_1$ -,  $\vec{e}_2$ - bzw.  $\vec{e}_3$ -Richtung polarisiert ist.  $n_4 \dots n_6$  sind weitere Parameter zur vollständigen Festlegung des sog. Brechungsindex-Ellipsoids, werden in dieser Arbeit jedoch durchweg vernachlässigt. Sie spielen nur bei Scherverzerrungen eine Rolle, und diese werden hier vernachlässigt.

Für isotrope Körper lassen sich sämtliche elastooptischen Koeffizienten aus den beiden voneinander unabhängigen  $p_{11}$  und  $p_{12}$  angeben [44]:

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) \end{pmatrix} \quad (194)$$

Für Silikatglas z.B. sind  $p_{11} = 0.126$  und  $p_{12} = 0.27$  [44]. (193) lässt sich für kleine Brechungsindexänderungen wie folgt schreiben:

$$\Delta\left(\frac{1}{n_i^2}\right) \approx \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{n_i^2}\right) \Delta n_i = -\frac{2\Delta n_i}{n_i^3} \quad (195)$$

Damit und mit (193) ist  $\Delta n_i = -\frac{n_i^3}{2} \sum_{j=1}^6 p_{ij} S_j$ . (196)

Bei fehlenden Scherverzerrungen und zueinander gleichen  $n_i = n$  gilt:

$$\begin{pmatrix} \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \\ \Delta n_3 \end{pmatrix} = -\frac{n^3}{2} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (197)$$

#### A.1.4 Brechzahländerungen in zylindrischen Wellenleitern aufgrund des elastooptischen Effekts

Für die Betrachtung zylindrischer Wellenleiter bietet sich die Verwendung zylindrischer Koordinaten  $(r, \theta, z)$  an. Die Abhängigkeit der Brechzahlen  $(n_r, n_\theta, n_z)$  von einer elastischen Deformation ist wie im kartesischen Fall:

$$\begin{pmatrix} \Delta n_r \\ \Delta n_\theta \\ \Delta n_z \end{pmatrix} = -\frac{n^3}{2} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (198)$$

Bei hydrostatischen Druckverhältnissen, wie sie in Elastomeren näherungsweise herrschen, wird die Faser wie in Kap. 3.2.9 beschrieben verformt, d.h.  $u_r = \frac{A}{r}$ ,  $u_\theta = 0$ . Damit sind  $\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}$  und  $\epsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{A}{r^2} = -\epsilon_r$ .

In einer Monomodefaser breitet sich Licht näherungsweise in Form einer LP<sub>01</sub>-Mode<sup>37</sup> aus [46]. In dieser überwiegt der transversale Anteil des E-Feldes  $E_r$  bei weitem den longitudinalen  $E_z$ . Die Azimutalkomponente  $E_\theta$  verschwindet ganz. Daher wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der LP<sub>01</sub>-Welle fast ausschließlich von  $n_r$  bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird daher  $n_r = n$  bezeichnet. Also ist

$$\Delta n = \Delta n_r = -\frac{n^3}{2}((p_{11} + p_{12})\epsilon_r + p_{12}\epsilon_z) \quad (199)$$

## A.2 Symmetrische Belastung längs der Faser

Ein zentraler Ansatzpunkt zur Minimierung von Drehratenabweichungen ist die Tatsache, dass bei symmetrischer Belastung der Faser in Bezug auf deren Mittelpunkt die Drehratenabweichung rechnerisch verschwindet. Belastung sei hier als synonym mit Brechzahländerung verstanden.

Bei einer symmetrischen Belastung ist

$$\dot{n}(z, t) = \dot{n}(L - z, t) = \frac{\dot{n}(z, t) + \dot{n}(L - z, t)}{2} \quad (200)$$

Es soll gezeigt werden, dass dann  $\int_0^L \dot{n}(z, t)(L - 2z)dz$  verschwindet. In diesem Fall verschwindet nämlich auch das DRA-Integral (78). Nun kann man in diesem Integral  $\dot{n}(z, t)$  durch  $\frac{\dot{n}(z, t) + \dot{n}(L - z, t)}{2}$  ersetzen:

$$\int_0^L \dot{n}(z, t)(L - 2z)dz = \int_0^L \frac{\dot{n}(z, t) + \dot{n}(L - z, t)}{2}(L - 2z)dz \quad (201)$$

Mit der Substitution  $z' = z - L/2$  wird daraus

$$\int_0^L \frac{\dot{n}(z, t) + \dot{n}(L - z, t)}{2}(L - 2z)dz = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\dot{n}(L/2 + z', t) + \dot{n}(L/2 - z', t)}{2}(-2z')dz' \quad (202)$$

Dieses Integral verschwindet aufgrund des zu  $z'$  antisymmetrischen Integranden (der erste Faktor ist eine symmetrische Funktion, der zweite eine antisymmetrische).

---

<sup>37</sup> LP<sub>01</sub> („linear polarisiert“) ist die Grundmode eines zylindrischen Wellenleiters in der „weakly-guiding approximation“

### A.3 Effektiver Brechungsindex von Glasfasern

Eine radiale Deformation der Faser ändert neben der Kern-Brechzahl auch die Wellenleitereigenschaften der Faser, indem es den Kerndurchmesser verändert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Faser wiederum wird daher nicht exakt durch die Brechzahl des Kernmediums beschrieben, sondern durch den sogenannten effektiven Brechungsindex. Die faseroptischen Grundlagen zu folgender Ableitung wurden großteils von [46] übernommen und können dort vertieft werden.

Hier spielt neben der Brechzahl des Kerns auch die des Mantels eine Rolle, sowie der Kerndurchmesser. Das ist auch plausibel, da das elektrische Feld nicht exakt auf den Faserkern beschränkt ist, sondern auch in den Mantelbereich hineinragt, dort allerdings schnell (exponentiell) abfällt. Der effektive Brechungsindex  $n_{eff}$  liegt dementsprechend zwischen dem des Kerns ( $n_K$ , z.B.  $n_K = 1.457$  [47]) und dem des Mantels ( $n_M$ , z.B.  $n_M = 1.452 < n_K$ ). Gemäß [46] machen wir den Ansatz

$$n_{eff} = n_M + b(n_K - n_M) = n_M + b\Delta n \quad (203)$$

$b$  wird als normierte Ausbreitungskonstante definiert und hängt nur von der normierten Frequenz  $V$  ab mit

$$V = \frac{2\pi}{\lambda_0} a \sqrt{n_K^2 - n_M^2} \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} a \sqrt{2n_K \Delta n} \quad (204)$$

$a$  ist hierbei der Kernradius. Der Näherungsweise gilt:

$$b \approx \frac{(1.1428V - 0.996)^2}{V^2} \text{ und } \frac{\partial b}{\partial V} \approx \frac{2.276}{V^2} - \frac{1.984}{V^3} \quad (205)$$

In der Nähe der Cutoff-Wellenlänge (d.h.  $V \approx V_C = 2.405$ ) sind  $b \approx 0.53$  und  $\frac{\partial b}{\partial V} \approx 0.25$ .

Hiermit lässt sich die Abhängigkeit der effektiven Brechzahl von der radialen Dehnung  $\epsilon_r$  angeben:

$$\begin{aligned} \Delta n_{eff} &= \Delta n_M + \Delta b(n_K - n_M) = \frac{\partial n_M}{\partial \epsilon_r} \Delta \epsilon_r + \frac{\partial b}{\partial \epsilon_r} \Delta \epsilon_r (n_K - n_M) \\ &= \left( \frac{\partial n_M}{\partial \epsilon_r} + \frac{\partial b}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \epsilon_r} (n_K - n_M) \right) \Delta \epsilon_r \end{aligned} \quad (206)$$

$\frac{\partial n_M}{\partial \epsilon_r}$  lässt sich aus  $\Delta n = -\frac{n^3}{2} ((p_{11} + p_{12})\epsilon_r + p_{12}\epsilon_z)$  berechnen:

$$\frac{\partial n_M}{\partial \epsilon_r} = -\frac{n^3}{2} (p_{11} + p_{12}) \approx -0.616 \quad (207)$$

Der Faserradius ändert sich bei einer radialen Deformation gemäß  $\Delta a = a\epsilon_r$ . Also ist

$$\frac{\partial a}{\partial \epsilon_r} = a \quad (208)$$



Bei einem Kerndurchmesser von  $6\mu\text{m}$  ist

$$\frac{\partial a}{\partial \epsilon_r} = 3 \mu\text{m} \quad (209)$$

Schließlich ist nach Einsetzen in (204)

$$\frac{\partial V}{\partial a} \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{2n_K \Delta n} \approx 9.49 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} \quad (210)$$

Hierbei wurden die oben angegebenen Daten für Kern- und Mantelbrechzahl angenommen, sowie  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

Nun lässt sich der Einfluss der Änderung des Kernradius angeben:

$$\frac{\partial b}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \epsilon_r} (n_K - n_M) = 3.56 \cdot 10^{-3} \quad (211)$$

Dieser Wert liegt zwei Größenordnungen unter  $\frac{\partial n_M}{\partial \epsilon_r} = -0.616$  und wurde daher in der vorliegenden Arbeit vernachlässigt.

## A.4 Berechnung anisotroper Materialparameter aus Simulationsergebnissen

Gegeben seien die gemittelten Spannungs- und Verzerrungskomponenten  $\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} = \bar{\epsilon}_{yy}^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}^{(1)} = \bar{\sigma}_{yy}^{(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}$  aus einer FE-Simulation gemäß RB1 sowie  $\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)} = -\bar{\epsilon}_{yy}^{(2)}$  und  $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)} = -\bar{\sigma}_{yy}^{(2)}$  aus Simulationen gemäß RB2.

Aus RB1 lassen sich zwei Gleichungen herleiten. Mit  $\frac{v_{pz}}{E_p} = \frac{v_{zp}}{E_z}$  [51] erhält man

$$\text{I: } \bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} = \frac{1-v_p}{E_p} \bar{\sigma}_{xx}^{(1)} - \frac{v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} \quad (212)$$

$$\text{II: } \bar{\epsilon}_{zz}^{(1)} = 0 = -\frac{2v_{pz}}{E_p} \bar{\sigma}_{xx}^{(1)} + \frac{1}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = -\frac{2v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{xx}^{(1)} + \frac{1}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} \quad (213)$$

Aus RB2 ( $\bar{\sigma}_{xx}^{(2)} = -\bar{\sigma}_{yy}^{(2)}$ ) ergeben sich die Gleichungen

$$\text{III: } \bar{\epsilon}_{xx}^{(2)} = \frac{1+v_p}{E_p} \bar{\sigma}_{xx}^{(2)} - \frac{v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} \quad (214)$$

$$\text{IV: } \bar{\epsilon}_{zz}^{(2)} = 0 = \frac{1}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} \Rightarrow \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} = 0 \quad (215)$$

Gleichung IV ist trivial in dem Sinne, dass sie auch aus dem Simulationsergebnis – abgesehen von numerischen Ungenauigkeiten – folgen sollte; es bleiben also drei Gleichungen für die drei unabhängigen Materialparameter  $E_p$ ,  $v_p$  und  $v_{zp}$  ( $E_z$  ist bereits bekannt und  $v_{pz}$  lässt sich aus den restlichen berechnen). Die weitere Auswertung ergibt:

$$\text{I} \Rightarrow \text{Ia: } 1 - v_p = \frac{E_p}{\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \left( \bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} + \frac{v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} \right) \quad (216)$$

$$\text{II} \Rightarrow \text{IIa: } v_{zp} = \frac{\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{2\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \quad (217)$$

$$\text{III} \Rightarrow \text{IIIa: } 1 + v_p = \frac{E_p \bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}} \quad (218)$$

$$\text{IIIa} + \text{Ia: } E_p = 2 \left( \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}} + \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} + \frac{v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \right)^{-1} \quad (219)$$

$$\text{IIIa} - \text{Ia: } v_p = \left( \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(2)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(2)}} - \frac{\bar{\epsilon}_{xx}^{(1)} + \frac{v_{zp}}{E_z} \bar{\sigma}_{zz}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}} \right) / \frac{E_p}{2} \quad (220)$$

(217), (219) und (220) sind die wesentlichen Gleichungen zur Berechnung von  $v_{zp}$ ,  $E_p$  und  $v_p$ .

## Literaturverzeichnis

- [1] D. Titterton, J. Weston, Strapdown Inertial Navigation Technology, The American Institute of Aeronautics and Astronautics, second edition, 2004
- [2] O. J. Woodman, An Introduction to Inertial Navigation, Technical Report 696, University of Cambridge 2007
- [3] N. Barbour, G. Schmidt, Inertial Sensor Technology Trends, Proc. on Autonomous Underwater Vehicles, 20-21. August 1998, 55-62, IEEE 1998
- [4] Haiying Hou, Modelling Inertial Sensors Errors Using Allan Variance, Thesis (MSc.), University of Calgary 2004
- [5] S. M. Bennett et al., Fiber Optic Rate Gyros as Replacement for Mechanical Gyros, AIAA-98-4401, American Institute of Aeronautics and Astronautics 1998
- [6] N. Barbour, G. Schmidt, Inertial Sensor Technology Trends, Proceedings of the 1998 Workshop on Autonomous Underwater Vehicles, 20-21 August 1998, Cambridge, MA, pp. 55-62, IEEE 1998
- [7] iMAR GmbH, Datenblatt iOLFog-S-D, [http://www.imar-navigation.de/datenbl/olfog\\_s\\_d\\_e.pdf](http://www.imar-navigation.de/datenbl/olfog_s_d_e.pdf), abgerufen am 17.05.2010
- [8] Sagem Avionics Inc., Datenblatt FOG-1S, <http://www.sagemavionics.com/Products/CurrentProduct.aspx?product=43&category=Gyros+Sensors>, abgerufen am 17.05.2010
- [9] KVH Inc., Datenblatt TG-6000, <http://www.kvh.com/Products/product.asp?id=84>, abgerufen am 17.05.2010
- [10] S. J. Sanders et al., Fiber Optic Gyro Technology Trends – A Honeywell Perspective, IEEE 2002
- [11] F. Pedrotti et al., Optik für Ingenieure, Springer Verlag 2005
- [12] H. Lefevre, The Fiber-Optic Gyroscope, Norwood, MA: Artech House 1993
- [13] W. K. Burns, Optical Fiber Rotation Sensing, Academic Press 1994
- [14] B. Culshaw, The Optical Fibre Sagnac Interferometer: An Overview of Its Principles and Applications, Meas. Sci. Technol. 17(2006), IOP Publishing Ltd 2006
- [15] E. v. Hinueber, If You Investigate in an Inertial Measurement System, veröffentlichtes Dokument der iMAR GmbH

- 
- [16] T. Buret et al., Fiber Optic Gyroscopes for Space Application, Optical Fiber Sensors, OSA Technical Digest (CD) (Optical Society of America 2006), paper MC4
- [17] P. Gille, Modulationsverfahren Faseroptischer Gyroskope, Bachelor-Thesis, Hochschule Pforzheim 2010
- [18] E. J. Post, Sagnac Effect, Review of Modern Physics, Vol. 39, 1967
- [19] G. Rizzi, M. L. Ruggiero, Relativity in Rotating Frames, Springer Verlag 2004
- [20] H. J. Arditty, H. C. Lefevre, Theoretical Basis of Sagnac Effect in Fiber Gyroscope, Springer Verlag Series in Optical Sciences, Vol. 32, 1982
- [21] H. J. Warnecke, W. Dutschke, Fertigungsmesstechnik – Handbuch für Industrie und Wissenschaft, Springer Verlag 1984
- [22] J. Hoffmann, Taschenbuch der Messtechnik, Carl Hanser Verlag 1998
- [23] JGCM 200, International Vocabulary of Metrology, Joint Committee for Guides in Metrology, Working Group 2, JGCM 2008
- [24] F. Mohr, Thermooptically Induced Bias Drift in Fiber Optic Sagnac Interferometers, J. o. Lightwave Technology Vol. 14, No. 1, 1996
- [25] D. M. Shupe, Thermally induced nonreciprocity in the fiber-optic interferometer, J. o. Appl. Opt., vol. 19, 1980
- [26] F. Mohr, Polarisationsprobleme beim faseroptischen Sagnac-Interferometer und ihre Lösung durch Polarisationsregelsysteme, Dissertationsschrift, Karlsruhe 1984
- [27] F. Mohr, F. Schadt, Bias Error in Fiber Optic Gyroscopes Due to Elastooptic Interactions in the Sensor Fiber. Eingereicht bei EWOFs 2004, Santander
- [28] F. Mohr, F. Schadt, Error Signal Formation in FOGs Through Thermal and Elastooptic Environmental Influences on the Sensing Coil, Gyro Technology Symposium, Karlsruhe 2011
- [29] C. M. Lofts et al., Investigation of the Effects of Temporal Thermal Gradients in Fiber Optic Gyroscope Sensing Coils, Opt. Eng., Vol. 34, 2856 (1995), SPIE 1995
- [30] O. F. Tirat, J.-M. Euverte, Finite Element Model of Thermal Transient Effect in Fiber Optic Gyro, Conf. Proc. of Fiber Optic Gyros: 20<sup>th</sup> Anniversary Conference, Vol 2837, 230 (1996), SPIE 1996

- 
- [31] S. Blin et al., Reduced Thermal Sensitivity of a Fiber-Optic Gyroscope Using an Air-Core Photonic-Bandgap Fiber, *Journal of Lightwave Technology*, Volume 25, Nr. 3, IEEE 2007
- [32] Shih-Chun Lin, T. G. Giallorenzi, Sensitivity Analysis of the Sagnac Effect Optical-Fiber Ring Interferometer, *Journal of Applied Optics*, Vol. 18, Nr. 6, Optical Society of America 1979
- [33] A. Cordova, Reduction of fiber optic gyroscope vibration and temperature-ramp sensitivities by controlling coil geometrical parameters, United States Patent 5847829, 1998
- [34] R. B. Dyott, Reduction of the Shupe effect in fibre optic gyros; the random-wound coil, *IEEE Electronics Letters*, Volume 32, Issue 23, IEEE 1996
- [35] H. Kato et al., Shupe effect compensation of temperature controlled Fiber Optical Gyroscope, 11<sup>th</sup> IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, IEEE 2010
- [36] E. Handrich, M. Kemmler, Closed loop fiber optic gyro with shupe effect compensation, US Patent 6181428, 2001
- [37] K. Böhm et al., Sensitivity of a Fiber-Optic Gyroscope to Environmental Magnetic Fields, *Optics Letters*, Vol. 7, Nr. 4, Optical Society of America 1982
- [38] C. Seidel, Optimierungsstrategien für Faseroptische Rotationsensoren: Einfluss der Spektralen Eigenschaften des Lichts, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2004
- [39] J. L. Wagener et al., A High-Stability Fiber Amplifier Source for the Fiber Optic Gyroscope, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 15, Nr. 9, IEEE 1997
- [40] R. Ulrich, Polarization and Depolarization in the Fiber-Optic Gyroscope, *Fiber-Optic Rotation Sensors and Related Technologies*, 1982
- [41] J. Blake, B. Szafraniec, Random Noise in PM and Depolarized Fiber Gyros, *OSA Proceedings*, Vol. OFS-16, Fiber Optic Sensors, 1997
- [42] G. A. Sanders, B. Szafraniec, Progress in Fiber Optic Applications II with Emphasis on the Theory of Depolarized Gyros, AGARD/NATO Conference Report on Optical Gyros and Their Applications, AGARDograph, 339, 1999
- [43] T. Erler, The Fiber Optic Gyroscope – a SAGNAC Interferometer for Inertial Sensor Applications, *Proc. of the ITSS on Microwaves and Lightwaves*, Pforzheim 2007

- 
- [44] A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, Optical Electronics, Cambridge University Press 1989
- [45] E. Udd, Fiber Optic Smart Structures, Wiley-Interscience 1995
- [46] J. A. Buck, Fundamentals of Optical Fibers, John Wiley & Sons 1995
- [47] D. Kühlike, Optik – Grundlagen und Anwendungen, Harri Deutsch Verlag 2007
- [48] D. Meschede, Optics, Light and Lasers, Wiley-VCH 2007
- [49] E. Hecht, Optik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag 2009
- [50] S. Merlo, M. Norgia, S. Donati, FIBER GYROSCOPE PRINCIPLES in Handbook of Fibre Optic Sensing Technology, edited by José Miguel López-Higuera, John Wiley & Sons Ltd. 2000
- [51] K. Moser, Faser-Kunststoff-Verbund, VDI-Verlag 1992
- [52] G. Grüniger, Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden, Springer Verlag 2005
- [53] W. Michaeli, Dimensionieren von Faserverbundkunststoffen, Hanser 1994
- [54] A. Bower, Applied Mechanics of Solids, CRC press 2009
- [55] J. H. Michell, On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates, Proc. London Math. Soc. 31 (1), 1899
- [56] J. R. Barber, Elasticity, Kluwer Academic Publishers 2002
- [57] R. Hill, Elastic Properties of Reinforced Solids, Some Theoretical Principles, J. Mech. Phys. Solids 11, 1963
- [58] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978
- [59] M. Lefik, B. A. Schrefler (1994), 3-D finite element analysis of composite beams with parallel fibres, based on homogenization theory, Computational Mechanics 14, 2-15, 1994
- [60] H. Berger et al., Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties, J. of Smart Materials and Structures 15, 451-458, 2006
- [61] H. Berger et al., Numerical approaches for calculating the effective thermo-mechanical properties of three-phase composites, J. o. Computational Mechanics 33, 2003
- [62] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3. Auflage, McGraw-Hill 1970

- 
- [63] Y. C. Fung, P. Tong, Classical and Computational Solid Mechanics, World Scientific publishing library 2001
- [64] I. Szabó, Höhere Technische Mechanik, Springer Verlag 1985
- [65] D. J. David, A. Misra, Relating Materials Properties to Structure, Technomic Verlag 1999
- [66] A. Arnau, Piezoelectric Transducers and Applications, Springer Verlag 2008
- [67] A. Huba et al., Dynamic Analysis of Silicone Elastomers, Materials Science Forum, Vol. 473 & 474 (2005), 85-90
- [68] L. Molnar, A. Huba, Measurement of Dynamic Properties of Silicone Rubbers, Periodica Polytechnica ser. mech. eng., Vol. 45, Nr. 1, 87-94
- [69] W. Retting, Mechanik der Kunststoffe, Hanser 1992
- [70] R. W. Tock, M. V. R. N. Dinivahi, C. H. Chew, Viscoelastic Properties of Structural Silicone Rubber Sealants, Advances in Polymer Technology, Vol. 8, No. 3, John Wiley & Sons 1988
- [71] J. A. Brydson, Plastics Materials, Butterworth-Heinemann, 7. Auflage, 1999
- [72] J. Brandrup et al., Polymer Handbook, 4<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons 1999
- [73] J.-R. Ohm, H. D. Lüke, Signalübertragung, 11. Auflage, Springer Verlag 2010
- [74] R. Schlittgen, B. Streitberg, Zeitreihenanalyse, 5. Auflage, Oldenbourg 1994

# Lebenslauf

Frank Schadt

geboren am 23.06.1976 in Heilbronn

## Schulische Ausbildung

09/1982 – 07/1986

Grundschule Erlenbach

09/1986 – 06/1995

Albert-Schweizer-Gymnasium Neckarsulm

Schulabschluss: Allgemeine Hochschulreife

## Zivildienst

07/1995 – 09/1996

Pflege in der Kardiologie, Klinik am Plattenwald in Neckarsulm

## Studium

10/1996 – 03/2001

Studium der Elektronik/Informationstechnik an der Hochschule Heilbronn.

Abschluss: Dipl.-Ing. (FH)

## Berufstätigkeit

04/2001 – 10/2010

Freiberufliche Mitarbeit am Steinbeis Transferzentrum für Signalverarbeitungssysteme in Pforzheim.

04/2001 – 04/2003

Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Hochschule Pforzheim, Fachbereich Elektrotechnik

05/2003 – 10/2011

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für angewandte Forschung in Pforzheim

11/2011 – dato

Wissenschaftler an der Fa. Carl Zeiss SMT GmbH, Abteilung Systemmesstechnik f. Lithographiesysteme