

Datenreduktion und ihre Anwendungen in adaptiven mechanischen Systemen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing),

**genehmigt durch die Fakultät
für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg**

von Dipl. Informatiker Weihua Zhang
geb. am 27. Februar 1958
in Shanghai, VR China

Gutachter: Prof. Dr. Bernd Michaelis
Prof. Dr. Ulrich Gabbert

Eingereicht am: 22.04.2003

Verteidigt am: 08.12.2003

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektronik, Signalverarbeitung und Kommunikationstechnik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Die Arbeit war im Projekt ADAMES eingebunden, das mit Fördermitteln des Landes Sachsen-Anhalt, der DFG unterstützt wurden.

Mein herzlicher Dank gilt an dieser Stelle vor allem Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Michaelis, für die wissenschaftliche Betreuung und wohlwollende Unterstützung bei der Entstehung der vorliegenden Arbeit.

Für die Übernahme des Korreferates bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Gabbert, Institut für Mechanik. Herr Prof. Dr.-Ing. Andreas Wendemuth übernahm dankenswerterweise den Vorsitz der Prüfungskommission.

Mein Dank gilt weiterhin meinen Kollegen vom IESK für die freundliche Zusammenarbeit und die interessanten fachlichen Diskussion. Besonders hervorheben möchte ich meinen Kollegen Dipl.-Ing. Roman Calow, Dr.-Ing. Gerald Krell, Dr. Ing. Udo Seiffert und Dipl. –Ing. Hans Rodiek.

Für die Unterstützung der Entstehung dieser Arbeit bedanke ich mich besonders an meiner Frau und meinen Eltern und Schwiegereltern.

Karlsruhe, im Dezember 2003

Weihua Zhang

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Problemdarstellung	5
1.1. Modellbildung und Modellreduktion	5
1.1.1. Modellreduktion in der Regelungstechnik	5
1.1.2. Modellreduktion in der Strukturdynamik	8
1.2. Die Methoden zum Reglerentwurf	10
1.2.1. LQG-Reglerentwurf	10
1.2.2. H^∞ -Reglerentwurf und μ -Synthese	11
1.2.3. Die dominante Methode	15
1.3. Ziel dieser Arbeit	17
2. Verfahren der Datenreduktion und ihre Eignung	19
2.1. Grundcodierung in der Datenkompression	20
2.1.1. Lauflängen-Codierung (Run Length Encode)	20
2.1.2. Golombscher Code	20
2.1.3. Huffman-Codierung	21
2.1.4. Arithmetische Codierung	22
2.2. Datenkompression in der Bildverarbeitung	23
2.2.1. Bildkompression mit RLE	24
2.2.2. Vektorquantisieren	25
2.2.3. Block-Matching	25
2.2.4. Block-Rundungs-Codierung (Block Truncation Coding (BTC))	26
2.2.5. FELICS	28
2.2.6. MLP	29
2.2.7. DPCM	31
2.2.8. JPEG	33
2.3. Zusammenfassung und Bewertung	38
3. Datenreduktions- und Erweiterungstechnik in adaptiven mechanischen Systemen	41
3.1. Modal-Entwicklung	41
3.1.1. Modalreduktion	42
3.1.2. Modalerweiterung	45
3.2. Karhunen-Loève-Entwicklung	46
3.2.1. Reduktionstechnik mit der Karhunen-Loève-Entwicklung	47
3.2.2. Erweiterungstechnik mit der Karhunen-Loève-Entwicklung	47

3.3. Zusammenhang zwischen Modal- und Karhunen-Loève-Entwicklung	48
3.4. Simulationsergebnisse	49
4. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit und die Stabilität in rückgekoppelten adaptiven mechanischen Systemen	57
4.1. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit	57
4.1.1. Modal-Entwicklung	57
4.1.2. Karhunen-Loève-Entwicklung	59
4.2. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die Stabilität	59
4.2.1. Modal-Entwicklung	59
4.2.2. Karhunen-Loève-Entwicklung	60
4.3. Zusammenfassung	61
5. Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum	63
5.1. Das Prinzip der Karhunen-Loève-Entwicklung	63
5.2. Karhunen-Loève-Entwicklung für mechanische Systeme	64
5.3. Verwendung der Karhunen-Loève-Entwicklung für die Formkontrolle	65
5.3.1. Stationäre Genauigkeit	66
5.3.2. Auswahl der Anzahl der orthogonalen Funktionen	66
5.3.3. Stabilität	68
5.3.4. Diagonalisierung des reduzierten Systems im Karhunen-Loève-Raum	69
5.4. Geometrische Interpretation der Karhunen-Loève-Entwicklung und der Modal-Entwicklung	71
6. Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung mittels des genetischen Algorithmus	73
6.1. Einführung in die Optimierung der Aktoren- und der Sensorenpositionierung	73
6.2. Einführung in die Funktion des genetischen Algorithmus	75
6.3. Anwendung des GA zur Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung	77
6.3.1. Das zu simulierende Objekt	77
6.3.2. Kodierung der Positionen der Aktoren und Sensoren	78
6.3.3. Auswahl der Ziel- und Fitnessfunktion	78
6.3.4. Berechnung der Stellgrößen	81
6.3.5. Bewertung des Chromosoms mittels der Fitnessfunktion	82
6.3.6. Parameter des verwendeten genetischen Algorithmus	82
6.4. Simulationsergebnisse	82

7. Überlegungen zum Regelungsentwurf	87
7.1. Die verteilte Implementierung eines zentralen Reglers	87
7.2. Der Reglerentwurf im modalen Karhunen-Loève-Raum	91
8. Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse	97
8.1. Beschreibung des Versuchsaufbaus	97
8.2. Hysteresekompensation an Piezokeramikstabaktoren	99
8.3. Modellbildung und –verifikation	102
8.4. Durchführen der KLE, Reglerentwurf und Sollwertberechnen	104
8.5. Simulations- und Experimentellergebnisse	106
9. Zusammenfassung und Ausblick	111
Anhang A. Grundlagen der Beschreibung mechanischer Systeme	115
A.1 Bewegungsdifferentialgleichung der mechanischen Systeme im allgemeinen	115
A.1.1. Die kinematische Gleichung—Die Beziehung zwischen Verzerrung und Verschiebung	115
A.1.2. Die konstitutive Gleichung—Die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung	117
A.1.3. Oberflächenkräfte und Randbedingungen	118
A.1.4. Das Prinzip der virtuellen Arbeit und das dynamische Gleichgewicht	119
A.1.5. Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung mit freier Schwingung—Die Eigenmodi des mechanischen Systems	121
A.1.6. Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung der erzwungenen Schwingung	122
A.2. Ein Balken als Beispiel	124
Anhang B. Grundlagen der Methode der Finiten Elemente	133
B.1. Das Prinzip der FEM	133
B.2. Anwendung der Piezo-Elemente	135
B.3. Modellbildung für Dehnungsmessstreifen	137
Anhang C. Relevante Grundlagen der Regelungstechnik	143
C.1. Systemantwort über gegebene Eingangsgröße	143
C.2. Endwertsatz der Laplace-Transformation	144
C.3. Steuerung und Regelung	144
C.4. Genauigkeit und Stabilität eines Regelkreises	144
C.5. Reglerentwurf für einschleifige Eingrößenregelsysteme	146
C.6. Darstellung des Regelkreises im Zustandsraum	151

C.7. Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	152
C.8. Modellreduktion in der Regelungstechnik	153
C.8.1. Die balancierte und die modale quadratische Norm Reduktion	154
C.8.2. Die balancierte und die modale unendliche Norm Reduktion	155
C.8.3. Die balancierte Hankelsche Norm Reduktion	157
C.8.4. Die Reduktionsmethode von Litz	158
C.9. Modellreduktion in Strukturdynamik	158
C.10. LQG-Reglerentwurf	163
C.11. Der H^∞ -Reglerentwurf und die μ -Synthese	168
Literaturverzeichnis	179

Die wichtigsten Abkürzungen, Begriffe und Formelzeichen

KLE	Karhunen-Loève-Entwicklung
KLK	Karhunen-Loève-Koeffizient, Karhunen-Loève-Koordinaten
KLR	Karhunen-Loève-Raum
FEM	Finite Element Method, Finite-Element-Modell
GA	Genetischer Algorithmus
x	Zustandsvariable, Verschiebungsvektor der FEM
y	Messgrößen
u	Stellgrößen
M, D, K	Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix eines mechanischen Systems
$C, F,$	Mess- und Steuerungsmatrix eines mechanischen Systems
A, B, C, D	Zustands-, Steuerungs-, Mess- und Durchgangsmatrix eines Regelungssystems mit Zustandsraum-Darstellung
n	Anzahl der Freiheitsgraden
m	Anzahl der Sensoren
p	Anzahl der Aktoren
v	Anzahl der verdichteten Größen
Φ	Die mit den Massen normierte modale Matrix eines mechanischen Systems
q	Die modale Koordinaten
u_{md}	Stellgrößen im modalen Raum
W	Karhunen-Loève-Transformationsmatrix
a	KLK
u_{kl}	Stellgrößen im KLR
\tilde{P}	Die modale Matrix im KLR
Q_{kl}	Die modale Koordinaten im KLR
u_{mkl}	Stellgrößen im modalen KLR
R	Reduktionsmatrix
T	Erweiterungsmatrix
I	Einheitsmatrix, Parametermatrix eines PID-Reglers
\bullet^T	Transponiert
\bullet^*	Konjugiert transponiert
\bullet^+	Pseudoinverse
$diag_n(\bullet)$	$n \times n$ diagonale Matrix
\in	Element von

$\lfloor x \rfloor$	die kleinste ganze Zahl von x
$\lceil x \rceil$	die größte ganze Zahl von x
$X(s)$	Laplace-Transformation von x

Einleitung

Schwingungsunterdrückung und Formkontrolle sind zwei wesentliche Anwendungsgebiete der adaptiven mechanischen Systeme. Als Hauptanwendungsgebiete der Formkontrolle können adaptive Teleskope, Satellitenantennen und adaptive Flügel genannt werden.

Die erste Anwendung der Formkontrolle in der Astronomie am Ende der 70er und der 80er Jahre waren adaptive Teleskope [HAR 78, MER 88, MER 89]. Durch gezielte Veränderungen der Reflektoroberfläche kann man den Einfluss der Turbulenz der Atmosphäre kompensieren. Damit lassen sich Bilder von Sternen mit hoher Qualität gewinnen. In [HAR 78] wurde eine Reihe von deformierbaren Spiegeln mit verschiedenen physikalischen Prinzipien vorgeschlagen. Die gängigsten Vertreter sind im Bild E-1 schematisch dargestellt. Durchgesetzt haben sich die segmentierten und dünnen Spiegel, die mittels piezoelektrischer Aktoren ausgelenkt werden [GLI 97], z.B. wurden in [MER 88] 187 Aktoren in einem Teleskop mit 3.5m Durchmesser verwendet. Ein Grund dafür ist, dass eine solche Konfiguration der Aktoren leicht zu regeln ist, weil die Auslenkung eines Aktors von anderen Aktoren relativ unabhängig ist.

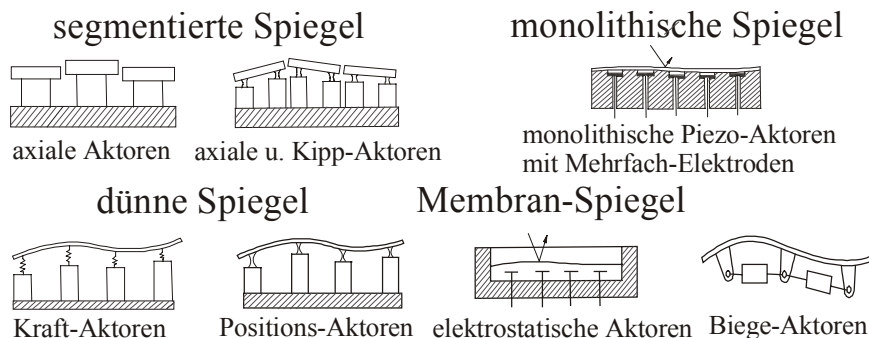


Bild E-1: Die wichtigsten Typen des deformierbaren Spiegels. Segmentierte und dünne Spiegel können sowohl in der adaptiven als auch in der aktiven Optik eingesetzt werden. Monolithische und Membran-Spiegel sind hochfrequent deformierbar und somit besonders für die adaptive Optik geeignet. Die schraffierten Gebiete stellen den festen mechanischen Rahmen dar, beim monolithischen Spiegel ist der Piezo-Block rautiert gekennzeichnet. Über dem Membran-Spiegel befindet sich eine transparente Elektrode, die auch von oben auf den Spiegel Zug- und Druckkräfte ausübt [MER 89].

Die Anzahl der notwendigen Stellelemente ist vom Durchmesser des Spiegels und der beobachteten Wellenlänge abhängig, und durch die Beziehung $n_a = \left(\frac{D}{\lambda^{1.22}}\right)^2 10^{-12}$ gegeben, wobei D der Teleskopdurchmesser (mm) und λ die Wellenlänge (mm) ist [MER 89]. In Zukunft wird der Durchmesser des Teleskops immer größer und die beobachtete Wellenlänge immer kürzer. In [MAL 94] wurde ein 8-10 m Teleskop mit 400-1000 Aktoren untersucht (simuliert). In [GIL 99] wird ein 100 m Teleskop mit 200 000 Aktoren vorgeschlagen.

Mit zunehmendem Bedarf im Telekommunikationsbereich setzt man immer mehr Kommunikationssatelliten ein. Je größer die Kapazität der Satelliten ist, desto höhere Frequenzen der

Trägerwelle werden benötigt. Daraus folgen die höheren Anforderungen an die Genauigkeit der Form der Antennen und der Trägerplatten [MEL 98]. Wegen der Anforderungen an eine leichte Konstruktion ist das Fachwerk die häufig benutzte Struktur für die Satellitenantenne und ihre Trägerplatte. Bild E-2 zeigt ein Beispiel. Die Hauptquelle der Ungenauigkeit ist die Ungleichheit der Länge der einzelnen Stäbe, wegen Herstellungsfehler sowie Temperaturänderungen im Betrieb [BUR 90, HAF 91, FUR 95, HAK 94, HAK 96].

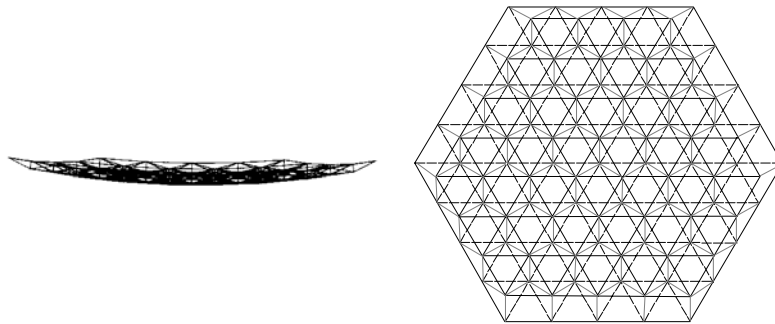


Bild E-2: Die Seitenansicht und Draufsicht einer Antenne mit Fachwerkstruktur.

Die Autoren der genannten Literaturquellen untersuchen die Möglichkeiten, wie solche Fehler kompensiert werden können. Zum Beispiel, welchen Einfluss hat die Änderung im einzelnen Stab auf die gesamte Form? Welche Stäbe sollen durch die aktiven Elemente ersetzt werden? Wie viele solcher Elemente werden benötigt, damit die Fehler beseitigt werden können? Alle Untersuchungen wiesen darauf hin, dass eine relativ große Anzahl von Aktoren notwendig ist, um die Fehler vollständig zu kompensieren. In [BUR 90] und [HAF 91] wurde eine Fachwerkantenne mit 55-m Durchmesser untersucht. Die vertikalen Koordinaten der 61 Verbindungsstellen in der Oberfläche wurden kontrolliert. Die Oberfläche enthielt 156 Stäbe. Die Aktoren sollten innerhalb dieser 156 Stäbe eingesetzt werden. Das Ergebnis zeigte: um vollständige Fehlerkompensation zu erreichen, benötigt man 58 Aktoren. In [FUR 95] wurde eine etwas kleinere Antenne untersucht und das Ergebnis war ähnlich: für 27 Kontrollpunkte benötigt man 24 Aktoren.

[HAK 94] und [HAK 96] haben auch Trägerplatten und Antennen mit Fachwerken untersucht. In [SAL 94] wurde eine aufblasbare Antenne mit Piezokeramiken als aktive Elemente betrachtet. Die beiden Untersuchungen ergaben ähnliche Ergebnisse wie [BUR 90, HAF 91] und [FUR 95]. Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, können wir den folgenden Zusammenhang erhalten (Bild E-3). Im Bild sind n_a und n_c die Anzahl der Aktoren bzw. der kontrollierten Punkte. ε ist der Fehler ohne Kontrolle. ε_c ist der Restfehler nach der Kontrolle. Weiterhin wurden einige Verfahren zur Platzierung der Aktoren in diesen Literaturquellen angegeben.

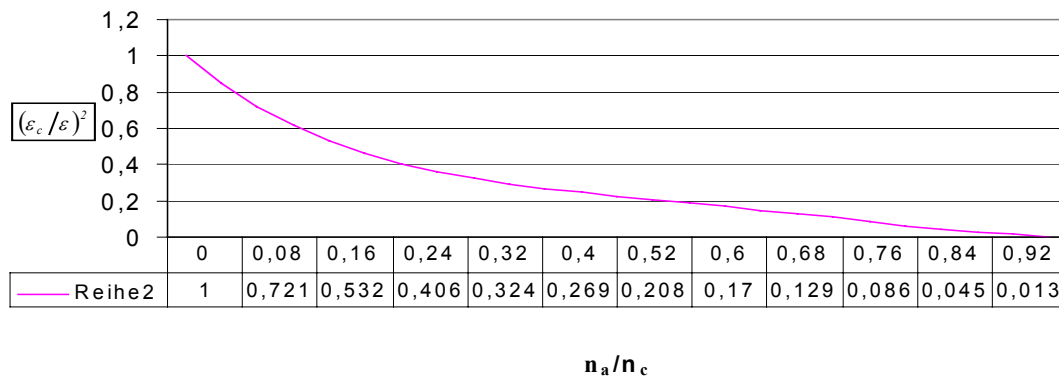


Bild E-3: Die Beziehung zwischen dem Verhältniss n_a/n_c und dem Restfehler ϵ_c/ϵ für die Fachwerkstruktur

Mit zunehmender Entwicklung im Bereich des Materials machten Verbundwerkstoffe den Leichtbau möglich. Man versucht die Antenne mit Verbundwerkstoffen zu bauen und die Aktoren in die Verbundwerkstoffe zu integrieren [MEL 98, PAR 99, DÖN 98]. Das Prinzip von Biege-Aktoren wurde dabei verwendet. [MEL 98] stellte ein Fertigungsverfahren vor und gab eine parabolische Antenne mit 0.7m Durchmesser und eine Konfiguration von den Aktoren mit 24 Piezopplatten an. In [DÖN 98] wurde eine parabolische Antenne mit 0.8m Durchmesser und eine andere Konfiguration von Aktoren mit 132 Piezopplatten vorgegeben. In [PAR 99] wurde ein kreisförmiger Scheibenreflektor für die Kompensation der Deformation wegen des Eigengewichts untersucht. Hier wurden 12 Piezopplatten verwendet. Die Konfiguration der Piezopplatten ist in [PAR 99] angegeben. Der aktive Bereich beträgt 14% des gesamten Reflektors und der quadratische Fehler aufgrund des Eigengewichts kann um mehr als 80% reduziert werden.

Die Beziehung zwischen der Konfiguration von Aktoren (Wie viele Aktoren sollen benutzt werden? Wo soll man sie platzieren?) und den gegebenen Anforderungen (Formgenauigkeit oder andere Genauigkeit) wurde allerdings in den Literaturquellen nicht angegeben.

Mit der Entwicklung der Luftfahrt gibt es zunehmende Anforderungen an die Technologie der Formkontrollen. Zum Beispiel können adaptive Flügel die Eigenschaften der Aerodynamik der Flugzeuge verbessern und sie können entweder mehr Passagiere befördern oder weiter fliegen [AUS 94, HAN 97, EHL 98, HEY 99, MON 99 und SIM 99].

Alle Literaturquellen, die oben zitiert wurden, weisen darauf hin, dass die Formkontrolle eine sehr große Anzahl von Aktoren und Sensoren benötigt. Ist die übliche Regelungstechnik für diese Aufgabe geeignet? Im nächsten Kapitel sollen zunächst die bestehenden Methoden der Modellreduktions- und Regelungstechnik analysiert und eigene Lösungsmethoden vorgestellt werden. Im Kapitel 2 wird das Datenreduktionsverfahren in der Bildverarbeitung betrachtet. Im Kapitel 3 und 4 werden die Datenreduktionstechniken für adaptive mechanische Systeme,

Modal-Entwicklung und Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum, vorgestellt. Der Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit und die Stabilität in den rückgekoppelten adaptiven mechanischen Systemen wird untersucht. Eine Methode, die Vorteile von Modal-Entwicklung und Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum beibehält und die Nachteile beider Methoden überwindet, wird in Kapitel 5 vorgeschlagen. Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Optimierung der Platzierung von Aktoren und Sensoren. Im Kapitel 7 wird eine Methode diskutiert, die sicher stellt, dass der im reduzierten Raum entworfene Regler das abgeschlossene System stabilisiert. Eine verteilte Realisierung eines solchen Reglers wird dort angegeben. Kapitel 8 präsentiert experimentelle Ergebnisse. Schließlich wird eine Zusammenfassung im Kapitel 9 angegeben.

1. Problemdarstellung

Fast alle Literaturquellen, die im vorhergehenden Kapitel zitiert wurden, beschäftigen sich mit dem statischen Bereich. Dies ist für die Formkontrollen notwendig. Die unerwarteten Störungen und das unvollständig bekannte System machen die einfache Steuerung in der Praxis nicht verwendbar. Damit muss die Regelungstechnik auch für die Formkontrollen herangezogen werden.

1.1. Modellbildung und Modellreduktion

Um den Reglerentwurf durchzuführen, benötigt man eine mathematische Beschreibung des physikalischen dynamischen Systems, also ein Modell. Es gibt zwei Kategorien der Modellbildung: experimentelle und theoretische Modellbildung. Bei der experimentellen Modellbildung misst man die Eingangs- und Ausgangssignale der gegebenen Anzahl von Aktoren und Sensoren. Durch den geeigneten Identifikationsalgorithmus erhält man das dynamische Modell. Man sollte beachten, dass die Anzahl von Aktoren und Sensoren für die Formkontrolle relativ sehr groß ist. Somit ist der Identifikationsvorgang für die Formkontrolle sehr aufwendig und sehr mühsam. Immerhin wird man ein geeignetes Modell für einen Reglerentwurf erhalten.

In der theoretischen Modellbildung geht man vom physikalischen Prinzip des Systems aus und stellt die partielle Differentialgleichung für mechanische Systeme auf. Durch Diskretisierung wird die partielle Differentialgleichung zur gewöhnliche Differentialgleichung (s. Anhang B). Bei mechanischen Systemen kann man auch direkt die Finite-Elemente-Methode (FEM)[BAT 90, BER 98] benutzen, um eine gewöhnliche Differentialgleichung herzuleiten. Jedoch ist das durch FEM gebildete Modell für den Regelungsentwurf nicht geeignet, weil die Anzahl der Freiheitsgrade in diesem Fall zu hoch ist.

Die Lösung dieses Problems ist die Modellreduktion. Es gibt mehrere Methoden für die Modellreduktion, sowohl in der Regelungstechnik als auch in der Strukturdynamik.

1.1.1. Modellreduktion in der Regelungstechnik

In der Regelungstechnik geht man davon aus, dass ein System, $\mathbf{G} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, existiert. Die Freiheitsgrade oder Ordnungen des Systems sind sehr hoch. Gesucht ist ein System \mathbf{G}_r mit niedriger Ordnung als \mathbf{G} . \mathbf{G}_r sollte einigermaßen „gleich“ \mathbf{G} sein. Der verwendete Maßstab der Modellreduktion in der Regelungstechnik ist die Norm. Die am häufigsten verwendete Norm ist die quadratische Norm $\|\cdot\|_2$, die unendliche Norm $\|\cdot\|_\infty$ und die Hankelsche Norm $\|\cdot\|_H$.

In der Regelungstechnik gibt es grundsätzlich zwei Kategorien für die Modellreduktion. Eine ist die sogenannte „abgeschnittene“ Reduktion (truncated reduction), die andere ist die „rest-

teilberücksichtigende“ Reduktion (residualized reduction). In beiden Kategorien werden zunächst die Zustandsvariablen \mathbf{x} nach einem bestimmten Kriterium sortiert und in zwei Teile $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]$ partitioniert. Ein Teil \mathbf{x}_1^T ist der sogenannte dominante Teil, der andere \mathbf{x}_2^T der undominante. Die Systemmatrizen (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}) werden auch entsprechend partitioniert.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.1-1)$$

Bei der abgeschnittenen Reduktion wird \mathbf{x}_2 einfach weggelassen und das reduzierte System ist

$$\mathbf{G}_r^{tr} = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1). \quad (1.1.1-2)$$

Der stationäre Wert dieses reduzierten Systems ist $\mathbf{G}_r^{tr}(t = \infty) = -\mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1$ und wird nie gleich mit dem des Originals sein. Damit ist diese Art von Reduktion für die Formkontrolle nur bedingt geeignet. Bei der restteilberücksichtigenden Reduktion wird \mathbf{x}_2 berücksichtigt. Es wird angenommen, dass $\dot{\mathbf{x}}_2$ gleich Null ist und \mathbf{x}_2 ist durch \mathbf{x}_1 und \mathbf{u} darstellbar. Als reduziertes System erhält man

$$\mathbf{G}_r^{re} = (\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r) \quad (1.1.1-3)$$

mit $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2$ und $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}$ und $\mathbf{D}_r = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2$. Es ist leicht zu bestätigen, dass der stationäre Wert des reduzierten Systems immer mit dem des Originals übereinstimmt. Deshalb ist diese Art von Reduktion für die Formkontrolle geeignet. Wegen der Mehrdeutigkeit der Zustandsvariablen ergibt sich die Frage, welche Zustandsvariable ausgewählt werden soll, damit das reduzierte System besser mit dem Original übereinstimmt? In der Regelungstechnik werden häufig zwei Koordinatensysteme ausgewählt, nämlich das balancierte Koordinatensystem und das Modalsystem. Also gibt es drei wählbare Kriterien: Vergleichmaße, Dominanzmaße und Koordinatensysteme der Zustandsvariablen. Aus der Kombination der drei Kriterien erhält man die verschiedenen Reduktionsmethoden. In Anhang C.8 werden nach dem Bedarf der Formkontrolle, d.h. in der Kategorie restteilberücksichtigender Reduktion, die Reduktionsmethoden von balancierter quadratischer Norm [GAW 90, GAW 96], balancierter unendlicher Norm [GRE 95], balancierter Hankelscher Norm [GRE 95, GLO 84, SKO 96], modaler quadratischer Norm [YOU 92] und modaler unendlicher Norm [GAW 96] so wie die Reduktionsmethoden von Litz [FÖL 94] im Detail diskutiert.

Die kritische Stelle des balancierten Verfahrens ist die Balancierung des durch physikalische Prinzipien gebildeten Modells, weil normalerweise das gebildete Modell nicht balanciert ist. Im Balanceverfahren ist die Auflösung der Ljapunowschen Gleichung (s. Anhang C.7) ein

bedeutender Schritt. Aber bislang sind alle Algorithmen mit der Rechenkomplexität $O(n^3)$ [PEN 99], d.h. für ein System mit sehr hoher Ordnung ist es kaum möglich, mit diesem Verfahren die Systemreduktion durchzuführen.

Die kritische Stelle der modalen quadratischen Norm Reduktion ist die Modalisierung des Modells, weil das durch physikalische Prinzipien hergestellte Modell normalerweise auch nicht in Modalkoordinaten angegeben ist. Die Modalisierung der Gleichung (1.1.1-1) erfordert die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren mit dem Aufwand $O(n^3)$. Wegen der Diagonalität von A in der Modaldarstellung ist die Lösung der Ljapunowschen Gleichung nur noch $O(n^2)$. Im Vergleich mit der balancierten Reduktion ist die Rechenkomplexität etwa gleich, das heißt $O(n^3)$.

Für mechanische Systeme kann die Rechenkomplexität etwas reduziert werden. M und K sind die Massen- und Steifigkeitsmatrix. Zunächst werden die Eigenvektoren und Eigenwerte aus $K\Phi = M\Phi A$ berechnet. Da der Dimension von K und M halb so groß wie die von A ist, benötigt diese Berechnung nur $0,125O(n^3)$. Unter Verwendung der Modaldarstellung 2 in [GAW 96] wird die Matrix A in der Gleichung (1.1.1-1) blockdiagonal. Die Ljapunowsche Gleichung (c-19) ist durch

$$A_i W_c^{ij} + W_c^{ij} A_j^T + B_i B_j^T = 0, \quad A_i^T W_o^{ij} + W_o^{ij} A_j + C_i^T C_j = 0 \quad i, j = 1, \dots, 0,5n,$$

lösbar, wobei A_i eine 2×2 Matrix in der diagonalen Stelle der Matrix A ist. B_i und C_i sind $2 \times p$ bzw. $m \times 2$ Matrizen. p und m sind die Anzahl der Aktoren bzw. Sensoren. Zählt man den Aufwand der Lösung dieser 2×2 Ljapunowschen Gleichung als Konstante, wird die Rechenkomplexität der gesamten Ljapunowschen Gleichung (c-19) auf $0,25O(n^2)$ reduziert. Zusammenfassend benötigt man für modale quadratische Norm Reduktion etwa $0,125O(n^3)$ Zeit. Wegen der zweifachen Auflösung der Ljapunowschen Gleichung und der Zerlegung des Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramians benötigt die balancierte quadratische Norm Reduktion mehr Zeit als die modale quadratische Norm Reduktion. Zum Beispiel benötigt die Eigenvektoren- und Eigenwerteberechnung von $K\Phi = M\Phi A$ (mit $0,5n=2844$) 168 Stunden auf einem Pentium III Rechner mit 900 MHz und 512M RAM. Die berechneten Eigenvektoren und Eigenwerte werden für weitere Berechnung verwendet. Mit einem Pentium III Rechner, 800 MHz und 384M RAM kostet die modale quadratische Norm Reduktion 16,25 Stunden und bei gleichem Rechner ist die balancierte quadratische Norm Reduktion nach 168 Stunden Berechnung immer noch ohne Ergebnis.

Der Schwachpunkt der vorher erörterten Methoden ist der Modalisierung oder Balancierung des durch physikalische Prinzipien gebildeten Modells. Es ist kaum möglich, besonders für balancierte Methoden, die Modellreduktion durchzuführen, wenn die Ordnung des Original-

systems sehr hoch ist. Für die Formkontrolle gilt genau dieser Fall. Außerdem ist die Dimension der Übertragungsfunktion durch die Modellreduktion unverändert (s. Gleichung (1.1.1-2) und (1.1.1-3)).

1.1.2 Modellreduktion in der Strukturdynamik

In der Strukturdynamik geht man davon aus, dass die Massen- und Steifigkeitsmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} vorhanden sind und die Dimension oder Ordnung dieser Matrizen sehr hoch ist. Die Aufgabe der Modellreduktion ist das Suchen alternativer Massen- und Steifigkeitsmatrizen mit niedrigerer Ordnung. Die Eigenfrequenz des originalen und des reduzierten Systems soll im niedrigen Frequenzbereich möglichst gleich sein.

Bei allen Reduktionstechniken gibt es ein bestimmtes Verhältnis zwischen dem aktiven („a“) und dem weggelassenen („d“) (delete) Freiheitsgrad. Dies kann in der allgemeinen Form als

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}_a \quad (1.1.2-1)$$

dargestellt werden, wobei \mathbf{x}_n als Verschiebungsvektor der FE-Modell mit vollem Freiheitsgrad bezeichnet wird. \mathbf{T} ist die Projektions- oder Transformationsmatrix. Abhängig von der benutzten Reduktionstechnik nimmt die Projektionsmatrix \mathbf{T} unterschiedliche Formen an. Die Projektionsmatrix wird benutzt, um die reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen mit

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (1.1.2-2)$$

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (1.1.2-3)$$

zu bilden. Die Guyansche und Ironsche Reduktion [GUY 65, IRO 65], die dynamische Kondensation [MIL 80], System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) [OCA 89-2, OCA 96] und das verbesserte Reduktionssystem (Improved Reduced System (IRS)) [OCA 89-1] sind solche Reduktionstechniken. Im Anhang C.9 werden diese Reduktionstechniken erläutert.

Die Guyansche und Ironsche Reduktion basiert nur auf der Steifigkeitsmatrix und damit gehen die Trägheitskräfte des Systems nicht mit in die Reduktion ein. Die für das reduzierte System berechneten Eigenfrequenzen sind immer höher als die Eigenfrequenzen des Originalsystems [AVI 89]. Das durch die dynamische Kondensationstechnik reduzierte Modell ist eine Funktion der Frequenz ω . Das reduzierte Modell entspricht dem ursprünglichen Modell nur, wenn ω gleich einer Eigenfrequenz des ursprünglichen Systems ist. Das reduzierte System ist nur für diese einzelne Eigenfrequenz genau [AVI 89].

In SEREP werden die Modalmatrix und die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems der Modalmatrix und den Eigenfrequenzen des ursprünglichen Systems entsprechen, falls die gesamten Verschiebungen nur mit entsprechenden Modalkoordinaten dargestellt werden kön-

nen [AVI 89, OCA89-2, OCA 96]. Dieser Fall geht mit der Schwingungsunterdrückung einher. Für die Formkontrolle wird diese Bedingung häufig nicht erfüllt. Damit sind die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems nie gleich den entsprechenden Eigenfrequenzen des Originalsystems (s. C.9).

Eine andere Kategorie der reduzierten Modelle kann man mit Hilfe des Konzepts der generalisierten Koordinaten erzeugen. Diese sind Exact Reduced System (ERS) [FUH 86], General Dynamic Reduction (GDR) [CRA 68] und Extended Guyan Reduction (EGR) [CON 89]. Diese Methoden enthalten entweder nichtlineare Eigenprobleme oder die Auflösung der kompletten Eigenwerte und Eigenvektoren des vollen Systems [OCA 90]. Deshalb werden sie hier nicht weiter erörtert.

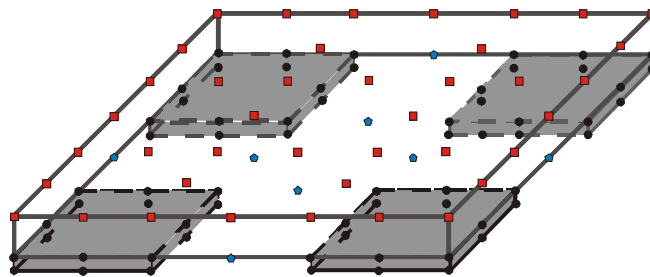


Bild 1-1: Die Skizze des begrenzten Reduktionsverhältnisses bei der Bedingung der weggelassenen Freiheitsgrade.

Aus der Sicht der Formkontrolle ist man nicht nur an der Gleichheit der Eigenfrequenz in vollem und reduziertem System interessiert, sondern vor allem an der Gleichheit der stationären Verstärkung, die in der Reduktionstechnik der Strukturtechnik unberücksichtigt bleibt. Die Diskussion im Anhang C.9 zeigt, dass nur noch die Guyansche und Ironsche Reduktion und das verbesserte Reduktionssystem unter den jeweiligen Bedingungen für die Formkontrolle geeignet sind. Aber wenn die Anzahl der Aktoren und Sensoren relativ hoch ist, wird das Reduktionsverhältnis sehr begrenzt sein.

Bild 1-1 zeigt ein Beispiel. Es gibt vier dünne (graue) Piezoplatten als Aktoren. Die Punkte bedeuten die Knoten der FEM. Es gibt insgesamt 112 Knoten. Mit je 3 Freiheitsgraden pro Knoten sind insgesamt 336 Freiheitsgrade im System vorhanden. Nur die 40 roten (eckigen) Knoten und 8 blauen (5eckigen) Knoten haben keine direkte Verbindung mit die Aktoren. Damit kann das System von maximal 112 Knoten auf 64 Knoten und insgesamt 192 Freiheitsgrade reduziert werden. Jedoch ist diese Anzahl von Freiheitsgraden für die üblichen Methoden der Regelungstechnik immer noch zu hoch. Wenn noch mehr Aktoren eingesetzt werden, wird die Anzahl der Freiheitsgrade noch weiter nach oben getrieben.

Gleichgültig, welche Reduktionsmethode in der Regelungstechnik oder Strukturtechnik benutzt wird, erhält man nur bedingt ein für den Reglerentwurf geeignetes Modell mit relativ

wenigen Freiheitsgraden. In der Regelungstechnik sind die Auflösung der Ljapunowschen Gleichung und/oder der Eigengleichung für das System mit größeren Freiheitsgraden ein Hindernis. In der Strukturdynamik hängt das Reduktionsverhältnis von der Anzahl der Aktoren und Sensoren ab und das reduzierte System ist entweder in der Dynamik¹⁻¹ oder in der Statik¹⁻² nicht fehlerfrei. Obwohl man ein für den Reglerentwurf geeignetes Modell erhalten kann, ist dieses Modell wegen der sehr großen Anzahl von benötigten Aktoren und Sensoren für die Formkontrollen zu hoch dimensioniert.

1.2. Die Methoden zum Reglerentwurf

Es gibt viele Methoden zum Reglerentwurf. Der einfachste und robuste Regelalgorithmus ist der PID-Regler. PID-Regler werden weitgehend in allen Bereichen verwendet. Aber dies gilt nur für einschleifige Eingrößensysteme (**Single-Input Single-Output**). Es gibt keine Methode zum Reglerentwurf für Mehrgrößensysteme (**Multiple-Input Multiple-Output**) mit dem PID-Algorithmus. Wenn man den PID-Algorithmus für Mehrgrößensysteme verwenden möchte, muss man den Algorithmus auf eine Regelgröße nach der anderen anwenden und den Kopplungseffekt berücksichtigen. Wenn die Anzahl der Regelgrößen relativ groß ist, ist diese Methode für den Reglerentwurf aufwendig.

Um den Reglerentwurf für MIMO-Systeme zu realisieren, werden die Entwurfsmethoden in zwei Richtungen entwickelt: Die eine ist eine allgemeine Methode, die sowohl für MIMO als auch für SISO verwendbar ist. Diese ist LQG (H^2), H^∞ und μ -Synthese. Die andere versucht, die gekoppelten Mehrgrößensysteme zu entkoppeln und einzelne Eingrößensysteme zu erhalten, so dass die Methoden für Eingrößensysteme, zum Beispiel PID-Regler, verwendet werden können. Man spricht hier von der sogenannten dominanten Methode.

1.2.1. LQG-Reglerentwurf

Die Methode des LQG (H^2)-Reglerentwurfs wurde am Ende der 50er und Anfang der 60er Jahre des letzten Jahrhunderts entwickelt. LQG besteht aus optimaler Regelung [BEL 57, BER 61, DRE 60] und optimaler Filterung [KAL 60, KAL 61]. Bei der optimalen Regelung geht man davon aus, dass alle Zustandsvariablen messbar sind. Die Aufgabe der optimalen Regelung ist die Berechnung der optimalen Stellgröße bei einem bestimmten Gütekriterium. Die optimale Filterung beschäftigt sich damit, die Zustandsvariablen von verrauschten Systemen zu schätzen. Nach der Entwicklung der Separationstheorie [WON 68] wurde LQG in der

¹⁻¹: Die Guyansche und Ironsche Reduktion

¹⁻²: System Equivalent Reduction Expansion Process

Praxis verwendbar. Eine ausführliche Bibliographie über dem LQG findet man in [MEN 71]. Eine ausführliche Einführung findet man auch im Anhang C.10.

Die Auflösung der Riccati-Gleichung spielt eine wichtige Rolle im LQG-Regler. Ob die Auflösung schwer oder leicht ist, hängt von der Dimension der Riccati-Gleichung ab. Diese ist zu mindest abhängig von der Anzahl der Zustandsvariablen n . Daher ist es notwendig, die Zustandsvariablen zu reduzieren, falls n zu groß ist. Man sollte beachten, dass die Dimension der Riccati-Gleichung (c-51c) nicht mehr n sondern $n + m$ ist, wobei m die Anzahl der Messgrößen darstellt. Ist m relativ groß, wird die Auflösung der Riccati-Gleichung immer schwerer, obwohl die Zustandsvariablen schon durch die Modellreduktion reduziert werden.

Weiterhin werden die Reglerparameter (A_c, B_c, C_c) durch das zu regelnde System (A, B, C), die Charakteristik des Rauschens (W und V oder R und B_d) und die Gewichtung (Q und R oder C_l und D_{l2}) eindeutig bestimmt. Eine Änderung oder Ungenauigkeit in den Systemparametern und Rauschcharakteristiken ändert die Charakteristik des geschlossenen Systems. Dies ist genau der andere große Nachteil des LQGs.

1.2.2. H^∞ -Reglerentwurf und μ -Synthese

Der große Nachteil des LQGs ist die fehlende Robustheit. Um diesen Nachteil zu bewältigen, versucht man die Unsicherheit (uncertainty) des Systems in den Entwurf einzubeziehen. Ein Regler wird durch das gegebene nominale Modell entworfen. Man versucht zu erklären, unter welchen Bedingungen und für eine wie große Unsicherheit das System unter Benutzung dieser Regler stabil bleiben wird und akzeptable Leistungen erreichen kann.

Um dies möglich zu machen, wird die unendliche Norm verwendet. Die quadratische Norm hat zahlreiche gute mathematische und numerische Eigenschaften. Jedoch ist die quadratische Norm keine induzierte Norm. So befolgt die quadratische Norm keine multiplikative Eigenschaft der induzierten Normen. D.h., die unendliche Norm erfüllt $\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty$, aber die quadratische Norm hat keine analoge Eigenschaft [SKO 96]. Diese Tatsache macht das Synthetisieren der Regler, die die unendliche Norm des geschlossenen Systems minimieren, attraktiv, wenn man am direkten loop shaping interessiert ist, um den an die Norm gebundenen Robustheitstest zu erfüllen.

Die Definition der unendlichen Norm ist in Gleichung (c-26) gegeben. Um diese Norm besser zu verstehen, nimmt man an, dass $\beta = \|T_{zw}\|_\infty$, wobei T_{zw} eine MIMO Übertragungsmatrix mit der Dimension $n_z \times n_w$ ist. Für jede Frequenz $\omega \in \mathbf{R}$, jeden Vektor der Amplitude $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n_w}$, und jeden Vektor der Phase $\phi \in \mathbf{R}^{n_w}$ definiert man ein Eingangssignal $\mathbf{w}(t)^T = [a_1 \sin(\omega t + \phi_1), \dots, a_{n_w} \sin(\omega t + \phi_{n_w})]$. Bei der Anwendung dieses Signals auf das System T_{zw} , resultiert ein stationäres Ausgangssignal in der Form $\mathbf{z}(t)^T = [b_1 \sin(\omega t + \psi_1), \dots, b_{n_z} \sin(\omega t + \psi_{n_z})]$, wobei

$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ ist. Dann ist $\|\mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{a}\|_2 \leq \beta$, und zwar ist β der kleinste Wert für alle \mathbf{a} , ϖ und ϕ .

Eine ausführliche Einführung in die Darstellung der Unsicherheit eines geregelten Systems und die D-K Iteration, ein Algorithmus für μ -Synthese, einschließlich des H^∞ -Reglerentwurf steht im Anhang C.11 zur Verfügung.

Es gibt einige theoretische Schwachpunkte des D-K Iterationsalgorithmus. Einer ist die Berechnung von μ . In der Gleichung (c-63), obwohl die untere Grenze von μ gleich μ ist, ist das maximale Problem nicht konvex [DOY 91], d.h. es gibt keine Garantie, ein globales Maximum zu finden. Auf der anderen Seite ist die obere Grenze konvex, aber sie ist nicht gleich μ . Der bekannte worst Case hat eine obere Grenze, die etwa 15% größer als μ ist [BAL 01]. Der andere Schwachpunkt ist der D-K Algorithmus selbst. Er gibt keine Garantie zu einem globalen, sogar lokalen Minimum zu konvergieren [STE 91].

Es gibt auch einige technischen Schwachpunkte dieses Algorithmus. Die Ordnung des durch diesen Algorithmus entworfenen Reglers ist normalerweise sehr hoch und dieser Regler ist in der Praxis ohne andere Maßnahmen kaum verwendbar. Die Ordnung dieses Reglers ist

$$\text{Ordnung}(\mathbf{K}) = \text{Ordnung}(\mathbf{P}) + 2 \sum_{i=1}^n \text{Ordnung}(\mathbf{D}_i)$$

wobei \mathbf{P} die verallgemeinerte Strecke am Anfang der Iteration ist, n die Dimension der Unsicherheitsmatrix Δ und \mathbf{D}_i die Gewichtungsmatrix des i -ten Blocks in Δ . Die Dimension von \mathbf{D} hängt von der Anzahl der Aktoren und Sensoren, sowie den Methoden der Darstellung der Systemunsicherheit ab. Wenn die Anzahl von Aktoren und Sensoren relativ groß ist, wird das Anpassen in Schritt 2 des D-K Iterationsalgorithmus sehr schwer.

Nun wird das gleiche Beispiel, das im Anhang C aufgeführt wird, benutzt, um den D-K Iterationsalgorithmus anzuwenden. Ein typisches mechanisches System

$$\frac{k_1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} + \frac{k_2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} + \frac{k_3}{s^2 + 2\zeta_3\omega_3s + \omega_3^2} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

soll geregelt werden, Die Parameter sind in Tabelle c-1 gegeben. Weiterhin werden jeweils $\pm 50\%$ Unsicherheit in ζ_i , ω_i und k_i angenommen. Daraus folgt etwa $\pm 80\%$ Unsicherheit für $2\zeta_i\omega_i$ und ω_i^2 . Die Regelstrecke $G_1(s)$ wird zu

$$G_1(s) = \frac{164.01(1 + 0.5\delta_k)}{s^2 + 75.625(1 + 0.8\delta_{2\zeta\omega})s + 1.8906 \times 10^5(1 + 0.8\delta_{\omega^2})}$$

$G_2(s)$ und $G_3(s)$ werden im Reglerentwurf vernachlässigt. Die parametrische Unsicherheit wird hier verwendet und damit hat die Unsicherheitsmatrix Δ die Form $\Delta = \text{diag}[\delta_k, \delta_{2\zeta\omega}, \delta_{\omega^2}]$.

Das Zielobjekt ist $z = W_p(r - y)$ und

$$W_p = \frac{(s^2 + 2 \times 0.2 \times 433s + 433^2) \times 0.01}{s^2 + 2 \times 0.2 \times 433s + 2}$$

Damit soll der stationäre Fehler kleiner oder gleich ± 0.0011 sein. Um die Bedingung (A2) zu erfüllen, benötigt man noch die Gewichtung für das Rauschen. Hier wird die Konstante 0.001 verwendet. Die verallgemeinerte Strecke hat 4 Zustandsvariablen, drei Ein- und Ausgänge für die Systemunsicherheit, einen Messausgang und einen Sollwert-Ausgang für den Regler, und je einen Eingang für Störung, Rauschen, Sollwert und Steuerung.

Weil die reale Unsicherheit im D-K Iterationsalgorithmus in der MATLAB μ -Toolbox nicht erlaubt ist [BAL 01], wird hier die einzelne komplexe Unsicherheit benutzt. Die Ergebnisse der D-K Iteration in Tabelle 1-1 zeigen, dass mit einem Regler der Ordnung 26 dieses System die robuste Regelgüte erreichen wird ($\mu < 1$).

Tabelle 1-1: Ergebnisse der D-K Iteration und der μ Wert des PID-Reglers

Iteration Nr.	1	2	3	4	5	PID
Ges. D Ordn.	0	6	6	24	22	
Reglerordnung	4	10	10	28	26	2
Erreichend γ	932.155	44.3171	2.9039	0.942	0.940	
Max. μ Wert	562.951	12.6496	1.3513	0.939	0.939	0.939

Die Simulationsergebnisse mit dem durch D-K Iteration entworfenem H^∞ -Regler für acht gestörte Systeme sind in Bild 1-2 und Tabelle 1-2 gezeigt. Bild 1-3 und Tabelle 1-3 zeigen entsprechende Ergebnisse mit dem im Anhang C.5 entworfenen PID-Regler. Der μ Wert des PID-Reglers mit gleicher Gewichtung W_p wird auch in Tabelle 1-1 gezeigt. Tabelle 1-4 zeigt die Bedeutung von G_{pi} .

Tabelle 1-2: Kennwerte des Verlaufs vom Bild 1-2.

	G_o	G_{p1}	G_{p2}	G_{p3}	G_{p4}	G_{p5}	G_{p6}	G_{p7}	G_{p8}
Fehler($t=\infty$)	-5.61e-5	-7.79e-5	1.45e-4	-7.79e-5	1.42e-4	-8.74e-5	-4.87e-5	-8.74e-5	-4.87e-5
$B_{\text{Übersch}}^*$	2.51e-6	1.99e-6	1.11e-4	1.98e-6	1.09e-4	1.92e-6	2.98e-6	1.91e-6	2.95e-6
$T_{\text{trans}}(\text{Sek})^*$	0.29271	0.26717	0.43330	0.26588	0.43239	0.25741	0.30258	0.25705	0.30212

$B_{\text{Übersch}}$: Überschwingungsamplitude; T_{trans} : Verlaufszeit bis innerhalb der $\pm 0.5\%$ Schranke.

Tabelle 1-3: Kennwerte des Verlaufs vom Bild 1-3.

	G_o	G_{p1}	G_{p2}	G_{p3}	G_{p4}	G_{p5}	G_{p6}	G_{p7}	G_{p8}
Fehler($t=\infty$)	-3.83e-7	-3.78e-7	-1.21e-6	-4.04e-7	-1.21e-6	-2.68e-7	-4.43e-7	-2.68e-7	-4.45e-7
$B_{\text{Übersch}}^*$	0.04823	0.20744	0.00035	0.19845	0.00033	0.08595	0.02502	0.09741	0.09741
$T_{\text{trans}}(\text{Sek})^*$	0.11618	0.13110	0.12643	0.12848	0.12495	0.12195	0.11763	0.12324	0.12324

$B_{\text{Übersch}}$: Überschwingungsamplitude; T_{trans} : Verlaufszeit bis innerhalb der $\pm 0.5\%$ Schranke.

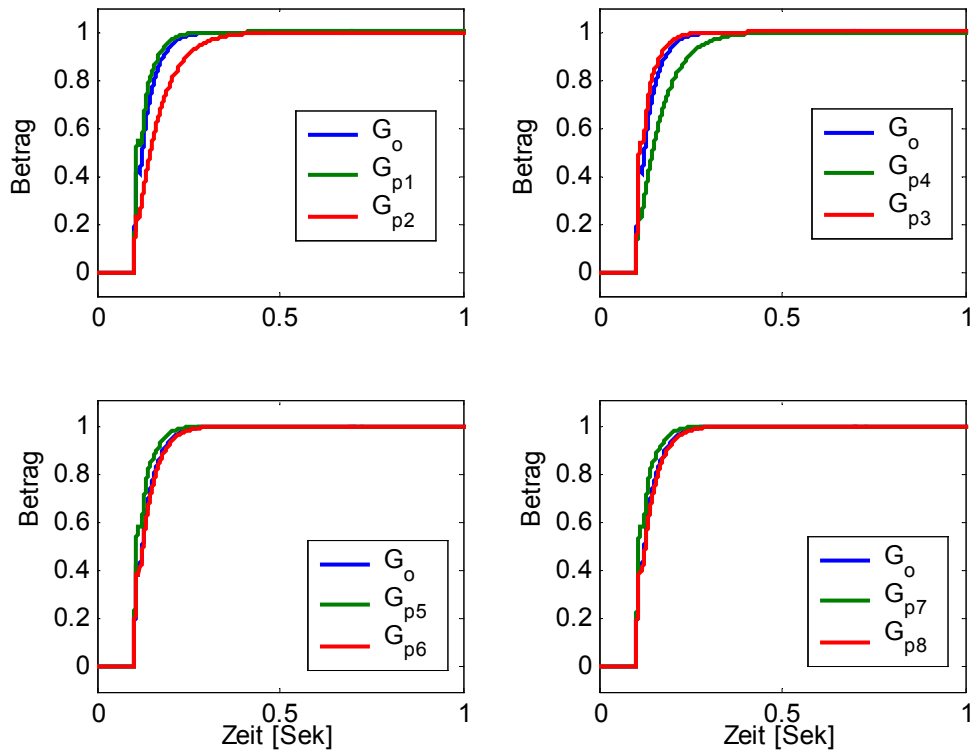


Bild 1-2: Der Verlauf des nominalen und gestörten Systems mit dem durch D-K Iteration entworfenen H^∞ -Regler.

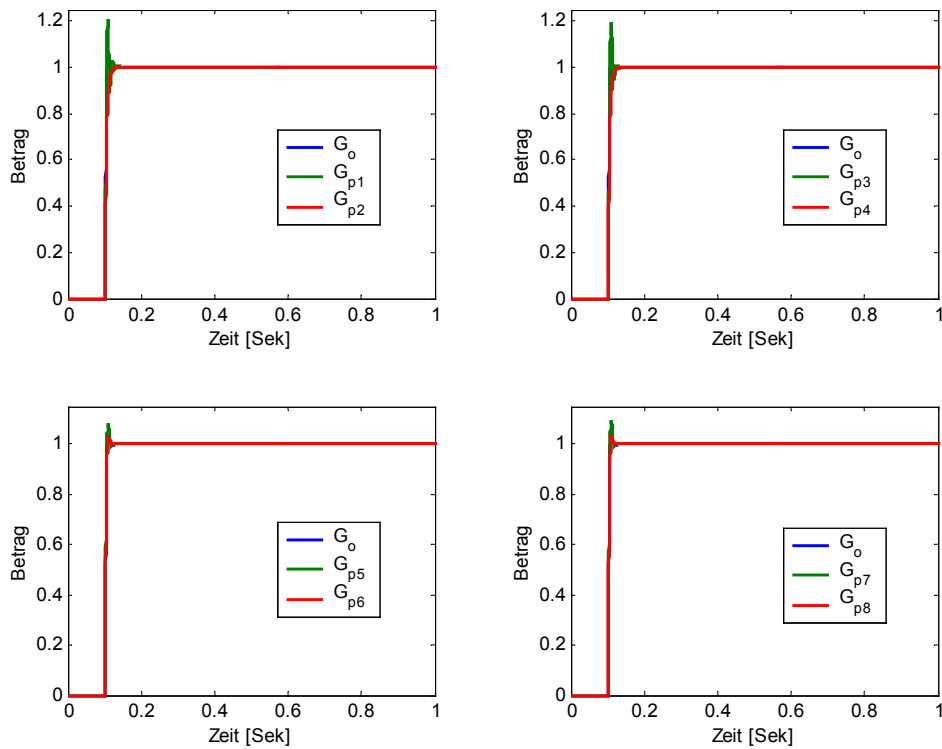


Bild 1-3: Der Verlauf des nominalen und gestörten Systems mit dem im Anhang C.5 entworfenen PID-Regler.

Tabelle 1-4: Das gestörte System.

	G_o	G_{p1}	G_{p2}	G_{p3}	G_{p4}	G_{p5}	G_{p6}	G_{p7}	G_{p8}
δ_k	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$\delta_{2\zeta\omega}$	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
δ_{ω^2}	0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
		G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3	G_2+G_3

Ein Vergleich beider Ergebnisse weist darauf hin, dass beide Regler eine vergleichbare Regelgüte erreichen können. Der PID-Regler ist schneller und genauer, hat aber ein höheres Überschwingen. Der H^∞ -Regler dagegen ist langsamer und ungenauer, zeigt aber kaum Überschwingen. Jedoch ist der PID-Regler (Ordnung 2) viel einfacher als der H^∞ -Regler (Ordnung 26). Hätte das geregelte System 5 Ein- und Ausgänge, und 2 Zustände, wäre der H^∞ -Regler zumindest von der Ordnung 58 (2 für Zustände, 2×5 für die Gewichtung, $2 \times 5 \times 3$ für 5 Unsicherheit δ_k und jeweils 2×4 für Unsicherheit $\delta_{2\zeta\omega}$ und δ_{ω^2}). Daher ist der H^∞ -Regler für eine relativ große Anzahl von Aktoren und Sensoren

1. nicht berechenbar und
2. nicht realisierbar.

1.2.3. Die dominante Methode

Wenn ein $m \times m$ Mehrgrößensystem diagonal ist, kann dieses System als m faches Eingrößensystem betrachtet und die Entwurfsmethode für Eingrößensysteme, z.B. der PID-Algorithmus, verwendet werden. In der Praxis ist dies normalerweise nicht der Fall. Wie kann das nicht diagonale System diagonalisiert werden? Muss das System wirklich diagonal sein, um die Entwurfsmethode für Eingrößensysteme zu verwenden?

In den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts hatte Rosenbrock[ROS 74] erstmals das Konzept der diagonalen Dominanz angewendet, um die Entwurfsmethoden für Eingrößensysteme auf Mehrgrößensysteme zu erweitern. Rosenbrock hatte folgendes System untersucht (s. Bild 1-4). Dabei ist F eine diagonale Verstärkungsmatrix und $Q(s) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Übertragungsfunktion des Systems, das aus der Strecke, dem Post- und Prekompensator besteht. Die abgeschlossene Übertragungsfunktion von r zu y ist

$$H(s) = R(s)^{-1} Q(s) \quad (1.2.3-1)$$

wobei $R(s) = (I + Q(s) F) = (F^{-1} + Q(s)) F = T(s) F$. Rosenbrock hatte gezeigt, dass das System $H(s)$ stabil wird, wenn

1. das System $t_{ii}(s)$ stabil ist und (1.2.3-2a)

$$2. d_r(s) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{|t_{ij}(s)|}{|t_{ii}(s)|} < 1 \text{ oder } d_c(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^m \frac{|t_{ij}(s)|}{|t_{jj}(s)|} < 1 \text{ für } s = j\omega \text{ und } \omega \in \mathbb{R} \quad (1.2.3-2b)$$

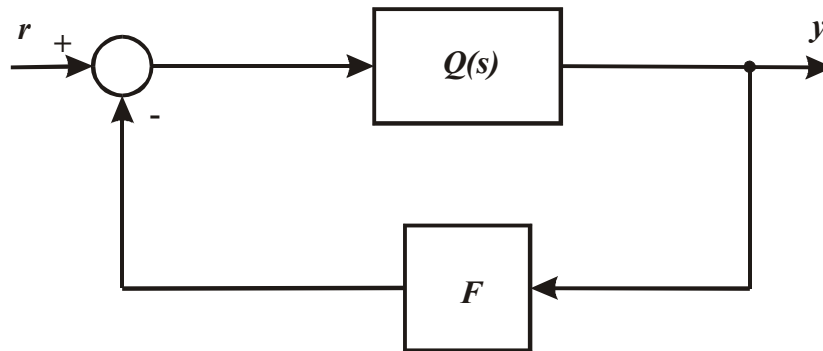


Bild 1-4: Das fundamentale rückgekoppelte System für die diagonale Dominanz

Die Bedingung (1.2.3-2b) heißt Zeilendiagonaldominanz (row diagonal dominant) bzw. Spaltendiagonaldominanz (column diagonal dominant). Später wurden mehr dominante Maße von Wissenschaftlern eingeführt, z. B. die M -matrix basierte Dominanz (d_M) bei Araki und Nwokah [ARA 75], die verallgemeinerte Dominanz (d_G) bei Limebeer [LIM 82] und die fundamentale Dominanz (d_F) und die L-Dominanz (d_L) bei Yeung and Bryant [YEU 92].

Wie kann man ein System dominant diagonalisieren? Die einfachste Methode ist eine Vertauschung des Pairs von Sensoren und Aktoren. Zum Beispiel hat ein 4×4 System bezüglich der Frequenz ω folgenden Wert

$$\mathbf{T}(j\omega) = \begin{bmatrix} 1.2 - 0.2j & 2.2 - 0.4j & 2.0 - 0.5j & 7.0 - 1.0j \\ -1.2 + 0.3j & 7.5 + 1.0j & 5.0 - 2.0j & 5.0 - 1.5j \\ 5.0 - 1.0j & 3.0 - 4.0j & 2.0 - 1.0j & 3.0 - 4.0j \\ 1.0 - 0.2j & 2.0 - 0.1j & 2.0 - 1.2j & 5.0 - 3.0j \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Spaltendominanz ist $d_c = [6.0464, 1.221, 4.3733, 2.9654]$. Nach der Definition (Gleichung 1.3.3-2) hat \mathbf{T} bezüglich der Frequenz ω keine diagonale Dominanz. Wenn man die Zeile 3 zur Zeile 1, Zeile 4 zur Zeile 3 und Zeile 1 zur Zeile 4 verschiebt, d.h. wenn man das Paar von Sensoren und Aktoren (s_1, a_1) , (s_3, a_3) und (s_4, a_4) zu (s_3, a_1) , (s_4, a_3) und (s_1, a_4) umordnet, wird die entsprechende Spaltendominanz $d_c = [0.68117, 1.221, 4.1515, 2.27]$. Nach dieser Vertauschung wird die erste Spalte von \mathbf{T} diagonal dominant sein. Obwohl die Restspalten nicht diagonal dominant sind, ist der dominante Wert immerhin verbessert.

Wenn durch die Vertauschung des Pairs von Sensoren und Aktoren die diagonale Dominanz nicht erreicht werden kann, kann man einen konstanten oder einen frequenzabhängigen Pre- und/oder Postkompensator einfügen. In [BRY 96] wird ein Algorithmus für den Prekompensator mit der Formel $\sum_{i=1}^p s^i \mathbf{K}^i$ angegeben.

Ein Vorteil der dominanten Methode ist die Dekomposition eines komplexen Systems zu mehreren einfachen Systemen, sodass die erfolgreichen Entwurfsmethoden der einfachen Systeme verwendet werden können. Der zweite Vorteil ist, dass die Modellreduktion hier nicht notwendig ist. Alle Berechnungen, Umordnung der Paare von Sensoren und Aktoren, Berechnung des Pre- und/oder Postkompensators und einschließlich der Regler, können in einem endlichen Frequenzbereich durchgeführt werden. Der Aufwand der Berechnung hängt nun nur noch von der Anzahl der Sensoren und Aktoren ab. Obwohl die Anzahl der Sensoren und Aktoren relativ groß ist, ist sie immer noch viel kleiner als die Anzahl der Zustandsvariablen. Der Nachteil ist auch offensichtlich. Durch den einfachen realisierbaren Pre- und/oder Postkompensator können nicht alle Systeme diagonalisiert werden. Obwohl das System diagonalisiert werden kann, ist der Entwurfsvorgang immer aufwendig, wenn die Anzahl von Sensoren und Aktoren relativ groß ist.

1.3. Ziel dieser Arbeit

Die Analyse zeigt, dass sowohl die vorhandene Modellreduktionstechnik als auch die übliche Regelungstechnik für Aufgaben der Formkontrolle wegen der großen Anzahl der benötigten Aktoren und Sensoren nicht gut geeignet ist. Das Problem besteht darin, dass die bekannten Modellreduktionstechniken nur die Anzahl der Freiheitsgrade reduzieren können.

Die Datenverdichtungstechnik, die in der Telekommunikation und in der Bildverarbeitung weitgehend Verwendung findet, bietet die Möglichkeit, die Redundanz zu verringern oder die wichtigen Informationen von den ursprünglichen Daten zu extrahieren. Unter Verwendung der Datenverdichtung könnten die großen Mengen von Soll- und Istdaten, die um die Form zu beschreiben und zu steuern verwendet werden, beträchtlich reduziert werden. Im reduzierten Datenraum soll der Regelalgorithmus realisiert werden. Die vielen Stellgrößen, die für eine genaue Formeinstellung benötigt werden, sollen aus relativ wenigen Zustandsvariablen, die durch den Regelalgorithmus berechnet werden, erzeugt werden. Hier ergibt sich das zur Datenverdichtung inverse Problem: Erweiterung. Die daraus resultierende allgemeine Struktur für den geschlossenen Regelkreis findet man in Bild 1-5.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die geeignete Reduzierung und Erweiterung zur Realisierung der Datenreduktion in adaptiven mechanischen Systeme zu finden. Durch diese Reduktion und Erweiterung sollte der Reglerentwurf im reduzierten Raum vereinfacht werden. Der Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit und Stabilität des geschlossenen Regelkreises sollen detailliert untersucht werden.

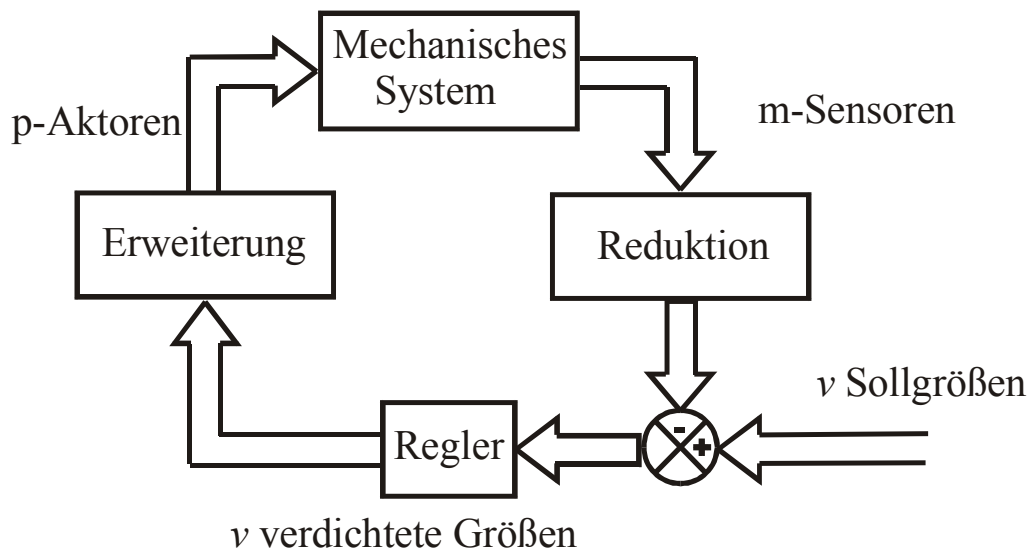


Bild 1-5: Adaptives mechanisches System mit Datenreduktion und -erweiterung

Mit anderen Worten sollen die Reduktions- und Erweiterungsmethoden die stationäre Genauigkeit und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht gefährden. Weiterhin wird der Einfluß der Modellfehler auf Reduktion und Erweiterung diskutiert. Der Reglerentwurf im verdichteten Datenraum ist nicht Hauptaufgabe dieser Arbeit. Jedoch wird eine Methode angegeben, die gewährleistet, dass der im reduzierten Raum entworfene Regler das originale abgeschlossene System stabilisiert. Schließlich wird ein einfacher Reglerentwurf als Beispiel aufgezeigt.

2. Verfahren der Datenreduktion und ihre Eignung

Eine schematische Darstellung eines adaptiven mechanischen Systems ist in Bild 2-1 gezeigt. Ein adaptives mechanisches System besteht aus einem mechanischen Grundkörper, auf dem die Sensoren (Sensorfeld) und Aktoren (Aktorfeld) angeordnet sind. Ein Regelsystem ermöglicht die Anpassung des adaptiven mechanischen Systems an veränderte Umweltbedingungen (Formbeeinflussung, Vibration u.ä.). Wird jeder Sensor/Aktor als ein Pixel betrachtet, können das Sensorfeld und das Aktorfeld als ein Bild angesehen werden. Viele Datenreduktionsalgorithmen (Kompressionsalgorithmen) aus der Bildverarbeitung und Kommunikationstechnik können hier möglicherweise verwendet werden. Man sollte aber beachten, dass die Randbedingungen der Datenreduktion im adaptiven mechanischen System andere als in der Bildverarbeitung sind. Eine Anforderung ist vor allem, dass die mathematischen Operationen auch im komprimierten Raum erlaubt werden sollen. k sei ein Kompressionsalgorithmus. a , b und c sind das zu komprimierende Bild, dann sollte gelten:

$$k(c) = k(\alpha a + \beta b) = \alpha k(a) + \beta k(b) \quad (2-1a)$$

zusätzlich sollte für den differentiellen und integralen Operator gelten

$$k(c) = k(\alpha \text{ op } a) = \alpha \text{ op } k(a) \quad (2-1b)$$

wobei α und β beliebige Faktoren sind. Zumindest sollten keine großen Abweichungen in den Gleichungen (2-1a) und (2-1b) auftreten.

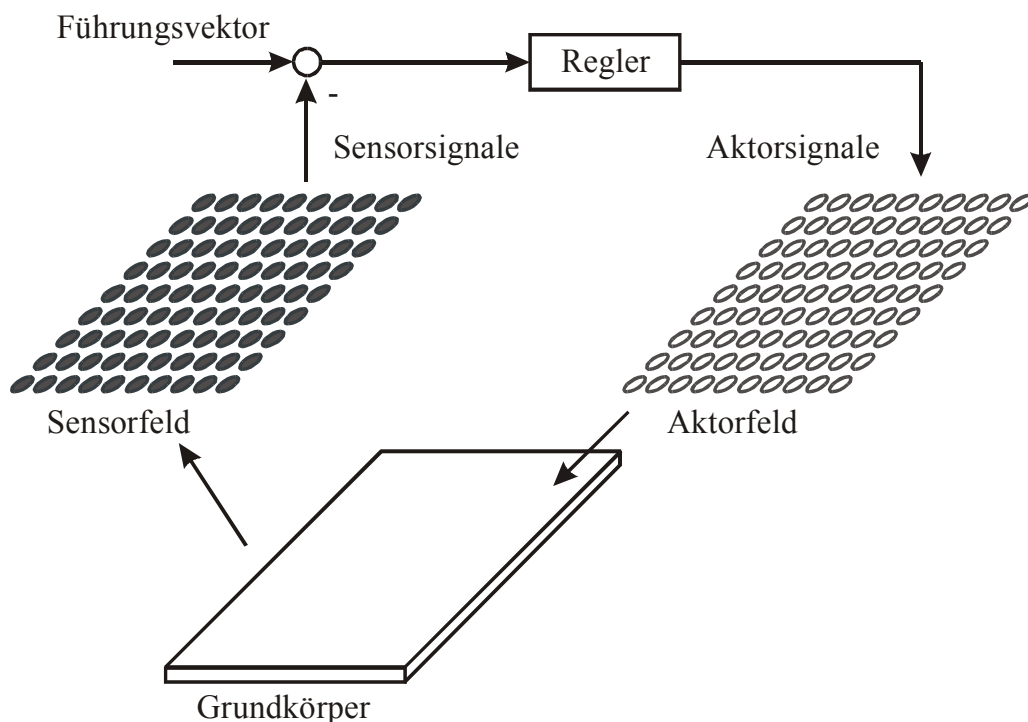


Bild 2-1: Eine schematische Darstellung eines adaptiven mechanischen Systems

2.1. Grundcodierung in der Datenkompression

Um den Datenkompressionsalgorithmus in der Bildverarbeitung besser zu verstehen, werden zunächst die Grundlagen der Codierung in der Datenkompression erörtert.

2.1.1. Lauflängen-Codierung (Run Length Encode)

Die Idee dieses Ansatzes ist sehr einfach [SAL 00]: Falls ein Datenelement d nacheinander n Mal im Eingabefluss auftritt, werden die n vorkommenden Datenelemente durch ein Paar $n d$ ersetzt. Die n -mal nacheinander vorkommenden Datenelemente heißen eine laufende Länge von n , und dieser Ansatz zur Datenkompression heißt Lauflängen-Codierung (RLE).

Bei der wirklichen Verwendung sollte man einige Dinge beachten. Zunächst ist die Frage, wie man die laufende Länge n von den Datenelementen unterscheidet? Häufig wird ein Präfix, z.B. @, gesucht, das selten oder nie im Eingabefluss eintritt, und das Paar $n d$ wird durch $@ n d$ ersetzt. Dass aufeinander folgende Daten exakt gleich sind, ist zwar meist selten, bei korrelierten Prozessen sind die Differenzen jedoch gering. Dann kann eine Schranke einer bestimmten Größe gesetzt werden. Wenn die Differenz zwischen nacheinander kommenden Daten innerhalb der Schranke liegt, werden diese zwei Datenelemente als „gleich“ betrachtet. Dieser Vorgang wird als Quantisierung bezeichnet. In den folgenden zwei Beispielen sind die möglichen Datenelemente im Eingabefluss die Ziffern 1 bis 5. @ wird als Präfix benutzt. Im ersten Beispiel ist die Schranke gleich Null und im zweiten Beispiel ± 1 .

(1) 1 4 4 4 4 3 2 2 2 2 5 3 2 3 2 2 3 4 \Rightarrow 1 @ 4 4 3 @ 4 2 5 3 2 3 2 2 3 4

(2) 1 4 4 4 4 3 2 2 2 2 5 3 2 3 2 2 3 4 \Rightarrow 1 @ 5 4 @ 4 2 5 @ 7 3

Original

komprimiert

Es wird deutlich, dass RLE die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllen wird.

2.1.2. Golombscher Code

Der Golombsche Code wurde in der 60er Jahren des letzten Jahrhunderts von Golomb [GOL 66] entwickelt. Der Golombsche Code codiert eine ganze Zahl n in 3-Tupel, (q, r, b) . b ist ein fest ausgewählter Parameter,

$$q = \left\lfloor \frac{n-1}{b} \right\rfloor \text{ und } r = n - qb - 1 \quad (2.1-1)$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die kleinste ganze Zahl von x ist. Z. B. ist $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$. Da b fest ist, muss man nur (q, r) zu codieren. Die Codierung besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist der Wert von $q+1$, der unär codiert wird, und der zweite Teil, der binäre Wert von r wird entweder in $\lfloor \log_2 b \rfloor$ Bits (für kleine Reste) oder in $\lceil \log_2 b \rceil$ Bits (für große Reste) codiert, wobei $\lceil x \rceil$ die größte ganze Zahl von x ist. Z. B. ist $\lceil 1.2 \rceil = 2$. Eine unäre Codierung einer ganzen Zahl, n , ist $n-1$

eins folgt bei einer null oder umgekehrt $n-1$ null folgt bei einer eins. Z. B. ist die unäre Codierung von 4 1110 oder 0001. Wählen wir $b = 3$, erzeugt den möglichen Rest 0, 1, und 2. Diese Zahlen werden mit 0, 10 bzw. 11 codiert. Wählen wir $b = 5$, erzeugen die 5 Reste von 0 bis 4, die mit 00, 01, 100, 101 bzw. 110 codiert werden. Einige Beispiele der Golombschen Codierung mit $b = 3$ und $b = 5$ werden in Tabelle 2-1 gezeigt.

Tabelle 2-1: Einige Golombsche Codes für $b = 3$ und $b = 5$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b = 3$	0 0	0 10	0 11	10 0	10 10	10 11	110 0	110 10	110 11	1110 0
$q+1 r$	1 0	1 1	1 2	2 0	2 1	2 2	3 0	3 1	3 2	4 0
$b = 5$	0 00	0 01	0 100	0 101	0 110	10 00	10 01	10 100	10 101	10 110
$q+1 r$	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	2 0	2 1	2 2	2 3	2 4

Codiert man die Zahlen 1 bis 10 durch 4 Bit je Zahl, benötigt man 40 Bit für die Darstellung von 1 bis 10, während 38 Bit der Golombsche Code für $b = 3$ benötigt und 41 Bit für $b = 5$. Damit spielt die Wahl des Parameters b eine wichtige Rolle, ob die Golombsche Codierung die Daten komprimiert oder expandiert.

$P(n) = (1-p)^{n-1} p$ für einige $0 \leq p \leq 1$ ist die Wahrscheinlichkeit der ganzen Zahl n , die im Eingabefluss auftritt. Der Golombsche Code ist ein optimaler Code für diese Daten, wenn b so ausgewählt ist, dass

$$(1-p)^b + (1-p)^{b+1} \leq 1 < (1-p)^{b-1} + (1-p)^b \quad (2.1-2)$$

Aus der Tabelle 2-1 ist es deutlich, dass die Golombsche Codierung die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllen wird.

2.1.3. Huffman-Codierung

Die Idee der Huffman-Codierung [HUF 52] besteht darin, dass häufig vorkommende Datenelemente durch kürzere Codes und selten vorkommende Datenelemente mit längeren Codes codiert werden. Die Huffman-Codierung ist die beste Codierung bei variabler Codelänge, wenn die Wahrscheinlichkeit der vorkommenden Datenelemente eine negative Potenz von 2 ist.

Die Methode beginnt mit der Aufstellung einer Liste mit allen vorkommenden Datenelementen in absteigender Folge ihrer Wahrscheinlichkeiten. Dann wird ein Baum mit einem Datenelement an jedem Blatt von unten nach oben konstruiert. Dies wird schrittweise fortgeführt, indem zwei Datenelemente mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten vorgewählt, in den oberen Teil des Baums hinzugefügt, aus der Liste gelöscht und durch ein Hilfselement ersetzt werden. Wenn die Liste auf gerade ein Hilfselement verringert wurde, ist der Baum komplett. Der Baum wird dann durchgelaufen, um den Code des Datenelements festzustellen. Bild 2-2 in der nächsten Seite zeigt diesen Vorgang durch ein Beispiel.

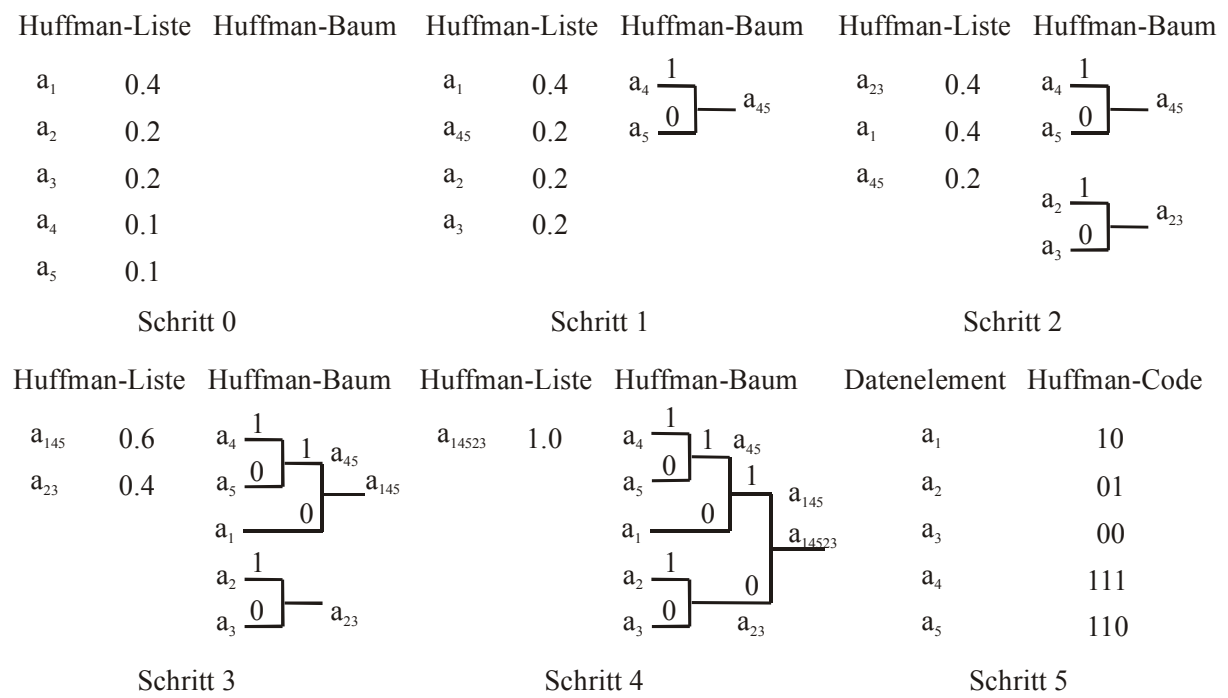


Bild 2-2: Der Vorgang der Huffman-Codierung

Der Huffman-Code ist ein nicht eindeutiger Code. Zum Beispiel ist das Komplement des Codes in Bild 2-2 auch der Huffman-Code. Der Huffman-Code ist kontextabhängig. Für die gleichen Datenelemente mit unterschiedlichem Eingabefluss ist die Huffman-Codierung unterschiedlich. Damit wird die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllt.

2.1.4. Arithmetische Codierung

Die Huffman-Codierung ist nur die beste Codierung der variablen Codelänge, wenn die Wahrscheinlichkeit der vorkommenden Datenelemente eine negative Potenz von 2 ist. Der Grund ist, dass die Huffman-Codierung einen Code mit einer integralen Anzahl von Bits jedem vorkommenden Datenelement zuweist. Bei einem Datenelement mit der Wahrscheinlichkeit von 0.4 werden bei einem Huffman-Code 1 oder 2 Bit zugewiesen, weil $-\log_2(0.4) \approx 1.32$. Idealerweise sollte einem Code 1.32 Bit zugewiesen werden, aber dies ist unmöglich.

Die arithmetische Codierung überwindet dieses Problem durch die Zuweisung eines Codes zu einer Folge von Datenelementen statt zu einem einzelnen Datenelement [SAL 00]. In der arithmetischen Codierung soll die Wahrscheinlichkeit der vorkommenden zu komprimierenden Datenelemente näherungsweise bekannt sein. Eine Tabelle mit allen möglichen zu komprimierenden Datenelementen und ihren Wahrscheinlichkeiten soll wie Tabelle 2-2 erstellt werden. Der Codierungsvorgang beginnt mit der Definition zweier Variable L und H, und sie werden zunächst zu 0 bzw. 1 gesetzt. Wenn ein Datenelement vorkommt, werden die Werte von L und H durch

$$\text{newH} = \text{oldL} + (\text{oldH} - \text{oldL}) \times \text{HighRange}(X)$$

$$\text{newL} = \text{oldL} + (\text{oldH} - \text{oldL}) \times \text{LowRange}(X)$$

aktualisiert, wobei X das zu komprimierende Datenelement ist. Die Werte von LowRange und HighRange sind in den Spalten 3 und 4 der Tabelle 2-2 aufgelistet.

Tabelle 2-2: Zu komprimierende Datenelemente und ihre Wahrscheinlichkeit

Datenelement	Wahrscheinlichkeit	LowRange	HighRange
a_1	0.5	0.5	1.0
a_2	0.1	0.4	0.5
a_3	0.2	0.2	0.4
a_4	0.1	0.1	0.2
a_5	0.1	0	0.1

Die kürzeste binäre Darstellung des Werts zwischen L und H nach dem Einlesen aller zu komprimierenden Datenelemente ist der arithmetische Code der ganzen Datenelemente. Tabelle 2-3 zeigt ein Beispiel mit 5 möglichen Datenelementen mit a_1 bis a_5 und einem Eingabefluss $a_1a_2a_3a_1a_1a_4a_3a_1a_1$. Das Ergebnis ist $(0.)1011011111010101_2$ (0.718092872_{10}).

Tabelle 2-3: Der Vorgang der arithmetischen Codierung

Datenelement	Die Berechnung der Werte von L und H	
a_1	L	$0.0 + (1.0 - 0.0) \times 0.5 = 0.5$
	H	$0.0 + (1.0 - 0.0) \times 1.0 = 1.0$
a_2	L	$0.5 + (1.0 - 0.5) \times 0.4 = 0.7$
	H	$0.5 + (1.0 - 0.5) \times 0.5 = 0.75$
a_3	L	$0.7 + (0.75 - 0.7) \times 0.2 = 0.71$
	H	$0.7 + (0.75 - 0.7) \times 0.4 = 0.72$
a_1	L	$0.71 + (0.72 - 0.71) \times 0.5 = 0.715$
	H	$0.71 + (0.72 - 0.71) \times 1.0 = 0.72$
a_1	L	$0.715 + (0.72 - 0.715) \times 0.5 = 0.7175$
	H	$0.715 + (0.72 - 0.715) \times 1.0 = 0.72$
a_3	L	$0.7175 + (0.72 - 0.7175) \times 0.2 = 0.7180$
	H	$0.7175 + (0.72 - 0.7175) \times 0.4 = 0.7185$
a_4	L	$0.7180 + (0.7185 - 0.7180) \times 0.1 = 0.71805$
	H	$0.7180 + (0.7185 - 0.7180) \times 0.2 = 0.71810$
a_1	L	$0.71805 + (0.71810 - 0.71805) \times 0.5 = 0.718075$
	H	$0.71805 + (0.71810 - 0.71805) \times 1.0 = 0.718100$
a_1	L	$0.718075 + (0.718100 - 0.718075) \times 0.5 = 0.7180875$
	H	$0.718075 + (0.718100 - 0.718075) \times 1.0 = 0.7181000$

Wie der Huffman-Code ist der arithmetische Code ein kontextabhängiger Code. Für die gleichen Datenelemente im unterschiedlichen Eingabefluss ist die arithmetische Codierung auch unterschiedlich. Damit wird die Bedingung der Gleichung (2-1a,b) nicht erfüllt.

2.2. Datenkompression in der Bildverarbeitung

Es gibt mehrere Methoden für die Bildkompression. In [SAL 00] werden über 30 Methoden angegeben. Manche sind verlustfrei, manche sind verlustbehaftet. Manche sind für die Grauwertbilder und die Bilder mit kontinuierlichem Grauwert geeignet, manche sind für die binären Bilder oder die Bilder mit diskretem Grauwert geeignet. In dieser Arbeit werden nur die

Grauwertbilder und die Bilder mit kontinuierlichem Grauwert betrachtet. Anhand unserer Anforderung, dass die mathematischen Operationen im komprimierten Raum erlaubt werden sollten, wird die Bedingung in der Gleichung (2-1) für jede erörterte Methode geprüft.

2.2.1. Bildkompression mit RLE

Die Komprimierung eines Bildes mit RLE basiert auf der folgenden Beobachtung: wenn man ein Pixel in einem Bild zufällig auswählt, gibt es eine gute Chance, dass seine Nachbarn einen gleichen oder ähnlichen Wert haben werden [SAL 00]. Der Kompressor scannt das Bild und codiert die wiederholten Pixel als ein Paar (Lauflänge, Pixelwert). Die mögliche Scannweise wird in Bild 2-3 verdeutlicht. Z.B. startet ein Bild von 8-Bit Grauwerten mit

12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,35,76,112,67,87,87,87,5,5,5,5,5,1,....

und wird zu 9,12,35,76,112,67,3,87,6,5,1,.... komprimiert, wobei die Ziffern mit der Unterstreichung die Lauflänge sind.

Nun stellt sich die Frage, wie man Lauflänge und Pixelwert unterscheidet? Dies hängt davon ab, wie tief der Grauwert ist. Falls der Grauwert von 0-127 oder der maximale Grauwert größer als 255 ist, kann er mit maximalem Grauwert + Lauflänge als Lauflänge dargestellt werden. Z.B. wird obiges Beispiel

136,12,35,76,112,67,130,87,133,5,1,....

wenn der maximale Grauwert gleich 127 ist, oder

0x1009,0x000c,0x0023,0x004c,0x0070,0x0043,0x1003,0x0057,0x1006,0x0005,0x0001,....

wenn der maximale Grauwert gleich 4095 ist. Hier wird die Zahl hexadezimal dargestellt, um dies deutlich zu zeigen. Wenn der maximale Grauwert gleich 255 ist, wird der Grauwert um 1 reduziert und der Wert 255 als Präfix benutzt. Dann wird obiges Beispiel

255,9,12,35,76,112,67,255,3,87,255,6,5,1,....

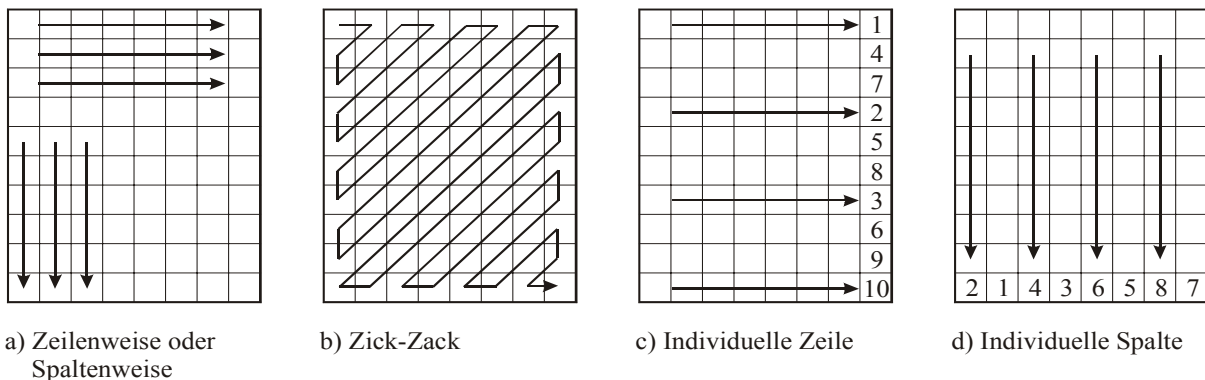


Bild 2-3: Das Scannen der RLE

Da die Komprimierung hier nur durch die RLE erreicht wird und die RLE die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllt, dürfen die mathematischen Operationen (+ und -) in der komprimierten Domäne nicht durchgeführt werden.

2.2.2. Vektorquantisieren

Beim Vektorquantisieren wird ein gegebenes Bild in kleine Blöcke von Pixeln, normalerweise 2×2 oder 4×4 , geteilt. Jeder Block wird durch einen Vektor dargestellt. Der Kompressor beinhaltet eine Liste (Codebuch) des Vektors und komprimiert jeden Block durch den Index des Blocks im Codebuch.

Im Fall des 2×2 Blocks besteht jeder Block aus 4 Pixeln. Wenn jedes Pixel k Bit hat, ist jeder Block von $4k$ Bit Länge, und es gibt 2^{4k} verschiedene Blöcke. Ebenfalls ist der Index des Codebuchs, durch welchen der Block ersetzt wird, von $4k$ Bit Länge. Weshalb ist das eine Kompression? Tatsache ist, dass irgendein Bild nie alle möglichen Blöcke enthalten wird. Für 8 Bit Pixel ist die Anzahl der 2×2 Blöcke 2^{32} , aber alle bestimmten Bilder beinhalten vielleicht nur ein paar tausend unterschiedliche Blöcke. Der Index des Codebuches benötigt deshalb maximal 14 Bit statt 32 Bit Länge.

Es gibt viele Algorithmen[LIN 80] [CON 94a,b], die dieses Prinzip verwenden und das Bild komprimieren. Aber sie werden nicht weiter erörtert. Wir interessieren uns hier vor allem dafür, ob die mathematischen Operationen in der komprimierten Domäne durchgeführt werden dürfen, d.h. ob die Bedingung der Gleichung (2-1a,b) erfüllt ist. Beim Vektorquantisieren wird der Pixelblock durch den Index des Blocks im Codebuch ersetzt. Es gibt vielleicht die Möglichkeit, das Codebuch so zu organisieren, dass es für den bestimmten Faktoren α und β die Bedingung der Gleichung (2-1a) erfüllt; aber das ist für beliebige α und β unmöglich.

2.2.3. Block-Matching

Beim Block-Matching wird ein Bild in kleine Blöcke von z.B. 4×4 Pixeln unterteilt [STO 97]. Der Kompressor beinhaltet ein Fenster zum Eingabefluss der Pixelblöcke und verschiebt eine Reihe von Pixelblöcken, in dem Fenster von rechts nach links, während das Bild komprimiert wird. Das Fenster ist in zwei Teile geteilt. Der Teil auf der linken Seite heißt der Suchpuffer. Er enthält immer die Blöcke, die schon komprimiert worden sind. Der Teil auf rechten Seite heißt voraussehender Puffer. Er enthält die Blöcke, die noch nicht bearbeitet worden sind.

Der Kompressor nimmt den am weitesten links liegenden Block im voraussehenden Puffer als aktuellen Block und sucht rückwärts eine Übereinstimmung im Suchpuffer. Falls keine Übereinstimmung gefunden wird, werden ein Merkmal $(0, 0)$ und selbiger Block als Code ausgegeben und das Fenster wird nach rechts um einen Block verschoben. Falls eine Übereinstimmung gefunden ist, werden der Abstand, d , zwischen dem aktuellen Block und der Übereinstimmung und die Länge, n , der Übereinstimmung als ein Merkmal oder Code (d, n) ausgegeben und das Fenster wird n Blöcke nach rechts verschoben.

Bild 2-4 zeigt ein Beispiel. Im Bild 2-4 werden die 4x4 Pixelblöcke wegen der Einfachheit durch Buchstaben dargestellt. Die gleichen Buchstaben bedeuten die gleichen Blöcke. Bild 2-5 zeigt die mögliche Scannweise des Block-Matching.

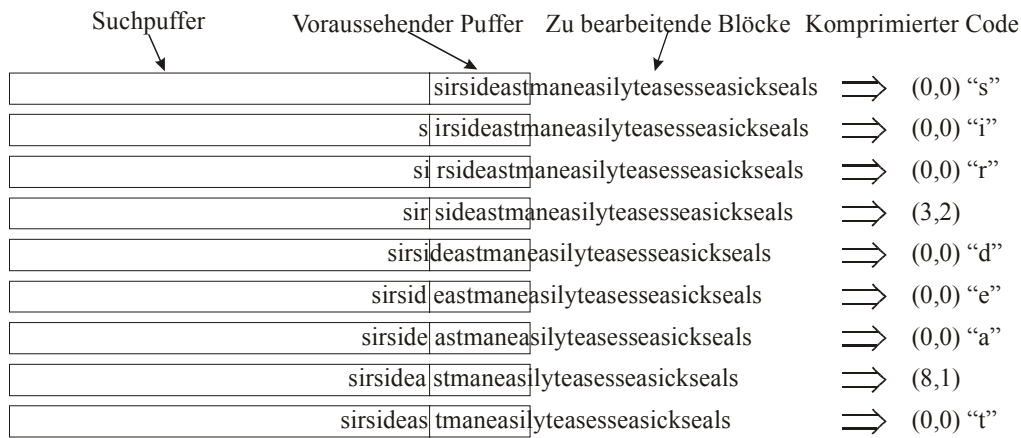


Bild 2-4: Das Beispiel für Block-Matching

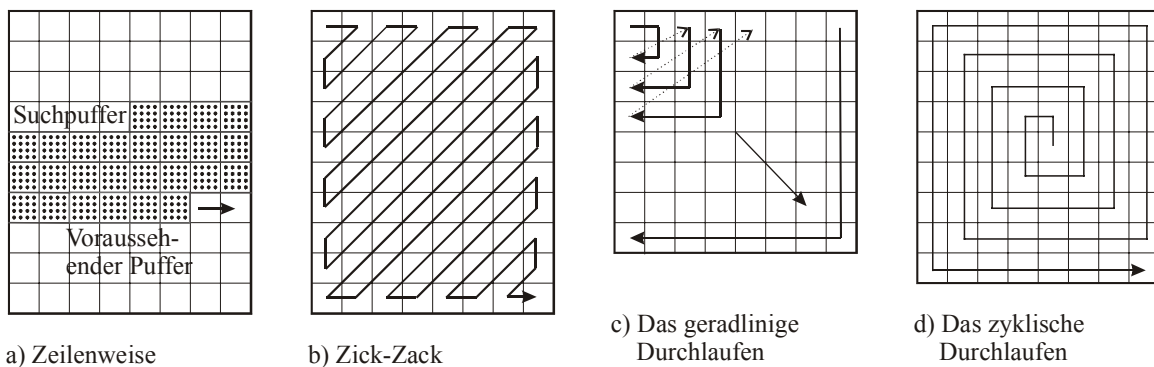


Bild 2-5: Das Scannen für Block-Matching

Sind die mathematischen Operationen in der komprimierten Domäne des Block-Matching Codierens erlaubt? Im Prinzip ja, aber nicht direkt. Man kann zunächst die passenden Blöcke finden und die Operation auf den Blöcken durchführen. Dann muss man feststellen, ob das Ergebnis, neuer Block, bereits vorgekommen ist. Wenn nein, werden das Merkmal (0,0) und der neue Block als der neue komprimierte Code ausgegeben, wenn ja, wird zunächst das Merkmal (d,n) berechnet und dann als der neue komprimierte Code ausgegeben. Dieser Vorgang ist komplizierter als der Vorgang, beide Operanden zunächst zu dekomprimieren, dann die Operation durchzuführen und schließlich wieder zu komprimieren. Damit ist die Bedingung der Gleichung (2-1a,b) für Block-Matching praktisch auch nicht erfüllt.

2.2.4. Block-Rundungs-Codierung (Block Truncation Coding (BTC))

Das Prinzip der BTC-Methode besteht darin, die Pixel in einem Bild zu quantisieren, während die ersten zwei oder drei statistischen Momente erhalten werden. In der grundlegenden BTC wird das Bild normalerweise in 4x4 oder 8x8 Pixelblöcke geteilt [DAS 95]. Die ersten zwei

Momente sind der Erwartungswert und die Varianz, und werden definiert als

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{bzw.} \quad \overline{p^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^2 \quad (2.2-1)$$

wobei n die Anzahl der Pixel im Block ist und p_i der Grauwert des jeweiligen Pixels. Die Streuung des Blocks ist

$$\sigma = \sqrt{\overline{p^2} - \bar{p}^2} \quad (2.2-2)$$

Das Prinzip der Quantisierung besteht darin, drei Werte zu wählen: eine Schwelle p_{thr} , einen großen Wert p^+ und einen kleinen Wert p^- . Jedes Pixel wird entweder durch p^+ oder p^- ersetzt, so dass die ersten zwei Momente der neuen Pixel gleich dem originalen Moment des Pixelblocks sind. Die Regel der Quantisierung ist, dass ein Pixel p_i zu p^+ quantisiert wird, falls es größer oder gleich der Schwelle ist, und zu p^- quantisiert wird, falls er kleiner als die Schwelle ist.

$$p_i \leftarrow \begin{cases} p^+, & p_i \geq p_{thr} \\ p^-, & p_i < p_{thr} \end{cases} \quad (2.2-3)$$

Es ist klar, dass der Erwartungswert \bar{p} eine Wahl für die Schwelle ist. Der große und kleine Wert, p^+ bzw. p^- können aus den Gleichungen, welche die ersten zwei Momente enthalten, berechnet werden. Diese Gleichungen sind

$$n\bar{p} = n^- p^- + n^+ p^+, \quad \overline{p^2} = n^- (p^-)^2 + n^+ (p^+)^2 \quad (2.2-4)$$

wobei n^+ die Anzahl der Pixel, die größer oder gleich der Schwelle ist und n^- die Anzahl der Pixel, die kleiner als die Schwelle ist. Natürlich ist $n^+ + n^-$ gleich n . Die Lösungen der Gleichungen (2.2-4) sind

$$p^- = \bar{p} - \sigma \sqrt{\frac{n^+}{n^-}}, \quad p^+ = \bar{p} + \sigma \sqrt{\frac{n^-}{n^+}} \quad (2.2-5)$$

Diese Lösungen sind im allgemeinen reelle Zahlen, aber sie müssen zunächst auf eine ganze Zahl gerundet werden. Daraus folgt, dass der Erwartungswert und die Varianz des quantisierten Blocks etwas von Original abweichen können.

Der neu quantisierte Block enthält nur zwei Werte, p^+ und p^- . Damit kann, z. B., ein 4×4 Block mit k Bit Grauwerten zu zwei k Bit Grauwerten, p^+ und p^- , und eine 16 Bit Zahl komprimiert werden, wobei Bit 1 und Bit 0 die Position des Werts p^+ bzw. p^- im quantisierten Block entspricht. Der Kompressionsfaktor ist

$$\frac{kn}{n + 2k}$$

Ein Beispiel: der originale 4×4 Block mit 8 Bit Grauwerten ist

$$\begin{pmatrix} 117 & 7 & 17 & 34 \\ 115 & 44 & 25 & 25 \\ 51 & 102 & 25 & 2 \\ 112 & 1 & 75 & 93 \end{pmatrix}$$

der Erwartungswert ist $\bar{p} = 52.81$, so ist $n^+ = 6$ und $n^- = 10$. Die Streuung ist $\sigma = 41.40$, und der große und kleine Wert sind $p^+ = 106.26$ bzw. $p^- = 20.74$. Nach dem Runden bekommen der große und kleine Wert $p^+ = 106$ bzw. $p^- = 21$. Der originale 4×4 Block wird zu einer 16 Bit Zahl

$1000100001001011_2 = 34891_{10} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und zwei Werte 21 und 106 komprimiert.

Da der Quantisierungsschritt (Gleichungen (2.2-2) und (2.2-5)) nicht linear ist, ist bei der BTC-Methode die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllt.

2.2.5. FELICS

FELICS ist eine Abkürzung aus Fast Efficient Lossless Image Compression System [HOW 93]. Es handelt sich hierbei um eine spezielle Kompressionsmethode für Grauwertbilder. Das Prinzip von FELICS besteht darin, jeden Pixel mit einem Code variabler Länge zu codieren. Die Länge des Codes hängt von zwei vorher vorgekommenen Nachbarn ab. Bild 2-6 zeigt die zwei bekannten Nachbarn A und B von einigen Pixeln P.

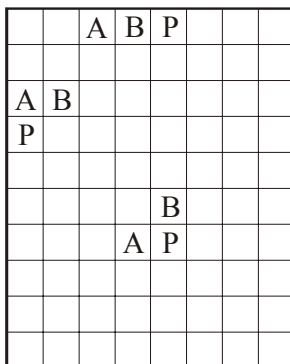


Bild 2-6: Die zwei Nachbarn

Für einen allgemeinen Pixel sind die Nachbarn sein oberer und linker Pixel. Für einen Pixel in der obersten Zeile sind die Nachbarn seine zwei linken Pixel. Für einen Pixel in der ersten Spalte sind die Nachbarn die ersten zwei Pixel seiner oberen Zeile. Die ersten zwei Pixel haben keine vorkommenden Nachbarpixel und damit werden sie nicht komprimiert.

Nun betrachtet man die zwei Nachbarn A und B vom Pixel P. Hier werden sowohl drei Pixel als auch seine Grauwerte durch A, B und P dargestellt. L und H ist der kleinere bzw. der größere Nachbar, $L = \min(A,B)$ und $H = \max(A,B)$. Pixel P sollte einen Code mit der variablen Länge bekommen, der davon abhängt, wo P relativ zu L und H liegt. Es gibt grundsätzlich drei Fälle: P liegt zwischen L und H, P ist kleiner als L, oder P ist größer als H.

Falls P zwischen L und H liegt, bekommt P einen Code, der mit 0 startet. Drei ganze Zahlen, k , a und b , werden berechnet durch

Falls P kleiner als L ist, bekommt P einen Code, der mit 100 beginnt. Falls P größer als H ist, bekommt P einen Code, der mit 101 beginnt.

$$k = \lfloor \log_2(H - L + 1) \rfloor, \quad a = 2^{k+1} - (H - L + 1), \quad \text{und} \quad b = 2(H - L + 1 - 2^k).$$

Ein Codebuch mit der Anzahl von $a+b$ Codes wird erzeugt. Die Anzahl von a Codes ist durch $2^k-1, 2^k-2, \dots, 2^k-a$ als k Bit Zahlen dargestellt. Die Anzahl von b Codes ist durch $0, 1, \dots, b-1$ als $k+1$ Bit darstellbar. Das Codebuch wird so organisiert, dass die ersten $b/2$ Codes die geraden Codes von $0, 2, \dots, b-2$ sind, gefolgt von $2^k-a, \dots, 2^k-2, 2^k-1$ und schließlich sind die ungeraden Codes von $1, 3, \dots, b-1$. Dann ist der Code von P gleich dem $P-L$ -ten Wert des Codebuchs und plus dem Präfix 0 .

Falls P kleiner als L oder größer als H ist, bekommt P ein Präfix 10 bzw. 11 . Der Wert $L-P$ oder $P-H$ wird durch Golombschen Code mit dem Parameter $b = 2^m$ codiert, wobei m typischerweise gleich $0, 1, 2$, oder 3 ist. Der Golombsche Code plus jeweiligem Präfix ist der Code von P , wenn P außerhalb L und H liegt. Im folgenden werden drei Beispiele angegeben.

1. Beispiel: $A = 7, B = 115$ und $P = 44$. Damit ist $L = 7, H = 115$, und P liegt zwischen L und H . Das Präfix ist 0 und die drei ganzen Zahlen sind $k = 6, a = 19$ und $b = 90$. Die ersten 45 Einträge des Codebuchs sind die 7 Bit Zahlen $0, 2, 4, \dots, 88$. 44 ist der 37 te Eintrag des Codebuchs. Damit ist der Code von $P = 44$ $0|1001010_2$.
2. Beispiel: $A = 106, B = 116$ und $P = 66$. Daher ist $L = 106, H = 116$, und P ist kleiner als L . Das Präfix ist also 10 . $L-P$ ist gleich 40 und entsprechend Golombschem Code mit $b=2^3$ ist 11110111_2 . Damit ist der Code von P $10|11110111_2$.
3. Beispiel $A = 113, B = 231$ und $P = 110$. Somit ist $L = 113, H = 231$, und P ist wiederum kleiner als L . $L-P$ ist gleich 3 und entsprechend Golombschem Code mit $b=2^3$ ist 0011_2 . Dann ist der Code von P $10|0011_2$.

Die drei Beispiele zeigen, dass die Bedingung der Gleichung (2-1a) bei FELICS nicht erfüllt ist.

2.2.6. MLP

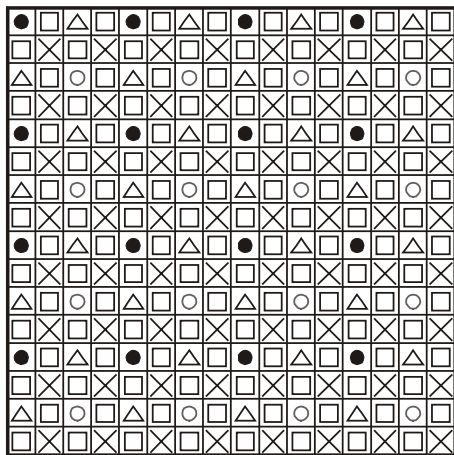
MLP ist eine Abkürzung aus Multilevel Progressive Method [HOW 92]. Die MLP ist eine berechnungsaufwendige, verlustfreie Methode für die Komprimierung des Grauwertbilds. Sie verwendet den Kontext, den Grauwert der Pixel vorherzusagen. Der Unterschied zwischen dem geschätzten und dem aktuellen Wert (der Fehler) wird durch den arithmetischen Code codiert. Die Laplacesche Verteilung wird benutzt, um die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zu schätzen. Diese Methode enthält vier getrennte Schritte: (1) Auswahl der Pixel, (2) Vorhersage (Bildmodellierung), (3) Fehlermodellierung und (4) arithmetische Codierung der Fehler.

Die MLP komprimiert das Bild Ebenenweise und progressiv, und die zu komprimierenden Pixel in jeder Ebene haben eine eigene, bestimmte Reihenfolge. Bei der MLP muss das Bild quadratisch sein, und die Pixel pro Zeile (Spalten) müssen eine Potenz von 2 sein. Die Anzahl

der Pixel, die in der ersten Ebene bearbeitet wird, soll auch eine Potenz von 2 sein. Sei n die Anzahl der Pixel pro Zeile und Spalten des Bilds und m die Anzahl der Pixel pro Zeile und Spalten der erst bearbeiteten Ebene, wird die Anzahl der zu bearbeitenden Ebene zu

$$\text{MaxLevel} = 1 + 2(\log_2(n) - \log_2(m))$$

Bild 2-7 zeigt die Reihenfolge des ausgewählten Pixels in jeder Ebene durch ein Beispiel mit $n = 16$ und $m = 4$, wobei $B(i,j)$ der Grauwert eines Pixels in der Zeile i und Spalte j eines Bilds B ist.



- : die ausgewählten Pixel in der 1. Ebene
- : die ausgewählten Pixel in der 2. Ebene
- △: die ausgewählten Pixel in der 3. Ebene
- ×: die ausgewählten Pixel in der 4. Ebene
- : die ausgewählten Pixel in der 5. Ebene

a) Die ausgewählten Pixel in jeder Ebene.

```

step = n/m
for( L = 0; L < MaxLevel; L ++ ) {
  if( L == 0 ) {
    for( i = step/2; i < n; i = i + step )
      B(i,i) unkomprimiert ausgeben
    j1_min = j2_min = step/2; j1_max = j2_max = i - step;
  } else if( L ist ungrade ) {
    if( L == 1 ) {
      for( i = 0; i < n; i = i + step )
        Komprimierung vom B(i,i) mit 45° gedrehter Gewich-
        tungsmatrix
      j1_min = j2_min = 0; j1_max = j2_max = i - step;
    } else {
      for( i = step/2; i < n; i = i + step )
        Komprimierung vom B(i,i) mit 45° gedrehter Gewich-
        tungsmatrix
      j1_min = j2_min = step/2;
      j1_max = j2_max = i - step;
    }
  } else {
    for( i = 0; i < n; i = i + step )
      for( j = 0; j < n; j = j + step )
        Komprimierung vom B(i,j) und B(j,i) mit rhombus-
        formiger Gewichtungsmatrix
      j1_min = j2_min = 0; j1_max = j2_max = i - step;
      step = step/2;
    }
  }
}

```

b) C-artiger Algorithmus für die Auswahl der Pixel.

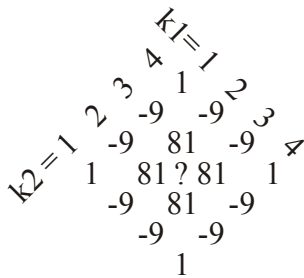
Bild 2-7: C-artiger Algorithmus für Auswahl der Pixel und ein Beispiel mit $n = 16$ und $m = 4$.

Ein Pixel wird durch einen gewichteten Mittelwert von 16 bekannten Nachbarn ermittelt. Diese 16 Nachbarn kommen aus allen früheren komprimierten Pixeln und bilden eine Rhombusform mit 4×4 Pixeln um den zu komprimierenden Pixel. Bild 2-8 a) zeigt die rhombusförmigen 16 Gewichtungen. Wenn ein Pixel nah am Rand liegt und dort einige Nachbarn verloren sind, werden nur die existierenden Nachbarn verwendet. Der gewichtete Mittelwert muss normalisiert werden. Bild 2-8 b) zeigt einige mögliche Nachbarn. Bild 2-8 c) gibt einen C-artigen Algorithmus für die Prognose eines Pixels $B(i,j)$ an.

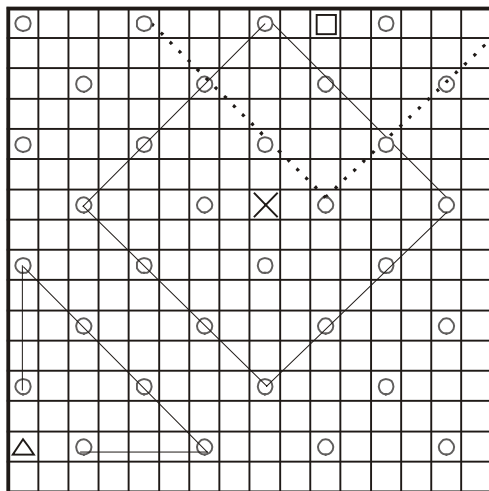
Sei R die Prognose eines Pixels $B(i,j)$, ist der Prognosefehler gleich $E = R - B(i,j)$. Wenn die Graustufe eines Bilds gleich P ist, ist der maximale und minimale Wert von E gleich $P - I$ bzw. $-P + I$. Die Wahrscheinlichkeit, dass E eintritt, wird durch die Laplace-Verteilung

$$W_v(E) = \int_{E-0.5}^{E+0.5} \frac{1}{\sqrt{2V}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{V}}|x|\right) dx$$

angegeben[SAL 00]. Damit kann man eine Tabelle mit $2P-1$ Einträgen, wie die Tabelle 2-2, aufgebaut werden. Mit dieser Tabelle kann man jeden Prognosefehler E arithmetisch codieren. Man sollte beachten, dass der Parameter V in der Laplace - Verteilung die Länge des Codes bestimmt. In [SAL 00] werden mehrere Möglichkeiten angegeben.



a) 4x4 rhombusförmige Gewichtungsmatrix



- : bearbeitete Pixels in frühen Ebenen
- △: der Pixel mit 6 Gewichtungen
- ×: der Pixel mit vollen Gewichtungen
- : der Pixel mit 9 Gewichtungen

b) Einige mögliche Nachbarn.

Prognose eines Pixels $B(i,j)$ mit rhombusförmige Gewichtung

```

sw = 0; R = 0;
for( k1 = 0; k1 < m; k1++ ) {
  for( k2 = 0; k2 < m; k2++ ) {
    j1 = step/2*(k1-k2) + i;
    j2 = step/2*(k1+k2-m+1) + j;
    if( j1_min <= j1 <= j1_max &&
        j2_min <= j2 <= j2_max ) {
      sw = sw + w(k1,k2);
      R = R + w(k1,k2)*B(j1,j2);
    }
  }
}
R = R/sw;
    
```

Prognose eines Pixels $B(i,j)$ mit 45° gedrehter Gewichtung

```

sw = 0; R = 0;
for( k1 = 0; k1 < m; k1++ ) {
  j1 = step/2*(2*k1-m+1) + i;
  for( k2 = 0; k2 < m; k2++ ) {
    j2 = step/2*(2*k2-m+1) + j;
    if( j1_min <= j1 <= j1_max &&
        j2_min <= j2 <= j2_max ) {
      sw = sw + w(k1,k2);
      R = R + w(k1,k2)*B(j1,j2);
    }
  }
}
R = R/sw;
    
```

c) C-artiger Algorithmus für die Prognose eines Pixels.

Bild 2-8: Die Prognose eines Pixels $B(i,j)$

Wegen der Eigenschaft der arithmetischen Codierung wird die Bedingung der Gleichung (2-1a,b) für MLP nicht erfüllt.

2.2.7. DPCM

Unter DPCM versteht man Differential Pulse Code Modulation [SAL 00]. Die DPCM-Methode basiert auf der Tatsache, dass die benachbarten Pixel in einem Bild korreliert sind. Da korrelierte Werte im allgemeinen ähnlich sind, sind ihre Differenzen klein und eine Kom-

pression kann erzielt werden.

Die differentielle Codierungsmethode berechnet die Differenzen $d_i = a_i - a_{i-1}$ zwischen aufeinanderfolgenden Datenelementen a_i und codiert die Differenzen d_i . Im Prinzip kann eine beliebig geeignete, verlustbehaftete oder verlustfreie Methode verwendet werden, die Differenzen zu codieren. In der Praxis wird häufig die Quantisierung, eine verlustbehaftete Methode, verwendet. Die zu codierende Quantität ist nicht die Differenz d_i , sondern eine quantisierte Zahl \hat{d}_i . Die Differenz zwischen d_i und \hat{d}_i ist der Quantisierungsfehler q_i . Damit ist $\hat{d}_i = d_i + q_i$.

Die verlustbehaftete Kompression der Differenz stößt auf ein neues Problem, nämlich die Fehlerakkumulation. Dies wird leicht verständlich, wenn man die Funktion des Decoders betrachtet. Der Decoder liest die codierten Werte \hat{d}_i ein, decodiert sie und benutzt die rekonstruierten Werte \hat{a}_i statt a_i zu generieren. Der Decoder startet mit dem Einlesen von a_0 . Dann liest er $\hat{d}_1 = d_1 + q_1$ ein und berechnet $\hat{a}_1 = a_0 + \hat{d}_1 = a_0 + d_1 + q_1 = a_1 + q_1$. Der nächste Schritt ist $\hat{d}_2 = d_2 + q_2$ einzulesen und $\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \hat{d}_2 = a_1 + q_1 + d_2 + q_2 = a_2 + q_1 + q_2$ zu berechnen. Im allgemeinen ist der decodierte Wert \hat{a}_n gleich $\hat{a}_n = a_n + \sum_{i=1}^n q_i$ und enthält die Summe der n Quantisierungsfehler.

Der Grund liegt darin, dass der Encoder die exakte Differenz \hat{d}_i aus dem originalen Datenelement \hat{a}_i erzeugt, während der Decoder nur unter der Benutzung der quantisierten Differenz \hat{d}_i den rekonstruierten Wert \hat{a}_i generiert. Die Lösung ist daher um die Berechnung der Differenz im Encoder $d_i = a_i - \hat{a}_{i-1}$ zu modifizieren.

Der Decoder startet nun mit dem Einlesen von a_0 . Dann liest er $\hat{d}_1 = d_1 + q_1$ ein und berechnet $\hat{a}_1 = a_0 + \hat{d}_1 = a_0 + d_1 + q_1 = a_1 + q_1$. Der nächste Schritt ist $\hat{d}_2 = d_2 + q_2$ einzulesen und $\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \hat{d}_2 = \hat{a}_1 + d_2 + q_2 = a_2 + q_2$ zu berechnen. Der decodierte Wert \hat{a}_2 enthält genau den einzigen Quantisierungsfehler q_2 , und im allgemeinen ist der decodierte Wert \hat{a}_i gleich $\hat{a}_i = a_i + q_i$, damit enthält er nur den Quantisierungsfehler q_i .

Beim nächsten Schritt bei der Entwicklung einer allgemeinen differentiellen Codierungsmethode ist der Vorteil zu nennen, dass die zu komprimierenden Datenelemente korreliert sind. Dies bedeutet, dass ein Datenelement a_i nicht nur vom vorhergehenden Datenelement a_{i-1} abhängt, sondern auch von einigen näheren Nachbarn. Eine bessere Prognose kann daher unter Benutzung der N vorhergehenden Nachbarn erreicht werden, den aktuellen Wert a_i zu codie-

ren. D.h. eine Funktion von $\hat{a}_{i-j}, j = 1, 2, \dots, N, p_i = f(\hat{a}_{i-1}, \hat{a}_{i-2}, \dots, \hat{a}_{i-N})$ wird benutzt, a_i vorherzusagen. In der Praxis ist eine lineare Funktion von \hat{a}_{i-j} , die gewichtete Summe der N vorhergehenden Nachbarn, die häufigste verwendete Funktion:

$$p_i = \sum_{j=1}^N w_j \hat{a}_{i-j} \quad (2.2-6)$$

wobei w_j und N die Parameter der differentiellen Kompressionsmethode sind. [SAL 00] gibt einige Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Parameter an. In der Bildkompression können die Nachbarn wie im Bild 2-5 a), b) und Bild 2-6 ausgewählt werden.

Da die Gleichung (2.2-6) linear ist, wird die Bedingung der Gleichung (2-1a,b) erfüllt, wenn die Gewichtungen w_j unverändert und die Quantisierungsfehler vernachlässigt werden.

2.2.8. JPEG

JPEG ist die Abkürzung für Joint Photographics Experts Group, eine Arbeitsgemeinschaften zur Bildcodierung. Sie wurde 1986 gegründet, um einen Standard zur Codierung von bewegungslosen Farb- oder Grauwertbildern zu definieren. 1989 veröffentlichte sie ein grundlegendes Verfahren (Baseline System, s. Bild 2-9). Hierbei handelt es sich um ein verlustbehaftetes, auf der Diskreten Kosinus-Transformation(DCT) basiertes und sequentielles System mit Huffman-Codes und 8Bit Genauigkeit pro Bildpunkt [STR 00]. Der Standard für diese Verfahren wurde 1992 beschlossen. Die Weiterentwicklung des JPEG-Standards führte im März 2000 zur Vorabversion des "JPEG2000"-Standards [ISO 00].

Der Decoder bzw. der Encoder des Baseline Systems bestehen im wesentlichen aus den Komponenten Transformation, Quantisierung und Codierung.

Durch den instationären Charakter der Bildsignale variieren die spektralen Anteile eines Bildes von Ausschnitt zu Ausschnitt. Somit ist die Zerlegung des Bildes für die Berechnung der DCT sinnvoll. Das zu komprimierende Bild wird in Blöcke mit der Größe 8×8 Bildpunkte zerlegt. Danach erfolgt eine separate Transformation von Zeilen und Spalten für jeden Block. Für die Diskrete Kosinus-Transformation (2D-DCT) eines Bildblocks $b(x,y)$ der Dimension 8×8 Pixel [SAL 00] ergibt sich:

$$\mathbf{B}(u,v) = \frac{1}{4} C(u)C(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 \mathbf{b}(x,y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right) \quad (2.2-7a)$$

wobei

$$C(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } u = 0 \\ 1 & \text{für } u \neq 0 \end{cases} \quad C(v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } v = 0 \\ 1 & \text{für } v \neq 0 \end{cases} \quad (2.2-7b)$$

Als Ergebnis der DCT liegen Blöcke (Matrix $\mathbf{B}(u,v)$) mit der Dimension 8×8 vor, welche die

Spektralkoeffizienten enthalten.

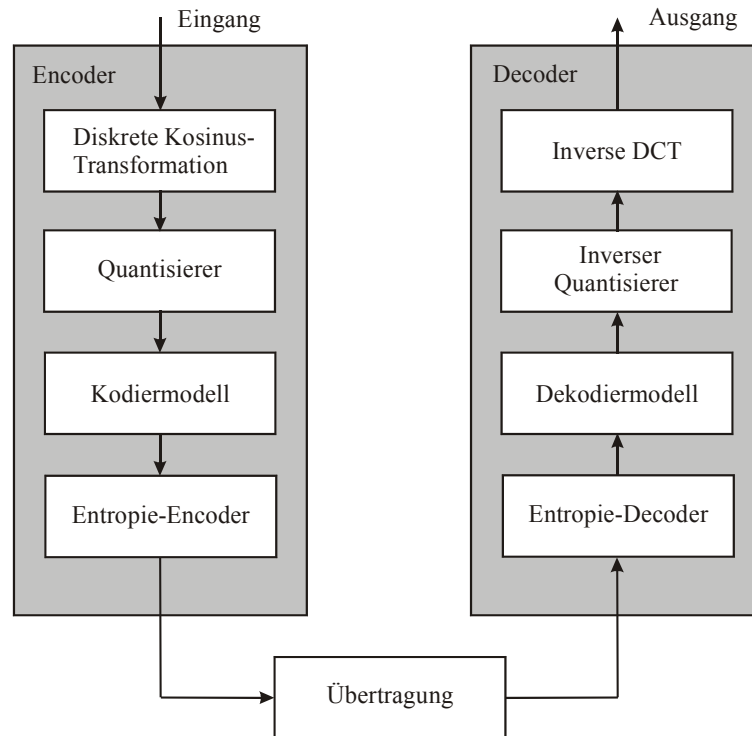


Bild 2-9: Grundlegendes Verfahren (Baseline System) [HUN 93]

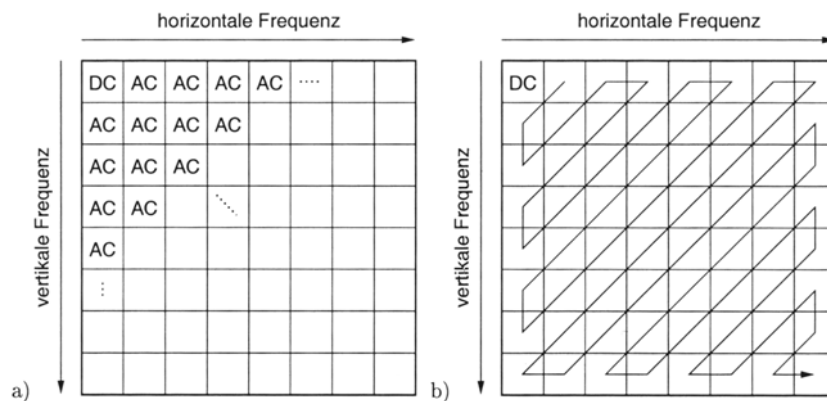


Bild 2-10: 8×8 Block, a) Position der DCT-Koeffizienten in Abhängigkeit von der Ortsfrequenz;

b) Zick-Zack-Abtastung der Koeffizienten nach aufsteigenden Frequenzen [STR 00]

Bild 2-10 zeigt, wie die Koeffizienten hinsichtlich ihrer Ortsfrequenz in der Matrix \mathbf{B} angeordnet sind. Man sollte bemerken, dass bei diesem Schritt noch keine Datenreduktion oder Kompression stattfindet.

Für die Rücktransformation, Inverse Diskrete Kosinus-Transformation (2D-IDCT), im Decoder wird die folgende Formel verwendet:

$$\mathbf{b}(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 C(u)C(v)\mathbf{B}(u,v) \cos\left(\frac{(2u+1)x\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2v+1)y\pi}{16}\right) \quad (2.2-8)$$

Die Koeffizienten der DCT werden entsprechend durch die Gleichung (2.2-9) quantisiert mit dem Ziel, ihre effektive Wortlänge zu verkürzen und die Anzahl der Koeffizienten mit dem Wert 0 zu erhöhen.

$$q(u,v) = \text{round}\left(\frac{B(u,v)}{Q_{u,v}}\right) \quad (2.2-9)$$

Jeder Koeffizient $B(u,v)$ wird durch einen ihm zugeordneten Quantisierungswert $Q_{u,v}$ dividiert. Das Ergebnis der Division wird auf den nächstliegenden ganzzahligen Wert $q(u,v)$ gerundet. Für die inverse Quantisierung der Spektralkoeffizienten $\tilde{B}(u,v)$ gilt:

$$\tilde{B}(u,v) = q(u,v)Q_{u,v} \quad (2.2-10)$$

horizontale Frequenz →							
16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	72	95	98	112	100	103	99
↓ vertikale Frequenz							

horizontale Frequenz →							
17	18	24	47	99	99	99	99
18	21	26	66	99	99	99	99
24	26	56	99	99	99	99	99
47	66	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
↓ vertikale Frequenz							

Bild 2-11: Matrizen mit Quantisierungswerten für Luminanz (a) und Chrominanz (b) [STR 00]

Die Quantisierungswerte $Q_{u,v}$ sind in einer Tabelle abgelegt. Innerhalb des JPEG-Standards [ISO 94] werden für die Luminanz und die Chrominanz Tabellen vorgeschlagen (s. Bild 2-11). Bei Grauwertbildern wird nur die Luminanz-Tabelle verwendet, bei Farbbildern die dem Farbkanal zugehörige Tabelle.

Die Wahl der Werte für die vorgeschlagenen Tabellen erfolgt unter Berücksichtigung der menschlichen Wahrnehmung [STR 00]. In einer Testreihe wurde für jeden Koeffizienten ein mittlerer Quantisierungswert ermittelt, bei dem die Veränderung des Koeffizienten im rücktransformierten Bild noch nicht zu erkennen ist. Da die Quantisierungstabellen variabel sein können, werden sie im Bitstrom des Bildes mit abgelegt. Der meiste Informationsverlust des JPEGs findet durch diese Quantisierung statt. Jedoch findet die Kompression hier nicht statt.

Bei der Codierung werden der DC-Koeffizient und die AC-Koeffizienten (Ergebnis der DCT) getrennt behandelt. Bei der Codierung der DC-Koeffizienten geht man davon aus, dass benachbarte Blöcke einen ähnlichen Gleichanteil besitzen. Damit kann ein DC-Koeffizient aus seinem Vorgänger vorhergesagt werden (s. Bild 2-12). Codiert wird deshalb nur der erste DC-Koeffizient und der Prädiktionwert (PREDC) der folgenden Koeffizienten. Die Werte von PREDC werden in mehrere Kategorien eingeteilt und jeder Kategorie wird ein Codewort

(unärer Code(s. 2.1.2)) zugewiesen. Die Kategorien werden durch

$$k = \lfloor \log_2(|PREDC|) \rfloor + 1 \quad (2.2-11a)$$

berechnet. Zusätzlich zum Codewort der Kategorie ist ein PREDC-Wert durch seine Position innerhalb der Kategorie gekennzeichnet. Dies wird durch

$$p = \begin{cases} PREDC & PREDC > 0 \\ PREDC + 2^k - 1 & PREDC < 0 \end{cases} \quad (2.2-11b)$$

bestimmt. Der Code für einen PREDC-Wert besteht aus dem Codewort der Kategorie und dem k -Bit Binärwert für die Position innerhalb der Kategorie.

$$unär\text{code}(k) \text{ binär}\text{code}(p)$$

Ist z. B. PREDC gleich 1118, wird die Kategorie von 1118 $k = \lfloor \log_2(1118) \rfloor + 1 = \lfloor 10.127 \rfloor + 1 = 10 + 1 = 11$, und die Position innerhalb der Kategorie wird zu 1118. Das Codewort für 1118 ist 111111111010001011110_2 . Falls PREDC gleich -5 ist, wird die Kategorie von -5 $k = \lfloor \log_2(5) \rfloor + 1 = 3$, und die Position innerhalb der Kategorie wird zu $p = -5 + 7 = 2$. Das Codewort wird zu 110010_2 .

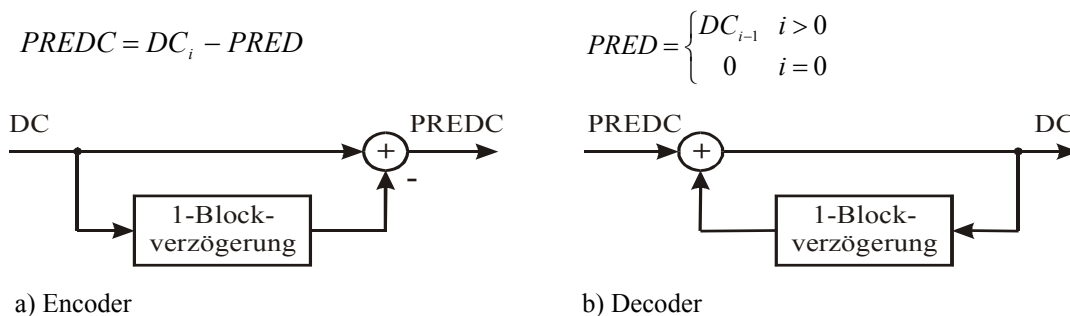


Bild 2-12 Modell für die Codierung der DC-Koeffizienten

Die AC-Koeffizienten werden entsprechend der in Bild 2.2-10b dargestellten Abtastung in einen Vektor umgewandelt. Dadurch sind die AC-Koeffizienten hinsichtlich ihrer Ortsfrequenz im Vektor geordnet. Da die AC-Koeffizienten nur wenige Nichtnullen enthalten, ist es sinnvoll, dass eine Kombination der Lauflängen-Codierung (RLE) mit entweder der Huffman-Codierung oder der arithmetischen Codierung verwendet wird. Für jede nicht null vom AC-Koeffizient x wird der Encoder: (1) alle Null z , die vor x liegen, suchen; (2) die Kategorie k und die Position innerhalb der Kategorie p von x durch die Gleichung (2.2-11a,b) bestimmen; (3) das Paar (z, k) als Zeilen- und Spaltennummer für die Tabelle 2-4 verwenden; (4) der in der Tabelle 2-4 gefundene Huffman-Code k -Bit Binärwert von p anhängen. Der resultierende Code ist der Code von x und von der vor x gelegenen z Nullen. Schließlich wird die Reihenfolge letzter Nullen als 1010 (EOB) codiert.

Die Codeworttabellen für die DC- und AC-Koeffizienten werden im Bitstrom des komprimierten

Table 2-4.1: Die empfohlene Huffman-Codes für Luminanz und Grauwertbild der AC-Koeffizienten, Teil 1

$\begin{matrix} k \\ z \end{matrix}$	1	2	3	4	5
0	00	01	100	1011	11010
1	1100	11011	11110001	111110110	11111110110
2	11100	11111001	1111110111	111111110100	111111110001001
3	111010	111110111	111111110101	111111110001111	1111111110010000
4	111011	1111111000	1111111110010110	1111111110010111	1111111110011000
5	1111010	11111110111	1111111110011110	1111111110011111	1111111110100000
6	1111011	111111110110	1111111110100110	1111111110100111	1111111110101000
7	11111010	111111110111	1111111110101110	1111111110101111	1111111110110000
8	111111000	111111111000000	1111111110110110	1111111110110111	1111111110111000
9	111111001	1111111110111110	1111111110111111	1111111111000000	1111111111000001
10	111111010	1111111111000111	1111111111001000	1111111111001001	1111111111001010
11	1111111001	1111111111010000	1111111111010001	1111111111010010	1111111111010011
12	1111111010	1111111111011001	1111111111011010	1111111111011011	1111111111011100
13	11111111000	1111111111100010	1111111111100011	1111111111100100	1111111111100101
14	11111111011	1111111111101100	1111111111101101	1111111111101110	1111111111101111
15	11111111001	1111111111110101	1111111111110110	1111111111110111	1111111111111000

Table 2-4.2: Die empfohlene Huffman-Codes für Luminanz und Grauwertbild der AC-Koeffizienten, Teil 2

$\begin{matrix} k \\ z \end{matrix}$	6	7	8	9	10
0	11111000	11111000	1111110110	111111110000010	111111110000011
1	111111110000100	111111110000101	111111110000110	111111110000111	111111110001000
2	111111110001010	111111110001011	111111110001100	111111110001101	111111110001110
3	1111111110010001	1111111110010010	1111111110010011	1111111110010100	1111111110010101
4	1111111110011001	1111111110011010	1111111110011011	1111111110011100	1111111110011101
5	1111111110100001	1111111110100010	1111111110100011	1111111110100100	1111111110100101
6	1111111110101001	1111111110101010	1111111110101011	1111111110101100	1111111110101101
7	1111111110110001	1111111110110010	1111111110110011	1111111110110100	1111111110110101
8	1111111110111001	1111111110111010	1111111110111011	1111111110111100	1111111110111101
9	1111111111000010	1111111111000011	1111111111000100	1111111111000101	1111111111000110
10	1111111111001011	1111111111001100	1111111111001101	1111111111001110	1111111111001111
11	1111111111010100	1111111111010101	1111111111010110	1111111111010111	1111111111011000
12	1111111111011101	1111111111011110	1111111111011111	1111111111100000	1111111111100001
13	1111111111100110	1111111111100111	1111111111101000	1111111111101001	1111111111101010
14	1111111111110000	1111111111110001	1111111111110010	1111111111110011	1111111111110100
15	1111111111111001	1111111111111010	1111111111111011	1111111111111101	1111111111111110

mierten Bildes ohne zusätzliche Informationsreduktion fehlerfrei und optimal komprimiert abgelegt. Im JPEG-Standard werden für die Tabellen Vorschläge gemacht. Jeder Anwender

kann aber selbst bei Bedarf einen Huffman-Code konstruieren, um eine optimale Kompression zu erreichen. Als ein Beispiel betrachtet man die quantisierte Reihenfolge

$$8016000\underbrace{10\dots 0}_{56},$$

wobei 8 der DC-Koeffizient ist und der Rest AC-Koeffizienten sind. Die Kategorie und die Position innerhalb der Kategorie für 8 sind 4 bzw. 8. Also ist der Code für 8 111101000_2 . Der erste nicht null AC-Koeffizient ist 1. Es gibt eine Null vor ihm. Die Kategorie und die Position innerhalb der Kategorie für 1 sind 1 bzw. 1. Der Huffman's Code für 1 ist 1100_2 . Damit ist der Code für 1 $1100|1_2$. Der zweite AC-Koeffizient ungleich Null ist 6. Es gibt keine Null vor ihr. Die Kategorie und die Position innerhalb der Kategorie für 6 sind 3 bzw. 6. Der Huffman's Code für 6 ist 100_2 . Damit ist der Code für 6 $100|110_2$. Der dritte AC-Koeffizient ungleich Null ist wieder 1. Aber es gibt 3 Nullen vor ihm. Die Kategorie und die Position innerhalb der Kategorie für 1 sind 1 bzw. 1. Der Huffman's Code für diese 1 ist 111010_2 . Damit ist der Code für diese 1 $111010|1_2$. Die restlichen Nullen werden als 1010 codiert. Fassen wir alle zusammen, wird der Code für $8016000\underbrace{10\dots 0}_{56}$ zu $11110100011001100110111010111010_2$,

eine 31-Bit Binärzahl sein. Wenn das Bild 8-Bit Grauwerte hat, benötigt man $64 \times 8 = 512$ Bits für das originale Bild. Nun erreicht die Kompressionsrate für JPEG 16,5 und ist sehr beeindruckend.

Man sollte beachten, dass die Datenreduktion nur durch die Codierungsmethode im Codierungsschritt stattfindet. Anhand der Eigenschaften der RLE und Huffman-Codierung wird JPEG die Bedingung der Gleichung (2-1a) nicht erfüllen.

2.3. Zusammenfassung und Bewertung

In der Bildverarbeitung wird die Datenreduktion in den meisten Fälle durch neue Codierungstechniken erreicht. Diese Codierungstechniken reduzieren oder beseitigen die Redundanz im normalen binären Code. Aber diese Codierungstechniken sind meist nichtlinear und können die Bedingung in der Gleichung (2-1a,b), die für Anwendung in adaptiven mechanischen Systeme notwendig ist, nicht erfüllen. D.h. die Datenreduktionstechniken in der Bildverarbeitung können nicht direkt in adaptiven mechanischen System verwendet werden.

Die einzige Methode, welche die Bedingung in der Gleichung (2-1) einigermaßen erfüllt, ist Differential Pulse Code Modulation. Im reduzierten Raum sind jedoch die Pixel (Anzahl der Sensoren und Aktoren) nicht weniger als im originalen Raum. Das bedeutet, dass der Reglerentwurf im reduzierten Raum genau so schwer wie im originalen Raum wird. Damit kann diese Methode uns nicht weiter helfen.

Interessant ist aber der Ansatz der diskreten Kosinus-Transformation im JPEG. Obwohl der

Ansatz der DCT im JPEG nicht zu einer Datenreduktion führt, kann man durch Umformen der Gleichung (2.2-7) und (2.2-8) dieses Ziel erreichen. Rechnet man die Gleichung (2.2-7a) aus, und ordnet man $\mathbf{b}(x,y)$ und $\mathbf{B}(u,v)$, $x, y, u, v, = 0, \dots, 7$, als einen Vektor $\underline{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}(0,0), \dots, \mathbf{b}(7,0), \mathbf{b}(0,1), \dots, \mathbf{b}(7,1), \dots, \mathbf{b}(0,7), \dots, \mathbf{b}(7,7)]^T$ bzw. $\underline{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}(0,0), \dots, \mathbf{B}(7,0), \mathbf{B}(0,1), \dots, \mathbf{B}(7,1), \dots, \mathbf{B}(0,7), \dots, \mathbf{B}(7,7)]^T$ um, kann die Gleichung (2.2-7a) zu

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{W} \underline{\mathbf{b}} \quad (2.3-1)$$

werden, wobei die Berechnung von \mathbf{W} in Bild 2-13 angegeben wird.

```

for ( v = 0; v < 8; v++ ) {
  for ( u = 0; u < 8; u++ ) {
    for ( y = 0; y < 8; y++ ) {
      for ( x = 0; x < 8; x++ ) {
        if u == 0, C1=1/√2; else C1 = 1;
        if v == 0, C2 = 1/√2; else C2=1;
        W(8*v+u,8*y+x)=1/4*C1*C2*cos((2*y+1)*v)*π/16)*cos((2*x+1)*u*π/16);
      }
    }
  }
}

```

Bild 2-13: C-artiger Algorithmus für Berechnung der Matrix \mathbf{W}

Ebenfalls kann der Gleichung (2.2-8) zugeordnet

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{B}} \quad (2.3-2)$$

werden. Bei der Umordnung der Quantisierungsmatrix (Bild 2-11) in die Bildpixel können alle Nullen nach der Quantisierung weggelassen werden und die Daten werden reduziert, ohne irgendeine Codierungstechnik zu brauchen.

136	131	135	139	135	138	139	145
139	146	132	146	135	133	138	134
148	145	140	144	148	132	134	149
149	145	142	132	137	137	139	143
149	140	132	139	150	146	145	130
141	137	144	145	131	133	134	149
132	143	146	146	133	146	144	135
139	135	143	144	132	134	135	143

a) Originale Pixels

70	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

c) Nach Quantisierung

1117	6	5	-6	7	4	-1	-5
-2	0	4	5	7	-5	-7	2
-10	-7	-5	-12	-2	6	2	-7
-4	-8	-3	3	-4	6	2	-3
-3	-4	4	11	0	1	4	6
3	-4	3	-6	-7	-2	7	2
1	-2	6	-11	15	-3	8	4
7	-3	-10	12	0	-1	-4	3

b) Nach DCT

Wert: 70, -1, 1, -1, 1, -1

Index 0, 2, 9, 11, 17, 27

d) Nach Umordnung

Bild 2-14: Beispiel für Umordnung. Nach Umordnung wird die Reihenfolge der Pixels nach Spalten erzählt. a) Originale Pixels. b) DC- und AC-Koeffizienten. c) Die Koeffizienten nach Quantisierung. d) Die Koeffizienten ungleich Null und ihren Indizes.

Bild 2-14 zeigt ein Beispiel. Bild 2-14 a) zeigt die originalen Pixel. Nach der Umordnung wird die Reihenfolge der Pixel nicht in 2-D berechnet, sondern in 1-D und zwar spaltenweise von oben nach unten gezählt. Bild 2-14 b) und c) zeigen die DCT-Koeffizienten und die Koeffizienten nach der Quantisierung. Die Werte sind gleich denjenigen, die durch Gleichung (2.2-7) und (2.2-9) berechnet werden. Aber nur die Reihenfolge wird wie in Bild 2-14 a) gezählt. Bild 2-14 d) zeigt die Werte, die nicht gleich Null sind, und ihre Indizes. Nun muss man nur noch diese Werte speichern. Wenn man je 8-Bit für den Wert und 6-Bit für den Index benutzt, benötigt man $6 \times 8 + 6 \times 6 = 84$ Bit für dieses Beispiel. Die Kompressionsrate ist $6,10$.

Zwar ist die Kompressionsrate niedriger als bei JPEG, aber auf diese Art und Weise werden die mathematischen Operationen im reduzierten Datenraum erlaubt, weil die durch die Codierungstechniken eingeführte Nichtlinearität hier nicht mehr existiert.

Die DCT gehört zu den sogenannten orthogonalen Transformationen. Es gibt noch viele Transformationen, die zu dieser Kategorie gehören: Wavelet-Transformation, Karhunen-Loève-Transformation, Modaltransformation in der Mechanik, usw.. Die Basisfunktionen (W in Gleichung (2.3-1)) dieser Transformationen sind miteinander orthogonal, d.h. die inneren Produkte der Spalte i und Spalte j sind gleich Null. Für die DCT sind die Basisfunktionen der Kosinus mit verschiedenen Frequenzen. Für Wavelet-Transformationen sind die Basisfunktionen die Funktionen, welche die folgende Bedingung erfüllen [BUR 98]

$$w_{m,n}(x) = a^{-\frac{m}{2}} w(a^{-m}x - nb)$$

wobei a und b konstant sind, und $w(x)$ heißt Wavelet oder Mutterfunktion. Das bekannte Wavelet ist das Haar-Wavelet [HAA 10], das Meyer-Wavelet [MEY 93] und das Daubechies-Wavelet [DAU 88], das in JPEG-2000 verwendet wird. Da die Basisfunktionen der DCT- und Wavelet-Transformation durch die vorgegebenen Funktionen festgelegt ist, ist es schwer oder unmöglich, eine optimale Transformation für individuelle interessante Bilder (Formen in unserer Formkontrolle) zu finden. Deshalb werden wir diese beiden in dieser Arbeit nicht weiter verfolgen.

Die Basisfunktionen der Modaltransformation in der Mechanik sind die Eigenmoden. Die Eigenmoden beschreiben die Eigenschaften der mechanischen Systeme und hängen hauptsächlich von den Randbedingungen der mechanischen Systeme ab. Die Basisfunktionen der Karhunen-Loève-Transformation sind nicht fest vorgegebene Funktionen, sondern durch Beispiele „gelernte“. Dies gibt die Möglichkeit, eine optimale Transformation für individuell interessante Bilder (Formen in unserer Formkontrolle) zu machen. Im weiteren Kapitel dieser Arbeit werden diese beiden intensiv untersucht.

3. Datenreduktions- und Erweiterungstechnik in adaptiven mechanischen Systemen

Die Bewegung eines mechanischen Systems kann durch Anwendung der FEM (s. Anhang A und B) mit dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx &= Fu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3-1)$$

beschrieben werden, wobei M , D , und K die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen ($n \times n$) sind. x ist der ($n \times 1$) Verschiebungsvektor der FEM. Dieser wird später auch als Zustandsvariable^{3.1} bezeichnet. C ist die Messmatrix ($m \times n$), F die Steuermatrix ($n \times p$), y die Messgrößen ($n \times 1$) und u die Stellgrößen ($p \times 1$). n ist die Anzahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems, m die Anzahl der Sensoren und p die Anzahl der Aktoren.

3.1. Modal-Entwicklung

Wie im kontinuierlichen Fall können die Eigenmoden und die Eigenfrequenzen durch die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$K\Psi = M\Psi\Omega^2 \quad \text{mit} \quad \Psi^T\Psi = I, \quad \psi_i^T M \psi_i = m_i, \quad \psi_i^T K \psi_i = k_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1-1)$$

berechnet werden, wobei Ω eine diagonale Eigenfrequenzmatrix ist und Ψ die Eigenmoden enthält. In der Mechanik werden üblicherweise die Eigenmoden mit den Massen normiert. D.h.

$$\Phi = \Psi \left(\sqrt{\Psi^T M \Psi} \right)^{-1} = \Psi \operatorname{diag}_n \left(\sqrt{m_i}^{-1} \right) \quad (3.1-2)$$

Führt man die sogenannte modale Transformation

$$x = \Phi q \quad \text{oder} \quad x = \Psi q \quad (3.1-3)$$

durch, setzt sie in die Gleichung (3-1) ein, berücksichtigt die Dämpfung und multipliziert links mit Ψ^T oder Φ^T , wird die Gleichung (3-1) zu

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \phi_i^T Fu \\ y &= C \Phi q \\ \text{oder} & \quad \quad \quad , i = 1, \dots, n \\ m_i \ddot{q}_i + d_i \dot{q}_i + k_i q_i &= \psi_i^T Fu \\ y &= C \Psi q \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

Hier heißt q_i die verallgemeinerte oder modale Koordinate des Eigenmode i und ζ_i die modale

^{3.1} Hier wird der Begriff der Zustandsvariable unterschiedlich zur Regelungstechnik verwendet.

Dämpfung des Eigenmode i . Durch die modale Transformation wird das mechanische System entkoppelt.

Die Modaltransformation wird weitergehend in der Schwingungsunterdrückung angewendet [BAL 78][MEI 85][SHA 91][THO 93][FUL 96][GAW 96][HANS 97]. Es soll analysiert werden, ob die Modaltransformation auch sinnvoll in der Formkontrolle verwendet werden kann?

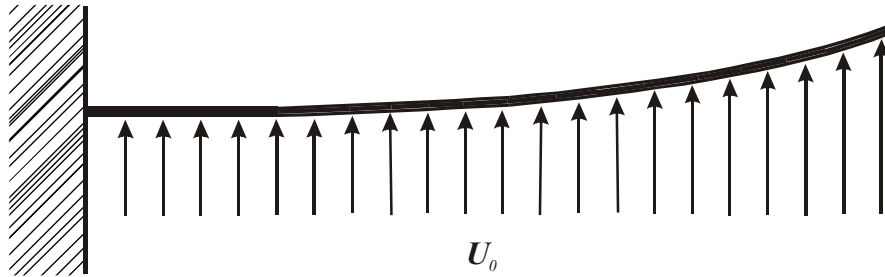


Bild 3-1: Eine schematische Darstellung der Formkontrolle

$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 I(t)$ sind die Stellgrößen, die auf ein mechanisches System, z.B. ein einseitig fester Balken (s. Bild 3-1), wirken, wobei $I(t)$ die Sprungfunktion ist. Die Antworten des mechanischen Systems auf die Stellgrößen werden anhand der Gleichung (3.1-4) und (c-2) durch

$$y_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{c}_i \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{F} \mathbf{U}_0}{\omega_j^2} + y_{dyn}(\omega_j t) \right) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{c}_i \boldsymbol{\varphi}_j q_j^{st} + y^{dyn}(\omega_j t)), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1-5a)$$

dargestellt. \mathbf{c}_i ist die i -te Zeile der Messmatrix \mathbf{C} . $y^{dyn}(\omega_j t)$ ist der dynamische Teil der Antworten. Je nachdem welche Größe ζ_j annimmt, hat $y^{dyn}(\omega_j t)$ drei verschiedene Formen (s. Gleichung (c-2)). Durch Umformen wird die Gleichung (3.1-5a) zu

$$y_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_i \boldsymbol{\varphi}_j q_j^{st} + \sum_{j=1}^n y^{dyn}(\omega_j t), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1-5b)$$

Der erste Term in der Gleichung (3.1-5b) ist die statische Form des mechanischen Systems nach der Einwirkung der Stellgrößen. Der zweite Term ist die dynamische Antwort auf die Einwirkung der Stellgrößen, der nach gewisser Zeit verschwinden wird. Es ist deutlich, dass die statische Form eine lineare Kombination der Modalkoordinaten ist.

Das Ziel der Datenverdichtung ist, die Messgröße \mathbf{y} zu reduzieren. Es erscheint zweckmäßig, die Modalkoordinaten \mathbf{q} bzw. entsprechende Näherungen als komprimierte Größen anzusehen, da sie weitgehend entkoppelt sind und nur über die Eingangsgrößen gemeinsam beeinflusst werden.

3.1.1. Modalreduktion

In Analogie zur Modellreduktion wird der Begriff von dominanten Modalkoordinaten eingeführt

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_{n-v}^T] \text{ und } \Phi = [\Phi_v \Phi_{n-v}] \quad (3.1-6)$$

Bei der komprimierten Beschreibung sind nur noch v dominante Modalkoordinaten, die der Vektor \mathbf{q}_v enthält, von Bedeutung. Es gilt

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\Phi_v \mathbf{q}_v + \mathbf{C}\Phi_{n-v} \mathbf{q}_{n-v} \quad (3.1-7)$$

Nährungsweise soll sich \mathbf{q}_v aus \mathbf{y} errechnen lassen, d. h.

$$\tilde{\mathbf{q}}_v = \mathbf{R} \mathbf{y} \quad (3.1-8a)$$

mit \mathbf{R} ($v \times m$) als Transformationsmatrix. Die rekonstruierten Messgrößen $\tilde{\mathbf{y}}$ erhält man zu

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{S} \mathbf{q}_v \quad (3.1-8b)$$

bzw. genähert

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{q}}_v \quad (3.1-8c)$$

\mathbf{S} ist gleichfalls die entsprechende Transformationsmatrix ($m \times v$). Die Matrizen \mathbf{R} und \mathbf{S} sind jetzt geeignet zu bestimmen. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass für \mathbf{q}_v nur die Näherung $\tilde{\mathbf{q}}_v$ nach Gleichung. (3.1-8a) zur Verfügung steht.

Durch Einsetzen erhält man:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_v \mathbf{q}_v + \mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_{n-v} \mathbf{q}_{n-v} \quad (3.1-9a)$$

und

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{q}}_v = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_v \mathbf{q}_v + \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_{n-v} \mathbf{q}_{n-v} \quad (3.1-9a)$$

Bei fehlerfreier Rekonstruktion müsste gelten:

$$\mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_v = \mathbf{I}_v \quad (3.1-10a)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{C}\Phi_{n-v} = \mathbf{0}_{v \times n-v} \quad (3.1-10b)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{R} = \mathbf{I}_m \quad (3.1-10c)$$

wobei \mathbf{I}_x die ($x \times x$) Einheitsmatrix ist. Die Gleichungen (3.1-10a...c) können jedoch im allgemeinen Fall nicht gleichzeitig erfüllt werden. Deshalb sollen nachstehend einige ausgewählte Lösungen näher untersucht werden.

Allgemein wird dabei entsprechend den Eigenschaften mechanischer Systeme vorausgesetzt:

$$v < m \quad (3.1-11)$$

Variante 1

Die Gleichung (3.1-10b) wird weggelassen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die nicht dominierenden Modalkoordinaten nur einen geringen Einfluss auf das Ergebnis haben, und der zweite Term in Gleichung (3.1-7) praktisch verschwindet. Setzt man weiterhin voraus, dass \mathbf{q}_v nur

unbedeutend von $\tilde{\mathbf{q}}_v$ abweicht, folgt unmittelbar aus Gleichung (3.1-7) durch Vergleich mit Gleichung (3.1-8b) für den Idealfall $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\Phi_v \quad (3.1-12)$$

Da in sinnvollen Fällen $m > v$ gilt, ist Gleichung (3.1-10a) unterbestimmt. Eine allgemeine Lösung kann angegeben werden. Damit steht auch \mathbf{R} zur Verfügung. In dieser Arbeit wurde eine Lösung von [MATLAB] verwendet (Faktorisierung durch Householder Orthogonalisierung mit Spaltenpivotisierung).

Variante 2

Als Näherung soll weiterhin gelten wie in Variante 1

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\Phi_v$$

Es soll Gleichung (3.1-10a) gelten. Weiterhin werden für $m < n$ die ersten $m_l - v$ Gleichungen aus Gleichung (3.1-10b) ausgewählt, wobei $m_l \leq m$ ist. Es folgt ein eindeutig oder ein überbestimmt zu lösendes Gleichungssystem für \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} [\mathbf{C}\Phi_v \quad \mathbf{C}\Phi_x] = [\mathbf{I}_v \quad \mathbf{0}_{v \times m_l - v}] \quad (3.1-13)$$

wobei $\mathbf{C}\Phi_x$ den ersten $m_l - v$ Spalten von $\mathbf{C}\Phi_{n-u}$ entspricht. Gilt $m > n$, kann man aus Gleichung (3.1-10a) und Gleichung (3.1-10b) bis zu n Variablen eine eindeutige Lösung finden. Die restlichen $m - n$ Variablen werden auf Null gesetzt.

Variante 3

Jetzt sollen Gleichung (3.1-10a) und Gleichung (3.1-10b) im quadratischen Mittel erfüllt werden. Man erhält nach einigen Umformungen:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I}_v \quad \mathbf{0}_{v \times n - v}] (\mathbf{C}\Phi)^T (\mathbf{C}\Phi (\mathbf{C}\Phi)^T)^{-1} \quad (3.1-14)$$

Ähnlich folgt für \mathbf{S} unter Benutzung von \mathbf{R} durch Approximation von Gleichung (3.1-10c) im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

$$\mathbf{SRR}^T = \mathbf{R}^T \quad \text{oder} \quad \mathbf{S} = \mathbf{R}^T (\mathbf{RR}^T)^{-1} \quad (3.1-15)$$

Die drei Varianten kann man durch die gewichtete Methode der kleinsten Quadrate zusammenfassen.

$$\mathbf{RC}\Phi \mathbf{w} = [\mathbf{I}_v \quad \mathbf{0}_{v \times n - v}] \mathbf{w} \quad (3.1-16)$$

In Gleichung (3.1-16) ist \mathbf{w} eine $(n \times n)$ diagonale Gewichtsmatrix. Für Variante 1 sind die ersten v diagonalen Elemente von \mathbf{w} gleich 1 und der Rest gleich 0. Für Variante 2 sind die ersten m_l diagonalen Elemente von \mathbf{w} gleich 1 und der Rest gleich 0. Für Variante 3 sind alle diago-

nalen Elemente von \boldsymbol{w} gleich 1. Natürlich können beliebige $x < m$ von n Eigenmoden ausgewählt werden, wenn man sich für diese Eigenmoden besonders interessiert.

Die Lösung der Variante 1, \boldsymbol{R} , enthält nur ν Spalten, die nicht null sind. Dies bedeutet, dass nur diesen ν Spalten zugeordnete Sensoren Bedeutung für die Berechnung der Modalkoordinaten haben. Dies deutet eine Möglichkeit an, für interessante Eigenmoden die benötigten Sensoren geeignet zu platzieren.

In der Variante 2 und 3 werden alle Sensorinformationen verwendet. In Variante 2 enthält die i -te dominante Größe $\tilde{\boldsymbol{q}}_i$, $i = 1, \dots, \nu$, den i -ten Eigenmode und alle nicht ausgewählten $n-m_1$ Eigenmoden. Man sollte beachten, dass die Lösung der Variante 2 (\boldsymbol{R}) nur m_1 Spalten enthält, die nicht null Elemente sind, wenn $m_1 < m$ ist. In Variante 3 enthält die i -te dominante Größe $\tilde{\boldsymbol{q}}_i$ im allgemeinen alle Eigenmoden.

3.1.2. Modalerweiterung

Durch die Datenreduktion erhält man ν dominante Modalkoordinaten. Aber nur ν modale Stellgrößen können durch die erhaltenen Modalkoordinaten bestimmt werden. Deshalb ist es nötig, einen Algorithmus zu finden, der die ν modalen Stellgrößen auf p Aktorsignale im realen Raum erweitert. Anhand des Prinzips der unabhängigen modalen Regelung soll die Transformationsmatrix \boldsymbol{T} ($p \times \nu$)

$$\boldsymbol{\Phi}_\nu^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_\nu \quad (3.1-17a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n-\nu}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}_{n-\nu \times \nu} \quad (3.1-17b)$$

sein. Analog zur Reduktion gibt es auch drei Varianten für die Erweiterung, nämlich

Variante 1

Auflösung der Gleichung (3.1-17a) unter der Benutzung der Faktorisierung durch Householder Orthogonalisierung mit Spaltenpivotisierung.

Variante 2

Auflösung der Gleichung (3.1-18)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_\nu^T \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\Phi}_x^T \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_\nu \\ \boldsymbol{0}_{x \times \nu} \end{bmatrix} \quad (3.1-18)$$

wobei x undominante Modalkoordinaten mit $\nu + x = p_1$ sind und $p_1 \leq p$.

Variante 3

Auflösung der Gleichung (3.1-17a) und (3.1-17b) mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Diese drei Varianten kann man auch zu

$$\mathbf{w} \Phi^T \mathbf{F} \mathbf{T} = \mathbf{w} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_v \\ \mathbf{0}_{n-v \times v} \end{bmatrix} \quad (3.1-19)$$

vereinen. Die Auswahl der Gewichtung ist analog der Vorgehensweise bei der Reduktion.

Auf diese Art und Weise kann das System (3-1) zu:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2\mathbf{Z}_v \boldsymbol{\Omega}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Omega}_v^2 \tilde{\mathbf{q}} &= \Phi_v^T \mathbf{F} \mathbf{T}_x \mathbf{u}_{md} \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{R}_x \mathbf{C} \Phi_v \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3-1a)$$

umgeschrieben werden, wobei \mathbf{u}_{md} und $\tilde{\mathbf{q}}$ die Stellgrößen bzw. die verdichteten Messgrößen im Modal-Raum sind. \mathbf{R}_x und \mathbf{T}_x sind die Reduktions- bzw. Erweiterungsmatrix mit den jeweiligen Varianten. Nun hat man den Systemeingang und -ausgang reduziert. Das System (3-1a) ist auch entkoppelt und die Zahl der Freiheitsgrade des Systems wird reduziert. Alle Reglersynthesen für einschleifige Eingrößenregelsysteme können hier verwendet werden. Wie viele verdichtete Messgrößen notwendig sind, wird uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

3.2. Karhunen-Loève-Entwicklung

Die Karhunen-Loève-Entwicklung (KLE) wurde in den 40iger Jahren des letzten Jahrhunderts unabhängig voneinander von Karhunen [KAR 46] und Loève [LOE 48] für die optimale Reihenentwicklung eines stochastischen Prozesses entwickelt. Obwohl außer dem Messrauschen der Regelungsvorgang in der Formkontrolle nicht stochastisch ist, kann die KLE sinngemäß verwendet werden.

Betracht man einen beliebigen, durch einen Vektor $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^n$ dargestellten Punkt in einem n dimensionalen Raum, kann man immer beliebig viele Koordinatensysteme, also eine Menge von n orthogonalen Basisvektoren $\mathbf{w}_\mu \in \mathcal{R}^n$ $\mu = 1, \dots, n$, finden, mit denen dieser Punkt beschrieben wird.

$$\mathbf{p} = \sum_{\mu=1}^n a_\mu \mathbf{w}_\mu = \mathbf{W} \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \mathbf{W}^T \mathbf{p} \quad (3.2-1)$$

Der Vektor \mathbf{w}_μ wird als Basisvektor der KLE bezeichnet. Der Rekonstruktionsfehler ε mit v Basisvektoren \mathbf{w}_μ $\mu = 1, \dots, v$, wird wie folgt definiert.

$$\varepsilon = (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}})^T (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) = \left(\sum_{\mu=1}^n a_\mu \mathbf{w}_\mu - \sum_{\mu=1}^v a_\mu \mathbf{w}_\mu \right)^2 = \left(\sum_{\mu=1+v}^n a_\mu \mathbf{w}_\mu \right)^2 \quad (3.2-2)$$

Die Aufgabe der KLE ist es nun, ein solches Koordinatensystem zu finden, dass für eine vorgegebene Menge von Punkten, $\mathbf{P} = [\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^s]$ im n dimensionalen Raum der Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^s (\mathbf{p}^k - \hat{\mathbf{p}}^k)^T (\mathbf{p}^k - \hat{\mathbf{p}}^k) = \sum_{k=1}^s \sum_{\mu=1+v}^n \mathbf{w}_\mu^T a_\mu^k \sum_{\mu=1+v}^n a_\mu^k \mathbf{w}_\mu = \sum_{k=1}^s \sum_{\mu=1+v}^n (a_\mu^k)^2 = \sum_{\mu=1+v}^n \mathbf{w}_\mu^T \mathbf{C}_p \mathbf{w}_\mu \quad (3.2-3)$$

bei vorgegebenem ν möglichst klein wird. Minimiert man den Rekonstruktionsfehler nach Gleichung (3.2-3) durch die Lösung der entsprechenden Eigenwertgleichung (Gleichung (3.2-4)),

$$C_p w_\mu = \lambda_\mu w_\mu \text{ mit } W = [w_1 w_2 \dots w_n] \quad (3.2-4)$$

erhält man die gewünschte Transformationsmatrix W und die Eigenwerte λ_μ , sowie den Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \sum_{\mu=l+\nu}^n \lambda_\mu \quad (3.2-5)$$

wobei C_p die Korrelationsmatrix der Punktmenge P mit $C_p = PP^T$ ist und $W^T W = I$. Man bezeichnet die Elemente von a als Karhunen-Loève-Koeffizienten oder Karhunen-Loève-Koordinaten (KLK). Diese Koordinaten konstruieren den sogenannte Karhunen-Loève-Raum (KLR).

3.2.1. Reduktionstechnik mit der Karhunen-Loève-Entwicklung

Die einfachste Weise bei der Verwendung der KLE für die Formkontrolle ist das Durchführen der KLE direkt im Ein- und Ausgangsraum. Man nimmt an, dass eine repräsentative Menge der interessierenden gemessenen Daten $Y = [y_1, y_2, \dots, y_l]$ ($m \times l$) zur Verfügung steht. Diese Daten können die Soll Daten und/oder die Deformation wegen einer Störung sein. Sie können auch die stationären Werte und/oder eine Periode der dynamischen Werte sein. Dann lässt man sich die Transformationsmatrix der KLE

$$W_S = [w_1 w_2 \dots w_S] \quad (3.2-6)$$

in üblicher Weise ermitteln [KAR 46][LOE 48]^{3.2}. s ist dabei die gewählte Länge der Reihenentwicklung der Gleichung (3.2-1) bei vorgegebenem Rekonstruktionsfehler ε .

3.2.2. Erweiterungstechnik mit der Karhunen-Loève-Entwicklung

Auf diese Weise hat man nur den Systemausgang, aber nicht den Systemeingang reduziert. Wie in der Modalreduktion erhält man s KLK nach der Reduktion und nur s Stellgrößen im KLR können durch die erhaltenen KLK bestimmt werden. Deshalb ist es auch nötig, eine Me-

^{3.2} Schritt 1: Bilden der Korrelationsmatrix der interessierenden gemessenen Daten

$$C_y = YY^T$$

Schritt 2: Berechnen der Eigenvektoren und Eigenwerte von C_y (Gleichung 3.2-4)

Schritt 3: Sortieren der Eigenwerte und der entsprechenden Eigenvektoren nach absteigender Reihenfolge

Schritt 4 Wahl der Länge der Reihenentwicklung anhand der Gleichung (3.2-5) und des vorgegebenen Rekonstruktionsfehler ε .

thode zu finden, die die s KLE-Stellgrößen zu p Stellgrößen im realen Raum erweitert. Es ist offensichtlich, dass man die gleiche Matrix \mathbf{W}_S nicht einfach benutzen kann, um die s Stellgrößen \mathbf{u}_{kl} im KLR wieder in die Stellgrößen \mathbf{u} im realen Raum zurückzutransformieren. Folglich benötigt man eine Methode, welche die Transformationsmatrix \mathbf{T} bestimmt, um den Regelkreis zu schließen. Wie man die Matrix konkret bestimmen kann, wird uns auch im nächsten Kapitel beschäftigen.

Auf diese Art und Weise kann das System (3-1) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} &= \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{u}_{kl} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{W}_S^T \mathbf{C}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3-1b)$$

umgeschrieben werden, wobei \mathbf{u}_{kl} die Stellgrößen im KLR sind. \mathbf{a} sind die verdichteten Messgrößen oder KLK.

Jetzt hat man den Systemeingang und -ausgang reduziert. Aber das System (3-1b) ist immer noch gekoppelt und die Zahl der Freiheitsgrade des Systems wird nicht geändert. Die bekannten Reduktionsmethoden (siehe Abschnitt 1.2.1 und C.8) können hier selbstverständlich verwendet werden, um die Freiheitsgrade des Systems zu reduzieren. Da das System gekoppelt ist und mehrere Eingänge und mehrere Ausgänge hat, muss man für die Reglersynthese H^∞ -Regler verwenden (siehe Abschnitt 1.3.2 und C.11).

3.3. Zusammenhang zwischen Modal- und Karhunen-Loève-Entwicklung

Anhand der Gleichung (3.1-4) können die Messgrößen eines mechanischen Systems beschrieben werden als

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, t) = \begin{bmatrix} y(s_1, t) \\ \vdots \\ y(s_m, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i(s_1) q_i(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i(s_m) q_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.3-1)$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}_i(s_j)$ der Wert des i -ten Eigenmode an der j -ten Sensorstelle ist. Man sollte beachten, dass $\boldsymbol{\varphi}_i(s_j) = \mathbf{c}_j \boldsymbol{\varphi}_i$ ist^{3.3}, wobei \mathbf{c}_j die j -te Zeile der Messmatrix \mathbf{C} ist. Die verdichtete Größe a_j der KLE wird zu

$$a_j = [\mathbf{w}_j(s_1), \dots, \mathbf{w}_j(s_m)] \mathbf{y}(\mathbf{s}, t) = \sum_{k=1}^m \mathbf{w}_j(s_k) \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i(s_k) q_i(t)$$

wobei \mathbf{w}_j die j -te Spalte der Matrix \mathbf{W}_S ist. Vertauscht man beide Summen, und definiert man

$$\bar{a}_{ji} = \sum_{k=1}^m \mathbf{w}_j(s_k) \boldsymbol{\varphi}_i(s_k), \text{ erhält man}$$

^{3.3} Falls der Sensor als ein Punkt betrachtet wird, ansonst ist diese Gleichung eine Näherung.

$$a_j = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} q_i(t) \quad (3.3-2)$$

Das bedeutet, dass die KLK eine lineare Kombination der Modalkoordinaten sind. Jede KLK enthält alle Modalkoordinaten.

Die stationären Werte der Modalkoordinaten q^{st} können durch

$$q^{st} = \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{a}) \mathbf{u}^{st} \quad (3.3-3)$$

dargestellt werden, wobei $\Phi^T(\mathbf{a})$ der Wert der Eigenmoden an den Aktorstellen ist. Setzt man die Gleichung (3.3-3) in die Gleichung (3.3-1) ein, erhält man die stationären Messgrößen zu

$$\mathbf{y}^{st} = \Phi(\mathbf{s}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{a}) \mathbf{u}^{st} \quad (3.3-4)$$

Wählt man die Stellgrößen \mathbf{u} so, dass die stationären Werte $\mathbf{u}^{st} = \mathbf{I}U_0$ sind, wobei U_0 die Amplitude (eine skalare Konstante) von \mathbf{u} ist, wird die Gleichung (3.3-4) zu

$$\mathbf{Y} = \Phi(\mathbf{s}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{a}) U_0$$

Bildet man die Korrelationsmatrix von \mathbf{Y} , ergibt sich

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T = \Phi(\mathbf{s}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{a}) \Phi(\mathbf{a}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{s}) U_0^2 \quad (3.3-5)$$

Multipliziert man rechts mit $\Phi(\mathbf{s})$, wird die Gleichung (3.3-5) zu

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \Phi(\mathbf{s}) = \Phi(\mathbf{s}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{a}) \Phi(\mathbf{a}) \Omega^{-2} \Phi^T(\mathbf{s}) \Phi(\mathbf{s}) U_0^2 \quad (3.3-6)$$

Beim Vergleich mit einer Matrixdarstellung der Gleichung (3.2-4) bei der Berechnung der KLE:

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{A},$$

kann man feststellen, dass die Transformationsmatrix der KLE \mathbf{W} gleich den Eigenmoden Φ ist, wenn $\Phi(\mathbf{s})$ und $\Phi(\mathbf{a})$ zueinander orthogonal sind. Dies wird erfüllt, wenn die Anzahl der Sensoren und Aktoren gleich der Anzahl der Freiheitsgrade ist. Daraus folgt, dass in der Praxis die durch die stationären Messgrößen mit den Eingaben $\mathbf{u} = U_0 \mathbf{I}(t)$ berechnete Transformationsmatrix \mathbf{W} der KLE eine Approximation der Eigenmoden der mechanischen Systeme ist.

3.4. Simulationsergebnisse

Das Simulationsobjekt ist ein einseitig befestigter Balken. Bild 3-2 zeigt die Skizze des Simulationsaufbaus. 10 Piezoplaten (10×10mm) werden als Aktoren verwendet. 10 Dehnungsmessstreifen (6.35(effektive Länge)×2.72 mm) und die z-Koordinaten der Mittelpunkte des Dehnungsmessstreifen werden als Sensoren benutzt. Das Material des Grundkörpers ist Messing. Die Materialkonstanten sind in Tabelle 3-1 aufgelistet.

Zur Einschätzung des vorgestellten Reduktionsverfahrens ist eine quantitative Fehlerbewertung erforderlich. Auf diese Weise lässt sich auch die Mindestzahl ν der reduzierten Daten bestimmen. Wir führen ein:

$$\text{Rekonstruktionsfehler: } \mathbf{E}_y = \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{SR})\mathbf{y} \quad (3.4-1)$$

$$\text{Reduktionsfehler: } \mathbf{E}_q = \mathbf{q}_\nu - \tilde{\mathbf{q}}_\nu = \mathbf{q}_\nu - \mathbf{RC}\Phi \mathbf{q} \quad (3.4-2)$$

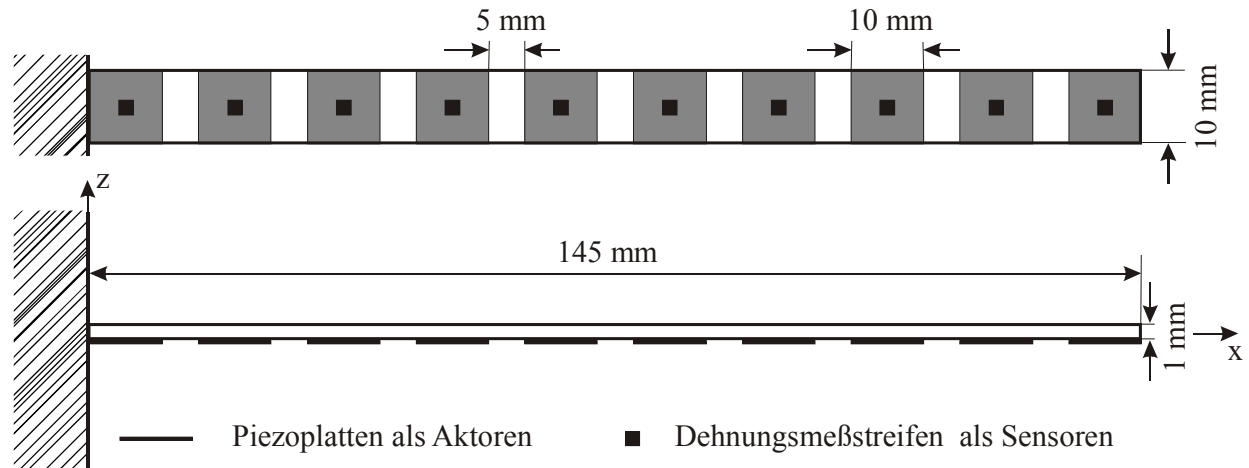


Bild 3-2: Skizze des Simulationsaufbaus

Tabelle 3-1: Die Materialkonstanten von Messing und Piezokeramik

Messing:							
E-Mod.(N/m ²)		1.12×10 ¹¹					
Querkontraktionszahl		0.333					
Piezokeramik:							
Elastik: (N/m ²)				Piezoelektrik:(N/Vm)		Dielektrik: (C/Vm)	
c ₁₁	1.076×10 ¹¹	c ₃₃	1.004×10 ¹¹	e ₁₅	12.0	κ ₁₁	1.98×10 ⁻⁹
c ₁₂	6.312×10 ¹⁰	c ₄₄	1.962×10 ¹⁰	e ₃₃	15.1	κ ₃₃	2.10×10 ⁻⁹
c ₁₃	6.385×10 ¹⁰	c ₆₆	2.224×10 ¹⁰	e ₃₁	-9.6		

Weiterhin definiert man entsprechende Skalarmaßstäbe als Mittelwert über die Komponenten und die Zeit.

$$\varepsilon_y = \left(\frac{1}{mT} \int_0^T |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4-3)$$

$$\varepsilon_q = \left(\frac{1}{\nu T} \int_0^T |\mathbf{q}_\nu - \tilde{\mathbf{q}}_\nu|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4-4)$$

Diese lassen sich durch Bezug auf den Effektivwert des unverfälschten Vektors auch leicht als relative Größen angeben.

Obwohl bei Verwendung der Gleichung (3.2-5) die Mindestzahl ν der reduzierten Daten für die KLE bestimmt werden kann, wird die Gleichung (3.4-3) im Simulationsbeispiel verwendet, um die Ergebnisse mit der Modalreduktion zu vergleichen.

Um die Transformationsmatrix \mathbf{W}_S gewinnen zu können, wird zunächst jeder Aktor individuell mit 200V Spannung beaufschlagt und jeder stationäre Wert gemessen und die Korrelationsmatrix gebildet. Unter Verwendung der Gleichung (3.2-4) wird \mathbf{W}_S jeweils für die Koordinaten und für die Dehnungsmessstreifen als Sensor berechnet. Bild 3-3 zeigt die durch die individuelle Aktion des Aktors erzeugten 10 Formen. Die „gelernten“ KLK für die z-Koordinaten des zentralen DMSs und des DMS als Sensoren werden in der Tabelle 3-2 aufgelistet.

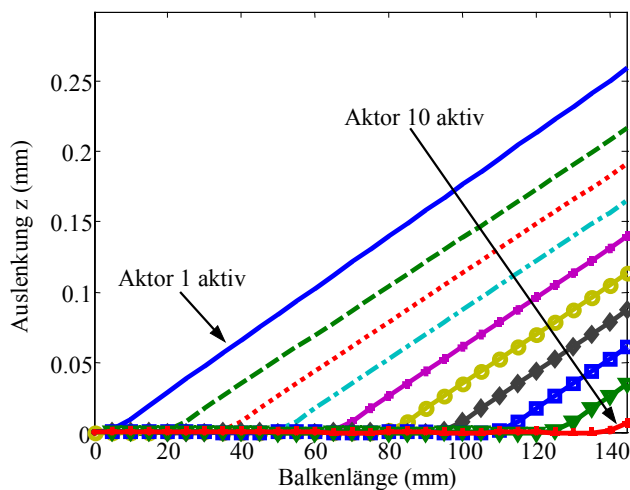


Bild 3-3: Die durch die individuelle Aktion des Aktors erzeugten 10 Formen

Tabelle 3-2: „gelernte“ KL-Koordinaten

a_{kl}	Koordinaten	DMS
1	0.65263	0.17515
2	0.01620	0.17296
3	0.00202	0.16910
4	0.00051	0.16431
5	0.00018	0.15935
6	0.00000	0.15483
7	0.00000	0.15110
8	0.00000	0.14837
9	0.00000	0.14670
10	0.00000	0.13654

Für die erste Simulation werden willkürlich den Aktoren folgende Spannungen

$$\mathbf{u}_e = [185, 168, 152, 130, 110, 89, 69, 48, 27, 7]^T \text{ (V)}$$

eingespeist, die stationären Ausgangssignale des Sensors werden gemessen und Reduktion und Rekonstruktion werden durchgeführt. Für die Reduktion und Rekonstruktion werden die ersten 6 Eigenmoden betrachtet. Die Tabellen 3-3 und 3-4 zeigen die stationären Reduktionsfehler mit den zentralen z-Koordinaten der DMS bzw. mit den DMS-Signalen als Sensoren. Die ersten Zeilen in den Tabellen sind die Anzahl der verdichteten Größen ν . Z. B. $\nu = 3$ bedeutet, dass der erste bis dritte Eigenmode aus den Sensorsignalen extrahiert (reduziert) werden. Die Reduktionsfehler in den Zeilen 2 bis 4 der Tabellen werden durch Gleichung (3.4-4) angegeben. Da die KLE die Eigenmoden nicht extrahiert, werden die Ergebnisse der KLE hier nicht berücksichtigt.

Tabelle 3-3: Stationärer Reduktionsfehler (ε_q %) mit z-Koordinaten des DMSs als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	4.113	0.454	0.105	0.089	0.083	0.076
Variante 2	3.782	675.38	781.47	781.48	781.5	795.36
Variante 3	92.157	92.099	92.100	92.163	92.174	92.212

Tabelle 3-4: Stationärer Reduktionsfehler (ε_q %) mit den DMS-Signalen als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	51.7	75.0	71.8	73.1	72.4	68.8
Variante 2	21.4	70.6	76.9	76.9	76.9	80.5
Variante 3	100	100	100	100	100	100

Wie erwartet ist die Variante 3 für die Reduktion, oder genauer gesagt, für die Extraktion sowohl mit Koordinaten als auch mit DMS nicht gut geeignet, weil jede extrahierte Komponente alle Eigenmoden enthält (siehe 3.1.1).

Die Variante 1 ist für die Extraktion gut geeignet, wenn die Koordinaten als Sensorsignale benutzt werden. Der Reduktionsfehler wird mit steigender Anzahl der extrahierten Größen reduziert. Die extrahierte Größe i der Variante 1 enthält den i -ten Eigenmode und die Eigenmoden, die größer als ν sind. Normalerweise ist der Anteil der niedrigeren Eigenmodi im Signal größer als der der höheren Eigenmodi. Mit steigender Anzahl der extrahierten Größen ν wird der Anteil, der nicht zur extrahierten Größe gehört, reduziert. Damit wird der Fehler verringert. Man sollte beachten, dass die Anzahl der Sensoren ansteigen muss, um das Abtasttheorem einzuhalten, wenn die Anzahl der extrahierten Größen steigt.

Wenn ein DMS als Sensor benutzt wird, ist Variante 1 für die Extraktion nicht gut geeignet. Der Grund besteht darin, dass die Größe des DMS relativ zu der Größe des Balkens zu groß ist und die Anzahl des DMS zu klein ist. Dadurch enthält das Signal des DMS zu viele Eigenmoden und diese können nicht sauber getrennt werden.

Die Variante 2 ist sehr schlecht für die Extraktion sowohl mit den Koordinaten als Sensorsignal als auch mit der Dehnung als Sensorsignal geeignet. Die Dehnung als Sensorsignal ist jedoch besser als die Koordinaten als Sensorsignal. In Variante 2 enthält die extrahierte Größe i , $1 \leq i \leq \nu$, die i -te Eigenmode und die Eigenmodi, die größer als m sind. Wenn die Anzahl der Sensoren zu klein ist, oder der Abstand der Sensoren zu groß ist, dass das Abtasttheorem nicht eingehalten werden kann, werden die Eigenmodi nicht sauber getrennt und dadurch große Fehler verursacht. Später wird ein anderes Beispiel gegeben, um die genaue Ursache festzustellen.

In Tabelle 3-5 und 3-6 werden die Ergebnisse des stationären Rekonstruktionsfehlers mit den zentralen z-Koordinaten der DMS bzw. mit den DMS-Signalen als Sensoren angegeben. Hier

wird die KLE miteinbezogen und in Zeile 5 eingetragen. Für die KLE bedeutet die verdichtete Größe $\nu = 3$, dass die KLK a_1 bis a_3 verwendet werden, um die Messdaten zu rekonstruieren. Der Rekonstruktionsfehler in diesen Tabellen wurde mit Gleichung (3.4-3) berechnet.

Wie erwartet ist die Variante 2 sehr schlecht geeignet für die Rekonstruktion sowohl mit den Koordinaten als Sensorsignal als auch mit der Dehnung als Sensorsignal. Der Grund wird später erklärt werden. Wenn die Koordinaten als Sensorsignal verwendet werden, ist die KLE die beste Methode für die Rekonstruktion. Sie braucht etwa die Hälfte der verdichteten Größe der besten Modaltransformation (Variante 1), um das gleiche Fehlerniveau zu erreichen. Wenn die Dehnung als Sensorsignal benutzt wird, ist die Variante 1 die beste Methode für die Rekonstruktion, dagegen ist die KLE sehr schlecht. Auf dieses Ergebnis wird in Tabelle 3-2 hingewiesen. Obwohl die Variante 3 für Reduktion sehr schlecht ist, liefert sie die vernünftigen Ergebnisse sowohl für die Koordinaten als Sensorsignal als auch für die Dehnung als Sensorsignal.

Tabelle 3-5: Stationärer Rekonstruktionsfehler (ϵ_y , %) mit z-Koordinaten der DMS als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	4.994	0.558	0.150	0.074	0.065	0.056
Variante 2	5.779	671.90	711.54	711.64	711.20	737.24
Variante 3	36.217	27.236	22.192	14.403	10.485	8.483
KL	2.601	0.140	0.097	0.015	0.013	0.002

Tabelle 3-6: Stationärer Rekonstruktionsfehler (ϵ_y , %) mit DMS als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	24.44	10.61	4.30	3.86	2.76	2.66
Variante 2	35.34	239.35	407.84	407.5	407.38	1225.8
Variante 3	28.94	11.59	9.58	8.92	8.92	7.41
KL	99.25	98.31	97.23	96.08	94.43	92.40

In der zweiten Simulation werden die gleichen Spannungen wie in der ersten Simulation in die Aktoren eingespeist, die dynamischen Ausgangssignale der Sensoren werden gemessen und die Reduktion und Rekonstruktion werden durchgeführt. Für die Reduktion und Rekonstruktion werden ebenfalls die ersten 6 Eigenmoden betrachtet. Für die KLE wird die durch die stationären Werte gelernte Transformationsmatrix \mathbf{W}_S verwendet. Die Tabelle 3-7 und 3-8 zeigen den dynamischen Reduktionsfehler und Tabelle 3-9 und 3-10 den dynamischen Rekonstruktionsfehler.

Beim Vergleich der Tabellen 3-3 bis 3-6 mit den Tabellen 3-7 bis 3-10 ergibt sich, dass bei der modalen Transformation die Reduktions- und Rekonstruktionsfehler der dynamischen und statischen Fälle in der gleichen Größenordnung sind. Bei der KLE ist der dynamische Rekon-

struktionsfehler ein bisschen größer als der statische, wenn die Koordinaten als Sensorsignal verwendet werden. Aber diese Abweichung ist so gering, dass sie in der Praxis keine Bedeutung hat. Dies bedeutet, dass die Transformationsmatrix \mathbf{W}_S durch die statischen Werte gelernt werden kann.

Tabelle 3-7: Dynamischer Reduktionsfehler (ε_q %) mit z-Koordinaten der DMS als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	2.912	0.355	0.102	0.084	0.080	0.075
Variante 2	3.780	675.31	781.52	781.52	781.55	795.4
Variante 3	92.20	92.18	92.18	92.25	92.26	92.29

Tabelle 3-8: Dynamischer Reduktionsfehler (ε_q %) mit den DMS-Signale als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	55.9	74.2	71.8	72.9	72.3	68.6
Variante 2	21.4	70.5	77.0	77.0	77.0	80.6
Variante 3	100	100	100	100	100	100

Tabelle 3-9: Dynamischer Rekonstruktionsfehler (ε_r %) mit z-Koordinaten der DMS als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	3.537	0.432	0.146	0.069	0.063	0.057
Variante 2	4.98	673.36	713.06	713.16	712.72	738.81
Variante 3	36.88	27.15	22.06	14.35	10.44	8.44
KL	1.550	0.115	0.105	0.017	0.017	0.013

Tabelle 3-10: Dynamischer Rekonstruktionsfehler (ε_r %) mit DMS als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	20.02	9.49	4.26	3.85	2.76	2.69
Variante 2	33.35	242.1	412.6	412.2	412.1	1240.3
Variante 3	70.71	70.50	53.28	36.21	35.75	35.64
KL	99.19	98.17	96.99	95.72	93.97	91.75

In der dritten Simulation wirkt eine gleichmäßig verteilte Störungskraft ($\mathbf{u}_d = 0.01$ N) am äußersten Rand des Balkens ein und bei allen Aktoren wird keine Spannung eingespeist. Die dynamischen Ausgangssignale des Sensors werden gemessen und die Reduktion und Rekonstruktion werden durchgeführt. Für die KLE wird die gleiche Transformationsmatrix \mathbf{W}_S wie in der Simulation 1 und 2 verwendet. Die Tabellen 3-11 und 3-12 zeigen die dynamischen Reduktionsfehler und die Tabellen 3-13 und 3-14 die dynamischen Rekonstruktionsfehler.

Beim Vergleich der Tabellen 3-7 bis 3-10 mit den Tabellen 3-11 bis 3-14 ergibt sich, dass der Reduktions- und Rekonstruktionsfehler der Störung bei Variante 1 und 2 kleiner als der Reduktions- und Rekonstruktionsfehler der Steuerung sind. Dies gilt sowohl für die Koordinaten

als Sensorsignal als auch für die Dehnung als Sensorsignal. Für die Variante 3 ist der Reduktionsfehler bei der Störung gleich dem bei der Steuerung, sowohl für die Koordinaten als Sensorsignal als auch für die Dehnung als Sensorsignal. Der Rekonstruktionsfehler der Variante 3 ist gleich für die Koordinaten als Sensorsignal bei der Störung wie bei der Steuerung, aber bei der Dehnung als Sensorsignal ist der Rekonstruktionsfehler der Störung kleiner als der der Steuerung. Daraus folgt, dass die Mindestzahl ν der reduzierten Größe durch die Testergebnisse der Steuerungskräfte bestimmt werden kann.

Tabelle 3-11: Dynamischer Reduktionsfehler (ε_q %) mit z-Koordinaten der DMS als Sensorsignalen und \mathbf{u}_d

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	2.887	0.391	0.083	0.041	0.022	0.012
Variante 2	0.307	29.18	32.38	32.38	32.38	33.61
Variante 3	92.20	92.19	92.19	92.25	92.26	92.30

Tabelle 3-12: Dynamischer Reduktionsfehler (ε_q %) mit den DMS-Signalen als Sensorsignalen und \mathbf{u}_d

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	10.01	0.482	0.252	0.206	0.159	0.074
Variante 2	55.26	62.04	64.40	64.40	64.40	64.74
Variante 3	100	100	100	100	100	100

Tabelle 3-13: Dynamischer Rekonstruktionsfehler (ε_y %) mit z-Koordinaten der DMS als Sensorsignalen und \mathbf{u}_d

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	3.442	0.461	0.102	0.040	0.017	0.009
Variante 2	2.64	28.97	29.96	29.98	29.95	32.08
Variante 3	36.99	27.23	22.10	14.40	10.48	8.47
KL	1.466	0.134	0.097	0.067	0.063	0.062

Tabelle 3-14: Dynamischer Rekonstruktionsfehler (ε_y %) mit DMS als Sensorsignalen und \mathbf{u}_d

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	18.96	7.30	3.75	2.41	1.90	1.26
Variante 2	57.19	212.15	376.41	376.36	375.96	666.54
Variante 3	24.08	10.82	10.29	9.29	9.16	7.27
KL	99.37	98.51	97.44	96.19	94.43	92.11

Für die KLE ist der Rekonstruktionsfehler bei der Störung etwas größer als bei der Steuerung, wenn die Koordinaten als Sensorsignale verwendet werden. Aber dieses hat in der Praxis keine Bedeutung. Da der Rekonstruktionsfehler beim dynamischen und statischen Fall der Steuerung kaum unterschiedlich ist, kann die Transformationsmatrix \mathbf{W}_S durch die statischen Daten gewonnen werden, die bei der individuell maximalen Aktivierung des Aktors entstehen.

In der letzten Simulation dieses Kapitels werden die z-Koordinaten der folgenden Positionen

$$x = [0,5,10,15,20,25,30,\dots,145] \text{ (mm) und } y = 5 \text{ mm}$$

als Sensorsignal verwendet. Die anderen Bedingungen sind gleich den Bedingungen in der ersten Simulation. Der Reduktions- und Rekonstruktionsfehler ist in den Tabellen 3.4-15 und 3.4-16 aufgelistet.

Tabelle 3-15: Stationärer Reduktionsfehler (ε_q %) mit z-Koordinaten der Position von $[x, y]$ als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	4.113	0.414	0.101	0.050	0.026	0.050
Variante 2	0.004	0.318	0.898	0.899	0.918	0.918
Variante 3	67.18	67.14	67.25	67.25	67.27	67.27

Tabelle 3-16: Stationärer Rekonstruktionsfehler (ε_y %) mit z-Koordinaten der Position von $[x, y]$ als Sensoren und \mathbf{u}_c

Verd. Größe ν	1	2	3	4	5	6
Variante 1	5.307	0.568	0.141	0.062	0.059	0.050
Variante 2	3.638	0.504	0.910	0.913	0.924	0.924
Variante 3	59.29	52.26	48.35	45.91	45.58	44.32

Beim Vergleich der Tabellen 3-15 und 3-16 mit den Tabellen 3-3 und 3-5 ergibt sich, dass das Resultat der Variante 2 erheblich verbessert wurde. Das bedeutet, dass der Abstand der z-Koordinaten des zentralen DMS so groß ist, dass die Abtasttheorie für die 10-te Eigenmode nicht gewährleistet werden kann.

Zusammenfassend liefert die Variante 1 der Modalreduktionstechnik immer akzeptable Ergebnisse der Reduktion und Rekonstruktion, sowohl mit Koordinaten als auch mit der Dehnung als Sensorsignal. Wenn die Sensoren so platziert werden, dass das Abtasttheorem für die berücksichtigten Eigenmoden nicht verletzt wird, werden die Ergebnisse der Variante 2 besser als Variante 1 [LIL 97][ZHA 97]. Weil in der Variante 3 alle Eigenmoden berücksichtigt werden und die Sensorplatzierung die Abtasttheorem für alle Eigenmoden nicht gewährleisten kann, sind die Ergebnisse immer schlechter als in Variante 1 und 2.

Die KLE liefert die besten Ergebnisse für die Rekonstruktion, wenn die Koordinaten als Sensorsignal verwendet werden. Für Dehnung als Sensorsignal ist die KLE sehr schlecht geeignet. Ein Grund dafür ist, dass die Dehnungssignale relativ unkorreliert sind. Die KLE braucht die Korrelation der Signale (siehe Fußnote 3.2 und die Gleichung (3.2-5)). Eine wichtige Erkenntnis ist, dass die Mindestzahl ν der reduzierten Größen durch die Testergebnisse der statischen Steuerungskräfte bestimmt werden kann, sowohl für die Modalreduktion als auch für die KLE.

4. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit und die Stabilität in rückgekoppelten adaptiven mechanischen Systemen

Im letzten Kapitel wurden die Methoden der Reduktion ohne Rückkopplung vorgestellt. Theorien und Simulationen zeigen, dass durch Reduktion ein Fehler entsteht. In der Formkontrolle ist jedoch die Rückkopplung erforderlich. Wie wird sich das System verhalten? Wird das System stabil bleiben, wenn die Reduktionstechnik verwendet wird? Wie genau wird das System sein, wenn die Reduktionstechnik verwendet wird? In diesem Kapitel sollen diese Fragen beantwortet werden.

4.1. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit

Zunächst wird die Genauigkeit unter Verwendung der Reduktionstechnik untersucht. Es wird vorausgesetzt, dass wir

1. die Reduktions- und Erweiterungsmatrix R bzw. T ,
2. die Transformationsmatrix Φ und W_s , und
3. einen Regler mit der Form $G_R(s)/s$, der für das abgeschlossene System stabil ist,

haben. Für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Systems folgt bei Verwendung der Reduktionstechnik

$$y(s) = G(s)T[sI + G_R(s)RG(s)T]^{-1}G_R(s)r(s) \quad (4.1-1)$$

wobei $G(s) = C[Ms^2 + Ds + K]^{-1}F$ die Übertragungsfunktion der zu regelnden Strecke ist und r der Sollwert im verdichteten Raum. Bei der Modalreduktion kann $G(s)$ wie

$$G(s) = C\Phi[s^2 + 2Z\Omega s + \Omega^2]^{-1}\Phi^T F$$

geschrieben werden.

Bei der Verwendung des Endwertsatzes wird die Gleichung (4.1-1) zu

$$y^{st} = G(s=0)T[RG(s=0)T]^{-1}r^{st} \quad (4.1-2)$$

4.1.1. Modal-Entwicklung

Bei der Modalreduktion werden

$$RC\Phi = [I_v \ E_{red1}] \text{ und } \Phi^T FT = [I_v^T \ E_{erw1}^T]^T \text{ für Variante 1} \quad (4.1-3a)$$

$$RC\Phi = [I_v \ \theta_{v,m_1-v} \ E_{red2}] \text{ und } \Phi^T FT = [I_v^T \ \theta_{v,p_1-v}^T \ E_{erw2}^T]^T \text{ für Variante 2} \quad (4.1-3b)$$

$$RC\Phi = E_{red3} \text{ und } \Phi^T FT = E_{erw3} \text{ für Variante 3} \quad (4.1-3c)$$

und $\mathbf{r} = \mathbf{q}_s$ sein.

Setzt man die Gleichungen (4.1-3a,b,c) in die Gleichung (4.1-2) ein, erhält man für Variante 1 und 2,

$$\mathbf{y}^{st} = \left[\mathbf{C}\Phi_v - (\mathbf{C}\Phi_v \mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{C}\Phi_x \left(\Omega_x^2 + \mathbf{E}_{erw} \Omega_v^2 \mathbf{E}_{red} \right)^{-1} \mathbf{E}_{erw} \Omega_v^2 \right] \mathbf{q}_s^{st} \quad (4.1-4a)$$

und

$$\mathbf{y}^{st} = \mathbf{C}\Phi \Omega_n^{-2} \mathbf{E}_{erw3} \left(\mathbf{E}_{red3} \Omega_n^2 \mathbf{E}_{erw3} \right)^{-1} \mathbf{q}_s^{st} \quad (4.1-4b)$$

für Variante 3.

Für Variante 1 ist \mathbf{E}_{erw} und \mathbf{E}_{red} in der Gleichung (4.1-4a) gleich \mathbf{E}_{erw1} bzw. \mathbf{E}_{red1} . x ist gleich $n-v$. Für Variante 2 ist $x = \min(n-m_1, n-p_1)$. \mathbf{E}_{erw} ist gleich den letzten x Zeilen von \mathbf{E}_{erw2} und \mathbf{E}_{red} gleich den letzten x Spalten von \mathbf{E}_{red2} .

Beim Vergleich der Definition der Rekonstruktions- und Reduktionsfehler im Kapitel 3 mit den Gleichungen (4.1-4a) und (4.1-4b) ergibt sich, dass die stationäre Genauigkeit wegen der Rückkopplung und des Reduktions- und Erweiterungsfehlers weder vom Rekonstruktionsfehler noch vom Reduktionsfehler direkt beschrieben werden kann. Aber die Gleichung (4.1-4a) weist darauf hin, dass die stationäre Genauigkeit proportional zur Genauigkeit der Rekonstruktion ist. Wenn der Rekonstruktionsfehler gleich Null ist, ist $\mathbf{C}\Phi_v \mathbf{R} - \mathbf{I}$ gleich Null (s. Gleichung (3.4-1) und Gleichung (3.1-12)).

Es sei

$$\mathbf{q}_s^{st} = \mathbf{R} \mathbf{y}_s^{st} \quad (4.1-5)$$

dann wird die Gleichung (4.1-4a) zu $\mathbf{y}^{st} = \mathbf{y}_s^{st}$. D. h. der stationäre Fehler ist gleich Null.

Daraus folgt, dass für Variante 1 und 2 die Mindestzahl v der verdichteten Größen durch die Rekonstruktionsfehler der Sollformen bestimmt werden kann. Wegen des Effektes der Rückkopplung und des Reduktions- bzw. Erweiterungsfehlers ist die stationäre Genauigkeit niedriger als die Genauigkeit der Rekonstruktion der Sollformen.

Hat man eine perfekte Erweiterung ($\mathbf{E}_{erw} = \mathbf{0}$), wird die stationäre Genauigkeit genau gleich der Genauigkeit der Rekonstruktion der Sollformen sein. Zur Realisierung einer perfekten Erweiterung benötigt man sogenannte Modalaktoren. Das Prinzip der Modalaktoren ist gleich dem Prinzip der Modalsensoren [LEE 92]. Ein Modalaktor ist ein verteilter Aktor. Entweder die Form oder das Polarisierungsfeld des Piezoaktors soll gleich der zu steuernden Eigenmode sein. Dies ist keine leichte Aufgabe in der Praxis, besonders für Aktoren. Bislang wurden nur Modalsensoren auf Balken realisiert.

Für Variante 3 gibt es keinen Zusammenhang zwischen der stationären Genauigkeit und der Rekonstruktions- oder Reduktionsgenauigkeit. Falls man die Variante 3 verwenden möchte, kann der Sollwert der Modalkoordinaten durch

$$C\Phi \Omega_n^{-2} E_{erw3} (E_{red3} \Omega_n^2 E_{erw3})^{-1} R_s = I \quad (4.1-6)$$

berechnet werden.

4.1.2. Karhunen-Loève-Entwicklung

Bei der Karhunen-Loève-Entwicklung werden $R = W_S^T$ und $r = a_S$. Dann wird die Gleichung (4.1-2) zu

$$y^{st} = G(s=0)T [W_S^T G(s=0)T]^{-1} a_S^{st} \quad (4.1-7)$$

Nun soll T so bestimmt werden, dass $y^{st} = W_S a_S^{st}$. Da $W_S^T W_S$ gleich der Einheitsmatrix ist, erhält man $G(s=0)T = W_S$. Daraus folgt

$$T = G(s=0)^+ W_S \quad (4.1-8)$$

Das hochgesetzte „+“ bedeutet eine allgemeine Inversion, wenn die Anzahl der Sensoren und der Aktoren nicht gleich ist. Es ist deutlich, dass der Sollwert der Karhunen-Loève-Koeffizienten gleich

$$a_S^{st} = W_S^T y_s^{st} \quad (4.1-9)$$

sein muss. Damit ist die stationäre Genauigkeit gleich der Rekonstruktionsgenauigkeit der Sollformen.

4.2. Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die Stabilität

Im letzten Abschnitt wurde der Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die stationäre Genauigkeit des abgeschlossenen Systems untersucht. Bei der Karhunen-Loève-Entwicklung ist die stationäre Genauigkeit des abgeschlossenen Systems gleich der Reduktionsgenauigkeit der Sollformen. Dies gilt bei der Modal-Entwicklung nur approximativ.

Nach der Reduktion und Erweiterung wird der Regler im reduzierten Raum entworfen. Kann dieser Regler das originale System stabilisieren? In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Reduktion und der Erweiterung auf die Stabilität untersucht.

4.2.1. Modal-Entwicklung

Die Gleichung (4.1-1) beschreibt die Übertragungsfunktion des abgeschlossenen Systems. Um die Analyse zu erleichtern, wird die Gleichung wie folgend umgeschrieben.

$$\begin{bmatrix} G_{cc}(s) & G_{cd}(s) \\ G_{dc}(s) & G_{dd}(s) \end{bmatrix} q(s) = \begin{bmatrix} \Phi_v^T \\ \Phi_{n-v}^T \end{bmatrix} FTG_R(s) / s q_s(s) \quad (4.2-1)$$

wobei $\mathbf{G}_{cc}(s) = s^2 + 2\mathbf{Z}_v\boldsymbol{\Omega}_v s + \boldsymbol{\Omega}_v^2 + \boldsymbol{\Phi}_v^T \mathbf{FTG}_R(s) / s\mathbf{RC}\boldsymbol{\Phi}_v$, $\mathbf{G}_{dc}(s) = \boldsymbol{\Phi}_{n-v}^T \mathbf{FTG}_R(s) / s$,
 $\mathbf{G}_{cd}(s) = \mathbf{G}_R(s) / s\mathbf{RC}\boldsymbol{\Phi}_{n-v}$ und $\mathbf{G}_{dd}(s) = s^2 + 2\mathbf{Z}_{n-v}\boldsymbol{\Omega}_{n-v} s + \boldsymbol{\Omega}_{n-v}^2 + \boldsymbol{\Phi}_{n-v}^T \mathbf{FTG}_R(s) / s\mathbf{RC}\boldsymbol{\Phi}_{n-v}$
sind.

Beim Vergleich mit der Gleichung (3-1a) ergibt sich, dass $\mathbf{G}_{cc}(s)$ die Übertragungsfunktion ist, anhand der der Regler entworfen werden soll. Die anderen Übertragungsfunktionen werden im Reglerentwurf nicht berücksichtigt. Das abgeschlossene System wird genau dann stabil, wenn alle Wurzeln der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{cc}(s) & \mathbf{G}_{cd}(s) \\ \mathbf{G}_{dc}(s) & \mathbf{G}_{dd}(s) \end{pmatrix} = 0 = \det(\mathbf{G}_{cc}(s)) \det(\mathbf{G}_{dd}(s) - \mathbf{G}_{dc}(s)\mathbf{G}_{cc}(s)^{-1}\mathbf{G}_{cd}(s)) \quad (4.2-2)$$

links der j -Achse liegen. Im Reglerentwurfsvorgang ist es garantiert, dass alle Wurzeln der Gleichung $\det(\mathbf{G}_{cc}(s))$ links der j -Achse liegen, aber es ist nicht garantiert, dass alle Wurzeln der Gleichung $\det(\mathbf{G}_{dd}(s) - \mathbf{G}_{dc}(s)\mathbf{G}_{cc}(s)^{-1}\mathbf{G}_{cd}(s))$ links der j -Achse liegen. Das bedeutet, dass der durch $\mathbf{G}_{cc}(s)$ entworfene Regler, der $\mathbf{G}_{cc}(s)$ stabilisiert, keine Garantie gibt, dass das abgeschlossene System stabil ist.

Für die Variante 1 und 2 sind $\boldsymbol{\Phi}_{n-v}^T \mathbf{FT}$ und $\mathbf{RC}\boldsymbol{\Phi}_{n-v}$ gleich $\mathbf{E}_{erw1,2}$ bzw. $\mathbf{E}_{red1,2}$. Hat man eine perfekte Reduktion oder Erweiterung, wird die Übertragungsfunktion $\mathbf{G}_{dc}(s)$ oder $\mathbf{G}_{cd}(s)$ gleich Null und $\mathbf{G}_{dd}(s) = s^2 + 2\mathbf{Z}_{n-v}\boldsymbol{\Omega}_{n-v} s + \boldsymbol{\Omega}_{n-v}^2$. Dadurch wird die Gleichung (4.2-2) zu

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{cc}(s) & \mathbf{G}_{cd}(s) \\ \mathbf{G}_{dc}(s) & \mathbf{G}_{dd}(s) \end{pmatrix} = 0 = \det(\mathbf{G}_{cc}(s)) \det(\mathbf{G}_{dd}(s))$$

Ist $\mathbf{G}_{dd}(s)$ stabil, wird garantiert, dass das abgeschlossene System stabil wird, wenn $\mathbf{G}_{cc}(s)$ stabil ist.

Da bei der Variante 2 die ersten m_{1-v} Spalten in \mathbf{E}_{red2} und die ersten p_{1-v} Zeilen in \mathbf{E}_{erw2} gleich Null sind, ist die Variante 2 „stabiler“ als Variante 1.

Man sollte beachten, wenn man den Regler finden kann, so dass die Abweichungen der Wurzeln der Gleichung

$$\det(\mathbf{G}_{dd}(s) - \mathbf{G}_{dc}(s)\mathbf{G}_{cc}(s)^{-1}\mathbf{G}_{cd}(s)) = 0$$

mit den höheren Eigenfrequenzen der offenen Regelkreise klein sind, wird der Regler garantieren, dass das abgeschlossene System stabil wird. Im Abschnitt 7.2 wird eine Methode angegeben, solche Regler zu entwerfen.

4.2.2. Karhunen-Loève-Entwicklung

Bei der Karhunen-Loève-Entwicklung wird der Regler anhand der Gleichung (3-1b) entworfen. Die Übertragungsfunktion des abgeschlossenen Systems wird zu

$$\left(\mathbf{M} s^2 + \mathbf{D} s + \mathbf{K} + \mathbf{F} \mathbf{G}(s=0) \mathbf{W}_S \mathbf{G}_R(s) / s \mathbf{W}_S^T \mathbf{C} \right) \mathbf{X}(s) = \mathbf{F} \mathbf{G}(s=0) \mathbf{W}_S \mathbf{G}_R(s) / s \mathbf{a}_s(s) \quad (4.2-3)$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen weist darauf hin, dass das abgeschlossene System stabil ist, wenn man anhand der Gleichung (3-1b) einen Regler finden kann.

Man sollte beachten, dass das Finden eines Reglers anhand der Gleichung (3-1b) viel schwerer ist als das Finden eines Regler anhand der Gleichung (3-1a). Da das System der Gleichung (3-1b) gekoppelt ist, muss man auf die Methoden des Reglerentwurfs für mehrere Eingänge und mehrere Ausgänge, z.B. H^∞ -Regler, zurückgreifen. Weil die Ordnung der Gleichung (3-1b) sehr hoch sein kann, muss man auf die Methoden der Modellreduktion in der Regelungstechnik zurückgreifen. Sämtliche Modellreduktionsmethoden in der Regelungstechnik geben jedoch keine Garantie, dass der Regler, der anhand des reduzierten Modells entworfen wird und das reduzierte Modell stabilisiert, das originale Modell stabilisiert [GAW 96].

4.3. Zusammenfassung

Die Reduktion und Erweiterung beeinflussen das Verhalten des rückgekoppelten Systems bei der Modal-Entwicklung. In der Modal-Entwicklung der Variante 1 und 2 bestimmt die Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen die Genauigkeit des rückgekoppelten Systems. Wegen der Reduktions- und der Erweiterungsfehler ist die Genauigkeit des rückgekoppelten Systems etwas niedriger als die Genauigkeit der Rekonstruktion der Zielformen. Diese Abweichung hängt von der Größe des Reduktions- und Erweiterungsfehlers, aber nicht von den Reglerparametern ab. Durch die Einstellung der Reglerparameter kann diese Abweichung nicht beseitigt werden.

Die Modal-Entwicklung der Variante 1 und 2 macht den Reglerentwurf sehr leicht. Aber wegen des Reduktions- und Erweiterungsfehlers gibt der Regler, der im reduzierten Raum entworfen wurde, keine Garantie, dass das rückgekoppelte System stabil wird.

Bei der Modal-Entwicklung der Variante 3 können weder die Rekonstruktionsgenauigkeit noch die Reduktionsgenauigkeit der Zielform die Genauigkeit des rückgekoppelten Systems bestimmen. Wenn man diese Variante verwenden möchte, muss die Reduktion der Zielformen (Gleichung (4.1-6)) anders als die Reduktion der Messdaten (Gleichung (3.1-14)) durchgeführt werden.

Die Variante 3 der Modal-Entwicklung macht den Reglerentwurf nicht leicht, weil das reduzierte System immer gekoppelt ist. Wie bei Variante 1 und 2 gibt der Regler, der im reduzierten Raum entworfen wurde, keine Garantie, dass das rückgekoppelte System stabilisiert wird.

Man sollte beachten, obwohl es für die im reduzierten Raum entworfenen Regler theoretisch keine Garantie gibt, dass sie das rückgekoppelte Originalsystem stabilisieren, bedeutet dies nicht, dass keine Methoden gibt, bei denen die im reduzierten Raum entworfenen Regler das

rückgekoppelte Originalsystem stabilisieren. Im Abschnitt 7.2 wird eine solche Methode vorgeschlagen.

Reduktion und Erweiterung beeinflussen das Verhalten des rückgekoppelten Systems bei der Karhunen-Loève-Entwicklung nicht wie bei der Modal-Entwicklung. Bei der Karhunen-Loève-Entwicklung ist die Genauigkeit des rückgekoppelten Systems gleich der Reduktionsgenauigkeit der Zielform. Falls man einen Regler im reduzierten Raum finden kann, gibt der Regler eine Garantie, dass das rückgekoppelte System stabilisiert wird. Da die Freiheitsgrade des reduzierten Systems gleich denen des Originalsystems und die Freiheitsgrade des Originalsystems sehr hoch sind, können die bestehenden Modellreduktionstechniken nicht immer gewährleisten, dass ein für den Reglerentwurf geeignetes Modell entsteht. Deshalb ist sehr schwer, einen solchen Regler zu finden.

5. Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum

In den letzten zwei Kapiteln wurden Datenreduktions- und Erweiterungstechnik für adaptive mechanische Systeme, Modal-Entwicklung und Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum, vorgestellt und die Wirkung von Reduktions- und Erweiterungsfehler auf das rückgekoppelte System untersucht.

Die Modal-Entwicklung hat folgenden Vorteile:

1. Die Eingänge, Ausgänge und die Ordnung des Systems werden gleichzeitig reduziert und das System wird entkoppelt. Damit wird der Reglerentwurf leichter.
2. Unsensibilität zur Art der Sensoren.

Die Modal-Entwicklung hat folgenden Nachteile:

1. Sensibilität zum Reduktions- und Erweiterungsfehler.
2. Für die genauere Formkontrolle sind viele verdichtete Größen notwendig.

Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum hat einige Vorteile:

1. Für die genauere Formkontrolle sind wenige verdichtete Größen notwendig.
2. Unsensibilität zum Reduktions- und Erweiterungsfehler.

Aber die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum hat auch Nachteile:

1. Nur die Eingänge und Ausgänge werden reduziert, die Systemordnung ist nicht geändert und das System ist immer noch gekoppelt. Damit wird der Reglerentwurf nicht leichter.
2. Sensibilität zur Art der Sensoren.

Kann man die Vor- und Nachteile beider Methode miteinander ergänzen? In diesem Kapitel wird diese Frage beantwortet.

5.1. Das Prinzip der Karhunen-Loève-Entwicklung

Betracht man eine beliebige kontinuierliche Funktion $f(\mathbf{r})$ mit $\int |f(\mathbf{r})| d\mathbf{r} < \infty$ und $\mathbf{r} \in \mathbf{D} \in \mathbb{R}^n$, kann man immer beliebig viele verschiedene Mengen der orthogonalen Funktionen $w_\mu(\mathbf{r})$, $\mu = 1, \dots, \infty$, finden, so dass

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu w_\mu(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad a_\mu = \int_{\mathbf{D}} f(\mathbf{r}) w_\mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.1-1)$$

Z.B., wenn $w_\mu(\mathbf{r})$ eine Sinusfunktion ist, ist die Gleichung (5.1-1) die Fouriersinustransformation.

Die Aufgabe der KLE ist es nun die orthogonalen Funktionen $w_\mu(\mathbf{r})$, $\mu = 1, \dots, v$, zu finden, so dass der Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \int_{\mathbf{D}} (f(\mathbf{r}) - \hat{f}(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r} \quad (5.1-2)$$

und ν so klein wie möglich werden, wobei $\hat{f}(\mathbf{r})$ die Approximation der Funktion $f(\mathbf{r})$ unter der Verwendung der ersten ν Terme in der Gleichung (5.1-1) ist. Wegen der Orthogonalität der Funktion $w_\mu(\mathbf{r})$ kann man die Gleichung (5.1-2) als

$$\varepsilon = \sum_{\mu=1+\nu}^{\infty} (a_\mu)^2 = \sum_{\mu=1+\nu}^{\infty} \int_{\mathbf{D}} \int_{\mathbf{D}} w_\mu(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) f(\mathbf{s}) w_\mu(\mathbf{s}) d\mathbf{r} d\mathbf{s} \quad (5.1-3)$$

darstellen, wobei $\mathbf{s} \in \mathbf{D}$ ist. Um die Gleichung (5.1-3) unter der Bedingung der Orthogonalität von $w_\mu(\mathbf{r})$ zu minimieren, kann die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren benutzt werden. Die Lösung ist

$$\int_{\mathbf{D}} f(\mathbf{r}) f(\mathbf{s}) w_\mu(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \lambda_\mu w_\mu(\mathbf{r}), \quad \mu = 1, \dots, \infty. \quad (5.1-4a)$$

und der Rekonstruktionsfehler folgt zu

$$\varepsilon = \sum_{\mu=1+\nu}^{\infty} \lambda_\mu \quad (5.1-4b)$$

Um Eigenfunktionen and Eigenwerte von Gleichung (5.1-4a) zu bestimmen, kann man die Funktion $f(\mathbf{r})$ an den Stellen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, abtasten. Dann kann die Gleichung (5.1-4a) als

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1) \sum_{j=1}^n b_j f(\mathbf{r}_j) w_\mu(\mathbf{r}_j) &= \lambda_\mu w_\mu(\mathbf{r}_1) \\ &\vdots \\ f(\mathbf{r}_n) \sum_{j=1}^n b_j f(\mathbf{r}_j) w_\mu(\mathbf{r}_j) &= \lambda_\mu w_\mu(\mathbf{r}_n) \end{aligned} \quad (5.1-5)$$

umgeschrieben werden, wobei $b_j, j = 1, \dots, n$, Integralkonstante sind. Sei $\mathbf{X} = [f(\mathbf{r}_1), \dots, f(\mathbf{r}_n)]^T$, $\mathbf{w}_\mu = [w_\mu(\mathbf{r}_1), \dots, w_\mu(\mathbf{r}_n)]^T$ und $\mathbf{B} = \text{diag}(b_j)$, erhält man aus Gleichung (5.1-5)

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{w}_\mu = \lambda_\mu \mathbf{w}_\mu \quad (5.1-6)$$

Die Gleichung (5.1-6) ist ein normales Eigenwert- und Eigenvektorproblem. Die Lösung dieses Problems ist bekannt. Die Lösung der Gleichung (5.1-6) ist eine Approximation der Lösung der Gleichung (5.1-4a). Seien alle integralen Konstanten in der Gleichung (5.1-6) gleich eins, ist die Gleichung (5.1-6) gleich der Gleichung (6a) in [ZHA 00].

5.2. Karhunen-Loève-Entwicklung für mechanische Systeme

Die Antwort eines mechanischen Systems ist abhängig von Raum und Zeit. Sie kann in den zwei Teile geteilt werden. Ein Teil hängt vom Raum ab und der andere von der Zeit. Anhand der Gleichung (5.1-1) kann die Antwort in

$$f(\mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{r})f_2(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}(t)w_{\mu}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad a_{\mu}(t) = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r}, t)w_{\mu}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (5.2-1)$$

zerlegt werden. Man versucht nun eine Menge orthogonaler Funktionen $w_{\mu}(\mathbf{r})$, $\mu = 1, \dots, v$, zu finden, so dass der Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \iint_{\mathcal{T} \times \mathcal{D}} (f(\mathbf{r}, t) - \hat{f}(\mathbf{r}, t))^2 d\mathbf{r}dt$$

und v möglichst klein ist, wobei $\hat{f}(\mathbf{r}, t)$ die Approximation der Funktion $f(\mathbf{r}, t)$ unter der Verwendung der ersten v Terme in der Gleichung (5.2-1) ist. Analog zum Abschnitt 5.1 wird die optimale Lösung gegeben durch

$$\int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{T}} f(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{s}, t)dtw_{\mu}(\mathbf{s})d\mathbf{s} = \lambda_{\mu}w_{\mu}(\mathbf{r}), \quad \mu = 1, \dots, \infty. \quad (5.2-2)$$

An diesem Punkt werden die Knotenpunkte der FEM als die Abtastpunkte im Raum ($f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{X}(t)$), t_1, t_2, \dots, t_s als die zeitlichen Abtastpunkte benutzt. Jetzt seien alle integralen Konstanten gleich eins; dann folgt für die numerische Lösung der Gleichung (5.2-2)

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T \mathbf{w}_{\mu} = \lambda_{\mu} \mathbf{w}_{\mu} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_s)] \quad \text{und} \quad \mu = 1, \dots, n \quad (5.2-3)$$

wobei n die Anzahl der Knotenpunkte der FEM oder die Ordnung der FEM ist. Setzt man \mathbf{w}_{μ} in die Gleichung (5.2-1) ein und verwendet man die diskrete Darstellung im Raum, erhält man

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\mu=1}^v a_{\mu}(t)\mathbf{w}_{\mu} \quad \text{mit} \quad a_{\mu}(t) = \mathbf{w}_{\mu}^T \mathbf{x}(t) \quad (5.2-4a)$$

und der Rekonstruktionsfehler wird zu

$$\varepsilon = \sum_{\mu=1+v}^n \lambda_{\mu} \quad (5.2-4b)$$

Man sollte beachten, dass die abgetasteten Daten die Sollwerte und/oder die Deformation durch die Störung sein können. Diese Daten können auch die stationären Werte und/oder dynamische Werte sein.

5.3. Verwendung der Karhunen-Loève-Entwicklung für die Formkontrolle

Im Abschnitt 5.2 wurde die KLE im Zustandsraum vorgestellt, um die Antworten der mechanischen Systeme zu repräsentieren. Bei der Verwendung dieser Repräsentation kann man zunächst die Ordnung der Systeme für die Formkontrolle reduzieren. Setzt man die Gleichung (5.2-4a) in die Gleichung (3-1) ein und multipliziert man von links mit \mathbf{W}_v^T , erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{kl}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_{kl}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{kl}\mathbf{u} &= \mathbf{F}_{kl}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{kl}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

mit $\mathbf{M}_{kl} = \mathbf{W}_v^T \mathbf{M} \mathbf{W}_v$, $\mathbf{D}_{kl} = \mathbf{W}_v^T \mathbf{D} \mathbf{W}_v$, $\mathbf{K}_{kl} = \mathbf{W}_v^T \mathbf{K} \mathbf{W}_v$, $\mathbf{F}_{kl} = \mathbf{W}_v^T \mathbf{F}$, and $\mathbf{C}_{kl} = \mathbf{C} \mathbf{W}_v$. Um die Regelkreise zu schließen braucht man nur eine Transformation \mathbf{R}_{kl} und eine Rücktransformation \mathbf{T}_{kl} zu finden. \mathbf{R}_{kl} bildet den Messraum in den Karhunen-Loève-Raum ab, und \mathbf{T}_{kl} transformiert die Stellgröße vom Karhunen-Loève-Raum in den realen Stellraum zurück. \mathbf{R}_{kl} und \mathbf{T}_{kl} können dargestellt werden durch [ZHA 00][ZHA 01]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{kl} \mathbf{C}_{kl} &= \mathbf{I} \quad \text{oder} \quad \mathbf{R}_{kl} = \mathbf{C}_{kl}^+ \\ \mathbf{F}_{kl} \mathbf{T}_{kl} &= \mathbf{K}_{kl} \quad \text{oder} \quad \mathbf{T}_{kl} = \mathbf{F}_{kl}^+ \mathbf{K}_{kl} \end{aligned} \quad (5.3-2)$$

An diesem Punkt erhält man ein zu regelndes System mit nur ν Freiheitsgraden, ν „Sensoren“ und ν „Aktoren“.

Die stationäre Genauigkeit und die Stabilität sind zwei wichtige Kriterien für die Formkontrolle. Außerdem stellt sich die Frage, wieviele orthogonalen Funktionen \mathbf{w}_μ benutzt werden sollen. In folgenden Abschnitte werden diese Fragen detailliert untersucht.

5.3.1. Stationäre Genauigkeit

Es wird vorausgesetzt, dass wir einen Regler der Form $\mathbf{G}_R(s)/s$ haben, der für das abgeschlossene System die Stabilität garantiert. Dann wird die Übertragungsfunktion des abgeschlossenen Systems bei der Verwendung der Gleichung (5.3-2) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{W}_v \overline{\mathbf{G}}(s) \mathbf{F}_{kl} \mathbf{T}_{kl} \left[s + \mathbf{G}_R(s) \mathbf{R}_{kl} \mathbf{C}_{kl} \overline{\mathbf{G}}(s) \mathbf{F}_{kl} \mathbf{T}_{kl} \right]^{-1} \mathbf{G}_R(s) \mathbf{a}_{ref}(s) \\ \overline{\mathbf{G}}(s) &= \left[\mathbf{M}_{kl} s^2 + \mathbf{D}_{kl} s + \mathbf{K}_{kl} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Bei der Verwendung des Endwertsatzes und der Gleichungen (5.3-2) und (5.2-4a) wird die obige Gleichung zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t = \infty) &= \mathbf{W}_v \overline{\mathbf{G}}(s=0) \mathbf{K}_{kl} \left[\mathbf{G}_R(s=0) \overline{\mathbf{G}}(s=0) \mathbf{K}_{kl} \right]^{-1} \mathbf{G}_R(s=0) \mathbf{a}_{ref}(t = \infty) \\ &= \mathbf{W}_v \mathbf{a}_{ref}(t = \infty) = \mathbf{W}_v \mathbf{W}_v^T \mathbf{x}_{ref}(t = \infty) \end{aligned} \quad (5.3-3)$$

D.h. bei der Verwendung der KLE im Zustandsraum ist der stationäre Fehler des abgeschlossenen Systems gleich dem Rekonstruktionsfehler der Zielformen.

$$\mathcal{E} = (\mathbf{x}_{ref}(t = \infty) - \mathbf{x}(t = \infty))^T (\mathbf{x}_{ref}(t = \infty) - \mathbf{x}(t = \infty)) = \sum_{\mu=l+\nu}^n \lambda_\mu \quad (5.3-4)$$

5.3.2. Auswahl der Anzahl der orthogonalen Funktionen

Die Gleichung (5.3-4) weist daraufhin, dass alle Eigenwerte benötigt werden, um die Mindestzahl ν zu bestimmen. Im Zustandsraum ist die Anzahl der Zustandsvariablen normalerweise sehr groß. Wegen der Beschränkung der Rechnerleistungen ist die Berechnung aller Eigenwerte für ein sehr großes System unmöglich. Eine wichtige Frage für die Verwendung der KLE im Zustandsraum in der Praxis ist, wie viele orthogonalen Funktionen \mathbf{w}_μ benutzt

werden sollen?

Für ein kleines System^{5.1} (n ist klein) kann man wie im Ein- und Ausgangsraum alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Gleichung (5.2-3) erhalten. Dann werden alle Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren in absteigender Reihenfolge sortiert und die Mindestzahl ν , die Anzahl der benötigten orthogonalen Funktionen, für den erlaubten Fehler ε wird durch die Gleichung (5.3-4) bestimmt.

Für ein großes System hat man folgenden Satz:

Satz 1: Der Eigenwert λ_μ der Matrix $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ in der Gleichung (5.2-3) ist gleich Null für $\mu > s$, wenn der Rang(\mathbf{X}) = s und $s < n$ sind.

Beweis: Sei der Rang(\mathbf{X}) = s und $s < n$, wird die singuläre Wertzerlegung von \mathbf{X} zu

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T.$$

Schreibt man die Gleichung (5.2-3) um zu

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_s^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{W}^T \mathbf{U}$$

wobei $\mathbf{A} = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n])$ ist. Es ist klar, dass \mathbf{A} nur s Werte enthält, die nicht gleich Null sind. \square

Das heißt, man benötigt maximal so viele orthogonale Funktionen wie die Anzahl der Zielformen, sofern man genug Aktoren hat, und die Aktoren stark genug sind, so dass alle Zielformen realisierbar sind. Dann bestimmt man die Mindestzahl ν durch die Gleichung (5.3-4).

Aus technischen und finanziellen Gründen kann man die Voraussetzung des Satzes 1 in der Praxis nicht immer erfüllen. In diesem Fall sind die Zielformen vielleicht nicht genau realisierbar. Damit ist Satz 1 nicht unmittelbar verwendbar.

Man setzt voraus, dass die Deformation aufgrund der Steuerung im linearen Bereich liegt. Wegen der Einfachheit wird nur der stationäre Fall berücksichtigt. Es wird weiter vorausgesetzt, dass die Stellgrößen mit $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 u(t)$ verteilt werden können. \mathbf{U}_0 ist die positionsabhängige Amplitude und $u(t)$ der zeitabhängige Teil. Das bedeutet, dass die Stellgrößen die gleiche Form im Zeitbereich und unterschiedliche Amplituden für unterschiedliche Positionen haben.

Anhand der Gleichung (3-1) und für $u(t)$ gleich der Sprungfunktion gilt: $\mathbf{X} = \mathbf{K}^l \mathbf{F} \mathbf{U}_0$. Der Rang(\mathbf{X}) $\leq \min(n, p, s)$, wobei p die Anzahl der Aktoren und s die Anzahl der unterschied-

^{5.1} Dies hängt von der Rechnerleistung ab. Für einem normalen PC-Rechner ist $n < 2000$ ein kleines System

lichen positionsabhängigen Amplituden der Stellgrößen ist. Im allgemeinen ist $n \gg p$ und $s \geq p$; dann gilt: $\text{Rang}(\mathbf{X}) \leq p$. Deshalb gibt es maximal p Eigenwerte, die nicht gleich Null sind, in der Gleichung (5.2-3) bei Verwendung des Satzes 1. Das bedeutet, dass man nur p Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren zu berechnen braucht. Man bestimmt die Mindestzahl v dann durch die Gleichung (5.3-4).

Tabelle 5-1 zeigt die Eigenwerte der Gleichung (5.2-3) mit den abgetasteten Daten bei unterschiedlichem U_0 als Beispiel. Diese Daten werden durch das link Modell im Kapitel 8 berechnet. Es gibt 5 unabhängige Aktoren im Modell. Die U_0 Menge 1 ist eine binäre Kombination von -20 und +20 (V) ($s = 32$). In der U_0 Menge 2 wird der Aktor individuell durch -50V (min) und +50V (max) angeregt ($s = 10$). In der U_0 Menge 3 werden alle Aktoren durch minimale, maximale und zufällige Werte angeregt ($s = 12$). In den abgetasteten Daten (\mathbf{X}) der Mengen 1 bis 3 sind nur die stationären Werte enthalten. In den abgetasteten Daten der Menge 4 wird die gleiche U_0 Menge wie die Menge 3 benutzt, aber sie enthält noch einen zusätzlichen dynamischen Anteil.

Tabelle 5-1: Die Eigenwerte der Gleichung (5.2-3) mit den abgetasteten Daten bei Verwendung unterschiedlicher U_0 Menge

Eigenwerte	Menge 1	Menge 2	Menge 3	Menge 4
1	159.04	62.124	208.52	2106
2	2.7263	1.0650	0.3232	3.4802
3	0.4594	0.1794	0.0434	0.4349
4	0.06531	0.0255	0.0070	0.0740
5	0.02416	0.0094	0.0033	0.0402
6	1.8968×10^{-14}	9.3853×10^{-15}	3.087×10^{-14}	0.0040
7	1.7571×10^{-14}	7.4947×10^{-15}	2.9795×10^{-14}	3.381×10^{-6}
8	-1.6649×10^{-14}	6.6982×10^{-15}	2.6249×10^{-14}	1.1705×10^{-7}
9	-1.7303×10^{-14}	-7.5516×10^{-15}	2.5260×10^{-14}	1.3800×10^{-8}
10	-1.9373×10^{-14}	-92991×10^{-15}	2.4487×10^{-14}	1.3352×10^{-9}

Die Tabelle 5-1 zeigt, dass die Dynamik die Anzahl der Eigenwerte, die nicht gleich Null sind, erhöht. Das bedeutet, dass der Rekonstruktionsfehler größer wird, wenn die gleiche Anzahl der orthogonalen Funktionen wie im statischen Fall benutzt wird, um den dynamischen Verlauf darzustellen. Da jedoch diese Verschlechterung sehr gering ist, hat sie für die Praxis keine Bedeutung.

5.3.3. Stabilität

Nun erweitert man die Darstellung von \mathbf{X} in der Gleichung (5.2-4a) von v auf n :

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{W}_v, \mathbf{W}_{n-v}] \mathbf{a}(t) = \mathbf{W} \mathbf{a}(t) \quad (5.3-5)$$

wobei $\mathbf{a}(t) = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)]^T$ ist. Dann erhält man die Übertragungsfunktion des abgeschlossenen Systems ähnlich wie die Gleichung (4.2-1) mit unterschiedlicher Definition der $\mathbf{G}(s)$ Matrix.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{cc}(s) & \mathbf{G}_{cd}(s) \\ \mathbf{G}_{cd}^T(s) & \mathbf{G}_{dd}(s) \end{bmatrix} \mathbf{a}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_v^T \mathbf{F} \mathbf{T}_{kl} \\ \mathbf{W}_{n-v}^T \mathbf{F} \mathbf{T}_{kl} \end{bmatrix} \mathbf{a}_{ref}(s) \quad (5.3-6)$$

wobei $\mathbf{G}_{cc}(s) = \mathbf{M}_{kl} s^2 + \mathbf{D}_{kl} s + \mathbf{K}_{kl} s + \mathbf{F}_{kl} \mathbf{T}_{kl} \mathbf{G}_R(s) \mathbf{R}_{kl} \mathbf{C}_{kl}$

$$\mathbf{G}_{cd}(s) = \mathbf{W}_v^T \mathbf{M} \mathbf{W}_{n-v} s^2 + \mathbf{W}_v^T \mathbf{D} \mathbf{W}_{n-v} s + \mathbf{W}_v^T \mathbf{K} \mathbf{W}_{n-v} s + \mathbf{F}_{kl} \mathbf{T}_{kl} \mathbf{G}_R(s) \mathbf{R}_{kl} \mathbf{C} \mathbf{W}_{n-v}$$

$$\mathbf{G}_{dd}(s) = \mathbf{W}_{n-v}^T \mathbf{M} \mathbf{W}_{n-v} s^2 + \mathbf{W}_{n-v}^T \mathbf{D} \mathbf{W}_{n-v} s + \mathbf{W}_{n-v}^T \mathbf{K} \mathbf{W}_{n-v} s + \mathbf{W}_{n-v}^T \mathbf{F} \mathbf{T}_{kl} \mathbf{G}_R(s) \mathbf{R}_{kl} \mathbf{C} \mathbf{W}_{n-v}$$

sind. $\mathbf{G}_R(s)$ ist die Übertragungsfunktion des Reglers. Die gleichen Argumentationen wie für die Modal-Entwicklung können hier verwendet werden. Das heißt, dass der durch $\mathbf{G}_{cc}(s)$ entworfene Regler, der $\mathbf{G}_{cc}(s)$ stabilisiert, theoretisch keine Garantie gibt, dass das abgeschlossene System stabil ist, aber es gibt solche Methoden, mit denen man durch $\mathbf{G}_{cc}(s)$ entworfene Regler finden kann, die das abgeschlossene System stabilisieren. Dies wird im Abschnitt 7.2 nachgewiesen.

5.3.4. Diagonalisierung des reduzierten Systems im KLR

Nun sind die Systemordnungen n , die Systemeingänge p und die Systemausgänge m auf v reduziert worden. Aber das System (5.3-1) ist noch gekoppelt. Das bedeutet, dass der Reglerentwurf immer noch schwierig sein kann, wenn v relativ groß ist. In Analogie zum normalen mechanischen System (System (3-1)) könnte man jedoch die Modal-Entwicklung auf das System (5.3-1) anwenden, wenn die Bedingung des Systems (5.3-1) und des Systems (3-1) dieselbe ist.

Satz 2: Die Matrix \mathbf{M}_{kl} , \mathbf{D}_{kl} und \mathbf{K}_{kl} sind symmetrisch.

Beweis: $\mathbf{K}_{kl}^T = (\mathbf{W}_v^T \mathbf{K} \mathbf{W}_v)^T = \mathbf{W}_v^T \mathbf{K}^T \mathbf{W}_v = \mathbf{W}_v^T \mathbf{K} \mathbf{W}_v = \mathbf{K}_{kl}$.

In Analogie kann man beweisen, dass \mathbf{M}_{kl} und \mathbf{D}_{kl} auch symmetrisch sind. \square

Nun kann man die Modal-Entwicklung auf das System (5.3-1) anwenden. Man definiert:

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_{kl} \text{ mit } \mathbf{Q}_{kl} = [q_{kl_1}, q_{kl_2}, \dots, q_{kl_v}]^T \text{ und } \tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_v].$$

Dann kann das System (5.3-1) umgeschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_{kl} \tilde{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{Q}}_{kl} + \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{D}_{kl} \tilde{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{Q}}_{kl} + \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}_{kl} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_{kl} &= \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{F}_{kl} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{kl} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_{kl} \end{aligned} \quad (5.3-7)$$

wobei q_{kl_i} ($i=1, \dots, v$) als die modalen Koordinaten im Karhunen-Loève-Raum oder die modalen Karhunen-Loève-Koordinaten bezeichnet werden. \tilde{p}_i kann durch die Lösung des Eigen-

wertproblems

$$\mathbf{K}_{kl} \tilde{\mathbf{P}}_i = \omega_{kl_i}^2 \mathbf{M}_{kl} \tilde{\mathbf{P}}_i$$

berechnet werden.

Satz 3: Der Eigenvektor $\tilde{\mathbf{p}}_i$ ist orthogonal in Bezug auf die Matrizen \mathbf{M}_{kl} und \mathbf{K}_{kl} ,

$$\text{d.h. } \tilde{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{M}_{kl} \tilde{\mathbf{p}}_i = m_i, \quad \tilde{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{K}_{kl} \tilde{\mathbf{p}}_i = k_i, \quad \tilde{\mathbf{p}}_j^T \mathbf{M}_{kl} \tilde{\mathbf{p}}_i = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{p}}_j^T \mathbf{K}_{kl} \tilde{\mathbf{p}}_i = 0 \quad \text{mit } i \neq j.$$

Beweis: Aufgrund der Symmetrie der Matrizen \mathbf{M}_{kl} und \mathbf{K}_{kl} und analog zum Beweis der Orthogonalität des Eigenvektors für mechanische Systeme [THO 93], kann man ihn beweisen. \square

Es kann \mathbf{M}_{kl} und \mathbf{K}_{kl} als die Massen- und Steifigkeitsmatrix, $\tilde{\mathbf{p}}_i$ und $\omega_{kl_i}^2 = k_i/m_i$ als Eigenmode und Eigenfrequenz im Karhunen-Loève-Raum definiert werden.

Um die entkoppelten Modalkoordinaten \mathbf{Q}_{kl} aus den Messdaten \mathbf{y} zu gewinnen und die Modalstellgrößen auf die realen Stellgrößen zurückzuführen, braucht man nur die Transformationsmatrix \mathbf{R} und \mathbf{T} zu finden. Beim Vergleich der Gleichungen (5.3-1), (5.3-2) und (5.3-7) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{T} \mathbf{u}_{m_{kl}} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_{kl} \tilde{\mathbf{P}} \\ \mathbf{Q}_{kl} &= \mathbf{R} \mathbf{y} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{R}_{kl} \end{aligned} \tag{5.3-8a}$$

und die Gleichung (5.3-7) wird zu

$$m_i \ddot{q}_{kl_i} + d_i \dot{q}_{kl_i} + k_i q_{kl_i} = k_i u_{m_{kl_i}}, \quad i = 1, \dots, \nu \tag{5.3-8b}$$

wobei $\mathbf{u}_{m_{kl}}$ die modalen Stellgrößen im Karhunen-Loève-Raum sind. Da die modale Transformation ($\tilde{\mathbf{P}}$) im Karhunen-Loève-Raum eine lineare Transformation mit vollem Rang ist, werden sich die Eigenschaften bezüglich stationärer Genauigkeit und Stabilität nicht ändern.

Das System (5.3-8) bietet uns ein reduziertes System an, in dem die Freiheitsgrade von n auf ν reduziert werden, sowie die Eingänge von p auf ν und die Ausgänge von m auf ν . Das System ist entkoppelt, alle Entwurfsmethoden für einschleifige Eingrößenregelsysteme können hier verwendet werden. Die stationäre Genauigkeit des Systems ist gleich der Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen. Wie stark die Reduzierung erfolgen kann, hängt nur vom Interesse des Benutzers ab. Wenn man nur an wenigen Steuerzielen bzw. einer geringen Variation der vorgegeben Form interessiert ist, könnte die Reduzierung ziemlich groß sein.

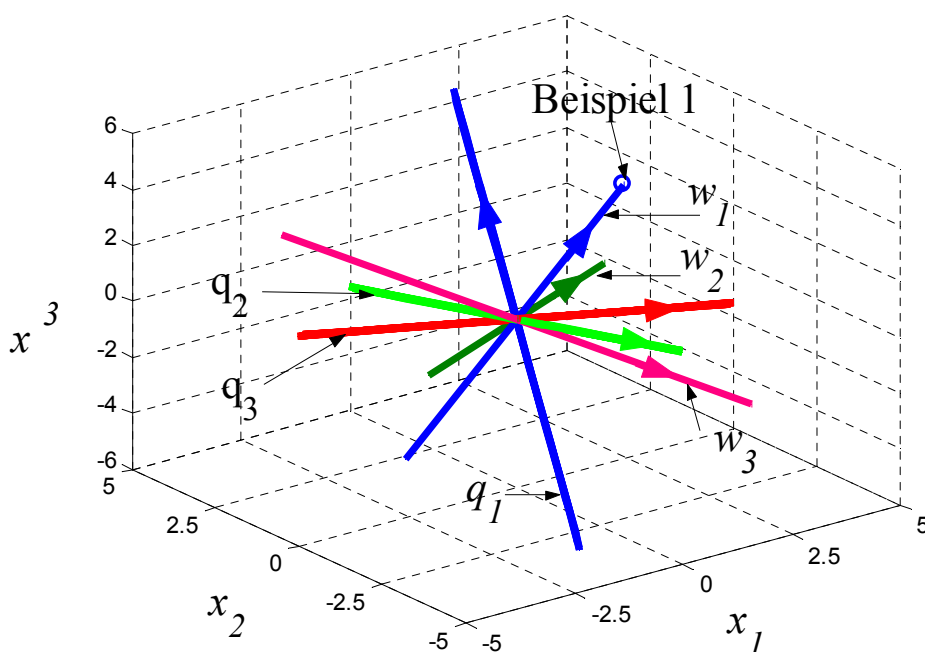
Das System (5.3-8) ist ein fast perfektes System. Jedoch liefert der durch $\mathbf{G}_{cc}(s)$ entworfene Regler keine Garantie, dass das abgeschlossene System stabil ist. Diese Schwäche muss man zunächst in Kauf nehmen. Aber man sollte beachten, dass keine Garantie nicht bedeutet, dass kein Regler das abgeschlossene System stabilisiert. Im Abschnitt 7.2 kann diese Schwäche

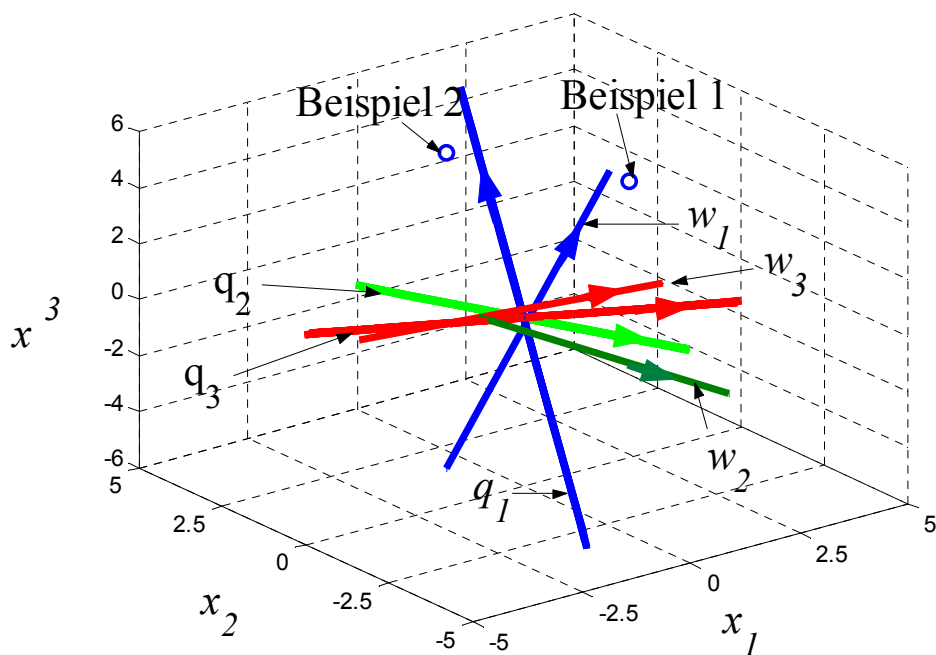
auch überworden werden.

5.4. Geometrische Interpretation der Karhunen-Loève-Entwicklung und der Modal-Entwicklung

Betracht man jeden Freiheitsgrad als eine Dimension, sind die Zustände des Systems (3-1) für die gegebene Eingabe eine Trajektorie im n dimensionalen Raum. Falls die Systemeingaben gleich $F^+ M \varphi_i \sin(\omega_i t)$ sind, dann ist die Spur der Zustandsvariablen des Systems die Achse der Modalkoordinate q_i . Die Transfermatrix W in der KLE stellt die Richtung der Proben im n dimensionalen Raum dar. Wenn die Anzahl der Proben eins ist, ist w_1 gleich dem Richtungskosinus dieser Probe. Wenn die Anzahl der Proben zwei ist und die zweite Probe nicht auf der Linie liegt, die durch die erste Probe und den Ursprung des Koordinatensystems konstruiert wird, stellen w_1 und w_2 eine Ebene dar, die durch den ursprünglichen Punkt, die Probe 1 und die Probe 2 konstruiert wird. w_3 ist die Normale dieser Ebene. Zusätzlich ist die Projektion der Proben auf w_1 immer größer als die auf w_2 . Bild 5-1 zeigt die Modalkoordinate und die KLE Transfermatrix W mit einer und zwei Proben. Dieses wird aus folgenden einfachen System errechnet [THO 93] und die zwei Proben sind $[4,2,2]^T$ und $[0.94925, 1.7471, 2.3410]^T$. Die Wahl des Systems und der Proben ist willkürlich.

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.3 & -0.7 & \\ -0.7 & 1.5 & -0.7 \\ -0.7 & -0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$





b

Bild 5-1: Geometrische Interpretation der KLE und Modal-Entwicklung. a) Modalkoordinate und KLE Matrix mit einem Beispiel; b) Modalkoordinate und KLE Matrix mit zwei Beispielen

Es wird gezeigt, dass die Modalkoordinaten nur von der Struktureigenschaft eines Systems abhängig sind. Wenn das Steuerziel, z.B. auf oder näher an der Achse q_1 liegt, könnte nur q_1 verwendet werden, um das System zu beschreiben. Wenn dies nicht der Fall ist, müssen viele q 's benutzt werden, um das System zu beschreiben. Die Transfermatrix der KLE ist jedoch nicht von der Struktureigenschaft eines Systems, sondern vom Steuerziel abhängig. Es gibt eine unterschiedliche Transfermatrix für die unterschiedlichen Mengen der Steuerziele (Proben). Die Transfermatrix wird in solcher Weise konstruiert, dass die Projektion der Proben auf w_{i+1} immer kleiner als die auf w_i ist. Deshalb kann man immer einen kleinen Teil von W verwenden, um ein komplexes System darzustellen. Betrachtet man weiterhin die Gleichungen $a = W^T x$ und $x = \Phi q$, kann man leicht feststellen, dass die Karhunen-Loève-Koordinaten durch eine lineare Kombination der Modalkoordinaten beschrieben werden können.

6. Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung mittels des genetischen Algorithmus

In den letzten drei Kapiteln wurde die Datenreduktions- und Erweiterungstechnik für adaptive mechanische Systeme vorgestellt und untersucht. Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum bietet uns ein reduziertes System an, in dem die Freiheitsgrade von n auf ν reduziert werden, sowie die Eingänge von p auf ν und die Ausgänge von m auf ν . Die stationäre Genauigkeit des Systems wird durch die Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen bestimmt. Wie stark die Reduzierung erfolgen kann, hängt nur vom Interesse des Benutzers ab. Das System ist entkoppelt, alle Entwurfsmethoden für einschleifige Eingrößenregelsysteme können hier verwendet werden.

Jedoch wurde in den Untersuchungen nur vorausgesetzt, dass m Sensoren und p Aktoren gebraucht wurden. Die Frage, wieviel Sensoren und Aktoren für gewünschte Formen tatsächlich gebraucht werden und wo sie platziert werden sollen, wurde in den letzten drei Kapiteln nicht beantwortet. Sie werden in diesem Kapitel analysiert.

6.1. Einführung in die Optimierung der Aktoren- und der Sensorenpositionierung

Die Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung ist ein komplexes Problem. Es hängt von vielen Faktoren ab, z. B., was ist das Regelziel: Schwingungsunterdrückung oder Formkontrolle? Welche Kriterien sollen für die Optimierung verwendet werden? Soll der Regelalgorithmus in die Optimierung miteinbezogen werden? Außerdem wird die Platzierung der Aktoren die Eigenschaft des Systems ändern.

Im allgemeinen kann die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren wie folgt beschrieben werden: Gegeben ist ein mechanisches System (in Übertragungsform)

$$\begin{aligned} X(p) &= \overline{G}(a, p)U(p) + \overline{G}_d(a, p)D(p) \\ Y(p) &= C(s)X(p) \end{aligned} \quad (6.1-1)$$

und ein Kriterium der Optimierung (Zielfunktion)

$$J = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, a, s) \quad (6.1-2)$$

wobei p ^{6.1} eine komplexe Variable ist. \mathbf{x} ist die Zustandsvariable und \mathbf{y} ist der Vektor der Messgrößen. \mathbf{u} und \mathbf{d} sind Stellgrößen bzw. Störungsgrößen. $\mathbf{G}(s, a, p) = C(s)\overline{G}(a, p)$ ist die sogenannte Regelstrecke und $\mathbf{G}_d(s, a, p) = C(s)\overline{G}_d(a, p)$ die sogenannte Störungsstrecke

^{6.1} p ist gleich s in der üblichen Übertragungsdarstellung. Hier wird p verwendet, um die Verwechslung mit s (Sensoren) zu vermeiden.

cke. Man sollte beachten, dass Regel- und Störungsstrecke eine Funktion der Platzierung von Aktoren (a) und Sensoren (s) sind.

Nun ist es die Aufgabe der Optimierung, eine Platzierung der Aktoren und Sensoren so zu finden, dass J in der Gleichung (6.1-2) maximal oder minimal wird.

Bei der Schwingungsunterdrückung ist es das Ziel der Regelung, die Dämpfung des Systems zu erhöhen. Es handelt sich um einen dynamischen Feedbackvorgang. Es gibt zwei Wege, die Optimierung durchzuführen. Einer davon ist, dass der Regelalgorithmus in die Optimierung miteinbezogen wird [RAO 91, CHE 91, KIM 97]. In diesem Fall wird der Regelalgorithmus vordefiniert, z. B. Geschwindigkeitsfeedback [CHE 91], LQR [RAO 91, LIM 93], LQG [LIM 93], oder PD-Regler [KIM 97], etc.. Die verbrauchte Energie des abgeschlossenen Systems [RAO 91, CHE 91], die Kostenfunktion des Regelalgorithmus [LIM 93] und eine Kombination von beiden [KIM 97] sind die häufig verwendeten Zielfunktionen der Optimierung.

Der Nachteil dieser Methode ist der Bedarf an höherer Rechnungsleistung, falls ein komplexer Regelalgorithmus benutzt werden soll [LIM 98]. Deshalb gehen viele Autoren [HAC 92, BAR 92, LIM 93, LIM 98] den anderen Weg, bei dem die optimale Platzierung der Aktoren / Sensoren und die Auswahl des Regelalgorithmus getrennt behandelt werden. In diesem Fall sind die Steuerbarkeits- / Beobachtbarkeitsgramian [HAC 92, BAR 92, LIM 93] und Hankelsche Singularwerte des offenen Systems [LIM 98] häufig benutzte Zielfunktionen.

In der Formkontrolle ist es das Ziel der Regelung, die gewünschten Formen gegen Störungen beizubehalten, oder, anhand der Sollwerte die Formen zu ändern, oder beides. In [BUR 90, HAF 91, HAN 95] wird die Beibehaltung der gewünschten Formen unter der Annahme berücksichtigt, dass die Störung bekannt ist. Dies bedeutet, dass die Störung ohne Benutzung der Information über die Zustandsvariablen gemessen werden kann. In diesem Fall handelt es sich um einen statischen Prozess und das Feedback ist nicht nötig. Die hier verwendete Zielfunktion ist normalerweise die Fehlerfunktion des quadratischen Mittels (RMS). Wenn die Störung nur durch Zustandsvariable gewonnen werden kann, sind die Resultate in [BUR 90, HAF 91, HAN 95, FUR 95] nicht verwendbar, weil dies das Feedback bedeutet.

Bei einer Formänderung bedingt durch die Sollwerte handelt es sich um sowohl einen statischen als auch einen dynamischen Vorgang. Die stationäre Genauigkeit soll zuerst berücksichtigt werden. Die Stabilität soll natürlich auch gewährleistet werden. Dies wurde in [WEB 99] behandelt. In [WEB 99] wurde die RMS als Zielfunktion verwendet. Damit können die Stellgrößen in den Optimierungsvorgang als optimale Designvariablen miteinbezogen werden und die optimale Platzierung der Sensoren wird ignoriert. Da der Optimierungsvorgang sehr komplex ist, ist es möglich, dass die Berechnung der optimalen Stellgrößen so komplex wird,

dass sie in dem Regler beinahe unmöglich umgesetzt werden kann. Dies ist der Nachteil dieser Methode.

In diesem Kapitel wird ein Optimierungsvorgang unter Benutzung des genetischen Algorithmus unter folgenden Annahmen vorgestellt und untersucht:

1. Als Zielfunktion wird nicht wie üblich in der Formkontrolle das quadratische Mittel, sondern der Formparameter verwendet. Z.B. wird die Brennweite für eine parabolische Form als Zielfunktion benutzt.
2. Der Regelalgorithmus wird nicht in den Optimierungsvorgang einbezogen.
3. Die Stellgrößen werden nicht als optimale Variablen betrachtet. Die Berechnung der Stellgrößen wird wie die der Regler im stationären Zustand erfolgen.

6.2. Einführung in die Funktion des genetischen Algorithmus

Der genetische Algorithmus (GA) ist ein auf dem aus der Natur entstehenden Mechanismus basierendes Suchverfahren. Dieses Suchverfahren stellt keine Anforderungen, wie z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc., an die Zielfunktion für die Optimierung. Es ist geeignet für die Optimierung komplexerer Systeme, wie z. B. das Problem der Aktoren- und Sensorenplatzierung.

Der GA besteht im wesentlichen aus drei Komponenten: einer Population, einer Fitness- oder Leistungsfunktion und einem natürlichen Suchverfahren. Die Population ist eine Menge der sogenannten Chromosomen, das auf der Reihe von 0 und 1 basiert, z. B. [010110001]. Das Chromosom codiert die zu optimierende Information, die hier die Position der Aktoren und Sensoren repräsentiert. Die Fitnessfunktion misst die Leistung der einzelnen Chromosomen, hier ist es die erreichbare Genauigkeit für die gegebene Platzierung der Aktoren und Sensoren. Das natürliche Suchverfahren ist ein Mechanismus, mit dem die neue Generation (eine neue Menge von Chromosomen) anhand der Leistung jeder Chromosome in der alten Generation erzeugt werden kann.

Dieses Suchverfahren enthält Reproduktion, Paarung, Kreuzung und Mutation. Bei der Reproduktion handelt es sich um die Auswahl der Kandidaten, welche in der nächsten Generation erzeugt werden. Im Volksmund unterscheidet die Reproduktion, wer sich verheiraten darf. Das Prinzip der Reproduktion ist, das beste Individuum (Chromosom) auszuwählen. Es gibt viele Reproduktionsalgorithmen. Rouletterad (roulette wheel), deterministische Abtastung (deterministic sampling), restliche stochastische Abtastung ohne Wiederholung (remainder stochastic sampling without replacement) und restliche stochastische Abtastung mit Wiederholung (remainder stochastic sampling with replacement) sind häufig benutzte Algorithmen für die Reproduktion[LIM 98].

Im Rouletteradalgorithmus wird zunächst der Bruchteil der einzelnen Leistung zu den gesamten Leistungen $p(i) = l(i) / \sum_i l(i)$ berechnet. Dann wird das Individuum i mit der Wahrscheinlichkeit $p(i)$ ausgewählt. Wegen der Eigenschaft der Wahrscheinlichkeit ist es möglich, dass das beste Individuum nicht zu den Kandidaten gehört.

Um dies zu vermeiden, entwickelte man mehrere verbesserte Algorithmen, z. B. die deterministische Abtastung, die restliche stochastische Abtastung ohne Wiederholen und die restliche stochastische Abtastung mit Wiederholen. In diesen Algorithmen wird zunächst die sogenannte Erwartungsnummer des Individuums $n(i) = np(i)$ berechnet, wobei n die Anzahl der Bevölkerung ist. Wenn die Erwartungsnummer des Individuums i größer als eins ist, darf das Individuum i sich mindestens $\lfloor n(i) \rfloor$ mal verheiraten. Wenn nach diesem Vorgang noch m Kandidaten übrig bleiben, werden die m Kandidaten je nach Algorithmus unterschiedlich behandelt. In der deterministischen Abtastung werden die übrigen m Kandidaten aus dem größten Wert des Bruchteils von $n(i)$ ausgewählt. Für die restliche stochastische Abtastung ohne Wiederholen werden die übrigen m Kandidaten nach der Wahrscheinlichkeit des Bruchteils von $n(i)$ ausgewählt. Für die restliche stochastische Abtastung mit Wiederholen werden die m Kandidaten durch den Rouletteradalgorithmus mit den m größten Bruchteilen von $n(i)$ als Fitness bestimmt.

Im Volksmund entscheidet die Paarung, wer sich mit wem verheiratet. Der am häufigsten verwendete Algorithmus ist der Zufall. Der Zufallsmechanismus ist fair, aber es gibt auch ein Problem. Da ein Individuum mehrmals bei den Kandidaten vorkommen kann, ist es möglich, dass unter dem Zufallsmechanismus für das Individuum sich dieselben Paare finden lassen. In dieser Arbeit wird ein Mechanismus hinzugefügt werden, um dieselbe Paarung zu verhindern. Die Kreuzung und die Mutation beschreiben, wie die Kinder erzeugt werden. Die Kreuzung simuliert eine Tatsache der Natur, dass die Eigenschaft eines Kindes quasi 50% von seinem Vater und 50% von seiner Mutter bekommen wird. In der Kreuzung werden einige Stellen im Chromosom mit gewisser (relativ größerer) Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählt. Die Anzahl der Stellen kann je nach der Länge des Chromosoms beliebig sein. Bild 6-1 zeigt das Prinzip der Kreuzung.

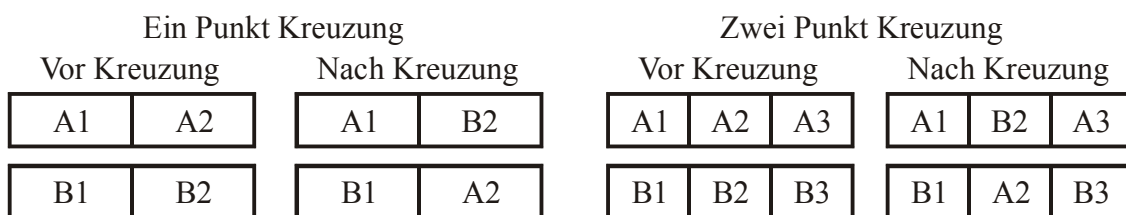


Bild 6-1: Das Prinzip des Kreuzungsvorgangs

Die Mutation simuliert die Tatsache der Natur, dass sich manche Eigenschaft eines Lebewesens plötzlich verändern kann. Bei der Mutation wird eine Stelle im Chromosom mit einer gewissen (relativ kleinen) Wahrscheinlichkeit zufällig gesucht, und dort der Wert verändert. Bild 6-2 zeigt das Prinzip der Mutation.

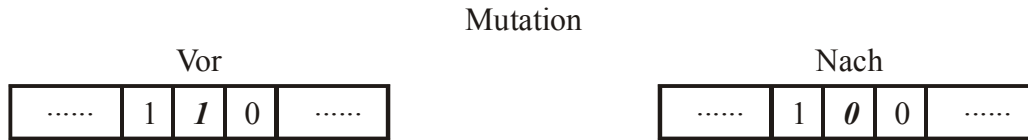


Bild 6-2: Das Prinzip der Mutation

Im allgemeinen sieht ein GA folgendermaßen aus[WHI 93][LIM 98]:

1. Initialisierung einer Population, eine Menge von Chromosomen.
2. Bewertung jedes Chromosoms in der Population mittels der Fitnessfunktion.
3. Erzeugung neuer Chromosome durch Paarung aktueller Chromosome; Verwendung der Mutation und Kreuzung, wenn die Eltern (Chromosome) sich paaren.
4. Bewertung der neuen Chromosome.
5. Wenn die Stoppbedingungen erfüllt sind, wird der GA beendet und das beste Chromosom zurückgegeben; ansonsten geht es bei Schritt 3 weiter.

6.3. Anwendung des GA zur Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung

Im letzten Abschnitt wurde der genetische Algorithmus vorgestellt und das natürliche Suchverfahren im Detail behandelt. Das Suchverfahren ist unabhängig von der Anwendung. Eine erfolgreiche Anwendung des GA hängt jedoch von der Kodierung des Problems auf den Chromosomenbereich und der Auswahl der Fitnessfunktion ab. In diesem Abschnitt wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie man das Problem der Optimierung der Aktoren- und Sensorenpositionierung durch den genetischen Algorithmus lösen kann.

6.3.1. Das zu simulierende Objekt

Das zu simulierende Objekt ist eine parabolische Platte mit dem Maß $864,98 \times 200 \times 2$ mm (Bogenlänge \times Breite \times Dicke). Der Mittelpunkt (in x-Richtung) der parabolischen Platte wird befestigt. Das Grundmaterial ist ein Verbundwerkstoff. Die äquivalenten Materialkonstanten eines 3D FEM-Modells sind in der Tabelle 6-1 aufgelistet. Die Piezoplättchen werden als Aktoren benutzt. Es gibt zwei Größen für die Piezoplättchen, eine ist $25 \times 25 \times 0,2$ mm³ (Länge \times Breite \times Dicke) und andere ist $20 \times 25 \times 0,2$ mm³. Die Materialkonstanten für die Piezoplättchen wurde in der Tabelle 3-1 aufgelistet. Bild 6-3 zeigt eine Skizze des Objekts.

Tabelle 6-1: Die äquivalenten Materialkonstanten des Verbundwerkstoffs

E-Mod.(N/m ²)	E ₁₁	E ₂₂	E ₃₃
	4,76×10 ⁴	4,76×10 ⁴	1,11×10 ⁴
G-Mod.(N/m ²)	G ₁₂	G ₁₃	G ₂₃
	1,88×10 ⁴	3,56×10 ³	3,56×10 ³
Querkontraktionszahl	μ ₁₂	μ ₁₃	μ ₂₃
	0,241	0,483	0,483

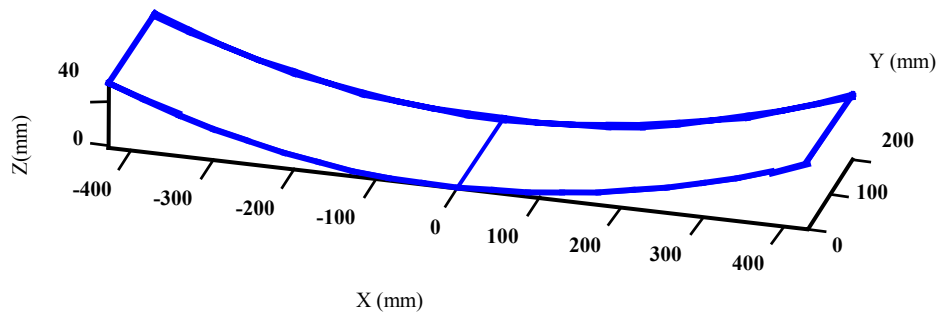


Bild 6-3: Die Skizze des zu simulierenden Objekts

In ihrer Basisform hat die parabolische Platte eine Brennweite von 1150 mm. Das Ziel der Regelung ist, die Brennweite der parabolischen Platte zwischen 1100 mm und 1200 mm zu variieren. Um die Simulation zu vereinfachen, werden 25 mm Schritte benutzt. Wegen der Symmetrie des Objekts wird nur die rechte Hälfte des Objekts bei der Simulation berücksichtigt.

6.3.2. Kodierung der Positionen der Aktoren und Sensoren

Um die Information über die Positionen von Aktoren und Sensoren auf den Chromosomenbereich zu kodieren, werden zunächst alle möglichen Positionen für Aktoren und Sensoren festgelegt (s. Bild 6-4). In der Simulation werden Dehnungsmessstreifen als Sensoren verwendet. Weil wir die Form der parabolischen Platte nur in der x-z Ebene ändern möchten, werden die Piezoplättchen in derselben Spalte elektrisch verbunden und als ein Aktor betrachtet. Die Dehnungsmessstreifen sind in der Mitte (y-Richtung) platziert (s. Bild 6-4). Dann werden die Piezoplättchen und die Dehnungsmessstreifen in derselben Spalte gleichzeitig ausgewählt. Bild 6-5 zeigt ein Beispiel für ein Chromosom und die entsprechende Platzierung der Aktoren und Sensoren.

6.3.3. Auswahl der Ziel- und Fitnessfunktion

Die Oberfläche des simulierten Objekts kann mit $z(x, y) = g(x, y)$ beschrieben werden. In der Basisform ist $g(x, y)$ parabolisch, d.h., $g(x, y) = l/(4f)x^2$, wobei $f = 1150$ mm die Brennweite ist. Das Regelziel ist die Brennweite (Line) der parabolischen Platte für vorgege-

bene Werte zu ändern. Durch die Regelung wird die Form der Platte geändert und die Oberfläche ist möglicherweise nicht mehr exakt parabolisch. Wir definieren den Schnittpunkt zwischen z-Achse und einem Strahl, der vom Punkt (x_i, z_i) reflektiert wird, als „Brennpunkt p_i “ (s. Bild 6-6). Dann ist die Brennweite des Punktes (x_i, z_i)

$$f(x_i, y_j, z_i) = \left(z_i - \frac{1 - (g'(x_i, y_j))^2}{2g'(x_i, y_j)} x_i \right) \tag{6.3-1}$$

wobei $g' = \partial g / \partial x$ ist. Die Brennweite der Platte kann dann berechnet werden durch

$$\bar{f} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j, z_i) \tag{6.3-2}$$

wobei m und n die betrachtete Anzahl der Punkte in x- bzw. y-Richtung sind. Für jede gewünschte Sollform f^k kann die Form der Platte durch Stellgrößen geändert werden. Der Istwert der Brennweite der Platte kann mittels der Gleichungen (6.3-1) und (6.3-2) berechnet werden.

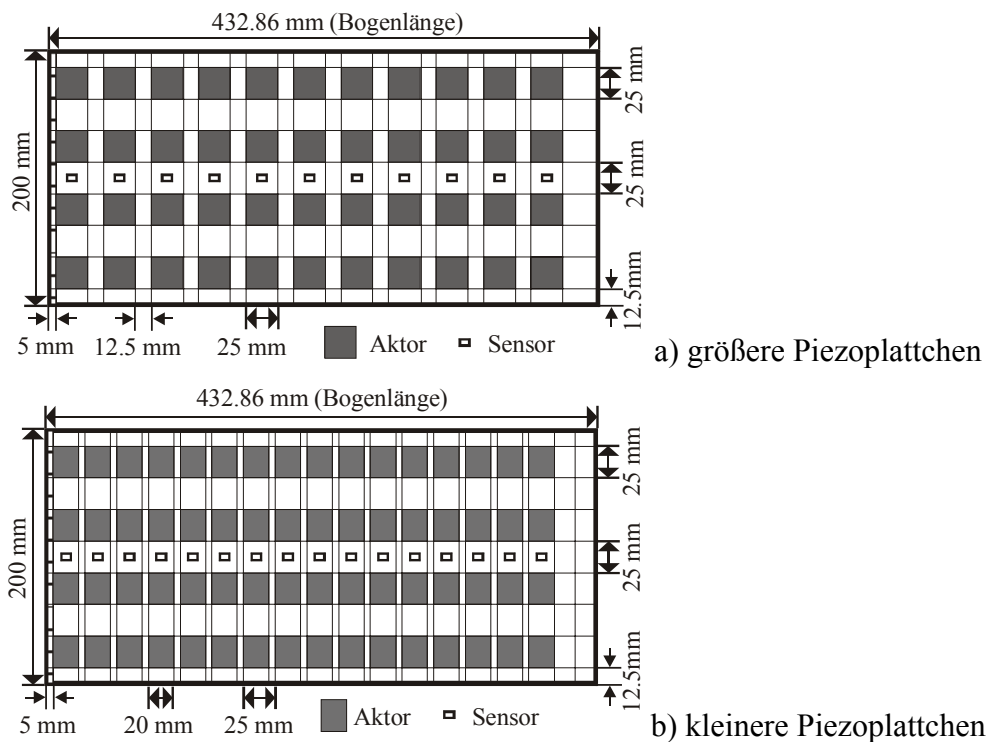
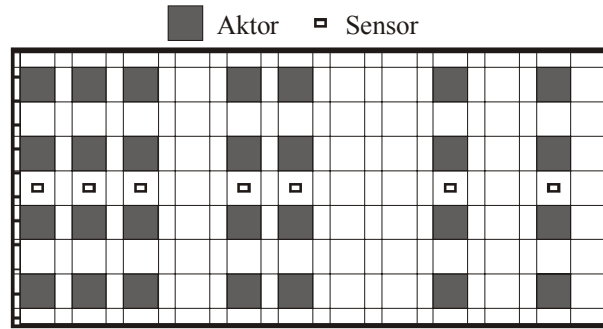


Bild 6-4: Alle möglichen Aktoren- und Sensorenpositionen,
a) größere Piezoplättchen; b) kleinere Piezoplättchen



Chromosom: 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1

Bild 6-5: Ein Beispiel für die Kodierung der Position von Aktoren und Sensoren aufs Chromosom

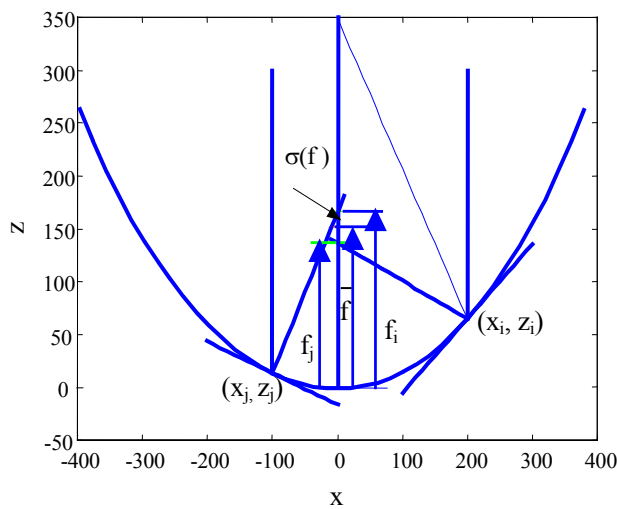


Bild 6-6: Die Skizze der Definition der Brennweite

$$\Delta f^k = |f^k - \bar{f}^k| \quad (6.3-3)$$

$$\sigma(\bar{f}^k) = \sqrt{\frac{1}{nm-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (f^k(x_i, y_j, z_i) - \bar{f}^k)^2} \quad (6.3-4)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \Delta f^k \quad (6.3-5)$$

$$\sigma(f) = \sqrt{\frac{1}{rnm-1} \left(\sum_{k=1}^r nm \left(\bar{f}^k - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \bar{f}^k \right)^2 + \sum_{k=1}^r (nm-1) \sigma(\bar{f}^k)^2 \right)} \quad (6.3-6)$$

Die Gleichungen (6.3-3) und (6.3-5) stellen den Abstand zwischen dem Sollwert und dem durchschnittlichen Istwert dar. Die Gleichungen (6.3-4) und (6.3-6) beschreiben die Glätte der geregelten Platte. Beide sind voneinander unabhängig (s. Bild 6-7). Je kleiner beide Werte sind, desto genauer ist die Regelung. Damit ist es zweckmäßig, dass eine lineare Kombination von der Gleichung(6.3-3) mit der Gleichung (6.3-4) bzw. der Gleichung (6.3-5) mit der Gleichung

Der absolute Fehler zwischen Soll- und Ist-Brennweite und die Standardabweichung der Ist-Brennweite kann durch Gleichung (6.3-3) und (6.3-4) beschrieben werden. Für eine gewünschte Menge der Sollformen f^k , $k = 1, \dots, r$, können der totale durchschnittliche Fehler zwischen Soll- und Ist-Brennweite und die totale Standardabweichung der Ist-Brennweite durch die Gleichung (6.3-5) und (6.3-6) dargestellt werden.

chung (6.3-6) als Zielfunktion verwendet wird.

$$J = c_1 fit_1 + c_2 fit_2$$

$$fit_1 = \text{Gleichung (6.3-3) oder (6.3-5)} \quad (6.3-7)$$

$$fit_2 = \text{Gleichung (6.3-4) oder (6.3-6)}$$

wobei $c_1 + c_2 = 1$ ist. Man sollte beachten, dass der GA nur für die Maximierung verwendet werden kann. Für unser Minimierungsproblem wird

$$fit = \frac{c_3}{c_1 fit_1 + c_2 fit_2} \quad (6.3-8)$$

als Fitnessfunktion benutzt.

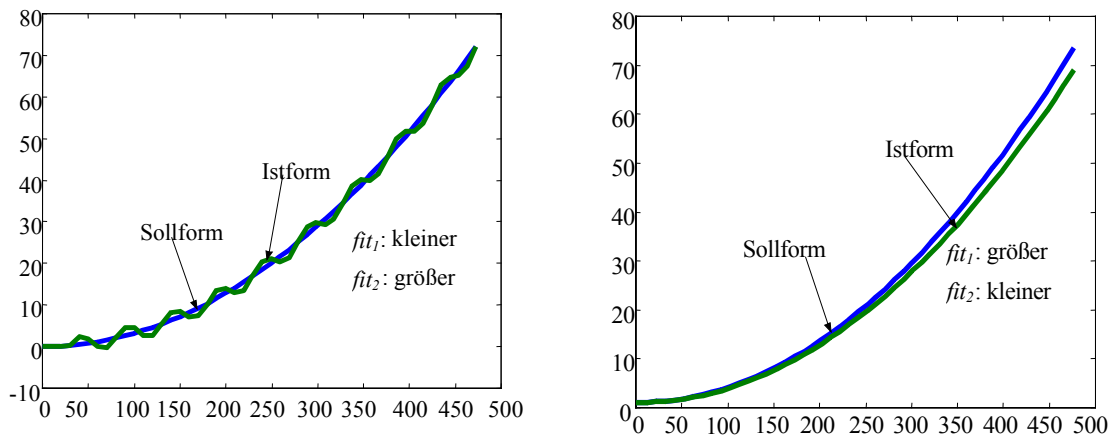


Bild 6-7: Die Bedeutung von fit_1 und fit_2

6.3.4. Berechnung der Stellgrößen

Nun nehmen wir an, dass wir einen Regler haben, der die Stabilität des abgeschlossenen Systems garantiert und die Form $R(p)/p$ hat. Für eine gewünschte Sollform sollen die Stellgrößen

$$U(p) = p^{-1} R(p)(Y_{soll}(p) - Y(p)) \quad (6.3-9)$$

sein. Setzt man die Gleichung (6.1-1) in die Gleichung (6.3-9) ein und ordnet man sie um, erhält man

$$U(p) = (p + R(p)C(s)\overline{G}(a, p))^{-1} R(p) (Y_{soll}(p) - C(s)\overline{G}_d(a, p)d(p))$$

Für die Formkontrolle wird normalerweise die stationäre Genauigkeit zuerst betrachtet. Die stationären Stellgrößen sind $U = (C(s)\overline{G}(a))^{-1} (Y_{soll} - C(s)\overline{G}_d(a)d)$. In dieser Arbeit wird die Störung nicht berücksichtigt und die Stellgrößen vereinfachen sich zu

$$U = (C(s)\overline{G}(a))^{-1} Y_{soll} \quad (6.3-10)$$

6.3.5. Bewertung des Chromosoms mittels der Fitnessfunktion

Für jedes Chromosom wird zunächst die Platzierung der Aktoren und Sensoren decodiert. Dann werden $C(s)$ und $\bar{G}(a)$ durch die FEM berechnet. Für die gewünschte Sollform werden die Stellgrößen mit der Gleichung (6.3-10) kalkuliert. Damit erhält man die Koordinaten der Messpunkte durch die Gleichung (6.1-1) und die Basiskoordinaten der Platte. In dieser Arbeit wird ein Gitter von 10×22 ($y \times x$) Punkten an der Oberfläche der Platte als Messpunkt verwendet. Die Brennweite wird durch die Gleichung (6.3-1) und (6.3-2) bestimmt und die Fitness dieses Chromosoms wird durch die Gleichung (6.3-3) bis (6.3-8) berechnet. Man sollte beachten, dass dies ein sehr rechenintensiver Vorgang ist.

6.3.6. Parameter des verwendeten genetischen Algorithmus

Die folgenden GA-Parameter werden verwendet:

1. $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$ und $c_3 = 100000$
2. **Reproduktion:** deterministische Abtastung
3. **Paarung:** Zufall und keine Selbstpaarung
4. **Kreuzung:** zwei Punkte mit 100% Wahrscheinlichkeit.
5. **Mutationswahrscheinlichkeit:** 1%
6. **Populationsgröße:** 50
7. **Anzahl der Generationen:** n
8. **Abbruch:** Nach n Generationen
9. **Ergebnis:** das beste Chromosom in den n Generationen

Man sollte beachten, wenn die selben Ergebnisse in den konsekutiven 3 Generationen vorkommen, wird der Vorgang zufällig neu initialisiert.

6.4. Simulationsergebnisse

In der ersten Simulation wird der GA verwendet, um eine optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren für alle gewünschten Sollformen zu finden. fit_1 und fit_2 in der Fitnessfunktion werden durch die Gleichung (6.3-5) bzw. (6.3-6) berechnet. Zwei Arten von Aktoren, ein größerer ($25 \times 25 \times 0,2$ mm) und ein kleinerer ($20 \times 25 \times 0,2$ mm), werden verwendet. Für den größeren und den kleineren Aktor ist die Anzahl der Generationen $n = 35$ bzw. $n = 60$. Bild 6-8 zeigt die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren für alle gewünschten Sollformen mit den größeren (Bild 6-8 a) und den kleineren Aktoren (Bild 6-8 b). Die erreichbare Genauigkeit ist in der Tabelle 6-2 und 6-3 für die größeren bzw. die kleineren Aktoren angegeben.

Tabelle 6-2: Die erreichbare Genauigkeit der optimalen Platzierung mit größeren Aktoren

$ \Delta f (\text{mm})$	$f_{\text{soll}}=1100$	$f_{\text{soll}}=1125$	$f_{\text{soll}}=1175$	$f_{\text{soll}}=1200$	Gesamt
Mittelwert	1.90	1.89	2.15	6.38	3.08
Streuung	17.67	13.38	9.90	19.93	15.79
Fitness	10219	13101	16595	7602	10598

Tabelle 6-3: Die erreichbare Genauigkeit der optimalen Platzierung mit kleineren Aktoren

$ \Delta f (\text{mm})$	$f_{\text{soll}}=1100$	$f_{\text{soll}}=1125$	$f_{\text{soll}}=1175$	$f_{\text{soll}}=1200$	Gesamt
Mittelwert	0.82	5.89	1.39	1.44	2.38
Streuung	14.31	6.32	7.21	15.28	11.67
Fitness	13220	16387	23270	11960	14229

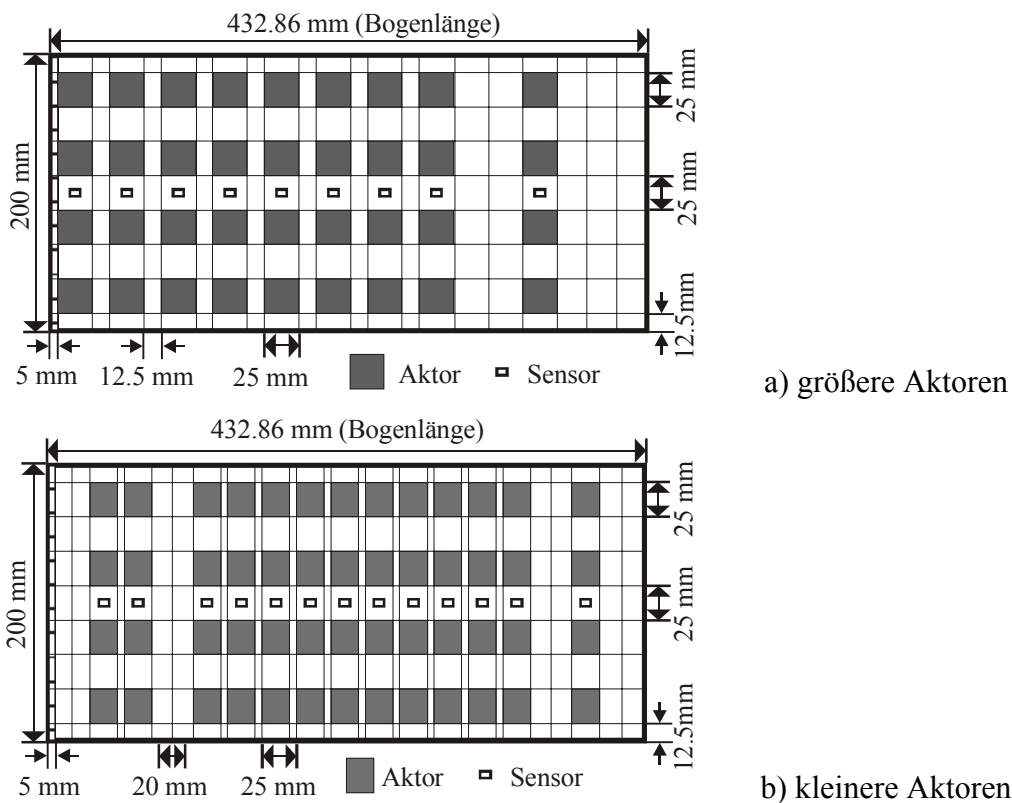


Bild 6-8: Die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren für alle gewünschten Sollformen

Ein Vergleich der Tabelle 6-2 mit der Tabelle 6-3 weist darauf hin, dass die kleineren (mehrere) Aktoren ein besseres Ergebnis (34%) als die größeren (wenige) Aktoren liefern. Die Simulation hat auch gezeigt, dass die Größe der Aktoren die optimale Platzierung beeinflusst.

Die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren ist abhängig von der Basisform und der Sollform. Es gibt unterschiedliche optimale Platzierungen für unterschiedliche Sollformen. Deshalb ist das optimale in der Simulation 1 erreichte Ergebnis ein Kompromiss für die gegebenen vier Sollformen. Damit wird auch die Simulation 1 als die Gruppenanpassung bezeichnet. Auf der anderen Seite ist der Optimierungsvorgang in der Simulation 1 nicht für Massen-

produktion geeignet.

In der Simulation 2 werden zunächst die Aktoren und die Sensoren an allen Kandidatenpositionen platziert. Dann wird der GA verwendet, um eine optimale Benutzung der Sensoren und Aktoren für jede gewünschte Sollform zu finden. Dies wird auch als individuelle Anpassung bezeichnet. In diesem Fall werden fit_1 und fit_2 in der Fitnessfunktion durch die Gleichung (6.3-3) bzw. (6.3-4) berechnet und auch zwei Arten von Aktoren benutzt. Bild 6-9 zeigt die Ergebnisse. Z. B. werden im Bild 6-9 b) die Aktoren und Sensoren, die sich in den mit 1 bezeichneten Spalten befinden, für alle Sollformen verwendet. Die mit 2 bis 7 bezeichneten Aktoren und Sensoren werden für unterschiedliche Sollformen unterschiedlich benutzt. Z. B. werden die mit 2 bezeichneten Aktoren und Sensoren nur für die Sollform 1 und die mit 4 bezeichneten Aktoren und Sensoren für die Sollformen 2 bis 4 verwendet. Die erreichbare Genauigkeit ist in Tabelle 6-4 und Tabelle 6-5 für die größeren bzw. kleineren Aktoren aufgelistet.

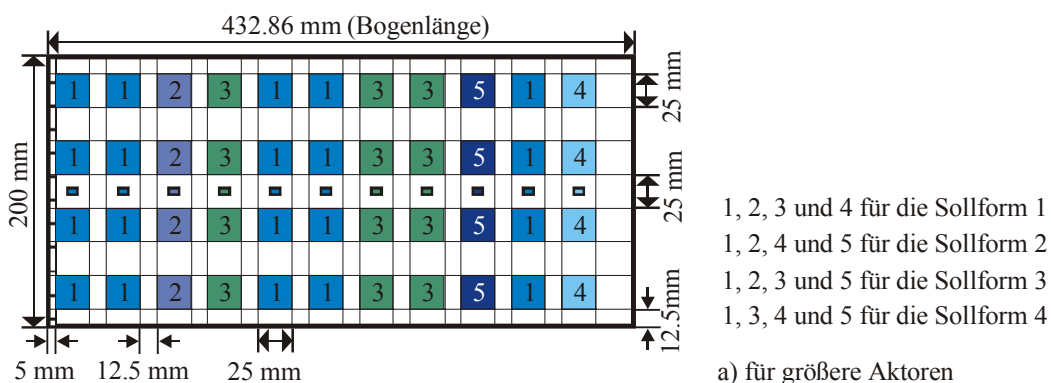
Tabelle 6-4: Die erreichbare Genauigkeit der optimalen Benutzung mit größeren Aktoren

$ \Delta f (mm)$	$f_{soll}=1100$	$f_{soll}=1125$	$f_{soll}=1175$	$f_{soll}=1200$	Gesamt
Mittelwert	1.75	0.18	0.92	0.59	0.86
Streuung	16.83	13.83	10.07	17.28	14.77
Fitness	10766	14277	18205	11191	12795

Tabelle 6-5: Die erreichbare Genauigkeit der optimalen Benutzung mit kleineren Aktoren

$ \Delta f (mm)$	$f_{soll}=1100$	$f_{soll}=1125$	$f_{soll}=1175$	$f_{soll}=1200$	Gesamt
Mittelwert	0.92	0.00	0.02	0.01	0.24
Streuung	12.77	7.54	7.28	14.67	11.04
Fitness	14608	26499	27383	13622	17737

Der Vergleich der Tabelle 6-4 mit der Tabelle 6-5 weist wieder darauf hin, dass mehrere Aktoren besser (38%) als wenige Aktoren sind. Und der Vergleich der Tabelle 6-4 und 6-5 mit der Tabelle 6-2 und 6-3 ergibt, dass beide sich verbessert haben, und zwar 21% für die größeren und 25% für die kleineren Aktoren.



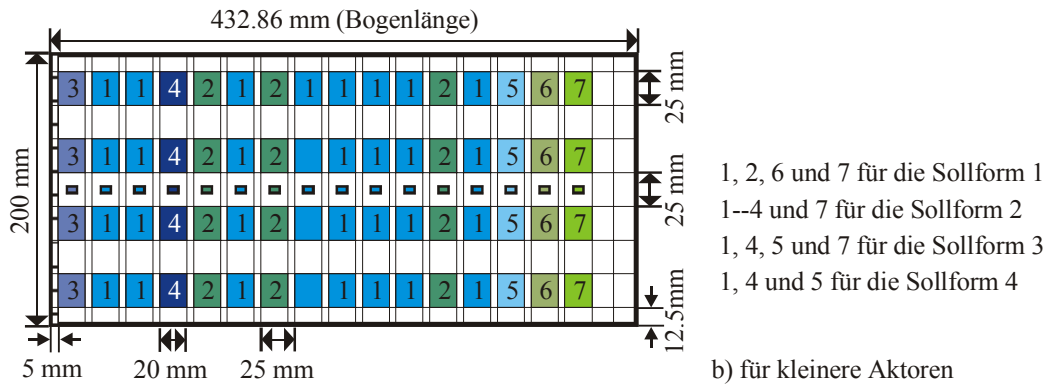


Bild 6-9: Die optimale Benutzung der Aktoren und Sensoren

Die Stellgrößen in der Simulation 1 und 2 wurden durch die Gleichung (6.3-10) berechnet. Es ist möglich, dass die durch die Gleichung (6.3-10) berechneten Werte größer sind als die, die in der Praxis erlaubt sind. Deshalb wird eine harte Schwelle d.h.

$$u_i = \begin{cases} u_i & |u_i| \leq \lim \\ \lim & u_i > \lim \\ -\lim & u_i < -\lim \end{cases},$$

in der Simulation 3 benutzt, um der Situation in der Praxis zu entsprechen. In der Simulation 3 werden die kleineren Aktoren benutzt. Die anderen Bedingungen entsprechen denen in der Simulation 1 und \lim ist gleich 100 V. Bild 6-10 zeigt die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren für alle gewünschte Sollformen mit der Schwelle. Die erreichbare Genauigkeit wird in der Tabelle 6-6 aufgelistet.

Tabelle 6-6: Die erreichbare Genauigkeit der optimalen Platzierung mit kleineren Aktoren und der Schwelle

$ \Delta f (\text{mm})$	$f_{\text{soll}}=1100$	$f_{\text{soll}}=1125$	$f_{\text{soll}}=1175$	$f_{\text{soll}}=1200$	Gesamt
Mittelwert	1.87	3.99	1.34	1.29	2.12
Streuung	14.51	6.82	9.05	16.52	12.40
Fitness	12211	18492	19263	11224	13774

Beim Vergleich des Bildes 6-10 mit dem Bild 6-8 b) ergibt sich, dass die Beschränkung der Stellgrößen die optimale Platzierung beeinflusst. Dieser Einfluss ist negativ. Die erreichbare Genauigkeit bei der Beschränkung ist 3% schlechter als die ohne Beschränkung (Vergleich der Tabelle 6-6 mit der Tabelle 6-3).

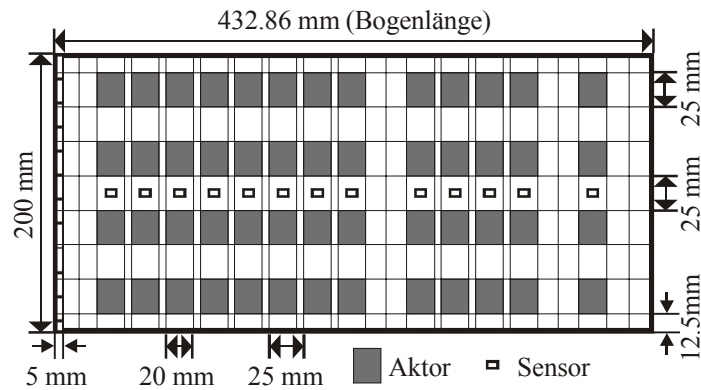


Bild 6-10: Die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren für alle gewünschte Sollformen mit der Schwelle

Die Simulationen zeigen, dass die optimale Platzierung der Aktoren und Sensoren ein sehr komplexer Vorgang ist. Viele Faktoren, z. B. die Basisform, die Sollformen, die Größe der Aktoren, die erlaubten Stellgrößen, die Zielfunktion, etc., beeinflussen die optimale Platzierung. Die erreichbare Genauigkeit hängt sehr stark von der Position der Aktoren und Sensoren ab. Deshalb ist die Optimierung notwendig.

Die Simulationen zeigen auch, dass die erreichbare Genauigkeit mit mehreren kleineren Aktoren besser als die mit wenigen größeren Aktoren ist. Die erreichbare Genauigkeit durch individuelle Anpassung ist viel besser als die durch Gruppenanpassung. Außerdem ist die individuelle Anpassung für ein Massenprodukt besser geeignet.

Die Simulationen zeigen weiterhin, dass der genetische Algorithmus für die Optimierung der Platzierung von Aktoren und Sensoren gut geeignet ist. Der GA verlangt keine Voraussetzung, wie z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc., an die Zielfunktion der Optimierung. Damit kann man die geeignete und komplexe Zielfunktion verwenden und die Optimierung durchführen.

7. Überlegungen zum Regelungsentwurf

Bisher wurde die Datenreduktions- und Erweiterungstechnik für adaptive mechanische Systeme und die Optimierung der Aktoren- und Sensorenplatzierung durch den genetischen Algorithmus vorgestellt und untersucht. Durch den genetischen Algorithmus können wir feststellen, wieviel oder welche Aktoren und Sensoren für das gegebene Problem notwendig sind. Dies ist auch im Sinne der ersten Stufe der Datenreduktion. Durch die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum können wir die benötigte Datenmenge weiter reduzieren, falls sie immer noch zu groß ist.

Es bleiben noch zwei Fragen unbeantwortet. Diese sind: Wie entwirft man im reduzierten Raum einen stabilen Regler? Und wie kann der Regler implementiert werden? In diesem Kapitel wird zunächst das Konzept der verteilten Implementierung des zentralen Reglers zum Beantworten der Frage zwei untersucht. Obwohl die Antwort der Frage eins nicht Hauptaufgabe dieser Arbeit ist, werden einige Besonderheit über den Reglerentwurf im reduzierten Raum erläutert und eine Methode zum Reglerentwurf im modalen Karhunen-Loève-Raum wird vorgeschlagen.

7.1. Die verteilte Implementierung eines zentralen Reglers

Für die Formkontrolle ist eine relativ große Anzahl von Aktoren und Sensoren nötig. Obwohl durch die Verwendung der KLE die Daten massiv reduziert werden können, kann auf die leistungsfähigen Datenverbindungen zwischen Sensoren/Aktoren und dem Regler nicht verzichtet werden, wenn es um einen zentralen Regler geht. Dies ist genau die Schwierigkeit der Implementierung eines zentralen Reglers für die Formkontrolle. Auf der anderen Seite ist der Entwurf eines zentralen Reglers viel einfacher als der eines verteilten Reglers. Die Datenreduktions- und Erweiterungstechnik macht es möglich, einen zentralen Regler verteilt zu implementieren. In diesem Abschnitt soll dieses Konzept unter folgenden Annahmen untersucht werden:

1. ein stabiler, diagonaler Regler $\mathbf{G}_R(s)$ ($\nu \times \nu$) existiert.
2. die Reduktions- und Erweiterungsmatrix \mathbf{R} bzw. \mathbf{T} sind bekannt und sie werden entweder durch die Gleichung (5.3-8a) oder die Gleichungen (3.1-10a,b) und (3.1-17a,b) bestimmt.
3. m Sensoren und p Aktoren sind nötig.

Anhand dieser Annahmen gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r &= \mathbf{R} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{T} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_r &= \mathbf{G}_R \mathbf{y}_r \end{aligned} \tag{7.1-1}$$

wobei \mathbf{y}_r und \mathbf{u}_r die Messgrößen bzw. Stellgrößen im reduzierten Raum sind.

Nun teilen wir die m Messgrößen und p Stellgrößen in k ($\geq v$) Gruppen. In jeder Gruppe gibt

es m_k Sensoren mit $m = \sum_{i=1}^k m_i$ und p_k Aktoren mit $p = \sum_{i=1}^k p_i$. Entsprechend teilen wir die Re-

duktionsmatrix \mathbf{R} und die Erweiterungsmatrix \mathbf{T} auch in k Teile, so dass jedes Teil von \mathbf{R} m_k Spalten und jedes Teil von \mathbf{T} p_k Zeilen hat, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_k] \\ \mathbf{T}^T &= [\mathbf{T}_1^T, \mathbf{T}_2^T, \dots, \mathbf{T}_k^T] \end{aligned} \quad (7.1-2)$$

Dann wird die Gleichung (7.1-1) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r &= \mathbf{R} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_i \mathbf{y}_i \\ \mathbf{u}^T &= [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_k^T] = \mathbf{u}_r^T \mathbf{T}^T = \mathbf{u}_r^T [\mathbf{T}_1^T, \mathbf{T}_2^T, \dots, \mathbf{T}_k^T] \\ \mathbf{u}_r &= \mathbf{G}_R \mathbf{y}_r \end{aligned} \quad (7.1-3)$$

Dies bedeutet, dass die Datenreduktion $\mathbf{R} \mathbf{y}$ und die Datenerweiterung $\mathbf{T} \mathbf{u}_r$ in k Teile $\mathbf{R}_i \mathbf{y}_i$ bzw. $\mathbf{T}_i \mathbf{u}_r$, $i = 1, 2, \dots, k$, unterteilt werden. Jede Teilreduktion und –erweiterung kann als ein Subsystem betrachtet werden.

Fall 1: Zentrale Regelung und verteilte Reduktion und Erweiterung (Bild 7-1)

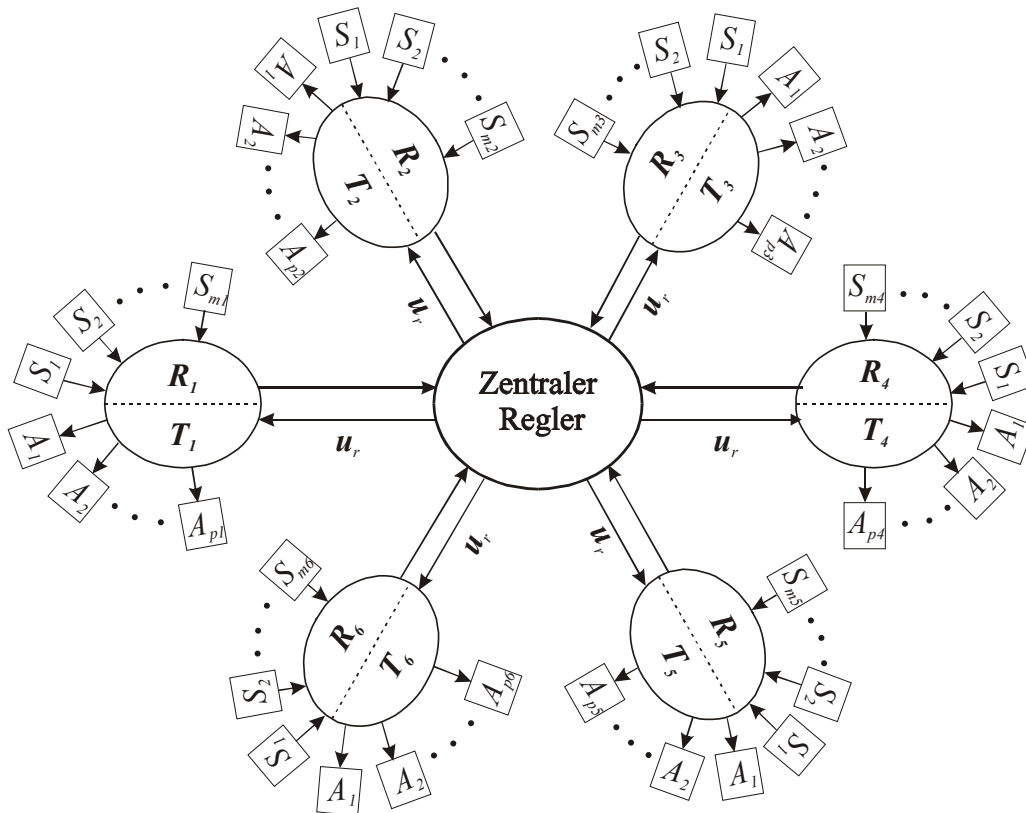


Bild 7-1: Das Schema der zentralen Regelung und der verteilten Reduktion und Erweiterung ($k = 6$).

Das mechanische System ist im Bild nicht dargestellt.

In diesem Fall werden v Regelalgorithmen zentral durchgeführt und die Reduktion und die Erweiterung werden auf k Subsysteme verteilt. Im Subsystem i wird die Teilreduktion $R_i y_i$ durchgeführt, die Ergebnisse (v Größen) werden zum zentralen Regler geschickt und v Stellgrößen werden vom zentralen Regler erwartet. Damit ist ein

$$2kv \text{ mal Datenaustausch} \quad (7.1-4)$$

zwischen dem zentralen Regler und dem Reduktions- und Erweiterungssystem nötig. Falls der Datenaustausch als Telegramm stattfindet, können die v reduzierten Messgrößen von jedem Subsystem zusammengepackt werden und die Übertragung der v Stellgrößen vom zentralen Regler zu den einzelnen Subsystemen kann über Broadcast (d.h. eins an alle) realisiert werden. So genügen

$$k+1 \text{ Telegramme} \quad (7.1-5)$$

Fall 2: Verteilte Regelung und verteilte Reduktion und Erweiterung (Bild 7-2)

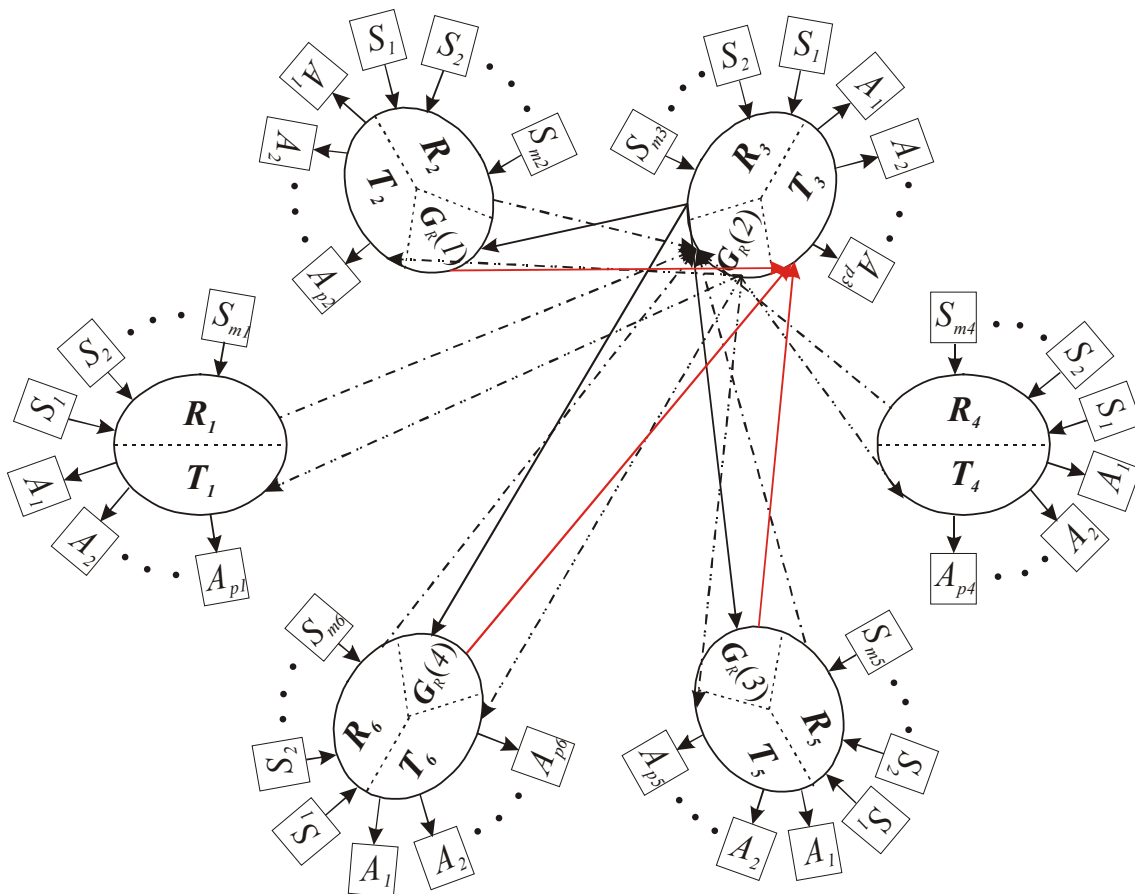


Bild 7-2: Das Schema der verteilten Regelung und der verteilten Reduktion und Erweiterung ($k = 6$, $v = 4$).

Im Bild sind nur die Verbindungen mit dem Subsystem 3 angetragen. Das mechanische System ist nicht im Bild dargestellt.

In diesem Fall werden v Regelalgorithmen in v von k Subsystemen realisiert. Z. B. werden die Regelalgorithmen 1, 2, 3 und 4 im Bild 7-2 in den entsprechenden Subsystemen 2, 3, 5 bzw. 6

implementiert. Im Subsystem 3 wird die Datenreduktion $\mathbf{y}_r^3 = \mathbf{R}_3 \mathbf{y}_3$ durchgeführt. \mathbf{y}_r^3 enthält 4 Komponenten. Die eigene Komponente $\mathbf{y}_r^3(2)$ wird für eigenen Regelalgorithmus 2 verwendet. Die andere Komponenten $\mathbf{y}_r^3(1)$, $\mathbf{y}_r^3(3)$ und $\mathbf{y}_r^3(4)$ werden zu den entsprechenden Subsystemen 2, 5 und 6 gesendet. Bevor man den Regelalgorithmus 2 durchführt, muss das Subsystem 3 noch auf die fremden Reduktionsteile ($\mathbf{y}_r^1(2)$, $\mathbf{y}_r^2(2)$, $\mathbf{y}_r^4(2)$, $\mathbf{y}_r^5(2)$ und $\mathbf{y}_r^6(2)$) von den anderen Subsystemen warten. Nach der Ausführung des Regelalgorithmus 2 sendet das Subsystem 3 die Stellgröße $u_r(2)$ zu den anderen Subsystemen und muss wiederum auf die fremden Stellgröße $u_r(1)$, $u_r(3)$ und $u_r(4)$ warten, um die Datenerweiterung durchzuführen. Damit ist ein $2(v+k-2)$ facher Datenaustausch nötig. Falls der Datenaustausch durch das Telegramm stattfinden soll, benötigt man nur noch $2v+k-2$ Telegramme, weil die Sendung der Stellgröße $u_r(2)$ mit einem Telegramm über Broadcast realisiert werden kann. Dies gilt auch für die anderen Subsysteme, die einem Regelalgorithmus enthalten.

Das Subsystem, das keinen Regelalgorithmus enthält, z. B. Subsystem 1 im Bild 7-2, führt die Datenreduktion durch, sendet die reduzierten Messgrößen \mathbf{y}_r^1 zum Subsystem 2, 3, 5 und 6 und wartet auf die zu erweiternden Stellgrößen von diesen Subsystemen. Damit braucht man einen $2(v-1)$ facher Datenaustausch bzw. $2(v-1)$ Telegramme. Dies gilt auch für das Subsystem 4.

Insgesamt benötigt man einen

$$4vk-2k-2v \text{ fachen Datenaustausch} \quad (7.1-6)$$

und

$$(3v-2)k \text{ Telegramme} \quad (7.1-7)$$

für die verteilte Regelung und die verteilte Reduktion und Erweiterung. Ein numerisches Beispiel wird in der Tabelle 7-1 aufgezeigt.

Tabelle 7-1: Der Vergleich der ausgetauschten Daten und der benötigten Telegramme zwischen dem Fall 1 und dem Fall 2

$k = 6$	Zentrale Regelung, verteilte Reduktion und Erweiterung		verteilte Regelung, verteilte Reduktion und Erweiterung	
	Anzahl der ausgetauschten Daten	Anzahl der benötigten Telegramme	Anzahl der ausgetauschten Daten	Anzahl der benötigten Telegramme
1	12	7	10	6
2	24	7	32	24
3	36	7	54	42
4	48	7	76	60
5	60	7	98	78

Es ist offensichtlich, dass Fall 2 mehr Datenaustausch und mehr Telegramme als Fall 1 braucht. Für eine gegebene Abtastrate ist die Übertragungsrate im Fall 2 höher als die im Fall

1. Dies bedeutet, dass die zentrale Regelung mit verteilter Reduktion und Erweiterung im allgemeinen weniger Kosten im Kommunikationssystem verursacht oder besser anwendbar ist als die verteilte Regelung mit verteilter Reduktion und Erweiterung. Für manche speziellen Systeme, z. B. das schwach gekoppelte System oder das System, in dem der Dehnungsmessstreifen als Sensor benutzt wird, ist die verteilte Regelung mit verteilter Reduktion und Erweiterung vielleicht günstiger, da in solchen Systemen durch geeignete Gruppierung ein fast autonomes verteiltes Regelungssystem konstruiert werden kann.

7.2. Der Reglerentwurf im modalen Karhunen-Loève-Raum

Im Kapitel 3 haben wir erwähnt, dass die Bewegung eines mechanischen Systems mit der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx &= Fu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3-1)$$

beschrieben werden kann. Im Kapitel 3 haben wir auch die modale Transformation

$$x = \Phi q \quad (3.1-3)$$

eingeführt, so dass die Gleichung (3-1) zu

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T D \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q &= \Phi^T Fu \\ y &= C \Phi q \end{aligned} \quad (7.2-1)$$

wird. Die Wurzeln der Gleichung

$$\det(M \lambda^2 + D \lambda + K) = 0$$

sind die Pole der offenen Regelkreise nach Gleichung (3-1). Nach der Ähnlichkeitsinvarianz[BAR 94] sind die Pole der Gleichung (7.2-1) gleich den Polen der Gleichung (3-1).

$$\begin{aligned} \det(\Phi^T M \Phi \lambda_q^2 + \Phi^T D \Phi \lambda_q + \Phi^T K \Phi) &= \\ \det(\Phi^T (M \lambda_q^2 + D \lambda_q + K) \Phi) &= \\ \det(\Phi)^2 \det(M \lambda_q^2 + D \lambda_q + K) &= 0 \Rightarrow \lambda_q = \lambda \end{aligned}$$

Da $\Phi^T M \Phi$, $\Phi^T D \Phi$ und $\Phi^T K \Phi$ diagonal sind, und es sei

$$x = \Phi_v q_v \quad \text{mit } v \leq n \quad (7.2-2)$$

sind die Pole der Gleichung

$$\begin{aligned} \Phi_v^T M \Phi_v \ddot{q}_v + \Phi_v^T D \Phi_v \dot{q}_v + \Phi_v^T K \Phi_v q_v &= \Phi_v^T Fu \\ y &= C \Phi_v q_v \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

gleich den ersten v Polen der Gleichung (7.2-1).

Im Kapitel 5 haben wir die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum eingeführt (s. die Gleichungen (5.3-7) und (5.3-8a))

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_s \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{Q}_{kl} = \mathbf{T}_{x-klq} \mathbf{Q}_{kl} \quad (7.2-4)$$

wobei $s < n$ ist und die Gleichung (3-1) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{x-klq} \ddot{\mathbf{Q}}_{kl} + \mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{D} \mathbf{T}_{x-klq} \dot{\mathbf{Q}}_{kl} + \mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{x-klq} \mathbf{Q}_{kl} &= \mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{F} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{T}_{x-klq} \mathbf{Q}_{kl} \end{aligned} \quad (7.2-5)$$

wird. Da $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{x-klq}$, $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{D} \mathbf{T}_{x-klq}$ und $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{x-klq}$ auch diagonal sind, stellt es sich nun die Frage, ob die Pole der Gleichung (7.2-5) auch die ersten s Pole der Gleichung (7.2-1) sind.

Zunächst schreibt man die Gleichungen (7.2-3) und (7.2-5) in der Zustandsdarstellung. Da

$\Phi_v^T \mathbf{M} \Phi_v = \mathbf{I}_v$, $\Phi_v^T \mathbf{D} \Phi_v = 2\mathbf{Z}_v \Omega_v$ und $\Phi_v^T \mathbf{K} \Phi_v = \Omega_v^2$ sind, wird die Gleichung (7.2-3) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_v \\ -\Omega_v^2 & -2\mathbf{Z}_v \Omega_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_v} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_v^T \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_v} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \Phi_v & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_v} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2-6)$$

Ebenfalls kann die Gleichung (7.2-5) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{kl} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kl} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \\ -\Omega_{kl}^2 & -2\mathbf{Z}_{kl} \Omega_{kl} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{kl}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{kl} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kl} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{kl}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{T}_{x-klq} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{kl}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{kl} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kl} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2-7)$$

umstellen, wobei $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{x-klq} = \mathbf{I}_s$, $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{D} \mathbf{T}_{x-klq} = 2\mathbf{Z}_{kl} \Omega_{kl}$ und $\mathbf{T}_{x-klq}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{x-klq} = \Omega_{kl}^2$ sind. Die Eigenwerte von \mathbf{A}_v und die Eigenwerte von \mathbf{A}_{kl} sind die Pole der offenen Regelkreise der Gleichung (7.2-3) bzw. der Gleichung (7.2-5), und die Pole der Gleichung (7.2-3) sind gleich den ersten v Polen der Gleichung (3-1).

Nun wird angenommen, dass Gleichheit in den Gleichungen (7.2-2) und (7.2-4) gilt. Setzt man die beide Gleichungen zusammen, erhält man die Beziehung zwischen dem modalen Raum und dem modalen Karhunen-Loève-Raum (KLR).

$$\Phi_v \mathbf{q}_v = \mathbf{T}_{x-klq} \mathbf{Q}_{kl} \Rightarrow \mathbf{q}_v = \Phi_v^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{x-klq} \mathbf{Q}_{kl} = \tilde{\mathbf{T}}_{q-klq} \mathbf{Q}_{kl} \quad (7.2-8)$$

Setzt man die Gleichung (7.2-8) in die Gleichung (7.2-6) ein, erhält man die Gleichung

$$\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{T}_{q-klq}^T \mathbf{A}_v \mathbf{T}_{q-klq}$$

wobei $\mathbf{T}_{q-klq} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{q-klq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{q-klq} \end{bmatrix}$ ist. Weiterhin sei $\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{V}_{kl} \mathbf{A}_{kl} \mathbf{V}_{kl}^{-1}$ und $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_v \mathbf{A}_v \mathbf{V}_v^{-1}$. Man

erhält die Beziehung zwischen den Eigenwerten der Gleichung (7.2-7) und den Eigenwerten der Gleichung (7.2-6) zu

$$\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{V}_{kl}^{-1} \mathbf{T}_{q-klq}^T \mathbf{V}_v \mathbf{A}_v \mathbf{V}_v^{-1} \mathbf{T}_{q-klq} \mathbf{V}_{kl} \quad (7.2-9)$$

Es ist offensichtlich, dass die Eigenwerte der Gleichung (7.2-7) nicht gleich den ersten s Eigenwerten der Gleichung (7.2-6) sind, falls $s < v$ ist. D.h. die Wurzeln im modalen KLR sind nicht dieselben im Originalraum. Mit anderen Worten: die abgeschlossenen Regelkreise sind definitiv nicht stabil, wenn man die Entwurfsmethode im modalen Raum, z. B. die Methode, die in Anhang C.5 gegeben ist, direkt im modalen KLR verwendet.

Es ist notwendig, eine Methode zu entwickeln, mit der man die gewünschten abgeschlossenen Pole im Originalraum vorgeben und die Reglerparameter im modalen KLR berechnen kann, ansonsten ist die KLE im Zustandsraum nutzlos.

Man geht zunächst davon aus, dass der Regler im modalen KLR folgende Zustandsdarstellung hat

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_{klq} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (7.2-10)$$

wobei \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c , und \mathbf{D}_c die Reglerparameter sind. \mathbf{u}_c ist die Reglereingabe und \mathbf{u}_{klq} die Reglerausgabe. Dann konstruiert man ein äquivalentes Regelungssystem, in dem sich die Zustandsvariable im modalen Raum und die Eingabe- und Ausgabevariable im modalen KLR befinden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_v \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \mathbf{B}_v \mathbf{T} \mathbf{u}_{klq} \\ \mathbf{Q}_{kl} &= \mathbf{R} \mathbf{C}_v \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2-11)$$

wobei \mathbf{R} und \mathbf{T} die Reduktions- bzw. Erweiterungsmatrix der modalen KLE ist (s. Abschnitt 5.3). Anhand des allgemeinen Regelprinzips und Beachtung der Gleichung (5.3-8a) wird die Reglereingabe zu

$$\mathbf{u}_c = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{a}_{ref} - \mathbf{R} \mathbf{C}_v \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} \quad (7.2-12)$$

wobei \mathbf{a}_{ref} die Sollwerte im KLR sind. Setzt man die Gleichung (7.2-12) in die Gleichung (7.2-10) und die Darstellung von \mathbf{u}_{klq} in der Gleichung (7.2-10) in die Gleichung (7.2-11) ein, erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} = \left[\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{T} \mathbf{D}_c \mathbf{R} \mathbf{C}_v \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \mathbf{B}_v \mathbf{T} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_v \mathbf{T} \mathbf{D}_c \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{a}_{ref} \quad (7.2-13a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = -\mathbf{B}_c \mathbf{R} \mathbf{C}_v \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} + \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{a}_{ref} \quad (7.2-13b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_v \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} \quad (7.2-13c)$$

Fasst man die Gleichungen (7.2-13a) und (7.2-13c) zusammen, erhält man die abgeschlossene Übertragungsfunktion

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{cl} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{cl} \mathbf{a}_{ref} \quad (7.2-14)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{cl} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}$$

$$\text{wobei } \mathbf{A}_{cl} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_v \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_c & -\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c & -\mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{C}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}, \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v \mathbf{T} \mathbf{D}_c \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \text{ und } \mathbf{C}_{cl} = [\mathbf{C}_v, \mathbf{0}]$$

sind. Die charakteristische Funktion der Gleichung (7.2-14) ist

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}) = 0 \quad (7.2-15)$$

Die Aufgabe des Reglerentwurfs ist nun, die Matrix \mathbf{K} zu finden, so dass alle Wurzeln der charakteristischen Funktion (7.2-15) links der j -Achse liegen. Diese Aufgabe kann durch folgende Optimierungstechnik gelöst werden [FÖL 94].

$$\min_{\mathbf{K}} \{J\} \quad (7.2-16a)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\nu+2s} w_i \left| \det(\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}(\xi_i)) - \frac{P^*(\xi_i)}{P_s(\xi_i)} \right|^2 \quad (7.2-16b)$$

$$\mathbf{G}(\xi_i) = \mathbf{C}(\xi_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (7.2-16c)$$

$$P^*(\xi_i) = \prod_{j=1}^{2\nu+2s} (\xi_i - \lambda_{Kj}) \quad (7.2-16d)$$

$$P_s(\xi_i) = \det(\xi_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (7.2-16e)$$

wobei $\lambda_{Kj}, j = 1, 2, \dots, 2\nu+2s$, die vorgegebenen gewünschten Eigenwerte von \mathbf{A}_{cl} sind und $\xi_i, i = 1, 2, \dots, 2\nu+2s$, die sogenannte Stützstellen. Die vorgegebenen gewünschten Eigenwerte dürfen mehrfache sein, ebenso die Eigenwerte der Strecke (Gleichung (3-1)). Die Stützstellen dagegen, müssen nur im Wert untereinander und von allen Eigenwerten der Strecke verschieden sein, aber sind im übrigen beliebig. $w_i > 0$ sind die frei wählbaren Gewichtungsfaktoren.

Die Optimierung (7.2-16) ist nichtlinear, dadurch existiert keine formelmäßige Lösung, aber es existieren mehrere numerische Lösungen, z. B. mit dem Optimierungswerkzeug von [MATLAB].

Im Anhang C wurde erwähnt, dass der PID-Regler der einfachste und robusteste Regler ist. Im Kapitel 5 haben wir gezeigt, dass das zu regelnde System im modalen KLR diagonal und von der Ordnung 2 ist. Deshalb genügen s PID-Regler für s Karhunen-Loève-Koordinaten.

Nun schreibt man die PID-Regler (Gleichung (c-6)) um zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{ci} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ci}} \mathbf{x}_{ci} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{ci}} \mathbf{u}_{ci} \\ \mathbf{u}_{klqi} &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_i & -N_i^2 D_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{ci}} \mathbf{x}_{ci} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_i + N_i D_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{ci}} \mathbf{u}_{ci}\end{aligned}\quad (7.2-17)$$

Für s PID-Regler sind die Reglerparameter in der Gleichung (7.2-10)

$$\mathbf{A}_c = \text{diag}(\mathbf{A}_{ci}), \mathbf{B}_c = \text{diag}(\mathbf{B}_{ci}), \mathbf{C}_c = \text{diag}(\mathbf{C}_{ci}) \text{ und } \mathbf{D}_c = \text{diag}(\mathbf{D}_{ci}) \quad (7.2-18)$$

Die Gleichung (7.2-19) zeigt ein Beispiel für $s = 2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} I_1 & -N_1^2 D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & -N_2^2 D_2 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} P_1 + N_1 D_1 & 0 \\ 0 & P_2 + N_2 D_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.2-19)$$

Nun werden die zu optimierenden Parameter von $9s^2$ auf $4s$ reduziert und das Optimierungsproblem (7.2-16) wird zu

$$\begin{aligned}\min \quad & \{J\} \\ & P_i, I_i, D_i, N_i \\ & N_i \geq 0, I_i \geq 0 \\ & P_i + N_i D_i \geq 0 \\ & P_i N_i + I_i \geq 0 \\ & i = 1, \dots, s\end{aligned}\quad (7.2-20)$$

Darin ist das J dasselbe wie in Gleichung (7.2-16b). Die Optimierung (7.2-20) kann ebenfalls durch das Optimierungswerkzeug von [MATLAB] erfolgen.

Die $2v+2s$ vorgegebenen gewünschten Eigenwerte von \mathbf{A}_{ci} enthalten $2s$ Eigenwerte der s Regler. Diese Eigenwerte existieren im modalen KLR und die Vorgaben sollen auch im modalen KLR gültig sein. Die genaue Vorgabe der Eigenwerte im modalen KLR ist schwer, weil die Beziehung zwischen dem abgeschlossenen modalen Raum und dem abgeschlossenen modalen

KLR unbekannt ist. Jedoch garantieren die Nebenbedingungen der Optimierung (7.2-20) die Stabilität des PID-Reglers. Damit braucht man die genaue Vorgabe der Eigenwerte des Reglers nicht. Einige Näherungswerte mit kleineren Gewichtungsfaktoren w_i genügen.

Die 2ν vorgegebenen gewünschten Eigenwerte von A_{cl} sind die Eigenwerte der Strecke und diese sind im modalen Raum. Die genauere Vorgabe ist möglich. Wie groß ν sein soll, hängt von der dynamischen Anforderung der zu regelnden Regelkreise ab. Falls die Bandbreite des abgeschlossenen Systems gleich ω_{cl} sein soll, genügt ein minimales ν , so dass

$$\omega_{cl} \leq \omega(\nu) \quad (7.2-21)$$

wobei $\omega(\nu)$ die ν -te Eigenfrequenz der offenen Regelkreise ist.

Da die Eigenwerte der Strecke in den vorgegebenen gewünschten Eigenwerten von A_{cl} auftauchen dürfen, kann man die ν -ten Eigenwerte der offenen Regelkreise als die vorgegebenen gewünschten Eigenwerte der geschlossenen Regelkreise angeben, so dass die Eigenwerte der geschlossenen Regelkreise, die größer als die ν -ten Eigenwerte sind, gleich der Eigenwerten $(\nu+1, \dots, n)$ der offenen Regelkreise sind. Da die offenen Regelkreise stabil und die geschlossene Subregelkreise mit der Ordnung $2\nu+2s$ auch stabil sind, sind die originalen Regelkreise stabil. D.h. durch die Optimierung (7.2-20) ist garantiert, dass der Regler, der im modalen Karhunen-Loève-Raum entworfen wurde, das System (3-1) stabilisiert.

Nun ist die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum perfekt. Die KLE bietet uns ein reduziertes System an, in dem die Freiheitsgrade von n auf ν reduziert werden, sowie die Eingänge von p auf ν und die Ausgänge von m auf ν . Die stationäre Genauigkeit des Systems ist gleich der Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen. Wie stark die Reduzierung erfolgen kann, hängt nur vom Interesse des Benutzers ab. Wenn man nur an wenigen Steuerzielen bzw. einer geringen Variation der vorgegeben Form interessiert ist, kann die Reduzierung ziemlich groß sein. Das reduzierte System ist entkoppelt. Obwohl die Theorie keine Garantie gibt, dass der im reduzierten Raum entworfene Regler das unreduzierte System stabilisiert, kann man durch Verwendung der Optimierung (7.2-20) eine solche Garantie gewährleisten.

Dennoch hängt ein guter Einsatz der KLE im Sinne des Reglerentwurfs von den Vorgaben zweckmäßiger Eigenwerte ab. Wie gut die Vorgaben sind, kann man nicht mit einigen Formeln bestimmen. Man braucht Gefühl und Erfahrung wie bei den übrigen Reglerentwurfsmethoden.

8. Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse

Bislang haben wir die Datenreduktions- und Erweiterungstechnik für adaptive mechanische Systeme und den Reglerentwurf im reduzierten Raum vorgestellt und untersucht. Die KLE bietet uns eine Methode an, das System in den Freiheitsgraden (n auf ν) sowie im Eingang (p auf ν) und im Ausgang (m auf ν) zu reduzieren. Die stationäre Genauigkeit des Systems entspricht der Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen. Wie stark die Reduzierung erfolgen kann, hängt nur von den Zielvorgaben des Benutzers ab. Wenn man nur an wenigen Steuerzielen interessiert ist, könnte die Reduzierung ziemlich groß sein. Die im Abschnitt 7.2. vorgestellte Methode garantiert, dass der im reduzierten Raum entworfene Regler das unreduzierte System stabilisiert.

Bislang basieren diese Ergebnisse nur auf der Theorie und Simulation. In diesem Kapitel werden experimentelle Untersuchungen zur Anwendung der beschriebenen Methoden vorgestellt. Die Ergebnisse bestätigen die Richtigkeit dieser Methode.

Aus technischen Gründen werden die Ergebnisse der optimalen Platzierung der Aktoren und Sensoren nicht experimentell untersucht.

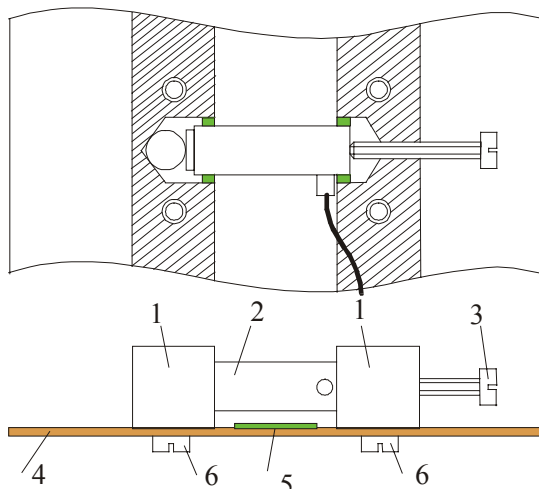
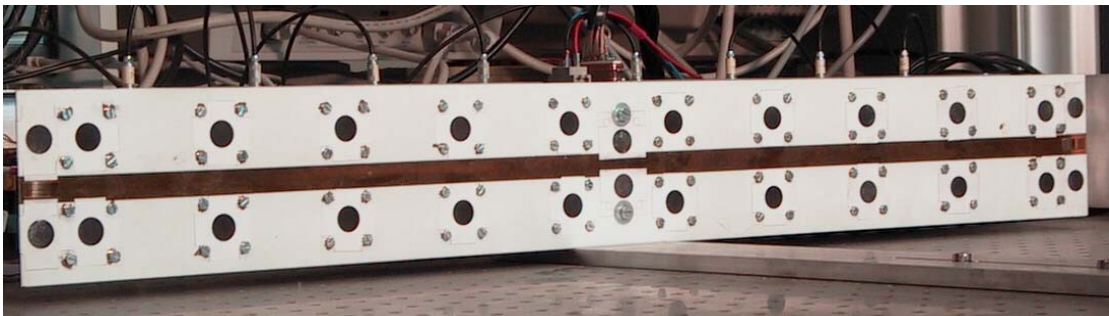
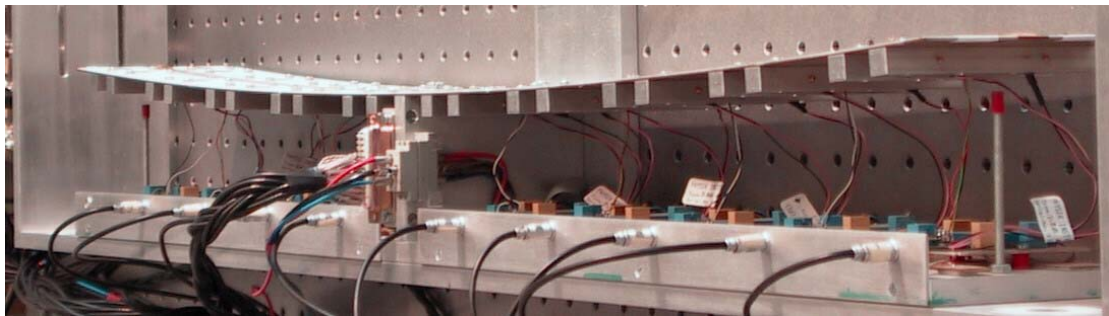
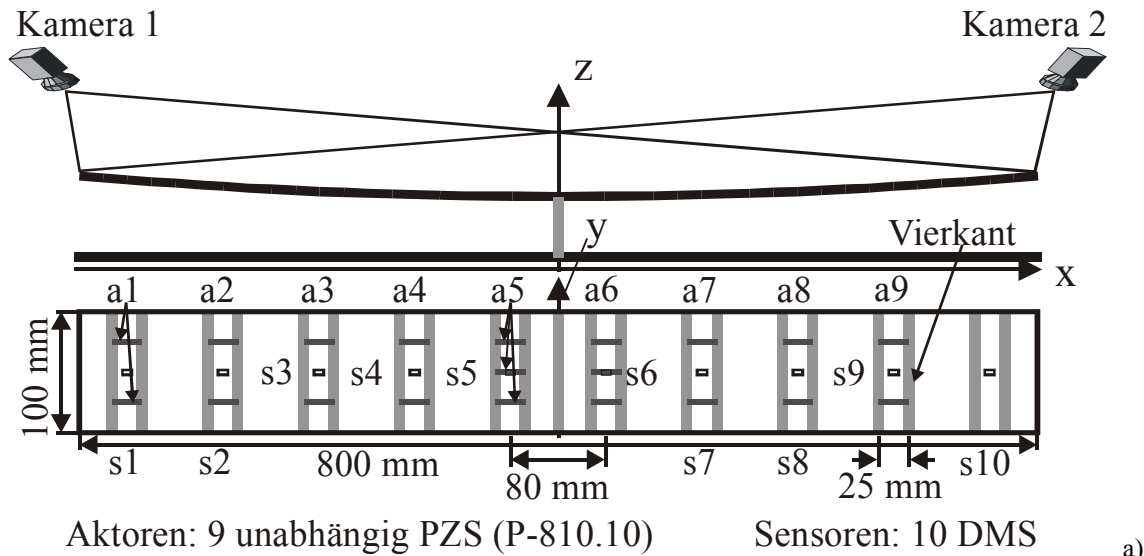
8.1. Beschreibung des Versuchsaufbaus

Das Versuchsobjekt ist eine eindimensionale parabelförmige Platte mit dem Maß $800 \times 100 \times 1,5$ mm (Bogenlänge \times Breite \times Dicke). Das Grundmaterial besteht aus Messing. Die parabelförmige Platte wird am Mittelpunkt (in x-Richtung) befestigt (s. Bild 8-1).

Aus technischen Gründen wurde die Platzierung der Aktoren und Sensoren nicht durch den genetischen Algorithmus optimiert, sondern sie wurden einfach gleichmäßig verteilt. Die Piezokeramikstäbe vom Typ P-810.10 von der Firma Physik Instrument wurden als Aktoren und die Dehnungsmessstreifen als Sensoren benutzt. Da die Form der parabelförmigen Platte nur in x-Richtung geändert werden soll, wurden die Aktoren in y-Richtung auch gleichmäßig verteilt und gruppiert. D. h. die Aktoren mit der gleichen x-Koordinate werden in einer Gruppe, sowohl physikalisch als auch elektronisch zusammengefasst. Es gibt neun solche Gruppen. Jede Gruppe wird als ein unabhängiger Aktor bezeichnet. Der Abstand zwischen der Mitte der zwei unabhängigen Aktoren beträgt 80 mm. Das Material der Vierkante besteht aus Aluminium. Die Dehnungsmessstreifen werden in der Mitte (y-Richtung) und unter den Aktoren positioniert.

Ein 3D-Meßsystem[CAL 01, ALB 98] mit zwei Kameras wird benutzt, um die Formveränderung des Versuchsobjekts zu messen. Durch das 3D-Meßsystem werden je Messung 26 Positionen (die schwarzen Kreise im Bild 8-1c)) auf der Oberfläche vermessen[ALB 98]. Basierend auf den gemessenen 3D-Koordinaten der 26 Punkte wird ein mathematisches 3D-Modell

der Plattenoberfläche ermittelt. Anhand dieses 3D-Modells können beliebig feinere Gitterpunkte erzeugt und dann gemäß der Gleichung (6.3-2) die Brennweite berechnet werden.



- 1: Alu-Vierkant (10 x 10)
- 2: Piezostabaktor P 810.10
- 3: M2-Justageschraube mit Feingewinde (0,25)
- 4: Messingblech (1,5 mm)
- 5: Dehnmessstreifen (350 Ω)
- 6: M3-Befestigungsschraube

d)

Bild 8-1: Schema und Photo des Versuchsaufbaus; a) Schema; b) Sicht von oben; c) Frontansicht; d) Aktorbefestigung

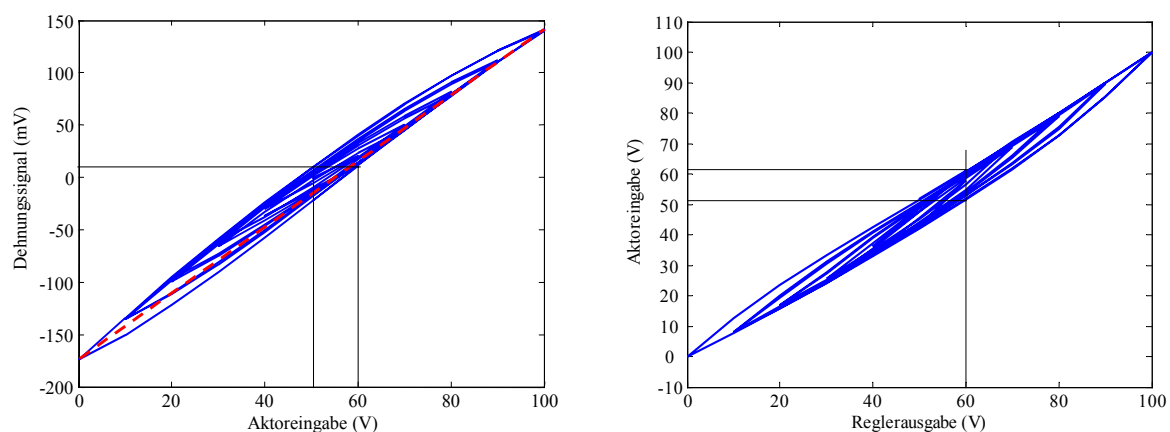
In der Basisform (alle unabhängigen Aktoren mit 50 V) hat die parabelförmige Platte gemäß der Gleichung (6.3-2) etwa 2261 mm Brennweite. Das Ziel des Versuches ist es, die Brennweite zwischen 2240 mm und 2300 mm zu variieren. Das Schema (a)), die Sicht von oben (b)), die Frontansicht (c)) und die Aktorbefestigung (d)) sind im Bild 8-1 angegeben. Die Materialdaten vom Grundkörper, Vierkant und P-810.10 sind in der Tabelle 8-1 aufgelistet.

Tabelle 8-1: Materialdaten

	Dichte (g/cm ³)	Elastizitätsmodul (N/mm ²)	Poisson'sche Zahl
Messing	8.50	1.12×10^5	0.333
Aluminium	2.72	0.75×10^5	0.330
	Dichtung (g/cm ³)	Elastizitätsmodul (N/mm ²)	Piezoelekt. Konst.
P-810.10	2.56	3.07×10^3	4.61×10^2 (N/(Vm))

8.2. Hysteresekompensation an Piezokeramikstabaktoren

Piezokeramikstabaktoren haben eine mehrdeutige statische Kennlinie, eine in ihrer Breite und Neigung aussteuerungsabhängige Hysterese. Um das lineare Finite-Element-Modell (FEM) zu verwenden, ist es nötig, die Hysterese zu kompensieren.



a) Hysterese der Piezostabaktoren

b) Inverse Hysterese der Piezostabaktoren

Bild 8-2: Hysterese und inverse Hysterese der Piezostabaktoren.

Es sei $y = f(x)$ die Hysterese der Piezostabaktoren, wobei x die Aktoreingabe und y die Dehnung ist. Die Aufgabe der Kompensation ist es, eine Funktion $x = g(u)$ zu finden, so dass die Funktion $f(g(u))$ linear ist (die rote Strichlinie im Bild 8-2 a)), wobei u die Reglerausgabe ist. Die Funktion $x = g(u)$ kann aus Bild 8-2 a) prinzipiell bestimmt werden. Wenn die Aktoreingabe z. B. von 0 V bis 60 V reicht, ist der Dehnungssignal etwa 10 mV. Falls die Aktoreingabe von 100 V herunterfährt und der Dehnungssignal 10 mV bleiben möchte, muss die Aktoreingabe nicht 60 V, sondern etwa 50 V sein (s. Bild 8-2 b)). Führt man diesen Vorgang für jeden Punkt auf der Hysteresekurve durch, erhält man die inverse Hysterese (s. Bild 8-2 b)).

In der Literatur [BER 01] und [DÖS 97] wird folgendes Modell sowohl für die Hysterese als auch für die inverse Hysterese vorgestellt:

$$y = f(x) + h(x - x_u, h_u) \quad (8.2-1)$$

$$h(x - x_u, h_u) = h_u e^{-k_1|x-x_u|} + k_2 \operatorname{sgn}(x - x_u)(1 - e^{-k_1|x-x_u|})$$

wobei $f(x)$ eine zu bestimmende eindeutige, nichtlineare Funktion und die Funktion $h()$ der verbleibende mehrdeutige Rest ist. x_u ist der sogenannte Umkehrpunkt des Eingangssignals und $h_u = h(x = x_u)$ ist der Funktionswert des mehrdeutigen Rests am Umkehrpunkt. $\operatorname{sgn}()$ ist die Vorzeichenfunktion. k_1 und k_2 sind die zu bestimmenden Konstanten.

Die Gleichung (8.2-1) zeigt, dass die Funktion $h()$ symmetrisch und der Abstand zwischen den Umkehrpunkten und der Funktion $f()$ gleich ist (siehe die (grüne) durchgezogene Linie mit „+“ im Bild 8-3c). Mit anderen Worten ist die durch die Gleichung (8.2-1) dargestellte Hysterese eine um die nichtlineare Funktion $f()$ symmetrische Funktion.

Dies führt zu einer Skizze, wie man die Funktion $f()$ bestimmen kann:

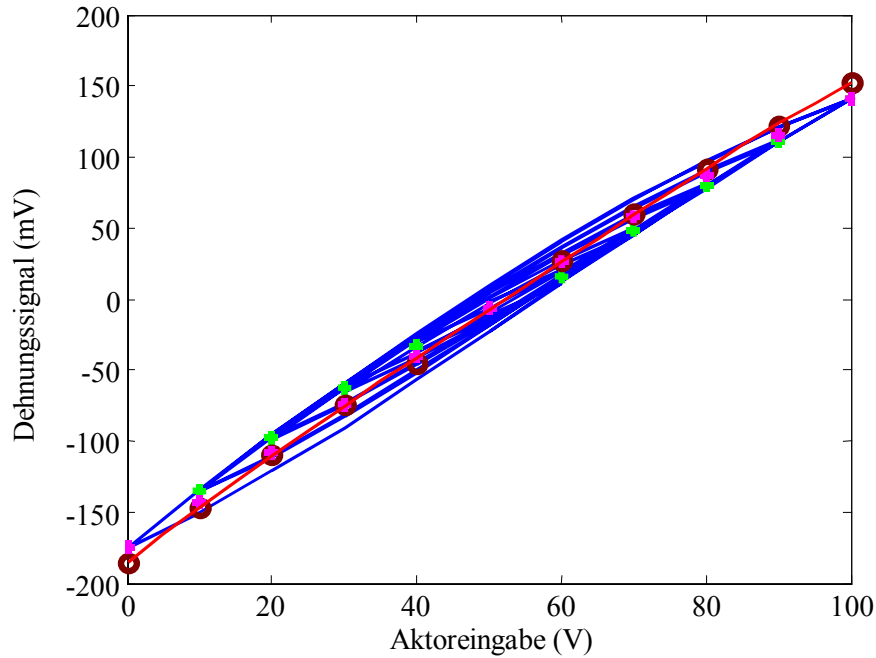
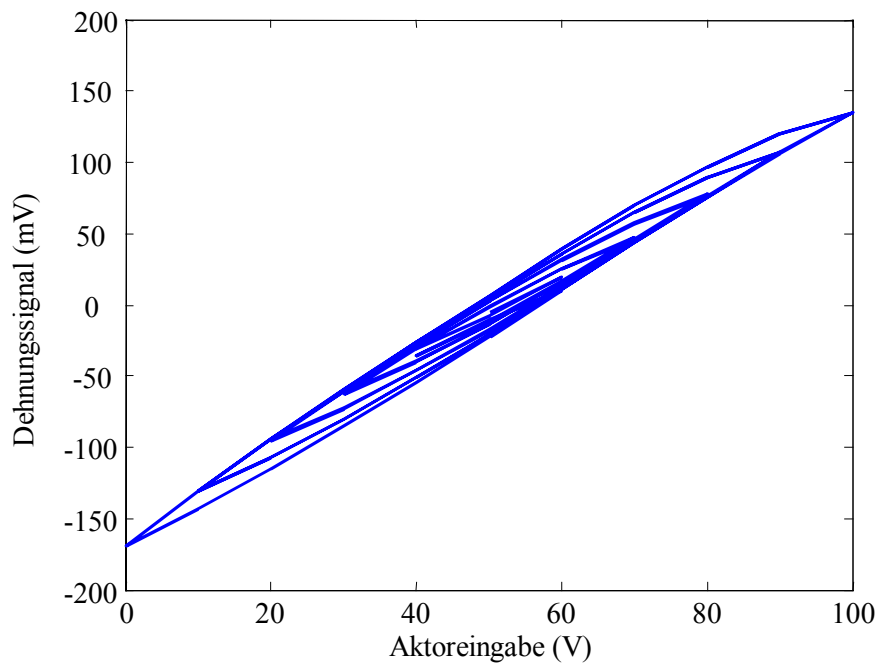
1. Berechnung der Mittelpunkte (die (magenta) „*“ Punkte im Bild 8-3 a))
2. Berechnung der Abstände zwischen den Mittelpunkten und den Umkehrpunkten (die (grünen) „+“ Punkte im Bild 8-3 a)) und ihrem maximalen Wert.
3. Festlegung der Punkte (die (braunen) „o“ Punkte im Bild 8-3 a)), die auf der Funktion $f()$ liegen sollen, mit dem maximalen Abstand zu den Umkehrpunkten.
4. Finden der Funktion $f()$ durch die kleinste quadratische Spline-Approximation (der 3ten Ordnung).

Bild 8-3 b) zeigt das durch die oben genannte Methode aus der gemessenen Hysterese (Bild 8-3 a)) gewonnene Hysterese-Modell mit $k_1 = 0.051$ und $k_2 = 17.151$. Der Vergleich des Bilds 8-3 a) und b) zeigt, dass die durch die Gleichung (8.2-1) dargestellte Hysterese sehr nahe an der gemessenen Hysterese liegt. Aber der Vergleich der $h()$ Funktion zwischen der gemessenen Hysterese $-f()$ und der berechneten Hysterese $-f()$ weist darauf hin, dass das durch die Gleichung (8.2-1) dargestellte Hysterese-Modell noch einen relativ großen Fehler enthält. Dieser Fehler ist für unsere Anwendung noch zu groß, deshalb wird das Hysterese-Modell (8.2-1) verbessert.

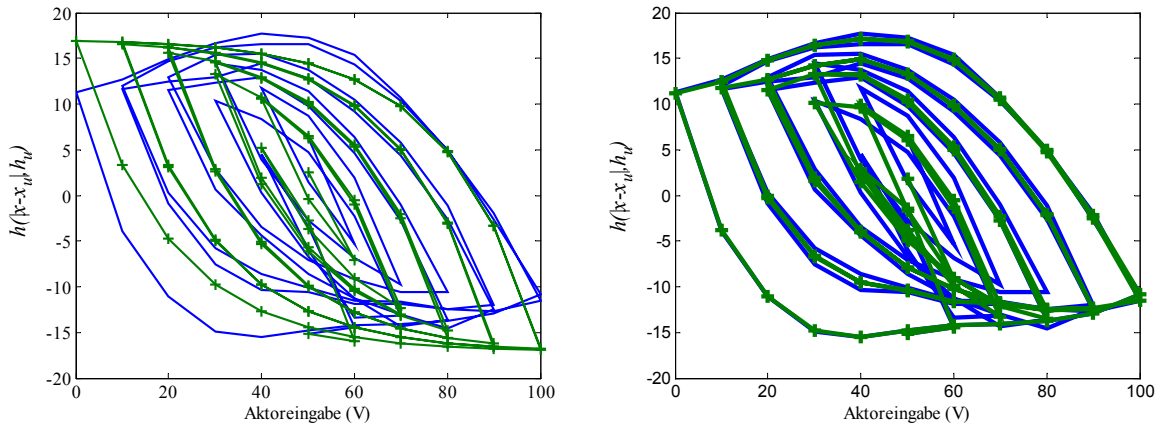
Der Hauptgrund des Fehlers ist, dass die gemessene Hysterese nicht um die Funktion $f()$ symmetrisch ist. Deshalb werden im verbesserten Modell bei der steigenden und fallenden Eingabe unterschiedliche Konstanten k_1 und k_2 verwendet. Außerdem wird eine Funktion $f_{k2}(x, x_u)$ für jeden Umkehrpunkt eingefügt, um den Unterschied zwischen der gemessenen und berechneten Hysterese zu korrigieren.

$$y = f(x) + h(x - x_u, h_u)$$

$$h(x - x_u, h_u) = \begin{cases} h_u e^{-k_1^{\text{steigend}} |x - x_u|} + k_2^{\text{steigend}} (1 - e^{-k_1^{\text{steigend}} |x - x_u|}) + f_{k_2}^{\text{steigend}}(x, x_u), & x > x_u \\ h_u e^{-k_1^{\text{fallend}} |x - x_u|} - k_2^{\text{fallend}} (1 - e^{-k_1^{\text{fallend}} |x - x_u|}) + f_{k_2}^{\text{fallend}}(x, x_u), & x < x_u \end{cases} \quad (8.2-2)$$

a) Das Prinzip der Berechnung der Funktion $f()$ 

b) Das durch Gl. (8.2-1) beschriebene Hysteresemodell

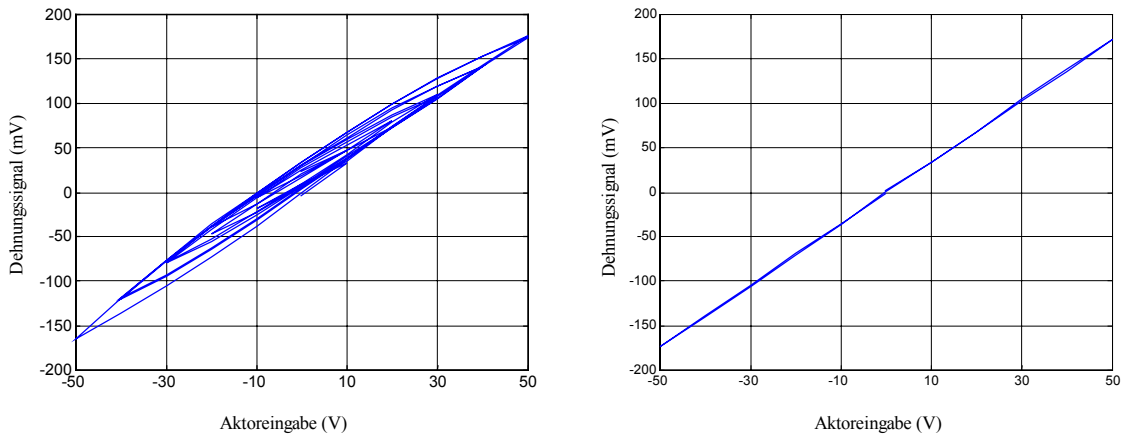


c) Die gemessenen (blaue durchgezogene Linie) und berechneten (grüne durchgezogene Linie mit „+“) $h()$ Funktionen

d) Die gemessenen (blaue durchgezogene Linie) und verbessert berechneten (grüne durchgezogene Linie mit „+“) $h()$ Funktionen

Bild 8-3: Das Prinzip der Hysterese-Modellbildung

Bild 8-3 d) zeigt die gemessenen und die durch das verbesserte Hysterese-Modell (8.2-2) berechneten $h()$ Funktionen. Bild 8-4 zeigt die gemessene Hysterese des Aktors a5 vor und nach der durch das verbesserte Hysterese-Modell (8.2-2) durchgeführten Kompensation. Die Tabelle 8-2 listet die maximale Hysterese vor und nach der Kompensation auf.



a) vor der Hysteresekompensation

b) Nach der Hysteresekompensation

Bild 8-4: Darstellung des Ergebnisses der Hysteresekompensation des Aktors 5

Tabelle 8-2: Die maximale Hysterese aller Aktoren vor und nach der Kompensation

Hysterese (mV)	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
Vor Komp.	35	32	33	38	38	30	35	35	35
Nach Komp.	4	4	6	4	3	4	4	2	5

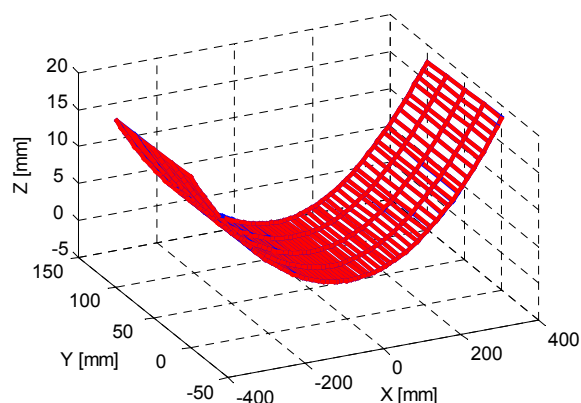
8.3. Modellbildung und –verifikation

Nach der Hysteresekompensation werden die 3D geometrischen Daten im ruhenden Zustand (alle Aktoren mit 50 V) gemessen. Anhand dieser Daten werden zwei FE-Modelle mit 3D-Elementen, eines für die linke Seite und ein zweites für die rechte Seite, konstruiert. Jedes

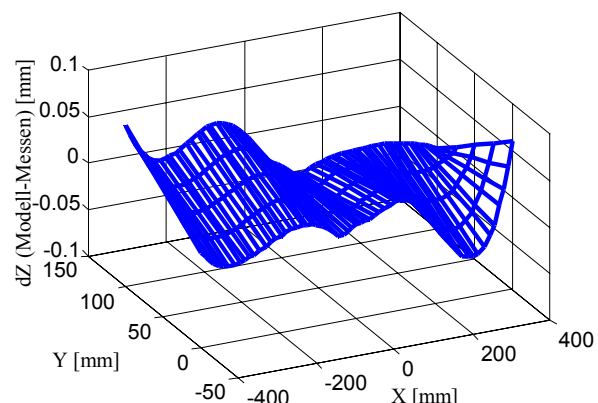
Modell hat 2989 Freiheitsgrade. Das linke Modell hat 5 Ein- und Ausgänge und das rechte hat 4. Zur Verifizierung des statischen Verhaltens werden die einzelnen unabhängigen Aktoren aktiviert (0 V und 100 V), die durch die FE-Modelle berechneten Verformungen werden mit den durch das 3D-Messsystem gemessenen Ergebnissen verglichen und die Parameter der FE-Modelle werden aktualisiert. Tabelle 8-3 zeigt die Endergebnisse nach der Anpassung. Dabei wird der Fehler ε entsprechend $\varepsilon = \sqrt{\sum \left(\frac{\text{Modell-Messen}}{\text{Messen}} \right)^2} / n \times 100\%$ berechnet. Bild 8-5 zeigt die berechnete und gemessene Verformung (Bild 8-5 a)) und die Abweichung (Bild 8-5 b)) bei den Aktoren a5 und a6 mit 100 V Eingabe an.

Tabelle 8-3: Die Endergebnisse nach der Anpassung.

$\varepsilon(\%)$ / aktivierter Aktor / Aktor spannung	a5a6	a4a7	a3a8	a2a9	a1
+ 50 V (100V)	3.97	2.77	3.09	4.56	2.37
- 50 V (0V)	2.47	3.13	2.87	4.13	2.76



a) Absolute Verformung



b) Abweichung zwischen der gemessenen und der berechneten Verformung

Bild 8-5: Modellberechnung und 3D Messung für a5a6 = 100V

Nach der Verifikation des statischen Verhaltens werden die durch das im Anhang B.3 vorgestellte Modell berechneten Dehnungssignale mit den gemessenen verglichen, weil die Modellparameter, z. B. der Verstärker, die Empfindlichkeit des Materials und die effektive Länge bzw. Breite des Dehnungsmessstreifens (s. Gleichung (b-11)), durch die Kalibrierung bestimmt werden müssen. Tabelle 8-4 listet den relativen Fehler der Dehnungssignale nach der Kalibrierung auf. Der Fehler wird wie in Tabelle 8-3 berechnet.

Tabelle 8-4: Der relative Fehler der Dehnungssignale nach der Kalibrierung

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9
ε (%)	2.41	2.85	1.26	0.5	2.05	1.79	0.69	1.55	1.65

8.4. Durchführung der KLE, Reglerentwurf und Sollwertberechnung

Nach der Modellverifikation erhält man ein lineares Modell. Anhand dieses Modells wird die KLE im Zustandsraum durchgeführt. Da die Konstruktion der Aktoren (s. Bild 8-1 a) und d)) die Verdrehung nicht überwinden kann und im Versuchsobjekt eine mechanische schwer kompensierbare Verdrehung existiert⁸⁻¹, können die berechneten Sollformen nicht direkt als die repräsentative Menge für die KLE verwendet werden. Deshalb werden die auf die bestehende Verdrehung bezogenen Deformationen, die durch aktive einzelne Aktoren mit der minimalen und maximalen Spannung erzeugt wurden, als die repräsentative Menge für die Berechnung der KLE benutzt. Anhand des Ergebnisses des Abschnitts 5.3.2 genügt es, jeweils 5 und 4 orthogonale Funktionen zu berechnen. Tabelle 8-5 listet jeweils 10 entsprechenden KKL auf.

Tabelle 8-5: Die KL-Koeffizienten des linken und rechten Modells

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
links	62.12	1.07	0.18	0.03	0.01	9×10^{-15}	9×10^{-15}	7×10^{-15}	7×10^{-15}	7×10^{-15}
rechts	74.19	1.42	0.24	0.04	9×10^{-14}	9×10^{-15}	9×10^{-15}	8×10^{-15}	8×10^{-15}	8×10^{-15}

Die ersten zwei orthogonalen Funktionen der beiden Modelle werden benutzt, um das originale Modell zu reduzieren. Damit ist der Rekonstruktionsfehler, auch der stationäre Fehler, gleich 0.21 für das linke und 0.28 für das rechte Modell. Anhand der Gleichungen (5.3-1), (5.3-2) und (5.3-8) werden die Transformationsmatrizen R_{kl} , T und \tilde{P} ermittelt:

Linkes Modell:

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} 2.5057 \times 10^{-2} & 2.0519 \times 10^{-2} & 7.2275 \times 10^{-3} & 5.3894 \times 10^{-3} & 1.1101 \times 10^{-3} \\ -2.4274 \times 10^{-3} & 2.0367 \times 10^{-3} & 2.1673 \times 10^{-3} & 2.6000 \times 10^{-2} & 4.9034 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (8.4-1)$$

$$T^T = \begin{bmatrix} 7.2647 \times 10^2 & 6.8441 \times 10^2 & 6.1848 \times 10^1 & 1.002 \times 10^2 & 6.7670 \\ 4.5367 \times 10^3 & -3.8922 \times 10^3 & -1.3273 \times 10^3 & -3.99 \times 10^3 & -3.7665 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (8.4-2)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} -1136.2 & 99.199 \\ -4.0488 & 1136 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}^{-1} \times 10^4 = \begin{bmatrix} -8.8041 & 0.7688 \\ -3.1379 \times 10^{-2} & 8.8057 \end{bmatrix} \quad (8.4-3)$$

Rechtes Modell:

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} -2.8476 \times 10^{-2} & -2.8261 \times 10^{-2} & -8.2441 \times 10^{-3} & -3.3665 \times 10^{-3} \\ -3.3118 \times 10^{-3} & 1.2488 \times 10^{-3} & 3.0590 \times 10^{-3} & 3.1291 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (8.4-4)$$

$$T^T = \begin{bmatrix} -5.9409 \times 10^2 & -6.9228 \times 10^3 & -4.0233 \times 10 & 1.8097 \times 10 \\ 4.0701 \times 10^3 & -2.2985 \times 10^3 & -1.8531 \times 10^3 & -4.1383 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (8.4-5)$$

⁸⁻¹: Der Grundkörper selber und Ungleichheit der Aktoren sind möglich Gründe.

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -1136.3 & -119.33 \\ -16.559 & 1133.4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \times 10^4 = \begin{bmatrix} -8.7873 & -0.92517 \\ -0.12838 & 8.8096 \end{bmatrix} \quad (8.4-6)$$

Da nur je zwei KLK verwendet werden, genügen je zwei PID-Regler im modalen KLR. Aufgrund des Ergebnisses vom Abschnitt 7.2 werden zwei gemischte Modelle aufgebaut:

Linkes Modell:

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 + \begin{bmatrix} 5.8987 & & \\ & 229.21 & \\ & & 273.14 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 + \begin{bmatrix} 1474.5 & & \\ & 57302 & \\ & & 68286 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -1435.7 & -587.16 \\ -580.79 & -50656 \\ -298.3 & -1661.2 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{klq}$$

$$\mathbf{Q}_{kl} = \begin{bmatrix} -0.16397 & 0.26508 & -5.0063 \times 10^{-3} \\ 7.4397 \times 10^{-3} & -0.17539 & -9.2557 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \mathbf{q}_3$$

Rechtes Modell:

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 + \begin{bmatrix} 5.8686 & & \\ & 227.99 & \\ & & 268.16 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 + \begin{bmatrix} 1467 & & \\ & 56997 & \\ & & 67040 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -1385.1 & 499.39 \\ 85.584 & -52814 \\ -295.46 & 1538.6 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{klq}$$

$$\mathbf{Q}_{kl} = \begin{bmatrix} -0.15862 & -0.24303 & 6.9156 \times 10^{-3} \\ -5.469 \times 10^{-2} & -0.18664 & 1.7184 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \mathbf{q}_3$$

Die Zustandsvariablen dieses Modells befinden sich im modalen Raum und die Ein- und Ausgangsvariablen befinden sich im modalen KLR. Die Regler sollen so entworfen werden, dass die Eigenwerte der abgeschlossenen Regelkreise (ab dem dritten) möglichst gleich den Eigenwerten der offenen Regelkreise (ab dem dritten) sind. Bei der Verwendung der im Abschnitt 7.2 beschriebenen Optimierungsmethode ergeben sich folgende Reglerparameter

$$(PID(s) = \mathbf{P} + \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{ND}s}{s + \mathbf{N}}):$$

Linkes Modell:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1.6188 & & \\ & -0.57688 & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 18.871 & & \\ & 21.667 & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.18758 & & \\ & & 0.02582 \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 8.6881 & & \\ & & 23.368 \end{bmatrix} \quad (8.4-7)$$

Rechtes Modell:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & & \\ & \frac{-1}{3} & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} & & \\ & \frac{50}{3} & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{0.04}{3} & & \\ & & \frac{0.04}{3} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 50 & & \\ & & 50 \end{bmatrix} \quad (8.4-8)$$

Da die Konstruktion der Aktoren die theoretisch berechneten Sollformen nicht erreichen kann, können die durch die Gleichung (5.3-3) ($\mathbf{a}_{ref} = \mathbf{W}_v^T \mathbf{x}_{ref}$) berechneten Sollwerte im KLR

nicht verwendet werden. Deshalb können die Sollwerte im KLR nur durch die Simulation berechnet werden (s. Bild 8-6).

Die 42 Punkte in der Mitte der parabelförmigen Platte (y-Richtung) und die Gleichungen von (6.3-1) bis (6.3-4) werden benutzt, um die Brennweite zu berechnen (das Element „Calfoc“ im Bild 8-6). Die berechnete Brennweite wird im „Anzeiger“ angezeigt (s. Bild 8-6). Um die gewünschten Sollwerte im KLR zu finden, wird der Goldene-Schnitt-Algorithmus verwendet und die theoretische Sollbrennweite, die durch die Gleichung (5.3-3) berechnet wird, wird als Anfangswert benutzt. Tabelle 8-6 zeigt die so berechneten Sollwerte im KLR.

Tabelle 8-6: Die durch die Simulation berechnete Sollwerte im KLR.

Etikett	Brennweite (mm)		Linke Seite ($x < 0$)		Rechte Seite ($x > 0$)	
	\bar{f}	σ_f	a_1	a_2	a_1	a_2
2240	2240.1	131	2.3559	0.1731	-2.5065	0.1711
2250	2250.1	110	1.2486	0.0918	-1.3284	0.0907
2280	2280.0	188	-2.0008	-0.1471	2.1287	-0.1453
2300	2300.0	335	-4.1253	-0.3032	4.3890	-0.2996

8.5. Simulations- und Experimentalergebnisse

Bild 8-6 zeigt das Simulationsdiagramm vom Werkzeug SIMULINK [MATLAB]. In der Tabelle 8-7 werden Namen, Bedeutungen und die verwendeten Daten aller Elemente aufgelistet. Die Bilder von „Graphic“ im Bild 8-6 für die Brennweite 2300 werden im Bild 8-7 noch einmal gezeigt.

Tabelle 8-7: Namen, Bedeutungen und die verwendeten Daten aller Elemente im Simulationsdiagramm

Namen des Elements	Verwirklichung	Verwendete Daten
Linkes Modell	Das volle Modell der linken parabelförmigen Platte	
Rechtes Modell	Das volle Modell der rechten parabelförmigen Platte	
Rkl_L	Die Transformationsmatrix \mathbf{R}_{kl} des linken Modells und Transformierung der Dehnungssignale zur KLK.	Die Werte in (8.4-1)
Rkl_R	Die Transformationsmatrix \mathbf{R}_{kl} des rechten Modells und Transformierung der Dehnungssignale zur KLK.	Die Werte in (8.4-4)
inv(Pkl_L)	Abbildung der Werte vom KLR zum modalen KLR des linken Modells	$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} \times 10^4$ in (8.4-3)
inv(Pkl_R)	Abbildung der Werte vom KLR zum modalen KLR des rechten Modells	$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} \times 10^4$ in (8.4-6)
PID L1 und PID L2	PID-Algorithmus des linken Modells	PID-Parameter in (8.4-7)
PID R1 und PID R2	PID-Algorithmus des rechten Modells	PID-Parameter in (8.4-8)
Tkl_L	Die Transformationsmatrix \mathbf{T} des linken Modells und Transformation der modalen KL-Stellgrößen zu den realen Stellgrößen	Die Werte in (8.4-2)

Tabelle 8-7: Namen, Bedeutungen und die verwendeten Daten aller Elemente im Simulationsdiagramm (Fortsetzung)

Namen des Elements	Verwirklichung	Verwendete Daten
Tkl_R	Die Transformationsmatrix T des rechten Modells und Transformation der modalen KL-Stellgrößen zu den realen Stellgrößen	Die Werte in (8.4-5)
Step_L	Sollwerte im KLR des linken Modells	Werte in der Tabelle 8-6
Step_R	Sollwerte im KLR des rechten Modells	Werte in der Tabelle 8-6
Calfoc	Berechnung der Brennweite und Streuung mit 42 Punkte	
Dehnung	Anzeiger und Zeigen der Verläufe der Dehnungssignale	
SollIst	Anzeiger und Zeigen der Verläufe der Soll- und Istwerte	
Fehler	Anzeiger und Zeigen der Verläufe der Differenz zwischen Soll- und Istwerte	
U	Anzeiger und Zeigen der Verläufe der Stellgrößen	
Anzeiger	Zeigen der Brennweite und Streuung	
X-Y Graphic	Darstellung der Verformung	

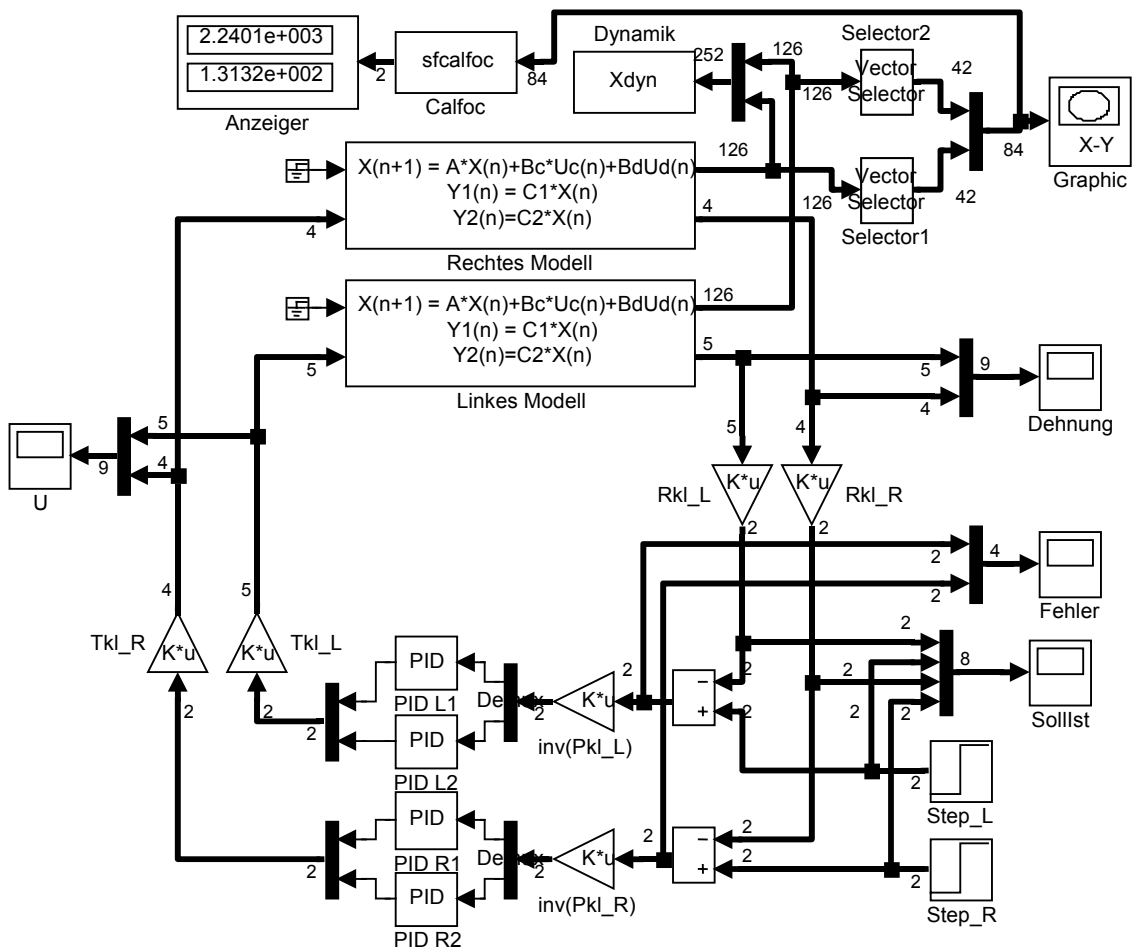
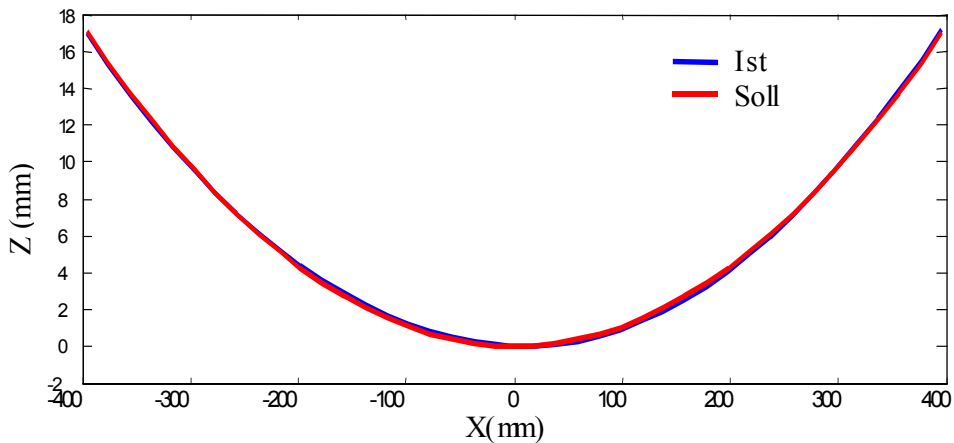
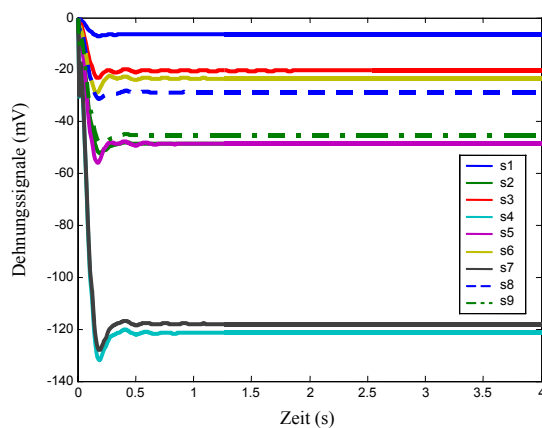


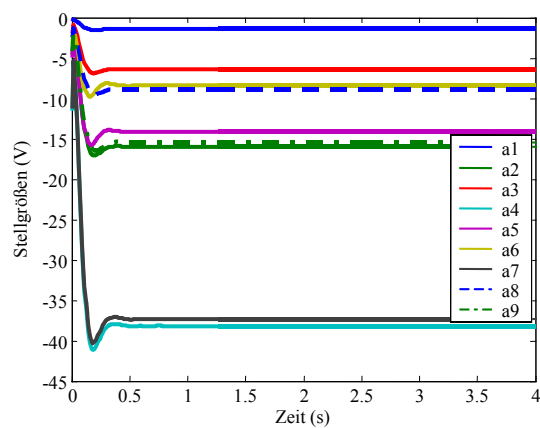
Bild 8-6: Simulationsdiagramm auf der Basis von SIMULINK



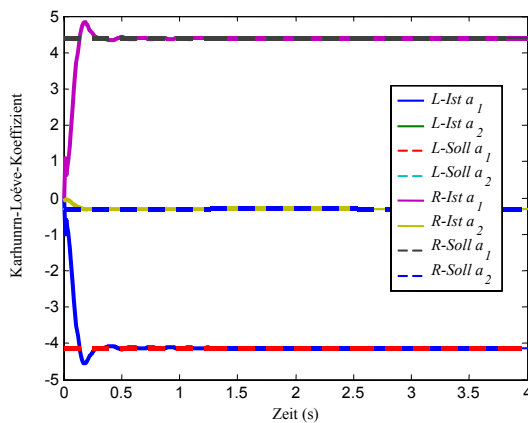
a) Soll-Ist Vergleich nach der Regelung



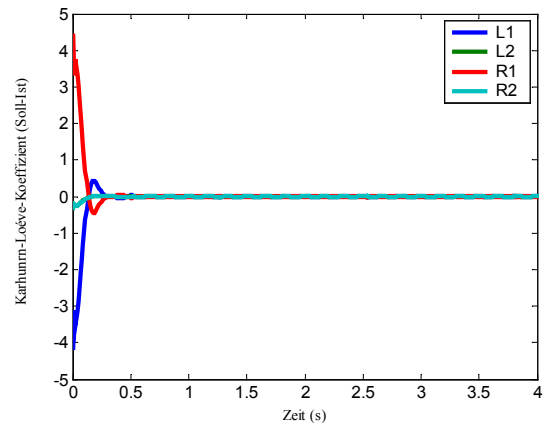
b) Verläufe der Dehnungssignale



c) Verläufe der Stellgrößen



d) Verläufe der Soll- und Istwerte



e) Verläufe des Fehlers

Bild 8-7: Simulationsergebnis für die Brennweite 2300

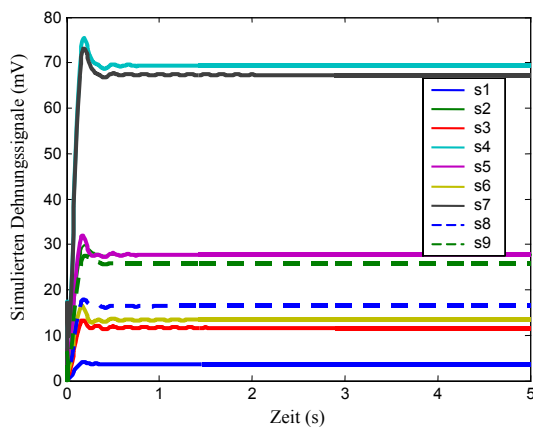
Die Simulation zeigt, dass die im reduzierten Raum und durch die Gleichung (7.2-20) entworfenen Regler das System mit vollen Freiheitsgraden stabilisieren und die guten Ergebnisse sowohl im dynamischen (s. Bild 8-7 b)) als auch im statischen Bereich (s. Bild 8-7 a)) erreichen können.

Das Mess- und Regelungssystem im Bild 8-6 wurde auf einem Rechner unter Windows NT mit C implementiert und die parabelförmige Platte geregelt. Nach der Stabilisierung wird die

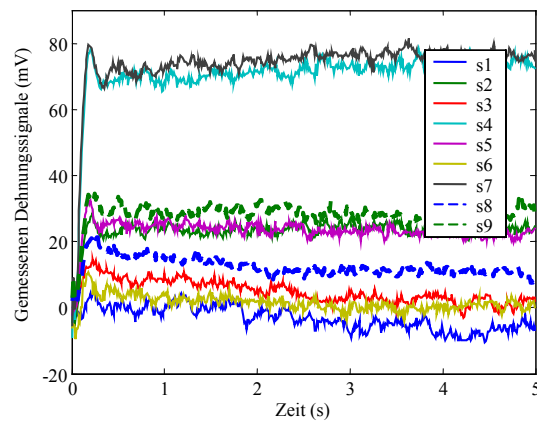
geregelte Platte mit dem 3D Messsystem gemessen und die Brennweite wie in der Simulation berechnet. Tabelle 8-8 listet den Vergleich zwischen der Simulation und der Messung auf. Bild 8-8 zeigt den Vergleich der Dehnungsverläufe zwischen Simulation und Messung für die Brennweite 2240 (mm).

Tabelle 8-8: Der Vergleich der Ergebnisse zwischen der Simulation und der Messung

Etikett	Simulierte Brennweite (mm)		Gemessene Brennweite (mm)	
	\bar{f}	σ_f	\bar{f}	σ_f
2240	2240.1	131	2239.0	108
2250	2250.1	110	2248.8	117
2280	2280	188	2283.1	145
2300	2300.0	335	2303.4	198



a) Simulierte Dehnungssignale



b) Gemessene Dehnungssignale

Bild 8-8: Der Vergleich der dynamischen Verläufe zwischen der Simulation und der Messung für die Brennweite 2240 (mm)

Der Versuch zeigt, dass die im reduzierten Raum und durch die Gleichung (7.2-20) entworfenen Regler auch ohne Modifizierung das reale System stabilisieren (s. Bild 8-8 b)). Aber das Bild 8-8 und die Tabelle 8-8 zeigen, dass es Unterschiede zwischen der Simulation und der Messung sowohl im dynamischen als auch im statischen Bereich gibt. Die Gründe dafür sind die Modellfehler, die übrige Hysterese, etc.. Im unseren Fall ist das Modell etwas härter als das Versuchsobjekt. Diese Abweichung kann man durch die Modifizierung der Sollwerte ausgleichen. Tabelle 8-9 zeigt diese Ergebnisse.

Tabelle 8-9: Die verbesserten Ergebnisse der Messung durch die Modifizierung der Sollwerte

Sollwerte	Gemessene Brennweite (mm)	
Etikett	\bar{f}	σ_f
90% von 2240	2240.2	117
90% von 2250	2250.0	125
90% von 2280	2279.9	132
90% von 2300	2300.1	144

9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird die „Datenreduktion“ in das verteilte Regelungskonzept eingegliedert und besonders für adaptive mechanische Systeme betrachtet. Anhand der Anforderungen bei der Formkontrolle in adaptiven mechanischen Systemen wurden die bestehenden Modellreduktions- und Regelungstechniken analysiert. Die herkömmlichen Modellreduktions- und Regelungstechniken sind der Aufgabe der Formkontrolle wegen der relativ großen Anzahl an Aktoren und Sensoren nicht in allen Fällen gewachsen.

Die Datenreduktionstechnik wird bisher weitgehend in der Telekommunikation und Bildverarbeitung erfolgreich verwendet. Wegen der unterschiedlichen Randbedingungen zwischen Bildverarbeitung und adaptiven mechanischen Systeme wurden die bekannten Datenreduktionstechniken detailliert untersucht. Obwohl die meisten Datenreduktionstechniken die Randbedingungen für das adaptive mechanische System nicht erfüllen können, kann das Prinzip von JPEG (einem etablierten Verfahren für Einzelbilder), die Verwendung der orthogonalen Transformation, gut in adaptiven mechanischen Systemen verwendet werden.

Eine direkte Anwendung der orthogonalen Transformation ist die Modal-Entwicklung. Die Modal-Entwicklung beschreibt die Eigenschaft der mechanischen Systeme. Die Modal-Entwicklung ist unsensibel zur Art der Sensoren. Durch die Modal-Entwicklung wird das mechanische System entkoppelt. Die Eigenwerte des reduzierten Systems sind gleich denen des originalen Systems. Die Verwendung der im Abschnitt 7.2 vorgestellten Methode kann garantieren, dass die im reduzierten Raum entworfenen Regler das originale abgeschlossene System stabilisieren. Die Modal-Entwicklung ist sensibel zum Reduktions- und Erweiterungsfehler. Wegen solcher Fehler wird der stationäre Fehler des geschlossenen Systems nicht gleich dem Rekonstruktionsfehler sein. Für die genauere Formkontrolle sind viele verdichtete Größen (Modal-Koordinaten) notwendig und die Anzahl solcher verdichteten Größen ist für die Regelungstechnik häufig unakzeptabel.

Um die verdichteten Größen maximal zu reduzieren, ist die Anwendung der Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum die einfachste Methode. Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum ist die optimierte Reduktionstechnik im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers. Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum ist unsensibel zum Reduktions- und Erweiterungsfehler und der stationäre Fehler des geschlossenen Systems ist gleich dem Rekonstruktionsfehler der Karhunen-Loève-Entwicklung der Sollformen. Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum ist sensibel zur Art der Sensoren, d.h. zur Gewinnung der Abtastpunkte der Messgrößen. Das durch die Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum reduzierte System ist

gekoppelt. Die Freiheitsgrade des reduzierten Systems sind unverändert. Ein solches System ist trotzdem schwierig für den Reglerentwurf. Übliche Modellreduktionstechniken können nicht sicher gewährleisten, aus dem System mit der sehr hohen Anzahl der Freiheitsgrade ein für den Reglerentwurf geeignetes Modell im Sinne der niedrigeren Freiheitsgrade zu erhalten. Um Vor- und Nachteile beider Methoden (Modal-Entwicklung und Karhunen-Loève-Entwicklung im Ein- und Ausgangsraum) miteinander zu ergänzen, wird die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum entwickelt. Die Karhunen-Loève-Entwicklung im Zustandsraum ist perfekt, sie bietet uns ein reduziertes System an, in dem die Freiheitsgrade (n auf ν) reduziert werden können. Dazu gehört im Eingang (p auf ν) und im Ausgang (m auf ν). Das reduzierte System ist entkoppelt. Die stationäre Genauigkeit des Systems ist gleich der Rekonstruktionsgenauigkeit der Zielformen. In welchem Umfang die Reduktion erfolgen kann, hängt von den Vorgaben des Benutzers ab. Wenn man nur an wenigen Steuerzielen bzw. einer geringen Kurvenvariation interessiert ist, kann die Reduktion erheblich sein. Die Verwendung der im Abschnitt 7.2 vorgestellten Methode kann garantieren, dass die im reduzierten Raum entworfenen Regler das originale geschlossene System stabilisieren. Die experimentellen Untersuchungen bestätigen diese Aussagen.

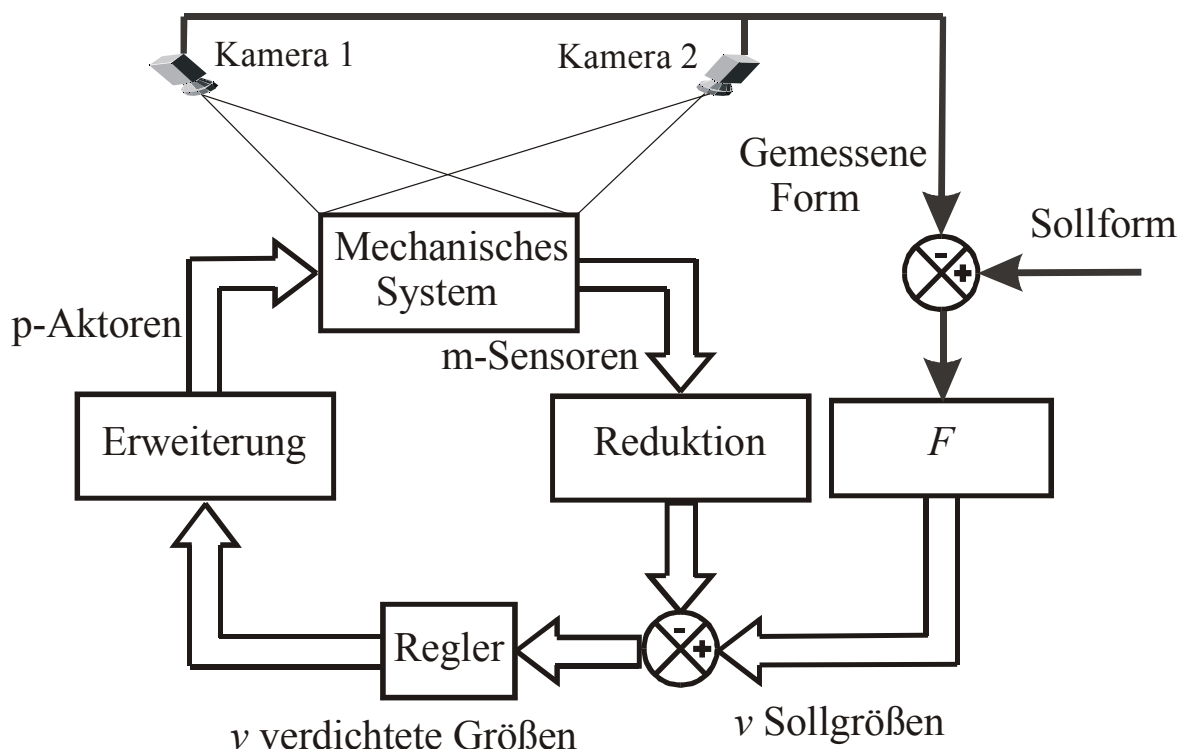


Bild 9-1: Das verbesserte Konzept der Formkontrolle

Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass der Modellfehler die Regelgenauigkeit beeinflusst. Der Modellfehler ist in der Praxis nicht vermeidbar. Deshalb wird ein verbessertes Konzept unter Nutzung der Informationsfusion in Bild 9-1 vorgestellt. Im Bild 9-1 wird der

optisch gemessene Formparameter, z. B. die Brennweite, in die Regelungsschleife miteinbezogen (Auch vereinfachte Messverfahren sind an dieser Stelle denkbar). Der Unterschied zwischen dem Sollwert und dem gemessenen Wert wird durch die Funktion F in Sollwerte im Karhunen-Loève-Raum umgewandelt, so dass der Fehler durch der Modellungenauigkeiten verringert werden kann, indem die vorgegebene Zielgröße wesentlich die Sollgrößen generiert.

Anhang A: Grundlagen der Beschreibung mechanischer Systeme

Bei phänomenologischer Betrachtungsweise lassen sich mechanische Strukturen nach ihrer mathematischen Beschreibungsform unterteilen in Strukturen mit verteilten Parametern und Strukturen mit aggregierten Parametern [JUN 93]. Während die erste Klasse durch partielle Differentialgleichungen (PDE) in Raum und Zeit beschrieben wird, genügen für die zweite Klasse von Strukturen gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE). Diese zweite Beschreibungsform ist eine Vereinfachung, die in vielen Fällen auf flexible oder starre Mehrkörpersysteme angewandt werden kann.

Die Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen für verteilte Systeme erfolgt mit den Methoden der klassischen Kinetik (Impulssatz, Schwerpunktsatz) oder der analytischen Mechanik (Prinzip der virtuellen Verrückungen, Prinzip von d'Alembert)[MAG 90]. Sie werden auf infinitesimale Massenpunkte angewandt [GÉR 97][PIL 94], um ein dynamisches Kräftegleichgewicht aufzustellen. Weiterhin werden noch geometrische Zusammenhänge und Materialeigenschaften berücksichtigt. Die so erhaltenen Gleichungen werden zu einem System partieller Differentialgleichungen zusammengefaßt.

A.1 Bewegungsdifferentialgleichung der mechanischen Systeme im allgemeinen

A.1.1 Die kinematische Gleichung—Die Beziehung zwischen Verzerrung und Verschiebung

Es werden zwei Punkte A und B mit einer infinitesimalen Länge ds in einem 3-D Festkörper betrachtet. Nach der Deformation bewegt sich der Punkt A nach A' und der Punkt B nach B' . Vor der Deformation gilt für die Koordinaten von A (x, y, z) und von B ($x+dx, y+dy, z+dz$).

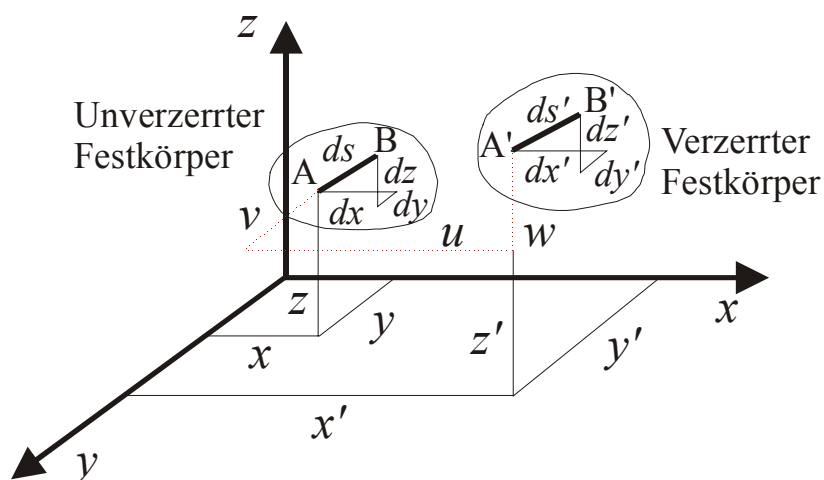


Bild a-1: Deformation eines 3-D Festkörpers

Nach der Deformation werden die Koordinaten von A' (x', y', z') und von B' ($x'+dx', y'+dy', z'+dz'$) sein, wie im Bild a-1 gezeigt wird. Die Länge ds eines Linienelements, das A mit B im unverzerrten Körper verbindet, ist durch die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{a-1})$$

gegeben. Während der Deformation wird dieses Linienelement verlängert und gedreht. Das neue Linienelement, das A' und B' im verzerrten Körper verbindet, hat die Länge ds' , mit

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (\text{a-2})$$

Die Verschiebung von Punkt A nach A' ist durch den Vektor

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \quad v(x, y, z, t) \quad w(x, y, z, t)]^T = [x' - x \quad y' - y \quad z' - z]^T \quad (\text{a-3})$$

charakterisiert. Ähnlich ist die Verschiebung von Punkt B zu B' durch $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ gegeben, wobei $d\mathbf{u}$ nach der Kettenregel des Differentials dargestellt wird durch

$$d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (\text{a-4})$$

Ersetzt man x', y', z' in Gleichung (a-2) durch Gleichung (a-3) und benutzt man die Gleichung (a-1) ergibt sich die Gleichung

$$ds'^2 - ds^2 = 2(dudx + dvdy + dwdz) + du^2 + dv^2 + dw^2 \quad (\text{a-5})$$

Der Ersatz des totalen Differentials der Gleichung (a-4) in Gleichung (a-5) führt zu

$$ds'^2 - ds^2 = 2\varepsilon_x dx^2 + 2\varepsilon_y dy^2 + 2\varepsilon_z dz^2 + 2\varepsilon_{xy} dx dy + 2\varepsilon_{xz} dx dz + 2\varepsilon_{yz} dy dz \quad (\text{a-6})$$

wobei

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{a-7a})$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{a-7b})$$

$$\varepsilon_z \equiv \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{a-7c})$$

$$\varepsilon_{xy} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{a-7d})$$

$$\varepsilon_{xz} \equiv \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{a-7e})$$

$$\varepsilon_{yz} \equiv \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{a-7f})$$

Man sollte beachten, dass $ds'^2 - ds^2$ null ist, wenn es keine relative Verschiebung zwischen den Punkten A und B gibt, während sie nach A' und B' bewegt werden. Dies heißt Starrkörperverschiebung. Für $ds'^2 - ds^2$ ungleich Null ändert sich die Länge des Linienelements ds , d.h. der Festkörper ist gespannt. Daher kann $ds'^2 - ds^2$ als ein passendes Maß der Deformation des Festkörpers betrachtet werden.

Falls die Verzerrung klein ist, d.h. $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} \ll 1$ und $\frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$, können die quadratischen

Terme in Gleichung (a-7) vernachlässigt werden. Dies führt zu der sogenannten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{a-8})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}$$

A.1.2 Die konstitutive Gleichung—Die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung

Die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ in dem Festkörper sind mit den Verzerrungen über das sogenannte verallgemeinerte Hookesche Gesetz verbunden, nämlich mit

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{xy}]^T = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{a-9})$$

wobei \mathbf{C} die Elastizitätsmatrix des Materials vom Festkörper ist. Für ein isotropes Material, z. B. Metall, ist

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{a-10a})$$

wobei E das Elastizitätsmodul oder Young's Modul ist und ν die Querkontraktionszahl. Für ein monotropes Material, z.B. Mehrschichtverbundwerkstoffe, könnte

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ s & y & m & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{a-10b})$$

sein.

A.1.3 Oberflächenkräfte und Randbedingungen

Die Spannungsbestandteile auf der Oberfläche, d.h. der Grenze, eines Körpers müssen im Gleichgewicht mit den Kräften sein, die an der Oberfläche angreifen. Die Gleichgewichtszustände bekommt man durch die Betrachtung des Zustandes der Spannung an einem Punkt auf der Oberfläche. Nehmen wir an, dass ein kleines Element auf der Oberfläche eines Körpers mit einem Einheitsnormalenvektor \mathbf{a} (außen positiv) liegt. Es definiert seine Orientierung in Bezug auf das Koordinatensystem. Der Richtungskosinus der Normalen ist $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$. Der Vektor der Spannung (Kraft) auf der Oberfläche ist gegeben durch $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$, der aus den Spannungen im Element resultiert, kann in den Spannungen durch den Richtungskosinus $p_x = \sigma_x a_x + \sigma_{yz} a_y + \sigma_{xz} a_z$ ausgedrückt werden. Diese Verhältnisse gelten für jeden Punkt auf der Oberfläche. Ähnliche Relationen gelten für die anderen Bestandteile von \mathbf{p} .

In der Zusammenfassung sind

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 & 0 & a_z & a_y \\ 0 & a_y & 0 & a_z & 0 & a_x \\ 0 & 0 & a_z & a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{a-11a})$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{a-11b})$$

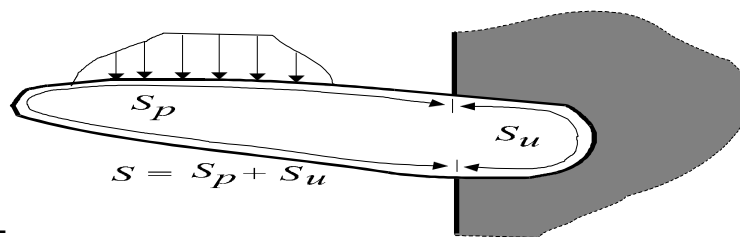


Bild a-2: Die Oberfläche S eines Körpers wird in zwei Oberflächen S_u und S_p aufgeteilt. Das Symbol S_u kennzeichnet Regionen mit bekannten Verschiebungen, während S_p alles andere bezeichnet, einschließlich jener Teile der Oberfläche, an denen angewandte Kräfte auftreten.

Wenn die Oberflächenkräfte (pro Flächeneinheit) von außen aufgewendet werden, werden sie als vorgeschriebene Oberflächenzugkräfte \bar{p} bezeichnet. Nehmen wir an, dass die vollständi-

ge Oberfläche des Körpers S ist, und dass jene Teile der Oberfläche mit vorgeschriebenen Zugkräften als S_p bezeichnet werden. Der Rest der Oberfläche, d.h. $S-S_p$, wird als S_u bezeichnet, um anzuzeigen, wo vorgeschriebene Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ erscheinen (Bild a-2).

A.1.4 Das Prinzip der virtuellen Arbeit und das dynamische Gleichgewicht

Die Arbeit aufgrund der Verzerrung eines Körpers ist definiert durch

$$W_i = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{a-12})$$

Die durch die (externen) vorgeschriebenen Kräfte getane Arbeit kann durch

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_v^* dV \quad (\text{a-13})$$

dargestellt werden, wobei $\bar{\mathbf{p}}_v^*$ die vorgeschriebene (angewandte) Körperkraft ist.

Die virtuelle Arbeit eines verzerrbaren Körpers wird dann beschrieben durch die Gleichung

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = \frac{1}{2} \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_v^* dV - \frac{1}{2} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit gibt an, dass ein verzerrbarer Körper im Gleichgewicht ist, wenn die virtuelle totale Arbeit für jede unabhängige kinematische zulässige virtuelle Verschiebung gleich null ist, d.h.

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = \frac{1}{2} \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_v^* dV - \frac{1}{2} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = 0$$

Nach dem Prinzip von d'Alembert wird ein dynamisches Problem in ein äquivalentes statisches Gleichgewichtsproblem umgewandelt, indem die Trägheit als Körperkraft verwendet wird.

Man erhält so die Gleichung

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_v dV - \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV - \frac{1}{2} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = 0 \quad (\text{a-14})$$

wobei $\bar{\mathbf{p}}_v$ die angewandten restlichen Körperkräfte sind.

Nun betrachten wir zunächst das Integral $\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS$. Setzt man die Gleichung (a-11) ein, berechnet sie und sortiert sie nach a_x , a_y , und a_z , erhalten wir

$$\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \int_S \begin{pmatrix} (\delta u \sigma_x + \delta v \sigma_{xy} + \delta w \sigma_{xz}) a_x \\ + (\delta u \sigma_{xy} + \delta v \sigma_y + \delta w \sigma_{yz}) a_y \\ + (\delta u \sigma_{xz} + \delta v \sigma_{yz} + \delta w \sigma_z) a_z \end{pmatrix} dS \quad (\text{a-15})$$

Nach dem integralen Satz von Gauß, $\int_S (v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z) dS = \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV$,

wird die Gleichung (a-15) zu

$$\begin{aligned} \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS &= \int_V \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u \sigma_x + \delta v \sigma_{xy} + \delta w \sigma_{xz}) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u \sigma_{xy} + \delta v \sigma_y + \delta w \sigma_{yz}) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (\delta u \sigma_{xz} + \delta v \sigma_{yz} + \delta w \sigma_z) \end{array} \right) dV \\ &= \int_V [\delta u, \delta v, \delta w] \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \end{bmatrix} dV + \\ &\quad \int_V \delta \left(\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial v}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial w}{\partial z} \sigma_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sigma_{xy} \end{array} \right) dV \end{aligned}$$

Beim Vergleich mit der Gleichung (a-8) erhalten wir

$$\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Weil $S = S_p + S_u$ ist, gilt

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_{S_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{a-16a})$$

oder

$$\int_V (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_{S_u} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{a-16b})$$

Setzen wir die Gleichung (a-16a) in Gleichung (a-14) ein und ordnen wir die Terme um, erhalten wir

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) dS + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}}_v - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) dV - \frac{1}{2} \int_{S_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0$$

Zulässige virtuelle Verschiebungen müssen (kinematischen) Verschiebungsrandbedingungen genügen, d.h. die Verschiebung \mathbf{u} auf dem Teil der Oberfläche S_u muss gleich der vorgeschriebenen Verschiebung $\bar{\mathbf{u}}$ sein.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad S_u \quad (\text{a-17})$$

So wird das Integral $\int_{S_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0$. Damit erhalten wir

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) dS + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}}_v - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) dV = 0 \quad (\text{a-18})$$

Weil die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ im Volumen V und auf der Oberfläche S_p in Gleichung (a-18) beliebig sind, bekommen wir die Darstellung für das dynamische Gleichgewicht eines Körpers im Volumen V und auf den Oberflächen S_p .

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}}_V = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad V \quad (\text{a-19a})$$

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{auf} \quad S_p \quad (\text{a-19b})$$

Die Gleichung (a-19b) ist die mechanische oder statische (Kraft-, Spannungs-) Randbedingung.

Setzen wir das dynamische Gleichgewicht (a-19a), die konstitutive Gleichung (a-9) und die kinematische Gleichung (a-8) zusammen, erhalten wir die Bewegungsdifferentialgleichung eines mechanischen Systems zu

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{P}}_V = \mathbf{D}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\mathbf{P}}_V = \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{P}}_V = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad V \quad (\text{a-20a})$$

und die entsprechende statische Spannungsrandbedingung zu

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{auf} \quad S_p \quad (\text{a-20b})$$

A.1.5 Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung mit freier Schwingung—Die Eigenmodi des mechanischen Systems

Nun betrachten wir die allgemeinen Lösungen dieser Gleichung. Zuerst wird der Fall berücksichtigt, in dem keine externen Kräfte angewandt werden, d.h. $\bar{\mathbf{p}}_V = 0$, $\bar{\mathbf{p}} = 0$ und $\bar{\mathbf{u}} = 0$. In diesem Fall können wir eine harmonische Bewegung annehmen, d.h.

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z) \cos \omega t$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung und die Randbedingung werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} + \omega^2 \rho \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in} \quad V \\ \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf} \quad S_p \end{aligned} \quad (\text{a-21})$$

Ähnlich wird die virtuelle Arbeit (durch die Benutzung der Gleichungen (a-18) und (a-16b)) zu

$$\delta W = \frac{1}{2} \delta \int_V \left((\mathbf{D} \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right) dV = 0 \quad (\text{a-22})$$

Das homogene System der Gleichung (a-21) und die dazugehörige virtuelle Arbeit (a-22) definieren ein Eigenwertproblem. Seine Eigenwerte (unendlich viel) werden mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3, \dots \\ 0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \end{aligned}$$

bezeichnet. Die Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, sind die Eigenmoden des mechanischen Systems (Gleichung (a-21)).

Es wird gezeigt, dass die Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, zu einander orthogonal sind. Die Gleichung (a-20) wird für den i -ten Mode zu $\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i + \omega_i^2 \rho \boldsymbol{\varphi}_i = 0$. Multiplizieren mit $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ von links und Integrieren über das Volumen, ergibt die Gleichung

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV + \omega_i^2 \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = 0$$

Nach der Gleichung (a-16b), unter Beachtung der Integrale $\int_{S_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0$ und $\int_{S_u} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0$

und den jetzigen Bedingungen (ohne externe Kräfte), wird die Gleichung zu

$$\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV - \omega_i^2 \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = 0 \quad (\text{a-23})$$

Ähnlich können wir für den j -te Mode dasselbe machen

$$\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j dV - \omega_j^2 \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j dV = 0 \quad (\text{a-24})$$

Ziehen wir die Gleichung (a-24) von der Gleichung (a-23) ab und beachten wir, dass das Integral $\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV = \int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j dV$ ist, bekommen wir $(\omega_j^2 - \omega_i^2) \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = 0$.

Falls $\omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j$, erhalten wir $\int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = 0$ und so ist also $\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV = 0$.

Für $i = j$ definieren wir $\int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = m_i$ und $\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV = k_i$, wobei m_i als modale Masse bzw. k_i als modale Steifigkeit bezeichnet ist. Es kann also gezeigt werden, dass die Eigenmoden mit einer mehrfachen Eigenfrequenz linear unabhängig sind und folglich können sie so ausgewählt werden, dass sie orthogonal sind. Daher können wir die Orthogonalität der Eigenmodi zusammenfassen zu

$$\int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i & i = j \end{cases} \quad \text{mit } \omega_i = \frac{k_i}{m_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{a-24})$$

$$\int_V (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

A.1.6 Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung der erzwungenen Schwingung

Nun betrachten wir den Fall, bei dem die externe Kräfte einwirken, d.h. $\bar{\mathbf{p}}_v$, $\bar{\mathbf{p}}$ und $\bar{\mathbf{u}}$ sind nicht mehr gleich Null. Es ist zweckmäßig, die Verschiebungen im quasi statischen und im dynamischen Teil zu zerteilen, um die Antwort auf die räumlichen Randbedingungen von der Antwort auf die Körperbelastung zu trennen,

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_{qs}(x, y, z, t) + \mathbf{u}_{dyn}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_{qs}(x, y, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(x, y, z)$$

wobei $q_i(t)$ die zum Eigenmode $\boldsymbol{\varphi}_i$ zugehörige normale Koordinate ist. Die quasi statische Verschiebung resultiert aus der Anwendung der nicht homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}_{qs} &= 0 & \text{in } V \\ \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}_{qs} &= \bar{\mathbf{p}} & \text{auf } S_p \\ \mathbf{u}_{qs} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{auf } S_u \end{aligned} \quad (\text{a-25a})$$

Während sich die dynamische Verschiebung aus der Anwendung der homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}_{dyn} &= 0 & \text{auf } S_p \\ \mathbf{u}_{dyn} &= 0 & \text{auf } S_u \end{aligned} \quad (\text{a-25b})$$

ergibt. Die quasi statische Verschiebung kann auf die Eigenmoden projiziert werden und durch eine lineare Kombination von den Eigenmoden und den Projektionen dargestellt werden.

$$\mathbf{u}_{qs}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(x, y, z) \quad \text{mit} \quad a_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{u}_{qs} dV$$

Nun wird die gesamte Verschiebung zu

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_{qs}(x, y, z, t) + \mathbf{u}_{dyn}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (q_i(t) + a_i(t)) \boldsymbol{\varphi}_i(x, y, z) \quad (\text{a-26})$$

Durch Einsetzen der Gleichung (a-26) in der Bewegungsdifferentialgleichung (a-20a), und Multiplizieren mit $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ von links und Integrieren über das Volumen wird die Bewegungsdifferentialgleichung zu

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} (\mathbf{u}_{qs} + \mathbf{u}_{dyn}) dV + \int_V \boldsymbol{\varphi}_j^T \bar{\mathbf{P}} v dV = \sum_{i=1}^{\infty} \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV \frac{d^2(q_i + a_i)}{dt^2} \quad (\text{a-27})$$

Durch Verwendung der Gleichung (a-16b) am ersten Term der Gleichung (a-27) erhält man

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} (\mathbf{u}_{qs} + \mathbf{u}_{dyn}) dS + \int_V \boldsymbol{\varphi}_j^T \bar{\mathbf{P}} v dV &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_V \rho \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_i dV \frac{d^2(q_i + a_i)}{dt^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_V \rho (\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_i dV (q_i + a_i) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung (a-25), der Orthogonalität der Eigenmoden (a-24) und $S=S_p+S_u$, erhalten wir

$$m_j \frac{d^2(q_j + a_j)}{dt^2} + k_j (q_j + a_j) = \int_{S_p} \boldsymbol{\varphi}_j^T \bar{\mathbf{p}} dS + \int_{S_u} \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}} dS + \int_V \boldsymbol{\varphi}_j^T \bar{\mathbf{P}} v dV \quad (\text{a-28})$$

$j = 1, 2, \dots, \infty$

Die Gleichungen (a-28) sind unendlich viele und von einander unabhängige ordentliche Differentialgleichungen. Sie können einzeln gelöst werden. Setzen wir dann die einzelne Lösung von $q_i(t)+a_i(t)$ in der Gleichung (a-26) ein, haben wir die allgemeine Lösung der erzwungenen Schwingung des mechanischen Systems.

Man sollte beachten, dass die obige allgemeine Lösung nur in der Theorie von Bedeutung ist, weil die Eigenmode φ_i im allgemein nicht durch eine analytische Formel dargestellt werden kann. Aber sie zeigt die Existenz der Eigenschaften der mechanischen Systeme und den Weg zur Lösung.

A.2 Ein Balken als Beispiel

Im Rahmen der Balkentheorie werden unter der Voraussetzung einer Biege- und Längskraftbeanspruchung in der (x — z)-Ebene die folgenden kinematischen Hypothesen eingeführt: Ein in seiner Ebene als starr betrachteter Querschnitt kann sich in Richtung der Balkenachse x und der Achse z verschieben sowie um die y -Achse verdrehen. Er hat somit den kinematischen Freiheitsgrad 3 (Bild a-3).

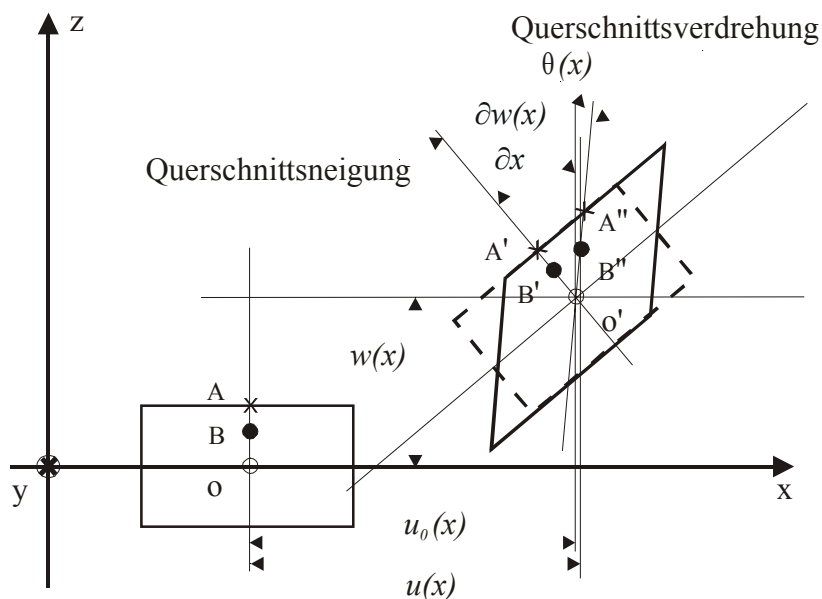


Bild a-3: Verformungskinematik des Balkens in der (x — z)-Ebene

Von den kinematischen Hypothesen wird die Verschiebung in Richtung y nicht berücksichtigt. Nach der Taylorentwicklung der Verschiebungen in Richtung x und z um die Mittelfläche ($z = 0$) folgen die Verschiebungsgleichungen

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u(x, 0, t) - z \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial x} = u_0(x, t) - z \theta_0(x, t) \\ w(x, z, t) &= w(x, 0, t) = w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{a-29})$$

$u_0(x, t)$ ist die Verschiebung der Punkte der Balkenachse in Richtung x . Man erkennt, dass durch die Vereinfachung der wirklichen Verformungskinematik die Größen $u_0(x, t)$, $\theta_0(x, t)$ und

$w_0(x,t)$ unabhängig von y und z sind. In Gleichung (a-29) entspricht der Ansatz für $u(x,z,t)$ einer linearen und für $w(x,z,t)$ einer konstanten Approximation der realen Verschiebungen.

Setzt man die Verschiebung (a-29) in der kinematischen Gleichung (a-8) ein, erhält man

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= -\theta_0 + \frac{\partial w(x)}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0\end{aligned}\quad (\text{a-30a})$$

Es ist somit nur eine Dehnung und eine Schubverzerrung von Null verschieden.

$$\varepsilon_x(x,z) = \varepsilon_{0x}(x) - z\kappa_0(x), \quad \varepsilon_{xz}(x) = -\theta_0(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (\text{a-30b})$$

$\varepsilon_{0x}(x) = \varepsilon_x(x,0)$ ist die Dehnung der Balkenachse, $\kappa_0(x) = \frac{\partial \theta_0(x)}{\partial x}$ ihre Krümmung. Die näherungsweise Berücksichtigung der Schubverformung führt somit zu einer Drehung des eben

bleibenden Querschnitts um die y -Achse.

Setzt man die Verzerrungen (a-30) in die konstitutive Gleichung (a-9) für das monotrope Material ein, erhält man

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ s & y & m & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}\varepsilon_x \\ c_{12}\varepsilon_x \\ c_{13}\varepsilon_x \\ c_{45}\varepsilon_{xz} \\ c_{55}\varepsilon_{xz} \\ c_{16}\varepsilon_x \end{bmatrix}$$

Es ist offensichtlich, dass σ_y , σ_z , σ_{yz} und σ_{xy} nicht mehr wie ε_y , ε_z , ε_{yz} und ε_{xy} gleich Null sind.

Aber es ist auch klar, dass σ_y , σ_z , σ_{yz} und σ_{xy} nicht unabhängige Variablen sind. Sie können durch σ_x bzw. σ_{xz} dargestellt werden. Definiert man

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ s & y & m & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} = C^{-1}, \text{ erhält man}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ s & y & m & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Damit können σ_y , σ_z , σ_{yz} und σ_{xy} durch

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_{22} & s_{23} & s_{26} \\ s_{23} & s_{33} & s_{36} \\ s_{26} & s_{36} & s_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{13} \\ s_{16} \end{bmatrix} \sigma_x, \quad \sigma_{yz} = -s_{44}^{-1} s_{45} \sigma_{xz}$$

dargestellt werden. Es folgt

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = (s_{11} - [s_{12} \quad s_{13} \quad s_{16}] \begin{bmatrix} s_{22} & s_{23} & s_{26} \\ s_{23} & s_{33} & s_{36} \\ s_{26} & s_{36} & s_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{13} \\ s_{16} \end{bmatrix}) \sigma_x = \begin{matrix} c_{11}^{-1} \sigma_x \\ (\frac{c_{44}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2} + \frac{c_{45}}{c_{55}}) \sigma_{xz} \\ (s_{55} - s_{44}^{-1} s_{45}) \sigma_{xz} \end{matrix}$$

Somit erhält man

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & \left(\frac{c_{44}}{c_{44}c_{55} - c_{45}^2} + \frac{c_{45}}{c_{55}} \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & \bar{c}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{a-31a})$$

Ähnlich erhält man für das isotrope Material

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{a-31b})$$

Die Arbeit bei einer Verformung des Balkens wird nach der Definition in Gleichung (a-12) zu

$$\begin{aligned} W_i &= -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = -\frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_{xz} \sigma_{xz}) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_A \sigma_x dA \varepsilon_{0x}(x) - \int_A \sigma_x z dA \kappa_0(x) + \int_A \sigma_{xz} dA \varepsilon_{xz}(x) \right) dx \end{aligned}$$

wobei L die Balkenlänge ist und A der Balkenquerschnitt. Definiert man weiter die Querschnittskraft N , das Biegemoment M und die Schubkraft Q als

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x dA = c_{11} A \frac{\partial u_0}{\partial x} = c_{11} A \varepsilon_{0x} \\ M(x) &= \int_A \sigma_x z dA = c_{11} I \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} = c_{11} I \kappa_0 \\ Q(x) &= \int_A \sigma_{xz} dA = k_s \bar{c}_{55} A \left(-\theta_0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = k_s \bar{c}_{55} \varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (\text{a-32})$$

erhält man die Verformungsarbeit zu

$$\begin{aligned} W_i &= -\frac{1}{2} \int_0^L (N(x) \varepsilon_{0x}(x) + M(x) \kappa_0(x) + Q(x) \varepsilon_{xz}(x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon_{0x}(x), \varepsilon_{xz}(x), \kappa_0(x)] [N(x), Q(x), M(x)]^T dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{s} dx \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{0x}(x), \varepsilon_{xz}(x), \kappa_0(x)]$ und $\mathbf{s}^T = [N(x), Q(x), M(x)]$.

Die Beziehung zwischen der neuen definierten Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$ und der Querschnittskraft \mathbf{s} ist die reduzierte konstitutive Gleichung für den Balken:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} c_{11}A & 0 & 0 \\ 0 & k_s \bar{c}_{55}A & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}I \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{a-33a})$$

wobei k_s ein Schubkorrekturfaktor ist und $I = \int_A z^2 dA = \frac{Ah^2}{12}$ das Trägheitsmoment über der y-Achse. Hier ist h die Dicke des Balkens. Man sollte beachten, dass das Integral $I = \int_A z dA$ gleich Null ist, wenn z von der Mittellinie des Balkens gemessen wird. Für das isotrope Material wird die Gleichung (a-32a) zu

$$\mathbf{s} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu)A & 0 & 0 \\ 0 & k_s \frac{1-2\nu}{2} A & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)I \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{a-33b})$$

Die Arbeit, die durch die Trägheit verursacht wird (3. Term in Gleichung (a-14)), wird für den Balken zu

$$\begin{aligned} W_{eT} &= -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_A (u_0(x) - z\theta_0(x)) \rho \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} \right) + w_0(x) \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} dA \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \left(u_0(x) \int_A \rho dA \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \theta_0(x) \int_A \rho z^2 dA \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} + w_0(x) \int_A \rho dA \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L [u_0(x), w_0(x), \theta_0(x)] \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} \end{bmatrix}^T dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{u}^T \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$

mit den neu definierten Matrizen

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{bmatrix} u_0(x, t) \\ w_0(x, t) \\ \theta_0(x, t) \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix}$$

Beachtet man die Gleichung (a-30), erhält man die reduzierte kinematische Gleichung für den Balken

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{D}_u \mathbf{u} \quad (\text{a-34})$$

Der tiefgestellte Index u bedeutet, dass der Operator \mathbf{D} auf \mathbf{u} durchgeführt wird.

Auf eine ähnliche Art und Weise kann das Integral über die Körperkraft $\bar{\mathbf{p}}_V$ (2. Term) in Gleichung (a-14) als $\int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_V dV = \int_x \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dx$ geschrieben werden, wobei $\bar{\mathbf{p}}^T = [\bar{p}_x, \bar{p}_z, \bar{m}]$ ist. Hier sind \bar{p}_x und \bar{p}_z die Kräfte pro Längeneinheit, und \bar{m} ist die Momentintensität d.h. das Moment pro Längeneinheit.

Das erste Integral in Gleichung (a-14) repräsentiert die durch die Oberflächenkräfte belastete virtuelle Arbeit. Falls diese Oberflächenkräfte am Ende (0,L) des Balkens aufgewendet werden, würden sie konzentrierte Kräfte sein, und das Integral würde sich zu $\int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS = [\delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{s}}]_0^L$ reduzieren, wobei $\bar{\mathbf{s}}^T = [\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}]$ die konzentrierten Kräfte am Ende sind.

In der Zusammenfassung würde der Ausdruck des Prinzips der virtuellen Arbeit für den Balken zu

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{s}}]_0^L + \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dx - \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx - \frac{1}{2} \int_x \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s} dx \\ &= \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{s}}]_0^L + \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dx - \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_x (\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} N + \delta (\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_0) V + \delta \frac{\partial \theta_0}{\partial x} M) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Durch die partielle Integration, wie z.B. $\int_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} N dx = \int_x \delta N du_0 = \delta u_0 N_0^L - \int_x \delta u_0 \frac{\partial N}{\partial x} dx$, wird die

virtuelle Arbeit des Balkens zu

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s})]_0^L + \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dx - \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_x (\delta u_0 \frac{\partial N}{\partial x} + \delta w_0 \frac{\partial V}{\partial x} + \delta \theta_0 V + \delta \theta_0 \frac{\partial M}{\partial x}) dx \\ &= \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s})]_0^L + \frac{1}{2} \int_x \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}_s^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Weil die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ entlang die Richtung x und am Ende des Balkens beliebig sind, bekommen wir die Darstellung für das dynamische Gleichgewicht oder die Bewegungsdifferentialgleichung eines Balkens entlang der Richtung x und am Ende zu,

$$\mathbf{D}_s^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{D}_s^T (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{D}_u \mathbf{u}) + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{entlang } x \quad (\text{a-35a})$$

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{am Ende } (x = 0, L) \quad (\text{a-35b})$$

$$\text{mit } \mathbf{D}_s^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_z \\ \bar{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(x, t) = \begin{bmatrix} u_0(x, t) \\ w_0(x, t) \\ \theta_0(x, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$\bar{\mathbf{s}} = [\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}]^T$, wobei der tiefgestellte Index s bedeutet, dass der Operator \mathbf{D} auf \mathbf{s} durchgeführt wird.

Man kann nun die Eigenmoden der Gleichungen (a-35) berechnen. Man nimmt an, dass im allgemein die Verschiebung eines Balkens, in dem die Masse und der Querschnitt gleichmäßig verteilt werden, als

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{bmatrix} u_0(x, t) \\ w_0(x, t) \\ \theta_0(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix} e^{\frac{\lambda}{L} x} \cos \omega t$$

dargestellt werden kann. Setzt man dies in Gleichung (a-35) ein, erhält man

$$\begin{bmatrix} c_{11} A \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 + \omega^2 \rho A & 0 & 0 \\ 0 & k_s \bar{c}_{55} A \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 + \omega^2 \rho A & -k_s \bar{c}_{55} A \left(\frac{\lambda}{L}\right) \\ 0 & k_s \bar{c}_{55} A \left(\frac{\lambda}{L}\right) & c_{11} I \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 - k_s \bar{c}_{55} A + \omega^2 \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix} e^{\frac{\lambda}{L} x} \cos \omega t = 0 \quad (\text{a-36})$$

Es wird gezeigt, dass die Verschiebung $u_0(x, t)$ von den Verschiebungen $w_0(x, t)$ und $\theta_0(x, t)$ unabhängig ist. Damit kann $u_0(x, t)$ von $w_0(x, t)$ und $\theta_0(x, t)$ getrennt berechnet werden. Die allgemeine Lösung von $u_0(x)$ kann durch

$$u_0(x) = B_1 e^{\frac{\lambda_1}{L} x} + B_2 e^{\frac{\lambda_2}{L} x} \quad \text{mit} \quad \frac{\lambda_1}{L} = +i \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}} \omega, \quad \frac{\lambda_2}{L} = -i \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}} \omega$$

dargestellt werden, wobei B_1 und B_2 konstant sind und von den Randbedingungen abhängen. In Tabelle a-1 werden einige Randbedingungen und entsprechende Eigenmoden und Frequenzgleichungen angegeben. Man sollte beachten, dass die Konstanten B_1 und B_2 zu einem U zusammengefasst werden können, weil für gegebene Randbedingungen jeweils eine Konstante gleich Null ist.

Nun berechnet man die allgemeinen Lösungen von $w_0(x)$ und $\theta_0(x)$. Aus der Gleichung (a-36) erhält man

$$\lambda^4 + \Omega(\eta + \alpha)\lambda^2 - \Omega + \Omega^2 \eta \alpha = 0 \quad (\text{a-37})$$

mit $\Omega = \omega^2 \frac{\rho AL^4}{c_{11} I}$ dem dimensionslosen Eigenwert

$\alpha = \frac{I}{AL^2}$ dem Parameter von der Rotationsträgheit

$\eta = \frac{c_{11} I}{k_s \bar{c}_{55} AL^2}$ dem Schubparameter

Tabelle a-1: Die Eigenmoden und die Frequenzgleichung der Achsverschiebung u_0 eines Balkens oder der Verschiebung eines Stabes.

Randbedingungen		Eigenmoden $\phi_{u_0}^i(x)$	Frequenzgleichung
$x = 0$	$x = L$		
Frei ($\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$)	Frei ($\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$)	$U \cos \frac{i\pi}{L} x$	$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \frac{i\pi}{L}, i = 1, 2, \dots,$
Frei ($\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$)	Fest ($u_0 = 0$)	$U \cos \frac{(2i-1)\pi}{2L} x$	$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \frac{(2i-1)\pi}{2L}, i = 1, 2, \dots,$
Fest ($u_0 = 0$)	Frei ($\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$)	$U \sin \frac{(2i-1)\pi}{2L} x$	$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \frac{(2i-1)\pi}{2L}, i = 1, 2, \dots,$
Fest ($u_0 = 0$)	Fest ($u_0 = 0$)	$U \sin \frac{i\pi}{L} x$	$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \frac{i\pi}{L}, i = 1, 2, \dots,$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung in λ^2 sind

$$\lambda^2 = \frac{-\Omega(\eta + \alpha) \pm \sqrt{\Omega^2(\eta + \alpha)^2 - 4\Omega(\Omega^2\eta\alpha - 1)}}{2}$$

Die Eigenwertgleichung hat eine positive und eine negative Wurzel unter der Bedingung

$$\Omega\eta\alpha < 1$$

Nun kann vielleicht gefolgert werden, dass solange der Schub- und die Rotationsträgheit genügend klein bleiben, die Wurzeln in die Form $\pm i\lambda_1, \pm\lambda_2$ eingesetzt werden können und die allgemeine Lösung von $w_0(x)$ nimmt die Form

$$w_0(x) = B_3 e^{\frac{\lambda_1}{L}x} + B_4 e^{-\frac{\lambda_1}{L}x} + B_5 e^{\frac{\lambda_2}{L}x} + B_6 e^{-\frac{\lambda_2}{L}x}$$

an. Die Konstanten B_3 bis B_6 sind von den Randbedingungen abhängig. In Tabelle a-2 werden einige Randbedingungen und entsprechende Eigenmoden und Frequenzgleichungen aufgelistet. Wie im Fall der Lösung von $u_0(x,t)$ werden die Konstanten B_3 bis B_6 zu einem \mathcal{W} in der Tabelle a-2 zusammengefaßt, weil für die gegebenen Randbedingungen jeweils entweder eine Konstante nicht gleich Null oder eine durch andere darstellbar ist. Weil die Verschiebungen von $w_0(x)$ und $\theta_0(x)$ gekoppelt sind, kann die allgemeine Lösung von $\theta_0(x)$ durch Gleichung

(a-36) ermittelt werden.

$$\theta_0(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \eta L^2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle a-3 dargestellt.

Der Rechnungsvorgang von $w_0(x)$ sieht so aus: Zunächst wird λ durch die Frequenzgleichung berechnet. Dann wird das Ergebnis in die Eigenmoden eingesetzt und die Eigenfrequenz wird durch die Gleichung (a-37) berechnet.

Faßt man alles zusammen, erhält man die Eigenmoden des Balkens zu

$$\boldsymbol{\phi}_i(x) = [\phi_{u_0}^i, \phi_{w_0}^i, \phi_{\theta_0}^i]^T \quad (\text{a-38})$$

Die Konstante U und W in Tabelle a-1 bis a-3 werden entweder durch

$$\int_x \rho A \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i dx = 1 \quad (\text{a-39a})$$

oder durch

$$\int_x \phi_i^T \phi_i dx = 1 \quad (\text{a-39b})$$

bestimmt.

Tabelle a-2: Die Eigenmoden und die Frequenzgleichung der Verschiebung w_0 eines Balkens.

Randbedingungen		Eigenmoden $\phi_{w_0}^i(x)$	Frequenzgleichung
$x = 0$	$x = L$		
g.g* $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $w_0 = 0$	g.g* $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $w_0 = 0$	$W \sin \gamma x$	$\lambda = i\pi, i = 1, 2, \dots$
Fest $(\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0)$ $w_0 = 0$	g.g* $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $w_0 = 0$	$W((\sin \gamma x - \sinh \gamma x) -$ $C_{cg}(\cos \gamma x - \cosh \gamma x))$	$\tanh \lambda = \tan \lambda$
Fest $(\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0)$ $w_0 = 0$	Frei $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0$	$W((\sin \gamma x - \sinh \gamma x) -$ $C_{cf}(\cos \gamma x - \cosh \gamma x))$	$1 + \cosh \lambda \cos \lambda = 0$
Fest $(\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0)$ $w_0 = 0$	Fest $(\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0)$ $w_0 = 0$	$W((\sin \gamma x - \sinh \gamma x) -$ $C_{cc}(\cos \gamma x - \cosh \gamma x))$	$1 - \cosh \lambda \cos \lambda = 0$
Frei $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0$	Frei $(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0)$ $\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0$	$W((\sin \gamma x + \sinh \gamma x) -$ $C_{ff}(\cos \gamma x + \cosh \gamma x))$	$1 - \cosh \lambda \cos \lambda = 0$

*gelenkig gelagert, $\gamma = \frac{\lambda}{L}$, $C_{cg} = C_{cf} = \frac{\sin \lambda + \sinh \lambda}{\cos \lambda + \cosh \lambda}$ und $C_{cc} = C_{ff} = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{\cos \lambda - \cosh \lambda}$

Tabelle a-3: Die Eigenmoden der Querschnittsverdrehung θ_0 eines Balkens.

Randbedingungen		Eigenmoden $\phi_{\theta_0}^i(x)$
x = 0	x = L	
g·g*	g·g*	$(1 - \eta\lambda^2)W\gamma \cos \gamma x$
Fest	g·g*	$(1 - \eta\lambda^2)W\gamma \cos \gamma x + (1 + \eta\lambda^2)W\gamma(C_{cg}(\sin \gamma x - \sinh \gamma x) - \cosh \gamma x)$
Fest	Frei	$(1 - \eta\lambda^2)W\gamma(\cos \gamma x + C_{cf} \sin \gamma x) - (1 + \eta\lambda^2)W\gamma(\cosh \gamma x - C_{cf} \sinh \gamma x)$
Fest	Fest	$(1 - \eta\lambda^2)W\gamma(\cos \gamma x + C_{cc} \sin \gamma x) - (1 + \eta\lambda^2)W\gamma(\cosh \gamma x - C_{cc} \sinh \gamma x)$
Frei	Frei	$(1 - \eta\lambda^2)W\gamma(\cos \gamma x + C_{ff} \sin \gamma x) + (1 + \eta\lambda^2)W\gamma(\cosh \gamma x - C_{ff} \sinh \gamma x)$

*gelenkig gelagert, $\gamma = \frac{\lambda}{L}$, $C_{cg} = C_{cf} = \frac{\sin \lambda + \sinh \lambda}{\cos \lambda + \cosh \lambda}$ und $C_{cc} = C_{ff} = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{\cos \lambda - \cosh \lambda}$

Damit ist gezeigt, dass die Eigenfrequenzen sehr stark von den Randbedingungen, den geometrischen Daten (h/L) und den Materialdaten abhängen. Dagegen sind die Eigenmoden kaum von den Materialdaten abhängig, wenn der Schubeffekt sehr klein ist. D.h. für einen dünnen und langen Balken und in niedrigen Frequenzbereichen sind die Eigenmoden nur von den Randbedingungen abhängig, falls die Konstanten in den Eigenmoden durch die Gleichung (a-39b) bestimmt werden.

Anhang B: Grundlagen der Methode der Finiten Elemente

Wie in Anhang A erwähnt, lassen sich die Bewegungsdifferentialgleichungen der mechanischen Systeme in den meisten Fällen nicht oder nur mit großem Aufwand analytisch lösen [FAR93, KEV 96, MOR 94, STR 73]. Sowohl in der Mechanik als auch in der Regelungstechnik liegt daher der Schwerpunkt des Interesses bei numerischen Lösungen [GAS87, GIL73]. In der Mechanik haben sich im wesentlichen die Methode der Finiten Differenzen [SMI93] und die Methode der Finiten Elemente (FEM) durchgesetzt [BAT 90, KNO 92].

Die Methode der Finiten Elemente ist ein Ansatz, partielle Differentialgleichungen näherungsweise zu lösen. Ausgangspunkt ist das Prinzip der virtuellen Arbeit. Durch die Wahl geeigneter Ansatzfunktionen oder Interpolationsfunktionen für die auftretenden, unabhängigen Verschiebungszustände wird das System partieller Differentialgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen umgewandelt. Im Folgenden soll das Prinzip der FEM etwa ausführlicher erläutert werden.

B.1 Das Prinzip der FEM

Der Ausgangspunkt der FEM ist das Prinzip der virtuellen Arbeit des mechanischen Systems, also die Gleichung (a-14)

$$\delta W = \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_V dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV - \int_V \delta (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{b-1})$$

Es macht Sinn, wenn im diskretisierten System die gleiche Arbeit wie im kontinuierlichen System geleistet wird. D.h. $\delta W_c = \delta W_d = 0$. Es wird weiterhin angenommen, daß die Verschiebungen \mathbf{u} an den n Punkten „gemessen“ werden können. Diese „gemessenen“ Verschiebungen an den n Punkten werden als \mathbf{x} bezeichnet. In der FEM wird diese Größe als Knotenvariable bezeichnet. Man sollte beachten, dass \mathbf{x} nur eine Funktion der Zeit ist. Dann können die Verschiebungen $\mathbf{u}(x,y,z,t)$ im Volumen V durch die Interpolation von den Verschiebungen an den n „gemessenen“ Punkten \mathbf{x} dargestellt werden.

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{x}(t) \quad (\text{b-2})$$

und damit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \mathbf{N}(x, y, z) \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{d t^2} = \mathbf{N}(x, y, z) \ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{b-3})$$

wobei $\mathbf{N}(x,y,z)$ die Ansatzfunktionen oder Interpolationsfunktionen sind.

Setzt man die Gleichung (b-2) und die Gleichung (b-3) in die Gleichung (b-1) ein, erhält man die virtuelle Arbeit des diskretisierten Systems

$$\begin{aligned} \delta W_d = & \delta \mathbf{x}^T \int_{S_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dS + \delta \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}_V dV \\ & - \delta \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} - \delta \mathbf{x}^T \int_V (\mathbf{DN})^T \mathbf{C}(\mathbf{DN}) dV \mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

Definiert man

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{DN})^T \mathbf{C}(\mathbf{DN}) dV \text{ als Steifigkeitsmatrix,}$$

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \text{ als Massenmatrix,}$$

$$\mathbf{F}_{S_p} = \int_{S_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dS \text{ als Oberflächenkräfte, und}$$

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}_V dV \text{ als Volumen- oder Körperkräfte}$$

wird die virtuelle Arbeit des diskretisierten Systems

$$\delta W_d = \delta \mathbf{x}^T (\mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V - \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} - \mathbf{K} \mathbf{x}) = 0$$

Weil die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{x}$ im Volumen V und auf der Oberfläche S_p beliebig sind, erhält man die Darstellung der gewöhnlichen Differentialgleichung des diskretisierten Systems zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V \quad (\text{b-4})$$

Man sollte beachten, dass die Massen- und Steifigkeitsmatrix nach der Definition symmetrisch sind. Weiterhin kann ein komplexes Volumen in mehrere aber endlich viele einfache und ordentliche Volumen (Elemente), z.B. Hexaeder, Tetraeder, usw. zerteilt werden. Dann wird z.B. die Massenmatrix zu

$$\mathbf{M} = \sum_i \int_{V^i} \mathbf{N}^{iT} \rho^i \mathbf{N}^i dV^i = \sum_i \mathbf{M}^i$$

Das hochgestellte i bedeutet, dass die Wirkung der Ansatzfunktion, der Materialdichte und des Volumens auf das i -te Element bezogen wird. Ebenfalls können die Steifigkeitsmatrix, Volumenkräfte und Oberflächenkräfte also durch die Summe der entsprechenden einzelnen Elemente dargestellt werden. Das ist ein Grund, warum diese Methode Finite Elemente Methode heißt.

Überlicherweise wird die Dämpfung in der Mechanik als Koeffizient der Geschwindigkeit formuliert: $\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$. Dabei wird die Matrix \mathbf{D} sehr oft als Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix angenommen: $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$.

B.2 Anwendung der Piezo-Elemente

Das piezoelektrische Element wird in dieser Arbeit als Aktor benutzt. Für das piezoelektrische Element existiert eine elektro-mechanische Koppelung [BER 98]. Deshalb wird eine Variable des elektrischen Potentials in die Verschiebung eingeführt. Die kinematische Gleichung (a-8) und das Materialgesetz (Gleichung (a-9)) werden

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ u_e \end{bmatrix} \quad (\text{b-5})$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_m \\ u_e \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T & \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \quad (\text{b-6})$$

Das tiefgestellte m und e bedeuten die mechanische bzw. elektrische Größe, z.B. ist $\boldsymbol{\sigma}_e$ die elektrische Verschiebung (C/m^2). \boldsymbol{C} ist die mechanische Elastizitätskonstante des piezoelektrischen Materials, \boldsymbol{e} piezoelektrische Konstante und $\boldsymbol{\kappa}$ Dielektrizitätskonstante. u_e ist das elektrische Potential (V) und \boldsymbol{E} das elektrische Feld (V/m).

Ebenfalls wird eine elektrische Kraft in den Oberflächenkräften eingeführt.

$$\bar{\boldsymbol{p}}^T = [\bar{\boldsymbol{p}}_m^T \quad \bar{p}_e]$$

wobei \bar{p}_e die elektrische Ladung ist. Nun wird die virtuelle Arbeit zu

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{S_p} (\delta \boldsymbol{u}_m^T \bar{\boldsymbol{p}}_m + \delta u_e \bar{p}_e) dS + \int_V \delta \boldsymbol{u}_m^T \bar{\boldsymbol{p}}_v dV - \int_V \delta \boldsymbol{u}_m^T \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_m}{\partial t^2} dV \\ & - \int_V \delta \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_m \\ u_e \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T & \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_m \\ u_e \end{bmatrix} \right) dV = 0 \end{aligned}$$

Interpoliert man das elektrische Potential wie die mechanische Verschiebung, erhält man

$$\mathbf{K} = \int_V \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_m \mathbf{N}_m)^T \mathbf{C} (\mathbf{D}_m \mathbf{N}_m) & -(\mathbf{D}_m \mathbf{N}_m)^T \mathbf{e} (\mathbf{D}_e \mathbf{N}_e) \\ (\mathbf{D}_e \mathbf{N}_e)^T \mathbf{e}^T (\mathbf{D}_m \mathbf{N}_m) & (\mathbf{D}_e \mathbf{N}_e)^T \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{D}_e \mathbf{N}_e) \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & -\mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{em} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \text{ als Steifigkeitsmatrix,}$$

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}_m^T \rho \mathbf{N}_m dV \text{ als Massenmatrix,}$$

$$\mathbf{F}_{S_p} = \int_{S_p} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_m^T \bar{\mathbf{p}}_m \\ \mathbf{N}_e^T \bar{\mathbf{p}}_e \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{mS_p} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \text{ als Oberflächenkräfte,}$$

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}_m^T \bar{\mathbf{p}}_V dV \text{ als Volumen- oder Körperkräfte und schließlich}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}_{mm}, -\mathbf{K}_{me}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_e \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V \quad (\text{b-7a})$$

$$\mathbf{K}_{em} \mathbf{x} + \mathbf{K}_{ee} \mathbf{u}_e = \mathbf{Q} \quad (\text{b-7b})$$

In den Gleichungen (b-7) ist \mathbf{x} wie in normalen Elementen die mechanische Verschiebung, und \mathbf{u}_e enthält die elektrischen Potentiale an den n „gemessenen“ Punkten. Weiterhin kann man die n elektrische Potentiale in drei Gruppen unterteilen: 1. Potentiale auf den oberen Elektroden \mathbf{u}_e^1 , 2. Potentiale auf den unteren Elektroden \mathbf{u}_e^2 und 3. restliche Potentiale \mathbf{u}_e^3 (Bild b-1).

$$\mathbf{u}_e^T = [\mathbf{u}_e^{1T} \quad \mathbf{u}_e^{2T} \quad \mathbf{u}_e^{3T}]$$

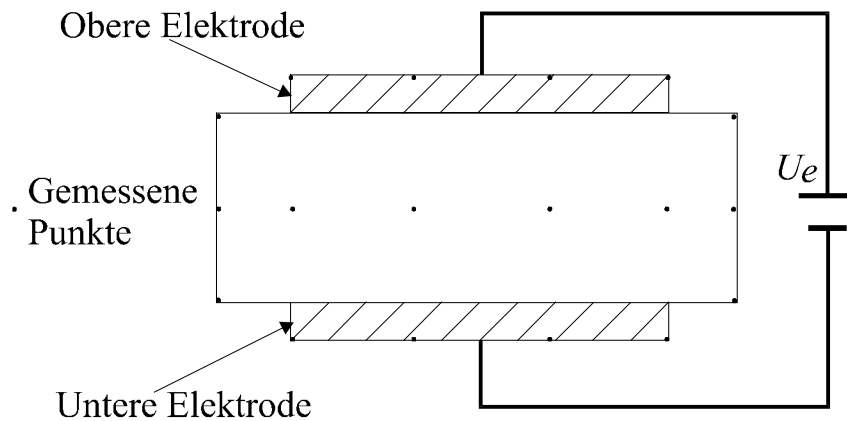


Bild b-1: Das Piezo-Element als Aktor.

Entsprechend werden die Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_{me} , \mathbf{K}_{ee} und die Ladung \mathbf{Q} verteilt.

$$\mathbf{K}_{em}^T = \mathbf{K}_{me} = [\mathbf{K}_{me}^1 \quad \mathbf{K}_{me}^2 \quad \mathbf{K}_{me}^3], \quad \mathbf{Q}^T = [\mathbf{Q}_1^T \quad \mathbf{Q}_2^T \quad \mathbf{Q}_3^T], \quad \text{und } \mathbf{K}_{ee} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^{11} & \mathbf{K}_{ee}^{12} & \mathbf{K}_{ee}^{13} \\ \mathbf{K}_{ee}^{21} & \mathbf{K}_{ee}^{22} & \mathbf{K}_{ee}^{23} \\ \mathbf{K}_{ee}^{31} & \mathbf{K}_{ee}^{32} & \mathbf{K}_{ee}^{33} \end{bmatrix}$$

Weil die Ladungen nur auf den Elektroden gesammelt werden, werden die Ladungen \mathbf{Q}_3 Null [LEE 92]. Damit werden die Gleichungen (b-7) zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{mm} \mathbf{x} - [\mathbf{K}_{me}^1, \mathbf{K}_{me}^2] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^1 \\ \mathbf{u}_e^2 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_{me}^3 \mathbf{u}_e^3 = \mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V \quad (\text{b-8a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{em}^1 \\ \mathbf{K}_{em}^2 \\ \mathbf{K}_{em}^3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^{11} & \mathbf{K}_{ee}^{12} & \mathbf{K}_{ee}^{13} \\ \mathbf{K}_{ee}^{21} & \mathbf{K}_{ee}^{22} & \mathbf{K}_{ee}^{23} \\ \mathbf{K}_{ee}^{31} & \mathbf{K}_{ee}^{32} & \mathbf{K}_{ee}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^1 \\ \mathbf{u}_e^2 \\ \mathbf{u}_e^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{b-8b})$$

Löst man die dritte Gleichung von (b-8b) nach \mathbf{u}_e^3 auf und setzt man das Ergebnis in die Gleichung (b-8a) und in die erste und zweite Gleichung von (b-8b) ein, erhält man,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{K}}_{mm} \mathbf{x} = [\hat{\mathbf{K}}_{me}^1, \hat{\mathbf{K}}_{me}^2] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^1 \\ \mathbf{u}_e^2 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V \quad (\text{b-9a})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{em} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{K}}_{ee} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^1 \\ \mathbf{u}_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{b-9b})$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_{mm} = \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{me}^3 \mathbf{K}_{ee}^{33^{-1}} \mathbf{K}_{em}^3, \quad \hat{\mathbf{K}}_{me}^1 = \mathbf{K}_{me}^1 - \mathbf{K}_{me}^3 \mathbf{K}_{ee}^{33^{-1}} \mathbf{K}_{ee}^{31} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{K}}_{me}^2 = \mathbf{K}_{me}^2 + \mathbf{K}_{me}^3 \mathbf{K}_{ee}^{33^{-1}} \mathbf{K}_{ee}^{32}$$

Weil in dieser Arbeit die Piezo-Elemente als Aktoren benutzt werden, ist die Gleichung (b-9b) ohne Bedeutung. Sei \mathbf{u}_e^1 gleich $+\mathbf{u}$, \mathbf{u}_e^2 gleich $-\mathbf{u}$ und definiert man $\hat{\mathbf{K}}_{me}^1 - \hat{\mathbf{K}}_{me}^2$ als \mathbf{F}_c , wird die Gleichung (b-9a)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}_c \mathbf{u} + \mathbf{F}_{S_p} + \mathbf{F}_V \quad (\text{b-10})$$

wobei $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}_{mm}$ ist und \mathbf{u} die Differenz der elektrischen Potentiale zwischen den oberen und unteren Elektroden.

B.3 Modellbildung für Dehnungsmeßstreifen

In dieser Arbeit werden Dehnungsmeßstreifen als Sensoren benutzt. Eine genaue Beschreibung oder eine Modellbildung der Dehnungsmeßstreifen (DMS) ist für die genaue Modellbildung und Simulation der adaptiven mechanischen Systeme notwendig. Das Extrahieren der Dehnungsinformationen aus Dehnungsmeßstreifen an unterschiedlichen Punkten des finite Elemente-Modells für den Vergleich mit den Testergebnissen ist keine triviale Sache. Das Extrahieren von Dehnungsinformationen an den nicht Knotenpunkten des finiten Elemente-Modells stellt zusätzliche Herausforderungen dar. Es entsteht noch eine andere Schwierigkeit aus der Tatsache, dass Dehnungsmeßstreifen eine durchschnittliche Dehnung über einem begrenzten Bereich messen. Nur wenige Arbeiten berichteten über diesen Effekt in der Literatur. [NIC 98] gibt eine Methode an, in der angenommen wird, dass das Dehnungsfeld linear innerhalb des Bereichs des Dehnungsmeßstreifens ist. In diesem Abschnitt wird eine Methode

aufgezeigt, in der die Annahme des Dehnungsfelds innerhalb des Bereichs des Dehnungsmeßstreifens von der Ansatzfunktion der FEM bestimmt wird.

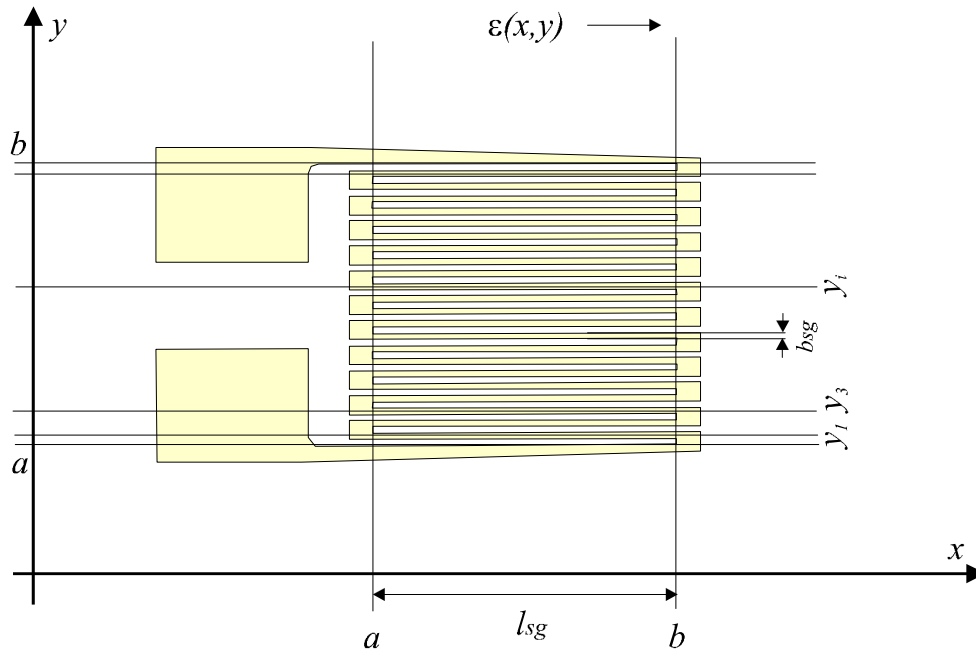


Bild b-2: Das geometrische Modell eines Dehnungsmeßstreifens

Das Bild b-2 zeigt einen Dehnungsmeßstreifen. Der Dehnungsmeßstreifen wird parallel zu dem Dehnungsfeld $\varepsilon(x, y)$ gelegt. $l_{sg} = x_b - x_a$ ist die effektive Länge des Dehnungsmeßstreifens. Es wird angenommen, daß die Breite des einzelnen Streifens vom DMS b_{sg} gleich ist. y_i ist die Mitte des einzelnen Streifens in Richtung y , $y_i = y_a - \frac{b_{sg}}{2} + i \times \frac{y_b - y_a + b_{sg}}{n_{sg} + 1}$, $i = 1, 2, \dots, n_{sg}$ und $y_b - y_a$ ist die effektive Breite vom DMS. n_{sg} ist die Anzahl der einzelnen Streifen des DMSs. Das Signal vom DMS wird von [KEI 95] zu

$$\varepsilon_{DMS} = \frac{k}{A_{eff}} \int_{A_{eff}} \varepsilon(x, y) dx dy = k \sum_{i=1}^{n_{sg}} \frac{1}{l_{sg} b_{sg}} \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_i - b_{sg} \times 0.5}^{y_i + b_{sg} \times 0.5} \varepsilon(x, y) dy dx \quad (b-11)$$

angegeben. Hier ist k eine Konstante, die von der Empfindlichkeit und vom Verstärker für den DMS abhängt.

Nun betrachtet man zuerst, dass der DMS auf einer Ebene (z.B. x - y Ebene), innerhalb eines 3-D finiten Elemente-Modells aufgelegt wird (Bild b-3). Weil der DMS innerhalb des Elements ist, wird das Dehnungsfeld $\varepsilon(x, y, z_0)$ durch die Ansatzfunktion N und Knotenvariable \mathbf{x} des Elements bestimmt (b-2).

$$\varepsilon(x, y, z_0) = \frac{\partial N(x, y, z_0)}{\partial x} \mathbf{x}$$

Das Signal vom DMS wird zu

$$\varepsilon_{DMS} = k \sum_{i=1}^{n_{sg}} \frac{l}{l_{sg} b_{sg}} \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_i - b_{sg} \times 0.5}^{y_i + b_{sg} \times 0.5} \frac{\partial N(x, y, z_0)}{\partial x} dy dx \quad \mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \mathbf{x} \quad (\text{b-12})$$

Die Gleichung (b-12) gibt das Prinzip der Simulation eines DMS als Sensor an.

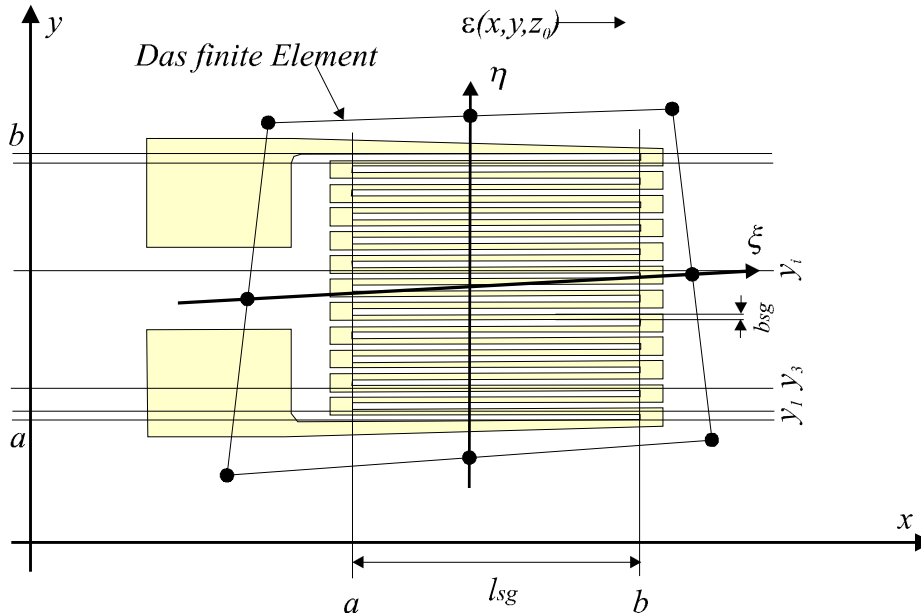


Bild b-3: Der DMS innerhalb einer x-y Ebene eines 3-D finiten Element-Modells

Wegen der technischen Gründe werden die Ansatzfunktionen nicht in einem globalen Koordinatensystem x - y - z , sondern in einem lokalen Koordinatensystem ξ - η - ζ dargestellt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Mitte des Elements (Hexaeders). Jede Oberfläche des Elements hat entweder den Wert 1 oder -1 . Dann werden die Verschiebungen innerhalb des Elements, zu

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, \quad v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i, \quad w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i$$

wobei n die Anzahl der Knoten eines Elements ist. Weiterhin wird die globale Koordinate (x, y, z) eines beliebigen Punkts innerhalb des Elements durch die Ansatzfunktionen und die Koordinaten der Knotenkoordinaten (x_i, y_i, z_i) des Elements dargestellt.

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (\text{b-13})$$

Nun können die Dehnungen dargestellt werden durch

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = |\mathbf{J}|^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} & \bar{\mathbf{J}}_{21} \frac{\partial}{\partial \eta} & \bar{\mathbf{J}}_{31} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \bar{\mathbf{J}}_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} & \bar{\mathbf{J}}_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} & \bar{\mathbf{J}}_{32} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \bar{\mathbf{J}}_{13} \frac{\partial}{\partial \xi} & \bar{\mathbf{J}}_{23} \frac{\partial}{\partial \eta} & \bar{\mathbf{J}}_{33} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [N_1(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{I}_{3 \times 3}, \dots, N_n(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{I}_{3 \times 3}] \mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} f_x(\xi, \eta, \zeta) \\ f_y(\xi, \eta, \zeta) \\ f_z(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

wobei \mathbf{J} die Jacobi Matrix ist. \mathbf{J} wird durch

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

definiert und $\bar{\mathbf{J}}_{ij}$ ist das algebraische Komplement des Elements i,j von \mathbf{J} . Wie im Bild b-3 gezeigt, ist das Signal vom DMS (in Richtung x) nun

$$\varepsilon_{DMS} = k \sum_{i=1}^{n_{sg}} \frac{l}{l_{sg}(y_i) b_{sg}} \int_{S_i(\xi, \eta)} f_x(\xi, \eta, \zeta_0) \bar{\mathbf{J}}_{33} d\eta d\xi \mathbf{x} = \mathbf{c} \mathbf{x} \quad (\text{b-14})$$

wobei $l_{sg}(y_i)$ die Länge des Einzelstreifens eines DMS an der Koordinate y_i ist. Die $S_i(\xi, \eta)$ ist eine Abbildung der Fläche $l_{sg}(y_i) \times b_{sg}$ im ξ - η Koordinatensystem. Obwohl die Fläche $l_{sg}(y_i) \times b_{sg}$ in der x - y Ebene rechteckig ist, kann die Fläche $S_i(\xi, \eta)$ in der ξ - η Ebene wegen des nicht rechteckigen finiten Elements nicht mehr rechteckig sein (Bild b-4).

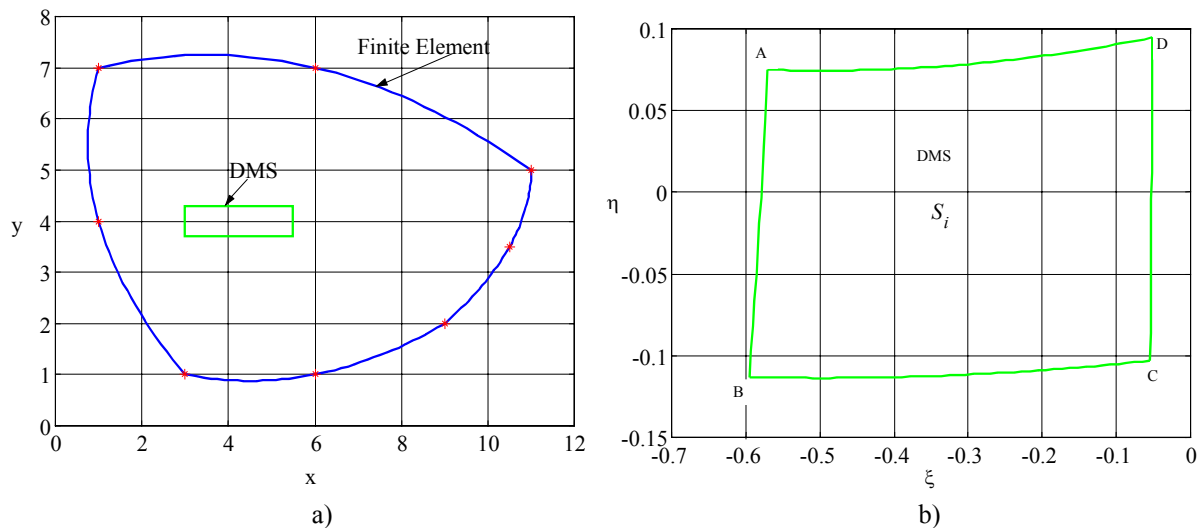


Bild b-4: Die Abbildung der Fläche des DMSs von der x - y Ebene zu der ξ - η Ebene

a) Das finite Element und der DMS in der x - y Ebene; b) Die Abbildung der Fläche vom DMS in der ξ - η Ebene

Um das Integral

$$\int_{S_i(\xi, \eta)} f_x(\xi, \eta, \zeta_0) \bar{\mathbf{J}}_{33} d\eta d\xi \quad (\text{b-15})$$

berechnen zu können, muss man die Fläche $S_i(\xi, \eta)$ durch weitere Abbildungen zu einem Rechteck umformen. Weil die b_{sg} normalerweise sehr klein ist, können die Strecken AB und CD (Bild b-4, b)) in Richtung η als linear betrachtet werden und die linearen Ansatzfunktionen benutzt werden. In Richtung ξ muss jedoch die Ansatzfunktion, die im finiten Element in der gleichen Richtung benutzt wird, eingesetzt werden. Setzt man

$$\xi(r, s) = \sum_{j=1}^m \bar{N}_j(r, s) \xi_j, \quad \eta(r, s) = \sum_{j=1}^m \bar{N}_j(r, s) \eta_j$$

ein, wird das Integral (b-15) zu

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_x(\xi(r, s), \eta(r, s), \zeta_0) \bar{J}_{33}(\xi(r, s), \eta(r, s), \zeta_0) |J_{rs}| dr ds \quad (b-16)$$

wobei m die Anzahl der benutzten Knoten auf der Fläche $S_i(\xi, \eta)$ ist. (ξ_j, η_j) ist die Knotenkoordinate. J_{rs} ist die 2-D Jacobische Matrix und definiert durch

$$J_{rs} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Tauscht man $f_x(\xi, \eta, \zeta_0)$ mit $f_y(\xi, \eta, \zeta_0)$, erhält man die Gleichung für die Berechnung der Dehnung in Richtung y .

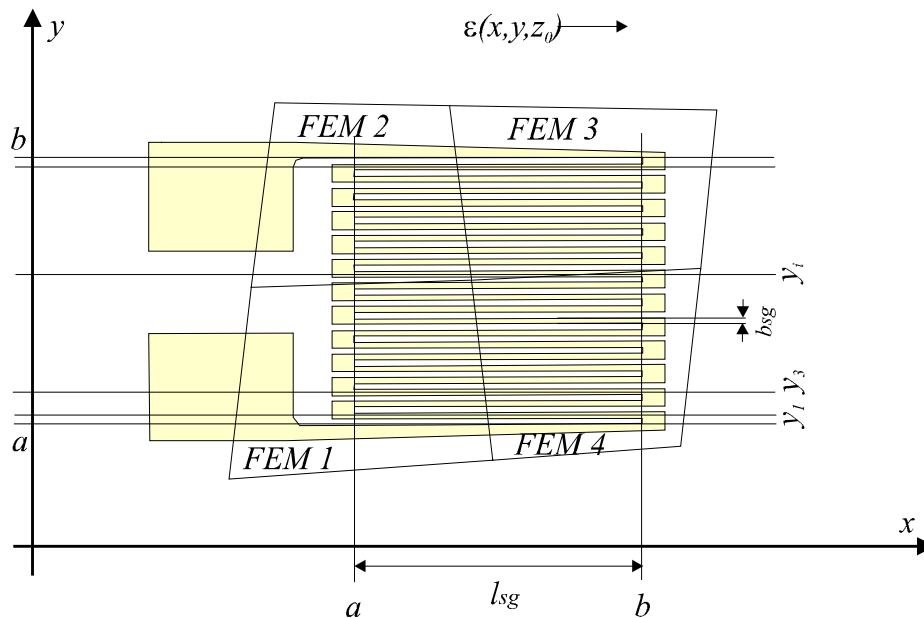


Bild b-5: Der DMS berührt mehrere 3-D finiten Element-Modelle

Falls der DMS sich nicht ganz innerhalb eines Elements befindet (Bild b-5), gilt die Gleichung (b-14) ebenfalls, wenn $S_i(\xi, \eta)$ als die Fläche und n_{sg} als die Anzahl der Streifen des DMS innerhalb des Elements betrachtet werden. In diesem Fall wird der DMS mehrere finite

Elemente berühren. Das Signal des DMSs wird durch die Summe der Teilsignale, die durch die Berührung der einzelnen finiten Elemente erzeugt werden, berechnet.

$$\varepsilon_{DMS} = \sum_i \varepsilon_{DMS}^i = \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i \quad (\text{b-17})$$

wobei ε_{DMS}^i das Teilsignal ist, das durch die Berührung des finiten Elements i erzeugt wird, und durch Gleichung (b-14) und (b-16) berechnet wird.

Anhang C: Relevante Grundlagen der Regelungstechnik

Dieser Anhang enthält eine kurze Zusammenstellung der für diese Arbeit bedeutsamen Grundlagen der Regelungstechnik. Die Leserin und der Leser, die nicht detailliert mit der Regelungstechnik vertraut sind, können weitere umfangreiche Informationen über die Regelungstechnik in [FÖL 94], [FÖL 00], [DOY 92], [GAW 96] und [SKO 96] finden.

C.1 Systemantwort über gegebene Eingangsgröße

Es sei $G(s)$ die Übertragungsfunktion eines Systems und $U(s)$ die Laplace-Transformation einer gegebenen Eingangsgröße. Die Antwort des Systems $h(t)$ kann dann mit

$$h(t) = L^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

beschrieben werden, wobei L^{-1} die Inversion der Laplace-Transformation L bedeutet [FÖL 94]. Im folgenden werden zwei einfache Beispiele eingeführt. In diesen Beispielen ist das System eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit folgender Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}.$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{kU_0\beta}{\omega^2} \sin(\omega_r t - \varphi) + \frac{kU_0\alpha}{\omega^2 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) & \zeta < 1 \\ \frac{kU_0\beta(\zeta=1)}{\omega^2} \sin(\omega_r t - \varphi(\zeta=1)) + \frac{kU_0\gamma}{\omega^2(1+\gamma^2)} \left(\frac{2}{(1+\gamma^2)} + \omega t \right) e^{-\omega t} & \zeta = 1 \\ \frac{kU_0\beta}{\omega^2} \sin(\omega_r t - \varphi) + \frac{kU_0\gamma}{2\omega^2 \sqrt{\zeta^2-1}} \left(\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega t}}{(\gamma^2 + (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})^2)} - \frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega t}}{(\gamma^2 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})^2)} \right) & \zeta > 1 \end{cases} \quad (c-1)$$

$$\gamma = \frac{\omega_r}{\omega}, \quad \beta^2 = \frac{1}{(2\zeta\gamma)^2 + (1-\gamma^2)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2}\right),$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2\zeta^4 + 2(\zeta\gamma)^2 + (1-\gamma^2)^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - (1-\gamma^2)}\right)$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{kU_0}{\omega^2} - \frac{kU_0}{\omega^2 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) & \zeta < 1 \\ \frac{kU_0}{\omega^2} - \frac{kU_0}{\omega^2} (1 - \omega t) e^{-\omega t} & \zeta = 1 \\ \frac{kU_0}{\omega^2} - \frac{kU_0}{2\omega^2 \sqrt{\zeta^2-1}} \left(\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega t}}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})} - \frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega t}}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})} \right) & \zeta > 1 \end{cases} \quad (c-2)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Im ersten Beispiel wird die Sinusfunktion als Eingangsgröße benutzt. Sie wird häufig bei der Schwingungsunterdrückung verwendet. Im zweiten Beispiel wird die Sprungfunktion als Eingangsgröße benutzt. Sie findet häufig bei der Formkontrolle Verwendung. Die Systemantworten der beiden Beispiele mit $u(t) = U_0 \sin(\omega_r t)$ und $u(t) = U_0 I(t)$ werden in Gleichung (c-1)

und (c-2) gegeben, wobei U_0 die Amplitude der Eingangsgröße ist [FÖL 00].

C.2 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Bei mancher Anwendung, z.B. der Formkontrolle, interessiert man sich zunächst nur für das stationäre Verhalten des Systems. Deshalb ist eine vollständige Lösung des dynamischen Vorgangs, wie in (c-1) und (c-2) beschrieben wird, aufwendig und nur begrenzt nötig. Man kann den Endwertsatz der Laplace-Transformation verwenden, um die stationären Werte eines dynamischen Vorgangs zu berechnen.

Der Endwertsatz lautet [FÖL 94]: *Strebt $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einem endlichen Grenzwert zu, so gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Der stationäre Wert der Gleichung (c-2) kann als Beispiel wie folgt berechnet werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{kU_0}{(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)s} = \frac{kU_0}{\omega^2}$$

C.3 Steuerung und Regelung [FÖL 94]

Unter einer Regelung versteht man eine Anordnung, in der bei unvollständig bekannter Strecke, insbesondere bei unvollständiger Kenntnis der Störgrößen, die Regelgröße x , d.h. die Ausgangsgröße der Strecke, laufend gemessen und mit der Führungsgröße w verglichen wird, um mittels der so gebildeten Differenz die Regelgröße an den Sollverlauf anzugleichen. Unter einer Steuerung versteht man eine Anordnung, die Regelgröße gezielt zu beeinflussen ohne laufende Rückführung der Regelgröße und dem Vergleich mit der Führungsgröße. Im Bild c-1 werden diese beiden Begriffe graphisch dargestellt.

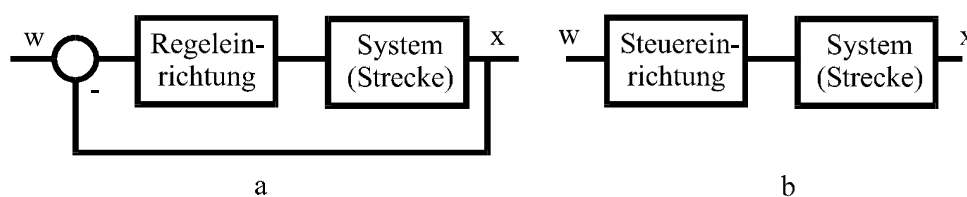


Bild c-1: Der Begriff der a) Regelung und b) Steuerung

Die Steuerung kann nur verwendet werden, wenn die Strecke vollständig bekannt und die Störung vernachlässigt werden kann oder direkt meßbar ist.

C.4 Genauigkeit und Stabilität eines Regelkreises

Eine vollständig bekannte Strecke und direkt meßbare Störung sind in der Praxis selten. Deshalb wird häufig die Regelung benutzt. Durch die laufende Rückführung der Regelgröße erhebt sich vor allem eine wichtige Frage, ob das System stabil ist. Die zweite Frage, die untrennbar mit der Regelung verbunden ist, ist die stationäre Genauigkeit, d.h. wie klein ist die Abweichung zwischen Führungs- und Regelgröße, die nach dem Abklingen der durch Änder-

ungen der Führungs- und Störgröße verursachten Einschwingvorgänge erreicht werden kann.

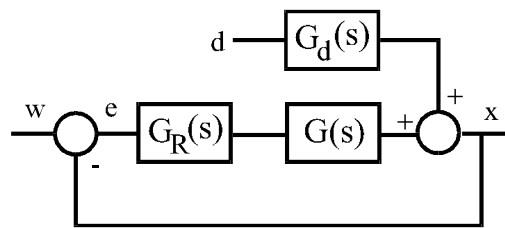


Bild c-2: Ein detaillierteres Blockschaema der Regelung

Bild c-2 zeigt ein detaillierteres Blockschaema der Regelung. Im Bild ist $G(s)$ die Übertragungsfunktion vom Steuereingang zur Regelgröße x , $G_d(s)$ die Übertragungsfunktion von der Störgröße d zur Regelgröße x und $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers. Die Abweichung e , zwischen Führungsgröße w , und Regelgröße x , kann wie folgt

$$E(s) = (1 + G(s)G_R(s))^{-1}(W(s) - G_d(s)D(s)) \quad (\text{c-3})$$

beschrieben werden [FÖL 94]. Ist ein System stabil, geht die Abweichung e nach Abklingen der Einschwingvorgänge auf einen konstanten Wert über oder liegt innerhalb einer vorgegebenen Schranke. Dies ist garantiert, wenn alle Wurzeln der Gleichung $1 + G(s)G_R(s) = 0$ links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen. Die Gleichung

$$(1 + G(s)G_R(s)) = 0$$

wird als charakteristische Gleichung des Regelkreises bezeichnet.

Für ein stabiles System beschreibt der Endwert von $E(s)$ die stationäre Genauigkeit des Systems [FÖL 94].

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ (1 + G(s)G_R(s))^{-1} (sW(s) - sG_d(s)D(s)) \right\}$$

Es ist klar, dass die stationäre Genauigkeit oder der stationäre Fehler eines Regelkreises nicht nur von der Struktur der Strecke bzw. des Reglers, sondern auch vom Verlauf der Führungs- und Störgröße abhängt. Sind $G(s)$ und $G_d(s)$ rationale Übertragungsglieder

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad G_d(s) = \frac{s^p + e_{p-1}s^{p-1} + \dots + e_1s + e_0}{s^q + c_{q-1}s^{q-1} + \dots + c_1s + c_0}$$

dann wird der stationäre Fehler zu

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ (a_0 + b_0G_R(s))^{-1} a_0 (sW(s) - c_0^{-1}e_0sD(s)) \right\} \quad (\text{c-4})$$

Nun untersuchen wir zunächst den stationären Fehler, der durch Änderungen der Führungsgröße verursacht wird. Wenn der Verlauf der Führungsgröße begrenzt ist ($\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq \text{konstant}$), ist $\lim_{s \rightarrow 0} sW(s)$ konstant und der Fehler $e_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ (a_0 + b_0G_R(s))^{-1} a_0 k \right\}$ hängt nur von

Regler- und Streckenstruktur ab.

Es sei $G_R(s)$ aus rationalen Gliedern, also $G_R(s) = \frac{s^r + h_{r-1}s^{r-1} + \dots + h_1s + h_0}{s^t + g_{t-1}s^{t-1} + \dots + g_1s + g_0}$, dann wird

der Fehler zu

$$e_w(\infty) = (a_0g_0 + b_0h_0)^{-1} g_0 a_0 k.$$

Falls die Strecke oder der Regler ein Integrierglied enthält ($a_0 = 0$ oder $g_0 = 0$), ist der durch Änderungen der Führungsgröße verursachte Fehler gleich null.

Für eine impulsartige Störung ($D(s) = \text{konstant}$) ist der durch Änderungen der Störgröße verursachte Fehler nach Gleichung (c-4) bereits gleich null. Für eine begrenzte Störung, z.B. Sprünge oder Sinusfunktionen, hängt der Fehler e_w von Regler- und Streckenstruktur ab. Insgesamt kann man folgendes zusammenfassen:

$$e(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{wenn der Regler oder die} \\ & \text{Strecke ein Integrierglied} \\ & \text{enthält und } w(t) \text{ und } d(t) \\ & \text{begrenzt sind oder } d(t) \text{ ein} \\ & \text{Impuls ist, ansonsten gilt} \end{cases} \quad (c-5)$$

$$\frac{a_0g_0}{a_0g_0 + b_0h_0} \lim_{s \rightarrow 0} (sW(s) - c_0^{-1}e_0sD(s))$$

C.5 Reglerentwurf für einschleifige Eingrößenregelsysteme

Es gibt viele Reglersynthesen für einschleifige Eingrößenregelsysteme. Der einfachste und robusteste Regelalgorithmus ist der PID-Regler. Beim PID-Algorithmus wird die Übertragungsfunktion dargestellt mit

$$U(s) = \left(P + \frac{I}{s} + \frac{NDs}{s+N} \right) E(s) = \frac{(P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI}{s(s+N)} E(s) \quad (c-6)$$

wobei $E(s)$ die Abweichung zwischen Führungs- und Regelgröße ist.

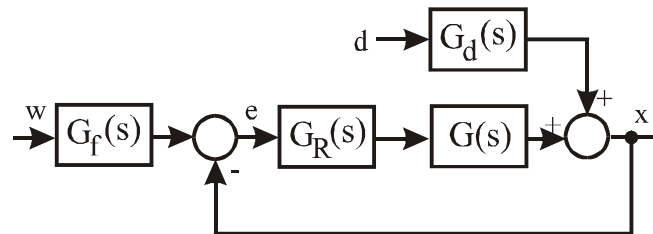


Bild c-3: Das Konzept des zwei dimensionalen Reglers

Wie in Gleichung (c-3) dargestellt, ist der Verlauf von Steuerung und Störung unterschiedlich. Durch einen PID-Regler kann man beide nicht zu der gewünschten Form bringen. Deshalb benutzt man sogenannte zwei dimensionale Regler [SKO 96] (Bild c-3). Im Bild c-3 ist $G_R(s)$ der PID-Regler. Er bewirkt, dass der Regelkreis stabil bleibt und den gewünschten Ver-

lauf der Störungsunterdrückung realisiert. $G_f(s)$ ist ein Vorfilter. Er bringt der Verlauf der Steuerung die gewünschte Form.

In mechanischen Systemen ist der Nenner von $G(s)$ und von $G_d(s)$ gleich (Bild c-3) und als Beispiel wird die folgende Gleichung

$$(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m})X(s) = \frac{f_c}{m}U(s) + \frac{f_d}{m}U_d(s) \quad (c-7)$$

als Regelstrecke benutzt.

Setzt man Gleichung (c-6) in die Gleichung (c-7) ein und beachtet man, dass $E(s) = W(s) - X(s)$ ist, bekommt man

$$X(s) = \frac{f_c((P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI)}{m((s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m})s(s + N) + \frac{f_c}{m}((P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI))}W(s) + \frac{f_d s(s + N)}{m((s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m})s(s + N) + \frac{f_c}{m}((P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI))}U_d(s) \quad (c-8)$$

Nun stellt man die Parameter des PID-Reglers, P, I, D und N so ein, daß der zweite Term in Gleichung (c-8) in gewünschter Form umgewandelt werden kann. Daraus folgt

$$(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m})s(s + N) + \frac{f_c}{m}((P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI) = (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4) \quad (c-9)$$

wobei $a_1, a_2, a_3,$ und a_4 die gewünschten Wurzeln sind. Natürlich sollen diese Wurzeln garantieren, dass der Regelkreis stabil bleibt, d.h. der reale Teil der Wurzel $Re(a_i) < 0, i = 1,2,3,4.$

Durch Vergleich der Koeffizienten beider Seiten kann man leicht feststellen, dass

$$N = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - \frac{d}{m}$$

$$I = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 m}{f_c N} \quad (c-10)$$

$$P = \frac{(a_1 a_2 (-a_3 - a_4) + a_3 a_4 (-a_1 - a_2))m}{f_c N} - \frac{k}{f_c} - \frac{I}{N}$$

$$D = \frac{(a_1 a_2 + (-a_3 - a_4)(-a_1 - a_2) + a_3 a_4)m}{f_c N} - \frac{k}{f_c N} - \frac{d}{f_c} - \frac{P}{N}$$

Setzt man die Gleichung (c-9) und (c-10) in die Gleichung (c-8) ein, wird die Gleichung (c-8) zu

$$X(s) = \frac{f_c((P + ND)s^2 + (NP + I)s + NI)}{m(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4)}W(s) + \frac{f_d s(s + N)}{m(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4)}U_d(s)$$

Nun kann man den Vorfilter bestimmen. Sei $\frac{a_1 a_2}{(s - a_1)(s - a_2)}$ die gewünschte Form des Ver-

laufs der Steuerung, dann folgt

$$G_f(s) = \frac{m(s-a_3)(s-a_4)a_1a_2}{f_c((P+ND)s^2 + (NP+I)s + NI)} \quad (\text{c-11})$$

Damit ist der Synthesevorgang noch nicht ganz abgeschlossen. Die Gleichungen (c-10) und (c-11) beschreiben die Beziehungen für den Regler, den Vorfilter, die gewünschten Wurzeln und das geregelte System. Unser Ziel ist jedoch für ein gegebenes System den Regler und den Vorfilter direkt zu berechnen. Sind die gewünschte Wurzeln beliebig wählbar? Die Antwort ist klar nein, weil der PID-Regler eine beschränkte Form hat. Er kann die beliebigen Wünsche nicht erfüllen. Nun ist die Frage, wie kann man die gewünschten Wurzeln festlegen?

Im allgemeinen soll der Regelkreis einen Schwingvorgang mit gegebener Dämpfung ζ_s erhalten und die restlichen Wurzeln sollen weit entfernt links der imaginären Achse liegen, so dass dieser Einschwingvorgang eine Hauptrolle spielt, z.B. $(s-a_1)(s-a_2) = s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2$, $a_3 > \zeta_s\omega_s$ und $a_4 > \zeta_s\omega_s$. Weithin sollen der PID-Regler und das Vorfilter stabil sein. Damit hat man folgende Beschränkungen* zwischen den PID-Parametern und den gewünschten Wurzeln

$$\begin{aligned} N &= 2\zeta_s\omega_s + (-a_3 - a_4) - \frac{d}{m} \geq 0 \\ P &= \frac{(\omega_s^2(-a_3 - a_4) + a_3a_42\zeta_s\omega_s)m}{f_c N} - \frac{k}{f_c} - \frac{I}{N} \geq 0 \\ D &= \frac{(\omega_s^2 + 2\zeta_s\omega_s(-a_3 - a_4) + a_3a_4)m}{f_c N} - \frac{k}{f_c N} - \frac{d}{f_c} - \frac{P}{N} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{c-12a})$$

oder mit weniger einschränkenden Bedingungen

$$\begin{aligned} N &= 2\zeta_s\omega_s + (-a_3 - a_4) - \frac{d}{m} \geq 0 \\ ND + P &= \frac{(\omega_s^2 + 2\zeta_s\omega_s(-a_3 - a_4) + a_3a_4)m}{f_c} - \frac{k}{f_c} - \frac{Nd}{f_c} \geq 0 \\ NP + I &= \frac{(\omega_s^2(-a_3 - a_4) + a_3a_42\zeta_s\omega_s)m}{f_c} - \frac{kN}{f_c} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{c-12b})$$

Fall 1: Der Regler soll die Systemdämpfung ζ_s erhöhen. D.h. $s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} = s^2 + 2\zeta_s\omega_s + \omega_s^2$

$$\text{und } a_1 = -\zeta_s\omega_s + \omega_s\sqrt{1-\zeta_s^2}i, \quad a_2 = -\zeta_s\omega_s - \omega_s\sqrt{1-\zeta_s^2}i, \quad a_3 = -\alpha\zeta_s\omega_s \text{ und } a_4 = -\beta\zeta_s\omega_s$$

In diesem Fall wird man von der ersten Bedingung in den Gleichungen (c-12a) und (c-12b) ausgehen, und ω_s wird dargestellt durch

$$\omega_s = \frac{2n\zeta\omega}{(2+\alpha+\beta)\zeta_s} \quad \text{mit } n > 1 \quad (\text{c-13})$$

* Falls $f_c < 0$ ist, sollen I, P, D oder ND+P, NP+I, NI kleiner als oder gleich Null sein

Setzt man Gleichung (c-13) in die restlichen zwei Bedingungen in Gleichungen (c-12a) und (c-12b) ein, kann man zwei ungleiche Systeme (c-14a) und (c-14b) erhalten. Wenn man ein minimales n oder einen Bereich von n finden kann, der für die beiden ungleichen Systeme erfüllt wird, ist die Aufgabe für die Reglersynthese lösbar und man kann durch Gleichung (c-13) den Bereich von ω_s berechnen, ansonsten sind α , β und/oder ζ_s neu zu wählen. Wenn ω in diesem Bereich liegt, wählt man $\omega_s = \omega$, ansonsten $\omega_s = \omega_{min}$.

Für die Bedingung (c-12a) erhält man

$$\begin{aligned}
& 4\left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 2(\alpha + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)\zeta_s^2} + 2\alpha\beta\right)\zeta_s^2 n^4 - 4\left(\frac{(\alpha + \beta)}{\zeta_s^2} + 2\alpha\beta\right)\zeta_s^2 n^3 \\
& \quad - (2 + \alpha + \beta)^3 n^2 + 2(2 + \alpha + \beta)^3 n - (2 + \alpha + \beta)^3 \geq 0 \\
& \left(\frac{4 + \alpha\beta + 2(\alpha + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)^2 \zeta_s^2} + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)}\right)n^4 \\
& \quad - \left(\frac{4 + \alpha + \beta}{(2 + \alpha + \beta)\zeta_s^2} + 4(\alpha + \beta) + (2 + \alpha + \beta)^2 + \frac{2\alpha\beta(1 + \alpha + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)}\right)n^3 \\
& \quad + \left(\frac{1}{\zeta_s^2} + 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta + 3(2 + \alpha + \beta)^2\right)n^2 - 3(2 + \alpha + \beta)^2 n + (2 + \alpha + \beta)^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{c-14a}$$

und für die Bedingung (c-12b)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(\alpha + \beta)}{\zeta_s^2} + 2\alpha\beta\right)\frac{4\zeta_s^2}{(2 + \alpha + \beta)^3} n^3 - n + 1 \geq 0 \\
& \left(\frac{1}{\zeta_s^2} + 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta\right)\frac{4\zeta_s^2}{(2 + \alpha + \beta)^2} n^2 - 4\zeta_s^2 n - (1 - 4\zeta_s^2) \geq 0
\end{aligned} \tag{c-14b}$$

Fall 2: Der Regler soll die Systempole nicht ändern. D.h. $s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$ und

$$a_1 = \lambda_1, \quad a_2 = \lambda_2$$

Für die Bedingung (c-12b) erhält man

$$N = (-a_3 - a_4) \geq 0$$

$$ND + P = \frac{a_3 a_4 m}{f_c} \geq 0$$

$$NP + I = \frac{a_3 a_4 (-\lambda_1 - \lambda_2) m}{f_c} \geq 0$$

Es ist klar, dass für ein beliebiges a_i mit $\text{Re}(a_i) < 0$, $i = 3, 4$, die Bedingungen immer erfüllt werden. So wählt man

$$a_3 = -\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)/2 \quad \text{und} \quad a_4 = -\beta(\lambda_1 + \lambda_2)/2. \tag{c-14c}$$

Für die Bedingen (c-12a) erhält man

$$N = (-a_3 - a_4) \geq 0$$

$$P = ((-\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(-a_3 - a_4)}) \frac{a_3 a_4 m}{(-a_3 - a_4) f_c} \geq 0$$

$$D = ((-a_3 - a_4)^2 - (-\lambda_1 - \lambda_2)(-a_3 - a_4) + \lambda_1 \lambda_2) \frac{a_3 a_4 m}{(-a_3 - a_4)^3 f_c} \geq 0$$

Daraus folgt

$$(-a_3 - a_4) \geq \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(-\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$(-a_3 - a_4) \geq -\lambda_1$$

$$(-a_3 - a_4) \geq -\lambda_2$$

Somit erhält man

$$a_3 = -\alpha \lambda_{max} \text{ und } a_4 = -\beta \lambda_{max} \text{ mit } \lambda_{max} = \max(\operatorname{Re}(-\lambda_1), \operatorname{Re}(-\lambda_2), \operatorname{Re}(\lambda_1 \lambda_2 / (-\lambda_1 - \lambda_2))) \quad (\text{c-14-d})$$

Obwohl bei der PID-Reglersynthese die Systemunsicherheit nicht berücksichtigt wird, ist der PID-Regler robust. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

Ein typisches mechanisches System

$$\frac{k_1}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + \frac{k_2}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2} + \frac{k_3}{s^2 + 2\zeta_3 \omega_3 s + \omega_3^2} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) \quad (\text{c-15})$$

soll geregelt werden, wobei die Parameter in Tabelle c-1 gegeben werden. Weiterhin werden

Tabelle c-1: Die Parameter des zu regelnden Systems

i	ζ	ω	k
1	7.7782×10^{-2}	388.91	164.01
2	4.9606×10^{-1}	2480.3	2291.6
3	1.429	7145.0	3556.5

jeweils $\pm 50\%$ Unsicherheit in ζ_i , ω_i und k_i berücksichtigt. Daraus folgt

$$2\zeta_1 \omega_1 \in [15.125, 136.13], \omega_1^2 \in [3.7813 \times 10^4, 3.4031 \times 10^5] \text{ und } k_1 \in [82.005, 246.01]$$

Dies ist etwa $\pm 80\%$ Unsicherheit für $2\zeta_1 \omega_1$ und ω_1^2 . Die Regelstrecke mit durchschnittlichen Werten von k_1 , $2\zeta_1 \omega_1$ und ω_1^2

$$G_0(s) = \frac{164.01}{s^2 + 75.625s + 1.8906 \times 10^5}$$

wird als nominales Modell in der PID-Reglersynthese verwendet. Die gewünschte Systemdämpfung ζ_s soll 0.7 sein und die Bedingung (c-12a) soll benutzt werden. Nach Berechnung der Gleichungen (c-14a) und (c-13) wird festgestellt, dass die nominale Frequenz ω ($\omega = 348.81$) in dem erlaubten Bereich liegt. So kann man $\omega_s = \omega$ nehmen. Damit erhält man die gewünschten Systempole $a_{1,2} = -304.37 \pm 310.52i$, $a_3 = -1826.2$ und $a_4 = -2434.9$, wobei $\alpha = 6$ und $\beta = 8$ eingesetzt werden. Dann werden die Parameter von PID-Regler und Vorfilter durch die Gleichungen (c-10) und (c-11) berechnet. Die Ergebnisse sind

$$N = 4.7943 \times 10^3, P = 3.0913 \times 10^3, I = 1.0692 \times 10^6, D = 7.8481$$

$$G_f(s) = \frac{1.1527 \times 10^3 s^2 + 4.9120 \times 10^6 s + 5.1259 \times 10^9}{4.0711 \times 10^4 s^2 + 1.5890 \times 10^7 s + 5.1259 \times 10^9}$$

Nun wird die Robustheit dieser Regler getestet. Die Ergebnisse werden im Bild c-4 gezeigt. Im Bild c-4 ist y_0 der Verlauf des nominalen Systems bei Sprungeingabe. y_1 ist der Verlauf der Systemsantwort mit maximal k_I , minimal $2\zeta_1\omega_1$ und ω_1^2 . y_2 ist der Verlauf der Systemsantwort mit y_1 plus $G_2(s)$ (s. (c-15)). y_3 ist der Verlauf des Systems mit y_2 plus $G_3(s)$ (s. (c-15)). Es gibt kaum Unterschiede zwischen diesen Verläufen. Dies bedeutet, dass dieser PID-Regler sehr robust ist.

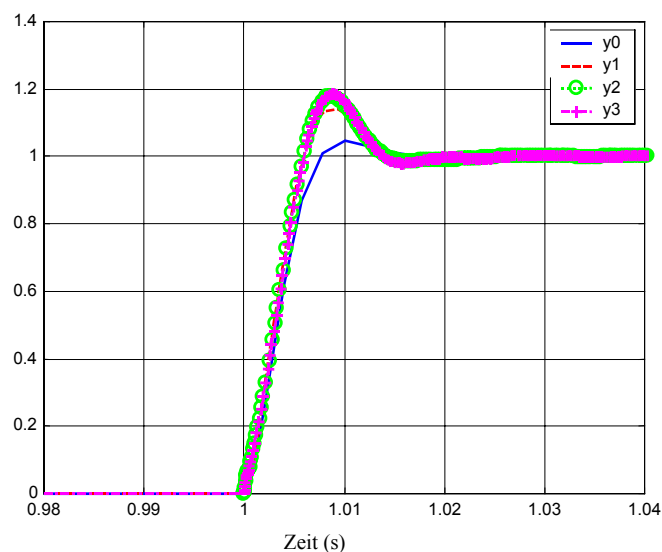


Bild c-4: Die Robustheit des PID-Reglers

Die größte Schwäche des PID-Algorithmus ist, dass es bisher keine Entwurfsmethode für Mehrgrößensysteme gibt [FÖL 94].

C.6 Darstellung des Regelkreises im Zustandsraum

Bislang wird der Regelkreis immer durch die komplexe Übertragungsfunktion, die das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße beschreibt, dargestellt. Es gibt auch eine sogenannte Zustandsraum-Darstellung. Dies ist besonders für Mehrgrößensysteme zweckmäßig. Eine Zustandsvariable ist eine Variable zwischen Eingangs- und Ausgangsvariable und kann durch ihren Anfangswert und die Eingangsvariablen eindeutig bestimmt werden. Eine typische Zustandsraum-Darstellung eines Regelkreises ist [FÖL 94]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{c-16}$$

wobei \mathbf{x} die Zustandsvariablen sind, \mathbf{u} Eingangsgrößen und \mathbf{y} Ausgangsgrößen. Die Übertragungsfunktion der Zustandsraum-Darstellung ist

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (\text{c-17})$$

Die beiden Gleichungen, (c-16) und (c-17), können auch als $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ bezeichnet werden. Es gibt auch die Transformation der Übertragungsfunktion in die Zustandsraum-Darstellung, aber diese Transformation ist nicht eindeutig. Sie hängt von den ausgewählten Zustandsvariablen ab. Folglich sind einige Zustandsraum-Darstellungen der $G_I(s)$ in (c-15):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\zeta_1\omega_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [k_1 \quad 0], \mathbf{D} = [0] \quad (\text{c-18a})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1^2 \\ 1 & -2\zeta_1\omega_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \quad 1], \mathbf{D} = [0] \quad (\text{c-18b})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\zeta_1\omega_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = [0] \quad (\text{c-18c})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & -2\zeta_1\omega_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{\omega_1} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = [0] \quad (\text{c-18d})$$

Die Darstellung (c-18a) ist die sogenannte Regelungsnormalform mit

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{s}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} \end{bmatrix}$$

Die Darstellung (c-18b) ist die sogenannte Beobachtungsnormalform mit $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$. In den

Darstellungen (c-18c) und (c-18d) wird $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ bzw. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{\dot{x}}{\omega_1} \end{bmatrix}$ als Zustandsvariable benutzt

[GAW 96].

C.7 Die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramian einer Regelstrecke $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ werden definiert durch [GAW 96][DOY 92]

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau, \mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C} \mathbf{C}^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau$$

Eine stationäre Lösung von $\mathbf{W}_c(\infty)$ und $\mathbf{W}_o(\infty)$ kann bestimmt werden aus den folgenden Lyapunovschen Gleichungen [GAW 96][DOY 92]

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c(\infty) + \mathbf{W}_c(\infty) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0, \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o(\infty) + \mathbf{W}_o(\infty) \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (\text{c-19})$$

Falls $W_c(\infty) > 0$ (positiv definit) und vollen Rang hat (invertierbar), gilt für die Regelstrecke (A, B, C, D) : Zustand steuerbar. Falls $W_o(\infty) > 0$ (positiv definit) und vollen Rang hat (invertierbar), gilt für die Regelstrecke (A, B, C, D) : Zustand beobachtbar.

Falls $W_c(\infty)$ gleich $W_o(\infty)$ und beide diagonal sind, heißt die Regelstrecke (A, B, C, D) eine balancierte Realisierung.

Mit folgenden Schritten kann eine nicht balancierte Regelstrecke balanciert werden [GAW 96]:

1. Berechnung der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramian mittels der Gleichung (c-19)
2. Zerlegen der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramian zu $W_c(\infty) = PP^T$ und $W_o(\infty) = Q^T Q$
3. Konstruieren der Matrix $H = QP$ und Zerlegen der Matrix H mit der singulären Wertzerlegung, $H = QP = V\Sigma^2 U^T$, wobei $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ Hankel singulärer Wert der Regelstrecke heißt.
4. Konstruieren der Transformationsmatrix $R = PU\Sigma^{-1}$ und $R^{-1} = \Sigma^{-1} V^T Q$.

Dann heißt die Zustandsdarstellung $(A_b, B_b, C_b, D_b) = (R^{-1}AR, R^{-1}B, CR, D)$ eine balancierte Realisierung der Zustandsdarstellung (A, B, C, D) .

C.8 Modellreduktion in der Regelungstechnik

In Regelungstechnik gibt es grundsätzlich zwei Kategorien für die Modellreduktion. Eine ist sogenannte abgeschnittene Reduktion (truncated reduction), die andere ist restteilberücksichtigende Reduktion (residualized reduction). Obwohl die abgeschnittene Reduktion nicht für die Formkontrolle geeignet ist, ist die Berechnung des reduzierten Systems viel leichter als die restteilberücksichtigende Reduktion (Vergleich der Gleichung (1.2.1-2) mit der Gleichung (1.2.1-3)). Glücklicherweise gibt es eine Methode, durch welche sich die Beschreibung des reduzierten Systems in die beiden Kategorien umwandeln lässt [GRE 95].

Es sei $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ und $H(p) = G(1/p) = \tilde{D} + \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$

mit

$$\tilde{A} = A^{-1}, \tilde{B} = A^{-1}B, \tilde{C} = -CA^{-1} \text{ und } \tilde{D} = D - CA^{-1}B \quad (\text{c-20})$$

dann sind die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramian, W_c und W_o , in beiden Systemen gleich, d.h.

$$W_c^G = W_c^H \text{ und } W_o^G = W_o^H \quad (\text{c-21})$$

Weiterhin sei $H_{tr}(p)$ eine abgeschnittene Reduktion von $H(p)$ und $G_{re}(s)$ eine restteilberücksichtigende Reduktion von $G(s)$, dann gilt

$$\mathbf{G}_{re}(s) = \mathbf{H}_{tr}(1/s) \quad (\text{c-22})$$

C.8.1 Die balancierte und die modale quadratische Norm Reduktion

In der balancierten und modalen quadratischen Norm Reduktion lassen sich die quadratische Norm, auch euklidische Norm genannt, der Differenz der Messgrößen zwischen dem Originalsystem und dem reduzierten System, \mathbf{y} bzw. \mathbf{y}_r , als ein Vergleichmaß angeben.

$$J = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2 \quad (\text{c-23})$$

Man kann auch ein relatives Vergleichmaß definieren als

$$\delta = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \quad (\text{c-24})$$

Für eine optimale Reduktion soll der Vektor $\mathbf{y} - \mathbf{y}_r$ mit dem Vektor \mathbf{y}_r orthogonal sein, d.h. $\mathbf{y}_r^T \mathbf{y} = \mathbf{y}_r^T \mathbf{y}_r$. In der Konsequenz ergibt sich

$$J^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}_r^T \mathbf{y}_r - 2\mathbf{y}_r^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{y}_r\|_2^2 \quad (\text{c-25})$$

Es ist bekannt[GAW 96], dass $\|\mathbf{y}\|_2^2 = \text{spur}(\mathbf{C}^* \mathbf{C} \mathbf{W}_c)$, wobei \mathbf{C}^* die konjugierte oder einfache Transponierte ist, wenn die Matrix \mathbf{C} komplex bzw. real ist und \mathbf{W}_c ist die Steuerbarkeitsgrammian.

In der balancierten quadratischen Norm Reduktion, geht man davon aus, dass das Originalsystem balanciert ist, d.h. die Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgrammian sind diagonal und gleich. Sei $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$ und $\mathbf{W}_c = \boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dann gilt

$$\|\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i^* \mathbf{c}_i \sigma_i = \sum_{i=1}^n \psi_i.$$

Damit kann ψ_i als das Dominanzmaß der Zustandsvariablen x_i betrachtet werden. Sortiert man ψ_i und nimmt man den Teil von \mathbf{x} mit größerem ψ_i als x_l , so dass für vorgegeben J_{soll} oder δ_{soll}

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 - \|\mathbf{y}_r\|_2 = \sqrt{\sum_{i=v+1}^n \psi_i} \leq J_{soll} \quad \text{oder} \quad \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=v+1}^n \psi_i}{\sum_{i=1}^n \psi_i}} \leq \delta_{soll}$$

gilt, erhält man das abgeschnittene reduzierte System anhand der Gleichung (1.2.1-2). Statt der Matrix \mathbf{C} und der Gleichung (1.2.1-2) erhält man die restteilberücksichtigende Reduktion mit der Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ und der Gleichung (1.2.1-3).

Bei der modalen quadratischen Norm Reduktion, geht man davon aus, dass das Originalsystem durch Modalkoordinaten dargestellt wird, d.h. die Matrix \mathbf{A} ist diagonal, damit ist

$\mathbf{y} = \mathbf{y}_r + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2$ und $J^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_r\|_2^2 = \|\mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2\|_2^2 = \text{spur}(\mathbf{C}_2^* \mathbf{C}_2 \mathbf{W}_{c2})$ für die abgeschnittene Reduktion, wobei die tiefgestellte 2 den abgeschnittenen Teil der Matrix \mathbf{C} und \mathbf{W}_c bedeutet. Nun ist die Matrix \mathbf{W}_c nicht mehr diagonal. Definiert man eine sogenannte Modalkostenmatrix $\Psi = [\psi_{ij}]$ mit $\psi_{ij} = \text{spur}(\mathbf{c}_i^* \mathbf{c}_j \mathbf{W}_{c_{ji}})$, dann gilt $J^2 = \sum_i \sum_j \psi_{ij}$ $i, j \in$ abgeschnittene Modalkoordinaten und $\|\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ij}$.

Es ist klar, für die abgeschnittene Reduktion von Ordnung n zu Ordnung r gibt es $n!/(r!(n-r)!)$ Möglichkeiten, damit werden $n!/(r!(n-r)!)$ Berechnungen benötigt, um eine optimale Lösung zu finden. Es ist kaum möglich dies zu realisieren, obwohl n und r relativ klein sind, z. B. für $n=100$ und $r=10$ benötigt man $1,2 \times 10^{12}$ Berechnungen. Mit folgendem durch den Autor entwickeltem Algorithmus kann man eine suboptimale Lösung finden und benötigt man nur $O(n^2)$ Operation.

1. Suche eine minimale ψ_{ii} und diese Modalkoordinate wird zur abgeschnittenen Menge gehören, damit der Reduktionsfehler $J(n)^2 = \psi_{ii}$
2. $J(n-k+1)^2 = \sum_i \sum_j \psi_{ij}$, $i, j \in$ abgeschnittene Menge, ist der Reduktionsfehler für k abgeschnittene Modalkoordinaten.
3. Suche eine Modalkoordinate $p \notin$ abgeschnittene Menge, so dass $\sum_j \psi_{pj} + \psi_{pp}$ minimiert wird.
4. Dann wird p zur abgeschnittenen Menge gehören. Der Reduktionsfehler mit $k+1$ abgeschnittenen Modalkoordinaten wird $J(n-k)^2 = 2 \sum_j \psi_{pj} + \psi_{pp} + J(n-k+1)^2$, für $k=1, \dots, n$.

Nun kann $J(k)$, $k = 1, \dots, n$, als das Dominanzmaß der Modalkoordinaten betrachtet werden. Für vorgegebenes J_{soll} oder δ_{soll} sucht man ein k , so dass $J(k) \leq J_{soll}$ oder $J(k)/J(1) \leq \delta_{soll}$ und erhält das abgeschnittene reduzierte System durch die $J(k)$ entsprechenden Modalkoordinaten und die Gleichung (1.2.1-2). Für die restteilberücksichtigende Reduktion wird die Matrix \mathbf{C} in der Modalkostenmatrix durch $\tilde{\mathbf{C}}$ ersetzt und statt der Gleichung (1.2.1-2) wird die Gleichung (1.2.1-3) bei der Berechnung des reduzierten Systems benutzt.

C.8.2 Die balancierte und die modale unendliche Norm Reduktion

Eine unendliche Norm einer Übertragungsfunktion ist der maximale singuläre Wert dieser Funktion im ganzen Frequenzbereich.

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_{\infty} = \max_{\omega}(\overline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))) \quad (\text{c-26})$$

Physikalisch bedeutet eine unendliche Norm die größte Verstärkung der Übertragungsfunktion. Daher wird die Differenz der maximalen Verstärkung zwischen dem originalen und dem reduzierten System, \mathbf{G} bzw. \mathbf{G}_r , als ein Vergleichmaß in der balancierten und modalen unendlichen Norm Reduktion verwendet.

$$J = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_{\infty} \quad (\text{c-27})$$

Wie in der quadratischen Norm geht man in der balancierten unendlichen Norm Reduktion davon aus, dass das Originalsystem balanciert ist und die gleiche und diagonale Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsgramian hat. Die Größe des Elementes in der Gramian entspricht der Bedeutung der entsprechenden Zustandsvariablen x , dadurch kann die Gramian als das Dominanzmaß betrachtet werden. Sortiert man die Gramian $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ und partitioniert man die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} entsprechend, wird

$$J = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_{\infty} \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

wobei r die Ordnung des reduzierten Systems ist. Das reduzierte System \mathbf{G}_r erhält man unter Nutzung der Gleichung (1.2.1-2) für die abgeschnittene und der Gleichung (1.2.1-3) für die restteilberücksichtigende Reduktion. Weil die Hankelsche Norm eines Systems gleich σ_l und die Hankelsche Norm kleiner als und gleich der unendlichen Norm ist, kann man auch wie im Fall der quadratischer Norm einen relativen Reduktionsfehler angeben.

$$\delta = \frac{\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_{\infty}}{\|\mathbf{G}\|_{\infty}} \leq 2 \frac{\sum_{i=r+1}^n \sigma_i}{\sigma_l}$$

In der Reduktion der modalen unendlichen Norm wird vorausgesetzt, dass das Originalsystem mit den Modalkoordinaten, $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\mathbf{B}^T = [\mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T, \dots, \mathbf{b}_n^T]$ und $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$, dargestellt wird. Die Differenz der Übertragungsfunktion zwischen originalem und reduziertem System kann durch $\mathbf{G} - \mathbf{G}_r = \sum_{i=r+1}^n \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i}{s - \lambda_i}$ repräsentiert werden, damit ist der

Reduktionsfehler

$$J = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_{\infty} \leq \sum_{i=r+1}^n \psi_i = \sum_{i=r+1}^n \frac{\overline{\sigma}(\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i)}{|Re(\lambda_i)|}$$

wobei $Re(a)$ realer Teil von a ist und $\overline{\sigma}(a)$ der maximale singuläre Wert von a . Da die Berechnung der unendlichen Norm $\|\mathbf{G}\|_{\infty}$ in Modalkoordinaten schwierig ist, gibt es keine relative Fehlerdarstellung in diesem Fall.

C.8.3 Die balancierte Hankelsche Norm Reduktion

Gegeben sei ein stabiles System $\mathbf{G}(s)$. Ein Eingangssignal $\mathbf{u}(t)$ wird bis $t = 0$ auf $\mathbf{G}(s)$ angewendet und die Messgröße $\mathbf{y}(t)$ wird nach $t > 0$ gemessen. Eine Hankelsche Norm eines Systems $\mathbf{G}(s)$ ist das maximale Verhältnis der quadratischer Norm von zwei Signalen.

$$\|\mathbf{G}(s)\|_H = \max_{\mathbf{u}(t)} \left(\frac{\sqrt{\int_0^{\infty} \|\mathbf{y}(\tau)\|_2^2 d\tau}}{\sqrt{\int_{-\infty}^0 \|\mathbf{u}(\tau)\|_2^2 d\tau}} \right)$$

Die Hankelsche Norm bemisst die Energiespeicherfähigkeit eines Systems und wird durch folgende Formel berechnet

$$\|\mathbf{G}(s)\|_H = \sqrt{\rho(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)} = \sigma_l$$

wobei $\rho(a)$ der maximale Eigenwert von a ist. Damit ist die Berechnung der Hankelschen Norm eines Systems immer mit der Balancierung eines Systems verbunden. Bei der Reduktion der Hankelschen Norm wird die Differenz zwischen dem originalen, $\mathbf{G}(s)$, und dem reduzierten, $\mathbf{G}_r(s)$, System gebildet und die Hankelsche Norm darauf angewendet. Diese Hankelsche Norm wird als das Vergleichmaß benutzt.

$$J = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_H \quad (\text{c-28})$$

Durch folgende Schritte kann man ein reduziertes System mit r -ter Ordnung und σ_{r+1} Reduktionsfehler erreichen[SKO 96]:

1. Balancieren des gegebenen Systems durch die in C.7 gegebenen Schritte und Sortieren der Hankelschen Singulärwerte in absteigender Reihenfolge.
2. Neu Ordnen der Hankelschen Singulärwerte zu

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+t+1}, \dots, \sigma_n, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+t}) = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \sigma_{r+1} \mathbf{I}_t) = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2)$$

Man sollte beachten, dass in der Theorie σ_{r+1} bis σ_{r+t} gleich sind. In der Praxis werden σ_{r+1} bis σ_{r+t} so ausgewählt, dass $\sigma_{r+t} - \sigma_{r+1} \leq \varepsilon$, wobei ε eine vorgegebene beliebig kleine Zahl ist.

3. Partitionieren der balancierten Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} nach der Anordnung der Hankelschen Singulärwerte. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$.

4. Definieren $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$ durch

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{E}^{-1} (\sigma_{r+1}^2 \mathbf{A}_{11}^T + \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{A}_{11} \boldsymbol{\Sigma}_1 - \sigma_{r+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U} \mathbf{B}_1^T), \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{E}^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{B}_1 + \sigma_{r+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U}),$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 + \sigma_{r+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U}, \quad \hat{\mathbf{D}} = -\sigma_{r+1} \mathbf{U}, \quad \mathbf{E} = \boldsymbol{\Sigma}_1^2 - \sigma_{r+1}^2 \mathbf{I}_{n-r} \quad \text{und} \quad \mathbf{U} = -\mathbf{C}_2 (\mathbf{B}_2^T)^+$$

Damit hat die Matrix \hat{A} r stabile Eigenwerte und alle übrigen, $n-r-t$, sind instabil.

5. Das reduzierte System $\mathbf{G}_r(s)$ mit der Ordnung r ist das stabile Subsystem von $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ und der Reduktionsfehler ist $J = \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_H = \sigma_{r+1}$.

Analog zur balancierten unendlichen Norm Reduktion kann hier auch ein relativer Reduktionsfehler angegeben werden.

$$\delta = \frac{\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_H}{\|\mathbf{G}\|_H} = \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1}$$

C.8.4 Die Reduktionsmethode von Litz

Wie bei der Reduktion der modalen quadratischen und unendlichen Norm setzt das Litzsche Reduktionsverfahren die modalen Koordinaten voraus.

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \mathbf{B} = [b_{ik}] \text{ und } \mathbf{C} = [c_{ji}] \text{ mit } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p$$

Die Differenz der Übertragungsfunktion zwischen originalem und reduziertem System wird durch $\mathbf{G} - \mathbf{G}_r = \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i \mathbf{b}_i}{s - \lambda_i}$ repräsentiert, wobei c_i die i -te Spalte von \mathbf{C} ist und \mathbf{b}_i die i -te Zeile

von \mathbf{B} . Statt des Dominanzmaßes $\psi_i = \frac{\overline{\sigma}(\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i)}{|\text{Re}(\lambda_i)|}$ in der Reduktion der modal unendlichen

Norm wird in der Litzschen Reduktion $\psi_i = \frac{\sum_j \sum_k |c_{ji} b_{ik}|}{|\lambda_i|}$ als das Dominanzmaß definiert.

Anders als die restteilberücksichtigende Reduktion wird bei der Litzschen Reduktion nicht $\dot{\mathbf{x}}_2 = 0$ vorausgesetzt, sondern $\mathbf{x}_2 = \mathbf{E} \mathbf{x}_1$ angenommen. Die Matrix \mathbf{E} ist durch

$$J = \int_0^{\infty} \|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{E} \mathbf{x}_1(t)\|_2^2 dt \stackrel{!}{=} \min$$

bestimmt. Die genaue Formel von \mathbf{E} findet man in [FÖL 94].

C.9 Modellreduktion in Strukturdynamik

Die erste Reduktionstechnik in der Strukturdynamik wurde in den 60ziger Jahren des letzten Jahrhunderts von Guyan und Irons [GUY 65][IRO 65] entwickelt. Die Guyansche und Ironsche Reduktionstechnik basiert auf der statischen Gleichung des Struktursystems:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{c-29}$$

Dabei sind \mathbf{F} die kompletten Kräfte, die auf das System einwirken und alle Steuerungs- und Störkräfte enthalten. Die Gleichung (c-29) kann in die aktiven „a“ und weggelassenen „d“ Freiheitsgrade partitioniert werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \tag{c-30}$$

Durch das Ausweiten des oberen und unteren Teils der Gleichung (c-30) erhält man die aktive Reihe der Gleichungen $\mathbf{K}_{aa}\mathbf{x}_a + \mathbf{K}_{ad}\mathbf{x}_d = \mathbf{F}_a$ und die weggelassene Reihe der Gleichungen $\mathbf{K}_{da}\mathbf{x}_a + \mathbf{K}_{dd}\mathbf{x}_d = \mathbf{F}_d$. Löst man die weggelassenen Gleichungen nach \mathbf{x}_d auf und setzt man mit $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a$ zusammen, bekommt man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a + \mathbf{K}_d^{-1}\mathbf{F} \quad (\text{c-31})$$

wobei $\mathbf{K}_d^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{dd}^{-1} \end{bmatrix}$ ist.

Weil die Matrix \mathbf{K} symmetrisch ist und $[\mathbf{I} \quad -\mathbf{K}_{ad} \mathbf{K}_{dd}^{-1}] \mathbf{K} \mathbf{K}_d^{-1}$ gleich Null ist, wird \mathbf{T}_s zu

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{t}_s \end{bmatrix} \quad (\text{c-32})$$

\mathbf{T}_s ist als die Projektionsmatrix in der Guyanschen und Ironschen Reduktion definiert. Die reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen können dann durch die Gleichungen (1.2.2-2) und (1.2.2-3) bestimmt werden.

Die dynamische Kondensation (Dynamic condensation), eine Erweiterung von Guyanschen und Ironschen Reduktion, wurde in [MIL 80] entwickelt. Ein ungedämpftes System kann mit einer Übertragungsfunktion dargestellt werden.

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (\text{c-33})$$

Sei $s = j\omega$, wird die Gleichung (c-33) zu

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (\text{c-34})$$

Partitioniert man die Gleichung (c-34) wie die Gleichung (c-30), bekommt man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\omega)_{aa} & \mathbf{B}(\omega)_{ad} \\ \mathbf{B}(\omega)_{da} & \mathbf{B}(\omega)_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\omega)_a \\ \mathbf{X}(\omega)_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\omega)_a \\ \mathbf{F}(\omega)_d \end{bmatrix} \quad (\text{c-35})$$

Bei der Anwendung der Guyanschen und Ironschen Reduktion auf die Gleichung (c-35) für eine gegebene ω erhält man

$$\mathbf{T}(\omega)_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{B}(\omega)_{dd}^{-1}\mathbf{B}(\omega)_{da} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{t}(\omega)_d \end{bmatrix} \quad (\text{c-36})$$

Diese Kondensationstechnik ist eine Funktion der Frequenz ω . Das reduzierte Modell entspricht dem ursprünglichen Modell nur, wenn ω gleich einer Eigenfrequenz des ursprünglichen Systems ist. Zusätzlich ist das reduzierte System nur für diese einzelne Eigenfrequenz genau [AVI 89].

In den 90iger Jahren des letzten Jahrhunderts wurden zwei weitere Reduktionsverfahren,

nämlich das System **E**quivalent **R**eduction **E**xpansion **P**rocess (SEREP) [OCA89-2][OCA 96] und das **I**mproved **R**educed **S**ystem (IRS) [OCA89-1] entwickelt. Im SEREP geht man vom ursprünglichen FEM Modell aus, und alle Eigenmoden und Eigenfrequenzen werden berechnet. So erhält man $\mathbf{x}_n = \Phi \mathbf{q}$, wobei Φ die Modalmatrix ist und \mathbf{q} die Modalkoordinate. Partitiioniert man die Verschiebung \mathbf{x} und die Modalmatrix in den aktiven „a“ Teil und weggelassenen „d“ Teil

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_d \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_d \end{bmatrix} \Phi_a^+ \mathbf{x}_a = \mathbf{T}_{SEREP} \mathbf{x}_a \quad (\text{c-37})$$

wobei Φ_a^+ die allgemeine Inversion von Φ_a bedeutet. Bei der Schwingungsunterdrückung interessiert man sich nur für einige Eigenfrequenzen und die gesamten Verschiebungen können nur mit entsprechenden Modalkoordinaten dargestellt werden, z. B. $\mathbf{x}_n = \Phi_{nm} \mathbf{q}_m$, wobei $m < n$ ist. Falls $m < a$ ist, wird $\Phi_a^+ = (\Phi_{am}^T \Phi_{am})^{-1} \Phi_{am}^T$ oder, $\Phi_a^+ = \Phi_{am}^{-1}$ falls $m = a$ ist. Die Modalmatrix und die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems werden in beiden Fällen gleich Φ_{am} bzw. den entsprechenden Eigenfrequenzen des ursprünglichen Systems sein [AVI 89] [OCA89-2] [OCA 96]. Wenn $m = n$ ist, der häufigste Fall in der Formkontrolle, wird $\Phi_a^+ = \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1}$. Damit wird

$$\mathbf{T}_{SEREP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \Phi_d \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{t}_{SEREP} \end{bmatrix} \quad (\text{c-38})$$

Die reduzierte Massen- und Steifigkeitsmatrizen werden zu

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{T}_{SEREP}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{SEREP} = (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \text{ und}$$

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{T}_{SEREP}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{SEREP} = (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a \Omega^2 \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1}$$

wobei Ω die Eigenfrequenzen des Originalsystems sind. Die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems bekommt man zu

$$\bar{\Omega}_a^2 = \Psi_a^T \mathbf{K}_a \Psi_a = \Psi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a \Omega^2 \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Psi_a$$

wobei Ψ_a die Modalmatrix des reduzierten Systems ist. Wären die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems gleich den entsprechenden Eigenfrequenzen des Originalsystems, müsste $\Psi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a = [\mathbf{I}, \mathbf{0}]$ sein. Aber dies ist in der Mathematik unmöglich. Infolgedessen sind die durch die reduzierte Massen- und Steifigkeitsmatrizen berechneten Eigenfrequenzen nie

gleich den entsprechenden Eigenfrequenzen des Originalsystems im Fall der Formkontrolle. Bei der Guyanschen und Ironschen Reduktion werden die Trägheitskräfte nicht in Betracht gezogen, dagegen versucht IRS sie zu berücksichtigen, um die Reduktion zu verbessern. Wegen $\mathbf{x}_n = \mathbf{T}_s \mathbf{x}_a$ ist $\Phi'_{na} = \mathbf{T}_s \Psi_a$ eine gute Näherung für die Modalvektoren des originalen Systems. Anhand der Gleichung (c-28) und der Eigengleichung des kompletten Systems ist weiterhin

$$\mathbf{K} \Phi_n'' = \mathbf{F}'_n = \mathbf{M} \Phi_{na}' \bar{\Omega}^2 \quad (\text{c-39})$$

eine gute Näherung für die Trägheitskräfte. Hier werden die Eigenfrequenzen $\bar{\Omega}^2$ des reduzierten Systems als Näherungswert des kompletten Systems benutzt. Ein Ausdruck für die Trägheitskräfte wie in Gleichung (c-39) erlaubt uns, die Anpassung an die Verschiebungsvektorformen als

$$\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{F}_n \approx \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}_s \Psi_a \bar{\Omega}^2 = \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}_s \mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a \Psi_a$$

zu entwickeln. Dann wird die verbesserte Modalmatrix Φ_n^i des kompletten Systems

$$\Phi_n^i = \mathbf{T}_s \Psi_a + \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}_s \mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a \Psi_a = (\mathbf{T}_s + \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}_s \mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a) \Psi_a = \mathbf{T}_i \Psi_a \quad (\text{c-40})$$

wobei *i* für improved steht. Die Form der Gleichung (c-40) deutet an, dass die Transformation vom kompletten System zum reduzierten System gegeben ist durch

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_a \quad (\text{c-41})$$

Benutzt man die Gleichung (c-31) kann die Gleichung (c-40) in die Partitionsform

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} + \mathbf{K}_{dd}^{-1} [\mathbf{M}_{da} - \mathbf{M}_{dd} \mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da}] \mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ -\mathbf{t}_s + \mathbf{t}_i \end{bmatrix} \quad (\text{c-42})$$

umgeschrieben werden. Nun können die verbesserten reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen mit Gleichung (c-41), (1.2.2-2) und (1.2.2-3) folgendermaßen dargestellt werden

$$\mathbf{M}_a^i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{M} \mathbf{T}_i \quad (\text{c-43})$$

$$\mathbf{K}_a^i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{K} \mathbf{T}_i \quad (\text{c-44})$$

Die weggelassenen Trägheitseffekte sind in dieser Darstellung erfasst worden.

Aus der Sicht der Formkontrolle interessiert man sich nicht nur für die Gleichheit der Eigenfrequenz zwischen komplettem und reduziertem System, sondern vor allem für die Gleichheit der stationären Verstärkung, die in der Reduktionstechnik der Strukturdynamik nicht berücksichtigt wird. Die auf das System einwirkenden verteilten Kräfte \mathbf{F} können in vier Teile zerlegt werden, nämlich den räumlichen und zeitlichen Anteil sowie den Steuerungs- und Störungsanteil.

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_c \mathbf{u} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d$$

wobei \mathbf{B} und \mathbf{u} den räumlichen bzw. zeitlichen Anteil bezeichnen und die tiefgestellten „c“ und „d“ auf dem Steuerungs- bzw. Störungsanteil hinweisen. Das Element in \mathbf{B} wird null sein, wenn es keine direkte Verbindung mit Steuerungs- oder Störungskräften gibt. Weiterhin können die räumlichen Steuerungs- und Störungsanteile zum aktiven „a“ und weggelassenen „d“ partitioniert werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ca} \\ \mathbf{B}_{cd} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{da} \\ \mathbf{B}_{dd} \end{bmatrix} \mathbf{u}_d$$

Nun kann die stationäre Verstärkung des kompletten Systems wie folgend dargestellt werden

$$\mathbf{G}_c(\omega = 0) + \mathbf{G}_d(\omega = 0) = \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_d$$

wobei \mathbf{C} die Messmatrix ist. Nach dem Ausführen der Inversion von \mathbf{K} in partitionierter Form, erhält man

$$\mathbf{G}_c + \mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a^{s-1} & -\mathbf{K}_a^{s-1} \mathbf{t}_s^T \\ -\mathbf{t}_s \mathbf{K}_a^{s-1} & \mathbf{K}_{dd}^{-1} + \mathbf{t}_s \mathbf{K}_a^{s-1} \mathbf{t}_s^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ca} \\ \mathbf{B}_{cd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{da} \\ \mathbf{B}_{dd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-45a})$$

wobei \mathbf{K}_a^s das reduzierte System von der Guyanschen und Ironschen Reduktion ist. \mathbf{t}_s ist in Gleichung (c-32) definiert. \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_d entsprechen den Messmatrizen des „aktiven“ bzw. „weggelassenen“ Teils. Wenn die Verschiebungsvariable keine direkte Verbindung mit dem Sensor gibt, wird das entsprechende Element in \mathbf{C} Null sein. Man kann auch die Gleichung (c-45a) in der Modalform darstellen:

$$\mathbf{G}_c + \mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ma} & \mathbf{C}_{md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_a^{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_d^{-2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mca} \\ \mathbf{B}_{mcd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mda} \\ \mathbf{B}_{mdd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-45b})$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_a^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_d^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{aa}^T & \boldsymbol{\Phi}_{da}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{ad}^T & \boldsymbol{\Phi}_{dd}^T \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{aa} & \boldsymbol{\Phi}_{ad} \\ \boldsymbol{\Phi}_{da} & \boldsymbol{\Phi}_{dd} \end{bmatrix} \quad (\text{c-45c})$$

$$\mathbf{C}_{ma} = \mathbf{C}_a \boldsymbol{\Phi}_{aa} + \mathbf{C}_d \boldsymbol{\Phi}_{da} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{md} = \mathbf{C}_a \boldsymbol{\Phi}_{ad} + \mathbf{C}_d \boldsymbol{\Phi}_{dd} \quad (\text{c-45d})$$

$$\mathbf{B}_{mxa} = \boldsymbol{\Phi}_{aa}^T \mathbf{B}_{xa} + \boldsymbol{\Phi}_{da}^T \mathbf{B}_{xd} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{mxd} = \boldsymbol{\Phi}_{ad}^T \mathbf{B}_{xa} + \boldsymbol{\Phi}_{dd}^T \mathbf{B}_{xd} \quad (\text{c-45e})$$

Die stationäre Verstärkung des reduzierten Systems kann allgemein dargestellt werden als

$$\mathbf{G}_{ac}^x + \mathbf{G}_{ad}^x = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \mathbf{T}_x \mathbf{K}_a^{x-1} \mathbf{T}_x^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ca} \\ \mathbf{B}_{cd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{da} \\ \mathbf{B}_{dd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-46})$$

wobei „x“ auf die verschiedenen Reduktionstechniken hinweist. Nun wird geprüft, ob die Gleichung (c-46) gleich der Gleichung (c-45a) oder (c-45b) ist, oder unter welche Bedingungen dies sein kann.

Für die Guyansche und Ironsche Reduktion ist \mathbf{T}_s in Gleichung (c-32) definiert und die Gleichung (c-46) bekommt die Form

$$[\mathbf{C}_a \quad \mathbf{C}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a^{s^{-1}} & -\mathbf{K}_a^{s^{-1}} \mathbf{t}_s^T \\ -\mathbf{t}_s \mathbf{K}_a^{s^{-1}} & \mathbf{t}_s \mathbf{K}_a^{s^{-1}} \mathbf{t}_s^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ca} \\ \mathbf{B}_{cd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{da} \\ \mathbf{B}_{dd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-47})$$

Der Vergleich der Gleichung (c-47) mit der Gleichung (c-45a) deutet darauf hin, dass die stationäre Genauigkeit nur dann erfüllt wird, wenn \mathbf{B}_{cd} und \mathbf{B}_{dd} gleich Null sind. D. h. nur die Verschiebungsvariablen, die keine direkte Verbindung mit Steuerungs- und Störungskräften haben, können weggelassen werden.

Für das verbesserte Reduktionssystem ist \mathbf{T}_i in Gleichung (c-42) definiert und \mathbf{K}_a^i kann durch $\mathbf{K}_a^i = \mathbf{K}_a^s + \mathbf{t}_i^T \mathbf{K}_{dd} \mathbf{t}_i$ dargestellt werden. Damit wird Gleichung (c-46) zu

$$[\mathbf{C}_a \quad \mathbf{C}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a^{i^{-1}} & \mathbf{K}_a^{i^{-1}} (-\mathbf{t}_s^T + \mathbf{t}_i^T) \\ (-\mathbf{t}_s + \mathbf{t}_i) \mathbf{K}_a^{i^{-1}} & (-\mathbf{t}_s + \mathbf{t}_i) \mathbf{K}_a^{i^{-1}} (-\mathbf{t}_s^T + \mathbf{t}_i^T) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ca} \\ \mathbf{B}_{cd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{da} \\ \mathbf{B}_{dd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-48})$$

Es ist klar, dass die stationäre Genauigkeit nur dann erfüllt wird, wenn

1. $\mathbf{B}_{cd} = 0$, $\mathbf{B}_{dd} = 0$ und $\mathbf{C}_d = 0$ ist und
2. $\mathbf{t}_i^T \mathbf{K}_{dd} \mathbf{t}_i$ im Vergleich mit \mathbf{K}_a^s ignoriert werden kann.

Die Definition von \mathbf{T}_{SEREP} wird bei SEREP für eine Variation der Gleichung (c-38), $\mathbf{T}_{SEREP} = \Phi \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1}$, benutzt. Dann wird die Gleichung (c-46) zu

$$[\mathbf{C}_{ma} \quad \mathbf{C}_{md}] \Phi_a^T (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} (\mathbf{T}_{SEREP}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{SEREP})^{-1} (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mca} \\ \mathbf{B}_{mcd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mda} \\ \mathbf{B}_{mdd} \end{bmatrix} \right)$$

Durch einigen Umformungen erhält man

$$[\mathbf{C}_{ma} \quad \mathbf{C}_{md}] \begin{bmatrix} \Omega_a^{-2} (\mathbf{I} + \mathbf{t})^{-1} & \Omega_a^{-2} (\mathbf{I} + \mathbf{t})^{-1} \Phi_{aa}^{-1} \Phi_{ad} \\ \Phi_{ad}^T \Phi_{aa}^{-T} \Omega_a^{-2} (\mathbf{I} + \mathbf{t})^{-1} & \Phi_{ad}^T \Phi_{aa}^{-T} \Omega_a^{-2} (\mathbf{I} + \mathbf{t})^{-1} \Phi_{aa}^{-1} \Phi_{ad} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mca} \\ \mathbf{B}_{mcd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mda} \\ \mathbf{B}_{mdd} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{c-49})$$

wobei $\mathbf{t} = \Phi_{aa}^{-1} \Phi_{ad} \Omega_a^2 \Phi_{ad}^T \Phi_{aa}^{-T} \Omega_a^{-2}$ ist. Der Vergleich mit der Gleichung (c-45b) deutet darauf hin, dass die stationäre Genauigkeit nur dann erfüllt wird, wenn

1. $\mathbf{B}_{mcd} = 0$, $\mathbf{B}_{mdd} = 0$ und $\mathbf{C}_{md} = 0$ ist und
2. \mathbf{t} im Vergleich mit \mathbf{I} ignoriert werden kann.

Weiterhin wird durch den Vergleich mit der Gleichung (c-45d) und (c-45e) gezeigt, dass die Erfüllung der Bedingung 1 kaum möglich ist.

C.10 LQG-Reglerentwurf

Die Methode des LQG (H^2)-Reglerentwurfs wurde am Ende 50iger und Anfang 60iger Jahren des letzten Jahrhunderts entwickelt. LQG besteht aus optimaler Regelung [BEL 57][BER

61][DRE 60] und optimaler Filterung [KAL 60] [KAL 61]. Ursprünglich ist die Aufgabe der LQG wie folgt formuliert:

Gegeben ist ein lineares dynamisches System mit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}\end{aligned}\tag{c-50a}$$

und ein quadratisches Gütekriterium

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt\tag{c-50b}$$

Das System und die Messwerte sind durch das Gaußsche Systemrauschen ($\tilde{\mathbf{w}}$) und Messrauschen ($\tilde{\mathbf{v}}$) beeinflusst. Die Kovarianzmatrizen des Systemrauschens und des Messrauschens sind \mathbf{W} und \mathbf{V} . Gesucht ist ein Regler $\mathbf{K}(s)$ mit,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s) \mathbf{y}\tag{c-50c}$$

so dass das Gütekriterium minimiert wird und die Zustandsvariablen den Wert Null erhalten. Die Lösung von \mathbf{K} ist ein sehr bekanntes dynamisches System, das durch Zustandsraumdarstellung repräsentiert werden kann:

$$\mathbf{K} : (\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x - \mathbf{K}_f \mathbf{C}, \mathbf{K}_f, -\mathbf{K}_x)\tag{c-51a}$$

wobei

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_c \text{ und } \mathbf{K}_f = \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1}\tag{c-51b}$$

\mathbf{P}_c und \mathbf{P}_o werden durch folgende Riccati-Gleichungen bestimmt

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{A} - \mathbf{P}_c \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_c + \mathbf{Q} = \mathbf{0}\tag{c-51c}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_o \mathbf{A}^T - \mathbf{P}_o \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_o + \mathbf{W} = \mathbf{0}\tag{c-51d}$$

Es ist deutlich, dass die Ordnung des Reglers gleich der Ordnung des zu regelnden Systems ist. Die Lösungsschwierigkeit hängt von der Ordnung des zu regelnden Systems ab. Ein Nachteil der Darstellung in den Gleichungen (c-51a bis c-51d) ist das Einbeziehen der Rauschcharakteristiken. Genaues Wissen der Rauschcharakteristiken ist nicht so einfach in der Praxis und was soll man tun, wenn die Systemstörung nicht stochastisch ist? Deshalb hat man den LQG weiterentwickelt und in [GRE 95] wird eine allgemeine Darstellung von LQG gegeben.

In der allgemeinen Darstellung von LQG sind folgende Systeme gegeben:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}\end{aligned}\tag{c-52a}$$

Gesucht ist ein Regler $\mathbf{K}(s)$ mit Gleichung (c-50c), so dass das Gütekriterium

$$\|\mathbf{R}_{zw}(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \mathbf{z}^T \mathbf{z} dt \quad (\text{c-52b})$$

minimiert wird und nach wie vor die Zustandsvariablen auf Null gehalten werden. Dabei ist \mathbf{z} das Objekt. $\mathbf{R}_{zw}(s)$ ist die Übertragungsfunktion von \mathbf{w} zu \mathbf{z} . \mathbf{w} ist die sogenannte exogene Eingabe. Man kann, z. B., alle Systemstörungen, Messrauschen und Sollwerte in \mathbf{w} zusammenfassen. Die Matrizen \mathbf{B}_1 , \mathbf{D}_{21} und \mathbf{D}_{11} sind die entsprechenden Einflussmatrizen der Zustandsvariablen, Messwerte und des Regelobjekts. Die Matrizen \mathbf{C}_1 und \mathbf{D}_{12} entsprechen den Gewichtsmatrizen bei Vergleich mit Gleichung (c-50b). Systemstörungen und Messrauschen sind nicht nur auf das Gaußsche Rauschen beschränkt. Wegen der Gleichung (c-52b) wird diese allgemeine Darstellung als \mathbf{H}_2 -Regler bezeichnet.

Eine wichtige Bedingung für die Lösung des \mathbf{H}^2 -Reglers ist \mathbf{D}_{11} gleich Null, d.h. die exogene Eingabe darf das Regelobjekt nicht beeinflussen. Die Lösung von \mathbf{K} ist, ähnlich wie in Gleichung (c-51a—c-51d), die folgende:

$$\mathbf{K} : (\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_x - \mathbf{K}_f \mathbf{C}_2 + \mathbf{K}_f \mathbf{D}_{22} \mathbf{K}_x, \mathbf{K}_f, -\mathbf{K}_x) \quad (\text{c-53a})$$

wobei

$$\mathbf{K}_x = (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_c) \text{ und } \mathbf{K}_f = (\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T + \mathbf{P}_o \mathbf{C}_2^T) (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \quad (\text{c-53b})$$

\mathbf{P}_c und \mathbf{P}_o werden nach wie vor durch die Riccati-Gleichungen bestimmt

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{P}_c \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P}_c + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (\text{c-53c})$$

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}_o + \mathbf{P}_o \bar{\mathbf{A}}^T - \mathbf{P}_o \bar{\mathbf{C}}_2^T \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{P}_o + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{0} \quad (\text{c-53d})$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1, \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T = \mathbf{B}_2 (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{B}_2^T, \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{D}_{12}^T) \mathbf{C}_1 \quad (\text{c-53e})$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{C}_2, \bar{\mathbf{C}}_2^T \bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_2^T (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \mathbf{C}_2, \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{B}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \mathbf{D}_{21}^T) \mathbf{B}_1^T \quad (\text{c-53f})$$

Bei Vergleich der Gleichungen (c-53a)—(c-53f) mit den Gleichungen (c-51a)—(c-51d) ergibt sich, dass die Größe $\mathbf{C}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{D}_{12}^T) \mathbf{C}_1$ und die Größe $(\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1}$ in der Gleichung (c-53e) quasi der Gewichtsmatrix \mathbf{Q} bzw. \mathbf{R} in der Gleichung (c-51c) entsprechen. Die Größe $\mathbf{B}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \mathbf{D}_{21}^T) \mathbf{B}_1^T$ und die Größe $(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1}$ in der Gleichung (c-53f) entsprechen der Kovarianzmatrix \mathbf{W} bzw. \mathbf{V} in der Gleichung (c-51d). Man sollte beachten, dass sowohl die Gewichtsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} als auch die Kovarianzmatrix \mathbf{W} und \mathbf{V} voneinander unabhängig sind. Dagegen sind die Größe $\mathbf{C}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{D}_{12}^T) \mathbf{C}_1$ und die Größe $(\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1}$ bzw. die Größe $\mathbf{B}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1} \mathbf{D}_{21}^T) \mathbf{B}_1^T$ und die Größe $(\mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T)^{-1}$ nicht mehr voneinander unabhängig.

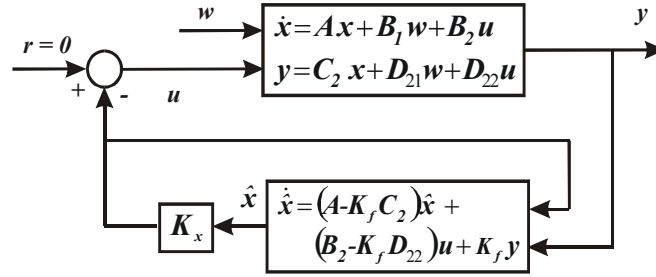


Bild c-5: Die Skizze des LQG-Reglerkonzepts.

Das Bild c-5 zeigt die Skizze des LQG-Reglerkonzepts. Dieses Reglerkonzept kann nicht direkt bei der Formkontrolle verwendet werden. Eine wichtige Funktion der Formkontrolle ist die gezielte Formänderung, d.h. die Sollwerte dürfen nicht ständig Null bleiben. In der Praxis interessiert man sich nicht vor allem für die Zustandsvariablen x , sondern für dem Unterschied zwischen den Sollwerte r und den gemessenen Variablen y . Diese Differenz, $(r - y)$, soll zu Null werden. Anhand dieser Vorstellungen kann man die Zielvorgabe so aufstellen.

$$z = \tilde{Q}(r - y) + \tilde{R}u \quad (\text{c-54a})$$

Das zu regelnde System ist also wie folgt gegeben durch:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_d u_d + B_c u \\ y &= Cx + D_u u + D_{\tilde{v}} \tilde{v} \end{aligned} \quad (\text{c-54b})$$

wobei \tilde{v} das Messrauschen ist und u_d die Systemstörungen. Setzt man \tilde{v} , u_d und r als eine exogene Eingabe $w^T = [u_d^T, \tilde{v}^T, r^T]$ zusammen, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \underbrace{[B_d, 0, 0]}_{B_1} w + \underbrace{B_c}_{B_2} u \\ z &= \underbrace{-QC}_C x + \underbrace{[0, -\tilde{Q}D_{\tilde{v}}, \tilde{Q}]}_{D_{11}} w + \underbrace{[\tilde{R} - \tilde{Q}D_u]}_{D_{12}} u \\ e &= \underbrace{[-C]}_{C_2} x + \underbrace{[0, -D_{\tilde{v}}, I]}_{D_{21}} w + \underbrace{[-D_u]}_{D_{22}} u \end{aligned} \quad (\text{c-55})$$

wobei $e = (r - y)$ die Differenz zwischen Sollwert und Istwert ist. Es ist klar, dass D_{11} in Gleichung (c-55) nicht mehr gleich Null ist. Die Lösungen von Gleichungen (c-53a)—(c-53f) können hier nicht verwendet werden.

Es seien \bar{u} die Steuerkräfte, durch die die stationären Zustandsgrößen x und die Messgrößen y \bar{x} bzw. $\bar{y} = r$ erreichen können, und weiterhin unter Berücksichtigung der Gleichung (c-54b) unter der Annahme, dass keine Systemstörung und kein Messrauschen einwirken, erhält man folgende Beziehungen zwischen \bar{x} , \bar{u} und r :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -A^{-1} B_c (D_u - CA^{-1} B_c)^+ r \\ \bar{u} &= (D_u - CA^{-1} B_c)^+ r \end{aligned} \quad (\text{c-56})$$

Man sollte beachten, dass das hochgesetzte + eine allgemeine Inversion der Klammer bedeutet, falls die Anzahl der Eingaben und der Ausgaben des Systems nicht gleich sind. Weiterhin sei

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \text{ und } \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{r} \quad (\text{c-57})$$

bekommt man die Gleichung (c-54b) zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d + \mathbf{B}_c \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_u \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_{\tilde{v}} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{r} \end{aligned}$$

Fügt man die Integratoren für die Ausgabefehler $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$ als zusätzliche Zustandsvariablen ein und beschreibt das Regelobjekt nach wie vor in der Form $\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{12} \tilde{\mathbf{u}}$, bekommt man die allgemeine Darstellung von LQG für Formkontrolle:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}_{\tilde{v}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ -\mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}_2} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{12} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}_2} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\tilde{v}} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{21}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{22}} \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (\text{c-58})$$

Nun ist \mathbf{D}_{11} gleich Null und die Lösungen der Gleichungen (c-53a)—(c-53f) können verwendet werden. Die optimalen Steuerkräfte für Gleichung (c-58) sind

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_x \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e \mathbf{e} + \mathbf{K}_x \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}_x \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e \mathbf{e} + \mathbf{K}_r \mathbf{r} \quad (\text{c-59a})$$

wobei

$$[\mathbf{K}_x, \mathbf{K}_e] = (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P}_c) \text{ und } \mathbf{K}_r = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_x \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_c) (\mathbf{D}_u - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_c)^+ \quad (\text{c-59b})$$

\mathbf{P}_c in der Gleichung (c-59b) wird durch die Riccati-Gleichung (c-53c) bestimmt und die Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ in der Gleichung (c-53c) werden durch $\hat{\mathbf{B}}_2 (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \hat{\mathbf{B}}_2^T$ und $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}_2 (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1$ ersetzt. Die geschätzte Zustandsvariable $\hat{\mathbf{x}}$ kann durch Gleichungen (c-53b, 53d, 53f) berechnet werden. Weil die Integration aus dem Ausgabefehler bekannt ist, genügt die Berechnung der geschätzten Zustandsvariable $\hat{\mathbf{x}}$. Ersetzt man die entsprechenden Matrizen in den Gleichungen (c-53b, 53d, 53f) durch die in der Gleichung (c-58) und teilt man

\mathbf{P}_o als $\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_o^{11} & \mathbf{P}_o^{12} \\ \mathbf{P}_o^{21} & \mathbf{P}_o^{22} \end{bmatrix}$ auf, erhält man

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}_c - \mathbf{K}_f \mathbf{D}_u) \mathbf{u} + \mathbf{K}_f \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad (\text{c-59c})$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_o^{11} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \text{ und } \mathbf{A} \mathbf{P}_o^{11} + \mathbf{P}_o^{11} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}_o^{11} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_o^{11} + \mathbf{B}_d \mathbf{B}_d^T = \mathbf{0} \quad (\text{c-59d})$$

wobei $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_{\tilde{v}} \mathbf{D}_{\tilde{v}}^T)$ ist. Das Bild c-6 zeigt dieses Konzept.

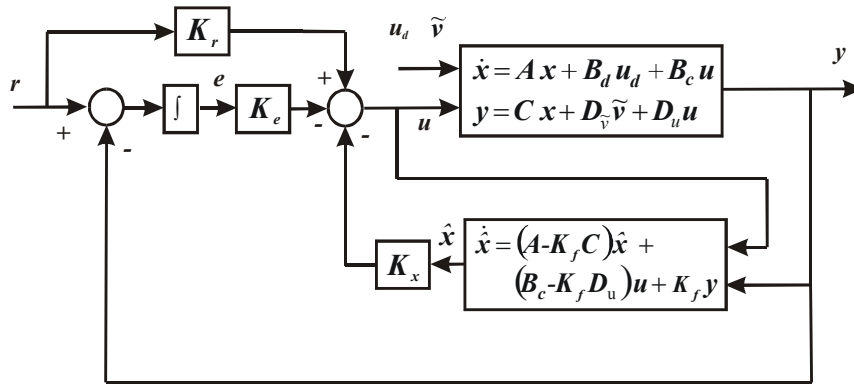


Bild c-6: Die Skizze des Konzepts LQG mit Integratoren

C.11 Der H^∞ -Reglerentwurf und die μ -Synthese

Es gibt zwei Kategorien der Darstellung der Unsicherheit (uncertainty) eines Modells: die parametrische Unsicherheit und die konzentrierte Unsicherheit [SKO 96]. Die parametrische Unsicherheit ist geeignet für das durch physikalische Prinzipien gebildete Modell. Ein solches Modell ist immer durch differentiale oder partialdifferentiale Gleichungen dargestellt. Die Koeffizienten oder Koeffizientenmatrizen sind unmittelbar mit der physikalischen Größe oder der Konstanten verbunden. Die Unsicherheit von solchen physikalischen Größen oder Konstanten verursacht die Unsicherheit des gebildeten Modells.

Sei $\mathbf{P} (n \times m)$ eine Koeffizientenmatrix eines Modells und von p physikalischen Größen x_1, x_2, \dots, x_p abhängig. Jede $x_i, i = 1, \dots, p$, wird von \underline{x}_i bis \bar{x}_i variieren. Dann kann x_i durch $x_i = x_{0_i}(1 + r_{x_i} \delta_{x_i})$ dargestellt werden, wobei $x_{0_i} = (\underline{x}_i + \bar{x}_i) / 2, r_{x_i} = (\bar{x}_i - \underline{x}_i) / x_{0_i}$ und $\delta_{x_i} \in [-1, 1]$. x_{0_i} heißt der nominale Wert von x_i . r_{x_i} ist die maximale Änderung von x_i in Prozent. Bei Verwendung der Taylorentwicklung um den nominalen Wert von x_i wird \mathbf{P} zu

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^p \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} \right|_{x_1=x_{0_1}, \dots, x_p=x_{0_p}} (x_i - x_{0_i}) = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{P}(x_{0_1}, \dots, x_{0_p})}{\partial x_i} x_{0_i} r_{x_i} \delta_{x_i}$$

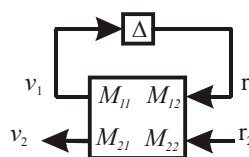
Definiert man $\mathbf{R}_p^{x_i} = \frac{\partial \mathbf{P}(x_{0_1}, \dots, x_{0_p})}{\partial x_i} x_{0_i} r_{x_i}$ und $\mathbf{E}_p^T = \underbrace{[\mathbf{I}_{m \times m}, \dots, \mathbf{I}_{m \times m}]_p}$, erhält man

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + [\mathbf{R}_p^{x_1}, \dots, \mathbf{R}_p^{x_p}] \text{diag}([\delta_{x_1} \mathbf{I}, \dots, \delta_{x_p} \mathbf{I}]) \mathbf{E}_p = \mathbf{P}_0 + \mathbf{R}_p \Delta_p \mathbf{E}_p \tag{c-60}$$

Die Dimension von \mathbf{R}_p, Δ_p und \mathbf{E}_p ist $n \times mp, mp \times mp$ bzw. $mp \times m$.

Nun betrachtet man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= M_{11} r_1 + M_{12} r_2 \\ v_2 &= M_{21} r_1 + M_{22} r_2 \\ r_i &= \Delta v_i \end{aligned}$$



Die Beziehung zwischen v_2 und r_2 ist $v_2 = (M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12}) r_2$. Der in Klammern

stehende Term kann auch als $F_U(M, \Delta)$ geschrieben werden und heißt oben geschlossene Linear Fractional Transformation (LFT) [BAL 01]. Bei Vergleich von $F_U(M, \Delta)$ mit Gleichung (c-60) ist deutlich, dass $M_{22} = P_0$, $M_{21} = R_p$, $M_{11} = \mathbf{0}$, und $M_{12} = E_p$ sind. Analog zum $F_U(M, \Delta)$ kann man auch den Unterteil mit Δ schließen. Man bekommt die sogenannte unten geschlossene lineare Bruchteiltransformation, $F_L(M, \Delta) = M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}$. Damit kann man sowohl mit $F_U(M, \Delta)$ als auch mit $F_L(M, \Delta)$ die Unsicherheit einer Matrix darstellen. (siehe Bild c-7)

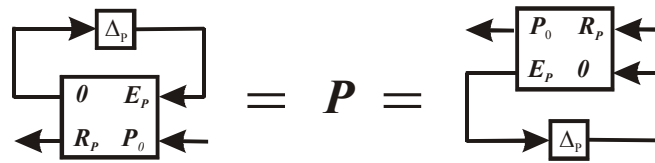


Bild c-7: Die Darstellung der Ungenauigkeit einer Matrix durch LFT

Da $P^{-1} = (P_0 + R_p\Delta_p E_p)^{-1} = P_0^{-1} - P_0^{-1}R_p\Delta_p(I + E_p P_0^{-1}R_p\Delta_p)^{-1}E_p P_0^{-1}$, erhält man die Darstellung der Unsicherheit von P^{-1} zu

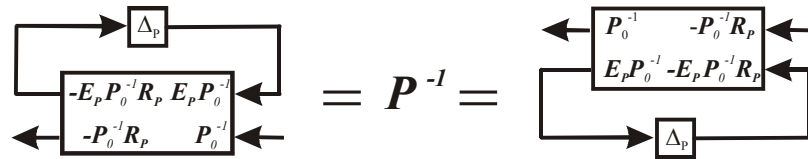


Bild c-8: Die Darstellung der Ungenauigkeit P^{-1} durch LFT

Für ein mechanisches System

$$M \ddot{x} + D \dot{x} + K x = F_c u_c + F_d u_d$$

$$y = C x$$

besteht die Unsicherheit aus der Unsicherheit von Massen-, Dämpfen-, Steifigkeits-, Steuerungs-, Störungs- und Messmatrix. Die Unsicherheit der Dichte ρ ist die Hauptursache der Unsicherheit der Massenmatrix. Anhand der Gleichung (c-60) und der Definition von M in der FEM (siehe B.1) ergibt sich

$$M = M_0 + [R_M^{\rho 1}, \dots, R_M^{\rho r}] \text{diag}([\delta_{\rho 1} I, \dots, \delta_{\rho r} I]) E_M = M_0 + R_M \Delta_M E_M$$

wobei r die Anzahl der verschiedenen Materialien im System ist.

Die Unsicherheit der Steifigkeitsmatrix hängt von den Materialien ab. Für homogene Materialien, z. B. Metal, ist die Unsicherheit des Elastizitätsmoduls E , und der Querkontraktionszahl ν , die Hauptursache. Es gibt 5 unabhängige Elastizitäts-, 3 Piezoelektrizitäts- und 2 Dielektrizitätsparameter für die Piezomaterialien, und 6 Elastizitätsparameter für die Verbundwerkstoffe, wenn ein 3D-Modell verwendet wird [BER 98] [ALT 96]. Gibt es s unabhängige materielle Parameter im System, ergibt sich

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + [\mathbf{R}_K^{c_l}, \dots, \mathbf{R}_K^{c_s}] \text{diag}([\delta_{c_l} \mathbf{I}, \dots, \delta_{c_s} \mathbf{I}]) \mathbf{E}_K = \mathbf{K}_0 + \mathbf{R}_K \Delta_K \mathbf{E}_K$$

Häufig wird die Dämpfungsmatrix durch die lineare Kombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix dargestellt, $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Die Unsicherheit der Dämpfungsmatrix ist damit auch eine lineare Kombination aus der Unsicherheit der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix und der Unsicherheit beider Koeffizienten.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + [\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{R}_\beta] \text{diag}([\delta_\alpha \mathbf{I}, \delta_\beta \mathbf{I}]) \mathbf{E}_{\alpha\beta} + \alpha_0 \mathbf{R}_M \Delta_M \mathbf{E}_M + \beta_0 \mathbf{R}_K \Delta_K \mathbf{E}_K = \mathbf{D}_0 + \mathbf{R}_D \Delta_D \mathbf{E}_D$$

wobei $\mathbf{R}_\alpha = \alpha_0 \mathbf{M}_0 \mathbf{r}_\alpha$ und $\mathbf{R}_\beta = \beta_0 \mathbf{K}_0 \mathbf{r}_\beta$.

Die Steuerungsmatrix beschreibt den Einfluss der Aktoren auf das System. Wenn der i -ten Knoten eine Kraft oder ein Moment vom j -ten Aktor entgegennimmt, wird $F_c(i,j)$ nicht gleich Null. Die Größe dieses Werts hängt von der Art des Aktors ab. Die Unsicherheit dieses Werts bestimmt die Unsicherheit der Steuerungsmatrix. Für Piezoaktoren bestimmen 3 piezoelektrische und 2 dielektrische Konstanten die Unsicherheit, wenn man ein 3D Modell für Piezoelemente verwendet. Es ergibt sich

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{c0} + [\mathbf{R}_{F_c}^l, \dots, \mathbf{R}_{F_c}^s] \text{diag}([\delta_1 \mathbf{I}, \dots, \delta_5 \mathbf{I}]) \mathbf{E}_{F_c} = \mathbf{F}_{c0} + \mathbf{R}_{F_c} \Delta_{F_c} \mathbf{E}_{F_c}$$

Wenn die Störungsmatrix nur den Einfluss der äußeren Kräfte oder des äußeren Momentes beschreibt, gibt es keine Unsicherheit für \mathbf{F}_d . Aber wenn der Einfluss von Temperaturen auch berücksichtigt wird, wird die Unsicherheit der Temperaturkoeffizienten des Materials die Unsicherheit der Störungsmatrix beeinflussen.

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{d0} + [\mathbf{R}_{F_d}^{tl}, \dots, \mathbf{R}_{F_d}^{tr}] \text{diag}([\delta_{tl} \mathbf{I}, \dots, \delta_{tr} \mathbf{I}]) \mathbf{E}_{F_d} = \mathbf{F}_{d0} + \mathbf{R}_{F_d} \Delta_{F_d} \mathbf{E}_{F_d}$$

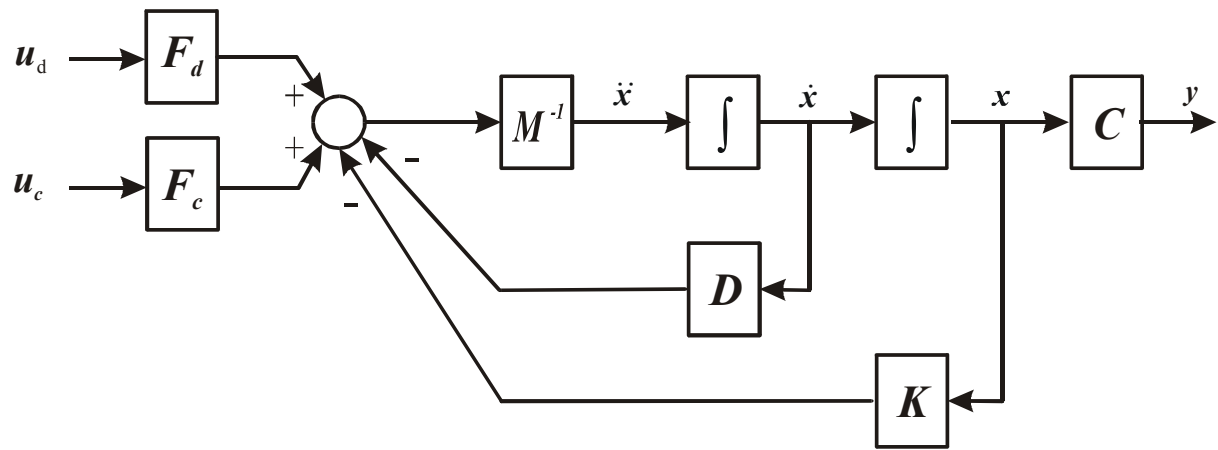
Die Unsicherheit der Messmatrix hängt von der Art verwendeter Sensoren ab. Für den Dehnungsmessstreifen (DMS) ist die Unsicherheit von der Effektenlänge, der Breite des einzelnen Streifens, der Empfindlichkeit und dem Verstärker des DMSs verantwortlich (siehe B.3). Damit ist

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + [\mathbf{R}_C^k, \mathbf{R}_C^l, \mathbf{R}_C^b] \text{diag}(\delta_k \mathbf{I}, \delta_l \mathbf{I}, \delta_b \mathbf{I}) \mathbf{E}_C = \mathbf{C}_0 + \mathbf{R}_C \Delta_C \mathbf{E}_C$$

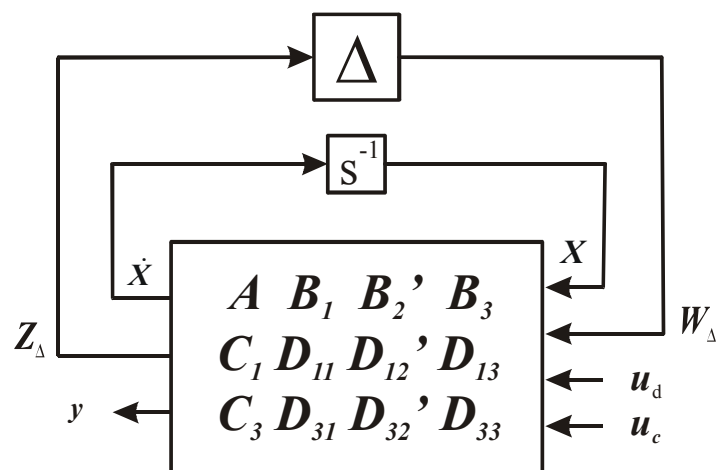
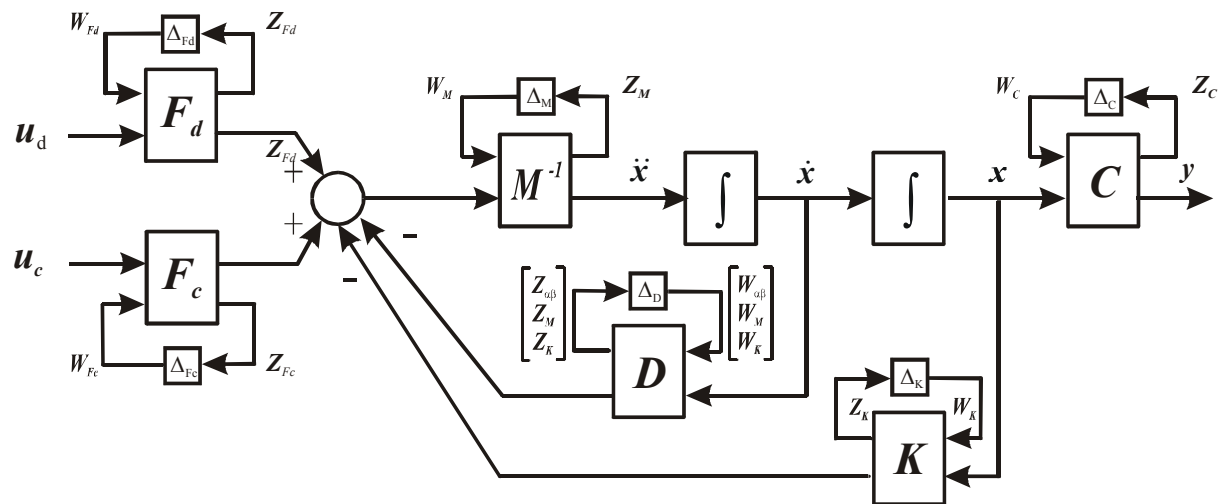
Ersetzt man alle Unsicherheitsmatrizen durch, z. B., die oben geschlossene LFT, betrachtet man die Eingänge und Ausgänge jedes Δ als die neuen Ausgänge bzw. Eingänge der Matrix und fasst alle Eingänge und Ausgänge zusammen, erhält man das Modell, in das die Unsicherheit eingebunden wird. Bild c-9 zeigt diesen Vorgang.

Im folgenden wird die Struktur in Bild 1.1 als Beispiel verwendet, um die Inhalte von \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} in Bild c-9 zu zeigen. Es wird vorausgesetzt, dass die DMS als Sensoren benutzt werden und das Material der Hauptstruktur der Verbundenwerkstoff ist. Sei weiterhin $\mathbf{X}^T = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T]$,

$\mathbf{Z}_\Delta^T = [\mathbf{Z}_M^T, \mathbf{Z}_K^T, \mathbf{Z}_{\alpha\beta}^T, \mathbf{Z}_{F_d}^T, \mathbf{Z}_{F_c}^T, \mathbf{Z}_C^T]$ und $\mathbf{W}_\Delta^T = [\mathbf{W}_M^T, \mathbf{W}_K^T, \mathbf{W}_{\alpha\beta}^T, \mathbf{W}_{F_d}^T, \mathbf{W}_{F_c}^T, \mathbf{W}_C^T]$, dann werden



a) Das originale Regelungssystem



b) Berücksichtigung der Systemunsicherheit

Bild c-9: Der Vorgang der Zusammenstellung von Matrizenunsicherheit zum Systemunsicherheit.

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_I &= \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}_0 - \mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{E}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_C & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'_{I2} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{F}_{d0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{Fd} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{I3} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{F}_{c0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{Fc} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_3 &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_0], \quad \mathbf{D}_{3I} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{R}_C], \quad \mathbf{D}'_{32} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_{33} = \mathbf{0} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{F}_{d0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{F}_{c0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_I &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_0^{-1} (1 + \alpha_0) \mathbf{R}_M - \mathbf{M}_0^{-1} (1 + \beta_0) \mathbf{R}_K - \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{\alpha\beta} & \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{Fd} & \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{Fc} \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{II} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_M - \mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_K - \mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{\alpha\beta} & -\mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{Fd} & -\mathbf{E}_M \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{R}_{Fc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{c-61}$$

Wenn die Dimension von \mathbf{M} , \mathbf{K} und \mathbf{D} $n \times n$, \mathbf{F}_d $n \times q$, \mathbf{F}_c $n \times p$ und \mathbf{C} $m \times n$ sind, ist die Dimension von \mathbf{R}_M $n \times 2n$, \mathbf{R}_K $n \times 16n$, $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ $n \times 2n$, \mathbf{R}_{Fd} $n \times 2q$, \mathbf{R}_{Fc} $n \times 5p$ und \mathbf{R}_C $m \times 3n$. Damit sind die zusätzlichen Aus- und Eingänge für die Unsicherheit \mathbf{Z}_Δ bzw. \mathbf{W}_Δ ein Vektor mit der Dimension $(23n+5p+2q) \times 1$ und Δ eine $(23n+5p+2q) \times (23n+5p+2q)$ reale blockdiagonale Matrix.

Die parametrische Unsicherheit hat einen Vorteil: die Ordnung oder der Freiheitsgrad des mit der Unsicherheit eingebundenen Modells sind gleich dem des nominalen Modells. Aber man muss in Kauf nehmen, dass die Anzahl der Ein- und Ausgänge sich dramatisch zulegt und die Modellreduktion kann die Ein- und Ausgänge nicht reduzieren.

Die konzentrierte Unsicherheit ist geeignet für das durch Experimente gebildete Modell, z.B., durch n mal Experimente werden n verschiedene Modelle, $\mathbf{G}_1(j\omega)$, $\mathbf{G}_2(j\omega)$, ..., $\mathbf{G}_n(j\omega)$, gebildet. Wenn der Mittelwert von $\mathbf{G}_1(j\omega)$, $\mathbf{G}_2(j\omega)$, ..., $\mathbf{G}_n(j\omega)$ als $\mathbf{G}_0(j\omega)$ bezeichnet wird, kann das mit der Unsicherheit eingebundene Modell durch

$$\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{G}_0(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{w}(j\omega)\Delta(j\omega)) \tag{c-62}$$

mit $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1$ und $\|\mathbf{G}_0^{-1}(j\omega)\mathbf{G}(j\omega) - \mathbf{I}\|_\infty \leq \|\mathbf{w}(j\omega)\|_\infty$ dargestellt werden. Definiert man eine skalare Gewichtsfunktion $w(j\omega)$ mit $\|\mathbf{w}_i(j\omega)\|_\infty \leq \|w(j\omega)\|_\infty$ für alle i und j , kann Gleichung (c-62) und damit $\Delta(j\omega)$ auch als

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(j\omega) &= \mathbf{G}_0(j\omega)(\mathbf{I} + w(j\omega)\Delta(j\omega)) \\ \Delta(j\omega) &= \text{diag}(\delta_1(j\omega), \dots, \delta_p(j\omega)) \end{aligned} \tag{c-63}$$

dargestellt werden [STE 91]. Die skalare Gewichtsfunktion $w(j\omega)$ kann folgende Form annehmen, [SKO 96]

$$w(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau/r_\infty)s + 1} \tag{c-64}$$

wobei r_0 die relative Unsicherheit im stationären Zustand ist. $1/\tau$ entspricht ungefähr der Frequenz, wo die relative Unsicherheit 100% erreicht, und r_∞ ist die relative Unsicherheit bei hohen Frequenzen. Es sei

$$\mathbf{G} = (\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{D}_g) \text{ und } \mathbf{w} = (\mathbf{A}_w, \mathbf{B}_w, \mathbf{C}_w, \mathbf{D}_w),$$

dann wird die Zustandsdarstellung des mit der Unsicherheit eingebundenen Modells \mathbf{G} zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_w \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} \mathbf{W}_\Delta + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_g \\ \mathbf{B}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_3} \mathbf{u} \\ \mathbf{z}_\Delta &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_w \\ \mathbf{C}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{11}} \mathbf{W}_\Delta + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{13}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_w \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{31} \\ \mathbf{D}_{31} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{31}} \mathbf{W}_\Delta + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{33} \\ \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{33}} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{c-65}$$

Bild c-10 zeigt dieses Konzept.

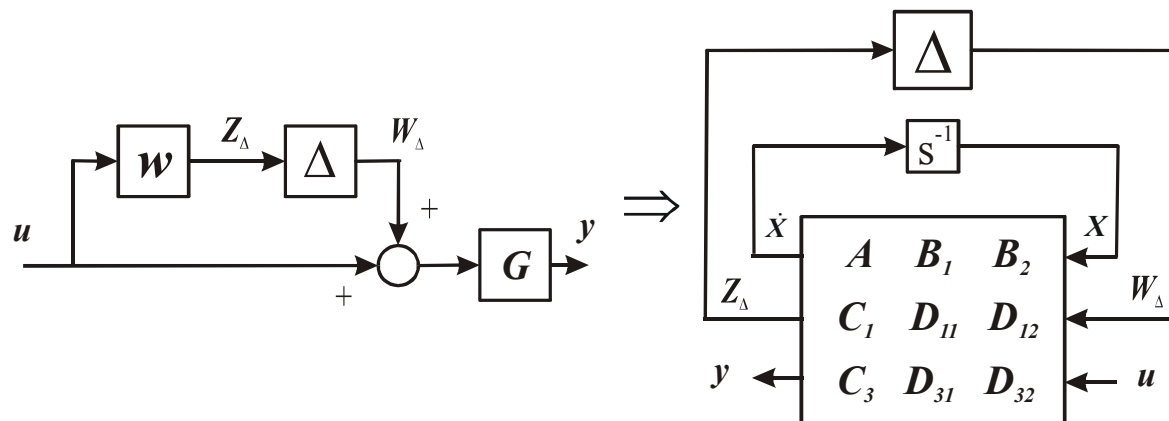


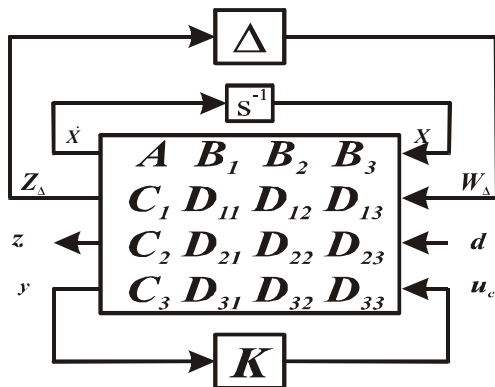
Bild c-10: Die durch LFT dargestellte konzentrierte Unsicherheit.

In der konzentrierten Unsicherheit ist die Anzahl der Ein- und Ausgänge des Modells nur verdoppelt. Aber die Ordnungen des Modells werden wegen der Gewichtung erhöht und diese Erhöhung hängt von den Ordnungen der einzelnen Gewichte und der Anzahl der Aktoren ab. Die Erhöhung ist mindestens gleich der Anzahl der Aktoren. Für eine relativ große Anzahl der Aktoren kann die Erhöhung auch dramatisch sein, damit ist es unakzeptabel für den Reglerentwurf.

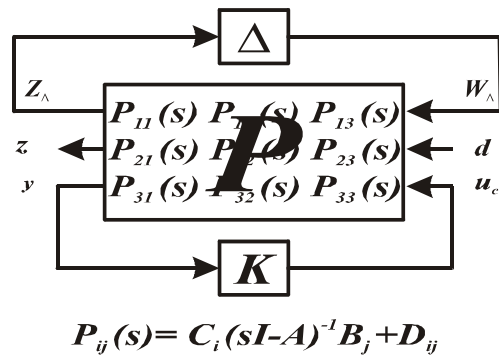
Analog zum LQG kann weiterhin ein Zielobjekt definiert werden, z. B. wie in der Gleichung (c-54a), $z = W_P (r - y) + W_u u$. Die Gewichtungen W_P und W_u können auch frequenzabhängig sein. In diesem Fall könnte

$$W_P = W_P I = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} I \text{ oder } W_P \approx (I - T_{yr})^{-1} I$$

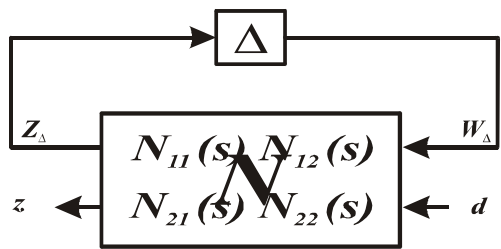
sein, wobei ω_B^* die Bandbreite, M und A der erlaubte Fehler bei hohen bzw. niedrigen Frequenzen ist. T_{yr} ist die gewünschte Übertragungsfunktion vom Sollwert r zum gemessenen Wert y . Die W_u könnten die Form in der Gleichung (c-64) annehmen. Wenn die Gewichtungen W_P und W_u frequenzabhängig sind, müssen die Zustandsvariablen erweitert und die Ordnungen der Gleichung erhöht werden. Fasst man Störungen, Messrauschen und Sollwerte zusammen ($d^T = [u_d^T, \tilde{v}^T, r^T]$), erhält man die sogenannte allgemeine Regelstrecke (siehe Bild c-11a) und b)).



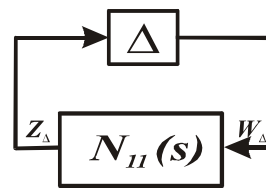
a) Zustandsdarstellung



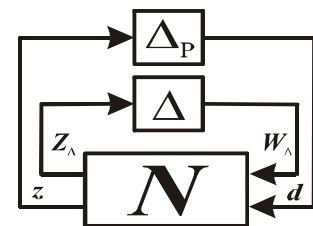
b) Absorption von $s^{-1}I$



c) Absorption von K



d) RS



e) RL

Bild c-11: Das Schema der allgemeinen Regelstrecke und Regelung

Nun ist das Ziel des Reglerentwurfs, einen stabilen Regler K zu finden [SKO 96][BAL 01],

1. der alle Teilübertragungsfunktion $N_{ij}, i, j = 1, 2$ stabilisiert (Nominalstabilität) (Bild c-11 c)) und
2. mit dem die Nominalleistung $\|N_{22}\|_\infty \leq \gamma$ erreicht wird und
3. der die geschlossene Regelstrecke T_{zd} unter der Unsicherheit Δ stabilisiert (Robustheitsstabilität) (Bild c-11d) und

4. mit dem die Robustheitsleistungen $\|\mathbf{T}_{zd}\|_\infty \leq \gamma$ erreicht werden (Bild c-11e)).

Um einen solchen Regler zu finden benötigt man den Begriff des strukturierten singulären Werts μ .

Es sei $\mathbf{M} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ und die drei nicht negativen Ganzzahlen m_r, m_c und m_C ; $m = m_r + m_c + m_C \leq n$. Die Blockstruktur $\mathbf{K}(m_r, m_c, m_C)$ ist ein m -Tupel der positiven Ganzzahl

$$\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_{m_r}, k_{m_r+1}, \dots, k_{m_r+m_c}, k_{m_r+m_c+1}, \dots, k_m) \quad (\text{c-66})$$

wobei $\sum_{i=1}^m k_i = n$ ist. Dies definiert nun die Menge der erlaubten Störung oder Unsicherheit, nämlich,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{K}} = \left\{ \Delta = \text{blockdiag}(\delta_1^r \mathbf{I}_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r \mathbf{I}_{k_{m_r}}, \delta_1^c \mathbf{I}_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c \mathbf{I}_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C) : \right. \\ \left. \delta_i^r \in \mathbf{R}, \delta_i^c \in \mathbf{C}, \Delta_i^C \in \mathbf{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (\text{c-67})$$

Man sollte beachten, dass $\mathbf{X}_{\mathbf{K}} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ist und dass diese Blockstruktur hinreichend allgemein ist, um die Darstellung der wiederholten realen Skalare, der wiederholten komplexen Skalare und der vollen komplexen Blöcke zu erlauben. Der rein komplexe Fall entspricht $m_r = 0$.

Nun ist der strukturierte singuläre Wert, $\mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{M})$, einer Matrix $\mathbf{M} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ mit Bezug auf eine Blockstruktur $\mathbf{K}(m_r, m_c, m_C)$ definiert als

$$\mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{M}) = \left(\min_{\Delta \in \mathbf{X}_{\mathbf{K}}} \{ \overline{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \Delta \mathbf{M}) = 0 \} \right)^{-1} \quad (\text{c-68})$$

mit $\mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{M}) = 0$, falls kein $\Delta \in \mathbf{X}_{\mathbf{K}}$ $\det(\mathbf{I} - \Delta \mathbf{M}) = 0$ auslöscht [DOY 82][YOU 90].

Dann gelten für Robustheitsstabilität und Robustheitsleistung folgenden Sätze [SKO 96][BAL 01]:

Sei $\gamma > 0$ und Δ stabil, ist das System $\mathbf{T}_{zd} = \mathbf{F}_u(\mathbf{N}, \Delta)$ stabil für alle $\Delta \in \mathbf{X}_{\mathbf{K}}$ mit $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$, genau dann, wenn

$$\|\mathbf{N}_{II}\|_{\hat{\Delta}} \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega \in \mathbf{R}} \{ \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}_{II}(j\omega)) \} \leq \gamma \quad (\text{c-69})$$

und das System $\mathbf{T}_{zd} = \mathbf{F}_u(\mathbf{N}, \Delta)$ ist stabil für alle $\Delta \in \mathbf{X}_{\mathbf{K}}$ mit $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ und $\|\mathbf{F}_u(\mathbf{N}, \Delta)\|_\infty \leq \gamma$, genau dann, wenn

$$\|\mathbf{N}\|_{\hat{\Delta}} \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega \in \mathbf{R}} \{ \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{N}(j\omega)) \} \leq \gamma \quad (\text{c-70})$$

wobei $\hat{\Delta} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_P \end{bmatrix} : \Delta \in \mathbf{X}_{\mathbf{K}}, \Delta_P \in \mathbf{C}^{n_d \times n_z} \right\}$ ist. n_z und n_d sind die Dimensionen des Zielobjekts \mathbf{z} , bzw. der exogenen Eingabe \mathbf{d} .

Mit anderen Worten, wenn man einen Regler \mathbf{K} findet, der die Gleichung (c-69) erfüllt, dann

ist das geschlossene System T_{zd} mit der Störungsgröße, $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$, immer stabil. Weiterhin gilt, wenn die Gleichung (c-70) erfüllt wird, dann ist zusätzlich garantiert, dass die Leistung $\|F_u(N, \Delta)\|_\infty \leq \gamma$ erreicht werden kann.

Wenn man die Ausgänge Z_Δ und z als einen Ausgang und die Eingänge W_Δ und d als einen Eingang betrachtet, gilt $N = F_L(P, K)$, so kann man die Gleichung (c-70) als

$$\|N\|_{\hat{\Delta}}^\Delta = \max_{\omega \in R} \{\mu_K(F_L(P, K))\} \leq \gamma \quad (\text{c-71})$$

umschreiben.

Nun ist die Frage, wie man μ berechnen kann, weil die Elemente in Δ unbekannt sind und durch die Definition μ nicht berechnet werden kann. Sei Q_K eine Menge mit

$$Q_K = \left\{ \Delta \in X_K : \delta_i^r \in [-I, I], \delta_i^c \delta_i^c = I, \Delta_i^{C*} \Delta_i^C = I_{k_{m_r+m_c+i}} \right\}$$

und D_K eine Menge mit

$$D_K = \left\{ \text{blockdiag} \left(e^{j\theta_1} D_1, \dots, e^{j\theta_{m_r}} D_{m_r}, D_{m_r+1}, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{k_m} \right) : \right. \\ \left. \theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 < D_i = D_i^* \in C^{k_i \times k_i}, 0 < d_i \in R \right\} \quad (\text{c-72})$$

dann gilt für jede Matrix $M \in C^{n \times n}$ und kompatible Blockstruktur K [DOY 82] [YOU 90] [YOU 91] [SKO 96]

$$\max_{Q \in Q_K} \{\rho_R(QM)\} = \mu_K(M) \leq \min_{D \in D_K} \{\overline{\sigma}(DMD^{-1})\} \quad (\text{c-73})$$

wobei $\rho_R(A)$ der maximal absolute reale Eigenwert von A ist.

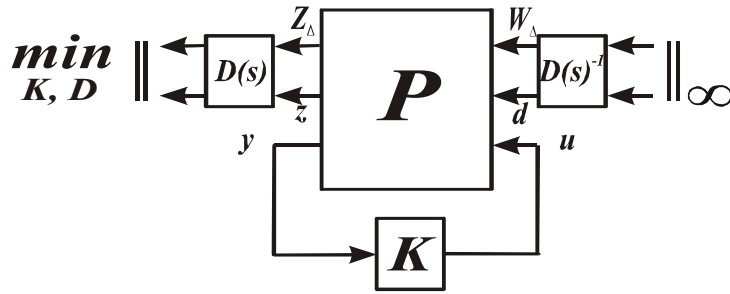


Bild c-12: Darstellung der Berechnung von Robustleistung

Ersetzt man die $\mu_K(\cdot)$ in der Gleichung (c-71) durch die obere Grenze in der Gleichung

(c-71), erhält man $\max_{\omega \in R} \left\{ \min_{D \in D_K} \{\overline{\sigma}(DF_L(P, K)D^{-1})\} \right\} \leq \gamma$. Tauscht man die Reihenfolge von

$\max()$ und $\min()$ um, und benutzt man die Definition der unendlichen Norm, wird die Gleichung (c-71) zu

$$\min_{D \in D_K} \left\{ \left\| D(\omega) F_L(P, K) D(\omega)^{-1} \right\|_\infty \right\} \leq \gamma \quad (\text{c-74})$$

wobei $\mathbf{D}(\omega)$ eine reale rationale stabile Übertragungsmatrix mit der minimalen Phase ist. Nun ist es die Aufgabe des Reglerentwurfs, über alle stabile Regler \mathbf{K} die Gleichung (c-74) zu minimieren (Bild c-12). Daraus bekommt man den sogenannten D-K Iterationsalgorithmus[STE 91][BAL 01]:

1. Festhalten von $\mathbf{D}(\omega)$ (Bild c-13a). In dieser Phase werden \mathbf{D} und \mathbf{D}^{-1} in die Strecke \mathbf{P} absorbiert. Dann wird die Optimierung $\min_{\mathbf{K} \text{ stabil}} \left\{ \|F_L(\mathbf{P}_D, \mathbf{K})\|_\infty \right\} \leq \gamma$ durchgeführt.

Dies ist ein Problem der Optimierung des H^∞ -Reglers. Es gibt eine suboptimale Lösung wie folgende: [GLO 88][GRE 95]

Sei die allgemeine Strecke \mathbf{P}_D

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{c-75a})$$

mit

(A1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ ist stabilisierbar und beobachtbar.

(A2) \mathbf{D}_{12} und \mathbf{D}_{21} haben vollen Rang.

(A3) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$ hat vollen Spaltenrang für alle ω .

(A4) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$ hat vollen Zeilenrang für alle ω .

(A5) $\mathbf{D}_{11} = 0$ und $\mathbf{D}_{22} = 0$ (Bemerkung: diese Bedingung dient nur für die Vereinfachung der Darstellung. Es gibt einen Algorithmus [GRE 95], der \mathbf{D}_{11} und \mathbf{D}_{22} eliminiert, wenn \mathbf{D}_{11} und \mathbf{D}_{22} in der Gleichung (c-75a) nicht gleich NULL ist.)

, dann existiert ein stabiler Regler \mathbf{K} mit $\|F_L(\mathbf{P}_D, \mathbf{K})\|_\infty \leq \gamma$, genau dann, wenn

- (i) $\mathbf{X}_\infty \geq 0$ eine Lösung der algebraischen Riccati-Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T) \mathbf{X}_\infty + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (\text{c-75b})$$

ist, so dass alle Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}} + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T) \mathbf{X}_\infty$ links der j -Achse liegen, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T$ und $\tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}}$ durch die Gleichung (c-53e) bestimmt werden und

- (ii) $\mathbf{Y}_\infty \geq 0$ eine Lösung der algebraischen Riccati-Gleichungen

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \bar{\mathbf{C}}_2^T \bar{\mathbf{C}}_2) \mathbf{Y}_\infty + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{0} \quad (\text{c-75c})$$

ist, so dass alle Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \bar{\mathbf{C}}_2^T \bar{\mathbf{C}}_2)$ links der j -Achse liegen, wobei $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T$ und $\bar{\mathbf{C}}_2^T \bar{\mathbf{C}}$ durch die Gleichung (c-52f) bestimmt werden und

- (iii) $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$ ist.

Alle solche Regler sind durch $\mathbf{K} = F_L(\mathbf{K}_c, \mathbf{U})$ bestimmt, wobei \mathbf{U} ein kausales lineares System ist mit $\|\mathbf{U}\|_\infty < \gamma$, und

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_{c1} & \mathbf{B}_{c2} \\ \mathbf{C}_{c1} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{c2} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_\infty = \mathbf{Y}_\infty (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty)^{-1}$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} + \gamma^{-2} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{c1} \mathbf{D}_{21}) \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty - \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty - \mathbf{B}_{c1} \mathbf{C}_2 \tag{c-75d}$$

$$[\mathbf{B}_{c1} \quad \mathbf{B}_{c2}] = [(\mathbf{I} + \gamma^{-2} \mathbf{Z}_\infty \mathbf{X}_\infty) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{C}_2^T \quad \mathbf{B}_2 + \gamma^{-2} \mathbf{Z}_\infty \mathbf{F}_\infty^T]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c1} \\ \mathbf{C}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_\infty \\ -\mathbf{C}_2 - \gamma^{-2} \mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \end{bmatrix}, \mathbf{F}_\infty = (\mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{12}^T)^{-1} (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty)$$

Falls $\mathbf{U}(s) = 0$ ist, bekommt der sogenannte zentrale Regler \mathbf{K}_z : $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_{c1}, \mathbf{C}_{c1})$.

Bemerkung: Der Regler \mathbf{K}_c ist nicht immer existent für ein gegebenes γ . Die Bedingungen (i)–(iii) werden nicht erfüllt, wenn γ zu klein ist. Damit ist die Lösung des (sub)optimalen H^∞ -Reglers ein iterativer Vorgang über γ . Die Ordnungen von \mathbf{K} sind gleich der Ordnung der verallgemeinerten Strecke \mathbf{P}_D . Wegen der Bedingungen (i) und (ii) ist der Integrator in \mathbf{K} nicht zugelassen; somit ist die Regelung theoretisch für eine Formkontrolle nicht mehr fehlerfrei.

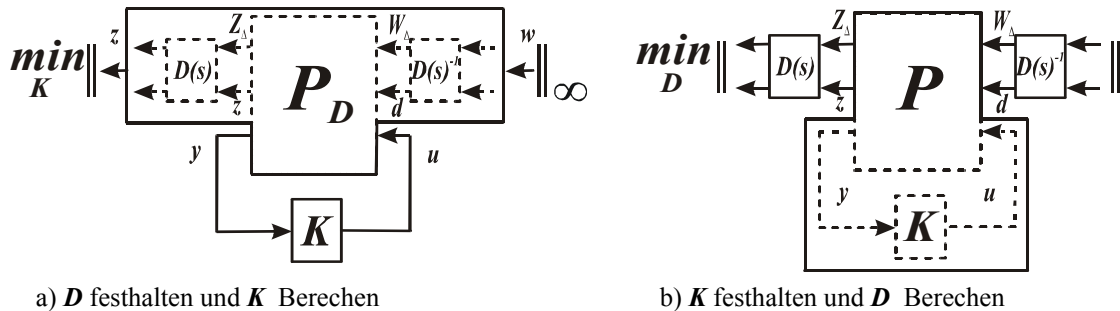


Bild c-13: Darstellung der D-K Iteration

2. \mathbf{K} festhalten (Bild c-13b). In dieser Phase werden die optimalen frequenzabhängigen Gewichte $\mathbf{D}(\omega)$ in einem großen, aber endlichen Frequenzbereich durch die Berechnung der oberen Grenze von μ [YOU 91] gesucht, so dass die Gleichung (c-74) minimiert wird. Die gefundenen optimalen frequenzabhängigen Gewichte $\mathbf{D}(\omega)$ werden zu einer stabilen realen, rationalen Übertragungsmatrix mit minimaler Phase $\mathbf{D}(s)$ eingepasst [BAL 01].
3. Falls die Gleichung (c-73) kleiner als 1 ist, wird der D-K Iterationsalgorithmus beendet, ansonsten wird zum 1. Schritt übergegangen und die Iteration fortgesetzt.

Literaturverzeichnis

- [ALB 98] Albrecht, P., Zhang, W. and Michaelis, B.: 3-D Shape Measurement of Smart Mechanical Systems, Gabbert, U. (Hrsg.), Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 268, Düsseldorf: VDI-Verlag 1998, pp. 351-360.
- [ALT 96] Altenbach, H., Altenbach, J. und Rikards, R.: Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.
- [ARA 75] Araki, M. and Nwokah, O.I.: Bounds for closet-loop transfer functions, IEEE Trans. Automation Control, Oct., 1975, pp. 666-670.
- [AUS 94] Austin, F.; Rossi, M. J.; Van Nostrand, W.; Knowles, G. and Jameson, A.: Static Shape Control for Adaptive Wings. AIAA Journal, Vol. 32, No. 9, September 1994, pp. 1895-1901.
- [AVI 89] Avitabile, P., O'Callahan, J. and Milani, J.: Comparison of System Characteristics Using Various Model Reduction Techniques, 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Feb. 1989, pp. 1109-1115.
- [AVI 92] Avitabile, P., Pechinsky, F. and O'Callahan, J.: Study of Modal Vector Correlation Using Various Techniques for Model Reduction, 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California, Feb. 1992, pp. 572-583.
- [BAL 78] Balas, M.J.: Feedback control of flexible systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-23, pp673-679, 1978.
- [BAL 96] Balas, G., and Packard, A.: The Structured Singular Value (μ) Framework, In: Levine, W. S. (Eds.) The Control Handbook, CRC Press, 1996, pp. 671-687.
- [BAL 01] Balas, G.J., Doyle, J.C., Glover, K., Packard, A. and Smith, R.: μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, The MathWorks, Inc., 2001.
- [BAR 92] Baruh, H.: Placement of Sensors and Actuators in structural Control, *Control and Dynamic Systems*, Vol. 52, pp. 359-390, 1992.
- [BAR 94] Barnett, St.: Matrices: Methods and Application. Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [BAT 90] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, 1990.
- [BEL 57] Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1957.
- [BER 61] Berkovitz, L. D.: Variational Methods in Problems of Control and Programming, J. Math. Anal. Appl., vol. 3, pp. 145-169, 1961.
- [BER 98] Berger, H.; Cao, X.; Köppe, H. und Gabbert, U.: Finite Element Based Analysis of Adaptive Structures, Gabbert, U. (Hrsg.), VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 268, Düsseldorf: VDI-Verlag 1998, pp. 95-104.
- [BER 01] Bernert, P.: Adaptive Hysteresekompensation an Piezoaktoren, Kolloquium A-DAMES 2001, Universität Magdeburg, 17.-18. Mai 2001, s. 193-201.
- [BUR 90] Burdisso, R. A. and Haftka, R. T.: Statistical Analysis of Static Shape Control in Space Structures. AIAA Journal, Vol. 28, No. 8, August 1990, pp. 1504-1508.
- [BUR 98] Burrus, C.S., Gopinath, R. A. and Guo, H.: Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

- [BRY 96] Bryant, G.F. and Yeung, L-F.: *Multivariable Control System Design Techniques*, John Wiley & Sons Ltd, 1996.
- [CAL 01] Calow, R., Albrecht, P. und Michaelis, B.: Kalibrierung der online-Sensoren mit Stereofotogrammetrie für statische und dynamische Zustände, Kolloquium A-DAMES 2001, Universität Magdeburg, 17.-18. Mai 2001, s. 141-149.
- [CHE 91] Chen, G.-S., Bruno, R. J. and Salama, M.: Optimal Placement of Active/Passive Members in Truss Structures Using Simulated Annealing, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 8, pp. 1327-1334, 1991.
- [CON 89] Conti, P.: A Higher Order Generalization of the Guyan Reduction Method, 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Feb. 1989.
- [CON 94a] Constantinescu, C. and Storer, J.A.: Online Adaptive Vector Quantization with Variable Size Codebook Entries, *Information Processing and Management*, Vol. 30 (6), 1994, pp 745-758.
- [CON 94b] Constantinescu, C. and Storer, J.A.: Improved Techniques for Single-Pass Adaptive Vector Quantization, *Proceedings of the IEEE*, 82 (6), 1994, pp. 933-939.
- [CRA 68] Craig, R.R., Jr., und Bampton, M.C.C.: Coupling of Substructures for Dynamic Analysis, *AIAA Journal*, Vol. 6, July 1968.
- [DAS 95] Dasarathy, B. V. (ed): *Image Data Compression: Block Truncation Coding (BTC) Techniques*, Los Alamitos, CA, IEEE Computer Society Press. 1995.
- [DAU 88] Daubechies, I.: Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 41, 1988, pp. 906-966.
- [DRE 60] Dreyfus, S. E.: *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 1, pp. 228-239, 1960.
- [DÖN 98] Döngi, F.: Adaptive Structures in High Precision Satellites. Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures, Gabbert, U. (Hrsg.), *VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik* Nr. 268, 1998, S. 429-438.
- [DÖS 97] Döschner, C. und Bernert, P.: Modelle zur Hysteresekompensation an Piezotranslatoren. 1. Workshop des Innovationskollegs Adaptive mechanische Systeme, Uni. Magdeburg 11/1996, Preprint Nr.1, 1997, pp. 97-106.
- [DOY 82] Doyle, J.C.: Analysis of Feedback system with structured uncertainty, *IEE proceedings*, Vol. 129, Part D, No. 6, Nov. 1982, pp. 242-250.
- [DOY 91] Doyle, J.C., Packard, A. and Zhou, K.: Review of LFTs, LMIs, and μ , *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, Dec. 1991, pp. 1227-1232.
- [DOY 92] Dolye, J. C., Francis, B. A: and Tannenbaum, A. R.: *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [EHL 98] Ehlert, U.-C. and Hanselka, H.: Application of Adaptive Structural Systems to Wind Energy Converters. Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures, Gabbert, U. (Hrsg.), *VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik* Nr. 268, 1998, S. 439-448.
- [FAR 93] Farlow, S.J.: *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons Ltd, 1993.
- [FÖL 94] Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, 8. Auflage, Hüthig GmbH Heidelberg, 1994.

- [FÖL 00] Föllinger, O.: Laplace-, Fourier- und z-Transformation, 7. Auflage, Hüthig GmbH Heidelberg, 2000.
- [FUH 86] Fuh, J.S., Gustavson, B. und Berman, A.: Error Estimation and Compensation in Reduced Dynamic Models of Large Space Structures, AIAA-Structural Dynamics and Material Conf., May 1986.
- [FUL 96] Fuller, C.R., Elliott, S.J. and Nelson, P.A.: Active Control of Vibration, Academic Press, London, 1996.
- [FUR 95] Furuya, H. and Haftka, R. T.: Static Shape Control of Space Trusses with Partial Measurements. Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 32, No. 5, Sep.-Oct. 1995, pp. 856-865.
- [GAS 87] Gasch, R. und Knothe, K.: Strukturdynamik Bd. 2, Kontinua und ihre Diskretisierung. Springer Verlag, 1987.
- [GAW 90] Gawronski, W. and Juang, J. N. Model Reduction for Flexible Structures, Control and Dynamic Systems, Vol. 36, ed. by Leondes, C. T., Academic, New York, 1990, pp. 143-222.
- [GAW 96] Gawronski, W.: Balanced Control of Flexible Structures, (Lecture Notes in Control and Information Sciences 211, Ed. M. Thoma), Springer-Verlag London Limited, 1996.
- [GÉR 97] Géradin, M and Rixen, D.: Mechanical Vibrations-Theory and Application to Structural Dynamics, Second Edition, John Wiley & Sons Ltd, 1997.
- [GHO 95] Ghosh, K. and Batra, R. C.: Shape Control of Plates Using Piezoceramic Elements. AIAA Journal, Vol. 33, No. 7, July 1995, pp. 1354-1357.
- [GIL 99] Gilmozzi, R.; Delabre, B.; Dierickx, P.; Hubin, N.; Koch, F.; Monnet, G.; Quattri, M.; Rigaut, F. and Wilson, R.N.: The Future of Filled Aperture Telescopes: is a 100m Feasible?, European Southern Observatory, <http://www.gemini.anu.edu.au/science/maxat/future/future.html>
- [GIL 73] Gilles, E.D.: Systeme mit verteilten Parametern, Methoden der Regelungstechnik. Oldenbourg, 1973.
- [GLI 97] Glindemann, A. und Quirrenbach, A: Künstlicher Stern über dem Calar Alto, Adaptive Optik mit Alfa am 3.5-m-Teleskop. Teil 1, Sterne und Weltraum 11/97, S. 950-955; Teil 2, Sterne und Weltraum 12/97, S. 1038-1044.
- [GLO 84] Glover, K.: A optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L₂-error bounds, Journal of Control, Vol. 39, No. 6, pp 1115-1193, 1984.
- [GLO 88] Glover, K. and Doyle, J.C.: State-Space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity, Systems and Control Letters, Vol. 11. pp. 167-172, 1988.
- [GOL 66] Golomb, S. W.: Run-Length Encodings, IEEE Trans. on Information Theory IT-12(3), 1966, pp. 399-401.
- [GRE 95] Green, M. and Limebeer, D.: Linear robust control, Prentice-Hall, Inc. 1995.
- [GUY 65] Guyan, R. J.: Reductions of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, pp 380

- [HAA 10] Haar, A.: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., Vol. 69, 1910, pp. 331-371.
- [HAC 92] Hac', A. and Liu, L.: Sensor and Actuator Location in Motion Control of flexible Structures, *1st International Conf. On Motion and Vibration Control*, Yokohama, pp. 86-91, September 1992.
- [HAF 91] Haftka, R. T.: Limits on Static Shape Control for Space Structures. AIAA Journal, Vol. 29, No. 11, November 1991, pp. 1945-1950.
- [HAK 94] Hakim, S. and Fuchs, M. B.: A new Criterion for Actuator Placement in Quasi-Static Control of Flexible Structures under Arbitrary Disturbances. 45th International Astronautical Conference, Jerusalem, October 9-14, 1994.
- [HAK 96] Hakim, S. and Fuchs, M. B.: Shape Estimation of Distorted Flexible Structures. 6th AIAA/NASA/USAF Multidisciplinary Analysis & Optimization Symposium, Bellevue WA, September 4-6, 1996.
- [HAN 95] Hankim, S. and Fuchs, M. B.: Simulated Annealing Techniques for the Optimal Control of Space Structures, *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, May 28- June 2, 1995.
- [HAN 97] Hanselka, H.: Realization of Smart Structures by Using Fiber Composite Materials. Smart Mechanical Systems-Adaptronics, Gabbert, U. (Hrsg.), VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 244, 1997, S. 1-10.
- [HANS 97] Hansen, C.H.; Snyder, S. D.: Active Control of Noise and Vibration. Chapman & Hall, London, 1997.
- [HAR 78] Hardy, J. W.: Active Optics: A New Technology for the Control of Light. Proceedings of The IEEE, Vol. 66 No. 6 June 1978, pp. 651-697.
- [HEY 99] Heyland, D., Rosemann, H., Sachau, D. Strohmeier, D. and Voß, R.: The Adaptive Wing Project(DLR): Survey on Targets and Recent Results from Active/Adaptive Structures Viewpoint, 10th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'99), Oct. 11-13, 1999, Paris, France, pp.178-185.
- [HOW 92] Howard, P:G: and Vitter, J.S.: New Methods for Lossless Image Compression Using Arithmetic Coding, Information Processing and Management, Vol. 28 (6), 1992, pp. 765-779.
- [HOW 93] Howard, P:G: and Vitter, J.S.: Fast and Efficient Lossless Image Compression, in Proceedings of the 1993 Data Compression Conference, Storer, J. ed., Los Alamitos, CA, IEEE Computer Society Press, 1993, pp. 351-360.
- [HU 90] Hu, A and Skelton, R: Model Reduction with Weighted Modal Cost Analysis, AIAA GNC Conference, Portland, Oregon, August 1990.
- [HUF 52] Huffman, D.: A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes, Proceedings of the IRE 40(9), 1952, pp. 1098-1101.
- [HUN 93] Hung, A. C.: PVRG-JPEG CODEC 1.1, Portable Video Research Group, Stanford University, 1994.
- [IRO 65] Irons, B.: Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables, AIAA Journal, Vol. 3, No. 5, 1965, pp. 961-962.
- [ISO 94] ISO/IEC JTC1 10918-1, ITU-T Rec. T.81, Information technology - Digital compression and coding of continuous-tone still images: Requirements and guidelines, 1994.

- [ISO 00] ISO/IEC JTC 1/SC 29/WG 1, Coding of Still Pictures - JPEG 2000 Part 1 Final Committee Draft Version 1.0, 2000.
- [JUN 93] Junkins, J.L. and Kim, Y.: Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.
- [KAL 60] Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction theory, ASME Transcation, Series D: Journal of Basic Engineering, vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [KAL 61] Kalman, R. E. and Bucy R. S.: New results in linear filtering and prediction theory, ASME Transcation, Series D: Journal of Basic Engineering, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [KAP 97] Kapuria, S.; Sengupta, S. and Dumir, P. C.: Three-Dimensionnal Piezothermoelastic Solution for Shape Control of Cylindrical Panel. Journal of Thermal Stresses, Vol. 20 Iss. 1, 1997, pp. 67-85.
- [KAR 46] Karhunen, K.: Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse, Ann. Acad. Sci. Fenn., 34, 1946.
- [KEI 95] Keil, S.: Beanspruchungsermittlung mit Dehnungsmessstreifen, Cuneus-Verlag, 1995.
- [KEV 96] Kevorkian, J.: Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques, Chapman & Hall, 1996.
- [KIM 97] Kim, Y., Kum, D. and Nam, C.: Simultaneous Structural/Control Optimum Design of Composite Plate with Piezoelectric Actuators, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 6, pp. 1111-1117, Nov.-Dec. 1997.
- [KOC 94] Koconis, D.B., Kollar, L.P. and Springer, G.S.: Shape Control of Composite Plates and Shells with Embedded Actuators, I. Voltages Specified; II. Desired Shape Specified, Journal of Composite Materials, Vol.28 Iss. 5, 1994, pp. 415-482.
- [KNO 92] Knothe, K. und Wessels, H.: Finite Elemente, 2.Auflage, Springer-Verlag, 1992.
- [LEE 92] Lee, C.-K.: Piezoelectric Laminates: Theory and Experiments for Distributed Sensors and Actuators, In Intelligent Structural Systems, Ed. Tzou, H.S. and Anderson, G.L., Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 75-167.
- [LIL 97] Lilienblum, T.; Zhang, W.; Michaelis, B.: Sensor Data Compression for Smart Mechanical Systems by Artificial Neural Networks. In: Gabbert, Ulrich (Hrsg.): Smart mechanical Systems - Adaptronics. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11 Nr. 244. Düsseldorf: VDI-Verlag 1997. pp. 235-244
- [LIM 82] Limebeer, D.J.N.: The application of generalized diagonal dominance to linear system stability theory, Int. J. Control, Vol. 36(2), 1982, pp. 185-212.
- [LIM 93] Lim, K. B. and Gawronski, W.: Actuator and Sensor Placement for Control of flexible Structures, *Control and Dynamic Systems*, Vol. 57, pp. 109-152, 1993.
- [LIM 98] Lim, K. B., Lake, R. C. and Heeg, J.: Effective Selection of Piezoceramic Actuators for an Experimental Flexible Wing, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 5, pp. 704-709, Sept.-Oct. 1998.
- [LIN 96] Lin, C.-T. and Lee, C. S. G.: *Chapter 14 Genetic Algorithms in Neural Fuzzy Systems*, Prentice Hall PTR, 1996.

- [LIN 80] Linde, Y., Buzo, A. and Gray, R.M.: An Algorithm For Vector Quantization Design, IEEE Transaction on Communications, COM-28, Jan. 1980, pp. 84-95.
- [LOE 48] Loève, M.: Fonctions aléatoires du second ordre, In P. Lévy, editor, Suppl. To Processus Stochastique et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [LUB 96] Lublin, L., Grocott, S. and Athans, M.: H_2 (LQG) and H_∞ Control, In: Levine, W. S. (Eds.) The Control Handbook, CRC Press, 1996.
- [MAL 94] Malbet, F.; Shao, M. and Yu, J.: Active Optics and Coronagraphy with the Hubble Space Telescope. SPIE Symposium Astronomical Telescopes and Instrumentation for the 21st Century, Kona 13-18 Mars 1994.
- [MAG 90] Magnus, K. und Müller, H.H.: Grundlagen der technischen Mechanik, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 22. Teubner, 1990.
- [MATLAB] MATLAB Reference Guide, The MathWorks, Inc., 1992.
- [MEI 85] Meirovitch, L. and Baruh, H.: The Implementation of Modal Filters for Control of Structures, Journal of Guidance and Control, Vol.8, pp707-716, 1985.
- [MEL 98] Melz, T.; Frövel, M.; Krajenski, V.; de la Torre, M.; Hanselka, H. and Pintado, J.: Smart Antenna Reflector Manufactured in Filament Winding Technology. Modeling and Control of Adaptive Mechanical Structures, Gabbert, U. (Hrsg.), VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 268, Düsseldorf: VDI-Verlag 1998, pp. 449-458.
- [MEN 71] Mendel, J. M. and Gieseking, D. L.: Bibliography on the Linear-Quadratic-Gaussian problem, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16(6), pp. 847-869, 1971.
- [MER 88] Merkle, F.: Adaptive Optics Developments at ESO, In: Large Telescopes and their Instrumentation, (ESO, Garching) 1988, pp. 639-656.
- [MER 89] Merkle, F.: Adaptive Optik: Ein Weg zur beugungsbegrenzten Abbildung bei der astronomischen Beobachtung, Sterne und Weltraum, 28. Jahrgang, Dez. 1989, S. 708-713.
- [MEY 93] Meyer, Y.: Wavelet: Algorithms and Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1993, pp. 13-31, 101-105.
- [MICH 80] Michaelis, B.: Zusammengesetzte Meßgrößen und ihre Anwendung. Dissertation B, TH Magdeburg 1980.
- [MIL 80] Miller, C. A.: Dynamic Reduction of Structural Models, ASCE Journal of the Structural Division, 1980.
- [MIT 90] Mitsugi, J. and Yasaka, T.: Shape Control of the Tension Truss Antenna. AIAA Journal, Vol. 28, No. 2, February 1990, pp. 316-322.
- [MON 99] Monner, H.P., Sachau, D. and Breitbach, E.: Realization of a Spanwise Differential and Constant Camber Variation for an Adaptive Wing, 10th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'99), Oct. 11-13, 1999, Paris, France, pp.186-193.
- [MOR 94] Morton, K.W. und Mayers, D.F.: Numerical Solutions of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1994.
- [NIC 98] Nichol, K. L.: Numerical Strain Gage Representation, 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Ex-

- hibit and AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum, Lang Beach, California, April, 1998, pp. 198-203.
- [OCA89-1] O'Callahan, J.C.: A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model, 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Feb. 1989, pp. 17-21.
- [OCA89-2] O'Callahan, J.C., Avitabile, P. and Riemer, R.: System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP), 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Feb. 1989.
- [OCA 90] O'Callahan, J.C.: Comparison of Reduced Model Concepts, Eighth International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, January 1990, pp. 422-430.
- [OCA 95] O'Callahan, J.C.: Development of a General Pseudo Orthogonality Procedure, Thirteenth International Modal Analysis Conference, Nashville, Tennessee, Feb 1995, pp. 1013-1021.
- [OCA 96] O'Callahan, J.C. and Li, P.: SEREP EXPANSION, Fourteenth International Modal Analysis Conference, Detroit, Michigan, Feb 1996, pp. 1258-1264.
- [PAR 99] Paradies R., Hertwig M.: Shape Control of Adaptive Composite Reflectors. Composites Part B: Engineering, Vol. 30, No. 1, 1999, pp. 65-78.
- [PEL 95] Pellegrino, S.: Adaptive shape control of mesh reflectors. In Proc. ESA Workshop on Antenna Technologies, 21-23 November 1995, ESTEC, Noordwijk pp 3.1.1-3.1.9. ESA-WPP-100.
- [PEN 99] Penzl, T.: Algorithms for Model Reduction of Large Dynamical Systems, Technische Universität Chemnitz, Sonderforschungsbereich 393/99-40, www.mathematik.tu-chemnitz.de/preprint/
- [PIL 94] Pilkey, W.D. and Wunderlich, W.: Mechanics of Structures-Variational and Computational Methods, CRC Press, 1994.
- [RAO 91] Rao, S. S. and Pan, T.-S.: Optimal Placement of Actuators in Actively Controlled Structures Using Genetic Algorithms, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 6, pp. 942-943, 1991.
- [ROS 74] Rosenbrock, H.H.R.: Computer Aided Control System Design, Academic Press, London, 1974.
- [SAL 94] Salama, M.; Kuo, C. P.; Garba, J.; Wada, B. and Thomas, M.: On-Orbit Shape Correction of Inflatable Structures, February 1994. <http://www.lgarde.com/people/papers/correct.html>.
- [SAL 00] Salomon, D.: Data compression-the complete reference, 2nd Edition, Springer-Verlag New York, 2000.
- [SHA 91] Shabana, A.A: Theory of Vibration, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [SHI 92] Shishakov, K.V. and Shmalgauzen, V.I.: Optimization of Surface shape Control in Feedback Systems, Automation and Remote Control, Vol. 55 Iss. 12, 1992, pp.1866-1871.
- [SIM 99] Simpson, J. and Boller, C.: Application of Electromechanical Technologies to Enhance Adaptive Aircraft Structures, 10th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'99), Oct. 11-13, 1999, Paris, France, pp.163-170.

- [SKO 96] Skogestad, S. and Postlethwaite, I.: *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*, John Wiley & Sons Ltd, 1996.
- [SMI 93] Smith, G.D.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations: The Finite Differences Method*, Clarendon Press, 1993.
- [STE 91] Stein, G. and Doyle, J.C.: Beyond Singular Values and Loop Shapes, *Journal of Guidance, Control and Dynamic*, Vol. 14, No. 1, 1991, pp. 5-16.
- [STO 97] Storer, J.A. and Helfgott, H.: Lossless Image Compression by Block Matching, *The Computer Journal*, Vol. 40 (2/3), 1997, pp. 137-145.
- [STR 73] Street, R.L.: *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks/Cole, 1973.
- [STR 00] Strutz, T.: *Bilddatenkompression: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH*, Braunschweig/Wiesbaden 2000.
- [SUB 96] Subramanian, G. and Mohan, P. A Fast Algorithm for Static Shape Control of Flexible Structures, *Computers and Structures*, Vol. 59, No.3, 1996, pp 485-488.
- [TEW 98] Tewari, A.: Robust Model Reduction for a Flexible Spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 5, 1998, pp. 809-812.
- [THO 93] Thomson, W.T.: *Theory of Vibration with Applications*. 4th Edition, Chapman & Hall, London, 1993
- [WEB 99] Weber, Ch.-T. Zhang, W. and Köppe, H., Structural Optimization of smart curved beam Structures, 10th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'99), Oct. 11-13, 1999, Paris, France, pp.508-515.
- [WHI 93] Whitley, D.: A Genetic Algorithm Tutorial, *Technical Report CS-93-103*, Colorado State University, 1993.
- [WON 68] Wonham, W. M.: On the separation theorem of stochastic control. *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 6, pp 312-326, 1968.
- [YEU 92] Yeung, L-F. and Bryant, G.F.: New dominance concepts for multivariable control systems design, *Int. J. Control*, Vol. 55(4), 1992, pp. 969-980.
- [YOU 90] Young, P.M. and Doyle, J.C.: Computation of μ with Real and Complex Uncertainties, *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, Hawaii, Dec. 1990, pp. 1230-1235.
- [YOU 91] Young, P.M. Newlin, M.P. and Doyle, J.C.: μ analysis with real parametric Uncertainties, *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, Dec. 1991, pp. 1251-1256.
- [YOU 92] Yousuff, A. und Breida, M.: Model Reduction of Mechanical Systems, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, 1992, pp. 408-410.
- [ZHA 90] Zhang, Q., Allemang, R. J. and Brown, D. L.: Modal Filter: Concept and Applications, *Eighth International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, January 1990, pp. 487-496.
- [ZHA 97] Zhang, W.; Lilienblum, T.; Michaelis, B.: Sensorfusion und Datenverdichtung für adaptive mechanische Systeme. *Tagungsband der 3. Magdeburger Maschinenbautage*, 11.09-13.09.1997, Vol. 2, S. 213-222

-
- [ZHA 98a] Zhang, W.; Lilienblum, T.; Michaelis, B.: Data Compression for Control of Adaptive Mechanical Systems, Gabbert, U. (Hrsg.), VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 268, Düsseldorf: VDI-Verlag 1998, pp. 323-332.
- [ZHA 98b] Zhang, W. and Michaelis, B.: Data acquisition and compression in adaptive mechanical systems, IEEE Instrumentation and Technology Conference, IMTC'98, St Paul, Minnesota, USA, May 18-21, 1998, pp. 1110-1115.
- [ZHA 00a] Zhang, W. and Michaelis, B.: Optimal Actuators and Sensors Placement with Genetic Algorithms, International Symposium on Smart Structures and Microsystems (IS3M 2000), Hong Kong, China, 19-21 Oct. 2000.
- [ZHA 00b] Zhang, W. and Michaelis, B.: Shape Control with Karhunen-Loève-Decomposition, 11th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'2000), Oct. 24-26, 2000, Nagoya, Japan, pp.119-126.
- [ZHA 01] Zhang, W. and Michaelis, B.: Shape Control with Karhunen-Loève-Decomposition: Experimental Results, 12th International Conf. On Adaptive Structures and Technologies (ICAST'2001), Oct. 15-17, 2001, University of Maryland, USA, pp.169-177.
- [ZHA 03] Zhang, W. and Michaelis, B.: Shape Control with Karhunen-Loève-Decomposition: Theory and Experimental Results, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 14 No. 7, July 2003, pp. 415-422.