Minimalitätsbedingungen für konvex-zusammengesetzte Funktionen mit Anwendungen in der Vektoroptimierung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik
der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Herrn Stefan Hamann
geboren am 28. November 1962 in Offenbach (Main)

Gutachter:
Prof. Dr. Christiane Tammer (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)
Prof. Dr. Johannes Jahn (Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)
Prof. Dr. Axel Kröner (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

Tag der Verteidigung: 19.12.2023

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+^>$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+^<$	Menge der negativen reellen Zahlen
sgn	Vorzeichenfunktion auf den reellen Zahlen
N^M	Menge der Funktionen von M nach N
dom f	effektiver Definitionsbereich der Funktion f
$\mathrm{int}(S)$	topologisch Inneres der Menge S
$\mathrm{cl}(S)$	topologischer Abschluß der Menge S
$\mathrm{cl}^*(S)$	topologischer Abschluß der Menge S bezüglich der Schwach*-Topologie
∂S	topologischer Rand der Menge S
$\mathrm{kon}(S)$	konvexe Hülle der Menge S
$\mathrm{cor}(S)$	algebraisch Inneres der Menge S
$\mathrm{ext}(S)$	Menge der Extrempunkte der Menge S
$L(X,\ Y)$	Menge der linearen und stetigen Funktionen von X nach Y
$B(x,\ r)$	Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r
B_X	Einheitskugel des normierten Raumes X
K^*	Dualkegel des Kegels K
K^+	Quasiinneres des Kegels K

S°	Polarmenge der Menge S
l^*	Adjungierte einer Funktion $l \in L(X, Y)$
$N(S, x)$	Normalenkegel der Menge S in x
$\vert\vert\vert \cdot \vert\vert\vert$	vektorielle Norm
ι_S	Indikatorfunktion der Menge S
m_S	Minkowski-Funktion der Menge S
g^*	konvex-konjugierte Funktion der Funktion g
g^{**}	doppelt konjugierte Funktion der Funktion g
$g^\bullet$	konkav-konjugierte Funktion der Funktion g
σ_S	Stützfunktion der Menge S
$\boldsymbol{d}(\cdot, S)$	Distanzfunktion bezüglich der Menge S
$\Delta(\cdot, S)$	erweiterte Distanzfunktion bezüglich der Menge S
$\varphi_{S, p}$	Gerstewitz-Funktion bezüglich der Menge S und des Punktes p
$f'_+(x, p)$	rechtsseitige Richtungsableitung der Funktion f in x in Richtung p
$\partial_A g(x)$	algebraisches Subdifferential der konvexen Funktion g in x
$\partial g(x)$	Subdifferential der konvexen Funktion g in x
$ES(M, K)$	Menge der schwach effizienten Elemente der Menge M bezüglich K
$E(M, K)$	Menge der effizienten Elemente der Menge M bezüglich K
$S(M, K)$	Menge der stark effizienten Elemente der Menge M bezüglich K
$H(M, K)$	Menge der Henig-effizienten Elemente der Menge M bezüglich K
$SE(M, K)$	Menge der supereffizienten Elemente der Menge M bezüglich K

1. EINLEITUNG

1.1 Eine aktuelle Thematik

Die Minimierung von Abbildungen, welche aus konvexen Funktionen und deren Komposita mit vektorwertigen Funktionen gebildet sind, ist ein Optimierungsproblem, das gerade in jüngster Zeit auf Gebieten wie der komprimierten Erfassung (vor allem der Bildbearbeitung), Datenanalyse und des maschinellen Lernens (Support Vector Machine) auftritt. Von besonderer Bedeutung ist hier das sogenannte Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)-Problem, insbesondere in Form des " l_1 -Regularized Least Square Optimization Problem ", eingeführt von Tibshirani [79]:

$$\text{Minimiere } \frac{1}{2}\|Av-b\|_2^2 + q\|v\|_1 \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Dabei sind $b \in \mathbb{R}^n$, $q > 0$, A eine $n \times m-$ Matrix, $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm sowie $\|\cdot\|_1$ die übliche Summennorm $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^m |v_i|$. Für gegen 0 strebendes q erreicht man Lösungen von $Av = b$ mit minimaler Summennorm. Wie sehr die Größe der Koeffizienten von v gegenüber dem "Kleinste-Quadrate-Term" $\|Av-b\|_2^2$ ins Gewicht fällt, wird dabei durch q bestimmt.

Da die Summennorm nur in Punkten $(v_1,...,v_m)$ mit $v_k \neq 0$ für alle $k = 1,...,m$ differenzierbar ist, bedeutet dies eine in dieser Hinsicht schwierigere Behandlung von (1.1) gegenüber der folgenden Ersatzaufgabe inverser Probleme (eine wohlgestellte Näherung im Sinne der Tychonoff-Regularisierung)

$$\text{Minimiere } F(v) = \|Av-b\|_2^2 + q\|v\|_2^2 \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

mit der Minimalitätsbedingung

$$F'(v) = 0 \Leftrightarrow (A^T A + qE_m)v = A^T b,$$

wobei A^T für " A transponiert " steht und E_m für die $m-$reihige Einheitsmatrix.

Das Problem (1.1) läßt immer eine Optimallösung zu (siehe dazu [79]), und in der unlängst veröffentlichten Arbeit [52] wenden Khanh, Mordukhovich, Phat und Tran unter der Voraussetzung, daß $A^T A$ positiv semidefinit ist, einen verallgemeinerten gedämpften Newton-Algorithmus zum eigentlichen Lösen von (1.1) an.

Die Zielfunktionen in (1.1) und (1.2) stellen zusammengesetzte Funktionen sehr spezieller Art dar. Sie sind auf euklidischen, endlichdimensionalen Räumen definiert und Summen von Normabbildungen beziehungsweise deren Quadrate mit einer affin-linearen inneren Funktion. In der vorliegenden Arbeit werden hingegen Optimierungsprobleme für beliebige normierte Räume behandelt, gleichzeitig mit möglichst geringen Einschränkungen bezüglich der (äußeren) konvexen und (inneren) differenzierbaren (oder stetigen) Funktionen der zusammengesetzten Abbildungen.

1.2 Konvex-zusammengesetzte Funktionen

Die natürliche Ordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erlaubt eine sinnvolle Vorstellung von Maxima und Minima reellwertiger Funktionen. Diese kann man als eine durch den Kegel der nichtnegativen Zahlen $\mathbb{R}_+$ induzierte Ordnung ansehen, nämlich $s \geq r \Leftrightarrow s - r \in \mathbb{R}_+$. Vor dem Hintergrund der aus der Analysis bekannten hinreichenden bzw. notwendigen Bedingungen für Extrema solcher Funktionen erhebt sich die Frage nach deren Generalisierung, wenn in einem deutlich allgemeineren Zusammenhang beispielsweise topologische Vektorräume betrachtet werden, die mittels eines Kegels (halb-)geordnet sind. Dabei interessieren insbesondere jene für differenzierbare Funktionen $f : X \longrightarrow Y$, wobei X und Y reelle normierte Räume sind. Geht man von der reell-skalaren Situation aus, also $Y = \mathbb{R}$, so wäre ein "Minimum" von f auf einer Menge $A \subseteq X$ bzgl. einer durch $y \geq_K x \Leftrightarrow y - x \in K$ für einen Kegel $K \subseteq Y$ gegebenen Ordnung dann ein $x \in A$ mit $f(x) \leq_K f(v)$ für jedes $v \in A$. Wird diese Ordnung auf Y, eine Relation auf $Y \times Y$, durch einen konvexen (wenn $K + K \subseteq K$) und spitzen (wenn $K \cap -K = \{0\}$) Kegel induziert, so kann man diese als "vernünftig" in dem Sinne ansehen, daß sowohl Transitivität, d. h. $x \leq_K y$ und $y \leq_K z \Rightarrow x \leq_K z$, als auch Antisymmetrie, d. h. $x \leq_K y$ und $y \leq_K x \Rightarrow x = y$, vorliegen. Praktischerweise wird in der Regel ein schwächerer Minimalitätsbegriff verwendet, nämlich "effiziente" Elemente von $f(A)$, welche solche $f(x)$ sind, für die

$$(f(A) - f(x)) \cap -K = \{0\} \tag{1.3}$$

gilt, was bedeutet, daß kein $w \in A$ mit $f(w) \leq_K f(x)$ und $f(w) \neq f(x)$ existiert. Ein solches Element $f(x)$ ist dann gleichsam Lösung eines Optimierungsproblems, bei dem die Zielfunktion ihre Werte in einem reellen normierten Raum Y annimmt und das Lösungskonzept konvexe Kegel $K \subseteq Y$ verwendet. Im Falle eines endlichdimensionalen Bildraumes $Y = \mathbb{R}^n$ bedeutet die Bedingung (1.3), daß solche Lösungen gesucht werden, bei denen eine Verbesserung in einer Zielfunktion nur durch eine Verschlechterung in einer anderen möglich ist.

Der Effizienz- / Minimalitätsbegriff in (1.3) erweist sich allerdings mitunter als recht grob und wird in der Literatur auf verschiedene Weise präzisiert bzw. verschärft, was insbesondere der Hervorhebung bestimmter Aspekte der Optimierungsaufgabe dienen soll. Letztlich basieren diese Varianten aber meistens auf demselben Grundgedanken der Trennung einer Obermenge von $f(A) - f(x)$ und einer (offenen) Obermenge des negativen Ordnungskegels. Dies legt natürlicherweise die Verwendung der konvexen Distanzfunktion

$$\boldsymbol{d}(y,\ -K) := \inf\{\|y - (-k)\| \mid k \in K\} = \inf\{\|y + k\| \mid k \in K\}$$

bei der Formulierung von Effizienzbedingungen nahe; sie gestattet insbesondere, das vektorwertige Ausgangsproblem auf ein skalares zurückzuführen. Ist beispielsweise $x \in A$ ein striktes Minimum der Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$, also $\boldsymbol{d}(f(w) - f(x),\ -K) > 0$ für $w \neq x$, so liegt in $f(x)$ ein effizienter Punkt von $f(A)$ vor. Im 4. Abschnitt dieser Arbeit werden hinreichende und notwendige Effizienzkriterien angegeben, die auf dieser Art der Skalarisierung fußen; das folgende Beispiel soll dies illustrieren.

Es seien der Raum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der euklidischen Norm, f eine Funktion, definiert durch

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto (-pq, p+q) \in \mathbb{R}^2,$$

$A := [0,\ 1] \times [-1,\ 0]$ und als Ordnungskegel auf $\mathbb{R}^2$ der nichtnegative Quadrant

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(m,n) \in \mathbb{R}^2 \mid m \geq 0,\ n \geq\ 0\}.$$

Mit der durch $\mathbb{R}^2_+$ induzierten Ordnung gilt $f(0,-1) \leq_{\mathbb{R}^2_+} f(u,v)$ für alle $(u,v) \in A$. Außerdem hat man $\boldsymbol{d}(f(u,v)-f(0,-1),\ -\mathbb{R}^2_+) > 0$, wenn $(u,v) \in A \setminus \{(0,-1)\}$. Nach dem oben Gesagten ist also $f(0,-1)$ ein effizienter Punkt von $f(A)$, d. h. $(f(A)-f(0,-1)) \cap -\mathbb{R}^2_+ = \{(0,0)\}$.
Darüber hinaus gilt aber noch mehr:
Es sind $\mathbb{R}_+(A-(0,-1)) = \mathbb{R}^2_+$ und $\mathbb{B} := \{(t,1-t) \mid t\ \in [0,\ 1]\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2_+$, was unter anderem bedeutet, daß $\mathbb{R}_+\mathbb{B} = \mathbb{R}^2_+$ gilt. Wegen

$$f'(p,q) = \begin{pmatrix} -q & -p \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat man

$$(0,1)f'(0,-1)\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Somit existiert zu jedem Punkt $u \in \mathbb{B}$ ein Element e aus der Schnittmenge von Ordnungskegel und $\{v\ \in\ \mathbb{R}^2 \mid \|v\| \leq 1\}$, dem Einheitskreis, mit

$$e \cdot f'(0,-1)(u) > 0,$$

nämlich $e = (0,1)$. Zudem ist $\mathbb{R}^2_+$ sein eigener Dualkegel, d. h. der Kegel bestehend aus den Punkten $y \in \mathbb{R}^2$ mit $k \cdot y \geq 0$ für jedes $k \in \mathbb{R}^2_+$. Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, unter denen im 4. Abschnitt zweierlei unter allgemeineren Bedingungen gezeigt wird.
Zum einen gilt für hinreichend nahe an $x := (0,-1)$ gelegene Punkte $w \in A$, mit anderen Worten für $w \in A\ \cap\ B(x,\ s)$, $B(x,\ s) = \{v\ \in\ \mathbb{R}^2 \mid \|x-v\| \leq s\}$ mit hinreichend kleinem $s > 0$, daß

$$\boldsymbol{d}(f(w)-f(x),\ -\mathbb{R}^2_+)\ \geq\ d\|w-x\| \tag{1.4}$$

sowie

$$\boldsymbol{d}(f(w)-f(x),\ -\mathbb{R}^2_+)\ \geq\ c\|f(w)-f(x)\|, \tag{1.5}$$

wobei $c > 0,\ d > 0$, und zum anderen resultiert aus (1.5) eine Effizienzaussage, die deutlich stärker als (1.3) ist, nämlich

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ : \mathbb{R}_+(f(A\ \cap\ B(x,\ s)) - f(x))\ \cap\ (B(0,\ \delta) - \mathbb{R}^2_+)\ \subseteq\ B(0,\ \varepsilon).$$

Darüber hinaus folgt wegen (1.4) die Wohlgestelltheit des parametrisierten Minimierungsproblems

$$\min\{\ \boldsymbol{d}(f(w)-f(x),\ -\mathbb{R}^2_+) \mid w\ \in\ A\}$$

im Tychonoffschen Sinne (siehe z.B. [68]), da es eine eindeutige Lösung x gibt, gegen die alle Folgen $\{w_n\}, w_n \in A$, mit $\boldsymbol{d}(f(w_n)-f(x),\ -\mathbb{R}^2_+) \longrightarrow 0$ konvergieren.

Das Vorangegangene zeigt typischerweise, daß die Behandlung von vielen Vektoroptimierungsproblemen mittels Skalarisierung zur Minimierung von Funktionen führt, die Kompositionen einer vektorwertigen, stetigen oder differenzierbaren (inneren) Abbildung mit einer konvexen (äußeren) Funktion darstellen. Diese sind seit längerem Gegenstand von Veröffentlichungen und werden darin oftmals unter der Sammelbezeichnung "Convex composite functions" eingeordnet. Lemaire [59] entwickelt Kettenregeln für den Fall, daß die innere vektorwertige Funktion konvex bezüglich einer Teilordnung des Bildraumes ist. Burke / Ferris [18] behandeln die Minimierung solcher Komposita durch einen Algorithmus vom Gauss-Newton-Typ. Burke / Poliquin [19] sowie Yang [88] geben Minimalitätsbedingungen an, welche die zweifache Differenzierbarkeit der inneren Funktion voraussetzen. Minimalitätsbedingungen vom Karush-Kuhn-Tucker-Typ finden sich bei Zheng / Ng [93]. Für stetige lineare innere Funktionen behandeln Mordukhovich und Nam [64] Optimierungsprobleme dieser Klasse von Abbildungen als primale Aufgabe in der Dualitätstheorie. Studniarski / Jeyakumar [77] untersuchen den Fall (lokal) Lipschitz-stetiger äußerer Funktionen, was stetige konvexe Abbildungen einschließt.

Im Rahmen dieser Arbeit soll der Begriff "konvex-zusammengesetzte Funktionen" verwendet werden, der für Komposita

$$g \circ f$$

mit differenzierbarem $f : X \longrightarrow Y$ (als innerer Abbildung) und konvexem $g : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (als äußerer Abbildung) steht. Dabei sind X ein linearer oder normierter Raum und Y ein normierter Raum.

Die Betrachtung konvex-zusammengesetzter Funktionen ermöglicht unter anderem eine natürliche Generalisierung rein konvexer Optimierungsprobleme. In der Vektoroptimierung kann die Abbildung g wie im oben angegebenen Beispiel als Distanzfunktion auftreten, in der Approximationstheorie etwa als Norm. Letzterer Fall wurde bereits seit Ende der sechziger Jahre unter anderem bei Brosowski [14], Henze [41], Krabs [56] und Wulbert [85] untersucht. Bei einer Erweiterung des Bereichs reellwertiger Normen auf solche, die vektorwertig sind, bieten sich Kombinationen aus Distanz- und Normabbildung als äußere, konvexe Funktion an, nämlich jene vom Typ $\boldsymbol{d}(|||\cdot||| - |||f(x)|||,\ -K)$ mit vektorieller Norm $|||\cdot|||$ und innerer Funktion f. Approximationsprobleme vektorieller Art mit affin-linearen inneren Abbildungen werden in [31] und [33] untersucht.

Die Frage nach Kriterien für Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen wird in einem allgemeineren Ansatz von Jeyakumar [51] behandelt, unter anderem durch Benutzung entsprechender Kettenregeln. Ähnliche Methoden ermöglichen über Skalarisierung bei Yang und Jeyakumar [87] die Angabe von Effizienzbedingungen für eine Menge $G(A)$ bezüglich eines Ordnungskegels $\mathbb{R}^p_+$, wobei A konvexe Teilmenge eines vollständigen Raumes X ist und

$$G : X \ni v \longmapsto ((g_1 \circ f_1)(v), ..., (g_p \circ f_p)(v)) \in \mathbb{R}^p$$

mit $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig / differenzierbar, $g_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex, $i = 1, ..., p$, sind.

Für die Formulierung von Minimalitätsaussagen empfiehlt sich eine geeignete Wahl der angewendeten Minimalitätsbegriffe, und einfache Beispiele legen nahe, daß sowohl das stark eindeutige Minimum ("Sharp minimum") als auch die Menge stark mehrdeutiger Minima ("Set of weak sharp minima") in Frage kommen. Für eine Funktion h auf einem normierten Raum X mit Wertebereich $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und eine Menge $B \subseteq X$ liegt in $x \in B$ ein stark eindeutiges Minimum vor, falls (lokal) um x

$$h(v) \;\geq\; h(x) + a\|v - x\| \tag{1.6}$$

für $w \in B$ und eine positive Zahl a gilt. Beispielsweise hat eine Abbildung

$$\|f(\cdot) - f(x)\| \text{ mit } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ m \geq n,$$

ein stark eindeutiges Minimum in x, falls f Fréchet-differenzierbar in x mit injektivem $f'(x)$ ist, so etwa für $x = (-2,0)$

$$\mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto \|(pq, p^2+2p)\| = \|f(p,q) - f(-2,0)\| \in \mathbb{R};$$

dabei ist $f(p,q) := (pq+1, (p+1)^2)$.

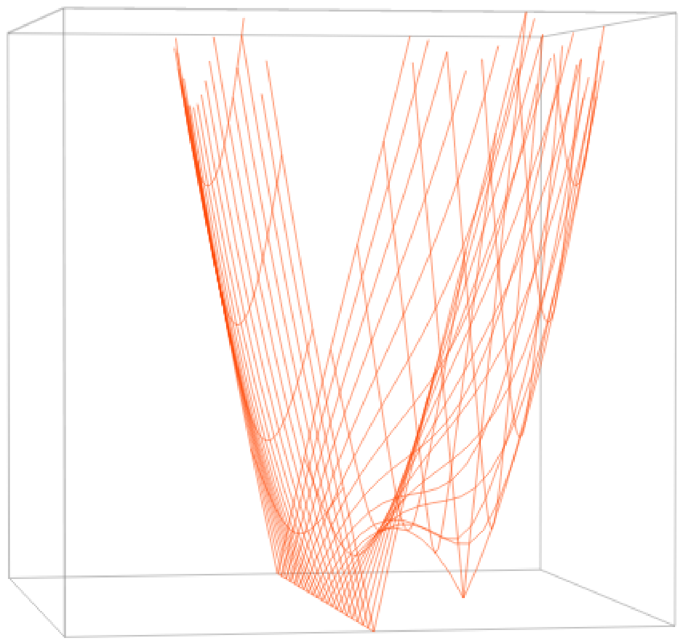

Fig. 1 $h(p,q) = \|(pq, p^2+2p)\| = \sqrt{p^2(q^2+(p+2)^2)}$

Als "Strongly unique local minimum" bezeichnet, finden stark eindeutige Minima Eingang bei Cromme [24]. Eng dazu verwandt ist der von Newman und Shapiro geprägte Begriff der "Strong uniqueness" [66] (siehe dazu auch [21]).
In einer Arbeit von Zheng, Yang und Teo [94] werden im Kontext der Vektoroptimierung Kriterien für stark eindeutige Minima einer skalarisierten vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K) + \boldsymbol{d}(\cdot,\ A)$ entwickelt.

Die Notwendigkeit, insbesondere bei konvex-zusammengesetzten Funktionen die Möglichkeit mehrerer Minima zuzulassen, zeigt sich schon bei Komposita einfacher Funktionen. Als Beispiel sei $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(p,q) := (p, -p, -pq)$, $g(u,v,w) := \max\{u,v,w\}$ genannt. Die Funktion $g \circ f$ ist nichtkonvex und hat in $(0,0)$ kein stark eindeutiges Minimum, aber eine Menge von Minima, zu der auch $(0,0)$ gehört, nämlich $C := \{0\} \times \mathbb{R}$ mit

$$(g \circ f)(p,q) \geq (g \circ f)(x,y) \ + |p| \ = \ (g \circ f)(x,y) + \boldsymbol{d}((p,q),\ C) = \boldsymbol{d}((p,q),\ C)$$

für $(p.q) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in C$.

Als eine Konsequenz führten Burke und Ferris [17] den Begriff des "Set of weak sharp minima" ein. Dieses Konzept erweitert und verallgemeinert den Begriff des stark eindeutigen Minimums, indem der Term $\|v - x\|$ in (1.6) durch $\boldsymbol{d}(v,\ C)$, der Distanz von v zu einer Menge $C \subseteq A$ von

Minima, ersetzt und

$$h(v) \;\geq\; h(y) + a\boldsymbol{d}(v,\, C)$$

für alle $v \in A,\; y \in C$ und ein $a > 0$ gefordert wird; h ist dann also auf C konstant. Die bereits erwähnte Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto \|(pq, p^2+2p)\| = \sqrt{p^2(q^2+(p+2)^2)} \in \mathbb{R}$ hat gemäß dieser Definition neben dem stark eindeutigen Minimum in $(-2,0)$ auch eine Menge stark mehrdeutiger Minima, denn für $(p,q) \in A := \{(s,t) \mid -\dfrac{3}{2} \;\leq\; s\}$ und $(0,r) \in C := \{0\} \times \mathbb{R}$ gilt

$$h(p,q) \geq \frac{1}{2}|p| = 0 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{d}((p,q),\, C) = h(0,r) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{d}((p,q).$$

Man beachte, daß die konvex-zusammengesetzte Funktion h nicht konvex auf A ist; siehe dazu auch Fig. 1.

Burke und Deng [15] geben notwendige und hinreichende Kriterien für stark mehrdeutige Minima konvexer unterhalbstetiger Abbildungen an, die auch als Ausgangspunkt für Überlegungen zu konvex-zusammengesetzten Funktionen wichtig sind.

In [76] (endlich-dimensionaler Spezialfall) und [86] werden lokale mehrdeutige Minima $x \in C$ von Skalarisierungsfunktionen $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\; -K)$ im Falle eines Ordnungskegels K mit nichtleerem Inneren und gegebener kompakter Basis $\mathbb{B}$ des Dualkegels zu K durch eine Überdeckungseigenschaft charakterisiert, nämlich der Existenz einer Umgebung U von $x,\; a > 0$ und Mengen $A_l,\; l$ Extrempunkt von $\mathbb{B}$, mit $\bigcup A_l \supseteq A \cap U$ und $(l \circ f)(v) - (l \circ f)(x) > a\boldsymbol{d}(v,\, C)$ für $v \in (A_l \cap U) \setminus C$.

Ausgehend von vollständigen normierten Räumen X und Y, $E \subseteq X$ abgeschlossen und konvex, glatten Abbildungen $f_k : X \longrightarrow Y$ sowie unterhalbstetigen konvexen Abbildungen $g_k : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\; k = 0,1,\ldots,m$, betrachten Zheng und Ng [93] die Menge

$$D := \bigcap_{i=1,\ldots,m} \{v \;\in\; E \mid (g_i \circ f_i)(v) \;\leq\; 0\},$$

für $b > 0$ die Funktion

$$h : X \ni w \longmapsto (g_0 \circ f_0)(w) + b(\sum_{i=1}^{m} \max\{(g_i \circ f_i)(w),\; 0\} + \boldsymbol{d}(w,\, E)) \;\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

und $x \in D$. Mit Hilfe entsprechend modifizierter Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen erhalten sie dann hinreichende beziehungsweise notwendige Bedingungen dafür, daß $a > 0,\; r > 0$ mit $h(u) \geq h(x) + a\boldsymbol{d}(u,\, C)$ für alle $u \in B(x,\; r)$ existieren, wobei die Menge C durch $C := \{w \;\in\; D \mid (g_0 \circ f_0)(w) \leq\; (g_0 \circ f_0)(x)\}$ definiert ist.

Die Bedeutung der beiden genannten Minimalitätsbegriffe besteht darin, Funktionen $\alpha \circ \|\cdot - x\|$ bzw. $\alpha \circ \boldsymbol{d}(\cdot\,,\, C)$, wobei α eine Gerade mit positiver Steigung ist, auf A derart unterhalb h zu plazieren, daß erstere h in x berührt und letztere dies in den Punkten von C tut (siehe Fig. 2).

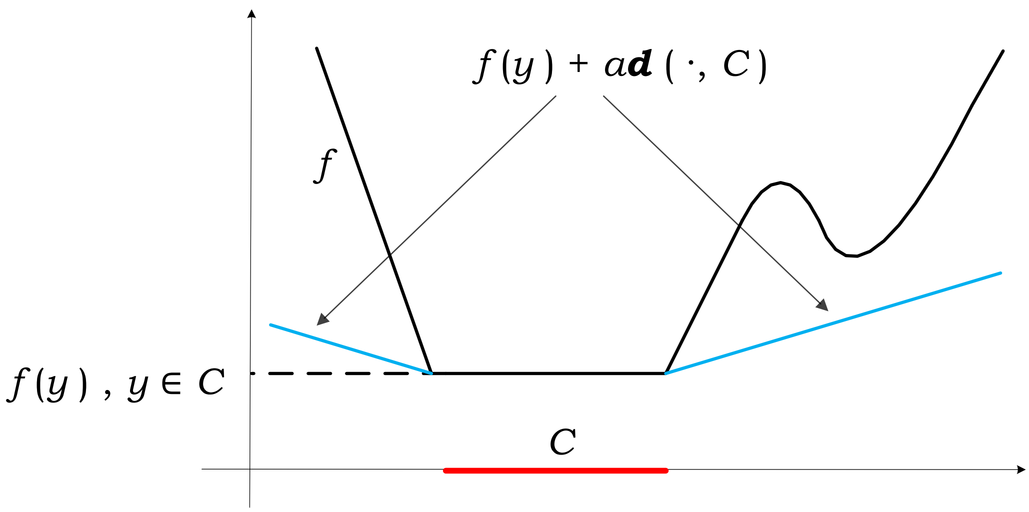

Fig. 2 Funktion mit Menge mehrdeutiger Minima

Daneben liefern die Ungleichungen $\frac{1}{a}(h(v)-h(x)) \geq \|v-x\|$ bzw. $\frac{1}{a}(h(v)-h(y)) \geq \boldsymbol{d}(v, C)$ auch "Error bounds" für die Mengen $\{x\}$ bzw. C sowie ferner, falls eine (Richtungs-)Differenzierbarkeit von h und entsprechende sonstige Voraussetzungen - wie z. B. die Konvexität von A - vorliegen, notwendige Minimalitätsbedingungen der Form

$$h'_+(x,\ v-x)\ \geq\ a\|v-x\|,\ v\in A\ \text{ bzw. } h'_+(y,\ v-y)\ \geq\ a\boldsymbol{d}(\cdot\ ,\ C)'_+(y,\ v-y),\ v\in A,\ y\in C;$$

dabei seien die Ableitungen rechtsseitige.

Vor dem Hintergrund des oben Ausgeführten und der erwähnten Literatur ergeben sich fünf wesentliche Ziele dieser Arbeit. Diese sind

- die Entwicklung von neuartigen hinreichenden Bedingungen für stark eindeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen, welche Standardvoraussetzungen, beispielsweise festgelegte topologische Eigenschaften der betrachteten Mengen (wie die geforderte Abgeschlossenheit von A in [94, Definition 2.1]) oder die Beschränkung auf bestimmte Typen äußerer Abbildungen (wie die ausschließlichen Betrachtung von Normen in der Approximationstheorie [85] oder von Distanzfunktionen [94]), weitestgehend vermeiden.

- die Formulierung einer hinreichenden Bedingung für stark mehrdeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktion unter Zulassung unendlich-dimensionaler, nicht notwendig vollständiger Räume, da [93, Theorem 4.1], die nach unserem besten Wissen einzige dazu bekannte Aussage, zwingend die Vollständigkeit des Definitionsraumes voraussetzt und der Beweis Unklarheiten zurückläßt. Das bereits erwähnte Resultat in [86] bezieht sich speziell auf Vektoroptimierungsprobleme, bei denen der Lösungsbegriff durch einen Ordnungskegel K mit nichtleerem Inneren gegeben ist, und nutzt eine Skalarisierung mittels Distanzfunktionen $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$. Die Forderung nach einem Kegel

mit nichtleerem Inneren ist jedoch stark einschränkend und in allgemeinen Räumen oft nicht erfüllt. Gleichzeitig ist die Aussage in [86] unspezifisch hinsichtlich der Eigenschaften der inneren Abbildung.
Im Gegensatz zu den oben genannten Ergebnissen ist ein Kriterium für allgemeine konvex-zusammengesetzte Funktionen anzustreben.

Darüber hinaus sollen Bedingungen für die (Un-)Beschränktheit von Mengen stark mehrdeutiger Minima angegeben werden, was nach unserem besten Wissen in der Literatur bislang nicht geschehen ist.

- die Betrachtung der grundlegenden der verwendeten Minimalitätsbedingungen in einem allgemeineren Rahmen als den normierter Räume.

- die Verwendung der erzielten Minimalitätsbedingungen in der Vektoroptimierung zur Entwicklung von neuen Kriterien für effiziente Elemente von Mengen $f(A)$ mit differenzierbarem f mittels Skalarisierung, und zwar hinsichtlich des von Borwein / Zhuang eingeführten und untersuchten Begriffs der Supereffizienz, da verwandte Resultate in der Literatur als unbefriedigend erscheinen. Wichtig zugunsten einer möglichst großen Allgemeinheit ist der Verzicht auf zusätzliche Konvexitätsbedingungen - wie bei dem thematisch ähnlichen Theorem 4.4 in [30] - beziehungsweise topologische Eigenschaften der betrachteten Mengen und die Einbeziehung beliebiger unendlich-dimensionaler Räume in Kontrast etwa zu [87].

- die Erzielung von neuen Bedingungen für effiziente Elemente speziell in der vektorwertigen Approximation, namentlich der Minimierung von Mengen $|||F(A)|||$ mit differenzierbarem F und vektorieller Norm $|||\cdot|||$ bezüglich eines vorgegebenen Ordnungskegels. Dabei sollen F und $|||\cdot|||$ keiner speziellen Klasse von Abbildungen (wie etwa den stetigen linearen) beziehungsweise Normen angehören sowie neben der "gewöhnlichen" Effizienz zumindest auch die starke / strikte in Betracht gezogen und damit ein letztlich umfassenderer Ansatz als in [31] und [47] gewählt werden.

Die Resultate finden sich wie nachfolgend aufgeführt in den einzelnen Abschnitten:

Abschnitt 2 enthält neben einer Zusammenstellung relevanter Definitionen und Aussagen auch eine Verallgemeinerung des Satzes von Alaoglu im Kontext der Konvexen Analysis linearer topologischer Räume (Theorem 2.14). In Abschnitt 3 fließt diese in die Formulierung zweier hinreichender Minimalitätskriterien für konvex-zusammengesetzte Abbildungen ein. Dabei wird für das grundlegende Theorem 3.1 eine Voraussetzung benutzt, die aus einer entsprechenden Modifikation der in Theorem 2.16 (2) angegebenen Pschenichnyi-Rockafellar-Bedingung folgt. Die Äquivalenz beider Bedingungen unter einer Konvexitätsannahme trifft auch in einer generalisierten Form zu, was Inhalt von Theorem 3.3 ist.
Eine notwendige Minimalitätsbedingung, wobei die äußere Abbildung lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Proposition 3.1.

Mit Theorem 3.5 wird ein hinreichendes Minimalitätskriterium für stark mehrdeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen bewiesen. Es verwendet eine Abschwächung einer auf dem Satz von Brønsted-Rockafellar beruhenden Projektionsaussage, wobei auf die Vollständigkeit der Räume verzichtet wird, dies analog zu den bekannten Ergebnissen über stark mehrdeutige Minima rein konvexer Abbildungen. Je ein hinreichendes und ein notwendiges Kriterium für die (Un-)Beschränktheit von Mengen stark mehrdeutiger Minima sind in Theorem 3.7 zusammengefaßt.

Die neuen Resultate über stark eindeutige beziehungsweise stark mehrdeutige Minima aus Abschnitt 3, namentlich die Theoreme 3.2 und 3.5, dienen dann in Abschnitt 4 zum Beweis von Optimalitätsbedingungen auf der Grundlage einer Skalarisierung per Distanzfunktion. So ergibt sich mittels Anwendung von Theorem 3.2 mit Theorem 4.9 eine Minimalitätsaussage bezüglich eines skalarisierten Optimierungsproblems. Zudem werden sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen für effiziente, stark effiziente, Henig- und supereffiziente Elemente angeführt. Die Frage, welche Effizienzaussagen getroffen werden können, falls eine Skalarisierungsabbildung eine Menge stark mehrdeutiger Minima besitzt, behandelt Abschnitt 4.5. Eine Antwort darauf erhält man mit Theorem 4.13, das auf Theorem 3.5 basiert.

Gegenstand von Abschnitt 5 ist mit der vektorwertigen Approximation ein Spezialfall der Vektoroptimierung. Auch hier werden hinreichende sowie notwendige Effizienzkriterien entwickelt, und zwar unter Benutzung von Ergebnissen der Abschnitte 3 und 4, wobei sich der Begriff der starken / strikten Effizienz im wichtigsten Resultat (Theorem 5.1) als besonders nützlich erweist. Als wesentliche Bedingung dafür, daß $F(x)$ ein stark / striktes Element von $|||F(A)|||$ ist, wird in diesem Satz für gegebenen Ordnungskegel K die Existenz von Elementen l^* des Dualkegels von K und Λ des Subdifferentials der vektoriellen Norm in $F(x)$ mit $(l^* \circ \Lambda)(F'(x)(u)) > 0$ für alle Elemente u einer kompakten Basis eines $\mathbb{R}_+(A-x)$ einschließenden Kegels gefordert.

2. Bezeichnungen, Definitionen und grundlegende Sätze

Dieser Abschnitt enthält Darstellungen der in den Abschnitten 3, 4 und 5 verwendeten Definitionen und Aussagen, die, dem Gegenstand dieser Arbeit entsprechend, vorwiegend den Gebieten Funktionalanalysis und Konvexe Analysis zuzuordnen sind, wobei die Differentiation, insbesondere jene konvexer Funktionen, einen Schwerpunkt bildet. Neben solchen von allgemeinem Interesse finden sich auch speziellere Ergebnisse, die in den Beweisen verwendet werden, beziehungsweise der Erläuterung der erzielten Resultate dienen, wie etwa die Lemmata 2.1 und 2.2.

2.1 Spezielle Mengen

Wie üblich bezeichnen $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen und $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+^>$, $\mathbb{R}_-^<$) die Menge der nichtnegativen (positiven, negativen) reellen Zahlen. Daneben stehen $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ bzw. $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ für erweiterte reelle Zahlen, die dazu dienen, reellwertige Funktionen außerhalb ihres Definitionsbereiches unter Benutzung von $+\infty$ (gelegentlich auch $-\infty$) fortzusetzen, etwa durch Summenbildung mit der Indikatorfunktion bezüglich der Definitionsmenge (siehe dazu Definition 2.23). Damit können beispielsweise Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen in äquivalente ohne Nebenbedingungen transformiert werden. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
r+(+\infty) = +\infty + r &= +\infty \quad \text{für} \quad r \neq -\infty,\\
r+(-\infty) = -\infty + r &= -\infty \quad \text{für} \quad r \neq +\infty,\\
r\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot r &= \pm\infty \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}_+^> \cup \{+\infty\},\\
r\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot r &= \mp\infty \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}_-^< \cup \{-\infty\},\\
\frac{r}{\pm\infty} &= 0 \qquad\;\; \text{für} \quad r \in \mathbb{R},\\
\frac{\pm\infty}{r} &= \pm\infty \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}_+^>,\\
\frac{\pm\infty}{r} &= \mp\infty \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}_-^<,\\
+\infty + (-\infty) &= +\infty.
\end{aligned}
$$

Sind M und N nichtleere Mengen, wird mit N^M die Menge der Abbildungen von M nach N bezeichnet.

Definition 2.1. Es seien $\mathbb{T}$ ein topologischer Raum und $S \subseteq \mathbb{T}$.

(1) Das Innere von S wird mit $\mathrm{int}(S)$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathrm{int}(S) := \bigcup_{O \subseteq S,\ O \text{ offen}} O.$$

(2) Der Abschluß von S wird mit cl(S) bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathrm{cl}(S) := \bigcap_{S \subseteq A,\ A \text{ abgeschlossen}} A.$$

(3) Der Rand von S wird mit ∂S bezeichnet und ist definiert durch

$$\partial S := \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S).$$

Definition 2.2. Ein topologischer Raum $\mathbb{T}$ heißt separabel, wenn eine höchstens abzählbare Teilmenge S von $\mathbb{T}$ mit $\mathrm{cl}(S) = \mathbb{T}$ existiert.

Eine wichtige Trennungseigenschaft topologischer Räume gibt Anlaß zu unten stehender Definition.

Definition 2.3. Ein topologischer Raum $\mathbb{T}$ heißt hausdorffsch, wenn es für alle $x,\ y \in \mathbb{T}$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

Die Vorstellung von Kompaktheit einer Teilmenge des euklidischen Anschauungsraums als Abgeschlossenheit zusammen mit Beschränktheit ist nach dem Satz von Heine-Borel gleichbedeutend der Eigenschaft, daß jede Überdeckung der Teilmenge mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dieser Sachverhalt führt zu einer Verallgemeinerung dieses Kompaktheitsbegriffs auf beliebige topologische Räume.

Definition 2.4. Es sei $\mathbb{T}$ ein topologischer Raum. Dann heißt $K \subseteq \mathbb{T}$ kompakt, falls jede Überdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i, \quad O_i \text{ offen}$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} O_{i_j}$$

enthält.

Bemerkung 2.1

- Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.
- Eine kompakte Teilmenge eines hausdorffschen Raumes ist abgeschlossen.
- Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist kompakt, insbesondere nehmen reellwertige Funktionen auf einer kompakten Menge ein globales Minimum und ein globales Maximum an.

Beispiel 2.1 Aus Definition 2.4 folgt unmittelbar, daß Räume mit endlich vielen Elementen bzw. endlich vielen offenen Mengen kompakt sind.

Beispiel 2.2 Das reelle Intervall $[0,\ 1]$ ist kompakt, aber dessen Schnittmenge mit den rationalen Zahlen nicht.

Beispiel 2.3 Sind $\mathbb{T}$ ein hausdorffscher topologischer Raum, $\mathbb{O}$ dessen Topologie und ∞ ein Element, das nicht zu $\mathbb{T}$ gehört, so wird durch

$$\mathbb{S} := \mathbb{O} \cup \{(\mathbb{T} \cup \{\infty\}) \setminus K \mid K \text{ kompakte Teilmenge von } \mathbb{T}\}$$

eine Topologie $\mathbb{S}$ auf $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$ definiert, die $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$ zu einem kompakten Raum macht (Alexandroff-Kompaktifizierung).

Der Satz von Tychonoff geht in den Beweis von Theorem 2.14 ein.

Theorem 2.1. (Tychonoff) [71, Satz 8.12], [64, Theorem 1.48]
Sind I eine nichtleere Menge und $\{\mathbb{T}_i\}_{i\,\in\,I}$ eine Familie topologischer Räume, so sind äquivalent:

(1) *Das kartesische Produkt $\prod_{i\,\in\,I} \mathbb{T}_i$ ist kompakt bezüglich der Produkttopologie.*
(2) *$\mathbb{T}_i$ ist kompakt für alle $i \in I$.*

2.2 Lineare Räume

Alle Mengen, die im folgenden betrachtet werden, sind in Mengen enthalten, die eine algebraische Struktur mit zwei Rechenoperationen tragen und als lineare Räume bezeichnet werden. Diese Rechenoperationen sind eine innere Verknüpfung auf dem kartesischen Produkt der jeweiligen Menge mit sich selber und eine Verknüpfung der Elemente der Menge mit denen eines Körpers, bei dem es sich in dieser Arbeit um den der reellen Zahlen handelt.

Definition 2.5. Es seien X eine nichtleere Menge und $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ sowie $+ : X \times X \longrightarrow X$ Funktionen. Dann heißt das Tripel $(X,\ +,\ \cdot)$ (reeller) linearer Raum, falls $(X,\ +)$ eine kommutative Gruppe ist und die Beziehungen

$$\begin{aligned} r \cdot (u+v) &= ru + rv, \\ (r+s) \cdot u &= ru + su, \\ (r \cdot s) \cdot u &= r \cdot (s \cdot u), \\ 1 \cdot u &= u \end{aligned}$$

für alle $r,\ s \in \mathbb{R}$ und $u,\ v \in X$ gelten.

Das neutrale Element der Gruppe $(X,\ +)$ wird mit "0" bezeichnet, und zur Vereinfachung schreibt man statt $(X,\ +,\ \cdot)$ kurz X und läßt das "$\cdot$" weg.
Für alle $r \in \mathbb{R}$ und $u \in X$ gilt $(-r)u = -(ru) = r(-u)$ sowie $ru = 0 \Leftrightarrow r = 0$ oder $u = 0$.

Abbildungen zwischen linearen Räumen, welche die algebraischen Strukturen respektieren, sind von besonderer Bedeutung.

Definition 2.6. Es seien X und Y lineare Räume. Eine Funktion $l : X \longrightarrow Y$ heißt linear, falls die Beziehungen

$$l(u+v) = l(u) + l(v),$$
$$l(ru) = rl(u)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ und $u,\ v \in X$ gelten.

Definition 2.7. $N(l) := \{p \in M \mid l(p) = 0\}$ steht für die Nullmenge einer Funktion $l\colon M \longrightarrow X$, wobei X ein linearer Raum und M eine nichtleere Menge sind.

Wichtige Mengenbegriffe für lineare Räume werden in den beiden nächsten Definitionen aufgeführt. Konvexe Mengen spielen eine zentrale Rolle in vielen wichtigen Aussagen der (Funktional-)Analysis.

Definition 2.8. Sei X ein linearer Raum und $S \subseteq X$

(1) $K \subseteq X$ heißt konvex, falls $tu + (1-t)v \in K$ für alle $t \in [0,1]$ und $u,\ v \in K$ gilt.

(2) Die konvexe Hülle von $S \subseteq X$ wird mit kon(S) bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathrm{kon}(S) := \bigcap_{S \subseteq T,\ T \text{ konvex}} T.$$

(3) Ist $K \subseteq X$ eine konvexe Menge, so heißt $p \in K$ Extrempunkt von K, falls $K \setminus \{p\}$ konvex ist; die Menge aller Extrempunkte von K wird mit ext(K) bezeichnet.

(4) Das algebraische Innere von S wird mit cor(S) bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathrm{cor}(S) := \{s \in S \mid \forall\, p \in X\ \exists\, t\ > 0 \text{ mit } [s,\ s+tp] \subseteq S\}.$$

(5) Ein Element $x \in X$ heißt linear erreichbar von S, wenn es ein $y \in S$ mit $y + t(x-y) \in S$ für alle $t \in]0,\ 1[$ gibt.

(6) Durch $\mathrm{acl}(S) := \{v \in X \mid v$ linear erreichbar von $S\}$ wird der algebraische Abschluß von S definiert. Im Falle der Gleichheit $\mathrm{acl}(S) = S$ heißt S algebraisch abgeschlossen.

Definition 2.9. Sei X ein linearer Raum. $K \subseteq X$ heißt Kegel, falls $tk \in K$ für alle $k \in K$ und $t \in \mathbb{R}_+$. Er heißt überdies spitz, falls zusätzlich $K \cap -K = \{0\}$ gilt.

Ein Kegel ist genau dann konvex, wenn die Inklusion $K + K \subseteq K$ besteht [46, Lemma 1.11].

Für einen konvexen Kegel K wird mittels "$\leq_K$" die durch $x \leq_K y :\Leftrightarrow y - x \in K$ definierte Ordnungsrelation bezeichnet.
Es seien X ein linearer Raum, $K \subseteq X$ ein konvexer Kegel und ∞_K ein Element, welches nicht zu X gehört, mit den Rechenregeln

$$v + \infty_K = \infty_K + v = \infty_K,\ v \in X; \quad r \cdot \infty_K = \infty_K,\ r \in \mathbb{R}_+^{>}.$$

Dann werde die durch K induzierte Ordnungsrelation auf X durch die Festlegung

$$\forall\, v \in X : v\ \leq_K\ \infty_K$$

zu einer Relation auf $X \cup \{\infty_K\}$ erweitert. Im Falle $X = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$ schreibt man $+\infty$ statt ∞_K mit den in 2.1 angegebenen Rechenregeln.

Ist M eine nichtleere Menge, so ist der effektive Definitionsbereich dom h einer Funktion $h : M \longrightarrow X \cup \{\infty_K\}$ die Menge $\operatorname{dom} h := \{p \in M \mid h(p) \neq \infty_K\}$ gegeben.

2.3 Topologische lineare und metrische Räume

Zahlreiche wichtige Optimierungsprobleme werden auf der Basis linearer Räume, die mit einer Topologie versehen sind, formuliert, wodurch auch Begriffe wie Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Umgebung oder die Stetigkeit von Funktionen zentrale Rollen spielen.

Definition 2.10. Es seien X ein linearer Raum und $\mathbb{O}$ eine Topologie auf X. Dann heißt das Paar $(X,\ \mathbb{O})$ topologischer linearer Raum, falls $\{v\}$ für jedes $v \in X$ abgeschlossen ist und die Funktionen $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ und $+ : X \times X \longrightarrow X$ stetig auf $\mathbb{R} \times X$ bzw. $X \times X$ sind, wobei $\mathbb{R} \times X$ bzw. $X \times X$ die entsprechenden Produkttopologien tragen. Ein topologischer linearer Raum wird lokalkonvexer Raum genannt, wenn $\mathbb{O}$ eine Umgebungsbasis von 0 aus konvexen Mengen besitzt.

Ein topologischer linearer Raum gemäß obiger Definition ist hausdorffsch.

Zur Vereinfachung schreibt man X statt $(X,\ \mathbb{O})$.

Definition 2.11. Eine Teilmenge S eines topologischen linearen Raumes heißt beschränkt, wenn es für jede Nullumgebung U ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $S \subseteq rU$ gibt.

Eine wichtige Tatsache über konvexe Teilmengen topologischer linearer Räume ist die Aussage von Proposition 2.1.

Proposition 2.1. [64, Proposition 2.11]
Ist M eine konvexe Teilmenge eines topologischen linearen Raumes, so sind $\operatorname{int}(M)$ *und* $\operatorname{cl}(M)$ *ebenfalls konvex.*

Definition 2.12. Es seien X, Y topologische lineare Räume.

(1) $L(X,\ Y) := \{l : X \longmapsto Y \mid l \text{ linear und stetig}\}$
Im Falle $Y = \mathbb{R}$ schreibt man statt $L(X, \mathbb{R})$ kurz X^*. Diese Menge wird dann als (topologischer) Dualraum von X bezeichnet.

(2) Die Initialtopologie auf X bezüglich X^* wird als schwache Topologie bezeichnet.

(3) Die Initialtopologie auf $L(X,\ Y)$ bezüglich der Menge linearer Funktionen $\{h_x : L(X,\ Y) \ni L \longmapsto L(x) \in Y \mid x \in X\}$ wird mit $\mathbb{T}(L(X,\ Y),\ X)$ bezeichnet.
Ist $Y = \mathbb{R}$, so spricht man auch von der Schwach*-Topologie (auf X^*).

Wie der Dualraum einem topologischen linearen Raum, so ist die adjungierte Abbildung einer stetigen linearen Funktion zugeordnet.

Definition 2.13. Es seien X und Y topologische lineare Räume und $l \in L(X,\, Y)$. Dann heißt die Abbildung

$$l^* : Y^* \ni y^* \longmapsto y^* \circ l \in X^*$$

die adjungierte Abbildung von l.

Bemerkung 2.2 Für einen linearen topologischen Raum X bildet die Gesamtheit der Mengen $V_{n,\, \boldsymbol{x},\, \varepsilon}$, definiert durch

$$V_{n,\, \boldsymbol{x},\, \varepsilon} := \bigcap_{j=1}^{n} \{l^* \in X^* \mid |l^*(x_j)| < \varepsilon\}$$

mit $n \geq 1,\ \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n,\ \varepsilon > 0$, eine Umgebungsbasis von 0 der Schwach*-Topologie. Somit ist

$$\{L^* + V_{n,\, \boldsymbol{x},\, \varepsilon} \mid n \geq 1,\ \boldsymbol{x} \in X^n,\ \varepsilon > 0\}$$

eine Umgebungsbasis eines beliebigen $L^* \in X^*$. Der Dualraum X^* ist, ausgestattet mit der Schwach*-Topologie, ein lokalkonvexer Raum.

Der Abschluß einer Menge $S \subseteq X^*$ bezüglich der Schwach*-Topologie wird im folgenden zur besseren Unterscheidung mit cl*(S) bezeichnet.

Theorem 2.2 ist ein Trennungssatz für schwach*-abgeschlossene konvexe Mengen.

Theorem 2.2. [64, Corollary 2.68]
Sind X ein lokalkonvexer Raum, $A \subseteq X^*$ schwach-abgeschlossen und konvex sowie $L^* \in X^* \setminus A$, so existiert ein $z \in X$ mit*

$$L^*(z) > \sup\, \{l^*(z) \mid l^* \in A\}.$$

Weitere Trennungssätze findet man in [47], insbesondere den Satz von Eidelheit über die Trennung zweier nichtleerer, konvexer Teilmengen eines linearen topologischen Raumes X, von denen eine ein nichtleeres Innere besitzt, durch ein Funktional aus X^*. Neuere Trennungsaussagen für konvexe Kegel linearer Räume mit nichtleerem Relativ-Inneren werden in [53] angegeben.

Für den Satz von Alaoglu (Theorem 2.15), der eine fundamental wichtige Kompaktheitsaussage ist, wird der Begriff der polaren Menge benötigt.

Definition 2.14. Für eine nichtleere Teilmenge M eines topologischen linearen Raumes X wird deren polare Menge M° durch

$$M^\circ := \{l^* \in X^* \mid \forall\, v \in M : l^*(v) \leq 1\}$$

definiert.

Mit der gleichgradigen Stetigkeit wird eine Art Stetigkeitsbegriff für Familien von Funktionen formuliert und im Satz von Arzelá-Ascoli (Theorem 2.18) und Theorem 3.3 verwendet.

Definition 2.15. Es seien X und Y topologische lineare Räume sowie $F \subseteq Y^X$. Dann heißt F gleichgradig stetig, falls für alle $x \in X$ und alle Nullumgebungen $W \subseteq Y$ eine Nullumgebung $U \subseteq X$ existiert, so daß für jedes $f \in F$ die Inklusion $f(x+U) \subseteq f(x)+W$ gilt.

Theorem 2.3. (siehe [65, Theorem 8.6.4])
Für einen topologischen linearen Raum X und $F \subseteq X^*$ sind äquivalent:

(1) *F ist gleichgradig stetig.*
(2) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Nullumgebung $U \subseteq X$ mit $|l^*(u)| < \varepsilon$ für alle $u \in U$, $l^* \in F$.*
(3) *Es existiert eine Nullumgebung $V \subseteq X$ mit $F \subseteq V^\circ$.*

Kegelbasen sind Teilmengen von Kegeln, deren Elemente durch Bildung von Vielfachen alle Kegelpunkte darstellen können. In der Literatur wird für eine Basis oftmals die Eindeutigkeit der Darstellung verlangt, worauf aber in Definition 2.16 (2) verzichtet wird.
Unter anderem bei der Formulierung von Minimalitätskriterien ist der jedem Kegel zugeordnete Dualkegel ebenso wie der mit einer Menge A und $x \in A$ verknüpfte Normalenkegel $N(A,\, x)$ von besonderer Bedeutung.

Definition 2.16. Es seien X ein topologischer linearer Raum, $x \in A \subseteq X$ und $K \subseteq X$ ein Kegel.

(1) Eine Teilmenge $\mathbb{E}$ von K heißt erzeugende Menge von K, wenn $K = \mathbb{R}_+\mathbb{E}$ sowie $0 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{E})$ gelten.
(2) Eine Teilmenge $\mathbb{B}$ von K heißt Basis von K, wenn $\mathbb{B}$ konvex ist und K erzeugt.
(3) Die Menge $K^* := \{l^* \in X^* \mid l^*(k) \geq 0$ für alle $k \in K\}$ heißt Dualkegel von K.
(4) Die Menge $K^+ := \{l^* \in X^* \mid l^*(k) > 0$ für alle $k \in K \setminus \{0\}\}$ heißt Quasi-Inneres von K.
(5) Die Menge $N(A,\, x) := \{v^* \in X^* \mid v^*(w-x) \leq 0$ für alle $w \in A\}$ heißt Normalenkegel von A in x (siehe Fig. 3)

Man beachte, daß ein Kegel, der eine Basis besitzt, auch spitz ist.

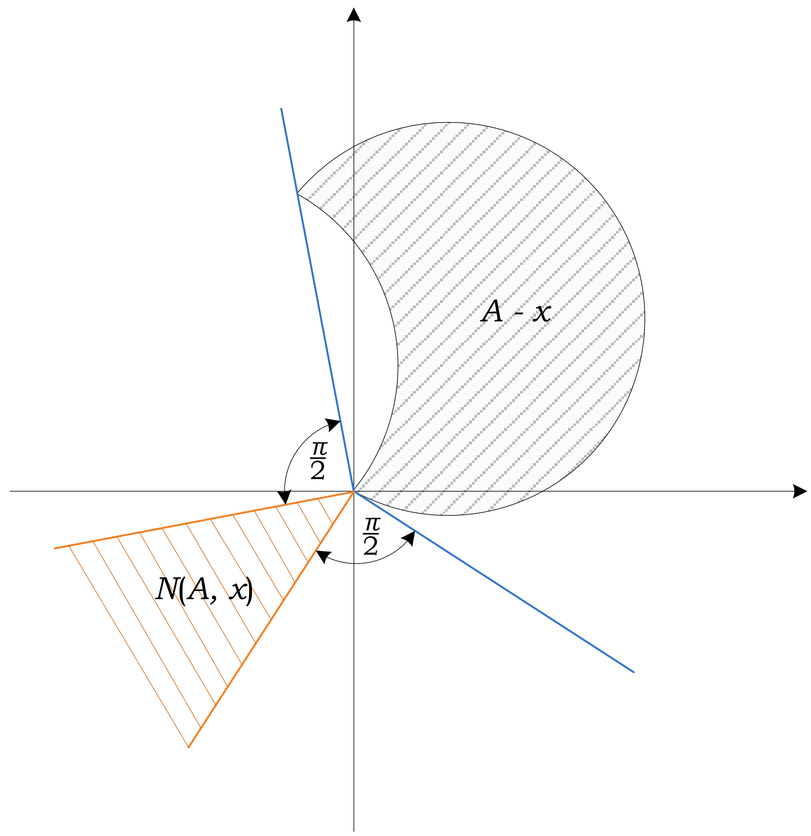

Fig. 3 Normalenkegel $N(A,\ x)$ von A in x.

Definition 2.17. Es seien X ein topologischer linearer Raum, $K \subseteq X$ ein konvexer Kegel. Dann heißt K Daniell-Kegel, falls jedes Netz $\{x_j\}$ in K, das monoton fällt (d.h. $i \leq j \Rightarrow x_i \geq_K x_j$), ein Infimum besitzt und dieses auch dessen topologischer Grenzwert ist.

Sind beispielsweise K ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel eines topologischen linearen Raumes X und die bezüglich "$\leq_K$" durch $[x,\ z]_K := \{y\ \in\ X \mid x\ \leq_K\ y\ \leq_K\ z\}$ für $z \geq_K x$ definierten Intervalle kompakt, so ist K ein Daniell-Kegel [46, Lemma 1.47].

Man beachte, daß ein Daniell-Kegel stets spitz ist (siehe dazu [61, Remark 10]).

Definition 2.18. Sind X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x,\ y) = d(y,\ x)$$

$$d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

für alle $x,\ y,\ z \in X$, so heißt das Paar $(X,\ d)$ metrischer Raum und d Metrik auf X.

Zur Vereinfachung schreibt man statt $(X,\ d)$ kurz X.

Für $B(x,\ r) := \{y \in X \mid d(x,\ y) < r\}$ mit $x \in X,\ r > 0$ definiert die Menge $\{B(x,\ r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ die Basis einer Topologie auf X.

Definition 2.19. Ein metrischer Raum X heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge $\{x_k\}$ in X, d.h. jede Folge $\{x_k\}$ mit $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, m,\ n \geq N : d(x_m,\ x_n) < \varepsilon,$ konvergiert, was bedeutet, daß es ein $x \in X$ mit $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N : d(x_n,\ x) < \varepsilon$ gibt.

Beispiel 2.4 Zusammen mit $d(r,\ s) := |\arctan(r) - \arctan(s)|$ bilden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einen metrischen Raum, der aber nicht vollständig ist, wie die Cauchyfolge $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zeigt.

Spezialfälle metrischer Räume sind normierte Räume:

Definition 2.20. (siehe dazu [47, Definition 1.35]) Es seien X und Y lineare Räume und $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel. Eine Funktion $|||\cdot||| : X \longrightarrow\ K$ mit

$$\begin{aligned} |r|\ |||u||| &= |||ru|||, \\ |||u||| + |||v||| - |||u+v||| &\in K, \\ |||u||| = 0 &\Leftrightarrow u = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

für alle $u,\ v \in X,\ r\ \in \mathbb{R}$ heißt vektorielle Norm auf X. Im Falle von $Y = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$ wird sie Norm genannt und mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Das Paar $(X,\ \|\cdot\|)$ heißt dann normierter Raum. Ist Bedingung (2.1) nicht erfüllt, so wird $\|\cdot\|$ Halbnorm genannt.

Zur Vereinfachung schreibt man statt $(X,\ \|\cdot\|)$ kurz X.

Approximationsprobleme, bei denen $|||F(\cdot)|||$ für eine vektorwertige Funktion F minimiert werden soll, sind Gegenstand von Abschnitt 5.

Beispiel 2.5 Es seien $\mathbb{K}$ ein kompakter topologischer Hausdorffraum und $C(\mathbb{K})$ der lineare Raum aller auf $\mathbb{K}$ reellwertigen stetigen Funktionen. Dann wird durch

$$\|f\| := \max\{|f(t)| \mid t \in\ \mathbb{K}\}$$

eine Norm auf $C(\mathbb{K})$ definiert, die $C(\mathbb{K})$ zu einem vollständigen normierten Raum macht.

Beispiel 2.6 Der lineare Raum reeller Folgen l_p, für $p \geq 1$ durch

$$l_p := \{\ \{r_j\} \mid r_j \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} |r_i|^p < \infty\}$$

definiert, ist zusammen mit

$$\|\{r_j\}\| := \left(\sum_{i=0}^{\infty} |r_i|^p \right)^{1/p}$$

ein vollständiger normierter Raum.

Durch $d(u,\ v) := \|u-v\|$ für $u,\ v \in X$ wird eine Metrik auf X induziert. Somit kann ein normierter Raum als metrischer Raum aufgefaßt werden, und mittels der Definition

$$M \subseteq X \text{ heißt offen } :\Leftrightarrow \forall\, x \in M\ \exists\, r > 0 : B(x,\ r) \subseteq M$$

erhält man eine Topologie auf X mit einer Nullumgebungsbasis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B(0,\ \frac{1}{n})$; normierte Räume sind insbesondere lokalkonvex.

Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem linearen Raum X. Gilt

$$\exists\, a,\ b > 0\ \forall\, v \in X : a\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq b\|v\|_1,$$

so werden diese Normen äquivalent genannt.

Die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Raumes X, d.h. die Menge $\{v \in X \mid \|v\| \leq 1\}$, wird mit B_X bezeichnet.

Es seien X und Y normierte Räume. Dann wird auf dem linearen Raum der stetigen linearen Funktionen von X nach Y durch

$$\|L\| := \sup\, \{\|L(v)\| \mid v \in B_X\} \tag{2.2}$$

eine Norm definiert. Ausgestattet mit dieser für $Y = \mathbb{R}$, wird insbesondere der topologische Dualraum X^* eines normierten Raumes X selbst zu einem normierten Raum.

Ist X^* der Dualraum eines normierten Raumes X, so folgt aus der Schwach*-Kompaktheit einer Menge $K \subseteq X^*$ nicht notwendigerweise deren Normbeschränktheit. Es gilt aber die folgende Aussage:

Theorem 2.4. [44, Theorem in 12E]
Es sei X ein normierter Raum. Dann ist eine schwach-kompakte und konvexe Teilmenge von X^* stets normbeschränkt.*

Definition 2.21. Es seien X ein normierter Raum und X^* sein Dualraum, versehen mit der in (2.2) definierten Norm. Dann bezeichnet $X^{**} := (X^*)^*$ den sogenannten Bidualraum.

Definition 2.22. Es seien X ein normierter Raum und X^{**} sein Bidualraum, versehen mit der Norm $\|\Phi\| = \sup\, \{|\Phi(L^*)| \mid L^* \in B_{X^*}\}$. Ist die lineare injektive Funktion

$$X \ni v \longmapsto [h_v : X^* \ni l^* \longmapsto l^*(v) \in \mathbb{R}]\ \in X^{**}$$

bijektiv, so wird X als reflexiv bezeichnet.

Bemerkung 2.3 Jeder reflexive Raum ist vollständig, die Umkehrung gilt im allgemeinen jedoch nicht (siehe dazu auch [50]).

Eine Projektionsaussage für abgeschlossene konvexe Teilmengen vollständiger normierter Räume wird in Lemma 2.1 festgehalten und in abgeschwächter Form in Abschnitt 3 bei der Formulierung einer hinreichenden Bedingung für stark mehrdeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen Verwendung finden (Theorem 3.5). Man beachte dabei, daß deren Beweis in [67] wesentlich auf dem Satz von Brønsted-Rockafellar basiert.

Lemma 2.1. [67, Proposition 1.3]
Es seien X ein vollständiger normierter Raum und $C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt stets

$$\forall\, c \in]0,\ 1[,\ w \in X \setminus C\ \exists\, z \in C,\ l^* \in N(C,\ z)\ \cap\ B_{X^*} :\ l^*(w-z)\ \geq\ c\|w-z\|.$$

2.4 Spezielle Funktionen

Durch die Indikatorfunktion werden beliebige Mengen mittels einer zweielementigen Wertemenge erfaßt; sie wird im Beweis von Theorem 2.15 verwendet.

Definition 2.23. Es seien Mengen $M \supseteq N \neq \emptyset$ gegeben. Die Indikatorfunktion der Menge N ist dann durch

$$\iota_N : M \ni x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \in N \\ +\infty, & x \in M \setminus N \end{cases} \quad \in\ \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

definiert.

Die Minkowski-Funktion ist eine für den allgemeinen Fall linearer Räume definierte Abbildung, die in enger Verwandtschaft zu Normen steht.

Definition 2.24. Für einen linearen Raum X und $X \supseteq S \neq \emptyset$ wird die Abbildung

$$m_S : X \ni x \longmapsto \inf\{t > 0 \mid x\ \in\ tS\} \in\ \mathbb{R}\ \cup\ \{+\infty\}$$

Minkowski-Funktion von S genannt.

Durch Kegel können Normen mit Hilfe von Minkowski-Funktionen definiert werden.

Proposition 2.2. [78, Theorem 2.2.10 (b)]
Sind X ein linearer Raum, $K \subseteq X$ ein algebraisch abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel sowie $p \in \operatorname{cor}(K)$, so ist die Minkowski-Funktion $m_{[-p,\ p]_K}$ des Intervalls

$$[-p,\ p]_K := \{v\ \in\ X \mid -p\ \leq_K\ v\ \leq_K\ p\} = (K-p) \cap (p-K)$$

eine Norm auf X.

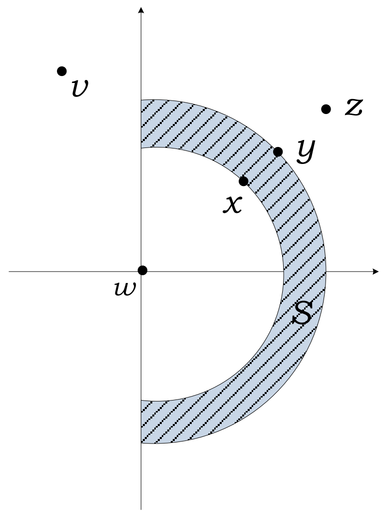

Fig. 4
$0 < r < s < t,\ x = (r,r),\ y = (s,s),\ z = (t,t)$
$m_S(v) = m_S(w) = +\infty,\ m_S(x) = \frac{r}{s},\ m_S(z) = \frac{t}{s}$

Definition 2.25. Es seien X ein topologischer linearer Raum und $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(1)
$$g^* : X^* \ni l^* \longmapsto \sup\{l^*(v) - g(v) \mid v \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
heißt konvex-konjugierte Funktion zu g.

(2)
$$g^\bullet : X^* \ni l^* \longmapsto \inf\{l^*(v) - g(v) \mid v \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
heißt konkav-konjugierte Funktion zu g.

(3)
$$g^{**} : X \ni v \longmapsto \sup\{l^*(v) - g^*(l^*) \mid l^* \in X^*\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
heißt doppelt konjugierte Funktion zu g.

Beim Beweis des Satzes von Alaoglu (Theorem 2.15) wird die Konvex-Konjugierte einer Minkowski-Funktion benutzt.

Die konvexen Funktionen bilden aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften (so haben sie keine lokalen Minima, die nicht global sind) gewissermaßen die Verbindung zwischen linearer und nichtlinearer Funktionalanalysis.

Definition 2.26. Es seien X und Y lineare Räume sowie $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel.

(1) Eine Funktion $g\colon X \longrightarrow Y \cup \{\infty_K\}$ heißt $K-$konvex, falls
$$tg(p) + (1-t)g(q) \geq_K g(tp + (1-t)q)$$
für alle $p,\ q \in X$ und $t \in [0.\ 1]$ gilt.

(2) Eine Funktion $g: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt konvex, falls

$$tg(p) + (1-t)g(q) \geq g(tp + (1-t)q)$$

für alle $p,\ q \in X$ und $t \in [0.\ 1]$ gilt.

(3) Eine Funktion $h: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt konkav, falls $-h$ konvex ist.

(4) Sind $g: X \longrightarrow Y \cup \{\infty_K\}$ $K-$konvex und $x \in \operatorname{dom} g$, so heißt eine lineare Abbildung $L: X \longrightarrow Y$ Subgradient von g in x, falls die Ungleichung

$$g(y) - g(x) \ \geq_K \ L(y-x)$$

für alle $y \in X$ gilt.

(5) Eine Funktion $\sigma: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt sublinear, falls

$$\sigma(x+y) \leq \sigma(x) + \sigma(y) \ \text{ und } \ \sigma(tx) = t\sigma(x)$$

für alle $x,\ y \in X$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Beispielsweise ist die Indikatorfunktion ι_N genau dann eine konvexe Funktion, wenn N eine konvexe Teilmenge eines linearen Raumes ist, und für eine konvexe Menge S mit $0 \in \operatorname{cor}(S)$ ist m_S eine sublineare Funktion mit $m_S(v) \neq +\infty$ für alle $v \in S$. Ist S zusätzlich noch ausgewogen, d.h. $tS \subseteq S$ für $|t| \leq 1$, so liegt in m_S eine Halbnorm vor [64, Theorem 2.26, Theorem 2.29].
Im Falle eines topologischen linearen Raumes X ist m_S stetig für S konvex mit $0 \in \operatorname{int}(S)$ [64, Corollary 2.27]. Aus "interessanten" konvexen Funktionen können durch Bildung der Konvex-Konjugierten wieder solche generiert werden, denn für eine konvexe unterhalbstetige Funktion $g: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem normierten Raum X mit $\operatorname{dom} g \neq \emptyset$ ist g^* ebenfalls konvex und unterhalbstetig mit $\operatorname{dom} g^* \neq \emptyset$.
Die $K-$ Konvexität fließt in Effizienzresultate der Abschnitte 4 (Proposition 4.5, Theorem 4.10) und 5 (Proposition 5.1) ein. Für eine $K-$ konvexe Funktion f ist $f(X) + K$ konvex (siehe Fig. 5), was gleichbedeutend mit $\operatorname{kon}(f(X)) \subseteq f(X) + K$ ist.

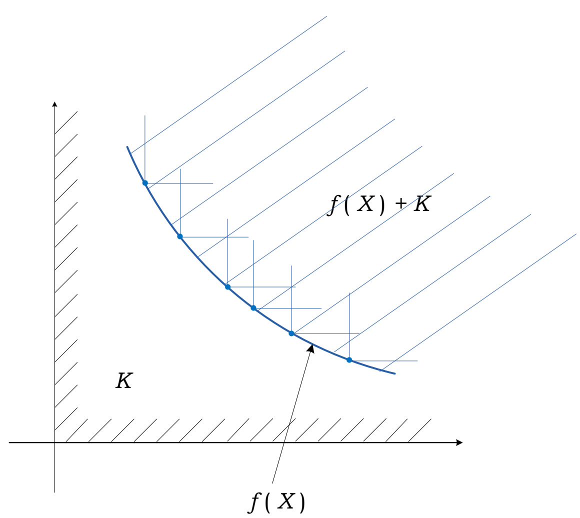

Fig. 5 $f(X) + K$ für f $K-$konvex

Eine wichtige Aussage zur Beziehung zwischen einer konvexen Funktion und deren doppelt Konjugierten liefert das folgende Theorem 2.5.

Theorem 2.5. [64, Theorem 4.15]
Es seien X ein lokalkovexer Raum, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ eine Abbildung nicht identisch $-\infty$ und $M := \{\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \alpha = l^* + b,\ l^* \in X^*,\ b \in \mathbb{R}\}$. Dann ist ist die Menge

$$M(g) := \{\alpha \in M \mid \forall\, v \in X:\ \alpha(v) \ \leq\ g(v)\}$$

nichtleer, falls g unterhalbstetig und konvex ist. Darüber hinaus sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) *g ist unterhalbstetig und konvex*
(2) $\forall\, x \in X : g(x) = \sup\{\alpha(x) \mid \alpha \in M(g)\}$
(3) $g^{**} = g$.

Lipschitz-Stetigkeit ist eine besondere Form der gleichmäßigen Stetigkeit. Lipschitz-stetige Abbildungen können sich, etwas vereinfacht ausgedrückt, nur in beschränktem Maße ändern.

Definition 2.27. Es sei X ein normierter Raum. Eine Funktion $L\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup\{+\infty\}$ heißt Lipschitz-stetig auf S, wenn $S \subseteq \operatorname{dom} L$ und es ein $c > 0$ mit

$$|L(p) - L(q)| \leq c\|p-q\|$$

für alle $p,\ q \in\ S$ gibt.

Beispielsweise ist eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter erster Ableitung auch Lipschitz-stetig.
Ob Lipschitz-Stetigkeit vorliegt, kann von der Wahl der Menge S abhängen. So ist die Abbildung $f(x) := x^2,\ x \in \mathbb{R}$, auf einem Intervall $[a,\ b]$ wegen

$$|f(v) - f(w)| = |v+w||v-w| \leq c|v-w| \text{ für } c := \max\{|v+w| \mid v,\ w \in [a,\ b]\} = 2\max\{|a|,\ |b|\}$$

Lipschitz–stetig; auf $S = \mathbb{R}$ ist sie es hingegen nicht.

Eine fundamentale Eigenschaft konvexer Funktionen gibt das nächste Resultat an. Es besagt, daß deren Stetigkeit aus lokaler Beschränktheit folgt.

Proposition 2.3. [64, Proposition 2.143]
Es sei X ein topologischer linearer Raum. Ist eine konvexe Abbildung $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in einer Umgebung eines Punktes $x \in X$ nach oben beschränkt, so ist sie auch stetig in x.

Konvexe, auf einem normierten Raum definierte und lokal beschränkte Funktionen sind sogar lokal Lipschitz-stetig. Von dieser Tatsache wird bei der Benutzung der in Proposition 2.6 gezeigten Kettenregel wiederholt Gebrauch gemacht.

Theorem 2.6. [73, IV.41, Theorem B]
Sind X ein normierter Raum, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion, V eine offene und konvexe Teilmenge von X mit $V \subseteq \operatorname{dom} g$ sowie g in einer Umgebung eines Punktes von V nach oben beschränkt, so gilt:

$$\forall\, x \in V\ \exists\, r > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, w_0,\ w_1 \in B(x,\ r) : |g(w_0) - g(w_1)| \le c\|w_0 - w_1\|.$$

Definition 2.28. Es sei X ein topologischer linearer Raum. Dann werden mittels

$$\sigma_S(l^*) := \sup\,\{l^*(v) \mid v \in S\} \text{ für } S \subseteq X,\ l^* \in X^*$$

bzw.

$$\sigma_T(v) := \sup\,\{l^*(v) \mid l^* \in T\} \text{ für } T \subseteq\ X^*,\ v \in X$$

Stützfunktionen bezüglich der Mengen S bzw. T definiert.

Eine wichtige Aussage im Zusammenhang mit Stützfunktionen bezüglich schwach*-abgeschlossener Teilmengen von Dualräumen gibt Theorem 2.7 an.

Theorem 2.7. (siehe [45])
Für einen lokalkonvexen Raum X sowie $S \subseteq X^*$ schwach-abgeschlossen und konvex gilt*

$$\partial \sigma_S(0) = S.$$

Der Trennungssatz Theorem 2.2 verhilft zu obigem Theorem 2.7: Aus $l^* \in \partial\sigma_S(0) \setminus S$ folgt nämlich einerseits $l^*(h) \le \sigma_S(h) - \sigma_S(0) = \sigma_S(h)$ für alle $h \in X$, andererseits im Widerspruch dazu aber auch die Existenz von $u \in X,\ \varepsilon > 0$ mit $l^*(u) - \varepsilon \ge \sup\{\varphi^*(u) \mid \varphi^* \in S\} = \sigma_S(u)$.

Die Distanzfunktion ist für Skalarisierungen in der Vektoroptimierung von zentraler Bedeutung.

Definition 2.29. Es seien X ein normierter Raum sowie $S \subset X$. Dann heißt

$$\boldsymbol{d}(\cdot,\ S) : X \ni p \longmapsto \inf\,\{\|p - s\| \mid s \in S\} \in \mathbb{R}$$

Distanzfunktion bezüglich S.

Für konvexes S ist $\boldsymbol{d}(\cdot,\ S)$ eine konvexe Funktion. Ist S darüber hinaus auch abgeschlossen, kann sie unter Verwendung einer Stützfunktion explizit dargestellt werden.

Theorem 2.8. [60, 3.12, Theorem 1] [90, Theorem 3.8.2]
Es seien X ein normierter Raum sowie $S \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann gilt:

$$\forall\, v \in X \setminus S:\ \boldsymbol{d}(v,\ S) = \max\,\{l^*(v) - \sigma_S(l^*) \ \mid\ l^* \in\ B_{X^*}\}.$$

Wie in der Einleitung erwähnt, ist die Skalarisierung ein essentiell wichtiges Mittel zur Behandlung von Vektoroptimierungsproblemen. Zu den wesentlichen Skalarisierungsfunktionen zählen neben der Distanzfunktion auch die beiden, nachfolgend aufgeführten Abbildungen. Sie ermöglichen die Behandlung vieler, insbesondere nichtglatter Optimierungsprobleme von einem geometrischen Standpunkt aus und werden in den Abschnitten 4.2 und 5 bei der Formulierung von Effizienzbedingungen benutzt.

Definition 2.30. Es seien X ein linearer Raum, $\emptyset \neq M \subset X$ und $p \in X \setminus \{0\}$. Die Funktion

$$\varphi_{M,\,p} : X \ni v \longmapsto \inf\,\{t \in \mathbb{R} \mid v \in \ tp - M\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

heißt Gerstewitz-Funktion bezüglich M und p.

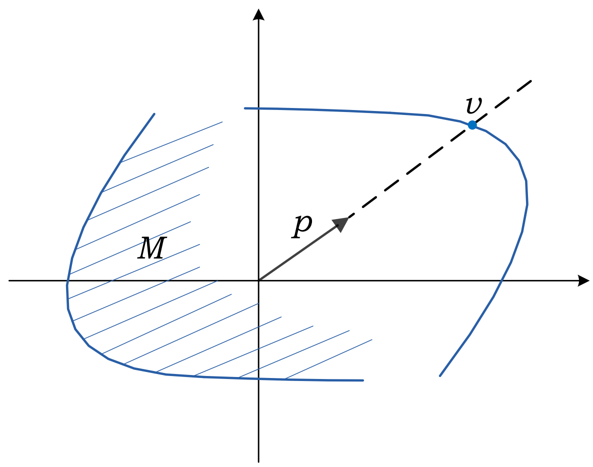

Fig. 6 Zur Definition 2.30

Diese Funktion basiert auf einer Idee von Gerstewitz (Tammer) [29]. Untenstehend sind einige Eigenschaften dieser Abbildung zusammengefaßt.

Theorem 2.9. (siehe [31, Theorem 2.3.1 und Corollary 2.3.5])
Es seien X ein topologischer linearer Raum, $M \subset X$ abgeschlossen, $p \in X \setminus \{0\}$ mit $M + \mathbb{R}_+ p \subseteq M$ und $\varphi := \varphi_{M,\,p}$.

(1) *φ ist unterhalbstetig mit* $\operatorname{dom} \varphi = \mathbb{R}p - M$. *Außerdem gilt*

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \{v \in X \mid \varphi(v) \leq s\} = sp - M$$

sowie

$$\forall\, w \in X\ \forall\, t \in \mathbb{R} : \varphi(w + tp) = \varphi(w) + t.$$

(2) *φ ist konvex $\Leftrightarrow$ M ist konvex.*
(3) $\forall\, v \in X\ \forall\, s > 0 : \varphi(sv) = s\varphi(v) \Leftrightarrow$ *M ist ein Kegel.*
(4) *Für $v \in X$ gilt: $\varphi(v) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} : v + tp \notin M$.*
(5) *φ ist subadditiv $\Leftrightarrow$ $M + M \subseteq M$.*
(6) *Ist zusätzlich $M + \mathbb{R}_+^{>} p \subseteq \operatorname{int}(M)$, so ist φ stetig, und es gilt*

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \{v \in X \mid \varphi(v) < s\} = sp - \operatorname{int}(M)$$

sowie

$$\forall\, s \in \mathbb{R} : \{v \in X \mid \varphi(v) = s\} = sp - \partial M.$$

(7) *Sind M ein abgeschlossener Kegel und $p \in \operatorname{int}(M)$, so ist* $\operatorname{dom} \varphi = X$, *und φ ist eine stetige sublineare Funktion.*

Wegen Propostion 2.2 ist die nachfolgend angegebene Beziehung zwischen Minkowski- und Gerstewitz-Funktion von besonderem Interesse.

Proposition 2.4. [81, Proposition 11]
Sind X ein linearer Raum, $K \subseteq X$ ein algebraisch abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel, $p \in \operatorname{cor}(K)$ sowie $y \in X$, so gilt für jedes $v \in y+K$

$$m_{[-p,\ p]_K}(v-y) = \varphi_{K-y,\ p}(v).$$

Definition 2.31. Es seien X ein normierter Raum und $\emptyset \neq S \subset X$. Die Funktion

$$\Delta(\cdot,\ S) : X \ni v \longmapsto \boldsymbol{d}(v,\ S) - \boldsymbol{d}(v,\ X \setminus S) \in \mathbb{R}$$

heißt erweiterte Distanzfunktion bezüglich S.

Unter Verwendung der in Definition 2.29 angegebenen Distanzfunktion wurde mit der erweiterten Distanzfunktion eine weitere Skalarisierungsabbildung von Gorokhovik [32] und Hiriart-Urruty [42] eingeführt. Einige ihrer Eigenschaften sind in Proposition 2.5 aufgelistet.

Proposition 2.5. (siehe [89, Proposition 3.2])
Es seien X ein normierter Raum und $\emptyset \neq S \subset X$.

(1) $\Delta(\cdot,\ S)$ *ist Lipschitz-stetig auf X.*
(2) *Es gilt* $\Delta(v,\ S) < 0$ *für* $v \in \operatorname{int}(S)$, $\Delta(v,\ S) = 0$ *für* $v \in \partial S$ *und* $\Delta(v,\ S) > 0$ *für* $v \in \operatorname{int}(X \setminus S)$.
(3) *Ist S abgeschlossen, so gilt* $S = \{v \in X \mid \Delta(v,\ S) \leq 0\}$.
(4) $\Delta(\cdot,\ S)$ *ist eine konvexe Funktion, wenn S konvex ist.*
(5) $\Delta(\cdot,\ S)$ *ist eine sublineare Funktion, wenn S ein konvexer Kegel ist.*

Bemerkung 2.4 Es seien X ein reflexiver Raum mit der Norm $\|\cdot\|$, $K \subseteq X$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel sowie $p \in \operatorname{int}(K)$. Dann existiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_1$ auf X derart, daß für die erweiterte Distanzfunktion $\Delta(\cdot,\ -K)$ bezüglich $\|\cdot\|_1$, also

$$\Delta(v,\ -K) = \inf\{\|v+k\|_1 \mid k \in K\} - \inf\{\|v-w\|_1 \mid w \in X \setminus -K\},$$

die Gleichheit $\Delta(\cdot,\ -K) = \varphi_{K,\ p}$ besteht [72, Theorem 3.2.7], [13, Theorem 4].

2.5 Differentiationsbegriffe

2.5.1 Allgemeines: Definitionen und wichtige Aussagen

Definition 2.32. Sind X ein linearer und Y ein normierter Raum, ferner $h : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x,\ p$ zwei Punkte in X, für die es ein $a > 0$ mit $[x,\ x+ap] \subseteq \operatorname{dom} g$ gibt, oder $h : X \longrightarrow Y$ und $x,\ p$ zwei beliebige Punkte in X, so steht

$$h'_+(x,\ p) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(h(x+tp) - h(x))$$

für die rechtsseitige Richtungsableitung von h in x in Richtung p, falls der Grenzwert existiert.

Zur rechtsseitigen Differenzierbarkeit konvexer Funktionen kann folgendes festgehalten werden:

Theorem 2.10. (siehe dazu [64, Proposition 4.46])
Es seien X ein linearer Raum, Y ein topologischer linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein Daniell-Kegel sowie $g : X \longrightarrow Y \cup \{\infty_K\}$ $K-$konvex. Sind dann $x,\ p$ zwei Punkte in X, für die es ein $a > 0$ mit $[x-ap,\ x+ap] \subseteq \mathrm{dom}\, g$ gibt, so existiert das Infimum der Menge $\{\frac{1}{t}(g(x+tp)-g(x)) \mid t > 0\}$ bezüglich der durch K induzierten Halbordnung. Außerdem gilt

$$-\inf\{\frac{1}{t}(g(x-tp)-g(x)) \mid t>0\} \ \leq_K \ \inf\{\frac{1}{t}(g(x+tp)-g(x)) \mid t>0\}, \tag{2.3}$$

insbesondere

$$-\inf\{\frac{1}{t}(g(x-tp)-g(x)) \mid t>0\} \ \leq_K \ L(p) \ \leq_K \ \inf\{\frac{1}{t}(g(x+tp)-g(x)) \mid t>0\}$$

für jeden Subgradienten L von g in x. Im Falle $Y = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$ ist g rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in x in Richtung p mit

$$g'_+(x,\ p) = \inf\{\frac{1}{t}(g(x+tp)-g(x)) \mid t>0\}.$$

Beweis. Für eine konvexe Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow Y \cup \{\infty_K\}$ und $r < 0 < s < t$ mit $r,\ 0,\ s,\ t$ aus $\mathrm{dom}\, h$ besteht die Ungleichung

$$\frac{h(0)-h(r)}{-r} \ \leq_K \ \frac{h(s)-h(0)}{s} \ \leq_K \ \frac{h(t)-h(0)}{t},$$

somit für $r < 0 < s < t$ mit $x+rp,\ x+sp,\ x+tp$ aus $\mathrm{dom}\, g$

$$\frac{g(x)-g(x+rp)}{-r} \ \leq_K \ \frac{g(x+sp)-g(x)}{s} \ \leq_K \ \frac{g(x+tp)-g(x)}{t}. \tag{2.4}$$

Die Folge

$$\left\{ \frac{g(x+\frac{a}{n}p)-g(x)}{\frac{1}{n}} - \frac{g(x)-g(x+rp)}{-r} \right\}$$

fällt monoton in K und besitzt daher ein Infimum I, gegen das sie konvergiert; es ist dann $I + \frac{g(x)-g(x+rp)}{-r} = \inf\{\frac{1}{t}(g(x+tp)-g(x)) \mid t>0\}$.

Aus (2.4) ergibt sich zudem auch die Ungleichung (2.3). □

In Proposition 2.6 wird eine Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen angegeben, die insbesondere in Theorem 3.4 zur Charakterisierung von stark eindeutigen Minima zusammengesetzter Funktionen und in verschiedenen Beweisen von Aussagen in den Kapiteln 3 und 5 eine wesentliche Rolle spielt. Man beachte dabei, daß (lokal) beschränkte konvexe Funktionen gemäß Theorem 2.6 lokal Lipschitz-stetig sind.

Proposition 2.6. (siehe [9, Proposition 2.47 und 2.49])
Es seien X und Y normierte Räume sowie $f : X \longrightarrow Y$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in x, $h : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lokal Lipschitz-stetig in einer Umgebung von $f(x)$ und in $f(x)$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar. Dann ist $h \circ f$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in x mit

$$(h \circ f)'_+(x, p) = h'_+(f(x), f'_+(x, p))$$

für alle $p \in X$.

Die in den folgenden Abschnitten entwickelten Aussagen über konvex-zusammengesetzte Abbildungen enthalten verschiedene Differentiationsbegriffe bezüglich der inneren Funktion, welche in Definition 2.33 zusammengefaßt werden.

Definition 2.33. Es seien X und Y normierte Räume und $f : X \longrightarrow Y$.

(1) f heißt Gâteaux-differenzierbar in $x \in X$, wenn es eine stetige lineare Funktion $f'(x) \in L(X, Y)$ mit

$$f'(x)(p) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}(f(x+tp) - f(x))$$

für alle $p \in X$ gibt.

(2) f heißt Fréchet-differenzierbar in $x \in X$, falls eine stetige lineare Funktion $f'(x) \in L(X, Y)$ existiert, für die

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, w \in X : \|w - x\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(w) - f(x) - f'(x)(w - x)\| < \varepsilon \|w - x\|$$

gilt.

(3) Ist f auf einer Teilmenge M von X Gâteaux-differenzierbar mit

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, p,\, q \in M : \|p - q\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(p) - f(q) - f'(q)(p - q)\| < \varepsilon \|p - q\|,$$

so heißt f gleichmäßig differenzierbar auf M.

Beispiel 2.7 Eine Normfunktion $\|\cdot\|$ auf einem linearen Raum X ist konvex und daher gemäß Theorem 2.10 rechtsseitig richtungsdifferenzierbar.
Darüber hinaus bestehen die folgenden Äquivalenzen:

- $\|\cdot\|$ ist in einem Punkt $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ genau dann Gâteaux-differenzierbar, wenn ein $L^* \in X^*$ mit $\|L^*\| = L^*(x) = 1$ existiert. In diesem Fall gilt $\|\cdot\|'(x) = L^*$.
- $\|\cdot\|$ ist in einem Punkt $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ genau dann Fréchet-differenzierbar, wenn es ein $L^* \in X^*$ mit $\|L^*\| = L^*(x) = 1$ und $\|L^* - L^*{}_n\| \longrightarrow 0$ für Folgen $\{L^*{}_n\}$ mit $L^*{}_n \in B_{X^*}$, $L^*{}_n(x) \longrightarrow 1$ gibt.

Beispiel 2.8 Der Raum $C^1[0, 1]$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ sei mit der Norm $\|v\| := \max\{|v(t)| \mid t \in [0, 1]\} + \max\{|v'(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ versehen. Für eine stetige Abbildung $s : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist dann

$$\varphi : C^1[0, 1] \ni v \longmapsto \int_0^1 s(u)\sqrt{1 + v'(u)^2}\, du \in \mathbb{R}$$

Fréchet-differenzierbar mit

$$\varphi'(x)(h) = \int_0^1 s(u) \frac{x'(u)h'(u)}{\sqrt{1 + x'(u)^2}}\, du.$$

Bemerkung 2.5 Man beachte, daß für $f : X \longrightarrow Y$ (Gâteaux-)differenzierbar die folgenden Aussagen äquivalent sind [22, Lemma 3]:

(1) Für jede beschränkte Teilmenge B von X gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, q \in\ B\ \forall\, v \in X : \|v-q\| < \delta\ \Rightarrow\ \|f(v)-f(q)-f'(q)(v-q)\| < \varepsilon\|v-q\|.$$

(2) f' ist auf jeder beschränkten Teilmenge von X gleichmäßig stetig.

Von Nutzen bei der Entwicklung einer notwendigen Bedingung für stark mehrdeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen in Abschnitt 3 wird das folgende Lemma sein.

Lemma 2.2. [92, Lemma 3.6]
Es seien X und Y vollständige normierte Räume, $x \in X$, $f : X \longrightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar auf X mit stetiger Abbildung $X \ni w \longmapsto f'(w) \in L(X,\ Y)$ und $f'(x)$ surjektiv. Dann existieren $r > 0,\ s > 0$ mit

$$sB_Y \subseteq f'(v)(B_X) \quad f.\,a.\ \ v \in B(x,\ r).$$

2.5.2 Das Subdifferential

Es seien X ein normierter Raum und $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe und in x stetige Funktion. Gemäß Theorem 2.10 existiert die rechtsseitige Ableitung $g'_+(x,\ h)$, aber darüber hinaus gilt zusätzlich, daß g genau dann in x Gâteaux-differenzierbar ist, wenn es ein einzigen stetigen Subgradienten von g in x gibt (siehe dazu [69, Proposition 1.8]). Die Menge der (stetigen) Subgradienten ist also von besonderer Bedeutung, was Anlaß zu der folgenden Definition gibt.

Definition 2.34.

(1) Es seien X und Y lineare Räume, $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel, $g\colon X \longrightarrow Y \cup \{\infty_K\}$ eine $K-$konvexe Funktion und $x \in \operatorname{dom} g$. Dann steht

$$\partial_A g(x) := \{l : X \longrightarrow Y \mid l \text{ ist Subgradient von } g \text{ in } x\}$$

für das algebraische Subdifferential von g in x.

(2) Sind zusätzlich X und Y topologische lineare Räume, so wird durch

$$\partial g(x) := \partial_A g(x)\ \cap\ L(X,\ Y)$$

das Subdifferential von g in x definiert. Die Menge

$$\operatorname{dom} \partial g := \{y \in \operatorname{dom} g \mid \partial g(y)\ \neq\ \emptyset\}$$

ist der effektive Definitionsbereich des Subdifferentials.

Das erste der folgenden Beispiele wird in Abschnitt 5 von Wichtigkeit sein.

Beispiel 2.9 Es seien X und Y topologische lineare Räume, $K \subseteq Y$ ein konvexer spitzer Kegel und $|||\cdot||| : X \longrightarrow K$ eine vektorielle Norm auf X. Dann gilt für alle $u \in X$

$$\partial|||\cdot|||(u) = \{\lambda \in L(X,\, Y) \mid \lambda(u) = |||u||| \text{ und } \forall\, v \;\in\; X : |||v||| - \lambda(v) \;\in\; K\}$$

(siehe [47, Example 2.22]).

Beispiel 2.10 Durch $\|(v_1, ..., v_n)\|_\infty := \max\{|v_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ wird die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Unter Verwendung der Bezeichnungen $I(v_1, ..., v_n) := \{1 \leq i \leq n \mid |v_i| = \|(v_1, ..., v_n)\|_\infty\}$ und e_k für den $k-$ten Einheitsvektor erhält man für deren Subdifferential in $x = (x_1, ..., x_n)$ die Beziehung

$$\partial\|\cdot\|_\infty(x) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_\infty \leq 1\}, & x = 0 \\ \{\sum_{k \in I(x)} c_k \operatorname{sgn}(x_k) e_k \mid \sum_{k \in I(x)} c_k = 1,\ c_j \geq 0 \ \text{ für } \ j \in I(x)\}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Beispiel 2.11 Man betrachte die Indikatorabbildung ι_A für einen topologischen linearen Raum X und $A \subseteq X$ konvex. Dann besteht für jedes $x \in A$ die Beziehnung $\partial \iota_A(x) = N(A,\, x)$.

Das Subdifferential der Gerstewitz-Funktion kann unter gewissen Voraussetzungen konkret dargestellt werden.

Beispiel 2.12 (siehe [26, Theorem 2.2]) Es seien X ein topologischer linearer Raum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, $p \in X \setminus \{0\}$ mit $M + \mathbb{R}_+ p \subseteq M$. Außerdem existiere zu jedem $w \in X$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $w + tp \notin M$. Dann gilt für $x \in \operatorname{dom} \varphi_{M,\, p}$

$$\partial\varphi_{M,\, p}(x) = \{l^* \in X^* \mid l^*(x) = 1 \ \text{ und } \ l^*(v + x) \;\geq\; \varphi_{M,\, p}(x) \ \text{ f. a. } v \in M\}.$$

Gegenstand des Satzes von Moreau-Rockafellar ist eine Summenregel für Subdifferentiale.

Theorem 2.11. (Moreau-Rockafellar) [64, Theorem 3.48]
Es seien X ein linearer topologischer Raum und $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvexe Funktionen. Dann gilt

$$\partial g(v) + \partial h(v) \subseteq \partial(g + h)(v)$$

für alle $v \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$. Ist eine der beiden Abbildungen darüber hinaus in einem Punkt $u \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$ stetig, besteht die Gleichheit

$$\partial g(v) + \partial h(v) = \partial(g + h)(v)$$

für alle $v \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$.

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen der rechtsseitigen Richtungsableitung einer (stetigen) konvexen Funktion und deren Subdifferential in einem Punkt zeigt der Satz von Moreau-Pschenichnyi.

Theorem 2.12. (Moreau-Pschenichnyi) [64, Theorem 4.50 (c)]
Sind X ein topologischer linearer Raum sowie $g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine in $x \in \mathrm{dom}\, g$ stetige konvexe Funktion, so ist $\partial g(x)$ nichtleer, und für jedes $p \in X$ gilt

$$g'_+(x,\ p) = \max\ \{l^*(p) \mid l^* \in \partial g(x)\}$$

und

$$-g'_+(x,\ -p) = \min\ \{l^*(p) \mid l^* \in \partial g(x)\}.$$

Für nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmengen S eines normierten Raumes X kann man das Subdifferential der Distanzfunktion $\boldsymbol{d}(\cdot,\ S)$ mit Hilfe von Normalenkegeln (Definition 2.16, (5)) explizit angeben.

Theorem 2.13. [16, Theorem 1]
Es seien X ein normierter Raum sowie $\emptyset \neq S \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann gilt:

$$\partial \boldsymbol{d}(w,\ S) = \begin{cases} N(S + \boldsymbol{d}(w,\ S)B_X,\ w) \cap \partial B_{X^*}, & w \in X \setminus S \\ N(S,\ w) \cap B_{X^*}, & w \in S. \end{cases}$$

Das unten stehende Theorem 2.14 beinhaltet ein wichtiges Resultat über das Subdifferential konvexer Funktionen, von dem ein Spezialfall auch in den hinreichenden Bedingungen für stark eindeutige Minima (Theoreme 3.1 und 3.2) verwendet wird, und ergänzt [80, Théorème 6 und Corollaire 7], [96, Theorem 3.3]. Man beachte dazu auch [58].

Theorem 2.14.
Sind Y und Z topologische lineare Räume, $K \subseteq Z$ ein Daniell-Kegel mit kompakten Intervallen $[v,\ w]_K$ für $v, w \in Z$, $g : Y \longrightarrow Z \cup \{\infty_K\}$ eine $K-$konvexe Funktion, $y \in \mathrm{cor}(\mathrm{dom}\, g)$ sowie $\partial_A g(y) = \partial g(y)$, so ist $\partial g(y)$ eine (möglicherweise leere) $\mathbb{T}(L(Y,\ Z),\ Y)-$kompakte Teilmenge von $L(Y,\ Z)$ und, sofern es sich bei Y um einen normierten Raum handelt und $Z = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$, überdies normbeschränkt.

Beweis. Es seien $L(Y,\ Z)$ mit der $\mathbb{T}(L(Y,\ Z),\ Y)-$Topologie, Z^Y mit der Produkttopologie versehen, und man betrachte die injektive Abbildung

$$\Phi : L(Y,\ Z) \ni l \longmapsto (l(\upsilon))_{\upsilon\, \in\, Y} \in Z^Y.$$

Diese ist stetig, denn erstens ist die Produkttopologie die Initialtopologie bezüglich der Projektionen

$$p_w : Z^Y \ni (a_\upsilon)_{\upsilon\, \in\, Y} \longmapsto a_w \in Z,$$

$w \in Y$, zweitens gilt die Gleichheit

$$(p_w \circ \Phi)(l) = l(w) = h_w(l)$$

für $w \in Y,\ l \in L(Y,\ Z)$ und $h_w : L(Y,\ Z) \ni m \longmapsto m(w) \in Z$. Zudem ist

$$\Phi^{-1} : \Phi(L(Y,\ Z)) \longrightarrow L(Y,\ Z)$$

stetig, wobei $\Phi(L(Y,\ Z))$ als Unterraum von Z^Y aufgefaßt wird. Dies ergibt sich aus der Beziehung

$$(h_w \circ \Phi^{-1})(\Phi(l)) = h_w(l) = l(w) = p_w|_{\Phi(L(Y,\ Z))}(l)$$

für $w \in Y,\ l \in L(Y,\ Z)$. Die Menge

$$A := \{(a_\upsilon)_{\upsilon\ \in\ Y} \in Z^Y \mid \forall\ u,\ v \in,\ r \in \mathbb{R} : a_{u+v} = a_u + a_v \text{ und } a_{ru} = ra_u\}$$

ist abgeschlossen, da die Abbildungen $\varphi_{u,\ v} : Z^Y \ni (a_\upsilon)_{\upsilon\ \in\ Y} \longmapsto a_{u+v} - a_u - a_v \in \mathbb{R},\ u,\ v \in Y$, und $\psi_{r,\ w} : Z^Y \ni (a_\upsilon)_{\upsilon\ \in\ Y} \longmapsto a_{rw} - ra_w \in \mathbb{R},\ w \in Y,\ r \in \mathbb{R}$ stetig sind und die Gleichheit

$$A \ = \left(\bigcap_{u,\ v\ \in\ Y} \varphi_{u,\ v}^{-1}(0) \right) \cap \left(\bigcap_{w\ \in\ Y,\ r\ \in\ \mathbb{R}} \psi_{r,\ w}^{-1}(0) \right).$$

besteht.

Ist $y \in \operatorname{cor}(\operatorname{dom} g)$, so gilt für $l \in L(Y,\ Z)$ die Äquivalenz

$$l \in \partial g(y) \Leftrightarrow \forall\, w \in Y : l(w) \in [-\inf\{\frac{1}{t}(g(y-tw)-g(y)) \mid t > 0\},\ \inf\{\frac{1}{t}(g(y+tw)-g(y)) \mid t > 0\}]_K,$$

(siehe Theorem 2.10), aus der wegen $\partial_A g(y) = \partial g(y)$

$$\Phi(\partial g(y)) = A\ \cap \prod_{w\ \in\ Y} [-\inf\{\frac{1}{t}(g(y-tw)-g(y)) \mid t > 0\},\ \inf\{\frac{1}{t}(g(y+tw)-g(y)) \mid t > 0\}]_K$$

folgt. Somit ist $\Phi(\partial g(y))$ gemäß Theorem 2.1 eine kompakte Teilmenge von Z^Y und daher $\partial g(y)$ eine solche von $L(Y,\ Z)$.

Im Falle eines normierten Raumes $Y,\ Z = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{R}_+$ ergibt sich die Normbeschränktheit aus Theorem 2.4, da $\partial g(y)$ eine konvexe Menge ist. $\square$

Theorem 2.14 verallgemeinert den Satz von Alaoglu auf natürliche Weise: Für eine Nullumgebung U eines linearen topologischen Raumes Y sind $0 \in \operatorname{cor}(U)$ bzw. $0 \in \operatorname{cor}(\operatorname{kon}(U))$ und $m := m_{\operatorname{kon}(U)} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ eine sublineare Funktion mit $\partial_A m(0) = \partial m(0)$ sowie $m^* = \iota_{\operatorname{kon}(U)^\circ}$ (siehe [3, Proposition 14.12]). Des weiteren gilt $\partial m(0) = \operatorname{kon}(U)^\circ = U^\circ$ wegen

$$l^* \in \partial m(0) \Leftrightarrow m(0) + m^*(l^*) = l^*(0) \Leftrightarrow m^*(l^*) = 0 \Leftrightarrow l^* \in \operatorname{kon}(U)^\circ.$$

Theorem 2.14, angewendet auf $Z = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+,\ g = m$ und $y = 0$, liefert daher das

Theorem 2.15. (Alaoglu) [62, Theorem 1.112]
Für jede Nullumgebung U eines linearen topologischen Raumes ist U° kompakt in der Schwach-Topologie.*

Bemerkung 2.6 Nach [55, Satz 11.5.2] ist $g'_+(y,\ \cdot)$ stetig, wenn die Voraussetzungen von Theorem 2.14 für einen normierten Raum Y und $Z = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R}_+$ erfüllt und $\partial g(y) \neq \emptyset$ sind.

Die folgende Aussage charakterisiert Minima konvexer Funktionen auf konvexen Mengen.

Theorem 2.16. (Pschenichnyi-Rockafellar) (siehe dazu [11])
Es seien X ein normierter Raum, $A \subseteq X$ konvex sowie $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion. Ferner gelte $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ *oder g stetig in einem $v \in \operatorname{dom} g \cap A$. Dann sind für $x \in \operatorname{dom} g \cap A$ äquivalent:*

(1) $g(x) = \inf\{g(w) \mid w \in A\}$
(2) $0 \in \partial g(x) + N(A,\, x)$.

Beispiel 2.13 Betrachte $X = \mathbb{R}^2$ mit euklidischer Norm, $A = \{(t, -t+2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $x = (1,1)$ und $g(v) := \|v - (2,2)\|^2, v \in \mathbb{R}^2$. Wegen $(-2,-2) \in \partial g(1,1)$ und $(2,2) \in N(A,\ (1,1))$ gilt $0 \in \partial g(x) + N(A,\, x)$.

2.6 Einige grundlegende Sätze der Funktionalanalysis

Für abzählbar viele offene und dichte Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes ist deren Durchschnitt dicht. Eine Folgerung aus dieser Tatsache ist der Satz von Baire, aus dem sich seinerseits wichtige Aussagen der Funktionalanalysis, wie beispielsweise das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, ableiten lassen. Er kommt im Beweis von Proposition 4.7 zur Anwendung, indem ausgenutzt wird, daß Dualräume normierter Räume stets vollständig sind.

Theorem 2.17. (Baire) [25, Korollar 3.4]
Sind X ein vollständiger metrischer Raum und $\{S_n\}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X, für die $r > 0,\ x \in X$ mit

$$B(x,\ r) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n,$$

existieren, so gibt es $m \in \mathbb{N},\ s > 0,\ y \in X$ mit $B(y,\ s) \subseteq S_m$.

Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert eine Existenzaussage für kompakte Teilmengen von Funktionenräumen.

Theorem 2.18. (Arzelà-Ascoli) [75, Theorem 3.5]
Sind $(X,\, d)$ ein kompakter metrischer Raum, $C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ versehen mit der Maximumsnorm $\|f\| := \max\{|f(t)| \mid t \in X\}$ sowie $M \subseteq C(X)$ beschränkt und gleichgradig stetig, so ist M eine relativ kompakte Teilmenge von $C(X)$ (d. h. $\operatorname{cl}(M)$ *ist kompakt).*

Wichtige, die schwachen Topologien betreffende Aussagen sind in den beiden folgenden Sätzen enthalten. Gemäß Theorem 2.19 ist eine schwach kompakte Teilmenge eines normierten Raumes stets beschränkt. Eine beschränkte und schwach abgeschlossene Teilmenge braucht dagegen im allgemeinen nicht schwach kompakt zu sein. Werden aber die Reflexivität des Raumes und die Konvexität einer Menge M angenommen, gilt sogar:

$$M \text{ ist abgeschlossen und beschränkt} \Leftrightarrow M \text{ ist schwach kompakt.}$$

Theorem 2.19. [83, Korollar IV.2.2]
Ist X ein normierter Raum, so sind für $M \subseteq X$ äquivalent:

(1) *M ist beschränkt*
(2) *Für alle $l^* \in X^*$ ist $l^*(M)$ beschränkt.*

Insbesondere ist eine schwach kompakte Teilmenge von X stets (norm-)beschränkt.

Theorem 2.20. ([23, Satz 11.5] in Verbindung mit [62, Satz 23.25])
Es seien X ein reflexiver normierter Raum und $M \subseteq X$ konvex. Dann sind äquivalent:

(1) *M ist abgeschlossen und beschränkt*
(2) *M ist schwach kompakt.*

Die Bedeutung des Satzes von Krein-Milman ist umittelbar verständlich, denn er gibt unter anderem an, wie kompakte konvexe Teilmengen lokalkonvexer Räume aus ihren Extrempunkten aufgebaut sind.

Theorem 2.21. (Krein - Milman) [43, Theorem in § 5 e)]
Es sei K eine kompakte und konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes X. Dann sind für $M \subseteq K$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\sup \{l^*(y) \mid y \in M\} = \max \{l^*(z) \mid z \in K\}$ *für alle* $l^* \in X^*$
(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{kon}(M)) = K$
(3) $\mathrm{ext}(K) \subseteq \mathrm{cl}(M)$.

3. Minimalitätsbedingungen

In diesem Abschnitt werden hinreichende und notwendige Minimalitätsbedingungen für konvex-zusammengesetzte Funktionen angegeben, und zwar für stark eindeutige Minima (in 3.1) und stark mehrdeutige Minima (in 3.2), wobei in beiden Fällen von möglichst geringen Voraussetzungen ausgegangen wird, etwa bis auf Theorem 3.7 (2) unter Verzicht auf die Vollständigkeit der betrachteten Räume oder eine stetige Differenzierbarkeit.

3.1 Stark eindeutige Minima / Sharp minima zusammengesetzter Funktionen

Um sich einen Anhaltspunkt dafür zu verschaffen, welche(r) Minimalitätsbegriff(e) für konvex-zusammengesetzte Funktionen geeignet sein könnte(n), betrachte man folgende endlichdimensionale Situation: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $m \geq n$, f Fréchet-differenzierbar im Punkt x mit Rang $f'(x) = n$ und g eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wird $\varepsilon := \min \{\|f'(x)(p)\| \mid \|p\| = 1\}$ gesetzt und $\delta > 0$ derart gewählt, daß $\|f(v) - f(x) - f'(x)(v-x)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\|v-x\|$ für $v \in B(x, \delta)$, so ergibt sich für solche v die Ungleichung

$$\begin{aligned}\varepsilon\|v-x\| \leq \|f'(x)(v-x)\| &= \|f(x) - f(v) + f(v) - f(x) - f'(x)(v-x)\| \\ &\leq \|f(v) - f(x)\| + \frac{\varepsilon}{2}\|v-x\|\end{aligned}$$

und daraus $\|f_x(v)\| \geq \|f_x(x)\| + \dfrac{\varepsilon}{2}\|v-x\|$ mit $f_x(\cdot) := f(\cdot) - f(x)$.

Dies führt unmittelbar zur

Definition 3.1. (siehe [17]) Es seien $A \subseteq X$, $h : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $x \in A \cap \operatorname{dom} h$. Dann heißt x stark eindeutiges Minimum (Sharp minimum) von h auf A, falls es $d > 0$ und $r > 0$ gibt, so daß

$$h(v) \geq h(x) + d\|v-x\| \text{ für alle } v \in A \cap B(x, r)$$

gilt.

Neben dem Beispiel eines stark eindeutigen Minimums in der Einleitung seien nachfolgend noch zwei weitere genannt.
Beispiel 3.1 Für $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto \sqrt{|p-a|} + \sqrt{|q-b|} \in \mathbb{R}$$

ein stark eindeutiges Minimum in (a,b) auf $\mathbb{R}^2$.

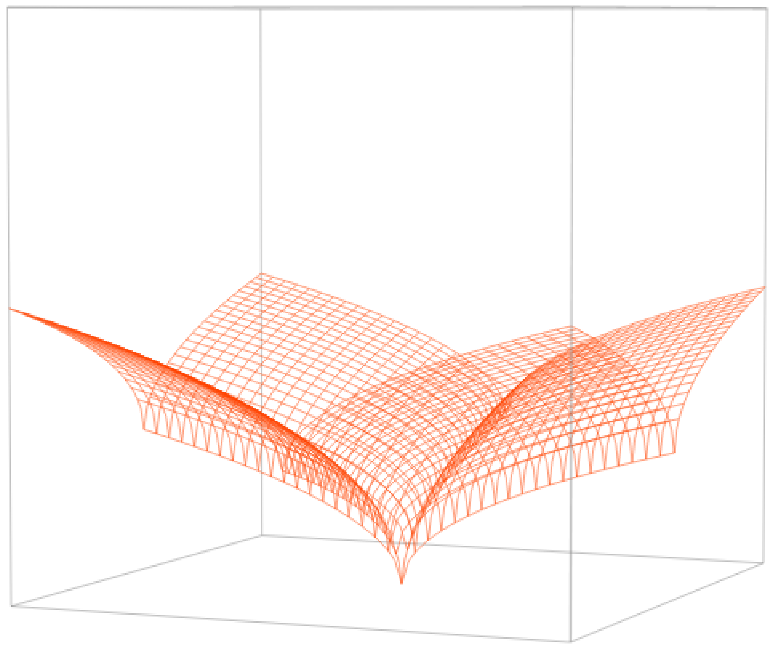

Fig. 7 $f(p,q) = \sqrt{|p|} + \sqrt{|q|}$

Beispiel 3.2 Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto (p+q^2-1,\ -\frac{1}{2}p^2 - q + \frac{5}{2},\ -q+2) \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$f_1(p,q) = (p+q^2-1),\ f_2(p,q) = (-\frac{1}{2}p^2 - q + \frac{5}{2}),\ f_3(p,q) = (-q+2)$$

gilt

$$f'(p,q) = \begin{pmatrix} 1 & 2q \\ -p & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(1,1) = (1,1,1),\ f'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \operatorname{sgn}(f_i(1,1)) f_i'(1,1) = 0$$

für alle $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Wegen [84, Satz 2.1.9] sind die Voraussetzungen von [84, Satz 3.4.8] gegeben, der die Existenz von $d > 0,\ r > 0$ mit

$$\|f(p,q)\|_\infty \ \geq\ \|f(1,1)\|_\infty \ +\ d\|(p-1,q-1)\|_\infty$$

für $(p,q) \in B((1,1),\ r)$ garantiert.

Im folgenden stehen X,Y,Z für normierte Räume, f für eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ und g für eine konvexe Funktion $g:\ Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Da stetige konvexe Funktionen sogar lokal Lipschitz-stetig sind, erhält man durch die folgende Proposition 3.1 eine wichtige notwendige Bedingung für das Vorliegen eines stark eindeutigen Minimums, nämlich die Injektivität der Ableitung. Dabei muß nur die Gâteaux-Differenzierbarkeit von f vorausgesetzt werden.

Proposition 3.1. (siehe [37, Beweis zu Theorem 3.1])
Sind $x \in \operatorname{cor}(A) \subseteq A \subseteq X$, f Gâteaux-differenzierbar in x, $L : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Lipschitz-stetig in einer Umgebung von $f(x)$ und x ein stark eindeutiges Minimum von $L \circ f$ auf A, so ist $f'(x)$ injektiv.

Beweis. Man nehme an, es gibt ein $u \in N(f'(x)) \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung existieren $R > 0$, so daß L Lipschitz-stetig auf $B(f(x),\ R)$ mit einer Lipschitz-Konstante $c > 0$ ist, $s > 0$ mit $[x,\ x+su] \subseteq A$ sowie $d > 0$, $r > 0$ mit $|L(f(w)) - L(f(x))| \geq d\|w-x\|$ für alle $w \in A \cap B(x,\ r)$. Damit folgt für hinreichend kleine $t > 0$

$$\frac{d\|u\|}{2c} > \frac{1}{t}\|f(x+tu) - f(x) - f'(x)(tu)\| = \frac{1}{t}\|f(x+tu) - f(x)\|,$$

$f(x+tu) \in B(f(x),\ R)$ (f ist in x Gâteaux-differenzierbar) und auch

$$\frac{dt\|u\|}{2} > c\|f(x+tu) - f(x)\| \geq |L(f(x+tu)) - L(f(x))| \geq d\|tu\| = dt\|u\|.$$

Widerspruch! $\square$

Für das im eingangs dieses Abschnitts dargestellten endlichdimensionalen Fall definierte $\varepsilon > 0$ sowie beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ hat man wegen $f_x(x) = 0$ bezüglich der Stützfunktion $\sigma_{\partial\|\cdot\|(f_x(x))}$ die Ungleichung

$$\sigma_{\partial\|\cdot\|(f_x(x))}(f_x'(x)(w-x)) = \|f'(x)(w-x)\| \geq \varepsilon\|w-x\|,$$

die sich, wie Theorem 3.1 zeigt, als eine hinreichende Minimalitätsbedingung unter Verwendung des Subdifferentials und deutlich allgemeineren Voraussetzungen eignet.

Theorem 3.1. (siehe [37, Theorem 2.3])
Es seien $A \subseteq X$, die Funktion f in $x \in A \cap \operatorname{dom} g$ Fréchet-differenzierbar und $a > 0$. Ferner gelte eine der beiden folgenden Aussagen:

(1) *Es existiert ein $b > 0$ mit $\partial g(f(x)) \cap bB_{Y^*} \neq \emptyset$ und*

$$\sigma_{\partial g(f(x))\, \cap\, bB_{Y^*}}(f'(x)(w-x)) \geq a\|w-x\| = \sigma_{aB_{X^*}}(w-x) \quad f.\,a.\ w \in A. \tag{3.1}$$

(2) $f(x) \in \operatorname{cor}(\operatorname{dom} g) \cap \operatorname{dom} \partial g$, $\partial_A g(f(x)) = \partial g(f(x))$ *und*

$$\sigma_{\partial g(f(x))}(f'(x)(w-x)) \geq a\|w-x\| = \sigma_{aB_{X^*}}(w-x) \quad f.\,a.\ w \in A. \tag{3.2}$$

Dann hat $g \circ f$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x.

Beweis. Es stehe σ für $\sigma_{\partial g(f(x))\,\cap\, bB_{Y^*}}$, wenn Voraussetzung (1) erfüllt ist, oder für $\sigma_{\partial g(f(x))}$, wenn Voraussetzung (2) erfüllt ist. In beiden Fällen ist σ stetig, was in letzterem Fall aus Theorem 2.14 folgt.
Sei $d \in [0,\ a[$. Wegen $\lim\limits_{v \longrightarrow 0} \dfrac{p(v)}{\|v\|} = 0$ für $p(v) := f'(x)(v) - f(x+v) + f(x)$ und der

Stetigkeit von σ kann $r > 0$ hinreichend klein mit

$$|\sigma(p(v))| \ \leq \ (a-d)\|v\|$$

für alle $v \in B(0,\ r)$ gewählt werden. Daraus ergibt sich für $w \in A\ \cap\ B(x,\ r)$

$$\begin{aligned} g(f(w)) - g(f(x)) &\geq \sigma(f(w) - f(x)) \\ &= \sigma(f'(x)(w-x) - p(w-x)) \\ &\geq \sigma(f'(x)(w-x)) - \sigma(p(w-x)) \\ &\geq a\|w-x\| - \sigma(p(w-x)) \\ &\geq d\|w-x\|. \end{aligned}$$

□

Es ist unter einer zusätzlichen Voraussetzung möglich, den Term "$a\|w-x\|$" durch 0 zu ersetzen:

Theorem 3.2. (siehe [37, Corollary 2.5])
Es seien $A \subseteq X$, f Fréchet-differenzierbar in $x \in A \cap$ dom g und $S \subseteq X$ ein Kegel mit $S \supseteq \mathbb{R}_+(A-x)$, der von der schwach kompakten Menge $\mathbb{E}$ erzeugt wird. Ferner gelte eine der beiden folgenden Aussagen:

(1) *Es existiert ein $b > 0$ mit $\partial g(f(x))\ \cap\ bB_{Y^*} \neq \emptyset$ und*

$$\sigma_{\partial g(f(x))\,\cap\, bB_{Y^*}}(f'(x)(v)) \ > \ 0 \quad f.\,a.\ \ v \in \mathbb{E}. \tag{3.3}$$

(2) $f(x) \in \operatorname{cor}(\operatorname{dom} g)\ \cap\ \operatorname{dom} \partial g,\ \partial_A g(f(x)) = \partial g(f(x))$ *und*

$$\sigma_{\partial g(f(x))}(f'(x)(v)) \ > \ 0 \quad f.\,a.\ \ v \in \mathbb{E}. \tag{3.4}$$

Dann hat $g \circ f$ ein stark eindeutiges Minimum auf $x + \mathbb{R}_+(A-x)$ in x.

Beweis. Es stehe wie im Beweis von Theorem 3.1 σ für $\sigma_{\partial g(f(x))\,\cap\, bB_{Y^*}}$, wenn Voraussetzung (1) erfüllt ist, oder für $\sigma_{\partial g(f(x))}$, wenn Voraussetzung (2) erfüllt ist. Wie bereits erwähnt, ist σ in beiden Fällen stetig.
Aufgrund der Kompaktheit von $\mathbb{E}$ gibt es sowohl ein $M > 0$ mit $\|v\| \leq M$ für alle $v \in \mathbb{E}$ (Theorem 2.19) als auch wegen (3.3) bzw. (3.4) ein $m > 0$ mit

$$\sigma(f'(x)(v)) \ \geq \ m \quad \text{für alle } v \in \ \mathbb{E}.$$

Für $s > 0$ und $w \in A \setminus \{x\}$ existieren $u \in \mathbb{E}$, $t > 0$ mit $s(w-x) = tu$, und es folgt

$$\begin{aligned}\sigma(f'(x)(x+s(w-x)-x)) &= \sigma(f'(x)(s(w-x)))\\ &= t\sigma(f'(x)(u))\\ &\geq tm\\ &\geq \frac{tm}{M}\|u\|\\ &= \frac{m}{M}\|x+s(w-x)-x\|.\end{aligned}$$

Nun wende man Theorem 3.1 an. □

Bemerkung 3.1 Für die Anwendung von Theorem 3.2 ist es wichtig zu wissen, unter welchen Bedingungen ein Kegel eine schwach kompakte und erzeugende Menge besitzt. Eine in dieser Hinsicht nützliche Aussage wird von Ferro in [28, Proposition 3.1] angegeben: Ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel K eines reflexiven Raumes besitzt genau dann eine schwach kompakte Basis mit eindeutiger Darstellung der Elemente von K, wenn $\mathrm{int}(K^*) \neq \emptyset$.

Man betrachte die Abbildung f aus Beispiel 3.2. Für alle $(p,q) \neq (0,0)$ ist

$$\sigma_{\partial\|\cdot\|_\infty(f(1,1))}(f'(1,1)(p,q)) = \sigma_{\partial\|\cdot\|_\infty(1,1,1)}\begin{pmatrix} p+2q \\ -p-q \\ -q \end{pmatrix} > 0,$$

denn die Einheitsvektoren $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ gehören zu $\partial\|\cdot\|_\infty(1,1,1)$ (siehe Beispiel 2.10), und aus der Annahme

$$e_i \cdot \begin{pmatrix} p+2q \\ -p-q \\ -q \end{pmatrix} \leq 0 \quad \text{für alle } i = 1,\ 2\ 3$$

resultiert der Widerspruch $p = q = 0$. Man kann also Theorem 3.2 auf $S = A = \mathbb{R}^2$, $x = (1,1)$ und etwa $\mathbb{E} = \partial B_{\mathbb{R}^2}$ anwenden, aus dem sich ebenfalls ergibt, daß die Funktion $\|f(\cdot)\|_\infty$ ein stark eindeutiges Minimum in $(1,1)$ besitzt.

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung von Theorem 3.2 wird in Abschnitt 4 angegeben (Beispiel 4.2).

Bemerkung 3.2 Man sieht leicht, daß Bedingung (3.2) erfüllt ist, falls es $a > 0$ mit

$$aB_{X^*} \subseteq \ \partial g(f(x)) \circ f'(x) + \ N(A,\ x)$$

gibt, also eine modifizierte Pschenichnyi-Rockafellar-Bedingung gilt; man beachte dazu Theorem 2.16 (2). Im Falle der Schwach*-Kompaktheit von $\partial g(f(x))$ ergibt sich die Umkehrung zumindest für konvexes A durch Anwendung des unten stehenden Theorems 3.3 auf $E = A$, $B = aB_{X^*}$ sowie $D = \partial g(f(x)) \circ f'(x)$. Man beachte, daß dann $\partial g(f(x)) \circ f'(x)$ gemäß Theorem 2.4 normbeschränkt und damit gleichgradig stetig ist.

Theorem 3.3.
Es seien W ein lokalkonvexer Raum, B und D nichtleere Teilmengen von W^*, wobei D gleichgradig stetig ist, sowie $E \subseteq W$ konvex und $x \in E$. Dann sind

$$\sigma_B(v-x) \;\leq\; \sigma_D(v-x) \quad f.\,a.\;\; v \in\; E$$

und

$$\mathrm{kon}(B) \;\subseteq\; \mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D)) + N(E,\, x) \tag{3.5}$$

äquivalent.

Beweis. " $\Rightarrow$ " Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit von D ist σ_D in $0 \in \mathrm{dom}\; \sigma_D \cap \mathrm{dom}\; \iota_{E-x}$ stetig; siehe dazu Theorem 2.3. Durch Anwendung der Theoreme 2.7 und 2.11 nebst Proposition 2.1 erhält man

$$\begin{aligned} B &\subseteq \partial(\sigma_D + \iota_{E-x})(0) \\ &= \partial\sigma_D(0) + \partial\iota_{E-x}(0) \\ &= \partial\sigma_{\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D))}(0) + \partial\iota_{E-x}(0) \\ &= \mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D)) + N(E,\, x) \end{aligned}$$

und damit (3.5), da $\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D)) + N(E,\, x)$ konvex ist.
" $\Leftarrow$ " Aus (3.5) ergibt sich für $v \in E$

$$\sigma_B(v-x) = \sigma_{\mathrm{kon}(B)}(v-x) \leq \sigma_{\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D))+N(E,\,x)}(v-x) = \sigma_{\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(D))}(v-x) = \sigma_D(v-x).$$

$\square$

Es seien X ein normierter Raum, $M \subseteq K \subseteq X^*$ mit K konvex und schwach*-kompakt. Theorem 2.21, angewendet auf X^*, versehen mit der Schwach*-Topologie, ergibt dann insbesondere die Äquivalenz von $\forall\; v \in X : \sigma_M(v) = \sigma_K(v)$ und $\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(M)) = K$. Dabei ist zu beachten, daß die bezüglich der Schwach*-Topologie stetigen Funktionale auf X^* gerade jene von der Form $l^* \longmapsto l^*(u),\; u \in X$, sind. Nach Theorem 2.3 ist K normbeschränkt, mithin $\mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(M))$ schwach*-kompakt sowie normbeschränkt und daher auch gleichgradig stetig. Die obige Äquivalenz erhält man deshalb auch aus Theorem 3.3 mit $W = X,\; D = \mathrm{cl}^*(\mathrm{kon}(M))$, $B = K,\; E = B_X$ und $x = 0$.

In Abschnitt 4 wird sich die folgende Aussage als hilfreich für den Beweis von Theorem 4.11 erweisen.

Proposition 3.2.
Ist f Fréchet-differenzierbar in $x \in A \subseteq X$ und hat $g \circ f$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x, so gilt

$$\exists\, d > 0\; \forall\, c > 0\; \exists\, s > 0\; \forall\, v \in A\, \cap\, B(x,\, s) : g(f(v)) - g(f(x)) \;\geq\; \frac{d}{c + \|f'(x)\|}\|f(v) - f(x)\| \tag{3.6}$$

Beweis. Es existieren ein $d > 0,\ r > 0$ derart, daß

$$g(f(w)) - g(f(x)) \ \geq \ d\|w-x\|$$

für alle $w \in A \cap\ B(x,\ r)$. Sei nun $c > 0$. Dann gibt es ein $s \in\ ]0,\ r]$ mit

$$\|f(v)-f(x)\| - \|f'(x)(v-x)\| \leq \|f(v)-f(x)-f'(x)(v-x)\| \leq c\|v-x\|$$

bzw.

$$\|f(v)-f(x)\| \leq c\|v-x\| + \|f'(x)\|\|v-x\| = (c+\|f'(x)\|)\|v-x\|$$

für alle $v \in B(x,\ s)$, woraus insgesamt (3.6) resultiert. □

Die Gerstewitz-Funktion $\varphi_{M,\,p}$ aus Definition 2.30 wurde von Gutiérrez, Miglierina, Molho und Novo für einen lokalkonvexen Raum X , einen konvexen Kegel K mit nichtleerem Inneren, $p \in \operatorname{int}(K)$ sowie $\emptyset \neq M \subseteq X\,(M+K \neq X)$ zu

$$\psi_{M,\,p} : 2^X \ni T \longmapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid sp + M \subseteq T + K\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

verallgemeinert [35]. Darüber hinaus wurde von Gutiérrez, Jiménez, Miglierina und Molho in [34] die Äquivalenz

$$\psi_{M,\,p}(T) \leq r \ \Leftrightarrow\ rp + M \subseteq \operatorname{cl}(T+K) \tag{3.7}$$

für $T \subseteq X,\ r \in \mathbb{R}$ gezeigt. Dieses Resultat wird für das zusammenfassende Theorem 3.4 benutzt:

Theorem 3.4. (siehe [38, Theorem 2.2])

(1) *Es seien $A \subseteq X$ konvex, f Fréchet-differenzierbar in $x \in A$ und g stetig in $f(x) \in \operatorname{dom} g$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
  (a) *$g \circ f$ hat ein stark eindeutiges Minimum auf A in x.*
  (b) *Es gibt ein $a > 0$ mit*

$$\sigma_{\partial g(f(x))}(f'(x)(w-x)) \geq \ a\|w-x\| \quad \textit{f. a. } \ w \in A.$$

  (c) *Es gibt ein $b > 0$ mit*

$$g'_+(f(x),\ f'(x)(v-x)) \ \geq \ b\|v-x\| \quad f.\,a.\ \ v \in A.$$

  (d) $0 \in \operatorname{int}(\partial g(f(x)) \circ f'(x) + N(A,\ x))$.

(2) *Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von* (1) *noch $x \in \operatorname{cor}(A)$, so ist $f'(x)$ injektiv.*

(3) *Sind zusätzlich zu den Voraussetzungen von* (1) $\operatorname{int}(N(A,\ x)) \neq \emptyset$ *(bzgl. der Dualnorm) und $p \in \operatorname{int}(N(A,\ x))$, so sind die folgende Aussage* (e) *und* (a), (b), (c), (d) *äquivalent.*
  (e) *Es gibt ein $c > 0$ mit*

$$\psi_{cB_{X^*},\,p}(\partial g(f(x)) \circ f'(x)) \ \leq \ 0.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich aus Theorem 3.1 und 3.3 sowie Proposition 2.6 und 3.1 nebst Anwendung von (3.7) auf $K = N(A,\ x),\ M = cB_{X^*}$ und $T = \partial g(f(x)) \circ f'(x)$ unter Beachtung der Tatsache, daß $\partial g(f(x)) \circ f'(x) + N(A,\ x)$ (schwach*-) abgeschlossen ist. □

3.2 Stark mehrdeutige Minima / Weak sharp minima zusammengesetzter Funktionen

Eine Fixierung auf den Begriff des stark eindeutigen Minimums bei der Formulierung von Minimalitätsbedingungen für konvex-zusammengesetzte Funktionen hätte vor allem den Nachteil, die Möglichkeit mehrerer Minima von vornherein auszuschließen. Schon einfache Beispiele, wie das folgende aus [39], zeigen aber die Notwendigkeit eines weiter gefaßten Minimalitätsbegriffes. So hat etwa die nichtkonvexe konvex-zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ mit

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (p_1, p_2) \longmapsto (p_1, -p_1, -p_1 p_2) \in \mathbb{R}^3$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \ni (q_1, q_2, q_3) \longmapsto \max\{q_1, q_2, q_3\} \in \mathbb{R}$$

einerseits weder auf $B^1 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ noch auf $B^2 := \mathbb{R}^2$ ein stark eindeutiges Minimum im Nullpunkt, andererseits gilt aber

$$(g \circ f)(p^i) - (g \circ f)(y^i) = (g \circ f)(p^i) \geq |p_1^i| = \boldsymbol{d}(p^i, C^i)$$

für $i = 1, 2$ und $y^i := (y_1^i, y_2^i) \in C^i$, $p^i := (p_1^i, p_2^i) \in B^i$, $C^1 := \{0\} \times \mathbb{R}_+$ bzw. $C^2 := \{0\} \times \mathbb{R}$. Damit sind C^1 und C^2 Mengen stark mehrdeutiger Minima (Weak sharp minima) im Sinne der unten stehenden Definition, die dem von Burke und Ferris [17] eingeführten Konzept folgt.

Definition 3.2. Es seien $B \subseteq X$, $h : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, C eine mehrelementige Menge mit $C \subseteq B \cap \operatorname{dom} h$ und $a > 0$. Dann heißt C Menge stark mehrdeutiger Minima von h auf B modulo a, wenn

$$h(v) \geq h(y) + a\boldsymbol{d}(v, C)$$

für alle $v \in B$ und $y \in C$ gilt.

Beispiel 3.3 Sind $l^* \in X^*$ und $B := (l^*)^{-1}([-1, 1])$, so ist die Hyperebene $C := (l^*)^{-1}(0) = \boldsymbol{N}(l^*)$ eine Menge mehrdeutiger Minima von

$$h : X \ni u \longmapsto \begin{cases} \sqrt{|l^*(u)|}, & u \in B \\ +\infty, & u \in X \setminus B \end{cases} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

modulo $\|l^*\|$, denn für $v \in B$, $y \in C$ ergibt sich

$$h(v) - h(y) = \sqrt{|l^*(v)|} - \sqrt{|l^*(y)|} = \sqrt{|l^*(v)|} \geq |l^*(v)| = \|l^*\|\boldsymbol{d}(v, C). \tag{3.8}$$

Hier sind B und C konvexe und abgeschlossene Teilmengen von X.
Als konkretes Beispiel betrachte man etwa $X = C[0, 1]$, ausgestattet mit der Maximumsnorm (siehe Beispiel 2.5), sowie das Funktional $l^* : C[0, 1] \ni u \longmapsto \int_0^1 u(t)\sin(t)dt \in \mathbb{R}$ mit der Norm $\|l^*\| = \int_0^1 |\sin(s)|ds = \int_0^1 \sin(s)ds$. In diesem speziellen Fall bedeutet (3.8) also

$$h(v) - h(y) = \sqrt{\left|\int_0^1 v(t)\sin(t)dt\right|} \geq \left(\int_0^1 \sin(s)ds\right)\boldsymbol{d}(v, C),$$

wobei $v \in B$, $y \in C$.

Beispiel 3.4 Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt polyedrisch, falls dom h ein Polyeder ist und $m \geq 1,\ p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}^n,\ r_1, ..., r_m \in \mathbb{R}$ mit

$$f(v) = \max\{p_i \cdot v + r_i \mid 1 \leq i \leq m\}$$

für alle $v \in \operatorname{dom} h$ existieren (siehe dazu [7, Proposition 2.3.5]). Hat eine polyedrische Funktion eine mehrelementige Menge von Minima, so ist diese eine Menge stark mehrdeutiger Minima [7, Proposition 5.1.6].

Charakterisierungen stark mehrdeutiger Minima über sowohl Richtungsableitungen als auch Subdifferentiale und Normalenkegel finden sich in [15] und [57] (hier insbesondere für solche unterhalbstetiger konvexer Funktionen) sowie in [95].

Von nun an sei C eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X.

Es stellt sich konsequenterweise die Frage sowohl nach hinreichenden als auch notwendigen Minimalitätsbedingungen für Mengen stark mehrdeutiger Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen unter Verzicht auf die Vollständigkeit der betrachteten Räume, entsprechend den Ergebnissen von Abschnitt 3.1. Eine Antwort darauf bieten die Theoreme 3.5, 3.6 und 3.7 (1). Den Weg zum unten stehenden Resultat weist (3.1) von Theorem 3.1.
Aussagen, die in enger Verwandtschaft zu dieser Problemstellung stehen, finden sich in [2]. Dort werden für stetig differenzierbares f, abgeschlossenes B (diese Menge außerdem mit einer zusätzlichen Eigenschaft) und $x \in f^{-1}(B)$ Bedingungen angegeben, unter denen $c > 0,\ r > 0$ mit $c\boldsymbol{d}(v,\ f^{-1}(B)) \leq \boldsymbol{d}(f(v),\ B),\ v \in B(x,\ r)$, existieren.

Theorem 3.5. [39, Theorem 2.2]
Es seien $x \in C \subseteq A \subseteq X,\ f(x) \in \operatorname{dom} g$ und $g(f(x)) = g(f(y))$ für alle $y \in C$. Ferner gebe es $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ r > 0$ derart, daß f gleichmäßig differenzierbar auf $B(x,\ r)$ ist, $\partial g(f(y)) \cap bB_{Y^*} \neq \emptyset$ für alle $y \in C \cap B(x,\ r)$ und

$$\sigma_{\partial g(f(y))\, \cap\, bB_{Y^*}}(f'(y)(w-y)) \ \geq\ \sigma_{N(C,\ y)\, \cap\, aB_{X^*}}(w-y) \quad f.\,a.\ \ w \in A,\ y \in C \cap B(x,\ r) \quad (3.9)$$

sowie

$$\forall\ \alpha > 0,\ v \in A \setminus C\ \exists\, z \in C,\ L^* \in N(C,\ z) \cap B_{X^*} :\ L^*(v-z) \ \geq\ c\|v-z\| \ -\ \alpha \qquad (3.10)$$

gelten. Dann existiert ein $s > 0$ mit

$$g(f(v)) \ \geq\ g(f(y)) \ +\ \frac{ac}{2}\boldsymbol{d}(v,\ C)$$

für alle $v \in B := \{u \in A \cap B(x,\ s) \mid \boldsymbol{d}(u,\ C) \leq cs\}$ und $y \in C$. Insbesondere ist $C \cap B(x,\ s)$ eine Menge stark mehrdeutiger Minima von $g \circ f$ auf $B \cap \{p \in X \mid \boldsymbol{d}(p,\ C) = \boldsymbol{d}(p,\ C \cap B(x,\ s))\}$ modulo $\frac{ac}{2}$.

Beweis. Man wähle $r_0 \in\,]0,\ r]$ hinreichend klein mit

$$\|f(p) - f(q) - f'(q)(p-q)\| \ \leq\ \frac{ac}{2b}\|p-q\|$$

für alle $p,\ q \in B(x,\ r_0)$ und setze $s := \dfrac{r_0}{3}$. Für beliebige $v \in B \setminus C$ und $\alpha \in \,]0,\ cs[$ existieren

wegen (3.10) $z \in C,\ L^* \in\ N(C,\ z)\ \cap\ B_{X^*}$ mit $L^*(v-z) \geq c\|v-z\| - \alpha$. Aus

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(v,\ C) &= \max\ \{l^*(v) - \sigma_C(l^*)\ \mid\ l^* \in\ B_{X^*}\}\ \text{(Theorem 2.8)}\\ &\geq \sup\ \{l^*(v-y)\ \mid\ y \in C,\ l^* \in\ N(C,\ y)\ \cap\ B_{X^*}\},\end{aligned}$$

folgt

$$\|v-z\|\ \leq\ \frac{1}{c}(L^*(v\ -\ z) + \alpha)\ \leq\ \frac{1}{c}(\boldsymbol{d}(v,\ C) + \alpha)\ <\ s + s$$

und daher

$$\|x-z\|\ \leq\ \|x-v\| + \|v-z\|\ <\ s + 2s = r_0.$$

Für $y \in C$ ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}g(f(v)) - g(f(y)) &= g(f(v)) - g(f(z))\\ &\geq \sigma_{\partial g(f(z))\ \cap\ bB_{Y^*}}(f(v) - f(z))\\ &\geq \sigma_{\partial g(f(z))\ \cap\ bB_{Y^*}}(f'(z)(v-z)) - \sigma_{\partial g(f(z))\ \cap\ bB_{Y^*}}(f(z) - f(v) + f'(z)(v-z))\\ &\geq \sigma_{N(C,\ z)\ \cap\ aB_{X^*}}(v-z) - b\frac{ac}{2b}\|v-z\|\\ &\geq aL^*(v-z) - \frac{ac}{2}\|v-z\|\\ &\geq ac\|v-z\| - a\alpha - \frac{ac}{2}\|v-z\|\\ &\geq \frac{ac}{2}\boldsymbol{d}(v,\ C) - a\alpha\end{aligned}$$

und somit die Behauptung, da α eine beliebige Zahl aus dem Intervall $]0,\ cs[$ ist. □

Im Falle der Vollständigkeit von X ist (3.10) gemäß Lemma 2.1 erfüllt.

Nach Theorem 3.3 ist (3.9) mit

$$N(C,\ y)\ \cap\ aB_{X^*} \subseteq (\partial g(f(y))\ \cap\ bB_{Y^*}) \circ f'(y) + N(A,\ y) \quad \text{f. a. } y \in C\ \cap\ B(x,\ r)$$

gleichbedeutend, wenn A als konvex vorausgesetzt wird. Zudem kann folgende Aussage festgehalten werden:

Proposition 3.3. [39, Propositon 2.1]
Sind $C \subseteq A \subseteq X$ mit konvexem A, f Gâteaux-differenzierbar auf C, g stetig, ∂g normbeschränkt auf $f(C)$ und

$$(g \circ f)'_+(y,\ v-y)\ \geq\ a\boldsymbol{d}(v-y,\ \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+(C-y)))$$

für ein $a > 0$ und alle $v \in A,\ y \in C$, so gilt (3.9).

Beweis. Sei $b > 0$ derart gewählt, daß $\partial g(f(C)) \subseteq bB_{Y^*}$. Die Anwendung von Theorem 2.6, Theorem 2.13 und Proposition 2.6 ergibt für $v \in A,\ y \in C$

$$\begin{aligned}\sigma_{\partial g(f(y))\,\cap\, bB_{Y^*}}(f'(y)(v-y)) &= \sigma_{\partial g(f(y))}(f'(y)(v-y))\\ &= g'_+(f(y), f'(y)(v-y))\\ &= (g\circ f)'_+(y,\ v-y)\\ &\geq a\boldsymbol{d}(v-y,\ \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+(C-y)))\\ &= \sigma_{N(C,\ y)\,\cap\, aB_{X^*}}(v-y),\end{aligned}$$

da

$$\partial \boldsymbol{d}(\cdot\ , \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+(C-y)))(0) \ = \ N(C,\ y)\cap B_{X^*}.$$

□

Beispiel 3.5 Man betrachte $X = \mathbb{R}^3,\ Y = \mathbb{R}^2$ (mit euklidischer Norm), $A = \{(u,v,w) \mid w \ \geq\ -v\},\ C = \{(1,0,0)k + (0,-1,1)l \mid k,\ l \in\ \mathbb{R}\}$, die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) \longmapsto (v+w, -u(v+w)) \in \mathbb{R}^2$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto \max\{p,q\} \in \mathbb{R}$$

und stelle fest: $g\circ f$ ist eine konvex-zusammengesetzte Funktion, die nicht konvex auf A ist.
Ferner gilt für jedes h aus C :
$f(h) = (0,0),\ g(f(h)) = g(0,0) = 0,\ N(C,\ h) = \{(0,1,1)m \mid m\ \in\ \mathbb{R}\}$ und
$\partial g(f(h)) = \mathrm{kon}(\{(1,0),\ (0,1)\})$ (siehe [4, Example 3.51]).
Es seien $a = b = 1, (y,-z,z) \in C, (u,v,w) \in A$.
Dann folgt für beliebiges $(0,m,m) \in N(C,\ (y,-z,z))\ \cap\ B_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned}\sigma_{\partial g(f(y,-z,z))\,\cap\, B_{\mathbb{R}^2}}(f'(y,-z,z)((u,v,w)-(y,-z,z))) &\geq\ (1,0)f'(y,-z,z)(u-y, v+z, w-z)\\ &= (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & -y & -y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-y\\ v+z\\ w-z\end{pmatrix}\\ &= (1,0)\begin{pmatrix} v+w\\ -y(v+w)\end{pmatrix}\\ &= v+w\\ &\geq m(v+w)\\ &= m(v+z+w-z)\\ &= (0,m,m)\begin{pmatrix} u-y\\ v+z\\ w-z\end{pmatrix}\\ &= (0,m,m)\left(\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y\\ -z\\ z\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Für $x = (0,0,0)$ und ein $r > 0$ ist damit (3.9) erfüllt, (3.10) wegen Lemma 2.1 sowieso. Gemäß Theorem 3.5 gibt es daher ein $s > 0$, so daß $C \cap B((0,0,0),\ s)$ eine Menge mehrdeutiger Minima von $g \circ f$ ist. Tatsächlich gilt in diesem Fall noch mehr, denn man hat für beliebige $(u,v,w) \in A$ und $(k,-l,l) \in C$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(u,v,w) - (g \circ f)(k,-l,l) &= (g \circ f)(u,v,w) \\
&\geq v + w \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w) \\
&= \frac{\left| (0,-1,-1)\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|}{\|(0,-1,-1)\|} \\
&= \boldsymbol{d}((u,v,w),\ C).
\end{aligned}$$

Dagegen ist aber (0,0,0) kein stark eindeutiges Minimum von $g \circ f$ auf A!

Der nächste Satz liefert eine notwendige Minimalitätsbedingung für stark mehrdeutige Minima, die durch eine Modifikation der Pschenichnyi-Rockafellar-Bedingung der Konvexen Analysis (Theorem 2.16) ausgedrückt wird. Ausreichend ist dabei, lediglich die Gâteaux-Differenzierbarkeit von f auf C vorauszusetzen.

Theorem 3.6. [39, Theorem 2.3]
Es seien f stetig in $x \in C \subseteq A \subseteq X$ mit konvexem A und Gâteaux-differenzierbar auf C, wobei f' auf $C \cap W$ (W eine Umgebung von x) beschränkt ist, sowie g stetig in $f(x) \in \mathrm{dom}\, g$ und $a > 0,\ c > 0$. Ist dann C eine Menge stark mehrdeutiger Minima von $g \circ f$ auf $\{u \in A \mid \boldsymbol{d}(u,\ C) \leq c\}$ modulo a, d. h.

$$g(f(w)) \geq\ g(f(y)) + a\boldsymbol{d}(w,\ C)$$

für alle $w \in \{u \in A \mid \boldsymbol{d}(u,\ C) \leq c\}$ und $y \in C$, so existieren $d > 0,\ s > 0$ mit

$$N(C,\ z) \cap aB_{X^*} \subseteq\ (\partial g(f(z)) \circ f'(z)) \cap dB_{X^*} + N(A,\ z) = \partial g(f(z)) \circ f'(z) + N(A,\ z) \quad (3.11)$$

für alle $z \in\ C \cap B(x,\ s)$.

Beweis. Da g stetig in $f(x)$ ist, gibt es gemäß Theorem 2.6 $s_0 > 0,\ d_0 > 0$ mit

$$|g(y_0) - g(y_1)|\ \leq\ d_0\|y_0 - y_1\| \quad \text{für alle } y_0,\ y_1 \in B(f(x),\ s_0)$$

sowie $s_1 > 0,\ s_2 > 0,\ d_1 > 0$, so daß $f(B(x,\ s_1)) \subseteq B(f(x),\ s_0)$ und $\|f'(y)\| \leq d_1$ für jedes $y \in C \cap B(x,\ s_2)$. Man setze $s := \min\{s_1, s_2\}$, wähle beliebige $z \in C \cap B(x,\ s)$, $v \in A$ und hat, wenn $t \in]0,\ 1]$ hinreichend klein ist, $z + t(v-z) \in \{u \in A \mid \boldsymbol{d}(u,\ C) \leq c\}$ nebst

$$\frac{1}{t}(g(f(z+t(v-z))) - g(f(z))) \geq \frac{a}{t}(\boldsymbol{d}(z+t(v-z),\ C) - \boldsymbol{d}(z,\ C)).$$

Unter Benutzung von Theorem 2.13, Theorem 2.12 und Proposition 2.6 folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{\partial g(f(z))\,\circ f'(z)}(v-z) &= g'_+(f(z), f'(z)(v-z))\\ &= (g\circ f)'_+(z,\ v-z)\\ &\geq a\boldsymbol{d}(\cdot\ ,\ C)'_+(z,\ v-z)\\ &= \sigma_{N(C,\ z)\ \cap\ aB_{X^*}}(v-z)\end{aligned}$$

und aufgrund von Theorem 3.3 auch

$$N(C,\ z)\ \cap\ aB_{X^*} \subseteq \partial g(f(z))\circ f'(z) + N(A,\ z).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{t}(g(f(z+tp)) - g(f(z)))\ \leq\ \frac{d_0}{t}\|f(z+tp) - f(z)\|$$

für alle $p \in X$ und hinreichend kleine $t \in\ ]0,\ 1]$, daher des weiteren

$$\sigma_{\partial g(f(z))}(f'(z)(p)) =\ g'_+(f(z), f'(z)(p)) \leq\ d_0\|f'(z)(p)\| \leq\ d_0\ d_1\|p\|, \tag{3.12}$$

woraus sich schließlich - wiederum wegen Theorem 3.3 -

$$\partial g(f(z))\ \circ f'(z) \subseteq\ d_0\ d_1 B_{X^*}$$

ergibt. Es gilt also (3.11) für $d := d_0\ d_1$. □

Beispiel 3.6 Man betrachte das eingangs dieses Abschnitts beschriebene Beispiel mit $A = B^2 = \mathbb{R}^2$, $C = C^2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $a = 1$. Für ein beliebiges $(0, r) \in C,\ r \in \mathbb{R}$, gilt $f(0, r) = (0, 0, 0)$, ferner

$$f'(0,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 0\\ -r & 0\end{pmatrix},$$

$$\partial g(f(0,r)) = \partial g(0,0,0) = \{(t_1,t_2,t_3) \mid t_1+t_2+t_3 = 1 \text{ und } t_i\ \geq\ 0,\ i = 1,2,3\}$$

(siehe [4, Example 3.51]) und $N(C,\ (0,r)) = \mathbb{R} \times \{0\}$, $N(A,\ (0,r)) = \{(0,0)\}$.
Gemäß Theorem 3.6 existiert für $x = (0,0)$ ein $s > 0$ derart, daß

$$\begin{aligned}[-1,\ 1] \times \{0\} &= N(C,\ (0,r)) \cap B_{\mathbb{R}^2}\\ &\subseteq \partial g(f(0,r)) \circ f'(0,r) + N(A,\ (0,r))\\ &= \partial g(0,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 0\\ -r & 0\end{pmatrix}\\ &= \{(t_1 - t_2 - rt_3, 0) \mid t_1+t_2+t_3 = 1 \text{ und } t_i\ \geq\ 0,\ i = 1,2,3\}\end{aligned}$$

für alle $(0,r) \in B((0,0),\ s) \cap\ C$; man hat aber sogar

$$N(C,\ (0,r)) \cap B_{\mathbb{R}^2} = [-1,\ 1] \times \{0\} \subseteq \{(t_1 - t_2 - rt_3, 0) \mid t_1+t_2+t_3 = 1 \text{ und } t_i\ \geq\ 0,\ i = 1,2,3\}$$

für alle $(0,r) \in C$.

Bemerkung 3.4 Sind zusätzlich zu den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes X und Y vollständig, f stetig differenzierbar und $f'(x)$ surjektiv, so erhält man die Gültigkeit von (3.9): Aus Lemma 2.2 folgt die Existenz von $m > 0$ und $r \in \,]0,\ s]$ mit

$$mB_Y \subseteq f'(u)(B_X) \quad \text{für alle } \ u \in B(x,\ r),$$

was bedeutet, daß $f'(u)$ für jedes $u \in B(x,\ r)$ surjektiv ist. Seien nun $z \in C \cap\ B(x,\ r)$ sowie $q \in Y$. Dann gibt es ein $p \in X$ derart, daß $f'(z)(p) = q$, und wegen (3.12) ergibt sich

$$\sigma_{\partial g(f(z))}(q) = \sigma_{\partial g(f(z))}(f'(z)(p)) \ \leq \ d_0\|f'(z)(p)\| \ = \ d_0\|q\|,$$

folglich

$$\partial g(f(z)) \ \subseteq \ d_0 B_{Y^*};$$

demnach gilt (3.9) für $b = d_0$.

Im zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ die Funktionalmatrix der Funktion f in einem Punkt (p,q). Daher ist $\boldsymbol{N}(f'(y)) = C^2$ für jedes $y \in C^2 \supseteq C^1$ und

$$\bigcap_{y \,\in\, C^i} \boldsymbol{N}(f'(y)) = C^2 = \{0\} \times \mathbb{R}, \ \ i = 1,2.$$

In Theorem 3.7 wird dieser Sachverhalt in gewisser Weise verallgemeinert, wobei wiederum nur die Gâteaux-Differenzierbarkeit von f angenommen werden muß. Es beinhaltet zwei Aussagen: eine notwendige Bedingung für die schwache Kompaktheit von C sowie für reflexive Räume (und damit für eine Vielzahl betrachtenswerter Räume) eine hinreichende Bedingung für die Unbeschränktheit von C, beides ausgedrückt durch die Schnittmenge der Nullmengen von $f'(y)$ über alle $y \in C$.

Theorem 3.7.
Es seien $C \subseteq \operatorname{cor}(A) \subseteq A \subseteq X$, f Gâteaux-differenzierbar auf C sowie g stetig auf $f(C)$, $a > 0$ und C eine Menge stark mehrdeutiger Minima von $g \circ f$ auf A modulo a, d. h. $g(f(v)) \ \geq \ g(f(y)) + a\boldsymbol{d}(v,\ C)$ für alle $v \in A$ und $y \in C$.

(1) *Ist C schwach kompakt, so gilt*

$$\bigcap_{y \,\in\, C} \boldsymbol{N}(f'(y)) = \ \{0\}.$$

(2) *Ist X reflexiv, so folgt die Unbeschränktheit von C, falls*

$$\bigcap_{y \,\in\, C} \boldsymbol{N}(f'(y)) \ \neq \{0\}.$$

Beweis. (1) Wähle ein beliebiges $u \in C$ und definiere die Funktion $F : X \longrightarrow Y$ durch $F(w) := f(w+u), w \in X$. Für $B := A - u$ und $D := C - u$ gilt $D \subseteq \operatorname{cor}(B)$, D schwach kompakt, $F(D) = f(C)$, F Gâteaux-differenzierbar auf D mit $F'(y-u) = f'(y)$ für $y \in C$ sowie $g(F(w)) \geq \ g(F(z)) + a\boldsymbol{d}(w,\ D)$ für $w \in B,\ z \in D$.

Betrachte $z \in D$ und $p \in \boldsymbol{N}(F'(z)) \setminus \{0\}$. Es existieren ein $s > 0$ mit $[z,\ z+sp] \subseteq B$ sowie ein $r > 0$ derart, daß g Lipschitz-stetig auf $B(F(z),\ r)$ ist (Theorem 2.6). Sei nun $t > 0$ hinreichend klein mit $F(z+tp) \in B(F(z),\ r)$ (möglich, da F in z Gâteaux-differenzierbar) und $t \in\ ]0,\ s]$. Dann ist

$$\frac{1}{t}(g(F(z+tp)) - g(F(z))) \geq \frac{a}{t}(\boldsymbol{d}(z+tp,\ D) - \boldsymbol{d}(z,\ D)),$$

woraus unter Anwendung von Theorem 2.13, Theorem 2.12 und Proposition 2.6

$$\begin{aligned} 0 &= g'_+(F(z),\ 0) \\ &= g'_+(F(z), F'(z)(p)) \\ &= (g \circ F)'_+(z,\ p) \\ &\geq a\boldsymbol{d}(\cdot\ ,\ D)'_+(z,\ p) \\ &= a\sigma_{N(D,\ z)\ \cap\ B_{X^*}}(p) \geq 0 \end{aligned}$$

und wegen $0 \in D$

$$0 = \sigma_{N(D,\ z)\ \cap\ B_{X^*}}(p) = \sigma_{N(D,\ z)\ \cap\ B_{X^*}}(p) + \sigma_{N(D,\ z)\ \cap\ B_{X^*}}(0-z) \geq \sigma_{N(D,\ z)\ \cap\ B_{X^*}}(p-z) \geq 0 \tag{3.13}$$

resultiert. Man nehme nun die Existenz eines

$$q\ \in \bigcap_{y\ \in\ C} \boldsymbol{N}(f'(y)) \setminus \{0\} = \bigcap_{z\ \in\ D} \boldsymbol{N}(F'(z)) \setminus \{0\},$$

an. Es ist dann auch mq für $m \neq 0$ in dieser Menge enthalten, und aufgrund von (3.13) sowie der Kompaktheit von D ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(mq,\ D) &= \max\ \{l^*(mq) - \sigma_D(l^*) \mid l^* \in B_{X^*}\} (\text{Theorem 2.8}) \\ &= \max\ \{l^*(mq-z)\ \mid\ z \in D,\ l^* \in\ N(D,\ z) \cap\ B_{X^*}\} = 0. \end{aligned}$$

Damit enthält D die Gerade $\mathbb{R}q$, was aber in Widerspruch zur ihrer Beschränktheit steht.

(2) Nimmt man die Beschränktheit von C an, so ist C gemäß Theorem 2.20 auch schwach kompakt; ein nichttrivialer Durchschnitt widerspricht dann aber (1). □

3.3 Dualität und zusammengesetzte Funktionen

Ein bedeutendes Resultat der Konvexen Analysis ist der Satz von Fenchel-Rockafellar, welches kurz gefaßt aussagt, daß ein Paar von Optimierungsaufgaben, in enger Beziehung stehend und aus konvexen Funktionen bzw. deren Konjugierten gebildet, unter gewissen Voraussetzungen einen gemeinsamen Optimalwert besitzen. Dem (primalen) Problem

$$\text{Minimiere } g(v) - h(v)\ \text{ für } v \in X, \tag{D1}$$

wobei $g : X \longrightarrow\ \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine konvexe und $h : X \longrightarrow\ \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine konkave Funktion ist, wird das (duale) Problem

$$\text{Maximiere } h^{\bullet}(l^*) - g^*(l^*)\ \text{ für } l^* \in X^* \tag{D2}$$

zugeordnet (siehe dazu Definition 2.25). Setzt man

$$M_0 := \inf\{g(v) - h(v) \mid v \in X\}, \; m_0 := \sup\{h^\bullet(l^*) - g^*(l^*) \mid l^* \in X^*\},$$

wobei $M_0, \; m_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so gilt wegen

$$h(v) + h^\bullet(l^*) \leq l^*(v) \leq g(v) + g^*(l^*)$$

für $v \in X, \; l^* \in X^*$ stets $M_0 \geq m_0$; es liegt eine sogenannte schwache Dualität vor. Das duale Problem erlaubt es also, den Optimalwert des primalen von unten anzunähern. Der Idealfall besteht nun darin, daß das duale Problem einfacher als das primale zu behandeln ist und man, sofern die Gleichheit $M_0 = m_0$ gilt, aus einer Lösung eine solche der - eigentlich interessierenden - Ausgangsaufgabe (D1) erhält. Zu dieser Fragestellung zunächst ein illustrierendes Beispiel.

Beispiel 3.7 Die Aufgabe, $g(u,v) := e^{-u}, \; (u,v) \in \mathbb{R}^2$, auf $S := \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 \mid r = 0, \; s > 0\}$ zu minimieren, kann zum primalen Problem

$$\text{Minimiere } g(u,v) - (-\iota_S(u,v)) = g(u,v) + \iota_S(u,v) \; \text{ für } (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

umformuliert werden. Es ist

$$M_0 = \inf\{g(u,v) + \iota_S(u,v) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\} = 1,$$

und wegen

$$g^*(p,q) = \sup\{pu + qv - e^{-u} \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\} = \begin{cases} -p\ln(-p) + p, & p < 0, \; q = 0 \\ 0, & p = 0, \; q = 0 \\ +\infty, & p > 0, \; q = 0 \\ +\infty, & q \neq 0 \end{cases}$$

nebst

$$(-\iota_S)^\bullet(p,q) = \inf\{pu + qv + \iota_S(u,v) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\} = \begin{cases} 0, & q \geq 0 \\ -\infty, & q < 0 \end{cases}$$

hat man

$$m_0 = \sup\{(-\iota_S)^\bullet(p,q) - g^*(p,q) \mid (p,q) \in \mathbb{R}^2\} = \sup\{p\ln(-p) - p \mid p < 0\} = 1.$$

Wie Theorem 3.8 zeigt, ergibt sich die Gleichheit $M_0 = m_0$ im oben gezeigten Beispiel aber schon direkt und damit ohne großen Aufwand aus der Stetigkeit von g auf $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} \iota_S$:

Theorem 3.8. (Fenchel-Rockafellar) [74]
Existiert ein Punkt $x \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom}(-h)$, in dem eine der beiden Funktionen g und $-h$ stetig ist, so folgt

$$M_0 = \inf\{g(v) - h(v) \mid v \in X\} = \sup\{h^\bullet(l^*) - g^*(l^*) \mid l^* \in X^*\} = m_0.$$

Ferner wird das Supremum im Falle $M_0 < +\infty$ angenommen.

Besitzt das duale Problem eine Optimallösung und gilt $M_0 = m_0$, so spricht man von starker Dualität, wie sie beispielsweise unter den Voraussetzungen von Theorem 3.8 gegeben ist.

Bemerkung 3.5 Auch bei der Lagrange-Dualität ist der Wert der dualen Optimallösung stets kleiner oder gleich der primalen. In einer Standardformulierung lautet hier das primale Problem für einen (abgeschlossenen) konvexen Kegel $K \subseteq Y,\ f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ g : X \longrightarrow Y$ und $h : X \longrightarrow Z$

$$\text{Minimiere } f(v) \ \text{ für } v \in X \text{ mit } g(v) \in -K,\ h(v) = 0$$

und das dazugehörige duale Problem

$$\text{Maximiere } \inf\{f(w) + y^*(g(w)) + z^*(h(w)) \mid w \in X\} \text{ für } y^* \in K^*,\ z^* \in Z^*.$$

Im allgemeineren Bereich lokalkonvexer Räume kann ein Resultat angegeben werden, welches den Satz von Fenchel-Rockafellar erweitert und dabei auch die Minimierung einer konvex-zusammengesetzten Funktion zum Gegenstand hat, wobei die innere Funktion linear und stetig ist. Dazu betrachte man für zwei lokalkonvexe Räume V und W, $g : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex, $h : W \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konkav sowie $S \in L(V,\ W)$ und deren Adjungierte $S^* : W^* \longrightarrow V^*$ die Optimierungsprobleme

$$\text{Minimiere } g(v) - h(S(v)) \ \text{ für } v \in V$$

sowie

$$\text{Maximiere } -(-h)^*(-L^*) - g^*(S^*(L^*)) = h^\bullet(L^*) - g^*(S^*(L^*)) \ \text{ für } L^* \in W^*$$

und setze

$$M_1 := \inf\{g(v) - h(S(v)) \mid v \in V\},\ \ m_1 := \sup\{h^\bullet(L^*) - g^*(S^*(L^*)) \mid L^* \in W^*\}.$$

Dann beinhaltet das folgende Theorem 3.9 ein Theorem 3.8 in gewisser Weise generalisierendes Resultat.

Theorem 3.9. [64, Theorem 4.63]
Es seien V, W, g, h und S wie oben genannt, und es gelte zusätzlich eine der beiden folgenden Aussagen:

(1) *Es exisistiert ein $x \in \operatorname{dom} g$ derart, daß $-h$ in $S(x)$ stetig ist.*
(2) *V und W sind vollständige normierte Räume, g und $-h$ unterhalbstetig sowie*

$$\mathbb{R}_+(\operatorname{dom}(-h) - S(\operatorname{dom} g))$$

ein abgeschlossener Unterraum von W.

Dann besteht die Gleichheit $M_1 = m_1$. Ist zudem M_1 endlich, wird das Supremum in der Definition von m_1 angenommen.

Ein Ansatz, der die in diesem Abschnitt beschriebene Fragestellung unter weitgehendem Verzicht auf topologische bzw. die Konvexität betreffende Annahmen behandelt, findet sich in [8]. Man beachte dazu auch [12], [27].

Verallgemeinerte Dualitätsresultate erzielen Bednarczuk und Tran [6] auf der Grundlage abstrakter Konvexität und Dualität, die eine Loslösung von linearen Strukturen gestatten. Ansatzpunkte bieten dabei Aussagen über Konvexe Funktionen wie Theorem 2.5.

Ausgehend von einer nichtleeren Menge V werden Familien reellwertiger Abbildungen auf V, die bezüglich der Addition von Konstanten abgeschlossen sind, betrachtet und elementar auf V genannt. Eine Funktion $g : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt dann $\Phi-$konvex, falls Φ eine elementare Menge auf V ist und die Gleichheit

$$g(x) = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi : g(v) \geq \varphi(v) \ \text{ f. a. } v \in V\}$$

für alle $x \in V$ gilt. Daneben werden für $g : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deren $\Phi-$ Konjugierte durch

$$g^{*}{}_{\Phi}(\varphi) := \sup\{\varphi(v) - g(v) \mid v \ \in \ V\}, \ \ \varphi \in \Phi$$

sowie für $\varepsilon \geq 0$ das $\varepsilon - \Phi-$ Subdifferential von g in $x \in \operatorname{dom} g$ mittels

$$\partial_{\varepsilon,\Phi}\, g(x) := \{\varphi \in \Phi \mid g(v) - g(x) \geq \varphi(v) - \varphi(x) - \varepsilon \ \text{ f. a. } v \in V\}$$

definiert.

Mit Hilfe der oben gennanten Begriffe behandeln Bednarczuk und Tran

$$\text{Minimiere } g(v) + h(T(v)) \ \text{ für } v \in V$$

als primales Problem und

$$\text{Maximiere } \ -\sup\{-\psi(T(v)) - g(v) \mid v \in X\} - h^{*}{}_{\Psi}(\psi) \ \ \text{ für } \psi \in \Psi$$

als duales Problem für eine nichtleere Menge V, einen linearen Raum W, $g : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $h : W \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $T : V \longrightarrow W$ sowie eine elementare Menge Ψ auf W und erhalten unter zusätzlichen Bedingungen eine Aussage zur Gleichheit der Optimalwerte, die in Analogie zu den Theoremen 3.8 und 3.9 steht.

Theorem 3.10. [6, Theorem 4.3, Remark 4.3]
Es seien V, W, g, h, T und Ψ *wie oben genannt sowie* Φ *eine elementare Menge auf* V, *ferner* $\operatorname{dom} g \cap T(\operatorname{dom} h) \neq \emptyset$, $0 \in \Phi$, $0 \in \Psi$. *Existieren zu jedem* $\varepsilon > 0$ *dann* $x_\varepsilon \in V$, $\varphi_\varepsilon \in \partial_{\varepsilon,\Phi}\, g(x_\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon \in \partial_{\varepsilon,\Psi}\, h(T(x_\varepsilon))$ *mit*

$$\varphi_\varepsilon(v) + \psi_\varepsilon(T(v)) = 0 \quad f.\ a.\ v \in V,$$

so gilt

$$-\inf\{g(v)+h(T(v)) \mid v \in V\} = -\sup\{-\sup\{-\psi(T(v)) - g(v) \mid v \in V\} - h^{*}{}_{\Psi}(\psi) \mid \psi \in \Psi\} < +\infty.$$

4. Anwendungen in der Vektoroptimierung

Ausgehend von ihren Ursprüngen, die im wesentlichen in den Arbeiten von Edgeworth und Pareto zu finden sind, hat die Vektoroptimierung seit den fünfziger Jahren bedeutend zur Weiterentwicklung zahlreicher Teilbereiche der Mathematik beigetragen, darunter die Funktionalanalysis, Approximations- und Spieltheorie. Für die im Laufe der letzten Jahre erschienene Literatur seien beispielhaft die Bücher von Jahn [46], [47] genannt, welche dieses Gebiet auf einer breiten, allgemeinen Basis behandeln und in denen zusätzlich auf verschiedene Anwendungen eingegangen wird.
Hauptgegenstand der Vektoroptimierung ist es, Aussagen über die optimalen Elemente einer gegebenen Teilmenge eines teilweise geordneten linearen Raumes zu formulieren, wozu insbesondere hinreichende und notwendige Existenzbedingungen zählen. Ein spezieller Ausgangspunkt ist dabei die Generalisierung von Maximalitäts- bzw. Minimalitätsbedingungen reellwertiger Funktionen.

4.1 Effizienzbegriffe

Die Bildmenge einer beliebigen reellwertigen Funktion F ist auf natürliche Weise durch $F(p) \geq F(q) :\Leftrightarrow F(p) - F(q) \in \mathbb{R}_+$ geordnet. Dies läßt sich für den Fall einer vektorwertigen Funktion $f : X \longrightarrow Y$ (X und Y seien lineare Räume) verallgemeinern, indem man mittels eines spitzen konvexen Kegels $K \subseteq Y$ eine Relation auf $Y \times Y$ gemäß $z \geq_K y :\Leftrightarrow z - y \in K$ definiert; diese ist dann sowohl transitiv, d.h. $z_1 \leq_K z_2$ und $z_2 \leq_K z_3 \Rightarrow z_1 \leq_K z_3$, als auch antisymmetrisch, d.h. $z_1 \leq_K z_2$ und $z_2 \leq_K z_1 \Rightarrow z_1 = z_2$. So ist es möglich, auch ein abstraktes Optimierungsproblem

$$\text{Minimiere } f(w) \text{ für } w \in A \subseteq X \text{ bezüglich } \text{"} \leq_K \text{"} \qquad \text{(P1)}$$

zu stellen: Man finde Punkte $x \in A$ mit $f(x) \leq_K f(w)$ für alle $w \in A$ oder, äquivalent dazu, $f(A) \subseteq f(x) + K$. Jene Vorstellung von Minimalität ist allerdings ziemlich einschränkend, und ein Weg, sie - auch aus Gründen der Praktikabilität - in vernünftiger Weise abzuschwächen, besteht in der Betrachtung von (P1) mit dem Ziel, Kriterien für die Existenz sogenannter effizienter Elemente zu formulieren.

4.1.1 Effiziente und schwach effiziente Elemente

Definition 4.1. Es seien Y ein linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel und $\emptyset \neq M \subseteq Y$.

(1) [1] Ist $\operatorname{cor}(K) \neq \emptyset$, so heißt der Punkt $z \in M$ schwach effizientes Element von M bezüglich K, bezeichnet durch $z \in ES(M, K)$, falls die folgende Gleichheit besteht:

$$(M - z) \cap -\operatorname{cor}(K) = \emptyset.$$

(2) [89], [91] Ist K spitz, so heißt der Punkt $z \in M$ effizientes Element von M bezüglich K, bezeichnet durch $z \in E(M, K)$, falls die folgende Gleichheit besteht:

$$(M - z) \cap -K = \{0\}.$$

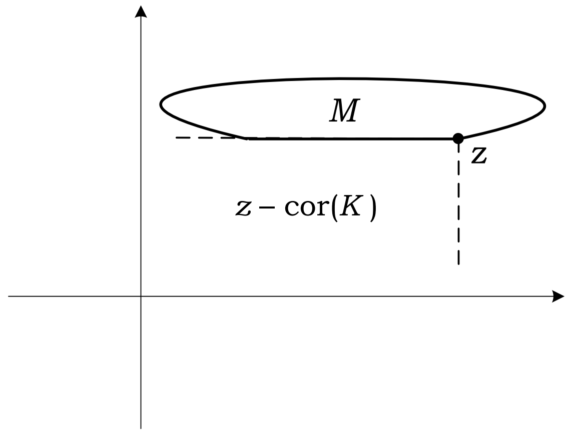

Fig. 8 Schwach effizientes Element z einer Menge M bezüglich des Kegels K

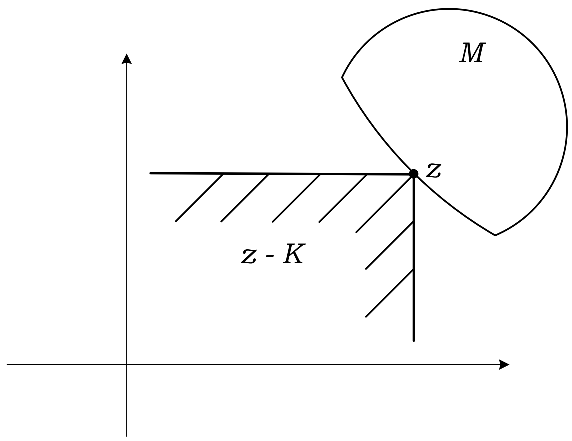

Fig. 9 Effizientes Element z einer Menge M bezüglich des Kegels K

Anders ausgedrückt, $z \in M$ ist ein effizienter Punkt, wenn es kein $w \in M \setminus \{z\}$ mit $w \leq_K z$ gibt oder, bezüglich (P1) für $M = f(A)$, $z = f(x)$ formuliert, kein $w \in A$ mit $f(w) \neq f(x)$ und $f(w) \leq_K f(x)$ existiert, was eine im allgemeinen weit weniger einschränkende Bedingung als $f(A) \subseteq f(x) + K$ darstellt.

4.1.2 Weitere Effizienzbegriffe

Durch die Formulierung von Effizienzbegriffen, die restriktiver als die in 4.1.1 angegebenen sind, sollen unerwünschte, abnorme Effizienzlösungen vermieden werden. Dazu zählen etwa solche, die ein asymptotisches Verhalten unbeschränkter Folgen in der zu optimierenden Menge nicht ausschließen; siehe dazu Bemerkung 4.1. Die Begriffe von Definition 4.2 ähneln einander: Der Durchschnitt von $M - z$ beziehungsweise dem von $M - z$ erzeugten Kegel mit einer (offenen) Obermenge des negativen Ordnungskegels ist der Nullpunkt oder in einer vorgegebenen Nullumgebung enthalten.

Definition 4.2. Es seien Y ein lokalkonvexer Raum, $K \subseteq Y$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel sowie $z \in M \subseteq Y$.
(1) (siehe Bednarczuk / Song [5], Zheng [91]) Existiert zu jeder Nullumgebung V eine Nullumgebung U mit

$$(M - z) \cap (U - K) \subseteq V$$

oder, gleichwertig dazu,

$$((M \setminus (z + V)) + U) \cap (z - K) = \emptyset,$$

so heißt z stark / strikt effizientes Element von M, bezeichnet durch $z \in S(M,\ K)$.

(2) (siehe Qiu / Hao [70]) Sei $\mathbb{B}$ eine Basis von K. Dann heißt z Henig-effizientes Element von M bzgl. $\mathbb{B}$, bezeichnet durch $z \in H(M,\ \mathbb{B})$, falls es für jede konvexe Nullumgebung V mit $0 \notin \mathbb{B} + V$ eine konvexe Nullumgebung U mit $U \subseteq V$ und

$$\mathbb{R}_+(M - z) \cap -(\mathbb{B} + U) = \emptyset$$

oder, gleichwertig dazu,

$$\mathbb{R}_+(M - z) \cap -\mathbb{R}_+(\mathbb{B} + U) = \{0\}$$

gibt.

(3) (siehe Borwein / Zhuang [10], Zheng [91]) Existiert zu jeder Nullumgebung V eine Nullumgebung U mit

$$\mathbb{R}_+(M - z) \cap (U - K) \subseteq V,$$

so heißt z supereffizientes Element (Super efficient point) von M, bezeichnet durch $z \in SE(M,\ K)$.

Bemerkung 4.1 Es gilt stets $S(M,\ K) \subseteq E(M,\ K)$, denn andernfalls existieren für $z \in S(M,\ K) \setminus E(M,\ K)$ ein Punkt $y \in Y$ sowie Nullumgebungen S und T mit $y \notin T$ und

$$y \in (M - z) \cap -K \subseteq (M - z) \cap (S - K) \subseteq T.$$

Das Umgekehrte gilt im allgemeinen aber nicht, wie man etwa am Beispiel

$$K = \mathbb{R}^2_+,\ z = (0,0),\ M = \mathbb{R}^2_+ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ xy \leq -1\}$$

erkennen kann.

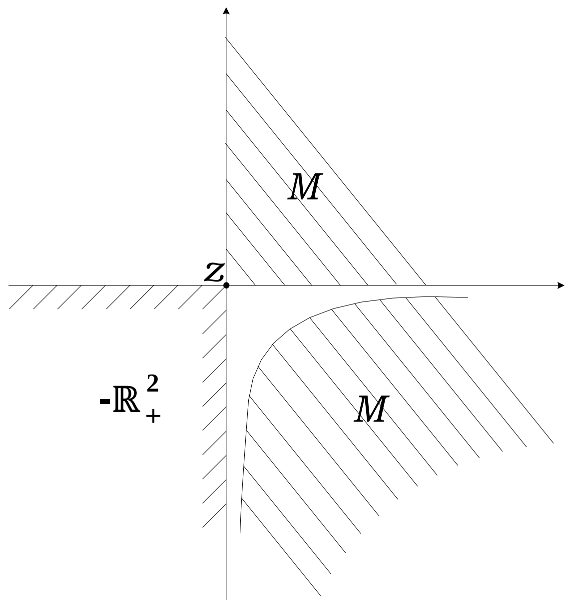

Fig. 10 $\quad z = (0,0) \in E(M,\ K) \setminus S(M,\ K)$

Theorem 4.1. [91, Proposition 3.7] [89, Theorem 4.4]
Es seien Y ein lokalkonvexer Raum, $K \subseteq Y$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel sowie $z \in M \subseteq Y$. Dann sind äquivalent:

(1) $z \in S(M,\ K)$.
(2) *Sind $\{z_\lambda\},\ \{w_\lambda\}$ Netze in Y mit $w_\lambda \in M,\ z_\lambda \longrightarrow 0$ sowie $z - (z_\lambda + w_\lambda) \in K$, so folgt $w_\lambda \longrightarrow z$.*
Im Falle eines normierten Raumes Y ist außerdem
(3) *Es gibt eine monoton wachsende Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\psi(t) > 0$ für $t > 0$ und $\boldsymbol{d}(w - z,\ -K) \ \geq\ \psi(\|w - z\|)$ für alle $w \in M$*

äquivalent zu (1) *und* (2).

Qiu und Hao geben in [70] die folgende Charakterisierung Henig-effizienter Elemente an. Für deren Beweis benutzen sie eine Gerstewitz-Funktion $\varphi_{\,\mathbb{R}_+(\mathbb{B}+U),\ k}$ (siehe Definition 2.30), wobei $\mathbb{B}$ eine Basis des Ordnungskegels, U eine Nullumgebung und $k \in \mathbb{B}$ sind.

Theorem 4.2. [70, Theorem 3.1]
Es seien Y ein lokalkonvexer Raum, $K \subseteq Y$ ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit Basis $\mathbb{B}$ sowie $z \in M \subseteq Y$. Dann sind äquivalent:

(1) $z \in H(M,\ \mathbb{B})$.
(2) *Es existieren eine sublineare und stetige Funktion $\sigma : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $\delta > 0$ mit*
  (a) $\forall\, w \in M : \sigma(w - z) \geq 0$
  (b) $\forall\, k \in \mathbb{B} : \sigma(-k) \leq -\delta$.

Im allgemeinen gilt $SE(M,\ K) \subseteq H(M,\ \mathbb{B})$ ([91, Proposition 3.5 (i)]). Theorem 4.3 liefert eine Charakterisierung supereffizienter Elemente:

Theorem 4.3. [89, Theorem 4.6] [10, Propositions 2.2, 2.9]
Für einen normierten Raum Y, einen abgeschlossenen, konvexen und spitzen Kegel $K \subseteq Y$ und $z \in M \subseteq Y$ sind die folgenden Aussagen (1) und (2) äquivalent. Setzt man zusätzlich die Vollständigkeit von Y und Konvexität von M voraus, sind $(1)-(3)$ äquivalent und, sofern K darüber hinaus eine abgeschlossene beschränkte Basis besitzt, sogar $(1)-(4)$:

(1) $z \in SE(M,\, K)$.
(2) $\exists\, c > 0\; \forall\, w \in M : \boldsymbol{d}(w-z,\, -K) \;\geq\; c\|w-z\|$.
(3) $Y^* = \; K^* + N(M,\, z)$.
(4) $\exists\, l^* \in \operatorname{int}(K^*)$ *(das Norminnere von K^*)* $\;\forall\, y \in M : l^*(y-z) \geq 0$.

4.2 Skalarisierung

Will man hinreichende oder notwendige Bedingungen für die Existenz effizienter Elemente entwickeln, so ist es naheliegend, auch mit Blick auf die Theoreme 4.1 bis 4.3, das eigentliche, mittels Vektoren formulierte Optimierungsproblem nach Möglichkeit in eine skalare Ersatzaufgabe zu transformieren, denn für reellwertige Funktionen steht eine umfangreiche Theorie zur Verfügung. Idealerweise löst ein Element x nach der Skalarisierung genau dann die Ersatzaufgabe, wenn x eine Lösung des vektorwertigen Problems ist; man siehe beispielsweise Proposition 4.1 bzw. 4.2. Dabei ist es natürlich von großem Vorteil, wenn dies mit Hilfe von Funktionen geschehen kann, die gut kontrollierbare Eigenschaften besitzen, namentlich lineare und sublineare. Beispielsweise können unter Verwendung von Halbnormen wie der Minkowski-Funktion $m_{(-p+K)\,\cap\,(p-K)}$ (K ein konvexer und spitzer Kegel mit $\operatorname{cor}(K) \neq \emptyset$ und $p \in \operatorname{cor}(K)$) Bedingungen für (schwach) effiziente Elemente angeben werden (vergleiche dazu [47, Abschnitt II.5]).

4.2.1 Skalarisierung durch die Gerstewitz-Funktion

Es ist möglich, Niveaumengen der Gerstewitz-Funktion (Definition 2.30) explizit anzugeben. Insbesondere besteht für einen linearen Raum Y, $M \subseteq Y$, $p \in Y \setminus \{0\}$ und beliebiges $t \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\{v \in Y \mid \varphi_{-M,\,p}(v) < t\} = M - \mathbb{R}^{>}_{+}p + tp$$

(siehe [78, Theorem 4.2.1]). Gemäß [78, Theorem 6.2.29] folgt daraus für einen konvexen spitzen Kegel und $p \in K \setminus \{0\}$

$$E(M,\, K + \mathbb{R}^{>}_{+}p) = \{z \in M \mid \varphi_{K-z,\,p}(z) = \min\{\varphi_{K-z,\,p}(w) \mid w \;\in\; M\}\}$$

und wegen $E(M,\, K) = \bigcap_{p\,\in K\setminus\{0\}} E(M,\, K + \mathbb{R}^{>}_{+}p)$ die nachfolgend angegebene Charakterisierung effizienter Elemente durch eine entsprechende Skalarisierung unter Benutzung der Abbildung $\varphi_{K-z,\,p}$.

Proposition 4.1. [82], [78, Proposition 6.2.34]
Es seien Y ein linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein konvexer spitzer Kegel, $p \in K \setminus \{0\}$ und $z \in M \subseteq Y$. Dann gilt:

$$z \in E(M,\, K) \Leftrightarrow \forall\, p \in K \setminus \{0\} : \varphi_{K-z,\,p}(z) = \min\,\{\varphi_{K-z,\,p}(w) \mid w \in M\}. \tag{4.1}$$

In der Äquivalenz (4.1) kann die rechtsstehende Aussage beim Vorhandensein einer Basis $\mathbb{B}$ von K auf eine echte Teilmenge von K reduziert werden, denn wegen der Gleichheit
$\frac{1}{t}\varphi_{K-z,\, v} = \varphi_{K-z,\, tv}$ für $t > 0$ gilt in diesem Fall zusätzlich

$$\forall\, p \in K \setminus \{0\} : \varphi_{K-z,\, p}(z) = \min\,\{\varphi_{K-z,\, p}(w) \mid w \in M\} \Leftrightarrow$$
$$\forall\, b \in \mathbb{B} : \varphi_{K-z,\, b}(z) = \min\,\{\varphi_{K-z,\, b}(w) \mid w \in M\}$$

Für schwach effiziente Elemente hat man zudem das in Propostion 4.2 festgehaltene Resultat.

Proposition 4.2. [78, Corollary 6.2.33]
Es seien Y ein topologischer linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel, $p \in \operatorname{int}(K)$ und $z \in M \subseteq Y$. Dann gilt:

$$z \in ES(M,\, K) \Leftrightarrow \varphi_{K-z,\, p}(z) = \min\,\{\varphi_{K-z,\, p}(w) \mid w \in M\}. \tag{4.2}$$

Proposition 4.1 wirft naheliegenderweise die Frage auf, ob entsprechende Effizienzaussagen für die Skalarisierung durch Abbildungen $\varphi_{K-y,\, p}$ mit festem $y \in Y$ angegeben werden können. Es zeigt sich, daß man sie bejahen kann, wenn für die Menge M eine obere bzw. untere Schranke (bezüglich " $\geq_K$ ") existiert. Eine solche Aussage stammt von Weidner [82]:

Theorem 4.4. (siehe [82], [78, Theorem 6.2.39])
Sind Y ein linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein algebraisch abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel, ferner M eine Teilmenge von Y, für die es $y \in Y \setminus M$ mit $M \subseteq y + K$ gibt, so gilt

$$E(M,\, K) = \{z \in M \mid \exists\, p \in K \setminus \{0\}\ \forall\, w \in\ M \setminus \{z\} : \varphi_{K-y,\, p}(z) < \varphi_{K-y,\, p}(w)\}.$$

Dabei sind die Funktionen $\varphi_{K-y,\, p}$ allesamt konvex.

Für einen algebraisch abgeschlossenen, konvexen und spitzen Kegel $K \subseteq Y$ und $p \in \operatorname{cor}(K)$ ist $m_{[-p,\, p]_K}$ gemäß Proposition 2.2 eine Norm auf Y, die für $y \in Y$ in der Beziehung

$$\forall\, w \in y + K : m_{[-p,\, p]_K}(w - y) = \varphi_{K-y,\, p}(w)$$

zur Gerstewitz-Funktion $\varphi_{K-y,\, p}$ steht [81, Proposition 11]. Darüber hinaus gilt das im folgenden aufgeführte hinreichende Kriterium für effiziente Elemente.

Theorem 4.5. (siehe [81, Theorem 11])
Es seien Y ein linearer Raum, $K \subseteq Y$ ein algebraisch abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel, ferner $y \in Y$ mit $M \subseteq y + \operatorname{cor}(K)$, $z \in M$ sowie $p \in \operatorname{cor}(K)$. Gilt dann

$$\forall\, w \in M \setminus \{z\} : m_{[-p,\, p]_K}(z - y) = \varphi_{K-y,\, p}(z) < \varphi_{K-y,\, p}(w) = m_{[-p,\, p]_K}(w - y),$$

so folgt $z \in E(M,\, K)$.

4.2.2 Skalarisierung durch die erweiterte Distanzfunktion

Mittels der erweiterten Distanzfunktion können ebenfalls Effizienzbedingungen ausgedrückt werden. Gilt etwa zusätzlich zu den Voraussetzungen von Proposition 4.2, daß Y ein normierter Raum ist, so erhält man ergänzend zu (4.2) die Äquivalenz

$$z \in ES(M,\ K) \Leftrightarrow \forall\, w \in M : \Delta(w - z,\ -K) \geq 0,$$

denn es gilt gemäß Proposition 2.5 (2), [78, Lemma 2.3.1 (d), Proposition 2.3.6 (II) (b)]

$$z \notin ES(M,\ K) \Leftrightarrow \exists\, w \in M : w - z \in -\mathrm{cor}(K) = -\mathrm{int}(K) \Leftrightarrow \exists\, w \in M : \Delta(w - z,\ -K) < 0.$$

4.2.3 Skalarisierung durch $-K$- repräsentierende Funktionen

Zu einem generalisierten Ansatz gelangt man durch Betrachtung der sogenannten $-K$-repräsentierenden Abbildungen, basierend auf [48] eingeführt in [49].

Definition 4.3. Es seien Y ein linearer Raum und $K \subseteq Y$ ein konvexer Kegel. Dann heißt $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ $-K$-repräsentierend, falls

$$-K = \{y\ \in\ Y \mid \psi(y)\ \leq\ 0\}.$$

Beispiel 4.1 Es sei Y ein normierter Raum.

- Für $l^* \in Y^*$ und den Bishop-Phelps-Kegel

  $$K(l^*) := \{w\ \in\ Y \mid l^*(w)\ \geq \|w\|\}$$

  (siehe dazu auch [36]) ist $\psi = l^* + \|\cdot\|$ eine $-K(l^*)$- repräsentierende Abbildung.
- $\Delta(\cdot,\ -K)$ ist nach Proposition 2.5 (3) eine $-K$-repräsentierende Funktion, falls K ein konvexer abgeschlossener Kegel in Y ist.

Es gilt die unten stehende Charakterisierung effizienter Elemente.

Theorem 4.6. [49, Theorem 4.1]
Sind Y ein linearer Raum , K ein konvexer spitzer Kegel, $z \in M \subseteq Y$ und ψ eine $-K$-repräsentierende Funktion mit $\psi(0) = 0$, so gilt

$$z \in E(M,\ K) \Leftrightarrow\ \forall\, w\ \in\ M \setminus \{x\} : \psi(w - z) > 0.$$

4.3 Existenzaussagen für effiziente Elemente

In diesem Abschnitt werden drei wichtige Kriterien angegeben, welche die Existenz effizienter beziehungsweise supereffizienter Elemente garantieren.

Eine grundlegende Aussage basiert auf einer Arbeit von Hartley [40]; dabei seien Y ein topologischer linearer Raum, $M \subseteq Y$ und $K \subseteq Y$ ein konvexer spitzer Kegel mit $K^+ \neq \emptyset$ (Man beachte, daß letztere Voraussetzung beispielsweise dann gegeben ist, wenn Y ein separabler

normierter Raum und K abgeschlossen sind [47, Theorem 3.38]). Existiert dann überdies ein $v \in Y$, für das die Menge $(v-K) \cap M$ schwach kompakt ist, so gilt $E(M,\ K) \neq \emptyset$. Man wähle nämlich ein beliebiges $l^* \in -K^+$, welches sein Maximum auf $(v-K) \cap M$ in $x \in M$ annimmt. Ein $0 \neq y \in (M-x) \cap -K$ kann es nicht geben, denn sonst existieren $0 \neq k_1 \in K,\ w \in M$ mit $-k_1 = y = w-x$, folglich $v-(k_2+k_1) = x-k_1 = x+y = w$ für ein $k_2 \in K$, da $x \in v-K$. Aus $l^*(x) \geq l^*(x+y)$ resultiert dann aber der Widerspruch $0 \geq l^*(y) = l^*(-k_1) > 0$.
Zusammengefaßt ergibt sich also das unten stehende Resultat:

Theorem 4.7. (siehe [40, Theorem 4.1])
Es seien Y ein topologischer linearer Raum, $M \subseteq Y$ und $K \subseteq Y$ ein spitzer konvexer Kegel mit $K^+ \neq \emptyset$. Dann ist $E(M,\ K)$ nichtleer, falls es ein $v \in Y$ gibt, für das $(v-K) \cap M$ schwach kompakt ist.

Für den Fall, daß Y ein normierter Raum und K ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel sind, ist eine Charakterisierung der Existenz effizienter Elemente mit Hilfe der Distanzfunktion $\boldsymbol{d}(\cdot\ -K)$ möglich. Für ein eindeutiges Minimum x von $\boldsymbol{d}(\cdot - y,\ -K)$ auf M kann es nämlich kein $w \in M$ mit $w-x \in -K \setminus \{0\}$ geben, denn sonst folgt der Widerspruch

$$0 < \boldsymbol{d}(w-y,\ -K) - \boldsymbol{d}(x-y,\ -K) \leq \boldsymbol{d}(w-y-(x-y),\ -K) = \boldsymbol{d}(w-x,\ -K) = 0.$$

Umgekehrt gilt für $x \in E(M,\ K),\ v \in M \setminus \{x\}$, daß $v-x \notin -K$ und folglich $\boldsymbol{d}(v-x,\ -K) > 0$. Damit erhält man die folgende Aussage von Miglierina:

Proposition 4.3. (siehe [63])
Es seien Y ein normierter Raum, $M \subseteq Y$ und $K \subseteq Y$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel. Dann sind äquivalent:

(1) *Es existiert ein $y \in Y$ derart, daß die Funktion $\boldsymbol{d}(\cdot - y,\ -K)$ ein eindeutiges Minimum auf M besitzt.*
(2) *$E(M,\ K) \neq \emptyset$.*

Ein wichtiges Kriterium für die Existenz supereffizienter Elemente geben Borwein und Zhuang [10] an. Dabei wird die Tatsache benutzt, daß für einen abgeschlossenen und konvexen Kegel K eines vollständigen normierten Raumes Y mit abgeschlossener beschränkter Basis $\mathbb{B}$ die Kegel

$$K(\mathbb{B},\ \varepsilon) := \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+(\mathbb{B} + \varepsilon B_Y))$$

für $0 \leq \varepsilon < \delta$ mit $\delta := \inf\{\|u\| \mid u \in \mathbb{B}\}$ stets Daniell-Kegel sind [10, Theorem 1.1 (5)]. Ist M zudem eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von Y, so folgt $E(M,\ K(\mathbb{B},\ \varepsilon)) \neq \emptyset$ und wegen [10, Corollary 2.6] auch die Existenz supereffizienter Elemente in M, somit insgesamt das folgende Theorem 4.8.

Theorem 4.8. [10, Theorem 2.7]
Ist Y ein vollständiger normierter Raum und hat der abgeschlossene konvexe Kegel K eine abgeschlossene beschränkte Basis, so folgt $SE(M,\ K) \neq \emptyset$ für jede abgeschlossene beschränkte Menge $M \subseteq Y$.

4.4 Hinreichende und notwendige Optimalitätsbedingungen

Im folgenden stehen X und Y für normierte Räume, f für eine Funktion $f: X \longrightarrow Y$ sowie K für einen abgeschlossenen, konvexen und spitzen Kegel in Y.

In diesem Abschnitt werden eine hinreichende Bedingung für ein stark eindeutiges Minimum einer skalarisierten Vektoroptimierungsaufgabe sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für effiziente, stark effiziente, Henig-effiziente und supereffiziente Elemente entwickelt, wenn f eine differenzierbare oder zumindest stetige Funktion ist. Dabei zeigt sich, daß es nicht nur um der Einheitlichkeit des Ansatzes willen vorteilhaft ist, zur Skalarisierung die Distanzfunktion bezüglich des negativen Ordnungskegels $\boldsymbol{d}(\cdot,-K)$ zu verwenden, sondern auch aufgrund ihrer Handhabbarkeit vermöge der Beziehung

$$\boldsymbol{d}(v,-K) = \max\,\{l^*(v) \mid l^* \in \partial \boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(0) = K^* \cap B_{Y^*}\}.$$

Betrachtet wird unter anderem die konvex-zusammengesetzte Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$, wobei Ergebnisse von Abschnitt 3 Verwendung finden.

4.4.1 Eine hinreichende Bedingung für stark eindeutige Minima des skalarisierten Problems

Wie das unten stehende Theorem 4.9 zeigt, verhilft Theorem 3.2 zu einer hinreichenden Minimalitätsbedingung für die Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$.

Theorem 4.9. (siehe [38, Theorem 3.1])
Es seien f Fréchet-differenzierbar in $x \in A \subseteq X$ und S ein Kegel mit $S \supseteq \mathbb{R}_+(A-x)$. Existiert dann eine schwach kompakte und erzeugende Menge $\mathbb{E}$ von S mit

$$\forall\, v \in \mathbb{E}\ \exists\, l^* \in K^*:\ l^*(f'(x)(v)) \ >\ 0, \tag{4.3}$$

so hat $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$ ein stark eindeutiges Minimum auf $x+\mathbb{R}_+(A-x)$ in x.

Beweis. Wegen $\partial\boldsymbol{d}(\cdot - f(x),\ -K)(f(x)) = \partial\boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(0) = K^* \cap B_{Y^*}$ gemäß Theorem 2.13 folgt aus (4.3)

$$\sigma_{\partial g(f(x))}(f'(x)(v)) > 0 \quad f.\,a.\ v \in \mathbb{E},$$

wobei $g = \boldsymbol{d}(\cdot - f(x),\ -K)$. Nun wende man Theorem 3.2 an. □

Es sei bemerkt, daß in [94] statt Bedingungen für stark eindeutige Minima von $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$ solche für die Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)+\boldsymbol{d}(\cdot,\ A)$ mit abgeschlossenem A formuliert werden. Dieser Ansatz verwendet Modifikationen der Pschenichnyi-Rockafellar-Bedingung (siehe Theorem 2.16 (2) und Bemerkung 3.2).

4.4.2 Eine hinreichende Bedingung für effiziente Elemente

Proposition 4.4. (siehe [20, Proposition 3.3])
Sind W ein linearer Raum, $A \subseteq W$ konvex, $h : W \longrightarrow X$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in $x \in A$ und $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, *so gilt*

$$h(x) \in ES(h(A),\ K) \Rightarrow 0 \in ES(h'_+(x,\ A-x),\ K)$$

und ferner, falls außerdem h $K-$konvex auf A ist, auch die Umkehrung.

Man beachte dabei: $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{cor}(K) = \operatorname{int}(K)$ ([78, Proposition 2.3.6]). Wird die $K-$Konvexität von h vorausgesetzt, kann auch eine hinreichende Bedingung für effiziente Elemente von $h(A)$ angegeben werden, wie Proposition 4.5 zeigt.

Proposition 4.5.
Es seien W ein linearer Raum, $A \subseteq W$, $h : W \longrightarrow Y$ $K-$konvex und rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in $x \in A$. Dann gilt

$$0 \in E(h'_+(x,\ A-x),\ K) \Rightarrow h(x) \in E(h(A),\ K).$$

Beweis. Angenommen, es existiert ein $w \in A$ mit $0 \neq h(w) - h(x) \in -K$.
Da h $K-$konvex ist, gilt $h(w) - h(x) - t^{-1}(h(x + t(w-x)) - h(x)) \in K$ für $t \in]0,\ 1]$, folglich auch $h(w) - h(x) - h'_+(x,\ w-x) \in K$, und man hat $h'_+(x,\ w-x) \neq 0$, denn andernfalls ergibt sich $h(w) - h(x) \in K \cap -K = \{0\}$. Gemäß Voraussetzung ist also $h'_+(x,\ w-x) \notin -K$, woraus ein Widerspruch resultiert:

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{d}(h'_+(x,\ w-x) - (h(w) - h(x)),\ -K) \\ &\geq \boldsymbol{d}(h'_+(x,\ w-x),\ -K) - \boldsymbol{d}(h(w) - h(x),\ -K) \\ &= \boldsymbol{d}(h'_+(x,\ w-x),\ -K) > 0. \end{aligned}$$

□

4.4.3 Eine hinreichende Bedingung für stark effiziente Elemente

Wird auf die Differenzierbarkeit von f verzichtet und lediglich dessen Stetigkeit vorausgesetzt, erweist sich die starke / strikte Effizienz als passender Effizienzbegriff, und auch hier wird die konvex-zusammengesetzte Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ benutzt. Man vergleiche dazu Theorem 4.1.

Proposition 4.6.
Es sei $x \in A \subseteq X$. Ferner existiere eine monoton wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(t) > 0$ für $t > 0$ und $\boldsymbol{d}(f(v) - f(x),\ -K) \geq \varphi(\|v-x\|)$ für alle $v \in A$. Ist dann f stetig in x, so folgt $f(x) \in S(f(A),\ K)$, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (f(A) - f(x)) \cap (B(0,\ \delta) - K) \subseteq B(0,\ \varepsilon). \tag{4.4}$$

Beweis. Man nehme an:

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\, \exists\, w_n \in A : \|f(w_n) - f(x)\| \geq \varepsilon, \text{ aber } \boldsymbol{d}(f(w_n) - f(x),\, -K) < \frac{1}{n}$$

Wegen $\varphi(\|w_n - x\|) \leq \boldsymbol{d}(f(w_n) - f(x),\, -K) < \frac{1}{n}$ folgt $\varphi(\|w_n - x\|) \longrightarrow 0$ und aufgrund der Monotonie von φ auch $\|w_n - x\| \longrightarrow 0$, was aber der Stetigkeit von f in x widerspricht. Also gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\, \forall\, w \in A : \boldsymbol{d}(f(w) - f(x),\, -K) < \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(w) - f(x)\| < \varepsilon$$

und damit (4.4). □

4.4.4 Eine hinreichende und eine notwendige Bedingung für Henig-effiziente Elemente

Durch Anwendung von Theorem 4.2 ist es möglich, eine hinreichende Existenzbedingung für Henig-effiziente Elemente anzugeben, bei der wie in Proposition 4.5 lediglich die einseitige Richtungsdifferenzierbarkeit für eine $K-$konvexe Zielfunktion erforderlich ist.

Theorem 4.10.
Es seien W ein linearer Raum, $A \subseteq W$, $h : W \longrightarrow Y$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in $x \in A$ sowie $\mathbb{B}$ eine Basis von K.

(1) *Ist h $K-$konvex, so gilt*

$$0 \in H(h'_+(x,\, A - x),\, \mathbb{B}) \Rightarrow h(x) \in H(h(A),\, \mathbb{B}).$$

(2) *Ist A konvex, so gilt*

$$h(x) \in H(h(A),\, \mathbb{B}) \Rightarrow 0 \in H(h'_+(x,\, A - x),\, \mathbb{B}).$$

Beweis. (1) Sei $0 \in H(h'_+(x,\, A - x),\, \mathbb{B})$. Gemäß Theorem 4.2 gibt es eine sublineare und stetige Funktion $\sigma : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $\delta > 0$ mit $\sigma(h'_+(x,\, v - x)) \geq 0$ für alle $v \in A$ und $\sigma(-k) \leq -\delta$ für alle $k \in \mathbb{B}$. Sei $w \in A \setminus \{x\}$. Wegen der $K-$Konvexität von h gilt zudem $h(w) - h(x) - h'_+(x,\, w - x) \in K$.
1. Fall: $h(w) - h(x) - h'_+(x,\, w - x) = 0$.
Dann folgt $\sigma(h(w) - h(x)) = \sigma(h'_+(x,\, w - x)) \geq 0$.
2. Fall: $h(w) - h(x) - h'_+(x,\, w - x) \neq 0$.
Angenommen, es ist $\sigma(h(w) - h(x)) \leq 0$. Da $s > 0$, $k \in \mathbb{B}$ mit $h(w) - h(x) - h'_+(x,\, w - x) = sk$ existieren, resultiert daraus aber ein Widerspruch:

$$\begin{aligned}
0 &> -s\delta \\
&\geq s\sigma(-k) \\
&= \sigma(-sk) \\
&= \sigma(h'_+(x,\, w - x) - (h(w) - h(x))) \\
&\geq \sigma(h'_+(x,\, w - x)) - \sigma(h(w) - h(x)) \\
&\geq \sigma(h'_+(x,\, w - x)) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Im 2. Fall gilt also $\sigma(h(w)-h(x))>0$ und daher insgesamt $\sigma(h(v)-h(x))\geq 0$ für alle $v\in A$. Jetzt benutze man wiederum Theorem 4.2.

(2) Es gibt eine sublineare und stetige Funktion wie oben erwähnt mit $\sigma(h(v)-h(x))\geq 0$ für alle $v\in A$. Sind $v\in A,\ t\in\,]0,\ 1]$, so ist $\sigma(h(x+t(v-x))-h(x))\geq 0$ und somit $\sigma(h'_+(x,\ v-x))\geq 0$; man wende nun nochmals Theorem 4.2 an. □

4.4.5 Eine hinreichende Bedingung für supereffiziente Elemente

In Proposition 4.5 wird einerseits nur die Richtungsdifferenzierbarkeit von f in $x\in A$ vorausgesetzt, andererseits jedoch auch deren $K-$Konvexität, also eine recht stark einschränkende Bedingung. Aus den Voraussetzungen von Theorem 4.9 ergibt sich dagegen, daß in $f(x)$ zumindest lokal sogar ein supereffzientes Element vorliegt.

Theorem 4.11. (siehe [38, Theorem 3.1] in Verbindung mit [39, Einleitung zu Abschnitt 3])
Unter den Voraussetzungen von Theorem 4.9 existiert ein $s>0$ mit

$$f(x)\in\ SE(f((x+\mathbb{R}_+(A-x))\ \cap\ B(x,\ s)),\ K).$$

Beweis. Resultiert aus Proposition 3.2, Theorem 4.3 und Theorem 4.9. □

Beispiel 4.2 Es bezeichne $C[0,\ 1]$ den Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,\ 1]$, versehen mit der Maximumsnorm $\|v\|:=\max\{|v(t)|\mid t\in[0,\ 1]\}$. Die Abbildung

$$f:\ C[0,\ 1]\ni v\longmapsto \sin\circ v\ \in C[0,\ 1]$$

vom Nemytskyi-Typ ist auf $C[0,\ 1]$ Fréchet-differenzierbar, wobei $f'(v)(h)=(\cos\circ v)h$, insbesondere $f'(0)(h)=h$. Man beachte nämlich, daß in $f'(v):\ C[0,\ 1]\ni h\longmapsto(\cos\circ v)h\ \in C[0,\ 1]$ wegen

$$\|(\cos\circ v)h\|\ \leq\ \|\cos\circ v\|\|h\|\ \leq\ \|h\|$$

eine beschränkte lineare Funktion vorliegt und außerdem die Beziehung

$$\sin(v+h)=\sin v\cos h+\cos v\sin h=\sin v\ +(\cos v)h\ +\sin v(\cos h-1)+\cos v(\sin h-h)$$

bzw.

$$\sin(v+h)-\sin v-(\cos v)h=\sin v(\cos h-1)+\cos v(\sin h-h)$$

besteht. Definiert man eine Menge P durch

$$P:=\{v\in C[0,\ 1]\mid v(t)=\int_0^t y(u)du,\ y\in C[0,\ 1]\text{ mit } m<y(s)<M\ \text{ für alle } s\in[0,\ 1]\}$$

mit $0<m<M$, so ist diese wegen

$$|v(t)|=|\int_0^t y(u)du|\leq\int_0^t|y(u)|du\leq Mt\leq M$$

und

$$|v(t)-v(s)|=|\int_s^t y(u)du|\leq M(t-s)$$

für $v \in P,\ s,\ t \in [0,\ 1]\ (t > s)$ sowohl (gleichmäßig) beschränkt als auch gleichgradig stetig, nach Theorem 2.18 also relativ kompakt. Man setze $Q := \mathrm{cl}(P)$ und

$$K := \{\upsilon \in C[0,\ 1] \mid \upsilon(t) \geq 0 \ \text{ für alle } \ t \in [0,\ 1]\}.$$

K ist ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel. Das durch $l^*(p) := \int_0^1 p(u)du$ definierte Funktional l^* gehört zu K^*, und es gilt

$$l^*(f'(0)(v)) = l^*(v) = \int_0^1 v(u)du > 0$$

für $v \in Q$.
Aufgrund der Kompaktheit von Q folgt durch die Anwendung der Theoreme 4.9 und 4.11 auf $A = \mathbb{R}_+Q,\ x = 0$ die Existenz von $d > 0,\ s > 0$ mit $\boldsymbol{d}(f(w),\ -K) = \boldsymbol{d}(f(w) - f(0),\ -K) \geq d\|w\|$ für alle $w \in \mathbb{R}_+Q \cap\ B(0,\ s)$ und $0 = f(0) \in SE(f(\mathbb{R}_+Q\ \cap\ B(0,\ s)),\ K)$.

Die Äquivalenz

$$z \in SE(M,\ K)\ \Leftrightarrow\ Y^* =\ K^* + N(M,\ z)$$

für einen vollständigen normierten Raum Y und konvexes M führt, vor dem Hintergrund von Theorem 4.9 und Theorem 4.11 betrachtet, zu den unten stehenden Aussagen (vergleiche dazu [94, Theorem 3.3] mit ähnlicher Anwendung von Theorem 2.17).

Proposition 4.7. [38, Proposition 3.1]
Es seien $x \in A \subseteq X$ und f wie in Theorem 4.9.

(1) $X^* = K^* \circ f'(x) + N(A,\ x) \Rightarrow$
$\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ *hat ein stark eindeutiges Minimum auf A in* $x \Rightarrow$
$\exists\ s > 0 : f(x) \in\ SE(f(A\ \cap\ B(x,\ s)),\ K)$.

(2) *Ist A konvex, so gilt auch die Umkehrung der ersten Implikation, d. h.*
$\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ *hat ein stark eindeutiges Minimum auf A in* $x \Rightarrow$
$X^* = K^* \circ f'(x) + N(A,\ x)$.

Beweis. (1) Nach Voraussetzung gilt

$$X^* = \bigcup_{m\,\geq\,1} (K^* \cap\ mB_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x).$$

Da die Mengen $(K^*\ \cap\ mB_{Y^*}) \circ f'(x),\ m \geq\ 1$, schwach*-kompakt und daher $(K^*\ \cap\ mB_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x),\ m \geq\ 1$, (schwach*-)abgeschlossen sind, existieren gemäß Theorem 2.17 $n \geq\ 1,\ l^* \in X^*$ und $r > 0$ mit

$$B(l^*,\ r)\ \subseteq\ (K^*\ \cap\ nB_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x).$$

Wird $p \geq 1$ derart gewählt, daß

$$-l^* \in (K^*\ \cap\ pB_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x),$$

so ergibt sich

$$B(0,\ r)\ \subseteq\ (K^*\ \cap\ nB_{Y^*}) \circ f'(x) + (K^*\ \cap\ pB_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x)$$

und damit

$$\begin{aligned} B(0,\ \frac{r}{n+p}) \ &\subseteq \ (K^* \cap B_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x) \\ &= \partial \boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(0) \circ f'(x) + N(A,\ x). \\ &= \partial \boldsymbol{d}(\cdot - f(x),\ -K)(f(x)) \circ f'(x) + N(A,\ x). \end{aligned}$$

Nun wende man Theorem 3.1 für die erste, Proposition 3.2 und Theorem 4.3 für die zweite Implikation an.
(2) Hat $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x, so ergibt sich mit Theorem 3.4

$$\begin{aligned} 0 &\in \operatorname{int}(\partial \boldsymbol{d}(\cdot - f(x),\ -K)(f(x)) \circ f'(x) + N(A,\ x)) \\ &= \operatorname{int}((K^* \cap B_{Y^*}) \circ f'(x) + N(A,\ x)) \\ &\subseteq \operatorname{int}(K^* \circ f'(x) + N(A,\ x)), \end{aligned}$$

folglich $X^* = K^* \circ f'(x) + N(A,\ x)$, denn $K^* \circ f'(x)$ und $N(A,\ x)$ sind Kegel. □

Die aus $z \in SE(M,\ K) \Leftrightarrow Y^* = K^* + N(M,\ z)$ durch Modifikation entsprechend einer konvex-zusammengesetzten Ausgangssituation hervorgegangene Gleichheit $X^* = K^* \circ f'(x) + N(A,\ x)$ ist also ohne zusätzliche Bedingung an die Menge A dafür hinreichend, daß in $f(x)$ ein super-effizientes Element vorliegt. Hinsichtlich Theorem 4.9 folgt sie für konvexes A notwendigerweise, wenn x ein stark eindeutiges Minimum von $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ ist; in diesem Fall gilt somit insbesondere

$$\forall\, x^* \in X^*\ \exists\, k^* \in K^*\ \forall\, w \in A : x^*(w - x) \leq (k^* \circ f'(x))(w - x).$$

4.4.6 Eine notwendige Bedingung für supereffiziente Elemente

Aus den Theoremen 4.9 und 4.11 sowie Proposition 4.7 (1) ergibt sich unmittelbar die Frage, ob und gegebenenfalls unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen aus $f(x) \in SE(f(A),\ K)$ geschlossen werden kann, daß die konvex-zusammengesetzte Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x besitzt. Wünchenswert wäre es, auch dabei ohne besondere Annahmen bezüglich A, wie etwa die Forderung nach deren Konvexität, auszukommen. Nach [38, Theorem 3.2] liegt für $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ ein solches Minimum vor, falls $f(x) \in H(f(A),\ \mathbb{B})$ für eine beschränkte Basis $\mathbb{B}$ von K und $f'(x)$ eine beschränkte Inverse besitzt. Wegen $H(f(A),\ \mathbb{B}) = SE(f(A),\ K)$ (siehe dazu [91, Proposition 3.5 (ii)]) liefert das folgende Theorem 4.12 ein allgemeineres Resultat.

Lemma 4.1.
Es sei f in $x \in A \subseteq X$ Fréchet-differenzierbar, und $f'(x)$ besitze eine beschränkte Inverse. Ferner seien $b > 0$ sowie $\sigma : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige sublineare Funktion mit $\sigma(f(v) - f(x)) \ \geq \ b\|f(v) - f(x)\|$ für alle $v \in A$. Dann existieren $a > 0,\ s > 0$ derart, daß $\sigma(f'(x)(w - x)) \ \geq \ a\|w - x\|$ für alle $w \in \ A \ \cap \ B(x,\ s)$ gilt; insbesondere hat $\sigma(f(\cdot) - f(x))$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x.

Beweis. Setze $p(u) := f(x+u) - f(x) - f'(x)(u),\ c := \sup\{\|l^*\| \mid l^* \in \partial\sigma(0)\}$ und $a := \dfrac{b}{2\|f'(x)^{-1}\|}$. Man wähle $s > 0$ hinreichend klein mit $\|p(u)\| < \dfrac{b}{2(b+c)\|f'(x)^{-1}\|}\|u\|$ für $\|u\| < s$. Ist $w \in A \cap B(x,\ s)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
c\|p(w-x)\| + \sigma(f'(x)(w-x)) &\geq \sigma(p(w-x)) + \sigma(f'(x)(w-x)) \\
&\geq \sigma(f(w) - f(x)) \\
&\geq b\|f(w) - f(x)\| \\
&= b\| - f'(x)(w-x) - (f(w) - f(x) - f'(x)(w-x))\| \\
&\geq b(\|f'(x)(w-x)\| - \|p(w-x)\|) \\
&\geq \frac{b}{\|f'(x)^{-1}\|}\|w-x\| - \ b\|p(w-x)\|
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
\sigma(f'(x)(w-x)) &\geq \frac{b}{\|f'(x)^{-1}\|}\|w-x\| - \ (b+c)\|p(w-x)\| \\
&\geq \frac{b}{\|f'(x)^{-1}\|}\|w-x\| - (b+c)\frac{b}{2(b+c)\|f'(x)^{-1}\|}\|w-x\| \\
&= a\|w-x\|.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung von Theorem 3.1 auf $g = \sigma(\cdot - f(x))$ (mit $\partial g(f(x)) = \partial\sigma(0)$, also $\sigma_{\partial g(f(x))}(f'(x)(w-x)) = \sigma(f'(x)(w-x)))$ ergibt sich auch die zweite Behauptung: $\sigma(f(\cdot) - f(x))$ hat ein stark eindeutiges Minimum auf A in x. □

Theorem 4.12.
Sind f in $x \in A \subseteq X$ Fréchet-differenzierbar, wobei $f'(x)$ eine beschränkte Inverse besitzt, und $f(x) \in SE(f(A),\ K)$, so existieren $a > 0,\ s > 0$ mit

$$\boldsymbol{d}(f'(x)(w-x),\ -K)\ \geq\ a\|w-x\|$$

für alle $w \in\ A\ \cap\ B(x,\ s)$. Insbesondere gibt es zu jedem $w \in\ A\ \cap\ B(x,\ s) \setminus \{x\}$ ein $l^* \in K^*$ derart, daß $l^*(f'(x)(w-x)) \geq a\|w-x\|$, und $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -K)$ hat ein stark eindeutiges Minimum auf A in x.

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich aus Theorem 4.3 in Verbindung mit Lemma 4.1. □

Beispiel 4.3 Betrachte das Beispiel in der Einleitung mit $f : \mathbb{R}^2 \ni (p,q) \longmapsto (-pq, p+q) \in \mathbb{R}^2$, $A = [0,\ 1] \times [-1,\ 0],\ x = (0,-1)$ und $K = \mathbb{R}^2_+$. Schon durch die bloße Kenntnis von $f(x) \in SE(f(A \cap B(x,\ s)),\ \mathbb{R}^2_+)$ für ein $s > 0$ weiß man aufgrund von Theorem 4.12 unmittelbar, daß x ein stark eindeutiges Minimum der Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x),\ -\mathbb{R}^2_+)$ ist, denn die Invertierbarkeit von $f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist sofort ersichtlich.

4.5 Eine Anwendung von Theorem 3.5

Unter den Voraussetzungen von Theorem 4.9 hat $\boldsymbol{d}(f(\cdot)-f(x),\ -K)$ ein stark eindeutiges Minimum auf A in x, und es ist $f(x)\in\ SE(f(A\ \cap\ B(x,\ s)),\ K)$ für ein $s>0$, d. h.

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ :\mathbb{R}_+(f(A\ \cap\ B(x,\ s))-f(x))\ \cap\ (B(0,\ \delta)-K)\ \subseteq\ B(0,\ \varepsilon). \tag{4.5}$$

Hinsichtlich stark mehrdeutiger Minima der (Skalarisierungs-) Funktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot),\ -K)$ kann man nicht erwarten, ebenfalls von deren Existenz auf eine solche supereffizienter Elemente schließen zu können. Das folgende Theorem 4.13 zeigt jedoch, daß unter entsprechenden Voraussetzungen und Benutzung von Theorem 3.5 statt (4.5) immerhin (4.6) für gewisse $v\in A$ Gültigkeit besitzt. Für dessen Anwendung beachte man die Inklusion $\partial\boldsymbol{d}(\cdot\ ,\ -K)(Y)\subseteq B_{Y^*}$.

Theorem 4.13. [39, Theorem 3.1]
Es seien f gleichmäßig stetig auf $A\subseteq X,\ x\in C\subseteq A$ und $\boldsymbol{d}(f(x),\ -K)\ =\ \boldsymbol{d}(f(y),\ -K)$ für alle $y\in C$. Ferner gebe es $a>0,\ c>0,\ r>0$ derart, daß f gleichmäßig differenzierbar auf $B(x,\ r)$ ist und

$$\sigma_{\partial\boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(f(y))}(f'(y)(w-y))\ \geq\ \sigma_{N(C,\ y)\ \cap\ aB_{X^*}}(w-y)\quad f.\,a.\ \ w\in A,\ y\in C\ \cap\ B(x,\ r)$$

als auch

$$\forall\ \alpha>0,\ v\in A\setminus C\ \exists\ z\in C,\ L^*\in N(C,\ z)\ \cap\ B_{X^*}:L^*(v-z)\ \geq\ c\|v-z\|\ -\ \alpha$$

gelten. Dann existiert ein $s>0$, für das die Aussage

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ v\in B:\exists\ y\in C\ (f(v)-f(y)\in B(0,\ \delta)-K)\Rightarrow\exists\ z\in C\ (f(v)-f(z)\in\ B(0,\ \varepsilon)) \tag{4.6}$$

mit $B:=\{u\in A\ \cap\ B(x,\ s)\ |\ \boldsymbol{d}(u,\ C)\leq cs\}$ richtig ist.

Beweis. Aus Theorem 3.5 folgt die Existenz einer Zahl $s>0$ mit

$$\boldsymbol{d}(f(v),\ -K)\ \geq\ \boldsymbol{d}(f(y),\ -K)+\frac{ac}{2}\boldsymbol{d}(v,\ C)$$

für alle $v\in B=\{u\in A\ \cap\ B(x,\ s)\ |\ \boldsymbol{d}(u,\ C)\leq cs\},\ y\in C$. Man wähle ein beliebiges $\varepsilon>0$ und dazu $\gamma>0,\ \delta>0$ derart, daß

$$\|f(p)-f(q)\|<\varepsilon\quad \text{für } p,\ q\in A \text{ mit } \|p-q\|<\gamma$$

und

$$|\boldsymbol{d}(h,\ -K)|<\frac{ac\gamma}{4}\quad \text{für } \|h\|<\delta$$

gelten. Sei nun

$$f(v)-f(y)=h-k\in(f(B)-f(C))\ \cap\ (B(0,\ \delta)-K),$$

wobei $v \in B,\ y \in C,\ h \in B(0,\ \delta),\ k \in K$: Es gibt $y^* \in \partial \boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(0) = K^* \cap\ B_{Y^*}$ mit $y^*(h-k) = \boldsymbol{d}(h-k,\ -K)$ sowie $z \in C$ mit $\boldsymbol{d}(v,\ C) \geq\ \|v-z\| - \dfrac{\gamma}{2}$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{ac\gamma}{4} &> \boldsymbol{d}(h,\ -K) \\
&\geq y^*(h) \\
&\geq y^*(h-k) \\
&= \boldsymbol{d}(h-k,\ -K) \\
&= \boldsymbol{d}(f(v)-f(y),\ -K) \\
&\geq \boldsymbol{d}(f(v),\ -K) - \boldsymbol{d}(f(y),\ -K) \\
&\geq \frac{ac}{2}\boldsymbol{d}(v,\ C) \\
&\geq \frac{ac}{2}(\|v-z\| - \frac{\gamma}{2}).
\end{aligned}$$

Dies impliziert $\|v-z\| < \gamma$ und damit $\|f(v)-f(z)\| < \varepsilon$. $\square$

5. Ein vektorwertiges Approximationsproblem

Das für eine Funktion $F : X \longrightarrow Y$, X und Y normierte Räume, formulierte skalare Approximationsproblem

$$\text{Minimiere } \|F(v)\|, \quad v \in A \subseteq X \qquad \text{(P2)}$$

(siehe dazu beispielsweise [84]) kann durch Verwendung vektorieller Normen in einen abstrakteren Rahmen gesetzt werden. Für einen linearen (beziehungsweise normierten) Raum Z, einen konvexen spitzem Kegel $K \subseteq Z$ sowie eine vektorielle Norm $|||\cdot||| : Y \longrightarrow K$ auf Y (siehe Definition 2.20), sind mögliche Aufgabestellungen unter anderem

$$\text{Minimiere } |||F(w)||| \text{ für } w \in A \subseteq X \text{ bezüglich } \text{"} \leq_K \text{"},$$

wobei $\leq_K$ für die durch K induzierte Halbordnung steht, oder

$$\text{Berechne die Menge } E(|||F(A)|||,\ K);$$

man vergleiche dazu etwa [47, Abschnitt III.9], [31, 4.1.1].

Ein Spezialfall ergibt sich für $F(v) = v - y,\ y \in X$, als Verallgemeinerung einer grundlegenden skalaren Approximationsaufgabe. Ähnliche Fragestellungen werden in [47, Abschnitte III.9.2 und III.9.3] behandelt, in der erweiterten Form

$$\text{Minimiere } \ h(w) + \sum_{k=1}^{n} c_k |||L_k(u) - w_k||| \text{ für } w \in A \text{ bezüglich } \text{"} \leq_{\mathbb{R}^m_+} \text{"}$$

mit stetigen linearen Abbildungen $L_j : X \longrightarrow Y$, einer stetigen und komponentenweise konvexen Abbildung $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, einer stetigen vektoriellen Norm $|||\cdot||| : Y \longrightarrow \mathbb{R}^m_+$, $A \subset X$ abgeschlossen mit $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset,\ c_j \geq 0,\ w_j \in Y$ für einen vollständigen Raum X, einen reflexiven Raum Y und $1 \leq j \leq n$ in [33]. Eine Ergänzung dazu stellt Proposition 5.1 dar.

Die Ergebnisse der Abschnitte 3 und 4 erlauben für Fréchet-differenzierbares F die Angabe einer hinreichenden Effizienzbedingung; sie ist Inhalt von Theorem 5.1.

Im folgenden stehen X, Y und Z für normierte Räume.

5.1 Eine hinreichende Effizienzbedingung

Um mit Theorem 3.2 eine hinreichende Bedingung für stark eindeutige Minima anwenden zu können, wird das Subdifferential der vektoriellen Norm benutzt; siehe dazu Beispiel 2.6.

Theorem 5.1.
Es seien $K \subseteq Z$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel, $x \in A \subseteq X$ derart, daß ein Kegel S mit schwach kompakter und erzeugender Menge $\mathbb{E}$ und $S \supseteq \mathbb{R}_+(A - x)$ existiert, $F : X \longrightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar in x sowie $|||\cdot||| : Y \longrightarrow K$ eine vektorielle Norm auf Y, die in $F(x)$ stetig ist. Gibt es dann zu jedem $u \in \mathbb{E}$ Funktionen $l^* \in K^*$ und $\Lambda \in \partial|||\cdot|||(F(x)) =$

$$\{\lambda \in L(X,\ Y) \mid \lambda(F(x)) = |||F(x)||| \text{ und } \forall\, v \in X : |||v||| - \lambda(v) \in K\}$$

mit

$$(l^* \circ \Lambda)(F'(x)(u)) > 0, \tag{5.1}$$

so existiert ein $r > 0$ *mit* $|||F(x)||| \in S(|||F((x+\mathbb{R}_+(A-x)) \cap B(x,\ r))|||,\ K)$, *d.h.* $|||F(x)|||$ *ist stark / strikt effizientes Element von* $|||F((x+\mathbb{R}_+(A-x)) \cap B(x,\ r))|||$.

Beweis. $g := \boldsymbol{d}(\cdot,\ -K) \circ (|||\cdot||| - |||F(x)|||)$ ist stetig in $F(x)$ und auch konvex, denn für y und z aus Y sowie $t \in [0,\ 1]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
g(ty+(1-t)z) &= \boldsymbol{d}(|||ty+(1-t)z||| - |||F(x)|||,\ -K) \\
&= \boldsymbol{d}(|||ty||| + |||(1-t)z||| - k - |||F(x)|||,\ -K) \\
&\leq \boldsymbol{d}(|||ty||| + |||(1-t)z||| - |||F(x)|||,\ -K) + \boldsymbol{d}(-k,\ -K) \\
&= \boldsymbol{d}(t(|||y||| - |||F(x)|||) + (1-t)(|||z||| - |||F(x)|||),\ -K) \\
&\leq tg(y) + (1-t)g(z)
\end{aligned}$$

für ein $k \in K$. Außerdem gilt für $h \in Y,\ l^* \in K^* \setminus \{0\}$ sowie $\Lambda \in \partial|||\cdot|||(F(x))$ wegen $\dfrac{l^*}{\|l^*\|} \in K^* \cap B_{Z^*} = \partial \boldsymbol{d}(\cdot,\ -K)(0)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
g(F(x)+h) - g(F(x)) &= \boldsymbol{d}(|||F(x)+h||| - |||F(x)|||,\ -K) \\
&\geq \frac{l^*}{\|l^*\|}(|||F(x)+h||| - |||F(x)|||) \\
&= \frac{l^*}{\|l^*\|}(\Lambda(h)+k) \\
&\geq \frac{l^*}{\|l^*\|}(\Lambda(h))
\end{aligned}$$

für ein $k \in K$. Also ist $\dfrac{l^*}{\|l^*\|} \circ \Lambda \in \partial g(F(x))$, folglich aufgrund von (5.1)

$$\sigma_{\partial g(F(x))}(F'(x)(u)) > 0$$

für alle $u \in \mathbb{E}$. Gemäß Theorem 3.2 existieren daher $d > 0,\ r > 0$ mit

$$\boldsymbol{d}(|||F(w)||| - |||F(x)|||,\ -K) = g(F(w)) = g(F(w)) - g(F(x)) \geq d\|w-x\| \tag{5.2}$$

für alle $w \in (x+\mathbb{R}_+(A-x)) \cap B(x,\ r)$.
Schließlich wende man Proposition 4.6 auf $f = |||\cdot||| \circ F$ an. □

Man beachte, daß (5.2) die Wohlgestelltheit des parametrisierten Minimierungsproblems

$$\min\{\ \boldsymbol{d}(|||F(w)||| - |||F(x)|||,\ -K) \mid w \in A\}$$

im Tychonoffschen Sinne zeigt: Es existiert eine eindeutige Lösung x, gegen die alle Folgen $\{w_n\},\ w_n \in A \cap B(x,\ r)$, mit $\boldsymbol{d}(|||F(w_n)||| - |||F(x)|||,\ -K) \longrightarrow 0$ konvergieren.

Beispiel 5.1 Ein relevanter Spezialfall hinsichtlich Bedingung (5.1) ist der folgende: Man betrachte das kartesische Produkt $\prod_{j=1}^n Y_j$ von normierten Räumen $(Y_i,\ \|\cdot\|_i),\ i = 1, ..., n$, welches seinerseits mit der durch $\|(y_1, ..., y_n)\| := \sum_{j=1}^n \|y_j\|_j$ definierten Norm ausgestattet ist. Ferner seien $F : X \ni v \longmapsto (F_1(v), ..., F_n(v)) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ Fréchet-differenzierbar in $x \in X$ sowie

$|||\cdot|||$ die mittels $|||(y_1,....,y_n)||| := (\|y_1\|_1,....,\|y_n\|_n) \in \mathbb{R}^n_+$ festgelegte vektorielle Norm. Für $l*_i \in \partial\|\cdot\|_i(y_i),\ y_i \in Y_i,\ i = 1,...,n$, ist die Abbildung

$$\Lambda_{l*_1,....,l*_n} : \prod_{j=1}^{n} Y_j \ni (v_1,....,v_n) \longmapsto (l*_1(v_1),....,\ l*_n(v_n)) \in \mathbb{R}^n$$

ein Element von $\partial|||\cdot|||(y_1,....,y_n)$. Daher ist (5.1) erfüllt, wenn zu jedem $u \in \mathbb{E}$ Abbildungen $L*_i \in \partial\|\cdot\|_i(F_i(x))$ und $p_i \geq 0, i = 1,....,n$, existieren, für die

$$(p_1,.....,p_n)\cdot\Lambda_{L*_1,....,\ L*_n}(F'(x)(u)) > 0.$$

gilt.

Für $F : X \ni v \longmapsto L(v) - y \in Y$ mit $y \in Y$ und $L : X \longrightarrow Y$ linear erhält man in (P2) eine Standardaufgabe der Approximationstheorie, nämlich

$$\text{Minimiere } \|L(v) - y\|, \quad v \in A \subseteq X.$$

Übertragen auf vektorielle Normen kann mit Hilfe eines weiteren Ergebnisses aus Abschnitt 4 die unten stehende hinreichende Effizienzbedingung festgehalten werden.

Proposition 5.1. *Es seien V, W lineare Räume, $A \subseteq V$, $K \subseteq X$ ein Daniell-Kegel, $|||\cdot||| : W \longrightarrow K$ eine vektorielle Norm auf W und ferner $L_i : V \longrightarrow W$ linear, $c_i \geq 0, w_i \in W$, $i = 1,....,n$, sowie $h : V \longrightarrow X$ $K-$konvex und rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in $x \in A$. Dann gilt für die Funktion*

$$G : V \ni u \longmapsto h(u) + \sum_{k=1}^{n} c_k|||L_k(u) - w_k||| \in X$$

die Implikation

$$h'_+(x,\ v-x) + \sum_{k=1}^{n} c_k|||L_k(\cdot) - w_k|||'_+(x,\ v-x) = G'_+(x,\ v-x) \geq_K 0 \quad f.\,a.\ \ v\ \in\ A$$

$$\Rightarrow G(x) \in E(G(A),\ K).$$

Beweis. Die Funktionen $c_k|||L_k(\cdot) - w_k|||$ sind offensichlich $K-$konvex und auch rechtsseitig richtungsdifferenzierbar (siehe [47, Lemma 2.24]). Damit gilt dies auch für G. Außerdem hat man die Implikation

$$G'_+(x,\ v-x) \geq_K 0 \quad \text{f. a. } v \in A \Rightarrow 0 \in E(G'_+(x,\ A-x),\ K),$$

denn andernfalls existiert ein $w \in A$ mit $G'_+(x,\ w-x) \in -K \setminus \{0\}$, was aber in Widerspruch zur Annahme steht, daß K ein Daniell-Kegel und damit insbesondere spitz ist. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 4.5. □

Hinsichtlich der Voraussetzungen von Proposition 5.1 beachte man, daß ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel ein Daniell-Kegel ist, wenn die Intervalle $[x,\ z]_K$ kompakt sind (siehe dazu die Bemerkung zu Definition 2.17).

5.2 Eine notwendige Effizienzbedingung

Aus Theorem 5.1 ergibt sich die Frage, wie umgekehrt eine notwendige Bedingung für $|||F(x)||| \in S(|||F(A)|||,\ K)$ aussehen kann. Theorem 4.1 zufolge gibt es auf jeden Fall eine monoton wachsende Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\psi(t) > 0$ für $t > 0$ und $\boldsymbol{d}(|||F(w)||| - |||F(x)|||,\ -K) \ \geq \ \psi(\|\ |||F(w)||| - |||F(x)|||\ \|)$ für alle $w \in A$. Hierbei wird allerdings kein Bezug auf die Differenzierbarkeit von F genommen. Betrachtet man an Stelle der Menge der strikt effizienten Elemente allgemeiner die schwach effizienten, kann zumindest die folgende Aussage angegeben werden, in der die erweiterte Distanzfunktion nach Hiriart-Urruty (Definition 2.31, Proposition 2.5) verwendet wird.

Proposition 5.2. *Es seien $A \subseteq X$ konvex, $K \subseteq Z$ ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel mit $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, $F : X \longrightarrow Y$ rechtsseitig richtungsdifferenzierbar in $x \in A$ und $|||\cdot||| : Y \longrightarrow K$ eine vektorielle Norm auf Y, die in $F(x)$ stetig ist. Gilt dann $|||F(x)||| \in ES(|||F(A)|||,\ K)$, so folgt für alle $w \in A$*

$$(\Delta(\cdot,\ -K) \circ (|||\cdot||| - |||F(x)|||))'_+(F(x), F'_+(x,\ w.-x)) \geq 0.$$

Beweis. Die Funktion $g := \Delta(\cdot,\ -K) \circ (|||\cdot||| - |||F(x)|||)$ ist konvex (siehe den Beweis von Theorem 5.1). Nach 4.2.2 gilt $\Delta(|||F(v)||| - |||F(x)|||,\ -K) \geq 0$ für $v \in A$, folglich auch

$$0 \leq \frac{1}{t}\Delta(|||F(x+t(w-x))||| - |||F(x)|||,\ -K) = \frac{1}{t}(g(F(x+t(w-x))) - g(F(x)))$$

für $t \in]0,\ 1]$, $w \in A$. Da g stetig in $F(x)$ ist, ergibt sich mittels Anwendung von Proposition 2.6 die Behauptung. $\square$

Beispiel 5.2 Im Falle $Z = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$ ist $\Delta(\cdot,\ -K)$ die identische Abbildung auf $\mathbb{R}$, und man hat $\|F(x)\| \in ES(\|F(A)\|,\ K) \quad \Leftrightarrow \quad \|F(x)\| \leq \|F(w)\|$ für alle $w \in A$. Daraus folgt gemäß Proposition 2.6

$$\begin{aligned}\max\{l^*(F'_+(x,\ w-x)) \mid l^* \in Y^* : l^*(F(x)) = \|F(x)\| \text{ und } l^*(y) \leq \|y\| \text{ f. a. } y \in Y\}\\ = \|\cdot\|'_+(F(x), F'_+(x,\ w-x)) \geq 0,\end{aligned}$$

eine Bedingung für skalare Normen, die in Proposition 5.2 verallgemeinert wird.

6. Resümee und Ausblick

Als wesentliche Ergebnisse dieser Arbeit können genannt werden:

- Eine neue Verallgemeinerung des Satzes von Alaoglu (Theorem 2.14), die in den Bereich der Konvexen Analysis fällt und eine Aussage über das Subdifferential konvexer Funktionen auf topologischen linearen Räumen macht, aus der sich die Standardversion dieses Satzes durch Anwendung auf eine Minkowski-Funktion ergibt. Gleichzeitig stellt sie eine Ergänzung zu bekannten Ergebnissen von Valadier [80] und Zowe [96] dar und wird in Abschnitt 3 für die Formulierung von Minimalitätsbedingungen für konvex-zusammengesetzte Abbildungen verwendet.

- Hinreichende Minimalitätsbedingungen für stark ein- beziehungsweise mehrdeutige Minima konvex-zusammengesetzter Funktionen bezüglich einer Menge A (Theoreme 3.1, 3.2 und 3.5), welche den Vorteil besitzen, uneingeschränkt für alle normierten Räume zu gelten, also insbesondere auch für unendlich-dimensionale und nicht notwendig vollständige. Darüber hinaus kann bei ihnen sowohl auf weitergehende Voraussetzungen an A, wie etwa deren Abgeschlossenheit oder Konvexität, als auch auf eine Limitierung der äußeren, konvexen Abbildungen auf bestimmte Klassen, beispielsweise Normen oder Distanzfunktionen, verzichtet werden. Damit ergibt sich eine zumindest teilweise größere Allgemeinheit im Vergleich zu den in der Einleitungen erwähnten Arbeiten [85], [87], [93] und [94]. Die Minimalitätsbedingungen (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) und (3.9) entsprechen für konvexes A einer abgewandelten Pschenichnyi-Rockafellar-Bedingung. Dieser Sachverhalt gilt verallgemeinert auch im Kontext lokalkonvexer Räume, was mit Theorem 3.3 gezeigt wird.

- Zwei Aussagen über die (Un-)Beschränktheit von Mengen mehrdeutiger Minima (Theorem 3.7). Sie basieren auf Durchschnittseigenschaften der Nullmengen der Ableitungen $f'(p)$, wobei f die innere Funktion und p ein Minimalpunkt sind. Diese Fragestellung wurde in der Literatur offenbar noch nicht behandelt.

- Anwendung von Theorem 3.2 in der Vektoroptimierung hinsichlich des Problems der Minimierung von $f : X \longrightarrow Y$ über $A \subseteq Y$ (f Fréchet-differenzierbar, X, Y normierte Räume) bezüglich eines Ordnungskegels durch die Formulierung einer hinreichenden Minimalitätsbedingung für die Skalarisierungsabbildung $\boldsymbol{d}(f(\cdot) - f(x), -K)$ sowie darüber hinaus je ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für supereffiziente Elemente. Im Gegensatz zu [30] und [94] werden dabei keine besondere Voraussetzungen an A gestellt, wie etwa deren Abgeschlossenheit oder Konvexität. Anders als in [87], wo der Bildraum als endlichdimensional vorausgesetzt wird, gelten die Aussagen für beliebige normierte Räume.

- Eine hinreichende Effizienzbedingung im Sinne einer abgeschwächten Variante der Supereffizienz, beruhend auf einem Kriterium für stark mehrdeutige Minima der Distanzfunktion $\boldsymbol{d}(f(\cdot),\ -K)$ (f differenzierbar, K der Ordnungskegel), welches aus Theorem 3.5 gewonnen wird. Vergleichbare Ergebnisse sind in der Literatur nach unserem besten Wissen nicht vorhanden.

- Ein hinreichendes Kriterium in Theorem 5.1 für stark / strikt effiziente Elemente in der Vektorapproximation hinsichtlich Mengen $|||F(A)|||$ mit Fréchet-differenzierbarem F und vektorieller Norm $|||\cdot|||$ unter Benutzung von zuvor entwickelten Ergebnissen der Abschnitte 3 und 4, und zwar ohne Beschränkung auf spezielle Normen oder Abbildungen. Auch durch den Bezug zur starken / striken Effizienz geht dieses in verschiedener Hinsicht über verwandte Aussagen hinaus, die in [31] und [47] zu finden sind.

Die in der vorliegenden Arbeit erzielten Resultate geben Anregung zu weiterführenden Untersuchungen, die den Themenkomplex vervollständigen und breitere Anwendungen der Ergebnisse ermöglichen. Insbesondere sind die folgenden drei offenen Fragen von Interesse.

(1) Inwieweit können die Resultate verallgemeinert werden, wenn der Definitionsraum X oder der Werteraum Y der Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ein nicht notwendig normierter, sondern ein metrischer oder lokalkonvexer Raum ist - mit entsprechend weiter gefaßtem Differentiationsbegriff (zum Beispiel das metrische Differential, siehe dazu etwa [54])?

(2) Welche Aussagen ähnlich Theorem 3.7 können über die (Un-)Beschränktheit einer Menge C gemacht werden, wenn diese Menge stark mehrdeutiger Minima einer konvex-zusammengesetzten Funktion auf A ist, jedoch nicht notwendigerweise die Inklusion $C \subseteq \operatorname{cor}(A)$ besteht? Damit wäre auch der Fall abgedeckt, daß - wie in Beispiel 3.5 - C Teilmenge des Randes von A ist.

(3) Ist die Formulierung einer notwendigen Bedingung für supereffiziente Elemente in Hinblick auf Theorem 4.12 möglich, ohne die Invertierbarkeit einer Ableitung zu fordern - aber auch ohne zusätzliche, deutlich einschränkende Voraussetzungen wie beispielsweise die Abgeschlossenheit oder Konvexität von A?

Darstellung der Beiträge

Einige Aussagen der vorliegenden Arbeit wurden in den Veröffentlichungen

[37] S. Hamann, A sufficient minimality condition for convex composite functions, Far East Journal of Appl. Math. 97 (2017), 75-83.
http://www.pphmj.com/abstract/11279.htm
[38] S. Hamann, Minimality conditions for convex composite functions and efficiency conditions in vector optimization, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 1 (2019), 221-229.
The final publication is available at Applied Set-Valued Analysis and Optimization, via https://doi.org/10.23952/asvao.1.2019.3.03
[39] S. Hamann, Minimality conditions for convex composite functions and an application in vector optimization, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 3 (2021), 309-316.
The final publication is available at Applied Set-Valued Analysis and Optimization, via https://doi.org/10.23952/asvao.3.2021.3.05

dargestellt. Im einzelnen sind dies:

- Proposition 3.1 (findet sich bezogen auf konvexe äußere Funktionen als Teil von [37, Theorem 3.1])
- Theorem 3.1 (entspricht [37, Theorem 2.3] mit zwei Varianten der Minimalitätsbedingung)
- Theorem 3.2 (entspricht [37, Corollary 2.5] in etwas verallgemeinerter Form mit zwei Varianten der Minimalitätsbedingung)
- Theorem 3.5 (ist [39, Theorem 2.2])
- Proposition 3.3 (ist [39, Proposition 2.1])
- Theorem 3.6 (ist [39, Theorem 2.3])
- Theorem 4.9 (ist ein etwas verallgemeinerter Teil von [38, Theorem 3.1])
- Theorem 4.11 (basiert auf der Einleitung zu Abschnitt 3 in [39])
- Proposition 4.7 (ist [38, Proposition 3.1])
- Theorem 4.13 (ist [39, Theorem 3.1])

Literaturverzeichnis

[1] M. Adán, V. Novo, Partial and generalized subconvexity in vector optimization problems, J. Convex Analysis, 8 (2001), 583-594.

[2] D. Azé, Characterizations for existence of multipliers in mathematical programming in Banach spaces, Preprint, 2020.

[3] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, Springer International Publishing, Basel, 2017.

[4] A. Beck, First-Order Methods in Optimization, SIAM, Philadelphia, 2017.

[5] E. Bednarczuk, W. Song, PC points and their application to vector optimization, Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 12 (1998), 21–30.

[6] E. Bednarczuk, T. H. Tran, Duality for composite optimization problem within the framework of abstract convexity, Optimization (2022), 1 - 44.

[7] D. Bertsekas, Convex Optimization Algorithms, Athena Scientific, Belmont, 2015.

[8] H-V. Boncea, S-M. Grad, Characterizations of ε-duality gap statements for composed optimization problems, Nonlinear Anal. 92 (2013), 96-107.

[9] J. F. Bonnans, A. Shapiro, Pertubation Analysis of Optimization Problems, Springer Science and Business Media, New York, 2000.

[10] J. M. Borwein, D. Zhuang, Super efficiency in vector optimization, Trans. Am. Math. Soc. 338 (1993), 105-122.

[11] R. I. Bot, E. R. Csetnek, G. Wanka, Sequential optimality conditions in convex programming via pertubation approach, J. Convex Analysis, 15 (2008), 149-164.

[12] R. I. Bot, I. B. Hodrea, G. Wanka, ε-Optimality conditions for composed convex optimization problems. J. Appr. Theory 153 (2008), 108-121.

[13] G. Bouza, E. Quintana, C. Tammer, A unified characterization of nonlinear scalarizing functionals in optimization, Vietnam J. Math. 47 (2019), 683-713.

[14] B. Brosowski, Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen, in: Abstract Spaces and Approximation, ISNM 10, Birkhäuser, Basel, 1969.

[15] J. Burke, S. Deng, Weak sharp minima revisited Part I: basic theory, Control and Cybernetics 31 (2002), 439-469.

[16] J. Burke, M. Ferris, On the Clarke subdifferential of the distance function of a closed set, J. Math. Anal. Appl. 166 (1992), 199 - 213.

[17] J. Burke, M. Ferris, Weak sharp minima in mathematical programming, SIAM J. Control Optim. 31 (1993), 1340-1359.

[18] J. Burke, M. Ferris, A Gauss—Newton method for convex composite optimization. Mathematical Programming, 71 (1995), 179-194.

[19] J. Burke, R. A. Poliquin, Optimality conditions for non-finite valued convex composite functions, Math. Program. 57 (1992), 103-120.

[20] G. Y. Chen, X. Huang, X. Yang, Vector Optimization, Springer, Berlin / Heidelberg, 2005.

[21] E. W. Cheney, Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[22] R. Cilia, J. M. Gutiérrez, Factorization of weakly continuous differentiable mappings, Bull Braz. Math. Soc. 40 (2009), 371-380.

[23] C. Clason, Einführung in die Funktionalanalysis, Springer International Publishing, Basel, 2019.

[24] L. Cromme, Strong uniqueness, Numer. Math. 29 (1978), 179-193.

[25] M. Dobrowolski, Angewandte Funktionalanalysis, Springer, Berlin / Heidelberg, 2010.

[26] M. Durea, C. Tammer, Fuzzy necessary optimality conditions for vector optimization problems, Optimization 58 (2009), 449-467.

[27] D. Fang, J. Wang, X. Wang, C-F. Wen, Optimality conditions of quasi $(\alpha,\ \varepsilon)$-solutions and approximate mixed type duality for DC composite optimation problems, J. Nonlinear Var. Anal. 7 (2023), 129 -143.

[28] F. Ferro, A generalization of the Arrow-Barankin-Blackwell theorem in normed spaces, J. Math. Anal. Appl. 158 (1991), 47-54.

[29] C. Gerstewitz, Beiträge zur Dualitätstheorie der nichtlinearen Vektoroptimierung, Dissertation, Technische Hochschule Leuna-Merseburg, 1984.

[30] X-H. Gong, Optimality conditions for efficient solution to the vector equilibrium problems with constraints, Taiwanese J. Math., 16 (2012), 1453-1473.

[31] A. Göpfert, C. Tammer, H. Riahi, C. Zalinescu, Variational Methods in Partially Ordered Spaces, Springer Science and Business Media, New York, 2003.

[32] V. V. Gorokhovik, Convex and nonsmooth vector optimization problems (russisch), Minsk, 1990.

[33] C. Günther, C. Tammer, J. C. Yao, Necessary optimality conditions in generalized convex multi-objective optimization involving nonconvex constraints, Appl. Anal. Opt. 2 (2018), 403-421.

[34] C. Gutiérrez, B. Jiménez, E. Miglierina, E. Molho, Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones, J. Glob. Opt. 61 (2015), 525-552.

[35] C. Gutiérrez, E. Miglierina, E. Molho, V. Novo, Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets, Nonlinear Anal. 75 (2012), 1822-1833.

[36] T. X. D. Ha, J. Jahn, Bishop–Phelps cones given by an equation in Banach spaces, Optimization 72 (2023), 1309-1346.

[37] S. Hamann, A sufficient minimality condition for convex composite functions, Far East Journal of Appl. Math. 97 (2017), 75-83.

[38] S. Hamann, Minimality conditions for convex composite functions and efficiency conditions in vector optimization, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 1 (2019), 221-229.

[39] S. Hamann, Minimality conditions for convex composite functions and an application in vector optimization, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 3 (2021), 309-316.

[40] R. Hartley, On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness, SIAM J. Appl. Math. 34 (1978), 211-222.

[41] D. Henze, Über die Menge der Minimallösungen bei linearen und nichtlinearen Approximationsproblemen, Dissertation, Universität Bonn, 1967.

[42] J-B. Hiriart-Urruty, New concepts in nondifferentiable programming, Analyse non convexe, Bull. Soc. Math. France, 60 (1979), 57–85.

[43] R. B. Holmes, A Course on Optimization and Best Approximation, Springer, Berlin / Heidelberg, 1972.

[44] R. B. Holmes, Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer, New York, 1975.

[45] L. Hörmander, Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Arkiv för Matematik 3 (1955), 181-186.

[46] J. Jahn, Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik [Methods and Procedures in Mathematical Physics], Vol. 31. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 1986

[47] J. Jahn, Vector Optimization, Springer, Berlin / Heidelberg, 2011.

[48] J. Jahn, Characterizations of the Set Less Order Relation in Nonconvex Set Optimization, J. Optim. Theory Appl. 193 (2022), 523-544.

[49] J. Jahn, A unified approach to Bishop-Phelps and scalarizing functionals, J. Appl. Numer. Optim. 5 (2023), 5-25.

[50] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Natl. Acad. Sci. 37 (1951), 174-177.

[51] V. Jeyakumar, Composite nonsmooth programming with Gâteaux differentiability, SIAM J. Optim. 1 (1991), 30-41.

[52] P. D. Khanh, B. S. Mordukhovich, V. T. Phat, D. B. Tran, Generalized damped Newton algorithms in nonsmooth optimization via second-order subdifferentials, J. Glob. Opt. 86 (2023), 93-122.

[53] B. Khazayel, A. Farajzadeh, C. Günther, C. Tammer, On the intrinsic core of convex cones in real linear spaces, SIAM J. Optim. 31 (2021), 1276-1298.

[54] B. Kirchheim, Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure, Proc. Am. Math. Soc. 121 (1994), 113-123.

[55] P. Kosmol, Optimierung und Approximation, De Gruyter, Berlin / New York, 2010.

[56] W. Krabs, Duality in nonlinear approximation, J. Appr. Theory 2 (1969), 136-151.

[57] C. Li, L. Meng, L. Peng, J. C. Yao, Weak sharp minima for convex composite infinite optimization problems in normed linear spaces, SIAM J. Optim. 28 (2018), 1999-2021.

[58] M. Lassonde, Hahn-Banach Theorems for Convex Functions, in: B. Ricceri, S. Simons (Hrsg.), Minimax Theory and Applications, Vol. 26, Kluwer, Dordrecht, 1998, 135-145.

[59] B. Lemaire, Application of a subdifferential of a convex composite functional to optimal control in variational inequalities, in: Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications: Proceedings of an IIASA (International Institute for Applied Systems Analysis) Workshop on Nondifferentiable Optimization Held at Sopron,Hungary, September 17–22, 1984, Springer, Berlin / Heidelberg, 1985, 103-117.

[60] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley and Sons, Hoboken, 1969.

[61] M. A. Mansour, H. Riahi, On the cone minima and maxima of directed convex free disposal subsets and applications, Preprint, 2015.

[62] R. Meise, D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011.

[63] M. Miglierina, Characterizations of solutions of multiobjective optimization problems, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 50 (2001), 153-.164.

[64] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam, Convex Analysis and Beyond, Vol. I: Basic Theory, Springer International Publishing, Cham, 2022.

[65] L. Narici, E. Beckenstein, Topological Vector Spaces, CRC Press, Boca Raton, 2010.

[66] D. J. Newman, H. S. Shapiro, Some theorems on Cebysev approximation, Duke Math. Journal 30 (1963), 673-682.

[67] K. F. Ng, W. H. Yang, Error bounds for abstract linear inequality systems, SIAM J. Optim. 13 (2002), 24-43.

[68] D. V. Pai, Well-Posedness, Regularization, and Viscosity Solutions of Minimization Problems, in: Q. H. Ansari (Hrsg.), Nonlinear Analysis, Approximation Theory, Optimization and Applications, Springer India, New Delhi, 2014.

[69] R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Springer, Berlin / Heidelberg, 2014.

[70] J. H. Qiu, Y. Hao, Scalarization of Henig properly efficient points in locally convex spaces, J. Optim. Theory Appl. 147 (2010), 71-92.

[71] B. v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer, Berlin / Heidelberg, 2001.

[72] E. Quintana, On Set Optimization with Set Relations: A Scalarization Approach to Optimality Conditions and Algorithms, Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, 2020.

[73] A .W. Roberts, D. E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, New York / London, 1973.

[74] R. T. Rockafellar, Extension of Fenchel' duality theorem for convex functions, Duke Math. Journal 33 (1966), 81-89.

[75] P. Sacks, Techniques of Functional Analysis for Differential and Integral Equations, Elsevier Science / Academic Press, London / San Diego, 2017.

[76] M. Studniarski, Weak sharp minima in multiobjective optimization, Control and Cybernetics 36 (2007), 925-937.

[77] M. Studniarski, V. Jeyakumar, A generalized mean-value theorem and optimality conditions in composite nonsmooth minimization, Nonlinear Anal. 24 (1995), 883-894.

[78] C. Tammer, P. Weidner, Scalarization and Separation by Translation Invariant Functions, Springer International Publishing, Cham, 2020.

[79] R. Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the Lasso, J. R. Stat. Soc. 58 (1996), 267–288.

[80] M. Valadier, Sous-différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans une espace vectoriel ordonné, Math. Scand. 30 (1972), 65-74.

[81] P. Weidner, Functions with uniform sublevel sets and scalarization in linear spaces, arXiv Preprint, 2016.

[82] P. Weidner, Scalarization in vector optimization with arbitrary domination sets, Optimization (2019), 1731-1750.

[83] D. Werner, Funktionalanalysis, Springer, Berlin / Heidelberg, 2018.

[84] J. Werner, Unrestringierte Optimierungsaufgaben, Vorlesungsskriptum, Universität Göttingen, 2002.

[85] D. E. Wulbert, Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds of functions, Amer. J. Math. 93 (1971), 350-366.

[86] S. Xu, S. J. Li, Weak ψ-sharp minima in vector optimization problems, Fixed Point Th. Appl. (2010), 1-10.

[87] X. Q. Yang, J. Jeyakumar, First- and second-order optimality conditions for convex composite multiobjective optimization, J. Optim. Theory Appl. 95 (1997), 209-224.

[88] X. Q. Yang, Second-order optimality conditions for convex composite optimization, Math. Program. 81 (1998), 327-347.

[89] A. Zaffaroni, Degrees of efficiency and degrees of minimality, SIAM J. Control Optim. 42 (2003), 1071-1086.

[90] C. Zalinescu, Convex Analysis in General Vector Spaces, World Scientific, Singapore, 2002.

[91] X. Y. Zheng, Proper efficiency in locally convex topological vector spaces, J. Optim. Theory Appl. 94 (1997), 469–486.

[92] X. Y. Zheng, K. F. Ng, Calmness for L-subsmooth multifunctions in Banach spaces, SIAM J. Optim. 19 (2009), 1648-1673.

[93] X. Y. Zheng, K. F. Ng, Strong KKT conditions and weak sharp solutions in convex-composite optimization, Math. Program. 126 (2011), 259-279.

[94] X. Y. Zheng, X. M. Yang, K. L. Teo, Sharp minima for multiobjective optimization in Banach spaces, Set-Valued Analysis 14 (2006), 327-345.

[95] J. Zhou, B. S. Mordukhovich, N. Xiu, Complete characterizations of local weak sharp minima with applications to semi-infinite optimization and complementarity, Nonlinear Anal. 75 (2012), 1700-1718.

[96] J. Zowe, Subdifferentiability of convex functions with values in an ordered vector space, Math. Scand. 34 (1974), 69-83.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit

Minimalitätsbedingungen für konvex-zusammengesetzte Funktionen
mit Anwendungen in der Vektoroptimierung

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Rehlingen - Siersburg, den 21.08.2023
Stefan Hamann

Persönliche Angaben

Name: Hamann
Vorname: Stefan
Geburtsdatum: 28.11.1962
Geburtsort: Offenbach (Main)
Staatsangehörigkeit: deutsch
gegenwärtige Anschrift: Im Brühl 6, 66780 Rehlingen-Siersburg

Studium der Mathematik an der Johann Wolfgang von Goethe-Universität Frankfurt (Main) von April 1983 bis Juli 1991 mit Abschluß Diplom

Rehlingen-Siersburg, den 21.08.2023
Stefan Hamann