

**Differenzen in Permutationen:
Über den Zusammenhang von Permutationen,
Polyominos und Motzkin-Pfaden**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

genehmigt durch die Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von Dipl.-Math. Astrid Reifegerste

geb. am 27. August 1972 in Dessau

Gutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Christine Bessenrodt

Prof. Dr. rer. nat. habil. Alexander Pott

Prof. Dr. Dominique Foata

Eingereicht am 22. April 2002

Verteidigung am 9. Oktober 2002

Dank

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gebührt dabei meiner Betreuerin Prof. Dr. Christine Bessenrodt, die mich mit viel Engagement und Geduld auf diesem Weg begleitet hat. Sie ließ mir die Zeit, die Art von Mathematik zu entdecken, die mir uneingeschränkte Freude bereitet.

Desweiteren danke ich meinen Eltern, die mich stets in meinen Vorhaben unterstützten und mir das Verständnis entgegenbrachten, das man benötigt, um eine Dissertation abzuschließen.

Magdeburg, 22. April 2002

Astrid Reifegerste

Inhaltsverzeichnis

Notationen	vii
1 Einleitung	1
2 Die Statistiken d_{exc} und d_{des}	7
2.1 Definition	7
2.2 Eigenschaften der Verteilungen	8
2.3 Zusammenhang zu anderen Statistiken	15
3 Bi-ansteigende Permutationen	31
3.1 Eine polyominobasierte Interpretation	32
3.2 Auf- und Abstiege	34
3.3 Ein offenes (Verteilungs-)Problem	46
3.4 Die gewichteten Statistiken	48
3.5 Eine Korrespondenz zwischen Parallelogrammpolyominos und Motzkin-Pfaden	64
4 Von der Menge \mathcal{M}_n zur \mathcal{S}_n	73
4.1 Die E-invarianten Transpositionen	73
4.2 Die vollständige Verteilung auf der symmetrischen Gruppe	81
5 Abschließende Bemerkungen	85
A Verteilungen diverser Permutationsstatistiken	93
B Polyominos und Gitterpfade	101
Literaturverzeichnis	107

Notationen

\mathbb{N} (\mathbb{N}_0)	Menge der positiven (nichtnegativen) ganzen Zahlen
\mathbb{N}^k	Menge der k -Tupel über \mathbb{N}
$[n]$	Menge der ganzen Zahlen $\{1, \dots, n\}$; falls relevant, mit der natürlichen Ordnung auf \mathbb{N} versehen
$ M $	Mächtigkeit der Menge M
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $\leq x$
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl $\geq x$
\mathcal{S}_n	symmetrische Gruppe auf $[n]$
$\pi \in \mathcal{S}_n$	Permutation von $[n]$; im allgemeinen dargestellt als Wort $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n$ mit $\pi_i = \pi(i)$
$\text{id} \in \mathcal{S}_n$	identische Permutation von $[n]$
$s_i \in \mathcal{S}_n$	Standardtransposition $(i, i+1)$ von $[n]$
π_E	Einschränkung von π auf die Aufstiege
π_{NE}	Einschränkung von π auf die Fallstellen
\mathcal{M}_n	Menge der bi-ansteigenden Permutationen von $[n]$
$T(\pi)$	Menge der E-invarianten Transpositionen von $\pi \in \mathcal{M}_n$
$o(\pi)$	Anzahl der Urbilder von $\pi \in \mathcal{M}_n$ bzgl. der Sortierung von π_E, π_{NE}
$\mathcal{O}_n^{(t)}$	Menge der Zahlen $o(\pi)$ für $\pi \in \mathcal{M}_n$ in Abhängigkeit von $ T(\pi) $
$E(\pi)$	Menge der Aufstiege von π
$D(\pi)$	Menge der Abstiege von π
$l(\pi)$	Menge der Inversionen von π
$\text{exc}(\pi)$	Anzahl der Aufstiege von π
$\text{des}(\pi)$	Anzahl der Abstiege von π
$\text{inv}(\pi)$	Anzahl der Inversionen von π
$\text{maj}(\pi)$	Hauptindex von π
$\text{den}(\pi)$	Denerts Statistik auf π

$S_n^{\mathbf{f}}(k)$	k -ter Koeffizient der Verteilung der Statistik \mathbf{f} auf \mathcal{S}_n
$S_n^{(\mathbf{f},\mathbf{g})}(k,l)$	entsprechender Verteilungskoeffizient der Bistatistik (\mathbf{f},\mathbf{g}) auf \mathcal{S}_n
$M_n^{\mathbf{f}}(k)$	k -ter Koeffizient der Verteilung der Statistik \mathbf{f} auf \mathcal{M}_n
$M_n^{(\mathbf{f},\mathbf{g})}(k,l)$	entsprechender Verteilungskoeffizient der Bistatistik (\mathbf{f},\mathbf{g}) auf \mathcal{M}_n

C_n	n -te Catalan-Zahl
$N(n,l)$	entsprechende Narayana-Zahl
M_n	n -te Motzkin-Zahl
$m_{n,k}$	Eintrag im Motzkin-Dreieck (Koeffizient des Motzkin-Polynoms)
$G(n,k)$	q -Binomialkoeffizient (Gaußsches Polynom)

$\mathcal{C}_{n,l}$	Menge der l -Kompositionen von n
$\alpha \vDash n$	Komposition von n
\preceq	Dominanzordnung auf $\mathcal{C}_{n,l}$
ρ	Rangfunktion auf $(\mathcal{C}_{n,l}, \preceq)$
$c_r(n,l)$	Anzahl der l -Kompositionen von n vom Rang r
\mathcal{P}_n	Menge der Partitionen von n
$\mathcal{P}_n(k,l)$	Menge der Partitionen von n in höchstens $l-1$ Teile $\leq k-l$
$\lambda \vdash n$	Partition von n
λ'	Konjugierte der Partition λ

Ω_n	Motzkin-Pfade über $\{ \nearrow, \searrow, -, \cdots \}$ mit $h(\cdots) > 0$
------------	--

$p_{m,l}$	Anzahl der Polyominos mit vorgegebener Breite und Höhe
$p_{m,l,a}$	Anzahl der Polyominos mit vorgegebener Breite, Höhe und Fläche
$q_{m,l,a}$	Anzahl der Kompositionenpaare aus $\mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ mit fester Rangdifferenz, die kein Polyomino beschreiben

Die nachfolgenden Begriffe werden in der Arbeit (insbesondere im Kapitel 3) ohne weitere Erklärungen verwendet.

Eine *Komposition* α einer natürlichen Zahl n ist eine Folge $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ positiver ganzer Zahlen, die die Bedingung $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n$ erfüllen. Ist α eine Folge der Länge l , so sagen wir, daß α genau l Teile besitzt und nennen α eine *l-Komposition von n*.

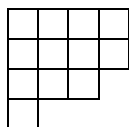
Eine *Partition* λ einer natürlichen Zahl n ist eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ positiver¹ ganzer Zahlen, die die Bedingungen $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$ erfüllen. Ist λ eine Folge der Länge l , so sagen wir, daß λ aus l Teilen besteht. Die Anzahl der Teile heißt *Länge* der Partition λ und wird mit $l(\lambda)$ bezeichnet.

Alternativ geben wir die Partition λ in der Form $\lambda = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$ an, wobei a_i die Anzahl der Teile gleich i von λ sei.

Beispiel $\lambda = (4, 4, 3, 1) = 1^1 2^0 3^1 4^2 = 1 3 4^2$ ist eine Partition von 12.

Das *Young-Diagramm* $Y(\lambda)$ einer Partition $\lambda \vdash n$ ist ein (linksbündiges) Array aus n Zellen, das in der i -ten Zeile λ_i Zellen enthält.

Beispiel Das Young-Diagramm von $(4, 4, 3, 1)$ ist



Ein *Standard-Young-Tableau* der Gestalt λ entsteht durch die Numerierung der Zellen des Young-Diagramms von λ . Die Verteilung der Zahlen $1, \dots, n$ auf die Kästchen ist dabei so vorzunehmen, daß die Einträge in den Zellen sowohl von links nach rechts als auch von oben nach unten anwachsen.

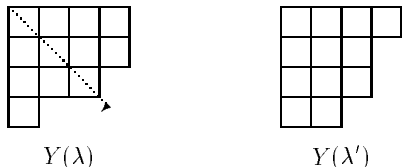
Beispiel Ein Standard-Young-Tableau der Gestalt $(4, 4, 3, 1)$ ist

1	3	4	8
2	6	9	10
5	7	11	
12			

¹Wir folgen hier der Definition 1.1 aus Andrews' [1]. Formal ist es mitunter sinnvoll, die Folge λ über \mathbb{N}_0 zu definieren (etwa um Partitionen mit höchstens l Teilen zu beschreiben). Als Teile von λ werden dann die von Null verschiedenen Komponenten λ_i bezeichnet; ihre Anzahl ist die Länge von λ .

Die *Konjugierte* λ' der Partition λ wird durch die Bedingung $Y(\lambda') = Y(\lambda)^T$ definiert. (Man beachte, daß $\lambda'_1 = l(\lambda)$ und $l(\lambda') = \lambda_1$ ist.)

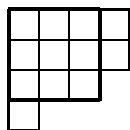
Beispiel Die konjugierte Partition von $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ ist $\lambda' = (4, 3, 3, 2)$.



Der *Umfang* $pm(\lambda)$ einer Partition λ sei die Länge des äußeren Randes von $Y(\lambda)$. Insbesondere gilt $pm(\lambda) = 2(\lambda_1 + l(\lambda)) = 2(\lambda_1 + \lambda'_1)$.

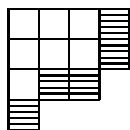
Der *Rang* einer Partition λ ist die größte Zahl i , für die $\lambda_i \geq i$ gilt und wird mit $\text{rang}(\lambda)$ bezeichnet. Äquivalent dazu ist $\text{rang}(\lambda)$ die Länge der Hauptdiagonalen des Young-Diagramms oder die Seitenlänge des Durfee-Quadrats von λ . Das *Durfee-Quadrat* ist das größte quadratische Teildiagramm, das in $Y(\lambda)$ enthalten ist. (Man beachte, daß λ und λ' ranggleich sind.)

Beispiel Der Rang von $(4, 4, 3, 1)$ beträgt 3.



Für zwei Partitionen λ und μ sei das *Schiefdiagramm* λ/μ die mengentheoretische Differenz der Young-Diagramme von λ und μ . Dabei ist vorauszusetzen, daß $Y(\mu)$ vollständig in $Y(\lambda)$ enthalten, also $\lambda_i \geq \mu_i$ für alle i , ist.

Beispiel Das Schiefdiagramm von $\lambda = (4, 4, 3, 1)$ und $\mu = (3, 3, 1)$ entspricht der schraffierten Fläche.



Kapitel 1

Einleitung

Die Enumeration von Permutationen bezüglich gewisser Merkmale ist ein sehr altes Problem. Die wohl bekannteste Permutationsstatistik zählt die Inversionen einer Permutation, ist also ein natürliches Maß dafür, wie weit eine Permutation von der Identität „entfernt“ ist. Ihre Verteilung wurde bereits 1839 von Rodriguez ([34]) angegeben.

Dennoch beginnt die Geschichte des systematischen Studiums von Permutationsstatistiken und ihren Verteilungen erst ein knappes Jahrhundert später: MacMahon untersuchte in seiner Abhandlung über „Combinatory Analysis“ ([27]) intensiv die vier Statistiken, die wir heute als die klassischen bezeichnen. Dazu zählen, neben der Anzahl der Inversionen (**inv**), die Anzahl der Aufstiege (**exc**), die Anzahl der Abstiege (**des**) sowie der von ihm definierte „major“ Index (**maj**) einer Permutation. MacMahons Arbeiten enthalten Methoden zur Herleitung der analytischen Beschreibung der erzeugenden Funktionen; insbesondere gelingt ihm mit Hilfe seines „Master Theorem“ ([27, Sect. III, Ch. II]) der Nachweis, daß die erzeugenden Funktionen von **exc** und **des** sowie von **inv** und **maj** übereinstimmen, die Statistiken also jeweils gleichverteilt auf der symmetrischen Gruppe sind.

Basierend darauf unterscheiden wir heute zwei große Klassen von Permutationsstatistiken: die (zu **des** gleichverteilten) Eulerschen und die (zu **inv** gleichverteilten) Mahonschen. Viele der Permutationsstatistiken fallen in eine der beiden Kategorien.

Mit der Untersuchung von Sortieralgorithmen zu Beginn der 70er Jahre ([24]) setzte dann der Boom der Permutationsstatistiken ein, der das Gebiet zu dem riesigen Feld werden ließ, das es heute ist. Insbesondere um die verschiedenen in der Praxis angewendeten Methoden des Sortierens vergleichen zu können, war es notwendig, Permutationsstatistiken zu betrachten. In der nachfolgenden Zeit wurden viele neue Statistiken konzipiert und ihre Beziehungen zu den Klassikern untersucht. Unter dem Einfluß von Schützenberger wurde es zudem natürlich, die Gleichverteilung von Statistiken bijektiv zu zeigen. Den ersten kombinatorischen Beweis für die MacMahonschen Gleichverteilungsgesetze erbrachte Foata ([20]), der die Entwicklung der Theo-

rie der Permutationsstatistiken entscheidend vorantrieb.

Nunmehr gewann die Betrachtung von Paaren von Statistiken und ihrer gemeinsamen Verteilung zunehmend an Bedeutung. Insbesondere die Konstruktion von Bistatistiken aus einer Eulerschen und einer Mahonschen Komponente, die zum Paar **(des, maj)** gleichverteilt sind, wurde zu einem Hauptanliegen der Theorie. Die Entdeckung des ersten solchen Paares liegt erst 12 Jahre zurück. 1990 vermutete Denert ([14]), daß die später nach ihr benannte Statistik **den**, zusammen mit der Anzahl der Aufstiege, derselben gemeinsamen Verteilung unterliegt wie **(des, maj)**. Dies wurde wenig später von Foata und Zeilberger in [21] bewiesen. Denerts Statistik ebnete zudem den Weg für eine neue Art von Mahonschen Permutationsstatistiken; solchen, die sich aus „kleineren“ Teilstatistiken zusammensetzen. Die meisten der in der letzten Zeit konstruierten Mahonschen Statistiken sind zusammengesetzt. (Für eine systematische Studie siehe [8] und [2].)

Einige dieser Bausteine sind aber bereits selbst kombinatorisch interessant. Zwei von ihnen, der gewichteten Anzahl der Aufstiege (**dexc**) und der gewichteten Anzahl der Abstiege (**ddes**) widmen wir diese Arbeit.

Berücksichtigt man statt des bloßen Auftretens eines Auf- bzw. Abstiegs auch den Abstand zum Wert bzw. zwischen den Werten, so erhält man einen Einblick in die Struktur der positiven Differenzen einer Permutation; zum einen der Differenzen zwischen den Elementen $1, \dots, n$ und ihren Bildern π_1, \dots, π_n , zum anderen der Differenzen zwischen den aufeinanderfolgenden Werten π_i und π_{i+1} .

Abgesehen davon, daß diese natürlichen Abwandlungen der klassischen **exc** und **des** an sich untersuchenswert sind, spielen die Differenzen bei verschiedenen Anwendungen der diskreten Mathematik eine große Rolle.

In der Signalverarbeitung ist man an Mustern (Permutationsmatrizen) interessiert, die sich von ihren Zeit- und Frequenzshifts unterscheiden lassen. Im Idealfall stimmen alle diese Shifts in höchstens einem Punkt mit dem Original überein. Diese optimalen Radar- und Sonarmuster werden (nach ihrem Entdecker [9]) Costas-Arrays genannt. Geometrisch lassen sich die Costas-Arrays vom Format n wie folgt charakterisieren: Jeder der $\binom{n}{2}$ Vektoren zwischen zwei Arraypunkten ist von unterschiedlicher Gestalt. Interpretieren wir die Matrix als Permutation, so ist diese Bedingung gleichbedeutend mit $\pi_{i+k} - \pi_i \neq \pi_{j+k} - \pi_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n - k$ und $k \geq 1$. Die Differenzen sind hier also die grundlegenden Objekte.

Die bisher einzigen Klassen von Costas-Arrays gehen auf Welch und Golomb (1984) zurück. Ihre Konstruktionen basieren auf primitiven Elementen endlicher Körper; die resultierenden Arrays sind daher vom Format $p - 1$ bzw. $p^a - 2$, wobei p eine Primzahl sei. Abgesehen von einigen damit verbundenen Reduktionen (die die Größe der Arrays um höchstens 2 verringern), sind seitdem keine weiteren Konstruktionen gefunden worden. Insbesondere ist noch völlig unklar, ob es tatsächlich zu jeder natürlichen Zahl n ein Costas-Array vom Format n gibt. Durch das

Studium der (zunächst) ersten Differenzen in einer Permutation könnten dieser Problemstellung entscheidende Impulse verliehen werden.

Wir werden zeigen, daß die gewichteten Statistiken **dexc** und **ddes** sowohl zueinander als auch (naturgemäß) zu ihren klassischen Vorbildern **exc** und **des**, als auch zur Anzahl der Inversionen in enger Beziehung stehen. Insbesondere der Zusammenhang von **dexc** und **inv** spielt dabei eine zentrale Rolle. Er ermöglicht es, die vollständige Verteilung der gewichteten Statistiken auf der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n von den entsprechenden Verteilungskoeffizienten auf einer sehr viel kleineren Menge von Permutationen abzuleiten. Diese mit \mathcal{M}_n bezeichnete Menge wird durch die Bedingung $\text{inv}(\pi) = \text{dexc}(\pi)$ definiert und ihre Elemente als die bi-ansteigenden (oder 321-freien) Permutationen charakterisiert.

Dies leitet zu einem weiteren Aspekt in der Theorie der Permutationsstatistiken über: das Studium von bestimmten Mustern. Dabei ist man zunächst daran interessiert, die Permutationen zu zählen, die ein gegebenes Muster *nicht* enthalten (vergleiche [35], [42]). In der letzten Zeit geht man allerdings auch dazu über, Permutationen mit einer vorgegebenen Anzahl eines bestimmten Musters zu betrachten (etwa [30], [25]). Derartige Untersuchungen werden sowohl durch Fragestellungen der Informatik als auch durch Probleme im Zusammenhang mit der kombinatorischen Analyse von Wörtern motiviert. Obwohl die methodische Betrachtung von verbotenen Mustern erst vor rund 15 Jahren begann, gibt es heute eine Fülle von Literatur zu diesem Thema, die beständig anwächst. Wir werden am Ende dieser Arbeit zeigen, daß sich unsere für die 321-freien Permutationen formulierten Resultate auch auf 132-freie (und somit auf alle durch Muster der Länge 3 restringierten) Permutationen übertragen lassen. Die dazu konstruierte Korrespondenz basiert auf den Permutationsdiagrammen. Auch hier bieten sich Ansatzpunkte für das Studium von Costas-Arrays.

Im Kapitel 3 – dem Herzstück der Arbeit – untersuchen wir die vier Statistiken **exc**, **dexc**, **des** und **ddes** auf \mathcal{M}_n und analysieren die gemeinsamen Verteilungen der Paare (**exc**, **dexc**) und (**des**, **ddes**). Die grundlegende Idee ist dabei, die Permutationen durch andere kombinatorische Objekte darzustellen, die die Werte der Statistiken durch markante Größen verschlüsseln.

Die Umsetzung der aufstiegsbasierten Statistiken **exc** und **dexc** führt uns zu den Polyominos. Diese ursprünglich in der statistischen Physik (dort unter dem Namen „animals“) und der „Unterhaltungsmathematik“ betrachteten Objekte, sind längst Gegenstand eines eigenen Forschungszweigs der Kombinatorik geworden. (Einen Überblick liefert [10].) Es sind zwei Arten von Problemen, die sich im Zusammenhang mit den Polyominos stellen. Zum einen soll die Anzahl der Polyominos bezüglich der Fläche und/oder des Umfangs bestimmt, zum anderen sollen Überdeckungen durch eine Menge von Polyominos studiert werden.

Im Bereich der Enumeration sind noch viele Fragen offen; exakte Resultate existieren bisher nur für spezielle Klassen von Polyominos. Auch die von uns betrachteten Objekte fallen in eine besondere Klasse, die der Parallelogrammpolyominos. (Aufgrund ihrer Verbindung zur Theorie der symmetrischen Funktionen – Parallelogrammpolyominos sind nichts anderes als zusammenhängende Schiefdiagramme – ist diese Klasse sicherlich eine der wichtigsten.) Bezüglich ihres Umfangs werden die Parallelogrammpolyominos von den Catalan-Zahlen gezählt. Die erzeugende Funktion bezüglich der Fläche, Breite und Höhe hängt von q -Bessel-Funktionen und q -Catalan-Zahlen ab ([11], [12]).

Bisher war jedoch offen, wie die Parallelogrammpolyominos bezüglich des Umfangs *und* der Fläche verteilt sind. Unsere Untersuchungen führen zu expliziten Formeln, die genau diese Frage für Parallelogrammpolyominos mit Einheitsvertikalen beantworten. Dabei nutzen wir aus, daß diese Art von Polyominos auf einer sehr einfachen kombinatorischen Struktur basiert, den Kompositionen. Die Enumeration der Polyominos läßt sich demzufolge auf die Untersuchung der Vergleichbarkeit von Kompositionen bezüglich der Dominanzordnung zurückführen.

Durch eine einfache Transformation sind die Resultate auf die allgemeinen Parallelogrammpolyominos übertragbar.

Die Koeffizienten der gemeinsamen Verteilung von $(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})$ auf der Menge \mathcal{M}_n ergeben sich nun als Anzahl spezieller Parallelogrammpolyominos, wobei die Anzahl der Aufstiege durch die Höhe und der Wert von \mathbf{dexc} durch die Fläche des Polyominos kodiert werden.

Das zweite, zur Analyse der abstiegsbasierten Statistiken \mathbf{des} und \mathbf{ddes} verwendete, Schlüsselobjekt sind die Motzkin-Pfade. Zusammenhänge zwischen Permutationsstatistiken und Gitterpfaden, insbesondere Motzkin-Pfaden, finden sich in der Literatur sehr häufig ([22], [21], [5]). Beispielsweise benutzt der oben erwähnte Beweis der Gleichverteilung von $(\mathbf{exc}, \mathbf{den})$ und $(\mathbf{des}, \mathbf{maj})$ nach Foata-Zeilberger eine solche Korrespondenz.

Die Anzahl der Abstiege und ihr gewichtetes Pendant \mathbf{ddes} finden sich in der Anzahl der Diagonalschritte und der Höhensumme des Pfades wieder. Die Enumeration dieser speziellen Pfade ist nicht vorgenommen worden, so daß das Verteilungsproblem für $(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})$ auf \mathcal{M}_n weiterhin offen ist. Für die symmetrische Gruppe ist dies nicht relevant, da die Paare $(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})$ und $(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})$ dort derselben Verteilung unterliegen.

Der kombinatorische Nachweis der Gleichverteilung der gewichteten Statistiken auf der Menge der bi-ansteigenden Permutationen bringt nun die beiden Objekte zusammen: Wir erhalten eine Korrespondenz zwischen den Parallelogrammpolyominos und den speziellen Motzkin-Pfaden Ω_n . Delest und Viennot ([13]) konstruierten 1984 eine Bijektion zwischen den Parallelogrammpolyominos und den Dyck-Pfaden, die grundlegend für die Herleitung von erzeugenden Funktionen für bestimmte Polyominos ist. Wie diese überträgt unsere Abbildung alle polyominotypischen Größen wie die Breite, die Höhe, den Umfang und die Fläche. Darüber hinaus wird aber auch der

Rang, ein wichtiges Charakteristikum im Kontext der Schiefdiagramme, als Anzahl bestimmter Pfadmuster verschlüsselt. Dies macht die Korrespondenz auch für Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Rang von Schiefdiagrammen interessant.

Durch das Studium der unterschiedlichen kombinatorischen Objekte werden zudem die Zusammenhänge zwischen bekannten Korrespondenzen klar.

So stellt unsere Abbildung der bi-ansteigenden Permutationen auf die Polyominos das fehlende Bindeglied zwischen der Zuordnung von Parallelogrammpolyominos und Dyck-Pfaden nach Delest-Viennot und der von Billey, Jokusch und Stanley in [6] angegebenen Bijektion zwischen den bi-ansteigenden Permutationen und den Dyck-Pfaden dar.

Durch die oben erwähnte Transformation zwischen 321- und 132-freien Permutationen wird zudem die Analogie zu einer erst kürzlich ([25]) von Krattenthaler konstruierten Bijektion nachgewiesen, die die 132-freien Permutationen mit den Dyck-Pfaden verbindet.

Alle hier aufgeführten Objekte verbindet eines: Sie werden von den in der enumerativen Kombinatorik allgegenwärtigen Catalan-Zahlen gezählt. Dies eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten, die Betrachtungen auf andere Strukturen auszudehnen, nämlich auf all jene, die in der berühmten „Catalan-Liste“ zusammengefaßt werden, der auch wir neue Interpretationen hinzufügen konnten.

Kapitel 2

Die Statistiken dexc und ddes

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der Definition der beiden gewichteten Permutationsstatistiken, die diesem Kapitel seinen Namen gaben.

Wie sich im Abschnitt 2 zeigen wird, weisen ihre Verteilungen einige Gesetzmäßigkeiten auf, die ihr Studium erleichtern werden. So sind dexc und ddes – wie auch ihre klassischen Vorbilder – auf der symmetrischen Gruppe gleichverteilt. Auch die Paare aus einer der Statistiken exc bzw. des und ihrem gewichteten Pendant unterliegen derselben Verteilung; die Koeffizienten sind zudem bezüglich des ersten Parameters symmetrisch. Mit Hilfe einfacher Ansätze werden wir die Ränder der Verteilungen bestimmen, aber auch die Grenzen solcher Methoden aufzeigen.

Der Abschnitt 3 untersucht die Zusammenhänge zwischen unseren und den klassischen Statistiken. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Satz 2.3.2, der die Beziehung von dexc zur Anzahl der Inversionen beschreibt. Dies führt insbesondere zur Betrachtung der Menge von Permutationen, für die inv und dexc identische Werte annehmen. Für diese Permutationen geben wir verschiedene Charakterisierungen an, die die Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen bilden.

2.1 Definition

Sei \mathcal{S}_n die symmetrische Gruppe auf der Menge $[n]$ und $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation.

Erfüllt eine Position $i \in [n]$ die Bedingung $\pi_i > i$, so nennen wir sie *Aufstieg von π* und andernfalls *Fallstelle*¹ von π . Desweiteren heißt $i \in [n]$ *Abstieg von π* , falls $\pi_i > \pi_{i+1}$ und *Anstieg von π* , falls $\pi_i < \pi_{i+1}$ gilt². Dabei sei $\pi_{n+1} := n + 1$ gesetzt, so daß die Position n stets ein Anstieg ist. Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\pi_i > \pi_j$ nennen wir eine *Inversion von*

¹Abweichend von der umgangssprachlichen Bedeutung schließt der Begriff der Fallstelle auch die Fixpunkte $i = \pi_i$ ein.

²Anders als im wahren Leben kann ein Abstieg also auch ein Aufstieg sein.

π . Die Menge der Aufstiege, Abstiege bzw. Inversionen von π wird mit $E(\pi)$, $D(\pi)$ bzw. $I(\pi)$ bezeichnet.

Drei der klassischen Permutationsstatistiken zählen das Auftreten genau dieser Zustände:

$$\begin{aligned}\text{exc}(\pi) &= |E(\pi)|, \\ \text{des}(\pi) &= |D(\pi)|, \\ \text{inv}(\pi) &= |I(\pi)|,\end{aligned}$$

die vierte, der sogenannte *major index*, wichtet jeden Abstieg mit seiner Position:

$$\text{maj}(\pi) = \sum_{i \in D(\pi)} i.$$

Wir werden im folgenden die beiden Statistiken untersuchen, die die Aufstiege bzw. Abstiege einer Permutation π mit dem Wert $\pi_i - i$ bzw. $\pi_i - \pi_{i+1}$ wichten.

Definition 2.1.1 Für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ sei

$$\text{dexc}(\pi) = \sum_{i \in E(\pi)} (\pi_i - i) \quad \text{bzw.} \quad \text{ddes}(\pi) = \sum_{i \in D(\pi)} (\pi_i - \pi_{i+1})$$

die Summe der positiven Differenzen $\pi_i - i$ bzw. $\pi_i - \pi_{i+1}$ in π .

Beispiel 2.1.2 Die Permutation $\pi = 42836975110 \in \mathcal{S}_{10}$ hat die Aufstiege $E(\pi) = \{1, 3, 5, 6\}$ und die Abstiege $D(\pi) = \{1, 3, 6, 7, 8\}$. Es gilt also

$$\begin{aligned}\text{dexc}(\pi) &= (4 - 1) + (8 - 3) + (6 - 5) + (9 - 6) = 12, \\ \text{ddes}(\pi) &= (4 - 2) + (8 - 3) + (9 - 7) + (7 - 5) + (5 - 1) = 15.\end{aligned}$$

2.2 Eigenschaften der Verteilungen

Im Mittelpunkt der Analyse von Statistiken steht die Bestimmung der Verteilung, die darüber informiert, wie viele Permutationen bezüglich der Statistik einen festen Wert k annehmen.

Für eine Permutationsstatistik $f : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert die Folge $S_n^f(0), S_n^f(1), S_n^f(2), \dots$ mit

$$S_n^f(k) := |\{\pi \in \mathcal{S}_n : f(\pi) = k\}|$$

die Verteilung von f .

In diesem Abschnitt werden wir einige Eigenschaften der Verteilungen von dexc und ddes – ohne explizite Kenntnis der Koeffizienten $S_n^f(k)$ – angeben.

Es ist wohlbekannt, daß die Anzahl der Aufstiege und die Anzahl der Abstiege auf der \mathcal{S}_n gleichverteilt sind. Den ersten kombinatorischen Beweis dafür lieferte Foata (siehe [20, Th. 10.2.3]). Auch die beiden gewichteten Statistiken **dexc** und **ddes** unterliegen derselben Verteilung.

Satz 2.2.1 *Es gilt $S_n^{\text{dexc}}(k) = S_n^{\text{ddes}}(k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ derart in disjunkte Zykeln $\pi = (c_{11} \cdots c_{1l_1})(c_{21} \cdots c_{2l_2}) \cdots (c_{s1} \cdots c_{sl_s})$ zerlegt, daß

- (i) jeder Zykel mit seinem größten Element beginnt und
- (ii) die Zykeln nach ihrem ersten Element aufsteigend geordnet sind ($c_{11} < c_{21} < \dots < c_{s1}$).

Fixpunkte werden dabei als einelementige Zykeln berücksichtigt. Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n, \pi \mapsto c_{11}c_{1l_1}c_{1l_1-1} \cdots c_{12}c_{21}c_{2l_2}c_{2l_2-1} \cdots c_{22} \cdots c_{s1}c_{sl_s}c_{sl_s-1} \cdots c_{s2}$$

ist offensichtlich eine Bijektion, und es gilt $\text{dexc}(\pi) = \text{ddes}(\varphi(\pi))$:

Für $i \in \mathbf{E}(\pi)$ gehören die Elemente i und π_i zum selben Zykel und treten gemäß der Konstruktion als benachbarte Elemente $\pi_i i$ in $\varphi(\pi)$ auf. (Ist π_i das maximale Element des Zykel c , so gilt $c = (\pi_i \cdots i)$, andernfalls $c = (\pi_k \cdots i \pi_i \cdots)$ für ein $k \neq i$.) Wegen der Bedingungen (i) und (ii) ist jeder Fixpunkt von π im Wort $\varphi(\pi)$ kleiner als sein nachfolgendes Element. Gilt $i > \pi_i$, so enthält $\varphi(\pi)$ die Folge $\pi_i i$ oder, falls i das maximale Element eines Zykel der Länge $l > 2$ ist, die Folge $i \pi_i^{l-1} \cdots \pi_i^2 \pi_i$, wobei $\pi_i^k := \pi(\pi_i^{k-1})$ für $k \geq 2$ sei. (Der Fall $l = 2$ läßt sich wegen $\pi_i \in \mathbf{E}(\pi)$ auf den ersten zurückführen.)

Die Differenzen $\pi_i - i > 0$ von π entsprechen also gerade den positiven Differenzen aufeinanderfolgender Elemente in $\varphi(\pi)$.

Aus dem Wort $\varphi(\pi) = a_1 \cdots a_n$ läßt sich π wie folgt rekonstruieren: Man füge eine linke Klammer vor jedes Element a_i mit $a_i > a_j$ für alle $j < i$ ein und setze die rechten Klammern dazu passend. Dies liefert die Zykelfaktorisierung von π . \square

Beispiel 2.2.2 Die Permutation $\pi = 4\ 2\ 8\ 3\ 6\ 9\ 10\ 5\ 1\ 7 \in \mathcal{S}_{10}$ zerlegt sich in

$$\pi = (2)(9\ 1\ 4\ 3\ 8\ 5\ 6)(10\ 7)$$

und wird folglich auf $\varphi(\pi) = 2\ 9\ 6\ 5\ 8\ 3\ 4\ 1\ 10\ 7$ abgebildet. Es gilt $\text{dexc}(\pi) = \text{ddes}(\varphi(\pi)) = (4 - 1) + (8 - 3) + (6 - 5) + (9 - 6) + (10 - 7) = 15$.

Die Abbildung φ ist genau die Bijektion, die Foata zum Nachweis der Gleichverteilung von **exc** und **des** konstruiert hat.

Korollar 2.2.3 *Die Bistatistiken (**exc**, **dexc**) und (**des**, **ddes**) sind auf \mathcal{S}_n gleichverteilt.*

Wir können uns bei den nachfolgenden Untersuchungen also auf eine der beiden Statistiken bzw. Bistatistiken beschränken. Alle nur für eine Statistik formulierten Aussagen gelten auch für die Verteilung der jeweils anderen Statistik.

Wir beginnen mit einer sehr elementaren, aber äußerst hilfreichen Beobachtung.

Lemma 2.2.4 *Die Differenzensumme \mathbf{ddes} wird für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ durch $s(n-s)$ nach oben beschränkt, wobei s die Anzahl der Abstiege von π mit nachfolgendem Anstieg sei.*

Beweis. Seien $i_1 < \dots < i_s$ die Abstiege von π mit $i_k - 1 \notin \mathbf{D}(\pi)$ und $j_1 < \dots < j_s$ die Abstiege, für die $j_k + 1 \notin \mathbf{D}(\pi)$ gilt. (Man beachte, daß die Position n per Definition ein Anstieg ist.) Dann läßt sich

$$\mathbf{ddes}(\pi) = \sum_{k=1}^s \pi_{i_k} - \sum_{k=1}^s \pi_{j_k+1}$$

durch $\sum_{k=1}^s (n+1-k) - \sum_{k=1}^s k = s(n-s)$ nach oben abschätzen. \square

Proposition 2.2.5 *Für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt $0 \leq \mathbf{ddes}(\pi) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.*

Beweis. Die untere Schranke ist definitionsbedingt. Die im Lemma angegebene obere Schranke wird angenommen, wenn (mit den dortigen Notationen) $\pi_{i_k} \in \{n-s+1, \dots, n\}$ und $\pi_{j_k+1} \in \{1, \dots, s\}$ für alle $k = 1, \dots, s$ ist. Für die Anzahl s gilt offensichtlich $s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

Bemerkung 2.2.6 Wir werden später (im Beweis von 2.3.5) eine Folge von Permutationen konstruieren, die zeigt, daß jede Zahl zwischen den Schranken als Wert der Statistik \mathbf{ddes} angenommen wird.

Die folgenden Eigenschaften sind an dieser Stelle zunächst nur Vermutungen, die aus den für kleine n vollständig bekannten Verteilungen von \mathbf{dexc} auf \mathcal{S}_n abgeleitet wurden. Diese sind dem Anhang (A, Tabelle 1) zu entnehmen.

Vermutung 2.2.7 *Die Verteilung von \mathbf{dexc} ist unimodal, d.h. es gibt ein k mit*

$$S_n^{\mathbf{dexc}}(0) \leq \dots \leq S_n^{\mathbf{dexc}}(k-1) \leq S_n^{\mathbf{dexc}}(k) \geq S_n^{\mathbf{dexc}}(k+1) \geq \dots \geq S_n^{\mathbf{dexc}}(\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor).$$

Genauer ist $k = \lceil \frac{n^2-1}{6} \rceil$.

Bemerkung 2.2.8 Die Verteilungsdaten legen nahe, daß die Folge $S_n^{\mathbf{dexc}}(k)$ (für ungerades n bis auf den Randwert) sogar logarithmisch konkav ist, also die Bedingung

$$(S_n^{\mathbf{dexc}}(k))^2 \geq S_n^{\mathbf{dexc}}(k-1) \cdot S_n^{\mathbf{dexc}}(k+1)$$

für alle $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - 2$ erfüllt. Wegen der Positivität der Koeffizienten in diesem Bereich würde daraus sofort die Unimodularität folgen (siehe [38]).

Im Gegensatz zur Eulerschen Statistik **exc** ist **dexc** auf \mathcal{S}_n also nicht symmetrisch. Die gemeinsame Verteilung weist hingegen eine gewisse Symmetrie auf.

In Analogie zum einparametrischen Fall bezeichnen wir die Verteilungskoeffizienten der Bistatistik (\mathbf{f}, \mathbf{g}) mit $S_n^{(\mathbf{f}, \mathbf{g})}(k, l)$. Es sei

$$S_n^{(\mathbf{f}, \mathbf{g})}(k, l) := |\{\pi \in \mathcal{S}_n : \mathbf{f}(\pi) = k, \mathbf{g}(\pi) = l\}|.$$

Satz 2.2.9 Für $e = 0, \dots, n-1$ und $k = e, \dots, e(n-e)$ gilt

$$S_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k) = S_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(n-1-e, n-1-2e+k).$$

Der Beweis erfordert ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge zu anderen Permutationsstatistiken, das wir erst im nächsten Abschnitt erlangen werden.

Im folgenden werden wir die extremalen Verteilungskoeffizienten (also für sehr große bzw. sehr kleine Werte k) von **dexc** bestimmen.

Lemma 2.2.10 Die Statistik **ddes** nimmt für eine Permutation π genau dann ihr Maximum auf \mathcal{S}_n an, wenn $\pi \in \mathcal{S}_n$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Im Fall n gerade: $\pi_i \in \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ für alle geraden $i \in [n]$.
- Im Fall n ungerade: Ist $\pi_i \in \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ für ein $i \in [n]$, so gilt $\pi_{i-1} > \pi_i < \pi_{i+1}$. Ist $\pi_i \in \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor, \dots, n$ für ein $i \in [n]$, so gilt $\pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1}$. Dabei sei $\pi_0 := 0$ und $\pi_{n+1} := n+1$ vereinbart.

Beweis. Die Bedingungen an π resultieren unmittelbar aus der Charakterisierung im Beweis der Proposition 2.2.5. \square

Bemerkung 2.2.11 Die im Teil a) beschriebenen Permutationen sind alternierend, d.h. von der Form $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \dots < \pi_{n-1} > \pi_n$, und es gilt $\mathbf{des}(\pi) = \frac{n}{2}$ sowie $\mathbf{maj}(\pi) = \mathbf{ddes}(\pi)$. Für ungerades n nehmen die Permutationen mit maximalem **ddes**-Wert bezüglich **des** den Wert $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ und bezüglich **maj** den Wert $\frac{n^2-1}{4} + (-1)^a \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$ an, wobei $a = \pi^{-1}(\frac{n+1}{2})$ sei.

Lemma 2.2.12 Sei n gerade und $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit $\mathbf{D}(\pi) = \{1, 3, \dots, n-3, n-1\}$. Dann ist der Wert **ddes**(π) gerade, falls n durch 4 teilbar ist und ungerade sonst.

Beweis. Es gilt

$$\mathbf{ddes}(\pi) = \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ unger.}}}^{n-1} (\pi_i - \pi_{i+1}) = \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ unger.}}}^{n-1} \pi_i - \sum_{\substack{i=2, \\ i \text{ ger.}}}^n \pi_i = \frac{n(n+1)}{2} - 2 \cdot \sum_{\substack{i=2, \\ i \text{ ger.}}}^n \pi_i.$$

\square

Satz 2.2.13 Sei m_n der maximale Wert von $ddes$ auf \mathcal{S}_n , also $m_n = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_n^{ddes}(m_n) &= \begin{cases} (\frac{n}{2})!^2 & \text{für gerades } n \\ n(\frac{n-1}{2})!^2 & \text{für ungerades } n, \end{cases} \\ S_n^{ddes}(m_n - 1) &= \begin{cases} (n-1)^2(\frac{n}{2}-1)!^2 & \text{für gerades } n \\ 2(n-2)(\frac{n-1}{2})!^2 & \text{für ungerades } n, \end{cases} \\ S_n^{ddes}(m_n - 2) &= \begin{cases} (9(\frac{n}{2}-1)^2 - 2)(\frac{n}{2}-1)!^2 & \text{für gerades } n \geq 4 \\ ((n-2)^3 + \frac{1}{2}(n-4)(n-1)^2)(\frac{n-3}{2})!^2 & \text{für ungerades } n \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. In Lemma 2.2.4 wurde gezeigt, daß $ddes(\pi)$ durch $s(n-s)$ nach oben beschränkt ist, wobei s die Anzahl der Abstiege von π mit nachfolgendem Anstieg war. Dies ist die grundlegende Idee der folgenden Betrachtungen.

Sei zunächst n gerade.

$ddes(\pi) = m_n$: Nach Lemma 2.2.10a) wird $ddes$ genau dann maximal, wenn $\pi_2\pi_4\cdots\pi_n$ auf $[\frac{n}{2}]$ und $\pi_1\pi_3\cdots\pi_{n-1}$ auf $\{\frac{n}{2}+1, \dots, n\}$ permutiert. Es folgt $S_n^{ddes}(m_n) = \frac{n}{2}!^2$.

$ddes(\pi) = m_n - 1$: Dann ist $s \geq \frac{n}{2} - 1$. Lemma 2.2.12 schließt den Fall $s = \frac{n}{2}$ aus; $m_n - 1$ ist genau dann gerade, wenn 4 kein Teiler von n ist. Für $s = \frac{n}{2} - 1$ nimmt $ddes(\pi)$ die Schranke $s(n-s)$ an. Mit der Notation aus dem Beweis von Proposition 2.2.5 sind also $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n}{2}+2, \dots, n\}$ und $\pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in [\frac{n}{2}-1]$ zu wählen. Die fehlenden Werte $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}+1$ lassen sich an (fast) beliebiger Stelle in $\pi_{i_1}\pi_{j_1+1}\pi_{i_2}\pi_{j_2+1}\cdots\pi_{i_s}\pi_{j_s+1}$ (ein Wort der Länge $n-2$) einfügen. Um die Invarianz der Differenzensumme zu gewährleisten, muß lediglich eine Bedingung erfüllt werden: Ist $\frac{n}{2}$ der Wert eines Anstiegs, so darf $\frac{n}{2}+1$ nicht unmittelbar vor, ansonsten nicht unmittelbar nach $\frac{n}{2}$ positioniert werden. Also ist $S_n^{ddes}(m_n - 1) = (\frac{n}{2}-1)!^2(n-1)^2$.

$ddes(\pi) = m_n - 2$: Sei nun zusätzlich $n \geq 4$. Auch hier gilt $\frac{n}{2} - 1 \leq s \leq \frac{n}{2}$; allerdings sind jetzt beide Fälle möglich. Wir wählen zunächst $s = \frac{n}{2}$, also $D(\pi) = \{i \in [n] : i \text{ ungerade}\}$. Wegen $m_n - 2 = \sum_{i \text{ unger.}} \pi_i - \sum_{i \text{ ger.}} \pi_i$ und $\sum_i \pi_i = \frac{1}{2}n(n+1)$ summieren sich die Werte der Abstiege zu $\pi_1 + \pi_3 + \dots + \pi_{n-1} = \frac{1}{8}(3n^2 + 2n - 8)$. Diese Bedingung wird nur durch die Wahl $\pi_1, \pi_3, \dots, \pi_{n-1} \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}+3, \dots, n\}$ erfüllt. Sei nun $\pi_i = \frac{n}{2}$. Bei der Festlegung von $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_n$ ist zu beachten, daß dann für den Wert $\frac{n}{2}+1$ weder die Positionen $i-1$ noch $i+1$ zulässig sind. Für $i=1$ resultieren also $(\frac{n}{2}-1)! \cdot (\frac{n}{2}! - (\frac{n}{2}-1)!)$ Möglichkeiten für π , andernfalls existieren $(\frac{n}{2}! - (\frac{n}{2}-1)!) \cdot (\frac{n}{2}! - 2(\frac{n}{2}-1)!)$ Wörter $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, die die Bedingungen erfüllen. Für $s = \frac{n}{2} - 1$ ist $ddes(\pi) = m_n - 2$ gleichbedeutend zu

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+4, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, \dots, \frac{n}{2}-1\}$$

oder

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n}{2}+2, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}\}.$$

Im ersten Fall ist das Einfügen von $\frac{n}{2}$ in $\pi_{i_1}\pi_{j_1+1}\cdots\pi_{i_s}\pi_{j_s+1}$ wiederum an $n-1$ Stellen möglich. Die Position für den Wert $\frac{n}{2}+2$ darf nicht zum Abstieg i_k mit $\pi_{i_k} = \frac{n}{2}+1$ benachbart sein. Der zweite Fall verhält sich analog. Insgesamt erhalten wir $S_n^{\text{ddes}}(m_n-2) = (\frac{n}{2}! - (\frac{n}{2}-1)!)^2 + 2(n-1)(n-3)(\frac{n}{2}-1)!^2 = (\frac{n}{2}-1)!^2((\frac{n}{2}-1)^2 + 2(n-1)(n-3))$.

Die Vorgehensweise für ungerade n ist entsprechend.

$\text{ddes}(\pi) = m_n$: Diese Permutationen wurden in Proposition 2.2.10b) charakterisiert. Die Werte $1, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n$ lassen sich demnach, den Bedingungen entsprechend, auf $(\frac{n-1}{2})!^2$ Möglichkeiten kombinieren, der Wert $\frac{n+1}{2}$ ist beliebig positionierbar. Folglich ist $S_n^{\text{ddes}}(m_n) = n(\frac{n-1}{2})!^2$.

$\text{ddes}(\pi) = m_n - 1$: Dann gilt notwendig $s = \frac{n-1}{2}$, und die Werte der in Proposition 2.2.5 betrachteten An- und Abstiege unterliegen den Bedingungen

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$$

oder

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n+3}{2}, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, \frac{n+1}{2}\}.$$

Das fehlende Element $\frac{n+3}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$ kann auf alle Positionen, außer direkt vor oder nach $\frac{n+1}{2}$, gesetzt werden. Somit gilt $S_n^{\text{ddes}}(m_n-1) = 2(n-2)(\frac{n-1}{2})!^2$.

$\text{ddes}(\pi) = m_n - 2$: Wir setzen zudem $n \geq 5$ voraus. Hier wird s durch $\frac{n-3}{2}$ beschränkt. Im Fall $s = \frac{n-3}{2}$ gilt $\pi_{i_k} \in \{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}$ und $\pi_{j_k+1} \in \{1, \dots, \frac{n-3}{2}\}$ für alle $k = 1, \dots, s$. Das sukzessive Einfügen der Werte $\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ und $\frac{n+3}{2}$ ist auf jeweils $n-2$ Arten möglich. Für $s = \frac{n-1}{2}$ resultieren aus $\text{ddes}(\pi) = m_n - 2$ die Bedingungen

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+7}{2}, \frac{n+9}{2}, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$$

oder

$$\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s} \in \{\frac{n+3}{2}, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_s+1} \in \{1, 2, \dots, \frac{n-5}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}.$$

Der verbleibende Wert läßt sich an $n-4$ Positionen einfügen (eine Nachbarschaft mit $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n+3}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ muß ausgeschlossen werden).

Insgesamt beträgt die Anzahl $S_n^{\text{ddes}}(m_n-2) = (n-2)^3(\frac{n-3}{2})!^2 + 2(n-4)(\frac{n-1}{2})!^2$. \square

Korollar 2.2.14 *Ist n gerade, so gilt $S_n^{\text{ddes}}(m_n-1) = (n-1)S_{n-1}^{\text{ddes}}(m_{n-1})$, andernfalls erfüllt $S_n^{\text{ddes}}(m_n-1)$ die Rekursion $S_n^{\text{ddes}}(m_n-1) = 2(n-2)S_{n-1}^{\text{ddes}}(m_{n-1})$.*

Bemerkung 2.2.15 Der Beweis macht deutlich, daß dieser Argumentation schnell Grenzen gesetzt sind. Zum einen wächst mit der Differenz von $\text{ddes}(\pi)$ zum Maximum m_n die Anzahl der möglichen Werte für s , zum anderen ufern die Bedingungen an π_{i_k} und π_{j_k+1} zusehends aus.

Ein anderer Ansatz basiert auf der sukzessiven Konstruktion der Permutationen. Auch damit ist es uns nur möglich, die Verteilungskoeffizienten am Rand, diesmal am linken, zu bestimmen.

Lemma 2.2.16 Für $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{S}_n$ sei $[\pi] := \{\pi_1 \cdots \pi_i n + 1 \pi_{i+1} \cdots \pi_n : i = 0, \dots, n\}$ die Menge der Erweiterungen von π . Dann gilt $ddes(\pi) \leq ddes(\sigma) \leq ddes(\pi) + n$ für alle $\sigma \in [\pi]$.

Beweis. Sei $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_i n + 1 \pi_{i+1} \cdots \pi_n$ mit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Ist i ein Abstieg von π , so gilt $ddes(\sigma) = ddes(\pi) - (\pi_i - \pi_{i+1}) + (n + 1 - \pi_{i+1}) = ddes(\pi) + n + 1 - \pi_i$, andernfalls $ddes(\sigma) = ddes(\pi) + n + 1 - \pi_{i+1}$. Das Anfügen von $n + 1$ an π verändert $ddes$ hingegen nicht. \square

Satz 2.2.17 Für alle $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} S_n^{ddes}(0) &= 1, \\ S_n^{ddes}(1) &= n - 1, \\ S_n^{ddes}(2) &= \frac{1}{2}(n-2)(n+3), \\ S_n^{ddes}(3) &= \frac{1}{6}(n-3)(n^2 + 9n + 2). \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $ddes(\pi) = 0$ genau dann, wenn $D(\pi) = \emptyset$, also $\pi = \text{id}$, ist. Die Standardtranspositionen $s_i = (i, i+1)$ mit $i = 1, \dots, n-1$ sind genau die Elemente in \mathcal{S}_n mit dem $ddes$ -Wert 1.

Nach Lemma 2.2.16 sind die Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $ddes(\sigma) = 2$ unter den Erweiterungen der $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$ mit $ddes(\pi) \leq 2$ zu suchen:

$$\begin{aligned} \pi = \text{id}_{n-1} : \quad \sigma &= 1 \cdots n - 3 \underline{n} n - 2 n - 1; \\ \pi = s_i, i = 1, \dots, n-3 : \quad \sigma &= 1 \cdots i + 1 i \cdots n - 2 \underline{n} n - 1; \\ \pi = s_{n-2} : \quad \sigma &= 1 \cdots n - 3 \underline{n} n - 1 n - 2, 1 \cdots n - 3 n - 1 \underline{n} n - 2. \end{aligned}$$

Zudem liefert jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$ mit $ddes(\pi) = 2$ durch Anfügen von n genau ein weiteres $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $ddes(\sigma) = 2$. Wir erhalten also die Rekursion $S_n^{ddes}(2) = S_{n-1}^{ddes}(2) + n$ und mit dem Anfangswert $S_2^{ddes}(2) = 0$ die explizite Beschreibung.

Analog verfahren wir für den Parameter $k = 3$. Es gilt

$$S_n^{ddes}(3) = S_{n-1}^{ddes}(3) + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_{n-1} \\ ddes(\pi) \leq 2}} |\{\sigma \in [\pi] : ddes(\sigma) = 3\}|.$$

Die Identität auf \mathcal{S}_{n-1} erzeugt $\sigma = 1 \cdots n - 4 \underline{n} n - 3 n - 2 n - 1$. Für die Transpositionen s_i mit $i = 1, \dots, n-4$ ist $\sigma = 1 \cdots i + 1 i \cdots n - 3 \underline{n} n - 2 n - 1$ die einzige Permutation in $[s_i]$ mit $ddes(\sigma) = 3$, für s_{n-3} sind es $1 \cdots n - 4 \underline{n} n - 2 n - 3 n - 1$ und $1 \cdots n - 4 n - 2 \underline{n} n - 3 n - 1$. Für die Erweiterungen σ von s_{n-2} gilt $ddes(\sigma) \neq 3$.

Die Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$, für die $ddes$ den Wert 2 annimmt, wurden im vorherigen Beweisteil charakterisiert. Unter ihren Erweiterungen finden sich folgende $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $ddes(\sigma) = 3$:

- $\pi = 1 \cdots n - 4 n - 1 n - 3 n - 2 \in [\text{id}_{n-2}]$:
 $\sigma = 1 \cdots n - 4 \underline{n} n - 1 n - 3 n - 2, 1 \cdots n - 4 n - 1 \underline{n} n - 3 n - 2$;

- $\pi = 1 \cdots i + 1 i \cdots n - 3 \underline{n} - 1 n - 2 \in [s_i]$ mit $i = 1, \dots, n - 4$:
 $\sigma = 1 \cdots i + 1 i \cdots n - 3 \underline{n} n - 1 n - 2, 1 \cdots i + 1 i \cdots n - 3 n - 1 \underline{n} n - 2$;
- $\pi = 1 \cdots n - 4 n - 1 n - 2 n - 3 \in [s_{n-3}]$:
 $\sigma = 1 \cdots n - 4 \underline{n} n - 1 n - 2 n - 3, 1 \cdots n - 4 n - 1 \underline{n} n - 2 n - 3$;
- $\pi = 1 \cdots n - 4 n - 2 n - 1 n - 3 \in [s_{n-3}]$:
 $\sigma = 1 \cdots n - 4 n - 2 \underline{n} n - 1 n - 3, 1 \cdots n - 4 n - 2 n - 1 \underline{n} n - 3$;
- $\pi = \tau_1 \cdots \tau_{n-2} n - 1$ mit $\tau \in \mathcal{S}_{n-2}$ und $\mathbf{ddes}(\tau) = 2$:
 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{n-2} \underline{n} n - 1$.

Also ist

$$S_n^{\mathbf{ddes}}(3) = S_{n-1}^{\mathbf{ddes}}(3) + 1 + (n - 2) + (2(n - 1) + S_{n-2}^{\mathbf{ddes}}(2)).$$

Mit $S_3^{\mathbf{ddes}}(3) = 0$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.2.18 Auch dieser Ansatz erschöpft sich sehr schnell in einer Vielzahl von Fallunterscheidungen. Noch unzuweckmäßiger sind solche Methoden für die Bestimmung der gemeinsamen Verteilung von \mathbf{exc} und \mathbf{dexc} .

Eine Erkenntnis, die wir in diesem Abschnitt gewonnen haben, ist die: Um die Verteilung der Statistiken \mathbf{dexc} bzw. $(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})$ auf der \mathcal{S}_n vollständig bestimmen zu können, müssen wir uns von der „permutationsnahen“ Sprache lösen.

2.3 Zusammenhang zu anderen Statistiken

Definitionsbedingt bestehen zwischen den Statistiken \mathbf{dexc} und \mathbf{exc} bzw. \mathbf{ddes} und \mathbf{des} enge Beziehungen. Überraschender ist der zu Beginn des Abschnitts beschriebene Zusammenhang von \mathbf{dexc} und der Anzahl der Inversionen.

Für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ bezeichne π_E die Einschränkung von π auf $E(\pi)$, π_{NE} entsprechend die Einschränkung auf die Fallstellen von π .

Bei Untersuchungen bezüglich der Inversionen einer Permutation ist die Betrachtung des sogenannten *Codes* sehr hilfreich. Wir definieren den Code (c_1, \dots, c_n) von π als Folge der Zahlen

$$c_i := |\{j \in [n] : j < i, \pi_j > \pi_i\}|.$$

Offensichtlich gilt $c_1 + \dots + c_n = \mathbf{inv}(\pi)$.

Beispiel 2.3.1 Für die bereits in 2.1.2 betrachtete Permutation $\pi = 4\ 2\ 8\ 3\ 6\ 9\ 7\ 5\ 1\ 10 \in \mathcal{S}_{10}$ ist $\pi_E = 4\ 8\ 6\ 9$ und $\pi_{NE} = 2\ 3\ 7\ 5\ 1\ 10$. Als Code erhalten wir $\mathbf{code}(\pi) = (0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 4, 8, 0)$.

Satz 2.3.2 Für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathbf{inv}(\pi) - \mathbf{dexc}(\pi) = \mathbf{inv}(\pi_E) + \mathbf{inv}(\pi_{NE})$.

Beweis. Seien $i_1 < \dots < i_e$ die Aufstiege und $j_1 < \dots < j_{n-e}$ die übrigen Positionen von π . Ferner bezeichne $\hat{\pi} \in \mathcal{S}_n$ die Permutation, die durch Sortierung von π_E bzw. π_{NE} in aufsteigender Ordnung aus π hervorgeht. Dies bedeutet $\hat{\pi}_{i_k} = \pi_{\sigma(i_k)}$ für $k = 1, \dots, e$ und $\hat{\pi}_{j_k} = \pi_{\tau(j_k)}$ für $k = 1, \dots, n-e$, wobei σ und τ derart auf $E(\pi)$ bzw. $[n] \setminus E(\pi)$ permutieren, daß $\hat{\pi}_{i_1} < \dots < \hat{\pi}_{i_e}$ bzw. $\hat{\pi}_{j_1} < \dots < \hat{\pi}_{j_{n-e}}$ ist. Wir zeigen zunächst

$$\begin{aligned} \text{exc}(\hat{\pi}) &= \text{exc}(\pi), \\ \text{dexc}(\hat{\pi}) &= \text{dexc}(\pi). \end{aligned}$$

Jeder Aufstieg von π ist auch ein Aufstieg von $\hat{\pi}$. Für $i_k, i_l \in E(\pi)$ mit $i_k < i_l$ und $\pi_{i_k} > \pi_{i_l}$ gelten die Relationen $i_k < i_l < \pi_{i_l}$ und $i_l < \pi_{i_l} < \pi_{i_k}$. Umgekehrt erhält jede Permutation auf $[n] \setminus E(\pi)$ auch die Fallstellen von π . Sind $j_k, j_l \in [n] \setminus E(\pi)$ mit $j_k < j_l$ und $\pi_{j_k} > \pi_{j_l}$, so ist $j_k \geq \pi_{j_k} > \pi_{j_l}$ bzw. $j_l > j_k \geq \pi_{j_k}$. Folglich stimmen $\text{exc}(\pi)$ und $\text{exc}(\hat{\pi})$ überein, und es gilt

$$\text{dexc}(\pi) = \sum_{k=1}^e (\pi_{i_k} - i_k) = \sum_{k=1}^e (\pi_{\sigma(i_k)} - i_k) = \text{dexc}(\hat{\pi}).$$

Nun betrachten wir die Inversionen. Sei $\pi_{i_1} < \dots < \pi_{i_a} > \pi_{i_{a+1}}$. Für den Code (c_1, \dots, c_n) von π ist dann $c_{i_a} = 0$ und $c_{i_{a+1}} \geq 1$ ($c_{i_{a+1}}$ zählt alle Aufstiege $i_k \leq i_a$ mit $\pi_{i_k} > \pi_{i_{a+1}}$). Werden nun π_{i_a} und $\pi_{i_{a+1}}$ vertauscht, so gilt für den Code (c'_1, \dots, c'_n) dieser Permutation

$$\begin{aligned} c'_{i_a} &= c_{i_{a+1}} - 1, \\ c'_{i_{a+1}} &= 0, \\ c'_j &= c_j \quad \text{für alle } j \in [n] \setminus \{i_a, i_{a+1}\}. \end{aligned}$$

Für $j = 1, \dots, i_a - 1, i_{a+1} + 1, \dots, n$ ist die Invarianz klar. Die Positionen $j = i_a + 1, \dots, i_{a+1} - 1$ sind Fallstellen, für sie gilt $\pi_j \leq j < i_{a+1} < \pi_{i_{a+1}} < \pi_{i_a}$. Die Fehlstellung (i_a, j) tritt also sowohl in π als auch in π' auf.

Folglich wird die Anzahl der Inversionen durch die Transposition $(\pi_{i_a}, \pi_{i_{a+1}})$ um 1 reduziert. Um $\hat{\pi}$ aus π zu konstruieren, sind $\text{inv}(\pi_{i_1} \dots \pi_{i_e})$ derartige Vertauschungen nötig. Für die Fallstellen argumentiere man analog. Wir erhalten

$$\text{inv}(\hat{\pi}) = \text{inv}(\pi) - \text{inv}(\pi_E) - \text{inv}(\pi_{NE}).$$

Nach Konstruktion sind die Einschränkungen $\hat{\pi}_E$ und $\hat{\pi}_{NE}$ inversionenfrei. Der Code $(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$ von $\hat{\pi}$ erfüllt deshalb die Bedingungen $\hat{c}_i = 0$ für alle $i \in E(\hat{\pi}) = E(\pi)$ und $\hat{c}_j = j - \hat{\pi}_j$ für alle $j \in [n] \setminus E(\pi)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{inv}(\hat{\pi}) &= \hat{c}_{j_1} + \dots + \hat{c}_{j_{n-e}} = j_1 + \dots + j_{n-e} - (\hat{\pi}_{j_1} + \dots + \hat{\pi}_{j_{n-e}}) \\ &= \binom{n+1}{2} - (i_1 + \dots + i_e) - \binom{n+1}{2} + (\hat{\pi}_{i_1} + \dots + \hat{\pi}_{i_e}) = \text{dexc}(\hat{\pi}), \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

Beispiel 2.3.3 Für $\pi = \underline{4} \underline{2} \underline{8} \underline{3} \underline{6} \underline{9} \underline{7} \underline{5} \underline{1} \underline{10} \in \mathcal{S}_{10}$ ist $\hat{\pi} = \underline{4} \underline{1} \underline{6} \underline{2} \underline{8} \underline{9} \underline{3} \underline{5} \underline{7} \underline{10}$, und es gilt

$$\text{inv}(\pi) = \text{dexc}(\pi) + \text{inv}(4 \ 8 \ 6 \ 9) + \text{inv}(2 \ 3 \ 7 \ 5 \ 1 \ 10) = 12 + 1 + 5 = 18.$$

Bemerkung 2.3.4 Der Zusammenhang 2.3.2 wurde bereits in [8] angegeben. Clarke et al. betrachteten die aus den Teilstatistiken **dexc** (dort **edif**) und $\text{inv}(\pi_E) + \text{inv}(\pi_{NE})$ zusammengesetzte Statistik **env** und wiesen letztlich nach, daß diese mit **inv** identisch ist.

Die im Beweis eingeführte Sortierung $\hat{\pi}$ wird auch in den folgenden Ausführungen eine wichtige Rolle spielen.

Die im Anhang (A, Tabelle 2) angegebene Verteilung der Bistatistik **(dexc, inv)** auf \mathcal{S}_6 suggeriert, daß die Differenz zwischen dem **dexc**- und dem **inv**-Wert einer Permutation eher gering ist. In der Tat können wir die folgende Abschätzung angeben.

Korollar 2.3.5 Für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt $\text{dexc}(\pi) \leq \text{inv}(\pi) \leq 2\text{dexc}(\pi) - \text{exc}(\pi)$.

Beweis. Die untere Schranke folgt unmittelbar aus Satz 2.3.2. Zum Nachweis der oberen konstruieren wir zunächst eine Folge $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \dots$ von Permutationen, für die $\text{dexc}(\pi^{(k)}) = k$ und $\text{inv}(\pi^{(k)}) = 2k - \text{exc}(\pi^{(k)})$ gilt. Setze $\pi^{(0)} = \text{id}$. Für $e = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ führe folgende Prozedur aus: Sei $a = \pi_e^{(k-1)}$. Ist $a < n + 1 - e$, so setze

$$\begin{aligned} \pi_e^{(k)} &:= a + 1, \\ \pi_a^{(k)} &:= a, \quad \text{falls } a \neq e, \\ \pi_{a+1}^{(k)} &:= e, \\ \pi_i^{(k)} &:= \pi_i^{(k-1)} \quad \text{für } i \in [n] \setminus \{e, a, a+1\}. \end{aligned}$$

(Der Ablauf des Algorithmus wird im nachfolgenden Beispiel demonstriert.) Auf diese Weise erzeugen wir $n - 2e + 1$ Permutationen, die jeweils e Aufstiege besitzen. (Genauer ist $E = [e]$.) Nach Konstruktion gilt $\text{dexc}(\pi^{(k)}) = \text{dexc}(\pi^{(k-1)}) + 1$. Innerhalb der Prozedur (für ein festes e) erhöht sich die Anzahl der Inversionen in jedem Schritt um 2, beim Übergang $e \rightarrow e + 1$ jedoch nur um 1. Folglich gilt $\text{inv}(\pi^{(k)}) = 2\text{dexc}(\pi^{(k)}) - \text{exc}(\pi^{(k)})$.

Dieser Wert ist aber auch maximal für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\text{dexc}(\pi) = k$ und $\text{exc}(\pi) = e$. Nach Satz 2.3.2 genügt es dafür, $\text{inv}(\pi_E) + \text{inv}(\pi_{NE}) \leq k - e$ zu zeigen.

Im Beweis dieses Satzes wurde nachgewiesen, daß die Permutation $\hat{\pi}$ (hervorgegangen aus π durch Sortierung von π_E und π_{NE}) dieselben Werte bezüglich **exc** und **dexc** annimmt wie π . Zudem gilt $\text{inv}(\hat{\pi}_E) = \text{inv}(\hat{\pi}_{NE}) = 0$.

Hier untersuchen wir den umgekehrten Sachverhalt: Sei $\sigma \in \mathcal{M}_n$ eine Permutation mit den Aufstiegen $i_1 < \dots < i_e$, den Fallstellen $j_1 < \dots < j_{n-e}$ und den inversionenfreien Einschränkungen σ_E und σ_{NE} . Wie viele Vertauschungen können an σ_E bzw. σ_{NE} maximal vorgenommen werden,

ohne die Menge der Aufstiege (und damit exc und dexc) zu verändern?

Betrachte dazu das folgende Schema:

$$\begin{aligned} 1 & : i_1 + 1, \dots, \sigma_{i_1} - 1, \sigma_{i_1} \\ 2 & : i_2 + 1, \dots, \sigma_{i_2} - 1, \sigma_{i_2} \\ & \vdots \\ e & : i_e + 1, \dots, \sigma_{i_e} - 1, \sigma_{i_e} \end{aligned}$$

(Die Voraussetzungen an σ bedingen $\sigma_{i_1} < \dots < \sigma_{i_e}$.) Offensichtlich entspricht die Anzahl aller vom letzten Eintrag verschiedenen Zeilenelemente der Differenz $\text{dexc}(\sigma) - \text{exc}(\sigma)$. Tritt der Wert σ_{i_k} in der Zeile $l \neq k$ auf (dann ist $l > k$), so sind σ_{i_k} und σ_{i_l} vertauschbar. Zum einen gilt $i_l < \sigma_{i_k}$, zum anderen $i_k < \sigma_{i_k} < \sigma_{i_l}$. Folglich läßt sich die Inversionenanzahl $\text{inv}(\pi_E)$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\hat{\pi} = \sigma$ durch

$$\sum_{i \in E(\sigma)} |\{k \in E(\sigma) : k < \sigma_i < \sigma_k\}|$$

nach oben abschätzen. (Man beachte, $E(\pi) = E(\sigma)$.)

Alle von $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_e}$ verschiedenen Zeilenelemente entsprechen den möglichen Vertauschungen auf σ_{NE} . Sei σ_{j_k} ein Eintrag in der Zeile l . Dann korrespondiert (i_l, j_k) zu einem Indexpaar (j_m, j_k) mit $\sigma_{j_k} \leq j_m < j_k$. Da auch die Werte $\sigma_{j_1} < \dots < \sigma_{j_{m-e}}$ geordnet sind, lassen sich σ_{j_m} und σ_{j_k} insbesondere vertauschen. Hier genügt es zu zeigen, daß die Anzahl der Aufstiege i von σ mit $i < \sigma_{j_k} < \sigma_i$ (also die Anzahl der Zeilen mit dem Eintrag σ_{j_k}) mit der Anzahl der Fallstellen j mit $\sigma_{j_k} \leq j < j_k$ übereinstimmt. Dies ist aber offensichtlich: Wegen der fehlenden Inversionen in σ_E und σ_{NE} erfüllen $\sigma_{j_k} - 1$ der Positionen $l = 1, \dots, j_k - 1$ die Bedingung $\sigma_l < \sigma_{j_k}$. Folglich gibt es $j_k - \sigma_{j_k}$ Stellen i mit $i < j_k$ und $\sigma_i > \sigma_{j_k}$ (diese sind notwendig Aufstiege von σ). Für s dieser Stellen gelte nun zusätzlich $i < \sigma_{j_k}$, also für $j_k - \sigma_{j_k} - s$ die Bedingung $\sigma_{j_k} \leq i$. Demnach sind $j_k - \sigma_{j_k} - s$ der Positionen $\sigma_{j_k}, \dots, j_k - 1$ Aufstiege und somit s Fallstellen von σ .

Die Anzahl der zulässigen Vertauschungen von σ_E und σ_{NE} beträgt also höchstens $k - e$; die obere Schranke ist bewiesen. \square

Beispiel 2.3.6 Für $n = 6$ erzeugen wir durch das im ersten Teil des Beweises beschriebene Verfahren die Folge:

k	$\pi^{(k)}$	$\text{exc}(\pi^{(k)})$	$\text{dexc}(\pi^{(k)})$	$\text{inv}(\pi^{(k)})$
0	1 2 3 4 5 6	0	0	0

1	2 1 3 4 5 6	1	1	1
2	3 2 1 4 5 6	1	2	3
3	4 2 3 1 5 6	1	3	5
4	5 2 3 4 1 6	1	4	7
5	6 2 3 4 5 1	1	5	9
6	6 3 2 4 5 1	2	6	10
7	6 4 3 2 5 1	2	7	12
8	6 5 3 4 2 1	2	8	14
9	6 5 4 3 2 1	3	9	15

Wie in Bemerkung 2.2.6 angekündigt, zeigen diese Folgen insbesondere, daß jede Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ als Wert bezüglich der Statistik **dexc** angenommen wird.

Bemerkungen 2.3.7

- a) Der zweite Teil des Beweises gibt zudem an, wie für zwei geordnete Folgen (i_1, \dots, i_e) und (a_1, \dots, a_e) mit $i_k < a_k$ für alle k die (eindeutig bestimmte) Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ konstruiert werden kann, für die $\mathbf{E}(\pi) = \{i_1, \dots, i_e\}$, $\pi(\mathbf{E}(\pi)) = \{a_1, \dots, a_e\}$ und $\text{inv}(\pi) = 2(a_1 + \dots + a_e - i_1 - \dots - i_e) - e$ gilt. Diese ist dann unter allen Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\mathbf{E}(\sigma) = \{i_1, \dots, i_e\}$ und $\hat{\sigma}_{\mathbf{E}} = a_1 \cdots a_e$ die mit der maximalen Anzahl an Inversionen. Sei dazu $M_{i_k} := \{a_l : a_l > i_k\}$ für $k = 1, \dots, e$. Setze nun für π_{i_e} den minimalen Wert aus M_{i_e} und entferne diesen aus $M_{i_1}, \dots, M_{i_{e-1}}$. Setze für $\pi_{i_{e-1}}$ den minimalen Wert aus $M_{i_{e-1}}$ und entferne diesen aus $M_{i_1}, \dots, M_{i_{e-2}}$ usw. Analog wird mit den Fallstellen $j_1 < \dots < j_{n-e}$ (geordnetes $[n]$ -Komplement von $\{i_1, \dots, i_e\}$) und den Werten $b_1 < \dots < b_{n-e}$ (geordnetes $[n]$ -Komplement von $\{a_1, \dots, a_e\}$) verfahren. Definiere die Mengen $M_{j_k} := \{b_l : b_l \leq j_k\}$ für $k = 1, \dots, n - e$. Setze für π_{j_1} den maximalen Wert von M_{j_1} und entferne diesen aus $M_{j_2}, \dots, M_{j_{n-e}}$; setze für π_{j_2} den maximalen Wert von M_{j_2} und entferne diesen aus $M_{j_3}, \dots, M_{j_{n-e}}$ usw.

Ein Beispiel: Für $i = (1, 3, 5, 6)$, $a = (4, 6, 8, 9)$ und $n = 10$ erhalten wir auf diese Weise

$$\begin{aligned} M_1 &= \{4, 6, 8, \underline{9}\}, M_3 = \{\underline{4}, 6, 8, 9\}, M_5 = \{\underline{6}, 8, 9\}, M_6 = \{\underline{8}, 9\}; \\ M_2 &= \{1, \underline{2}\}, M_4 = \{1, 2, \underline{3}\}, M_7 = \{1, 2, 3, 5, \underline{7}\}, M_8 = \{1, 2, 3, \underline{5}, 7\}, \\ M_9 &= \{\underline{1}, 2, 3, 5, 7\}, M_{10} = \{1, 2, 3, 5, 7, \underline{10}\}, \end{aligned}$$

also die Permutation $\pi = 9\ 2\ 4\ 3\ 6\ 8\ 7\ 5\ 1\ 10 \in \mathcal{S}_{10}$ mit $\text{inv}(\pi) = 2 \cdot 12 - 4$.

Umgekehrt wird – gemäß dem nachfolgenden Korollar – die Inversionenanzahl für $\tau = 4\ 1\ 6\ 2\ 8\ 9\ 3\ 5\ 7\ 10$ minimal; es gilt $\text{inv}(\tau) = 12$.

- b) Sowohl die Statistik **inv** als auch **dexc** sind bezüglich der Inversenbildung invariant, d.h. $\text{inv}(\pi) = \text{inv}(\pi^{-1})$ und $\text{dexc}(\pi) = \text{dexc}(\pi^{-1})$ für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$. Die zweite Aussage ist dabei

ebenso offensichtlich wie die erste:

$$\mathbf{dexc}(\pi) = \sum_{i \in \mathbf{E}(\pi)} (\pi_i - i) = \sum_{i \in [n]} (\pi_i - i) - \sum_{i > \pi_i} (\pi_i - i) = \sum_{j \in \mathbf{E}(\pi^{-1})} (\pi_j^{-1} - j) = \mathbf{dexc}(\pi^{-1}).$$

Desweiteren gilt $\mathbf{exc}(\pi^{-1}) = n - \mathbf{exc}(\pi) - f$, wobei f die Anzahl der Fixpunkte von π bezeichne. Die Schranke aus 2.3.5 kann also wie folgt verschärft werden. Es ist

$$\mathbf{inv}(\pi) \leq 2\mathbf{dexc}(\pi) - \max\{\mathbf{exc}(\pi), n - \mathbf{exc}(\pi) - f\}$$

für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$. (Die Folge $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \dots$ aus dem Beweis ist davon nicht betroffen; alle diese Permutationen sind Involutionen.)

- c) Der Nachweis der oberen Schranke beinhaltet ein Resultat, das wir viel später (im Satz 4.1.3) wieder aufgreifen werden. Die Anzahl der dort als \mathbf{E} -invariante Transpositionen bezeichneten Vertauschungen auf $\hat{\pi}_{\mathbf{E}}$ bzw. $\hat{\pi}_{\mathbf{NE}}$ beträgt $\mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi)$.

Satz 2.3.2 charakterisiert insbesondere die Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$, für die $\mathbf{inv}(\pi)$ und $\mathbf{dexc}(\pi)$ übereinstimmen.

Korollar 2.3.8 *Für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt genau dann $\mathbf{inv}(\pi) = \mathbf{dexc}(\pi)$, wenn die Wörter $\pi_{\mathbf{E}}$ und $\pi_{\mathbf{NE}}$ aufsteigend geordnet sind.*

In Anlehnung an diese Beschreibung nennen wir diese Permutationen *bi-ansteigend* und bezeichnen ihre Menge mit \mathcal{M}_n .

Die bi-ansteigenden Permutationen werden im Zentrum der nachfolgenden Untersuchungen stehen. Insbesondere ist ihnen das gesamte Kapitel 3 gewidmet. Zunächst werden wir ihre Struktur genauer beschreiben.

Proposition 2.3.9 *Die Bedingung $\mathbf{inv}(\pi) = \mathbf{dexc}(\pi)$ für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ ist äquivalent zu*

$$\begin{aligned} \pi_k - k &= |\{i > k : \pi_i < \pi_k\}| \quad \text{für alle } k \in \mathbf{E}(\pi) \text{ und} \\ k - \pi_k &= |\{i < k : \pi_i > \pi_k\}| \quad \text{für alle } k \notin \mathbf{E}(\pi). \end{aligned}$$

Beweis. Sei $k \in [n]$. Zählen wir die Positionen $i \in [n]$ mit $\pi_i < \pi_k$, so erhalten wir

$$k - 1 - |\{i < k : \pi_i > \pi_k\}| + |\{i > k : \pi_i < \pi_k\}|.$$

Folglich ist $\pi_k = k + |\{i > k : \pi_i < \pi_k\}| - |\{i < k : \pi_i > \pi_k\}|$. Ist k ein Aufstieg von π , so ist auch jedes $i < k$ mit $\pi_i > \pi_k$ ein solcher. Analog ist jedes $i > k$ mit $\pi_i < \pi_k$ eine Fallstelle von π , falls $k \notin \mathbf{E}(\pi)$ gilt. Nach dem vorherigen Korollar ist die Gleichheit von $\mathbf{inv}(\pi)$ und $\mathbf{dexc}(\pi)$ äquivalent zur Monotonie von $\pi_{\mathbf{E}}$ und $\pi_{\mathbf{NE}}$. Die Mengen $\{i < k : \pi_i > \pi_k\}$ für $k \in \mathbf{E}(\pi)$ bzw. $\{i > k : \pi_i < \pi_k\}$ für $k \notin \mathbf{E}(\pi)$ sind also leer. \square

Diese Charakterisierung ist allerdings für die Konstruktion von bi-ansteigenden Permutationen wenig geeignet. Im Gegensatz dazu ist es sehr einfach, alle Elemente von \mathcal{M}_n explizit anzugeben, wenn man die folgende Darstellung wählt.

Wir können jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ in ein Produkt aus $\text{inv}(\pi)$ Standardtranspositionen $s_i = (i, i+1)$ zerlegen. Eine Folge (a_1, \dots, a_r) natürlicher Zahlen $a_i \in [n-1]$ mit $\pi = s_{a_1} \cdots s_{a_r}$ und $r = \text{inv}(\pi)$ heißt *reduzierte Zerlegung von π* . Durch die Prozedur

- (1) Setze $\sigma := \pi$ und $k := 1$.
- (2) Für $i = 1, \dots, n-1$ führe aus: Ist $\sigma_i > i$, so setze $\sigma := s_{\sigma_i-1} \sigma$ und $a_k := \sigma_i - 1$ und erhöhe k .

wird die reduzierte Zerlegung von π erzeugt, deren Reversion (a_r, \dots, a_1) die lexikographisch größte ist. (Dies ist gleichbedeutend damit, daß a_r der größte Abstieg von π ist, a_{r-1} der größte Abstieg von πs_{a_r} usw. Vergleiche auch [6, S. 356].) Sprechen wir im folgenden von der Faktorisierung einer Permutation, so ist die auf dieser Zerlegung basierende Produktbildung gemeint.

Satz 2.3.10 *Für eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ stimmen $\text{inv}(\pi)$ und $\text{dex}(\pi)$ genau dann überein, wenn*

$$\pi = (s_{i_1+\Delta_1-1} s_{i_1+\Delta_1-2} \cdots s_{i_1}) (s_{i_2+\Delta_2-1} s_{i_2+\Delta_2-2} \cdots s_{i_2}) \cdots (s_{i_e+\Delta_e-1} s_{i_e+\Delta_e-2} \cdots s_{i_e})$$

für natürliche Zahlen $i_1 < \dots < i_e < n$ und $\Delta_1, \dots, \Delta_e$ mit $i_1 + \Delta_1 < \dots < i_e + \Delta_e \leq n$ ist. Insbesondere sind dann i_1, \dots, i_e die Aufstiege von π , und es gilt $\text{dex}(\pi) = \Delta_1 + \dots + \Delta_e$.

Beweis. Seien $i_1 < \dots < i_e$ die Aufstiege von π und $\Delta_1, \dots, \Delta_e$ ihre Differenzen zu $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_e}$. Betrachten wir die Faktorisierung von π : Wegen $\pi_i = i$ für $i = 1, \dots, i_1 - 1$ liefert der erste Schritt $\pi' = s_{\pi_{i_1}-1}$ und $\sigma_{i_1} = \pi_{i_1} - 1$. Nach dem ersten Durchlauf erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \pi' &= s_{\pi_{i_1}-1} s_{\pi_{i_1}-2} \cdots s_{\pi_{i_1}-\Delta_1}, \\ \sigma &= s_{\pi_{i_1}-\Delta_1} \cdots s_{\pi_{i_1}-2} s_{\pi_{i_1}-1} \pi = 1 \dots i_1 \sigma_{i_1+1} \dots \sigma_n. \end{aligned}$$

Korollar 2.3.8 besagt nun, daß $\mathbf{E}(\sigma) = \mathbf{E}(\pi) \setminus \{i_1\}$ und $\text{dex}(\sigma) = \text{dex}(\pi) - \Delta_1$ ist. Stimmen $\text{inv}(\pi)$ und $\text{dex}(\pi)$ überein, so ist $\pi_{\mathbf{E}}$ aufsteigend geordnet. Die Transpositionen $s_{\pi_{i_1}-1}, \dots, s_{\pi_{i_1}-\Delta_1}$ lassen also die Positionen i_2, \dots, i_e fest. Folglich unterscheidet sich σ auf Δ_1 Positionen $j \in \{i_1+1, \dots, n\} \setminus \{i_2, \dots, i_e\}$ von π , genauer gilt $\sigma_j = \pi_j + 1$. Andererseits kann ein derartiges j nicht zum Aufstieg werden. Nach Proposition 2.3.9 gilt für jede Fallstelle von π die Relation $j - \pi_j = |\{i < j : i \in \mathbf{E}(\pi), \pi_j < \pi_i\}|$, falls $\text{inv}(\pi)$ und $\text{dex}(\pi)$ übereinstimmen.

Die sukzessive Anwendung des Algorithmus auf σ liefert nun obige Zerlegung.

Umgekehrt sind $\pi_{\mathbf{E}}$ und π_{NE} einer Permutation π mit der angegebenen Faktorisierung aufsteigend. \square

Beispiel 2.3.11 Die Permutation $\pi = 3\ 4\ 8\ 1\ 2\ 9\ 5\ 6\ 10\ 7 \in \mathcal{S}_{10}$ ist bi-ansteigend:

$$\begin{aligned} \text{inv}(\pi) &= 13 = \text{dexc}(\pi) && \text{(Definition)}, \\ \pi_E &= 3\ 4\ 8\ 9\ 10, \pi_{NE} = 1\ 2\ 5\ 6\ 7 && \text{(Korollar 2.3.8)}, \\ \pi &= (s_2 s_1)(s_3 s_2)(s_7 s_6 s_5 s_4 s_3)(s_8 s_7 s_6)(s_9) && \text{(Satz 2.3.10)}. \end{aligned}$$

Lemma 2.3.12 Für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt $\text{exc}(\pi) = \text{inv}(\pi)$ genau dann, wenn $\text{exc}(\pi) = \text{dexc}(\pi)$ ist.

Beweis. Stimmen die Anzahl der Aufstiege und der Inversionen von π überein, so ist wegen $\text{exc}(\pi) \leq \text{dexc}(\pi) \leq \text{inv}(\pi)$ auch $\text{exc}(\pi) = \text{dexc}(\pi)$.

Sei nun umgekehrt $\text{exc}(\pi) = \text{dexc}(\pi) = e$ für ein $\pi \neq \text{id}$. Für die Aufstiege $i_1 < \dots < i_e$ gilt also $\pi_{i_k} = i_k + 1$. Dann sind aber auch die Werte auf den übrigen Positionen notwendig geordnet. Nach Korollar 2.3.8 folgt $\text{inv}(\pi) = \text{dexc}(\pi)$. \square

Proposition 2.3.13 Für alle natürlichen n und e gilt

$$S_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, e) = \binom{n-1}{e} \quad \text{und} \quad S_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, e+1) = 2e \binom{n-2}{e}.$$

Beweis. Erfüllt eine Permutation π die Bedingung $\text{exc}(\pi) = \text{dexc}(\pi) = e$, so ist sie nach dem vorherigen Lemma bi-ansteigend und genauer nach Satz 2.3.10 von der Form $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_e}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_e \leq n-1$.

Die Anzahl der Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{dexc}(\pi) = \text{exc}(\pi) + 1 = e + 1$ beträgt

$$M_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, e+1) = e \binom{n-2}{e}.$$

Dies folgt wiederum aus Satz 2.3.10; es gilt $\pi = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} s_{i_k+1} s_{i_k} s_{i_{k+1}} \dots s_{i_e}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k < i_k + 1 < i_{k+1} < \dots < i_e \leq n-1$ für ein $k \in [e]$. Im Beweis von Satz 2.3.2 wurde gezeigt, daß $\sigma \in \mathcal{S}_n$ denselben dexc -Wert annimmt wie die auf σ_E und σ_{NE} geordnete Permutation $\hat{\sigma}$. Zu jedem $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit der Differenzensumme $\text{dexc}(\pi) = \text{exc}(\pi) + 1$ existieren nun genau zwei $\sigma \in \mathcal{S}_n$, für die $\hat{\sigma} = \pi$ gilt; zum einen π selbst, zum anderen $\sigma = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} s_{i_k+1} s_{i_k} s_{i_{k+1}} \dots s_{i_e}$. Der Beweis des Korollars 2.3.5 enthielt den Nachweis, daß die Anzahl der zulässigen Vertauschungen von π_E und π_{NE} höchstens $\text{dexc}(\pi) - \text{exc}(\pi) = 1$ beträgt. Folglich ist σ die einzige derartige Permutation. \square

Lemma 2.3.14 Der Koeffizient $S_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, k)$ ist genau dann positiv, wenn $e \leq k \leq e(n-e)$ gilt.

Beweis. Die untere Schranke ist klar, die obere erhalten wir durch die Abschätzung

$$\text{dexc}(\pi) = \sum_{i \in E(\pi)} (\pi_i - i) \leq \sum_{i=1}^e (n+1-i) - \sum_{i=1}^e i = e(n-e).$$

Umgekehrt existiert zu jedem festen e und jedem $k \in \{e, \dots, e(n-e)\}$ eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$

mit $\text{exc}(\pi) = e$ und $\text{dexc}(\pi) = k$. Betrachte dazu für vorgegebenes e die Permutation

$$\pi^{(0)} = 2\ 3 \dots e\ e + 1\ 1\ e + 2 \dots n.$$

Es gilt $\text{dexc}(\pi^{(0)}) = e$. Durch die sukzessive Anwendung von Transpositionen s_{e-i+j} mit $j = 1, \dots, n-e-1$ und $i = 0, \dots, e-1$ auf $\pi^{(0)}$ (in der Reihenfolge $s_{e+1}, s_e, \dots, s_2, s_{e+2}, s_{e+1}, \dots, s_3, \dots, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-e}$) erzeugen wir eine Folge $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(e(n-e-1))}$ von Permutationen, für die $\text{dexc}(\pi^{(i)}) = e + i$ gilt. \square

Bemerkung 2.3.15 Aufgrund der Konstruktion sind die Permutationen $\pi^{(0)}, \dots, \pi^{(e(n-e-1))}$ bi-ansteigend. Die Aussage des Satzes läßt sich also auf die Verteilung von $(\text{exc}, \text{dexc})$ auf \mathcal{M}_n übertragen: $M_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, k) > 0$ genau dann, wenn $e \leq k \leq e(n-e)$.

In [18] wurden die Aufstiege von Permutationen intensiv untersucht und insbesondere Formeln für die Anzahl der Permutationen mit vorgegebener Aufstiegsmenge angegeben. Wir charakterisieren im folgenden die Mengen, die Aufstiegsmenge einer Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\text{dexc}(\pi) = k$ sind.

Für eine Menge $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq [n]$ sei $w(A) := a_1 + \dots + a_m$ die Summe ihrer Elemente.

Proposition 2.3.16 Sei $\mathcal{E}_n^{(k)} := \{\mathbf{E}(\pi) : \pi \in \mathcal{S}_n, \text{dexc}(\pi) = k\}$. Desweiteren sei $\mathcal{D}_n^{(k)}$ die Menge aller k -elementigen Teilmengen von $[n-1]$. Dann gilt

$$\mathcal{E}_n^{(0)} = \{\emptyset\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_n^{(k)} = \mathcal{D}_n^{(k)} \cup \{E \in \mathcal{E}_n^{(k-1)} : w(E) \leq \frac{1}{2}|E|(2n+1-|E|)\}$$

für alle $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Beweis. Wir können uns auf die Betrachtung von bi-ansteigenden Permutationen beschränken. Im Beweis von 2.3.2 wurde gezeigt, daß die Aufstiegs Mengen einer Permutation π und ihrer Sortierten $\hat{\pi}$ identisch sind.

Sei $E = \{i_1, \dots, i_e\} \subseteq [n-1]$ eine geordnete Menge. Nach Definition beträgt der dexc -Wert einer Permutation $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\mathbf{E}(\pi) = E$ mindestens e und höchstens $\frac{e}{2}(2n+1-e) - w(E)$. (Im ersten Fall ist $\pi_{i_k} = i_k + 1$, im zweiten $\pi_{i_k} = n - e + k$ für $k = 1, \dots, e$.) Für jeden Wert k zwischen diesen Schranken existiert eine Permutation $\pi^{(k)} \in \mathcal{M}_n$ mit $\mathbf{E}(\pi^{(k)}) = E$ und $\text{dexc}(\pi^{(k)}) = k$. Setze dazu

$$\begin{aligned} \pi^{(e)} &:= s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_e}, \\ \pi^{(e+1)} &:= s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{e-1}} (s_{i_e+1} s_{i_e}), \quad \dots, \\ \pi^{(e+n-1-i_e)} &:= s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{e-1}} (s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_{i_e}), \\ \pi^{(e+n-i_e)} &:= s_{i_1} s_{i_2} \cdots (s_{i_{e-1}+1} s_{i_{e-1}}) (s_{n-1} \cdots s_{i_e}), \quad \dots, \\ \pi^{(e+2n-3-i_e-i_{e-1})} &:= s_{i_1} s_{i_2} \cdots (s_{n-2} \cdots s_{i_{e-1}}) (s_{n-1} \cdots s_{i_e}), \quad \dots, \\ \pi^{(e+en-\frac{1}{2}e(e+1)-w(E))} &:= (s_{n-e} \cdots s_{i_1}) (s_{n+1-e} \cdots s_{i_2}) \cdots (s_{n-1} \cdots s_{i_e}). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Rekursion. \square

Nun sind wir in der Lage, den Nachweis für die im vorigen Abschnitt zitierte Eigenschaft 2.2.9 zu erbringen. Wir werden die Symmetrie zunächst für die bi-ansteigenden Permutationen zeigen. Die Bezeichnung der Verteilungskoeffizienten unterliegt derselben Konvention wie für \mathcal{S}_n , man ersetze lediglich S durch M .

Der Beweis ist sehr technisch. Wir demonstrieren die Wirkungsweise des beschriebenen Algorithmus daher ausführlich im direkt anschließenden Beispiel.

Satz 2.3.17 Für $e = 0, \dots, n-1$ und $k = e, \dots, e(n-e)$ gilt

$$M_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, k) = M_n^{(\text{exc}, \text{dexc})}(n-1-e, n-1-2e+k).$$

Beweis. Wir konstruieren eine Involution Φ auf \mathcal{M}_n , für die

$$\begin{aligned} \text{exc}(\Phi(\pi)) &= n-1-\text{exc}(\pi) \quad \text{und} \\ \text{dexc}(\Phi(\pi)) &= n-1-2\text{exc}(\pi) + \text{dexc}(\pi) \end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist dann $\text{exc}(\Phi(\pi)) - \text{exc}(\pi) = \text{dexc}(\Phi(\pi)) - \text{dexc}(\pi) = \text{inv}(\Phi(\pi)) - \text{inv}(\pi)$.

Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit den Aufstiegen $i_1 < \dots < i_e$. Wir definieren $\Phi(\pi)$ wie folgt:

- (1) Faktorisiere π . Nach Satz 2.3.10 gilt

$$\pi = (s_{\pi_{i_1}-1} s_{\pi_{i_1}-2} \cdots s_{i_1}) \cdots (s_{\pi_{i_e}-1} s_{\pi_{i_e}-2} \cdots s_{i_e}).$$

- (2) Liste in L alle Produkte

$$s_{n-\pi_{i_k}+2} s_{n-\pi_{i_k}+1}, s_{n-\pi_{i_k}+3} s_{n-\pi_{i_k}+2}, \dots, s_{n-i_k} s_{n-i_k-1}$$

für $k = 1, \dots, e$ und $\pi_{i_k} - i_k \geq 2$ auf.

- (3) Seien $j_1 > \dots > j_{n-1-e}$ die von n verschiedenen Fallstellen von π . Setze $c_k := n - j_k$ und $\sigma^{(k)} := s_{c_k}$ für $k = 1, \dots, n-1-e$.

Für $k = n-1-e, \dots, 1$ führe folgende Prozedur aus:

Suche in L ein Produkt $s_{c+1} s_c$, so daß s_c der erste Faktor von $\sigma^{(k)}$ ist. Setze $\sigma^{(k)} := s_{c+1} \sigma^{(k)}$ und streiche $s_{c+1} s_c$ (einmal) aus L . Wiederhole den Schritt solange, bis kein derartiges $s_{c+1} s_c$ in L existiert.

- (4) Setze $\Phi(\pi) := \sigma = \sigma^{(1)} \dots \sigma^{(n-1-e)}$.

Wir werden zunächst zeigen, daß dieser Algorithmus die Faktorisierung einer Permutation σ liefert, für die $\text{exc}(\sigma) = n-1-e$ und $\text{dexc}(\sigma) = n-1-2e + \text{dexc}(\pi)$ gilt.

Nach Ausführung von (3) für $k = n-1-e, \dots, 1$ ist die Liste L leer.

Wir dürfen annehmen, daß π einen Aufstieg i mit $\pi_i - i > 1$ besitzt, ansonsten ist $L = \emptyset$ nach

Konstruktion. Sei a der kleinste derartige Aufstieg von π und b die kleinste Fallstelle von π mit $a < b$. Dann liefert jedes $i \in \{a, \dots, b-1\}$ eine nichtleere Teilliste L_i von $\pi_i - i - 1$ Produkten

$$\begin{aligned} L_a : & \quad s_{n-a} s_{n-a-1}, s_{n-a-1} s_{n-a-2}, \dots, s_{n-\pi_a+2} s_{n-\pi_a+1} \\ L_{a+1} : & \quad s_{n-a-1} s_{n-a-2}, s_{n-a-2} s_{n-a-3}, \dots, s_{n-\pi_{a+1}+2} s_{n-\pi_{a+1}+1} \\ & \quad \vdots \\ L_{b-1} : & \quad s_{n-a-(b-a)+1} s_{n-a-(b-a)}, s_{n-a-(b-a)} s_{n-a-(b-a)-1}, \dots, s_{n-\pi_{b-1}+2} s_{n-\pi_{b-1}+1}. \end{aligned}$$

Nach Korollar 2.3.8 sind die Differenzen $\pi_i - i$ für $a \leq i \leq b-1$ schwach monoton wachsend. Insbesondere gilt also $|L_a| \leq \dots \leq |L_{b-1}|$. Desweiteren ist $|L_i| = 0$ für alle $i \in E(\pi)$ mit $i < a$.

Was passiert nun im Schritt (3)?

Sei $j < a$ eine Fallstelle von π . Dann entsteht in σ auf der Position $c = n - j$ ein Aufstieg, der die Prozedur in (3) vor $c' = n - b$ durchläuft. Die Liste L enthält kein Produkt $s_{c+1} s_c$, ansonsten wäre $\pi_{j-1} - (j-1) \geq 2$, also a nicht minimal. Folglich ist c' der erste Wert, für den Elemente aus L gestrichen werden, und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma^{(n-1-e)} &= s_{n-b}; \text{ streiche den ersten Eintrag von } L_{b-1} \\ \sigma^{(n-1-e)} &= s_{n-b+1} s_{n-b}; \text{ streiche den ersten Eintrag von } L_{b-2} \\ & \quad \vdots \\ \sigma^{(n-1-e)} &= s_{n-a-1} \cdots s_{n-b}; \text{ streiche den ersten Eintrag von } L_a \\ \sigma^{(n-1-e)} &= s_{n-a} \cdots s_{n-b}. \end{aligned}$$

Das Produkt $s_{n-a+1} s_{n-a}$ ist nicht in L enthalten, die Prozedur bricht ab. Jede unmittelbar folgende Fallstelle $b+1, b+2, \dots$ von π reduziert analog die Listen L_{b-1}, \dots, L_a um das jeweils erste Element (sofern noch vorhanden). Wegen $|L_a| \leq \dots \leq |L_{b-1}|$ ist dies möglich.

Sei nun a' der kleinste Aufstieg von π mit $b < a'$. Für $\pi_{a'} - a' = 1$ folgt nach Korollar 2.3.8, daß $a' - b \geq \pi_{b-1} - (b-1) - 1 = |L_{b-1}|$ ist. Nach der Anwendung von (3) auf $n-b, n-(b+1), \dots, n-(a'-1)$ ist L also bereits leer, und die Argumentation kann wiederholt werden (ersetze a durch den nächstgrößeren Aufstieg mit einer Differenz ≥ 2).

Im Fall $\pi_{a'} - a' \geq 2$ liefert Korollar 2.3.8 die Relation $\pi_{a'} - a' \geq \pi_{b-1} - a' + 1 = \pi_{b-1} - (b-1) - (a' - b)$. Der Aufstieg a' erweitert L in (2) um die Produkte

$$L_{a'} : s_{n-a'} s_{n-a'-1}, s_{n-a'-1} s_{n-a'-2}, \dots, s_{n-\pi_{a'}+2} s_{n-\pi_{a'}+1}.$$

Aus der Teilliste L_{b-1} wurden bereits $a' - b$ Elemente entfernt (für $c = n-b, n-(b+1), \dots, n-(a'-1)$), der erste Eintrag in L_{b-1} ist also $s_{n-a'+1} s_{n-a'}$. Desweiteren gilt $|L_{b-1}| = \pi_{b-1} - (b-1) - 1 - (a' - b) < |L_{a'}|$. Die für a' neu in L aufgenommenen Produkte setzen die bestehende Liste also „lückenlos“ fort. Auch in diesem Fall kann die obige Argumentation sukzessiv wiederholt

werden.

Wegen $\pi_i - i \leq n - i$ können für einen Aufstieg i von π maximal $n - i - 1$ Elemente zu L hinzugefügt werden. Korollar 2.3.8 impliziert $j \notin \mathbf{E}(\pi)$ für alle $j > i$, falls $\pi_i = n$ ist. Folglich leert die Anwendung von Schritt (3) auf $c = n - (i + 1), n - (i + 2), \dots, 1$ die Liste L vollständig. Diese Betrachtung beweist auch die Eindeutigkeit der Abbildung Φ .

Nach Konstruktion sind die Positionen c_1, \dots, c_{n-1-e} aus (3) gerade die Aufstiege von $\Phi(\pi)$, also $\text{exc}(\Phi(\pi)) = n - 1 - \text{exc}(\pi)$. Gemäß Satz 2.3.10 stimmen $\text{inv}(\Phi(\pi))$ und $\text{dexc}(\Phi(\pi))$ überein, und es gilt

$$\begin{aligned} \text{dexc}(\Phi(\pi)) &= \sum_{k=1}^{n-1-e} l(\sigma^{(k)}) = n - 1 - e + |L| = n - 1 - e + \sum_{k=1}^e (\pi_{i_k} - i_k - 1) \\ &= n - 1 - 2e + \text{dexc}(\pi), \end{aligned}$$

wobei $l(\sigma^{(k)})$ die Anzahl der Faktoren von $\sigma^{(k)}$ bezeichne.

Es bleibt zu zeigen, daß $\Phi^2(\pi) = \pi$ gilt.

Sei $\sigma = (s_{c_1+l_1-1} \cdots s_{c_1}) \cdots (s_{c_{n-1-e}+l_{n-1-e}-1} \cdots s_{c_{n-1-e}})$ das Bild von π bezüglich Φ . Wie oben gezeigt, genügen die Indizes c_k und l_k den folgenden Bedingungen:

- 1) $c_k = n - j_k$, wobei $j_1 > \dots > j_{n-1-e}$ die von n verschiedenen Fallstellen von π seien. (c_1, \dots, c_{n-1-e} sind die Aufstiege von σ .)
- 2) $l_k = |\{i : 0 < a_{ij_k} < \pi_i - i\}| + 1$, wobei a_{ij_k} die Anzahl der Fallstellen j von π mit $i < j \leq j_k$ und $i \in \mathbf{E}(\pi)$ sei.

Nach Korollar 2.3.9 entspricht $\pi_i - i$ der Anzahl der Positionen $j > i$ mit $\pi_j < \pi_i$. (Wegen der Monotonie von $\pi_{\mathbf{E}}$ ist j zwangsläufig eine Fallstelle von π .) Die Relation $a_{ij_k} < \pi_i - i$ ist also genau dann erfüllt, wenn $\pi_i > \pi_{j_k}$ ist und ein (-e Fallstelle) $j > j_k$ existiert, so daß $\pi_j < \pi_i$ gilt. Die Positivität von a_{ij_k} ist äquivalent zu $i < j_k$. Folglich können wir die Länge der k -ten Faktorenfolge als

$$l_k = |\{i < j_k : \pi_i > \pi_{j_k}, \text{ es gibt ein } j > j_k \text{ mit } \pi_j < \pi_i\}| + 1$$

beschreiben.

Berechnen wir nun $\pi' = \Phi(\sigma)$, so erhalten wir eine Permutation mit den Aufstiegen $i'_k = n - d_k$. Die Indizes $d_1 > \dots > d_e$ bezeichnen dabei die von n verschiedenen Fallstellen von σ . Wegen $d_k = n - i_k$ stimmen i_k und i'_k überein.

Für die Länge l'_k der zum Aufstieg i'_k gehörenden Transpositionenfolge gilt

$$l'_k = |\{c \in \mathbf{E}(\sigma) : 0 < b_{cd_k} < \sigma_c - c\}| + 1.$$

Dabei zählt b_{cd_k} die Fallstellen d von σ , für die $c < d \leq d_k$ ist. Aufgrund der Konstruktion von Φ erhalten wir

$$d - c + 1 = b_{cd} + |\{c' : c \leq c' < d, c' \in \mathbf{E}(\sigma)\}| = b_{cd} + a_{n-d, n-c}$$

für alle $c \in E(\sigma)$ und alle Fallstellen d von σ mit $c < d < n$. Im Fall $d < c$ ist $b_{cd} = a_{n-d, n-c} = 0$. Insbesondere erfüllt b_{cd} die Bedingung $b_{cd} < \sigma_c - c$ genau dann, wenn $a_{n-d, n-c} < \pi_{n-d} - (n-d)$ gilt. Die Symmetrie der Argumentation liefert $l'_k = \pi_i - i$. \square

Beispiel 2.3.18 Sei $\pi = 3\ 4\ 8\ 1\ 2\ 9\ 5\ 6\ 10\ 7 \in \mathcal{M}_{10}$. Die Faktorisierung von π lautet, wie im Beispiel 2.3.11 bereits angegeben,

$$\pi = (s_2 s_1)(s_3 s_2)(s_7 s_6 s_5 s_4 s_3)(s_8 s_7 s_6)(s_9).$$

Jedes durch eine Klammer eingeschlossene Produkt korrespondiert zu einem Aufstieg von π und gibt diesen als den Index seines letzten Faktors und den zugehörigen Wert als den um 1 erhöhten Index seines ersten Faktors an.

Im Schritt (2) zerlegen wir diese Faktorenkette wie folgt in Zweierprodukte: Innerhalb jeder mindestens zwei Faktoren umfassenden Klammer wähle alle möglichen aufeinanderfolgenden Transpositionen $s_i s_{i-1}$, vertausche diese und bilde die entsprechenden n -Komplementärindizes. Diese Produkte $s_{n-(i-1)} s_{n-i}$ werden in der Liste L zusammengefaßt. Für unser Beispiel enthält L also:

$$\begin{aligned} & s_9 s_8 \text{ (aus } s_2 s_1); \\ & s_8 s_7 \text{ (aus } s_3 s_2); \\ & s_4 s_3 \text{ (aus } s_7 s_6), s_5 s_4 \text{ (aus } s_6 s_5), s_6 s_5 \text{ (aus } s_5 s_4), s_7 s_6 \text{ (aus } s_4 s_3); \\ & s_3 s_2 \text{ (aus } s_8 s_7), s_4 s_3 \text{ (aus } s_7 s_6). \end{aligned}$$

Im Schritt (3) setzen wir diese „Bausteine“ wieder zu einer Faktorenkette zusammen. Die n -Komplemente der von n verschiedenen Fallstellen von π , also $10 - 4, 10 - 5, 10 - 7, 10 - 8$, bilden die neuen Aufstiege. Wir initialisieren $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 5, c_4 = 6$ und $\sigma^{(1)} = s_2, \sigma^{(2)} = s_3, \sigma^{(3)} = s_5, \sigma^{(4)} = s_6$. Die Faktorisierung von $\Phi(\pi)$ hat bisher die folgende Form:

$$\Phi(\pi) = (\cdots s_2)(\cdots s_3)(\cdots s_5)(\cdots s_6);$$

die Leerstellen werden nun durch die in (3) beschriebene Prozedur ersetzt.

$$\begin{aligned} \sigma^{(4)} : & s_6 \xrightarrow{\text{streiche } s_7 s_6 \text{ in } L} s_7 s_6 \xrightarrow{\text{streiche } s_8 s_7 \text{ in } L} s_8 s_7 s_6 \xrightarrow{\text{streiche } s_9 s_8 \text{ in } L} s_9 s_8 s_7 s_6 \\ \sigma^{(3)} : & s_5 \xrightarrow{\text{streiche } s_6 s_5 \text{ in } L} s_6 s_5 \\ \sigma^{(2)} : & s_3 \xrightarrow{\text{streiche } s_4 s_3 \text{ in } L} s_4 s_3 \xrightarrow{\text{streiche } s_5 s_4 \text{ in } L} s_5 s_4 s_3 \\ \sigma^{(1)} : & s_2 \xrightarrow{\text{streiche } s_3 s_2 \text{ in } L} s_3 s_2 \xrightarrow{\text{streiche } s_4 s_3 \text{ in } L} s_4 s_3 s_2 \end{aligned}$$

Wie im Beweis allgemein nachgewiesen, ist die Liste L jetzt leer, und wir erhalten

$$\Phi(\pi) = (s_4 s_3 s_2)(s_5 s_4 s_3)(s_6 s_5)(s_9 s_8 s_7 s_6).$$

Aus der Faktorisierung lassen sich die Aufstiege von $\Phi(\pi)$ und ihre zugehörigen Werte sofort ablesen. Es gilt $\Phi(\pi) = * 5 6 * 7 10 * * * *$ und aufgrund der Forderung $\Phi(\pi) \in \mathcal{M}_{10}$ dann $\Phi(\pi) = 1 5 6 2 7 10 3 4 8 9$. Diese Permutation nimmt bezüglich der untersuchten Statistiken die Werte $\mathbf{exc}(\Phi(\pi)) = 4$ und $\mathbf{dexc}(\Phi(\pi)) = \mathbf{inv}(\Phi(\pi)) = 12$ an.

Die Konstruktion der Bijektion Φ basiert auf der Faktorisierung von π . Diese läßt sich mit Hilfe des Satzes 2.3.2 umgehen.

Für $\pi \in \mathcal{S}_n$ definieren wir die \mathbf{dexc} -Folge $V(\pi)$ durch

$$V_k(\pi) := \begin{cases} \pi_k - k & \text{für } k \in \mathbf{E}(\pi) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar summieren sich die Komponenten von $V(\pi)$ zu $\mathbf{dexc}(\pi)$. Die Abbildung $\pi \mapsto V(\pi)$ ist auf \mathcal{M}_n eine Bijektion. Um π aus seiner \mathbf{dexc} -Folge V zu rekonstruieren, setze man zunächst $\pi_k = V_k + k$ für alle k mit $V_k > 0$. Die übrigen Positionen werden mit den fehlenden Elementen von $[n]$ aufsteigend geordnet aufgefüllt.

Mitunter wird der Code einer Permutation, entgegengesetzt zu unserer Festlegung, als Folge der Zahlen $|\{j \in [n] : j > i, \pi_j < \pi_i\}|$ definiert. Nach Proposition 2.3.9 ist dieser für eine bi-ansteigende Permutation mit der \mathbf{dexc} -Folge identisch.

Wir können die Involution $\Phi : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ wie folgt „faktorisierungsfrei“ beschreiben:

Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$.

- (1) Bestimme die \mathbf{dexc} -Folge V von π .
- (2) Für $k = 1, \dots, n$ mit $V_k = 0$ (Fallstellen von π) führe aus:
Reduziere alle Einträge $V_i > 0$ mit $i < k$ und $i \in \mathbf{E}(\pi)$ um 1 und zähle die weiterhin positiven. Sei l diese Anzahl. Ersetze V_k durch $l + 1$.
- (3) Definiere die Folge V' durch $V'_k := V_{n-k}$ für $k \in [n - 1]$ und $V'_n := 0$.

Dann ist V' die \mathbf{dexc} -Folge von $\Phi(\pi)$. Diese Beschreibung resultiert unmittelbar aus den im Beweis angestellten Überlegungen.

Beispiel 2.3.19 Wir berechnen wiederum $\Phi(\pi)$ für $\pi = 3 4 8 1 2 9 5 6 10 7 \in \mathcal{M}_{10}$.

Die Folge $V(\pi) = (2, 2, 5, 0, 0, 3, 0, 0, 1, 0)$ wird im zweiten Schritt wie folgt manipuliert:

$$\begin{aligned} k = 4 : & \quad V = (1, 1, 4, \underline{4}, 0, 3, 0, 0, 1, 0) \\ k = 5 : & \quad V = (0, 0, 3, \underline{4}, \underline{2}, 3, 0, 0, 1, 0) \\ k = 7 : & \quad V = (0, 0, 2, \underline{4}, \underline{2}, 2, \underline{3}, 0, 1, 0) \\ k = 8 : & \quad V = (0, 0, 1, \underline{4}, \underline{2}, 1, \underline{3}, \underline{3}, 1, 0) \\ k = 10 : & \quad V = (0, 0, 0, \underline{4}, \underline{2}, 0, \underline{3}, \underline{3}, 0, \underline{1}). \end{aligned}$$

Folglich ist $V' = (0, 3, 3, 0, 2, 4, 0, 0, 0, 0)$ die **dexc**-Folge von $\Phi(\pi) \in \mathcal{M}_{10}$. Wir erhalten also $\Phi(\pi) = 1\ 5\ 6\ 2\ 7\ 10\ 3\ 4\ 8\ 9$.

Bemerkung 2.3.20 Natürlich ist diese Methode zur Berechnung von Φ in vielerlei Hinsicht vorteilhafter. Der im Beweis von 2.3.17 angegebene Algorithmus hat dennoch seine Daseinsberechtigung. Mit seiner Hilfe ist es möglich, die Auswirkungen von Φ auf die Struktur von π zu verstehen. Die „faktorisierungsfreie“ Formulierung ist lediglich ein Resultat dieser Überlegungen. Auch der nachfolgende Beweis nutzt die ursprüngliche Version.

Die für \mathcal{M}_n bewiesene Symmetrie läßt sich – wie in 2.2.9 behauptet – auch auf \mathcal{S}_n übertragen. Hier nun der Beweis.

Beweis. (von Satz 2.2.9) Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\text{dexc}(\pi) < \text{inv}(\pi)$ und $\hat{\pi}$ die Sortierung von π . Im Beweis des Satzes 2.3.2 wurde nachgewiesen, daß $\mathbf{E}(\pi) = \mathbf{E}(\hat{\pi})$ und $\text{dexc}(\pi) = \text{dexc}(\hat{\pi})$ gilt. Es genügt folglich,

$$|\{\pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\pi} = \sigma, \text{inv}(\pi) - \text{inv}(\hat{\pi}) = t\}| = |\{\pi \in \mathcal{S}_n : \hat{\pi} = \Phi(\sigma), \text{inv}(\pi) - \text{inv}(\hat{\pi}) = t\}|$$

für alle $\sigma \in \mathcal{M}_n$ zu zeigen. Dann existiert zu jedem $\pi \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{M}_n$ genau ein $\pi' \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{M}_n$ mit

$$\begin{aligned} \hat{\pi}' &= \Phi(\hat{\pi}), \\ \text{exc}(\pi') &= n - 1 - \text{exc}(\pi), \\ \text{dexc}(\pi') &= n - 1 - 2\text{exc}(\pi) + \text{dexc}(\pi), \\ \text{inv}(\pi') &= \text{inv}(\hat{\pi}') + t = \text{inv}(\hat{\pi}) + t = \text{inv}(\pi), \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen.

Wir untersuchen dazu die Transpositionen auf $\mathbf{E}(\sigma)$ bzw. $[n] \setminus \mathbf{E}(\sigma)$, deren Anwendung auf σ die Aufstiege (und somit auch die Fallstellen) invariant läßt, und vergleichen diese mit den entsprechenden Transpositionen für $\Phi(\sigma)$. (Der Abschnitt 4.1 wird sich detailliert mit diesen Transpositionen – dort als **E**-invariant bezeichnet – auseinandersetzen. Insbesondere wird dann klarer, warum es an dieser Stelle genügt, die nachfolgend definierten Zahlen a_i zu betrachten.) Im folgenden sei $a_i(\sigma) := |\{j < i : \sigma_j > i\}|$ die Anzahl der Aufstiege vor der Position i , deren Wert i übersteigt. Im Satz 4.1.4 wird der Zusammenhang zwischen $b_i = a_i + 1$ und der Anzahl der aufstiegserhaltenden Transpositionen und ihren Kompositionen aufgezeigt. Demnach besitzen σ und $\Phi(\sigma)$ genau dann dieselbe Anzahl an Urbildern $\pi \in \mathcal{S}_n$ bezüglich der Sortierung mit einer vorgegebenen Differenz $\text{inv}(\pi) - \text{inv}(\hat{\pi})$, wenn $a_i(\Phi(\sigma)) = a_{\tau(i)}(\sigma)$ für ein geeignetes $\tau \in \mathcal{S}_n$ und $i \in [n]$ ist. Wir werden zeigen, daß $a_i(\Phi(\sigma)) = a_{n+1-i}(\sigma)$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Aufgrund der Konstruktion tritt der Faktor s_i in der (im ersten Schritt des Algorithmus aus 2.3.17 vorgenommenen) Zerlegung von σ genau a_i -mal auf, wenn i eine Fallstelle von σ ist. Für

einen Aufstieg i beträgt die Anzahl der s_i gerade $a_i + 1$.

Sei zunächst $i \in \mathbf{E}(\sigma)$. Die Faktorisierung von σ enthält dann genau a_i Produkte der Form $s_i s_{i-1}$; daneben existiert genau ein Produkt $s_i s_k$ mit $i < k$. Im zweiten Schritt des Algorithmus werden also a_i Produkte $s_{n+1-i} s_{n-i}$ in die Liste aufgenommen. Diese werden, wie gezeigt, vollständig zur Konstruktion der Zerlegung von $\Phi(\sigma)$ verwendet, die folglich a_i Produkte der Form $s_{n+1-i} s_{n-i} s_{n-1-i}$ aufweist. (Man beachte $n - i \notin \mathbf{E}(\Phi(\sigma))$.) Ist nun $i - 1$ ebenfalls ein Aufstieg von σ , also $n + 1 - i$ eine Fallstelle von $\Phi(\sigma)$, so sind diese a_i alle Transpositionen s_{n+1-i} in der Faktorisierung von $\Phi(\sigma)$, und es gilt $a_{n+1-i}(\Phi(\sigma)) = a_i(\sigma)$. Andernfalls tritt für $n + 1 - i \in \mathbf{E}(\Phi(\sigma))$ zudem das Produkt $s_{n+1-i} s_k$ mit $n + 1 - i < k$ auf. Auch in diesem Fall erhalten wir $a_{n+1-i}(\Phi(\sigma)) = a_i(\sigma)$.

Für eine Fallstelle i von σ argumentieren wir analog. In der Zerlegung von σ gibt es a_i Transpositionen s_i , jede in einem Produkt $s_i s_{i-1}$. Die im zweiten Schritt definierte Liste enthält folglich a_i Produkte $s_{n+1-i} s_{n-i}$, die in der Faktorisierung von $\Phi(\sigma)$ erscheinen. In Abhängigkeit davon, ob $i - 1$ Aufstieg von σ ist, sind dies alle Faktoren s_{n+1-i} bzw. existiert zusätzlich ein Produkt $s_{n+1-i} s_k$ mit $n + 1 - i < k$. In beiden Fällen folgt $a_{n+1-i}(\Phi(\sigma)) = a_i(\sigma)$. \square

Beispiel 2.3.21 Für $\sigma = 3\ 4\ 8\ 1\ 2\ 9\ 5\ 6\ 10\ 7 \in \mathcal{M}_{10}$ ist $a(\sigma) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0, 0)$ und $a(\Phi(\sigma)) = (0, 0, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Die Auflistung aller Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\hat{\pi} = \sigma$ bzw. $\hat{\pi} = \Phi(\sigma)$ wäre recht umfangreich; wie wir im Abschnitt 4.1 beweisen werden, beträgt ihre Anzahl jeweils $2^6 \cdot 3$.

In [8, Cor. 12] wiesen Clarke et al. nach, daß die Koeffizienten d_{km} der erzeugenden Funktion

$$D_n(x, q) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} x^{\mathbf{exc}(\pi)} q^{\mathbf{inv}(\pi)}$$

der Rekursion $d_{k, k+m} = d_{n-1-k, n-1-k+m}$ unterliegen. Die Argumentation des Beweises von Satz 2.2.9 zeigt simultan auch dieses Symmetrieverhalten der Verteilung von $(\mathbf{exc}, \mathbf{inv})$. (Siehe dazu auch Anhang A, Tabelle 2.)

Korollar 2.3.22 Die gemeinsame Verteilung der Bistatistik $(\mathbf{exc}, \mathbf{inv})$ auf \mathcal{S}_n ist symmetrisch.

Bemerkung 2.3.23 Satz 2.3.2 offenbart den Zusammenhang von \mathbf{dexc} zu einer weiteren Permutationsstatistik. In [21, Th. 2] wird bewiesen, daß mit den Notationen von 2.3.2

$$\mathbf{den}(\pi) = i_1 + \dots + i_e + \mathbf{inv}(\pi_E) + \mathbf{inv}(\pi_{NE})$$

gilt, wobei \mathbf{den} die von Denert eingeführte Statistik bezeichne. Für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt also

$$\mathbf{den}(\pi) = \mathbf{inv}(\pi) - \mathbf{dexc}(\pi) + \sum_{i \in \mathbf{E}(\pi)} i.$$

Kapitel 3

Bi-ansteigende Permutationen

Das vorige Kapitel schloß mit Strukturuntersuchungen einer bestimmten Art von Permutationen. Diese als bi-ansteigend bezeichneten Permutationen von $[n]$ spielen in unserer Theorie eine derart wichtige Rolle, daß sich dieses Kapitel ausschließlich mit ihnen und den Verteilungen der vier Statistiken **exc**, **dexc**, **des** und **ddes** auf ihrer Menge \mathcal{M}_n beschäftigen wird.

In der Tat wird es genügen, die Verteilungen auf \mathcal{M}_n zu bestimmen. Der tragende Gedanke dabei ist, daß die Permutationen zu C_n Klassen zusammengefaßt werden können, die durch ihren einen bi-ansteigenden Vertreter hinsichtlich ihrer Aufstiegsstruktur repräsentiert werden. Alle Elemente einer Klasse nehmen denselben Wert bezüglich **exc** und **dexc** an. Somit ist es möglich, aus den Verteilungskoeffizienten von **exc** bzw. $(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})$ auf der Menge \mathcal{M}_n Rückschlüsse für die Verteilungen auf der gesamten symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n zu ziehen.

In den Abschnitten 1 und 2 entwickeln wir zunächst eine Korrespondenz zwischen den bi-ansteigenden Permutationen und speziellen Polyominos. Diese verschlüsselt die Werte der Statistiken **exc** und **dexc** durch zwei typische Größen (im wesentlichen Umfang und Fläche) des Polyominos. Wir können somit die Untersuchung der Verteilungen auf die (anschauliche) Betrachtung und Enumeration von Polyominos zurückführen.

Im zweiten Teil des Abschnitts 2 diskutieren wir das Verhalten der bi-ansteigenden Permutationen hinsichtlich ihrer Abstiege. Insbesondere wird für die Elemente aus \mathcal{M}_n mit identischem **exc**- und **des**-Wert eine bijektive Beschreibung durch die Motzkin-Pfade angegeben.

Diese wird im Abschnitt 3 durch eine geringfügige Modifikation auf alle bi-ansteigenden Permutationen ausgedehnt. Die abstiegsbasierten Statistiken **des** und **ddes** lassen sich dabei auf seiten der Pfade durch markante Größen interpretieren. Die Bestimmung der Verteilungen von **des** und $(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})$ entspricht also ebenfalls einer verfeinerten Enumeration von (wohlbekannten) „permutationsfernen“ Objekten.

Im Mittelpunkt des Abschnitts 4 steht die Abzählung der Polyominos bezüglich ihres Umfangs und ihrer Fläche. Dieses Problem ist äquivalent zur Untersuchung von Kompositionen fester

Länge bezüglich ihrer Vergleichbarkeit hinsichtlich einer bestimmten Halbordnung.

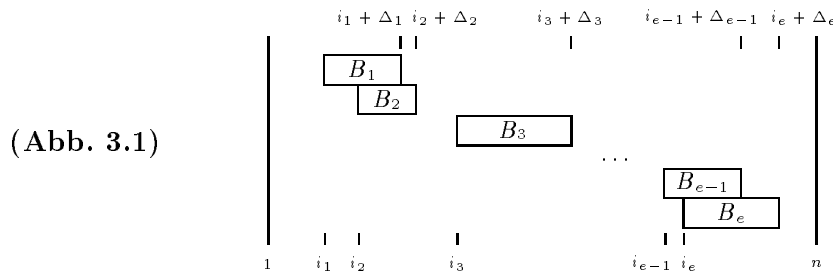
Die Gleichverteilung der gewichteten Statistiken auf der Menge \mathcal{M}_n erlaubt es uns schließlich, die beiden Schlüsselobjekte zusammenzubringen. Im Abschnitt 5 konstruieren wir eine Korrespondenz zwischen den Parallelogrammpolyominos und den zweifarbigen Motzkin-Pfaden, die alle wichtigen Parameter des Polyominos auf den Pfad überträgt.

3.1 Eine polyominobasierte Interpretation

Nach Satz 2.3.10 ist jede Permutation $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{exc}(\pi) = e$ von der Form

$$\pi = (s_{i_1+\Delta_1-1} s_{i_1+\Delta_1-2} \cdots s_{i_1}) (s_{i_2+\Delta_2-1} s_{i_2+\Delta_2-2} \cdots s_{i_2}) \cdots (s_{i_e+\Delta_e-1} s_{i_e+\Delta_e-2} \cdots s_{i_e}),$$

wobei $1 \leq i_1 < \dots < i_e < n$ und $1 < i_1 + \Delta_1 < \dots < i_e + \Delta_e \leq n$ sei. Die Beschreibung von π durch das Paar $((i_1, \dots, i_e), (\Delta_1, \dots, \Delta_e)) \in \mathbb{N}^e \times \mathbb{N}^e$ inspiriert zu folgendem Modell:



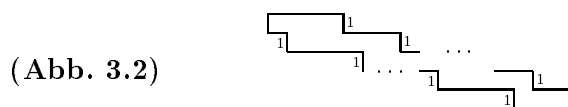
Die Enumeration der bi-ansteigenden Permutationen bezüglich der Anzahl ihrer Aufstiege (später auch in Abhängigkeit vom dexc -Wert) läßt sich also zurückführen auf das

Problem 3.1.1 Wie viele Möglichkeiten gibt es, e Blöcke B_1, \dots, B_e (der Länge $\Delta_1, \dots, \Delta_e$) innerhalb eines Streifens der Breite $n - 1$ anzuordnen, so daß

- 1) B_i vor B_{i+1} beginnt und
- 2) B_i nach B_{i-1} endet?

Die Lösung ist elementar, wenn sich die Blöcke nicht überlagern. Es ist also naheliegend, „zusammenhängende“ Blöcke als ein Objekt aufzufassen und diese bezüglich ihrer Ausmaße zu zählen. Wir betrachten daher zunächst das folgende (Teil-)

Problem 3.1.2 Wie viele l -zeilige Parallelogrammpolyominos der Breite m gibt es, deren sämtliche vertikalen Begrenzungen von der Länge 1 sind?



Ein Parallelogrammpolyomino ist eine durch zwei Pfade im $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ -Gitter begrenzte Fläche. Die Pfade setzen sich dabei nur aus „Ost“- und „Süd“-Schritten zusammen und berühren sich außer im gemeinsamen Start- bzw. Endpunkt nicht. Da in den weiteren Ausführungen ausschließlich Parallelogrammpolyominos mit normierten Vertikalgrenzen betrachtet werden, definieren wir den Begriff des Polyominos wie folgt.

Definition 3.1.3 Seien P_1 und P_2 Pfade im $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ -Gitter vom Punkt $(0, l)$ zum Punkt $(m, 0)$ mit den Schrittfolgen

$$([k_{11}, 0], [0, -1], [k_{12}, 0], [0, -1], \dots, [k_{1l}, 0], [0, -1]), \quad k_{1j} \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$([0, -1], [k_{21}, 0], [0, -1], [k_{22}, 0], \dots, [0, -1], [k_{2l}, 0]), \quad k_{2j} \in \mathbb{N}$$

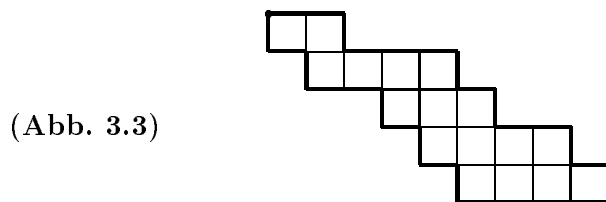
derart, daß P_2 den Pfad P_1 in keinem Punkt (i, j) mit $i \in [m - 1]$ berührt. Die von P_1 und P_2 begrenzte Fläche nennen wir ein l -zeiliges Polyomino der Breite m .

Da für die Identifizierung eines Polyominos lediglich die Kenntnis der Längen k_{ij} der Horizontalschritte erforderlich ist, reduzieren wir die Schrittfolgen auf

$$\alpha := (k_{11} - 1, k_{12}, \dots, k_{1l}) \quad \text{bzw.} \quad \beta := (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2l} - 1)$$

und beschreiben das durch P_1 und P_2 definierte Polyomino fortan durch das Paar (α, β) . (Aus der Schnittpunktbedingung resultiert $k_{11}, k_{2l} > 1$.)

Beispiel 3.1.4 Das Polyomino $((1, 3, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1, 3))$ ist von der Gestalt



Aufgrund der Konstruktion sind α und β Objekte, deren Kombinatorik hervorragend untersucht ist; es sind Kompositionen fester Länge, hier l -Kompositionen von $m - 1$.

Sei $\mathcal{C}_{m,l}$ die Menge der Kompositionen von m in l Teile. Die Paare von Kompositionen, die ein Polyomino beschreiben, werden offensichtlich durch folgende Bedingung charakterisiert.

Proposition 3.1.5 Das Paar $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ korrespondiert genau dann zu einem l -zeiligen Polyomino der Breite $m + 1$, wenn α die Komposition β dominiert (in Zeichen $\beta \preceq \alpha$), d.h.

$$\beta_1 + \dots + \beta_j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j \quad \text{für alle } j$$

gilt.

Beweis. Sei $j \in [l - 1]$ der minimale Index, für den die Bedingung verletzt wird. Dann berühren sich die durch α und β beschriebenen Pfade im Punkt $(\alpha_1 + \dots + \alpha_j + 1, l - j)$. \square

3.2 Auf- und Abstiege

In diesem Abschnitt werden wir die im vorigen Abschnitt aufgeworfenen Fragen 3.1.2 und 3.1.1 kombinatorisch beantworten. Als Resultat liegt dann die Verteilung der Statistik **exc** auf \mathcal{M}_n vor.

Im zweiten Teil wenden wir uns den Abstiegen zu und charakterisieren insbesondere die bi-ansteigenden Permutationen, für die Auf- und Abstiegsmenge übereinstimmen.

Sei $p_{m,l}$ die Anzahl der Polyominos $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$. (Man beachte, daß die Breite von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ gerade $m + 1$ ist.)

Mittels Computereperimenten lassen sich sehr schnell die folgenden Vermutungen anstellen:

- 1) Die Anzahl der Polyominos der Breite $m + 1$ entspricht der m -ten Catalan-Zahl C_m , d.h.

$$\sum_{l=1}^m p_{m,l} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}.$$

- 2) Die Anzahl der Polyominos fester Breite ist symmetrisch in l , d.h.

$$p_{m,l} = p_{m,m+1-l} \quad \text{für } l = 1, \dots, m.$$

Um die erste Behauptung zu beweisen, genügt es, eine Bijektion zu einem der zahlreichen kombinatorischen Objekte zu konstruieren, die mit den Catalan-Zahlen gezählt werden. (Die umfangreichste Sammlung findet sich sicherlich bei Stanley, [37, Exc. 6.19] und [40].) Dabei sollte es im Bildbereich für den Parameter l eine „natürliche“ Interpretation geben.

Wir betrachten die $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ -Gitterpfade in der (x, y) -Ebene von $(0, m)$ nach $(m, 0)$, die sich aus Schritten $[1, 0]$ und $[0, -1]$ zusammensetzen und die Gerade $x + y = m$ nicht überschreiten. Nach [37, Exc. 6.19h] beträgt ihre Anzahl gerade C_m . Der Parameter l zählt die horizontalen (oder vertikalen) Teilpfade.

Im Anhang (B, Abbildung 1) sind diese Pfade exemplarisch für $m = 4$ vollständig aufgelistet.

Es gibt eine offensichtliche Bijektion zwischen den Pfaden und den Partitionen, deren Young-Diagramm vollständig in $(m - 1, m - 2, \dots, 1)$ eingebettet werden kann. (Man betrachte den vom Pfad und den Achsen begrenzten Bereich.) Der Parameter l entspricht hierbei der um 1 erhöhten Anzahl der verschiedenen Teile der Partition.

Im folgenden konstruieren wir eine Bijektion zwischen den Polyominos fester Breite und Zeilenanzahl und besagten Young-Diagrammen.

Sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ ein Polyomino. Desweiteren seien

$$\begin{aligned} \lambda &:= (m - \alpha_1, m - \alpha_1 - \alpha_2, \dots, m - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1}) \\ \mu &:= (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{l-1}, \dots, \beta_1 + \beta_2, \beta_1) \end{aligned}$$

die „Eckbereiche“, die bei Einbettung von (α, β) in ein $(m+1) \times l$ -Rechteck entstehen. Insbesondere sind λ und μ Partitionen in lauter verschiedene Teile, deren größter durch $m-1$ beschränkt ist.

Es existiert genau eine Partition $\Lambda = \Lambda_1^{s_1} \dots \Lambda_{l-1}^{s_{l-1}}$ mit $s_i \geq 1$, für die die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $\Lambda' = (\Lambda'_1)^{t_1} \dots (\Lambda'_{l-1})^{t_{l-1}}$ mit $t_i \geq 1$, wobei Λ' die zu Λ konjugierte Partition sei,
- 2) $\lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{l-1})$,
- 3) $\mu = (\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{l-1})$.

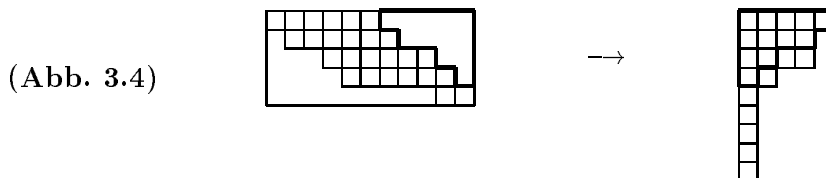
(Man beachte, daß der erste Punkt die Forderung nach der übereinstimmenden Anzahl von verschiedenen Teilen von Λ und Λ' beinhaltet.)

Sind λ und μ gegeben, so wird Λ wie folgt konstruiert:

Setze $\Lambda_0 = \lambda$. Dann ist $(\Lambda_0)' = (l-1)^{t_1} \dots 1^{t_{l-1}}$ mit $t_i \geq 1$. Durch spaltenweises Hinzufügen von Kästchen zum Diagramm von Λ_0 erhalten wir eine Partition Λ , für die $\mu = (\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{l-1})$ gilt. Dazu erweitern wir die ersten $(\Lambda_0)_{l-1}$ Spalten um $\mu_1 - (l-1)$ Kästchen, die nächsten $(\Lambda_0)_{l-2} - (\Lambda_0)_{l-1}$ Spalten um $\mu_2 - (l-2)$ Kästchen, die nächsten $(\Lambda_0)_{l-3} - (\Lambda_0)_{l-2}$ Spalten um $\mu_3 - (l-3)$ Kästchen usw.

Wegen $\mu_{l-i} \geq i$ für $i = 1, \dots, l-1$ ist dies möglich. Die so definierte Partition Λ erfüllt die drei Bedingungen und ist eindeutig bestimmt.

Beispiel 3.2.1 Für $\alpha = (5, 1, 2, 1, 1)$ und $\beta = (1, 2, 1, 5, 1)$ (also $m = 10$ und $l = 5$) erhalten wir $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ und $\mu = (9, 4, 3, 1)$. Das Polyomino (α, β) korrespondiert zur Partition $\Lambda = 5 \ 4^2 \ 2 \ 1^5$.



Lemma 3.2.2 Das Paar $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ ist genau dann ein Polyomino, wenn sich das Young-Diagramm von Λ vollständig in $(m-1, m-2, \dots, 1)$ einbetten läßt.

Beweis. Nach Konstruktion bilden die Paare (μ_{l-j}, λ_j) mit $j = 1, \dots, l-1$ gerade die Ecken des Diagramms von Λ . Die Forderung $i_1 + i_2 \leq m$ an die Ecken (i_1, i_2) von Λ ist somit äquivalent zu den definierenden Bedingungen

$$m - (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) + \beta_1 + \dots + \beta_j \leq m, \quad j = 1, \dots, l-1$$

des Polyominos (α, β) . □

Die Korrespondenz zwischen den Ecken des Young-Diagramms und den Partitionen λ und μ liefert auch die eindeutige Umkehrbarkeit der Konstruktion.

Satz 3.2.3 *Es gibt eine Bijektion zwischen den l -zeiligen Polyominos der Breite $m+1$ und den Partitionen mit $l-1$ verschiedenen Teilen, deren Young-Diagramm sich vollständig in $(m-1, \dots, 1)$ einbetten läßt.*

Somit können wir der „Catalan-Liste“ zwei neue Interpretationen hinzufügen.

Korollar 3.2.4 *Die m -te Catalan-Zahl C_m zählt die Polyominos der Breite $m+1$.*

Korollar 3.2.5 *Die m -te Catalan-Zahl C_m zählt die Paare (α, β) von Kompositionen von m gleicher Länge, für die $\beta \preceq \alpha$ gilt.*

Die Bijektion berücksichtigt bereits den Parameter l . Auf seiten der Gitterpfade wurde die Enumeration bezüglich dieser Größe (dort als Anzahl der horizontalen Teilpfade interpretiert) vollzogen. [41] zeigt, daß sich die durch $x + y = m$ beschränkten Gitterpfade über der Schrittmenge $\{[1, 0], [0, -1]\}$ zwischen den Punkten $(0, m)$ und $(m, 0)$ mit l horizontalen Teilpfaden durch die Narayana-Zahlen $N(m, l)$ abzählen lassen. Diese sind durch

$$N(m, l) := \frac{1}{m} \binom{m}{l} \binom{m}{l-1}$$

definiert und erfüllen insbesondere $C_m = N(m, 1) + N(m, 2) + \dots + N(m, m)$. Somit beantwortet die Bijektion die im vorigen Abschnitt gestellte Frage 3.1.2 nach der Anzahl der l -zeiligen Polyominos der Breite $m+1$.

Korollar 3.2.6 *Es gilt $p_{m,l} = \frac{1}{m} \binom{m}{l} \binom{m}{l-1}$ für alle positiven m und l .*

Der Nachweis der eingangs vermuteten Symmetrie in l ist somit trivial.

Korollar 3.2.7

- a) *Es gilt $p_{m,l} = p_{m,m+1-l}$ für $l = 1, \dots, m$.*
- b) *Unter den Young-Diagrammen, die sich vollständig in $(n, \dots, 1)$ einbetten lassen, gibt es genauso viele mit l wie mit $n-l$ Ecken.*

Ursprünglich war die Betrachtung der Polyominos durch folgende Idee motiviert: Die Abzählung der Blockkonfigurationen läßt sich auf den Fall disjunkter Anordnungen zurückführen, wenn sich überlagernde Blöcke zu einem Objekt, eben einem Polyomino, zusammengefaßt werden.

Tatsächlich ist der Zusammenhang zwischen den Polyominos und den Blockkonfigurationen viel enger; die Mengen sind gleichmächtig!

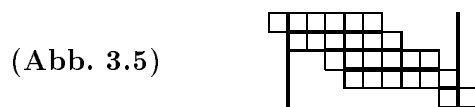
Satz 3.2.8 *Es gibt eine Bijektion zwischen den $(e + 1)$ -zeiligen Polyominos der Breite $n + 1$ und den bi-ansteigenden Permutationen von $[n]$ mit e Aufstiegen.*

Beweis. Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit den Aufstiegen $i_1 < \dots < i_e$. Wie im Abschnitt 3.1 illustriert, können wir π eindeutig durch die Anordnung von e Blöcken innerhalb eines Streifens der Breite $n - 1$ beschreiben (der k -te Block beginnt an der Position i_k).

Die Korrespondenz dieser Objekte zu den $(e + 1)$ -zeiligen Polyominos der Breite $n + 1$ ist offensichtlich: Der Block B_i entspricht den gemeinsamen Spalten der Zeilen i und $i + 1$ des Polyominos. Dabei beginnt die erste Polyominozeile bei 0, die $(e + 1)$ -te Zeile endet bei $n + 1$. \square

Beispiele 3.2.9

- a) Das Polyomino $((5, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 5, 1))$ korrespondiert zu der Blockkonfiguration



und somit zur Permutation $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$.

- b) Im Anhang (B, Abbildung 3) geben wir alle Elemente von \mathcal{M}_4 mit den zugehörigen Polyominos und den dazu korrespondierenden Partitionen an.

Bemerkung 3.2.10 Formal betrachtet, speichern die Partialsummen von α und β alle Informationen über die Aufstiege von π : $\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \dots, \beta_1 + \dots + \beta_e$ sind gerade die Aufstiege von $\pi \in \mathcal{M}_n$ und $\alpha_1 + 1, \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_e + 1$ die dazugehörigen Werte. Durch diese Größen ist eine bi-ansteigende Permutation eindeutig bestimmt.

Das zu Beginn des Kapitels formulierte (recht elementare) Problem der Enumeration der Möglichkeiten, eine feste Anzahl von Blöcken innerhalb eines Streifens vorgegebener Breite auf eine bestimmte Weise anzuordnen, besitzt also folgende kombinatorisch schöne Antwort.

Korollar 3.2.11 *Es gilt $M_n^{\text{exc}}(e) = \frac{1}{n} \binom{n}{e} \binom{n}{e+1}$ für alle positiven n und $e \in \{0, \dots, n - 1\}$.*

Die Verteilung der Menge \mathcal{M}_n bezüglich der Anzahl der Aufstiege wird durch die Narayana-Zahlen bestimmt.

Bemerkungen 3.2.12

- a) Die Mächtigkeit von \mathcal{M}_n war bereits bekannt (siehe [37, Exc. 6.19ee]): Die Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$, deren längste fallende Teilfolge höchstens zwei Positionen umfaßt (es existieren keine Indizes $i < j < k$ mit $\pi_i > \pi_j > \pi_k$), werden durch C_n gezählt. Die als „321-avoiding“ bezeichnete Bedingung ist äquivalent zur Charakterisierung 2.3.8 von \mathcal{M}_n . Die Narayana-Verfeinerung dieser Catalan-Interpretation wird – wie gezeigt – durch die klassische Statistik **exc** geliefert.
- b) Einen Überblick über das reizvolle Problem der Polyomino-Enumeration gibt [10]. Die bekannten Anzahlformeln hängen dabei vom Umfang (Länge des Randes) oder der Fläche (Anzahl der Kästchen) des Polyominos ab. Im von uns betrachteten Spezialfall ergibt sich der Umfang gerade aus der doppelten Summe der Höhe (Zeilenanzahl) und Breite des Polyominos. Es gibt folglich

$$p_n = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{n-l, l}$$

Polyominos vom Umfang $2n+2$ mit $n \geq 2$. Mit der Festsetzung $p_1 = 1$ unterliegt die Folge (p_n) der Rekursion

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} p_i p_{n-1-i}.$$

Zum Vergleich: Die Anzahl aller Parallelogrammpolyominos (ohne Beschränkung der Vertikalenlängen) vom Umfang $2n+2$ ist die n -te Catalan-Zahl (vergleiche [37, Exc. 6.19l]); diese Enumeration geht auf Pólya ([31]) zurück.

Im Gegensatz zur \mathcal{S}_n unterliegen **exc** und **des** auf der Menge \mathcal{M}_n nicht derselben Verteilung. Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, daß jedoch die Gleichverteilung der gewichteten Statistiken **dexc** und **ddes** auch in \mathcal{M}_n erhalten bleibt.

Die Untersuchung der bi-ansteigenden Permutationen bezüglich der Anzahl ihrer Abstiege ist etwas diffiziler; aufgrund der „aufstiegsnahen“ Definition von \mathcal{M}_n ist dies nicht überraschend.

Konstruktionsbedingt ist eine Stelle i genau dann ein Abstieg in $\pi \in \mathcal{M}_n$, wenn i ein Aufstieg, $i+1$ hingegen eine Fallstelle von π ist. Folglich ist **des** auf \mathcal{M}_n durch $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ beschränkt.

In der Sprache der Polyominos hat **des** folgende Interpretation.

Proposition 3.2.13 *Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ und $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$ das zugehörige Polyomino. Dann gilt für die Anzahl der Abstiege*

$$\mathbf{des}(\pi) = |\{1 < j < l : \beta_j > 1\}| + 1.$$

Beweis. Nach Bemerkung 3.2.10 sind $\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \dots, \beta_1 + \dots + \beta_{l-1}$ die Aufstiege von π , $\beta_2, \dots, \beta_{l-1}$ also die Abstände zwischen diesen Positionen. Jeder von 1 verschiedene Teil β_j mit $j \in \{2, \dots, l-1\}$ entspricht demnach einer Fallstelle k von π , für die $k-1 \in E(\pi)$ und $k < i$ für ein $i \in E(\pi)$ gilt. Auf den letzten Aufstieg folgt stets eine Fallstelle. \square

Im Gegensatz zur Statistik **exc** hängt die Anzahl der Abstiege von den konkreten Einträgen der Komposition β ab, was die Bestimmung der Verteilung von **des**, von den Rändern abgesehen, schwieriger werden läßt. Wir werden uns hier auf die Extremalfälle beschränken. Die vollständigen Verteilungen sind für $n \leq 10$ dem Anhang (A, Tabelle 4) zu entnehmen.

Proposition 3.2.14 Sei $M_n^{\text{des}}(d)$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit d Abstiegen.

- a) Dann ist $M_n^{\text{des}}(0) = 1$, $M_n^{\text{des}}(1) = 2^n - n - 1$.
- b) Für $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gilt $M_n^{\text{des}}(d) = C_d$, falls n gerade und $M_n^{\text{des}}(d) = (d+1)C_{d+1}$, falls n ungerade ist.

Beweis. a) Jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\text{des}(\pi) \leq 1$ ist bi-ansteigend. (Diese Aussage ist trivial, wenn die "321-avoiding"-Charakterisierung von \mathcal{M}_n zugrunde gelegt wird.) Die Koeffizienten $M_n^{\text{des}}(0)$ und $M_n^{\text{des}}(1)$ entsprechen also ihren Analoga auf der \mathcal{S}_n und somit den Euler-Zahlen $A(n, 1) = 1$ und $A(n, 2) = 2^n - n - 1$. (Vergleiche dazu [36, S. 22].)

b) Sei zunächst n gerade. Besitzt $\pi \in \mathcal{M}_n$ genau $\frac{n}{2}$ Abstiege, so ist $D(\pi) = \{1, 3, \dots, n-1\}$ (und auch $E(\pi) = D(\pi)$). Für $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n$ gilt also

$$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \dots < \pi_{n-1} > \pi_n, \quad \pi_1 < \pi_3 < \dots < \pi_{n-1}, \quad \pi_2 < \pi_4 < \dots < \pi_n.$$

Folglich korrespondiert π vermöge

π_2	π_4	π_6	\cdots	π_{n-2}	π_n
π_1	π_3	π_5	\cdots	π_{n-3}	π_{n-1}

zu einem Standard-Young-Tableau der Gestalt $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. Nach [37, Exc. 6.19ww] existieren $C_{\frac{n}{2}}$ derartige Tableaux.

Für ungerades n ist $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{des}(\pi) = \frac{n-1}{2}$ von der Form

$$\pi_{j_1} \pi_{j_1+1} \cdots \pi_{j_{k-1}} \pi_{j_{k-1}+1} \pi_i \pi_{j_k} \pi_{j_k+1} \cdots \pi_{j_d} \pi_{j_d+1} \quad (d = \frac{n-1}{2})$$

mit $\pi_{j_1} < \pi_{j_2} < \dots < \pi_{j_d}$, $\pi_{j_1+1} < \pi_{j_2+1} < \dots < \pi_{j_d+1}$ und $j_1, \dots, j_d \in D(\pi)$. Die Statistik **exc** kann also zwei Werte annehmen: $\text{exc}(\pi) \in \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$.

Im zweiten Fall gilt $\pi_{j_{k-1}} < \pi_i < \pi_{j_k}$ und $\pi_{j_k+1} < \pi_i$, und wir können wiederum eine bijektive Zuordnung zu speziellen Tableaux angeben:

π_{j_1+1}	\cdots	$\pi_{j_{k-1}+1}$	π_{j_k+1}	\cdots	π_{j_d+1}
π_{j_1}	\cdots	$\pi_{j_{k-1}}$	π_i	\cdots	π_{j_d}
π_{j_k}					

ist ein Standard-Young-Tableau der Gestalt $(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)$. Nach der Hakenformel (siehe [37, Cor. 7.21.6]) beträgt deren Anzahl

$$\frac{n!}{\frac{n+3}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \dots 2 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-5}{2} \dots 1 \cdot 1} = \binom{n}{\frac{n-3}{2}}.$$

Für $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{des}(\pi) = \frac{n-1}{2}$ muß nur die Bedingung $\pi_{j_{k-1}+1} < \pi_i < \pi_{j_k+1}$ erfüllt sein. Alle diese Permutationen lassen sich durch folgende Rekursion aus den bi-ansteigenden Permutationen maximaler Abstiegszahl über $[n-1]$ erzeugen.

Sei $\sigma \in \mathcal{M}_{n-1}$ mit $\mathbf{des}(\sigma) = \frac{n-1}{2}$. (Die Form von σ wurde im ersten Teil des Beweises beschrieben.) Für $a = 1, \dots, n$ führe aus: Erhöhe alle σ_k mit $\sigma_k \geq a$ um 1 ($\sigma_k := \sigma_k + 1$). Bestimme den maximalen Anstieg l mit $\sigma_l < a$. (Dabei sei $\sigma_0 := 0$ vereinbart.) Setze nun $\pi := \sigma_1 \cdots \sigma_l a \sigma_{l+1} \cdots \sigma_{n-1}$.

Dieser Fall umfaßt also $n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}$ Permutationen; insgesamt erhalten wir

$$M_n^{\mathbf{des}(\frac{n-1}{2})} = \binom{n}{\frac{n-3}{2}} + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n+1}{\frac{n-1}{2}}.$$

□

Recht einfach ist es hingegen, die bi-ansteigenden Permutationen zu charakterisieren, für die die Werte von \mathbf{exc} und \mathbf{des} übereinstimmen.

In Anlehnung an die in 2.3.2 eingeführte Sortierung der Aufstiegs- und Fallstellenwerte, betrachten wir die Permutationen, für die die Einschränkungen auf die An- und Abstiege geordnet sind.

Proposition 3.2.15 *Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit den Abstiegen $i_1 < \dots < i_d$. Ferner seien $j_1 < \dots < j_{n-d} = n$ die übrigen Positionen von π . Dann gilt*

$$\pi_{i_1} < \dots < \pi_{i_d} \quad \text{und} \quad \pi_{j_1} < \dots < \pi_{j_{n-d}}$$

genau dann, wenn $\pi \in \mathcal{M}_n$ und $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{des}(\pi)$ ist.

Beweis. Erfüllen die Werte der An- und Abstiege die Relationen, existieren keine aufeinanderfolgenden Abstiege in π . Die längste fallende Teilfolge umfaßt also höchstens zwei Positionen, nach Bemerkung 3.2.12a) ein Charakteristikum einer bi-ansteigenden Permutation.

Wie bereits festgestellt, ist jeder Abstieg von $\pi \in \mathcal{M}_n$ ein Aufstieg mit nachfolgender Fallstelle. Sei nun $i, i+1, \dots, i+k-1$ mit $k > 1$ eine Folge von Aufstiegen von π derart, daß $i-1$ und $i+k$ Fallstellen sind. Wegen $i \in \mathbf{E}(\pi)$ existiert eine Position $j > i$ mit $\pi_j \leq i$. Diese Stelle kann aber weder Anstieg (wegen $\pi_j < \pi_i < \pi_{i+1}$ und $j > i$) noch Abstieg (wegen $\pi_j < \pi_{i+k-1} > \pi_{i+k}$ und $j > i+k-1$) sein.

Für die Umkehrung argumentiere man analog. □

Bemerkungen 3.2.16

- a) Der Beweis zeigt, daß für eine bi-ansteigende Permutation π die Bedingung $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$ äquivalent zu $\mathbf{E}(\pi) = \mathbf{D}(\pi)$ ist.
- b) Nach Bemerkung 2.3.23 entspricht die Statistik \mathbf{den} auf \mathcal{M}_n der Summe der Aufstiege. Folglich stimmen $\mathbf{den}(\pi)$ und $\mathbf{maj}(\pi)$ für $\pi \in \mathcal{M}_n$ überein, falls $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$ ist. Es gilt aber auch die Umkehrung: Seien i_1, \dots, i_d die Abstiege von $\pi \in \mathcal{M}_n$. Jedes i_k ist auch ein Aufstieg. Somit nehmen $\mathbf{maj}(\pi) = i_1 + \dots + i_d$ und $\mathbf{den}(\pi)$ genau dann denselben Wert an, wenn dies die einzigen Aufstiege von π sind.
- Für die Charakterisierung 3.2.15 können also statt der Eulerschen Statistiken exc und des auch die Mahonschen Statistiken \mathbf{den} und \mathbf{maj} verwendet werden.

Auch hier liefert der Computer sehr schnell eine Vermutung über die Anzahl dieser Permutationen, die wir im folgenden beweisen werden. Sie führt uns zu einer Zahlenfolge, die eng mit den Catalan-Zahlen verwandt ist, die der Motzkin-Zahlen. Die n -te *Motzkin-Zahl* M_n wird durch die Rekursion

$$M_0 := 1, \quad M_n := M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i M_{n-2-i}$$

definiert.

Satz 3.2.17 *Unter den C_n bi-ansteigenden Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ gibt es M_n , für die $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$ gilt.*

Für die Motzkin-Zahlen gibt es ebenfalls zahlreiche kombinatorische Interpretationen; einen Überblick gibt [17].

Eine der bekanntesten ist die folgende: M_n zählt die Gitterpfade in der (x, y) -Ebene vom Punkt $(0, 0)$ nach $(n, 0)$ mit Schritten $[1, 0]$, $[1, 1]$ und $[1, -1]$, die die x -Achse nicht schneiden.

Im Anhang (B, Abbildung 2) werden diese sogenannten *Motzkin-Pfade* für $n = 4$ aufgeführt.

Die Korrespondenz zwischen der symmetrischen Gruppe und der Menge der gewichteten Motzkin-Pfade ist wohlbekannt: Die erste dieser Bijektionen gaben Françon und Viennot in [22] an. Weitere wesentliche Konstruktionen finden sich bei Foata und Zeilberger ([21]), Médicis und Viennot ([28]) sowie Biane ([5]). Obwohl alle auf verschiedene Art und zu unterschiedlichen Zwecken definiert, sind die Bijektionen essentiell gleich, wie diesbezügliche Untersuchungen (siehe [8], [32]) zeigten.

Wir werden im folgenden nachweisen, daß die Einschränkung der Françon-Viennot-Abbildung eine sehr einfache Bijektion zwischen den bi-ansteigenden Permutationen mit identischer Aufstiegs- und Abstiegsmenge und den Motzkin-Pfaden (im obigen Sinn) liefert.

Definition 3.2.18 Ein *Motzkin-Pfad*¹ der Länge n ist ein Wort $c_1 \cdots c_n$ über dem Alphabet $\{\swarrow, \searrow, -, \cdots\}$, so daß für jedes $i \in [n]$ das Niveau

$$h_i := |\{j < i : c_j = \swarrow\}| - |\{j < i : c_j = \searrow\}|$$

des i -ten Schritts nichtnegativ und $h_{n+1} = 0$ ist.

Ein *gewichteter Motzkin-Pfad* der Länge n ist ein Paar (c, ω) aus einem Motzkin-Pfad c der Länge n und einer Folge ω von n natürlichen Zahlen, die durch

$$0 \leq \omega_i \leq \begin{cases} h_i & \text{falls } c_i \in \{\swarrow, -\}, \\ h_i - 1 & \text{falls } c_i \in \{\searrow, \cdots\}, \end{cases}$$

beschränkt sind. Die Menge der gewichteten Motzkin-Pfade der Länge n wird mit Γ_n bezeichnet.

Eine Variante von $\Psi_{\text{FV}} : \mathcal{S}_n \rightarrow \Gamma_n$, $\pi \mapsto (c, \omega)$ definiert den Pfad c wie folgt: Mit der Vereinbarung $\pi_0 := 0$ und $\pi_{n+1} := n + 1$ setze für $i = 1, \dots, n$

$$c_{\pi_i} := \begin{cases} - & \text{falls } \pi_{i-1} < \pi_i < \pi_{i+1}, \\ \cdots & \text{falls } \pi_{i-1} > \pi_i > \pi_{i+1}, \\ \searrow & \text{falls } \pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1}, \\ \swarrow & \text{falls } \pi_{i-1} > \pi_i < \pi_{i+1} \text{ ist.} \end{cases}$$

Für $\pi \in \mathcal{M}_n$ enthält c offenbar keine Komponente \cdots .

Satz 3.2.19 Die durch $\Phi(\pi) = \Psi_{\text{FV}}(\pi)_1$ definierte Abbildung Φ zwischen den bi-ansteigenden Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$ und den Motzkin-Pfaden der Länge n über $\{\swarrow, \searrow, -\}$ ist eine Bijektion.

Beweis. Sei $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$. Zerlegt man π (durch Einfügen einer Grenze zwischen π_i und π_{i+1} , falls $\pi_i < \pi_{i+1}$) in seine Abstiegsblöcke, so besteht jeder Teil dieser Partitionierung nach Proposition 3.2.15 aus höchstens zwei Elementen. Zudem sind folgende Relationen erfüllt:

Bildet π_i einen Block der Länge 1, so ist $i \notin \mathbf{E}(\pi)$, und es gilt $\pi_{i-1} < \pi_i < \pi_{i+1}$. (Weiterhin sei $\pi_0 = 0$ und $\pi_{n+1} = n + 1$.) Ist $\pi_i \pi_{i+1}$ ein Block der Länge 2, so ist i ein Aufstieg mit nachfolgender Fallstelle $i + 1$. Ferner gilt $\pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1} < \pi_{i+2}$.

Die Abbildung Φ definiert also den Schritt c_{π_i} als $-$, falls π_i ein einelementiger Abstiegsblock, als \searrow , falls π_i erstes Element und als \swarrow , falls π_i zweites Element eines Blocks der Länge 2 ist. Diese Zuordnung ist offensichtlich eineindeutig. \square

¹Die Bezeichnung „Motzkin-Pfad“ wird in der Literatur sowohl für die entsprechenden Gitterpfade über der Schrittmenge $\{\swarrow, \searrow, -\}$ als auch für die Pfade über $\{\swarrow, \searrow, -, \cdots\}$ verwendet.

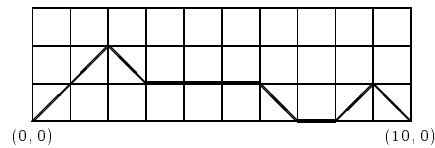
Beispiele 3.2.20

a) Die Permutation $\pi = 3\ 1\ 7\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10\ 9 \in \mathcal{M}_{10}$ zerlegt sich in

$$3\ 1 - 7\ 2 - 4 - 5 - 6 - 8 - 10\ 9$$

($c_3 = c_7 = c_{10} = \setminus$, $c_1 = c_2 = c_9 = /$, $c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = -$), korrespondiert also zum Pfad

(Abb. 3.6)



Ist umgekehrt der Pfad gegeben, so läßt sich π wie folgt rekonstruieren. Die Paare aus den Indizes des k -ten Schritts \setminus und des k -ten Schritts $/$ mit $k = 1, 2, \dots$ bilden die Abstiegsblöcke der Länge 2 von π :

$$3\ 1 - 7\ 2 - 10\ 9$$

In diese Zerlegung werden die Indizes der Horizontalschritte so eingefügt, daß die Blöcke nach ihrem letzten Element aufsteigend geordnet sind.

b) Im Anhang (B, Abbildung 3) sind alle Elemente von \mathcal{M}_4 mit identischer Auf- und Abstiegsmenge und die zugehörigen Motzkin-Pfade aufgelistet.

Bemerkung 3.2.21 Die Anzahl der Aufstiege (=Abstiege) von π wird durch Φ als Anzahl der Schritte $/$ (oder alternativ \setminus) kodiert. Aber auch die beiden gewichteten Statistiken **ddes** und **dexc** können am Pfad abgelesen werden.

In [8] wurde gezeigt, daß der Wert von **ddes** (sogar) für alle $\pi \in \mathcal{S}_n$ der Summe der Höhen h_i des Pfades $\Phi(\pi)$ entspricht.

Nach Proposition 2.3.9 zählt $\pi_i - i$ für jedes $i \in \mathbb{E}(\pi)$ die Fallstellen $j > i$ mit $\pi_j < \pi_i$. Übertragen in die Sprache der Pfade ist diese Differenz für den k -ten Aufstieg von π gerade die Anzahl der von \setminus verschiedenen Komponenten zwischen dem k -ten Schritt $/$ (einschließlich) und dem k -ten Schritt \setminus von $\Phi(\pi)$.

Für das obige Beispiel mit $c = \Phi(\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi) = 3 & : c \text{ enthält 3 Schritte } /; \\ \text{ddes}(\pi) = 8 & : c \text{ hat die Höhenfolge } h = (0, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1); \\ \text{dexc}(\pi) = \text{inv}(\pi) = 7 & : \text{zwischen } c_1 \text{ (1. Schritt } /) \text{ und } c_3 \text{ (1. Schritt } \setminus) \text{ liegen } c_1, c_2 \neq \setminus, \\ & \text{zwischen } c_2 \text{ und } c_7 \text{ liegen } c_2, c_4, c_5, c_6 \neq \setminus, \\ & \text{zwischen } c_9 \text{ und } c_{10} \text{ liegt } c_9 \neq \setminus. \end{aligned}$$

Die Motzkin-Pfade der Länge n über dem Alphabet $\{/, \backslash, -\}$ mit vorgegebener Anzahl k von $[1, 1]$ -Schritten werden durch die Koeffizienten

$$m_{n,k} = \binom{n}{2k} C_k$$

des Motzkin-Polynoms quantifiziert (vergleiche [16] und [17]). Die Bijektion Φ erlaubt nun folgende Präzisierung von 3.2.17.

Satz 3.2.22 *Es gibt $m_{n,k}$ Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$, für die $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi) = k$ gilt.*

Die im ersten Teil beschriebene Bijektion zwischen den bi-ansteigenden Permutationen \mathcal{M}_n und den in ihrer Gestalt durch $(n-1, \dots, 1)$ beschränkten Young-Diagrammen liefert eine weitere kombinatorische Interpretation der Motzkin-Zahlen.

Korollar 3.2.23 *Die Anzahl der Young-Diagramme, die sich in $(n-1, \dots, 1)$ einbetten lassen und keine Ecken in aufeinanderfolgenden Zeilen besitzen, beträgt M_n . Genauer gibt es $m_{n,k}$ derartige Diagramme mit k Ecken.*

Beweis. Gemäß der Konstruktion korrespondiert zum Aufstieg i_k von $\pi \in \mathcal{M}_n$ die Ecke $(i_k, n+1-\pi_{i_k})$ im Young-Diagramm. Gilt nun $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$, folgt auf jedes i_k eine Fallstelle. \square

Aus Proposition 3.2.13 folgt die analoge Charakterisierung für die Polyominos.

Korollar 3.2.24 *Die Anzahl der Polyominos $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$, die die Bedingung $\beta_j > 1$ für $j = 2, \dots, l-1$ erfüllen, beträgt $m_{n,l-1}$.*

Bemerkungen 3.2.25

- a) Barcucci et al. konstruierten in [4] Permutationsklassen bezüglich verbotener Teilsequenzen, deren Enumeration Zahlenfolgen $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), (a_n^{(3)}), \dots$ erzeugt, die den Übergang von den Motzkin-Zahlen $(a_n^{(1)})$ zu den Catalan-Zahlen $(a_n^{(\infty)})$ demonstrieren.

Für die Folge $(a_n^{(1)})$ wurden dabei die Permutationen betrachtet, die Teilfolgen vom Typ 321 und $3\bar{1}42$ nicht zulassen. Letzteres bedeutet, daß jede 231-Folge in π Teil einer Sequenz vom Typ 3142 sein muß. Dies sind aber genau die von uns betrachteten Permutationen: Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$. Folglich existieren keine fallenden Sequenzen der Länge 3 in π , und für jede 231-Folge $\pi_i \pi_j \pi_k$ gilt $i, j \in \mathbf{E}(\pi)$ und $k \notin \mathbf{E}(\pi)$. (Die Mengen $\mathbf{E}(\pi)$ und $\mathbf{D}(\pi)$ sind identisch.) Nach 3.2.15 existiert eine Fallstelle l mit $i < l < j$ und $\pi_l < \pi_k$; $\pi_i \pi_l \pi_j \pi_k$ bildet also eine Folge der Form 3142.

Die Enumeration in [4] basiert auf einer sukzessiven Konstruktion von erzeugenden Funktionen.

Die Zahlenfolgen $(b_n^{(k)})$ für $k \in \mathbb{N}$, die durch

$$b_n^{(k)} := |\{\pi \in \mathcal{M}_n : \text{exc}(\pi) - \text{des}(\pi) \leq k-1\}|$$

definiert sind, weisen ein ähnliches Verhalten wie die Sequenzen $(a_n^{(k)})$ auf. Neben der Identität von $(a_n^{(1)})$ und $(b_n^{(1)})$ gilt $a_n^{(n-2)} = b_n^{(n-2)} = C_n - 1$ und $a_n^{(k)} = b_n^{(k)} = C_n$ für alle $k \geq n - 1$.

- b) Die bi-ansteigenden Permutationen, die keine Folge vom Typ 231 enthalten, werden durch $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{des}(\pi)$ und $\mathbf{dexc}(\pi) = \mathbf{d-des}(\pi)$ charakterisiert: Die Übereinstimmung der Statistikwerte ist äquivalent zur Bedingung $\pi_{i+1} = i$ für alle $i \in \mathbf{E}(\pi)$. Nach Proposition 3.2.15 ist jede 231-Folge von π von der Form $\pi_i \pi_j \pi_{j+1}$ mit den Aufstiegen i, j und der Fallstelle $j + 1$. Wegen $\pi_j > \pi_i > \pi_{j+1}$ müssen alle Zahlen $1, \dots, \pi_{j+1} - 1$ auf den Positionen $\{1, \dots, j - 1\} \setminus \{i\}$ auftreten. In diesem Fall gilt also $\pi_{j+1} \leq j - 1$.

Der Motzkin-Pfad einer 231-freien bi-ansteigenden Permutation ist durch die Gerade $x = 1$ beschränkt. Es gibt folglich 2^{n-1} Permutationen von $[n]$, die die Teilsequenzen 321 und 231 verbieten. (Vergleiche dazu auch [35, Lem. 5 und Prop. 7].)

- c) Schließlich liefert Φ eine einfache Erklärung für folgende von Deutsch angestellte Beobachtung über die Motzkin-Pfade (siehe [15, Problem 10816]): Für $n > 1$ gibt es ebenso viele Motzkin-Pfade der Länge n ohne Horizontalschritt auf der x -Achse wie Motzkin-Pfade der Länge $n - 1$ mit mindestens einem solchen Schritt.

Nach unserer Konstruktion enthält ein Motzkin-Pfad genau dann den Teilpfad $(i - 1, 0) \rightarrow (i, 0)$, wenn i ein Fixpunkt der zugehörigen Permutation ist.

Sei nun $\sigma \in \mathcal{M}_{n-1}$ mit $\mathbf{exc}(\sigma) = \mathbf{des}(\sigma)$ und minimalem Fixpunkt f . Setze

$$\pi' := \sigma_1 \cdots \sigma_{f-1} n \sigma_f \cdots \sigma_{n-1}$$

und sortiere die Abstiege von π' so um, daß ihre zugehörigen Werte monoton wachsend sind. Die derart geordnete Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ ist fixpunktfrei, bi-ansteigend und erfüllt $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{des}(\pi)$.

Ein Beispiel: Für $\sigma = 2\ 1\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$ erhalten wir nach dem Einfügen $\pi' = \underline{2}\ 1\ \underline{8}\ 3\ \underline{6}\ 4\ 5\ 7$ und nach dem Sortieren $\pi = \underline{2}\ 1\ \underline{6}\ 3\ \underline{8}\ 4\ 5\ 7$.

Wie bereits in Bemerkung b) gezeigt, ist der Wert einer Fallstelle i mit $\sigma_{i-1} > \sigma_i$ durch $\sigma_i \leq i - 1$ beschränkt. Folglich ist jeder Fixpunkt von σ ein einelementiger Abstiegsblock. Wird nun n vor f eingefügt, entsteht ein neuer Abstieg. Durch die Sortierung der Abstiege wird $\pi \in \mathcal{M}_n$ und $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{des}(\pi)$ gewährleistet. Insbesondere gilt $\mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{exc}(\sigma) + 1$. (Man kann also Deutsch' Aussage mit dem Zusatz „mit k Diagonalschritten“ bzw. „mit $k - 1$ Diagonalschritten“ versehen.) Zudem enthält π keinen Fixpunkt. Ist $\sigma_i = i + 1$ für ein $i > f$, so wird dieser Abstieg von σ durch die Umordnung nach links verschoben.

3.3 Ein offenes (Verteilungs-)Problem

Der vorherige Abschnitt beantwortet die Frage nach der Verteilung von **des** auf der Menge \mathcal{M}_n nicht, liefert aber eine auf Gitterpfaden beruhende Interpretation der Koeffizienten.

Wie durch Proposition 3.2.13 angedeutet, ist die Darstellung einer bi-ansteigenden Permutation als Polyomino für Untersuchungen bezüglich ihrer Abstiege wenig geeignet. Im Gegensatz dazu lassen sich sowohl der Wert von **des** als auch für **ddes** unmittelbar am zugehörigen Motzkin-Pfad ablesen, der allerdings bisher nur für Permutationen der Teilmenge $\{\pi \in \mathcal{M}_n : \text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)\}$ definiert wurde.

Durch eine einfache Erweiterung erhalten wir eine solche Pfadinterpretation für alle bi-ansteigenden Permutationen von $[n]$.

Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$. Wir definieren den zu π gehörigen Pfad wie folgt: Mit der Vereinbarung $\pi_0 := 0$ und $\pi_{n+1} := n + 1$ setze für $i = 1, \dots, n$

$$c_{\pi_i} := \begin{cases} - & \text{falls } \pi_{i-1} < \pi_i < \pi_{i+1} \text{ und } i \notin \mathbf{E}(\pi), \\ \cdots & \text{falls } \pi_{i-1} < \pi_i < \pi_{i+1} \text{ und } i \in \mathbf{E}(\pi), \\ \searrow & \text{falls } \pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1}, \\ \swarrow & \text{falls } \pi_{i-1} > \pi_i < \pi_{i+1} \text{ ist.} \end{cases}$$

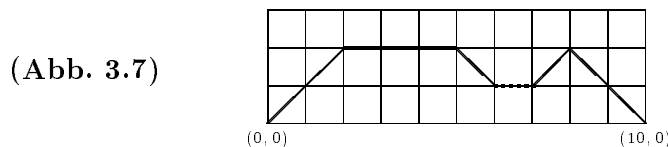
Satz 3.3.1 Sei Ω_n die Menge der Motzkin-Pfade der Länge n mit Schritten $\swarrow, \searrow, -$ und \cdots , für die das Niveau jedes Schritts \cdots positiv ist. Die zuvor beschriebene Konstruktion ist eine Bijektion zwischen \mathcal{M}_n und Ω_n .

Beweis. Die Zulässigkeit der Zuordnung wurde bereits in 3.2.19 bewiesen.

Durch die Bedingung $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\pi)$ wird die Existenz von Abstiegsblöcken π_i der Länge 1 ausgeschlossen, für die $\pi_i > i$ gilt. Lassen wir solche jedoch zu, muß die Information $i \stackrel{?}{\in} \mathbf{E}(\pi)$ auch im Pfad verschlüsselt werden. Nach Bemerkung 3.2.25c) entsprechen die Horizontalschritte vom Niveau 0 den Fixpunkten von π , sie werden also stets durch $-$ symbolisiert. \square

Beispiele 3.3.2

- a) Die Permutation $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$ (zerlegt in $6\ 1 - 7 - 9\ 2 - 3 - 4 - 5 - 10\ 8$) korrespondiert zu



- b) Im Anhang (B, Abbildung 3) wird die vollständige Zuordnung $\mathcal{M}_4 \leftrightarrow \Omega_4$ angegeben.

Bemerkungen 3.3.3

- a) Nach Konstruktion entspricht die Differenz $\text{exc}(\pi) - \text{des}(\pi)$ gerade der Anzahl der Schritte \cdots im zugehörigen Pfad. Insbesondere ist die Zuordnung mit der aus 3.2.19 identisch, wenn die Anzahl der Auf- und Abstiege von π übereinstimmen.
- b) Die in Bemerkung 3.2.25a) beschriebenen Permutationsklassen

$$\{\pi \in \mathcal{M}_n : \text{exc}(\pi) - \text{des}(\pi) \leq k - 1\},$$

deren Enumeration Zahlenfolgen $(b_n^{(k)})$ erzeugt, die den Übergang von den Motzkin- zu den Catalan-Zahlen demonstrieren, entsprechen also den Mengen

$$\{c \in \Omega_n : c \text{ enthält } k - 1 \text{ Schritte } \cdots\}$$

von Motzkin-Pfaden. Im Anhang (B, Abbildung 4) wird dieser Sachverhalt für $n = 5$ illustriert.

- c) Die für die Statistiken des und ddes relevanten Daten (Abstiegsblöcke der Länge 2) werden anlog 3.2.19 auf die Pfade übertragen. Zur Erinnerung: $\text{des}(\pi)$ zählt die Schritte \swarrow , $\text{ddes}(\pi)$ entspricht der Summe der Höhen h_i des Pfades.

Korollar 3.3.4 *Es gilt $|\Omega_n| = C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Korollar 3.3.5 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ gilt*

$$M_n^{\text{des}}(d) = |\{c \in \Omega_n : c \text{ enthält } d \text{ Schritte } \swarrow\}|.$$

Die Bestimmung der Verteilung (abgesehen von den nach 3.2.14 bekannten Rändern) von des auf \mathcal{M}_n läßt sich also auf die folgende Frage zurückführen:

Frage 3.3.6 *Wie viele Motzkin-Pfade c der Länge n über $\{\swarrow, \searrow, -, \cdots\}$ mit vorgegebener Anzahl von Schritten \swarrow gibt es, die die Bedingung $h_i > 0$ für jeden Schritt $c_i = \cdots$ erfüllen?*

Bemerkungen 3.3.7

- a) Sei Ω'_n die Menge *aller* Motzkin-Pfade der Länge n über der Schrittmenge $\{\swarrow, \searrow, -, \cdots\}$. Nach [3] gibt es C_{n+1} dieser zweifarbigen Motzkin-Pfade. Durch die Konstruktion einer geeigneten Bijektion $\Omega_n \rightarrow \Omega'_{n-1}$ lassen sich also die Untersuchungen von Ω_n auf die Analyse der zweifarbigen Motzkin-Pfade zurückführen.
- b) Sei Δ_n die Menge aller *Dyck-Pfade* der Länge $2n$. (Dies sind die oberhalb der x -Achse vom Punkt $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$ verlaufenden, aus \swarrow und \searrow zusammengesetzten Gitterpfade. Vergleiche dazu auch den Abschnitt 3.5.) Die Dyck-Pfade gehören zu den bekanntesten

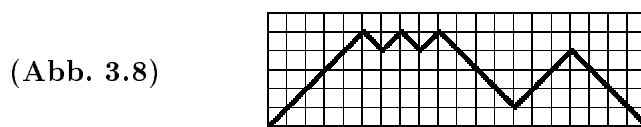
Catalan-Interpretationen ([37, Exc. 6.19i]).

Die Abbildung $\Omega_n \rightarrow \Delta_n$, die jedem $c \in \Omega_n$ den Dyck-Pfad d mit

$$d_{2i-1}d_{2i} := \begin{cases} \nearrow & \text{falls } c_i = -, \\ \searrow & \text{falls } c_i = \cdots, \\ // & \text{falls } c_i = /, \\ \backslash\backslash & \text{falls } c_i = \backslash \text{ ist} \end{cases}$$

für $i = 1, \dots, n$ zuordnet, ist eine (natürliche) Bijektion. (Man beachte, $h(\cdots) > 0$.)

Für den in 3.3.2a) betrachteten Motzkin-Pfad erhalten wir



Die Verteilungskoeffizienten der Statistik **des** auf \mathcal{M}_n erhalten dann die folgende Bedeutung:

$$M_n^{\text{des}}(k) = |\{d \in \Delta_n : d \text{ enthält } k \text{ disjunkte Teilpfade } //\}|.$$

3.4 Die gewichteten Statistiken

Dieser Abschnitt führt uns wieder zu den beiden im vorigen Kapitel eingeführten Statistiken zurück. Wir werden sehen, daß sich die für die Auf- und Abstiege entwickelten Modelle auch hier bewähren.

Im Gegensatz zu ihren klassischen Vorbildern **exc** und **des** unterliegen **dexc** und **ddes** auch auf der Menge \mathcal{M}_n derselben Verteilung. Die Abbildung φ aus 2.2.1 erbringt diesen Nachweis allerdings nicht mehr, da φ nicht auf den bi-ansteigenden Permutationen abgeschlossen ist.

Satz 3.4.1 *Es gilt $M_n^{\text{dexc}}(k) = M_n^{\text{ddes}}(k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Für $\pi \in \mathcal{M}_n$ definieren wir die Abbildung $\phi : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ wie folgt:

Seien $i_1 < \dots < i_s$ die Aufstiege von π mit $i_k + 1 \in \mathbb{E}(\pi)$ und $j_1 < \dots < j_t$ die Aufstiege, die gleichzeitig Abstieg sind. (Dann ist $\text{exc}(\pi) = s + t$ und $\text{des}(\pi) = t$. Vergleiche dazu auch die Anmerkungen vor Proposition 3.2.13.)

Das Bild $\phi(\pi)$ sei nun die Permutation σ , deren Aufstiege die Positionen $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s}, \pi_{j_1+1}, \dots, \pi_{j_t+1}$ sind und die auf diesen Stellen die (aufsteigend geordneten) Werte $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s}, \pi_{j_1}, \dots, \pi_{j_t}$ annimmt. Aufgrund der Struktur von π gilt $\pi_{i_1} > \pi_{j_1+1}$; σ kann also stets konstruiert werden. Durch diese Festlegungen ist $\sigma \in \mathcal{M}_n$ vollständig bestimmt. Das Wort σ_{NE} wird

aus den verbliebenen Elementen von $[n]$ gebildet.

Diese Zuordnung ist offensichtlich bijektiv, und es gilt

$$\mathbf{ddes}(\pi) = \sum_{k=1}^t (\pi_{j_k} - \pi_{j_k+1}) = \left(\sum_{k=1}^s \pi_{i_k} + \sum_{k=1}^t \pi_{j_k} \right) - \left(\sum_{k=1}^s \pi_{i_k} + \sum_{k=1}^t \pi_{j_k+1} \right) = \mathbf{dexc}(\sigma).$$

□

Beispiel 3.4.2 Für die Permutation $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$ gilt mit den Notationen des Beweises $i_1 = 3$ und $j_1 = 1, j_2 = 4, j_3 = 9$. Die Aufstiege des Bildes von π sind also 7, 1, 2, 8, die zugehörigen Werte 7, 6, 9, 10. Wir erhalten $\phi(\pi) = \underline{6}\ \underline{7}\ 1\ 2\ 3\ 4\ \underline{9}\ \underline{10}\ 5\ 8$.

Im Anhang (A, Tabelle 5) wird die vollständige Verteilung von \mathbf{dexc} auf \mathcal{M}_n für $n \leq 10$ angegeben. Wir werden uns im folgenden allerdings weniger mit dieser als mit der gemeinsamen Verteilung von \mathbf{exc} und \mathbf{dexc} ($= \mathbf{inv}$) befassen. Das Verhalten der Elemente von \mathcal{M}_n bezüglich der Anzahl ihrer Aufstiege ist bereits bekannt; es ist daher nur natürlich, dieses Charakteristikum einzubeziehen. Die Verteilung von \mathbf{dexc} ergibt sich dann durch Summation über \mathbf{exc} .

Für die Enumeration der bi-ansteigenden Permutationen bezüglich \mathbf{exc} und \mathbf{dexc} sind in der Problemstellung 3.1.1 auch die Längen $\Delta_1, \dots, \Delta_e$ der Blöcke zu berücksichtigen. Ihre Summe ergibt gemäß der Konstruktion gerade den \mathbf{dexc} -Wert der zugehörigen Permutation.

Die Bijektion 3.2.8 liefert die folgende Interpretation des Verteilungskoeffizienten $M_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k)$.

Satz 3.4.3 Mit $M_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k)$ werden die $(e+1)$ -zeiligen Polyominos der Breite $n+1$ und Fläche $k+n+1$ gezählt.

Beweis. Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit den Aufstiegen i_1, \dots, i_e und den positiven Differenzen $\Delta_1 = \pi_{i_1} - i_1, \dots, \Delta_e = \pi_{i_e} - i_e$. Nach 3.2.8 ist Δ_i die Anzahl der gemeinsamen Spalten der Zeilen i und $i+1$ des zu π korrespondierenden Polyominos (α, β) . Aufgrund der Konstruktion enthält die i -te Zeile von (α, β) für $i = 1, \dots, e$ dann $\beta_i + \Delta_i$ Kästchen, die $(e+1)$ -te Zeile $\beta_{e+1} + 1$ Kästchen. Die Fläche (=Anzahl der Kästchen) von (α, β) beträgt folglich $\beta_1 + \dots + \beta_{e+1} + \Delta_1 + \dots + \Delta_e + 1 = n + \mathbf{dexc}(\pi) + 1$. □

Bevor wir uns der Bestimmung dieser Koeffizienten zuwenden, betrachten wir zunächst noch die andere gewichtete Statistik. Die Anzahl der Auf- und die Anzahl der Abstiege sind nicht gleichverteilt auf \mathcal{M}_n , folglich auch nicht die Bistatistiken $(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})$ und $(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})$. Im Anhang (A, Tabellen 6 und 7) werden die beiden Verteilungen für $n = 6$ gegenübergestellt. Wir können die Verteilung von $(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})$ auf \mathcal{M}_n nicht explizit bestimmen, sind aber nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts in der Lage, die Koeffizienten kombinatorisch zu interpretieren.

Satz 3.4.4 Mit $M_n^{(\mathbf{des}, \mathbf{ddes})}(d, k)$ werden die Motzkin-Pfade $c \in \Omega_n$ gezählt, die d Schritte \nearrow enthalten und deren Höhen die Gleichung $h_1(c) + \dots + h_n(c) = k$ erfüllen.

Die Gleichverteilung der gewichteten Statistiken auf \mathcal{M}_n liefert somit die folgende Bijektion.

Korollar 3.4.5 *Es gibt ebenso viele Polyominos der Breite $n + 1$ und Fläche $k + n + 1$ wie Motzkin-Pfade $c \in \Omega_n$ mit $h_1(c) + \dots + h_n(c) = k$.*

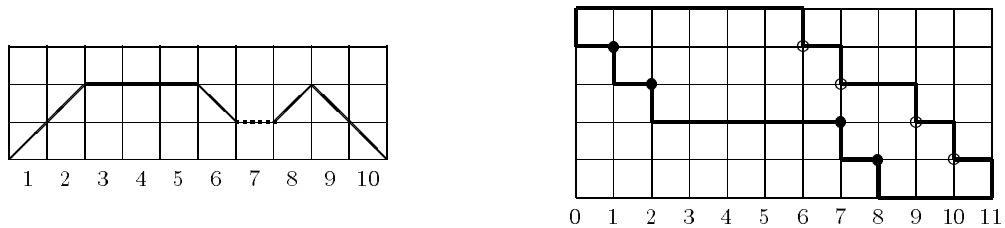
Bemerkungen und Beispiele 3.4.6

- a) Die im Beweis von Satz 3.4.1 beschriebene Konstruktion läßt sich wie folgt in die Sprache der Pfade und Polyominos übersetzen:

Sei $c \in \Omega_n$. Man übertrage die Indizes der Schritte $/$ und \dots (in der Reihenfolge ihres Auftretens in c) als Punkte mit um jeweils 1 verringerter Ordinate. Analog werden die Indizes der Schritte \backslash und \dots als Punkte beschrieben. Die Verbindung der Punkte eines Niveaus ergibt die gemeinsamen Spalten der Zeilen des Bildpolyominos. (Die erste Zeile des Polyominos beginne bei 0, die letzte ende bei $n + 1$.)

Für den im Beispiel 3.3.2a) betrachteten Pfad $c \in \Omega_{10}$ mit der Höhensumme $k = 14$, erhalten wir

(Abb. 3.9)



ein Polyomino der Fläche 25.

- b) Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $E(\pi) = \{i_1, \dots, i_e\}$. Desweiteren bezeichne π^* die bi-ansteigende Permutation mit den Aufstiegen $n + 1 - \pi_{i_k}$ und den Werten $\pi_{n+1-\pi_{i_k}}^* = n + 1 - i_k$ für $k = 1, \dots, e$. Die zu π und π^* korrespondierenden Polyominos gehen dann durch Rotation um 180° auseinander hervor. Auch die Zuordnung der Young-Diagramme erhält diese Symmetrie. Nach der Konstruktion zu Satz 3.2.3 sind die Partitionen Λ_π und Λ_{π^*} konjugiert zueinander. Die Motzkin-Pfade hingegen unterliegen dieser Regelmäßigkeit nicht! Zwar ist $\text{exc}(\pi) = \text{exc}(\pi^*)$, die Werte $\text{des}(\pi)$ und $\text{des}(\pi^*)$ können sich jedoch, ebenso wie $\text{ddes}(\pi)$ und $\text{ddes}(\pi^*)$, voneinander unterscheiden.

Ein (minimales) Beispiel:

$$\begin{aligned} \pi = 2413 &\longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} &\longleftrightarrow (31) &\longleftrightarrow \text{---} \nearrow \searrow \\ \pi^* = 3142 &\longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} &\longleftrightarrow (21^2) &\longleftrightarrow \nearrow \searrow \end{aligned}$$

Im nachfolgenden Abschnitt geben wir eine Bijektion zwischen den allgemeinen Parallelogrammpolyominos und den Motzkin-Pfaden an. Da dort lediglich die Parameter des

Polyominos von Interesse sind, können wir die Asymmetrie mittels der im Teil a) beschriebenen Zuordnung beheben.

Nun zurück zur Bistatistik ($\mathbf{exc}, \mathbf{dexc}$). Wie schon im Abschnitt 3.2 führen wir die Bestimmung der Verteilung einer Permutationsstatistik auf die Enumeration spezieller Polyominos zurück und untersuchen das

Problem 3.4.7 Wie viele l -zeilige Polyominos der Breite $m + 1$ und Fläche a gibt es? Wir bezeichnen diese Anzahl mit $p_{m,l,a}$.

Formal läßt sich der dritte Parameter wie folgt beschreiben.

Proposition 3.4.8 Sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ ein Polyomino der Fläche a . Dann gilt

- a) $a = l(\alpha_1 + 1) + (l - 1)(\alpha_2 - \beta_1) + (l - 2)(\alpha_3 - \beta_2) + \dots + 2(\alpha_{l-1} - \beta_{l-2}) + (\alpha_l - \beta_{l-1})$,
- b) $m + l \leq a \leq l(m + 2 - l)$.

Beweis. **a)** Die Bereiche, die das Komplement von (α, β) bezüglich eines $(m + 1) \times l$ -Rechtecks umfaßt, werden durch

$$\begin{aligned} \lambda &= (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_l, \alpha_3 + \dots + \alpha_l, \dots, \alpha_l) \vdash (l - 1)\alpha_l + (l - 2)\alpha_{l-1} + \dots + \alpha_2, \\ \mu &= (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{l-1}, \dots, \beta_1 + \beta_2, \beta_1) \vdash (l - 1)\beta_1 + (l - 2)\beta_2 + \dots + \beta_{l-1} \end{aligned}$$

beschrieben. (Diese Partitionen traten bereits bei der Konstruktion der Bijektion 3.2.3 auf.) Die Fläche von (α, β) beträgt also

$$(m + 1)l - (l - 1)\beta_1 - \dots - \beta_{l-1} - l(\alpha_1 + \dots + \alpha_l) + l\alpha_1 + (l - 1)\alpha_2 + \dots + \alpha_l.$$

b) Die Schranken sind offensichtlich. Die untere wird genau dann angenommen, wenn α und β übereinstimmen, die obere wenn $\alpha = (m + 1 - l, 1, \dots, 1)$ und $\beta = (1, \dots, 1, m + 1 - l)$ ist. \square

In Proposition 3.1.5 wurde gezeigt, daß zwei Kompositionen genau dann ein Polyomino beschreiben, wenn sie bezüglich der Dominanzordnung vergleichbar sind. Diese Äquivalenz werden wir uns zunutze machen.

Die nachfolgenden Ausführungen zur Struktur der Menge $\mathcal{C}_{m,l}$ basieren auf der Terminologie von Stanley ([36, Ch. 3, Sect. 1-4]).

Definitionen und Bemerkungen 3.4.9

- a) Die Menge $\mathcal{C}_{m,l}$ ist bezüglich der Dominanzordnung \preceq ein distributiver Verband mit dem minimalen (maximalen) Element $(1, \dots, 1, m + 1 - l)$ ($(m + 1 - l, 1, \dots, 1)$).

Im Anhang (B, Abbildung 5) sind die Hasse-Diagramme der Verbände $\mathcal{C}_{6,l}$ dargestellt.

b) Auf $\mathcal{C}_{m,l}$ sei die Operation

$$\tilde{\psi}_i \cdot \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1} - 1, \dots, \alpha_l), \quad i = 1, \dots, l-1$$

definiert. (Dabei sei die Zulässigkeit, also $\alpha_{i+1} > 1$, stillschweigend vorausgesetzt.)

c) Die Komposition β überdeckt α , wenn $\alpha \prec \beta$ und für kein Element $\gamma \in \mathcal{C}_{m,l}$ die Bedingung $\alpha \prec \gamma \prec \beta$ gilt. Wir können diese Relation durch die Operation $\tilde{\psi}_i$ beschreiben: β überdeckt α genau dann, wenn $\beta = \tilde{\psi}_i \cdot \alpha$ für ein geeignetes i ist.

d) Die Kette

$$\begin{aligned} & (1, \dots, 1, m+1-l) \prec (1, \dots, 2, m-l) \prec (1, \dots, 3, m-1-l) \prec \dots \prec (1, \dots, m-l, 2) \\ & \prec (1, \dots, 1, m+1-l, 1) \prec (1, \dots, 2, m-l, 1) \prec \dots \prec (1, \dots, m-l, 2, 1) \prec \dots \\ & \prec (1, m+1-l, 1, \dots, 1) \prec (2, m-l, 1, \dots, 1) \prec \dots \prec (m+1-l, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

ist von maximaler Länge, der Verband $\mathcal{C}_{m,l}$ also vom Rang $(m-l)(l-1)$.

e) Die *Rangfunktion* $\rho: \mathcal{C}_{m,l} \rightarrow \{0, \dots, (m-l)(l-1)\}$ ordnet jeder Komposition im wesentlichen ihr Gewicht zu:

$$\rho(\alpha) := l\alpha_1 + (l-1)\alpha_2 + \dots + \alpha_l - m - \frac{1}{2}l(l-1).$$

(Gilt $\rho(\alpha) = r$, so bezeichnen wir α als Komposition vom *Rang* r .)

f) Nach Proposition 3.4.8 läßt sich die Fläche des Polyominos $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ mittels

$$a((\alpha, \beta)) = \rho(\alpha) - \rho(\beta) + m + l$$

berechnen.

Die Fläche eines Polyominos wird also durch die Ränge der korrespondierenden Kompositionen bestimmt. Wir untersuchen daher zunächst, wie viele Kompositionen von festem Rang in $\mathcal{C}_{m,l}$ existieren.

Satz 3.4.10 Sei $c_r(m, l)$ die Anzahl der Kompositionen $\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}$ vom Rang r . Dann gilt

$$\text{a) } c_r(m, l) = c_r(m-1, l) + c_{r-m+l}(m-1, l-1)$$

mit den Startwerten $c_0(m, l) = 1$, $c_r(m, 1) = 0$ für $r \geq 1$ und $c_r(m, l) = 0$ für $m < l$,

$$\text{b) } c_r(m, l) = c_{(m-l)(l-1)-r}(m, l) \text{ und}$$

$$\text{c) } c_r(m, l) = c_r(m, m+1-l).$$

Beweis. Sei α eine l -Komposition von m mit $\rho(\alpha) = r$.

a) Für $\alpha_l \neq 1$ ist $\tilde{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_l - 1) \in \mathcal{C}_{m-1,l}$ ebenfalls eine Komposition vom Rang r .

Gilt $\alpha_l = 1$, so hat $\tilde{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}) \in \mathcal{C}_{m-1,l-1}$ den Rang

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\alpha}) &= (l-1)\alpha_1 + (l-2)\alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1} - (m-1) - \frac{1}{2}(l-1)(l-2) \\ &= \rho(\alpha) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l) + 1 + (l-1) = r - m + l. \end{aligned}$$

Dies liefert die Rekursion. Die Startwerte sind offensichtlich.

b) Für die Reversion $\alpha' := (\alpha_l, \dots, \alpha_1)$ von α gilt

$$\begin{aligned} \rho(\alpha') &= l\alpha_l + (l-1)\alpha_{l-1} + \dots + \alpha_1 - m - \frac{1}{2}l(l-1) \\ &= (l+1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_l) - \rho(\alpha) - 2m - l(l-1) = (m-l)(l-1) - r. \end{aligned}$$

c) Sei $\hat{\alpha} := (\alpha_2 + \dots + \alpha_l, \alpha_3 + \dots + \alpha_l, \dots, \alpha_l)$ und β die (eindeutig bestimmte) Komposition aus $\mathcal{C}_{m, m+1-l}$, deren Partialsummenfolge $s(\beta) := (\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \dots, \beta_1 + \dots + \beta_{m+1-l})$ die Bedingung

$$\{s_1, \dots, s_{m+1-l}\} = [m] \setminus \{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{l-1}\}$$

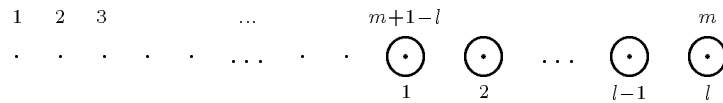
erfüllt. Die Abbildung $\psi : \mathcal{C}_{m,l} \rightarrow \mathcal{C}_{m, m+1-l}$, $\alpha \mapsto \beta$ ist bijektiv und ranginvariant.

Letzteres wird am nachfolgend beschriebenen Modell klar. Die Anwendung von $\tilde{\psi}_i$ auf α erhöht die i -te Partialsumme um 1, alle anderen Summen bleiben unverändert. Das Hasse-Diagramm von $\mathcal{C}_{m,l}$ läßt sich also wie folgt veranschaulichen:

Es sollen l unterscheidbare Objekte (Partialsummen) mit der Anordnung



durch sukzessive Verschiebung nach rechts in die Lage



überführt werden. Dabei darf in jedem Schritt jeweils ein Objekt um eine Einheit versetzt werden, vorausgesetzt, der dortige Platz ist frei. Die Reihenfolge der Objekte soll nicht verändert werden.

Im Anhang (B, Abbildung 6) ist dieses Schema für $m = 6$ und $l = 3$ angegeben.

Somit wird offensichtlich, wie die zugehörigen Kompositionen der Länge $m+1-l$ zu konstruieren sind; Leerstellen und Objekte (mit Ausnahme des auf der Position m festgesetzten Objekts l) vertauschen ihre Rollen und die Verschiebeprozedur verläuft von rechts nach links. \square

Die unter a) aufgeführte Rekursion offenbart sofort die rangerzeugende Funktion von $\mathcal{C}_{m,l}$.

Definition 3.4.11 Die Funktion

$$G(n, k) := \frac{(1 - q^{n-k+1})(1 - q^{n-k+2}) \dots (1 - q^n)}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^k)}, \quad 0 \leq k \leq n$$

heißt q -Binomialkoeffizient (oder Gaußsches Polynom). In der Tat ist $G(n, k)$ ein Polynom in q über den nichtnegativen ganzen Zahlen, das die Rekursion

$$G(n, k) = G(n-1, k) + q^{n-k} G(n-1, k-1)$$

erfüllt. Für $q = 1$ geht $G(n, k)$ in den gewöhnlichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ über.

Korollar 3.4.12 Das Gaußsche Polynom $G(m-1, l-1)$ ist die rangerzeugende Funktion des Verbandes $\mathcal{C}_{m,l}$, d.h.

$$\sum_{r \geq 0} c_r(m, l) q^r = G(m-1, l-1)$$

für alle $1 \leq l \leq m$.

Bemerkungen 3.4.13

- a) Insbesondere folgt so auch $|\mathcal{C}_{m,l}| = \binom{m-1}{l-1}$.
- b) Die Symmetrien 3.4.10b) und 3.4.10c) können auch direkt aus den Eigenschaften des Polynoms abgeleitet werden: Zum einen ist $G(n, k)$ symmetrisch, zum anderen gilt $G(n, k) = G(n, n-k)$.

Korollar 3.4.14 Der Koeffizient $c_r(m, l)$ zählt die Partitionen von $r + \frac{1}{2}l(l-1)$ in genau $l-1$ verschiedene Teile, deren größter $\leq m-1$ ist.

Beweis. Für $\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}$ mit $\rho(\alpha) = r$ ist die reversive Partialsummenfolge

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}, \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-2}, \dots, \alpha_1) \vdash r + \frac{1}{2}l(l-1)$$

eine Partition in $l-1$ positive verschiedene Teile mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} = m - \alpha_l \leq m-1$. \square

Bemerkung 3.4.15 Diese Interpretation von $c_r(m, l)$ läßt sich auch durch eine einfache Partitionenidentität begründen: In der Theorie der Partitionen treten die Gaußschen Polynome insbesondere im Zusammenhang mit Beschränkungen auf. Der Koeffizient von q^i in $G(n+k, k)$ entspricht der Anzahl der Partitionen von i mit höchstens k Teilen, deren größter durch n beschränkt ist (siehe dazu [1, Abschnitt 3.2]).

Nach Korollar 3.4.12 zählt $c_r(m, l)$ also die Partitionen von r in höchstens $l-1$ durch $m-l$ beschränkte Teile. Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1})$ eine solche, also $m-l \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{l-1} \geq 0$. Dann hat $(\lambda_1 + l-1, \lambda_2 + l-2, \dots, \lambda_{l-1} + 1) \vdash r + \frac{1}{2}l(l-1)$ lauter verschiedene, positive Teile, deren größter $\leq m-1$ ist.

Im Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, daß die Anzahl der Polyominos fester Breite symmetrisch in l ist. Diese Aussage behält auch dann ihre Gültigkeit, wenn zudem die Fläche als Parameter berücksichtigt wird.

Proposition 3.4.16 Es gilt $p_{m,l,a} = p_{m,m+1-l,a+m+1-2l}$ für alle $a = m+l, \dots, l(m+2-l)$.

Beweis. Die im Beweis von Satz 3.4.10c) konstruierte Zuordnung $\mathcal{C}_{m,l} \rightarrow \mathcal{C}_{m,m+1-l}$, $\alpha \mapsto \psi(\alpha)$ ist bezüglich \preceq ordnungserhaltend. Gilt $\beta \preceq \alpha$, so ist

$$m - (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) = \hat{\alpha}_j \leq \hat{\beta}_j = m - (\beta_1 + \dots + \beta_j), \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Werden nun die Elemente der Komplementärmengen geordnet, so folgt $s(\psi(\beta))_j \leq s(\psi(\alpha))_j$ für alle $j = 1, \dots, m+1-l$. (Dabei war $s(\alpha)$ die Partialsummenfolge von α .)

Die Bijektion ψ läßt sich also auf die Menge der Polyominos aus $\mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ erweitern:

$$\psi((\alpha, \beta)) := (\psi(\alpha), \psi(\beta)) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathcal{C}_{m,l} \text{ mit } \beta \preceq \alpha.$$

Zudem war ψ ranginvariant. Als Fläche von $\psi((\alpha, \beta))$ erhalten wir folglich

$$a(\psi((\alpha, \beta))) = \rho(\alpha) - \rho(\beta) + m + m + 1 - l = a((\alpha, \beta)) + m + 1 - 2l. \quad \square$$

Bemerkung 3.4.17 Beim Übergang von einer bi-ansteigenden Permutation zum zugehörigen Polyomino werden die Informationen über die Aufstiege und ihre Werte in den Partialsummen der Kompositionen gespeichert. Die hier angegebene Bijektion ψ entspricht daher exakt der im Satz 2.3.17 für die Permutationen formulierten Involution Φ . Der Nachweis auf seiten der Polyominos ist im Vergleich dazu nahezu trivial.

Nach den Bemerkungen in 3.4.9 gilt für die gesuchte Anzahl

$$p_{m,l,a} = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}} |\{\beta \in \mathcal{C}_{m,l} : \beta \preceq \alpha, \rho(\beta) = \rho(\alpha) + m + l - a\}|.$$

Durch die Abschätzung der Partialsummen ist es möglich, Aussagen über die Vergleichbarkeit zweier Kompositionen bezüglich \preceq zu treffen.

Lemma 3.4.18 *Sei $\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}$ vom Rang r . Dann läßt sich die j -te Partialsumme von α wie folgt beschränken:*

- Es gilt $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \leq j + \min\{m - l, \lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor\}$ für alle $j \in [l - 1]$.
- Existiert für $j \in [l - 1]$ ein $\delta \in [m - l]$ mit $r \geq (m - l)(l - j - 1) + (\delta - 1)j + 1$, so ist $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \geq j + \delta$.

Beweis. **a)** Für das minimale Element $\alpha^{(0)} = (1, \dots, 1, m + 1 - l)$ von $\mathcal{C}_{m,l}$ gilt $\alpha_1^{(0)} + \dots + \alpha_j^{(0)} = j$ für $j = 1, \dots, l - 1$. Wird $\tilde{\psi}$ sukzessiv auf $\alpha^{(0)}$ angewendet, so ist eine Erhöhung der j -ten Partialsumme erst nach mindestens $l - j$ Operationen möglich. Betrachten wir zur Veranschaulichung das Modell aus dem Beweis von Satz 3.4.10c): Um das j -te Objekt erstmalig nach rechts verschieben zu können, müssen zunächst die $l - j - 1$ rechts davon befindlichen Objekte jeweils um mindestens eine Einheit versetzt werden. Das l -te Objekt war auf der Position m fixiert. Folglich erhöht sich die j -te Partialsumme in r Schritten (zur Konstruktion einer Komposition α vom Rang r) um höchstens $\lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor$, vorausgesetzt, die Operationen sind zulässig, d.h. verletzen die Bedingung $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \leq m - l + j$ nicht. Somit erhalten wir die obere Schranke

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_j \leq \min\{j + m - l, j + \lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor\} \quad \text{für } j = 1, \dots, l - 1.$$

b) Nun untersuchen wir das entgegengesetzte Problem: Wie viele Operationen $\tilde{\psi}$ lassen sich auf eine Komposition α von vorgegebenem Rang höchstens anwenden, ohne $\alpha_1 + \dots + \alpha_j$ zu verändern? Gehen wir wiederum von $\alpha^{(0)}$ aus, so hat sich die j -te Partialsumme nach höchstens $(m-l)(l-j-1) + 1$ Schritten erhöht. Am Modell: Die $l-j-1$ verschiebbaren, rechts von der j -ten Position befindlichen Objekte können zunächst mit jeweils $m-l$ Zügen in die für sie maximal rechte Lage verschoben werden. Diese Situation vorausgesetzt, erhöht sich $\alpha_1 + \dots + \alpha_j$ dann notwendigerweise nach jeweils j Operationen $\tilde{\psi}$. Die Objekte $1, \dots, j-1$ werden jeweils um eine Einheit nach rechts versetzt, bevor das j -te Objekt wieder bewegt wird. Ist also der Rang $r \geq (m-l)(l-j-1) + (\delta-1)j + 1$, so gilt

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_j \geq \alpha_1^{(0)} + \dots + \alpha_j^{(0)} + \delta = j + \delta \quad \text{mit } \delta \geq 1. \quad \square$$

Satz 3.4.19 *Ist die Differenz zwischen den Rängen zweier Kompositionen hinreichend groß, so sind sie bezüglich \preceq vergleichbar. Genauer gilt: $\beta \preceq \alpha$, falls $\rho(\alpha) - \rho(\beta) > (m-l)(l-1) + 1 - m$.*

Beweis. O.E. sei $r := \rho(\beta) \leq m-2$. Wegen

$$\rho(\alpha) \geq r + (m-l)(l-1) - m + 2 = (m-l)(l-j-1) + (m-l - \frac{m-r-1}{j})j + 1$$

liefert der Teil b) des Lemmas eine untere Schranke von $\alpha_1 + \dots + \alpha_j$, falls $m-r-1 \leq j(m-l)$ ist. Der Parameter δ nimmt dann den Wert $m-l - \lceil \frac{m-r-1}{j} \rceil + 1$ an. Im Fall $j(m-l) < m-r-1$ steht uns nur die triviale Abschätzung $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \geq j$ zur Verfügung.

$(m-l)(l-j) \leq r$: Der Term $(m-l)(l-j) + 1$ ist nach unten durch $m-j$ beschränkt. (Für $j = l-1$ tritt Gleichheit ein, für die Differenz der Werte aufeinanderfolgender Indizes j und $j+1$ gilt $(m-l)(l-j) - (m-l)(l-j-1) = m-l \geq 1 = (m-j) - (m-j-1)$.) Folglich ist $m-j-1 \leq r$, und wir können die j -te Partialsumme von α durch $j + \delta$ abschätzen. Mit Lemma 3.4.18a) erhalten wir

$$\beta_1 + \dots + \beta_j \leq j + m - l = j + m - l - \lceil \frac{m-r-1}{j} \rceil + 1 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j.$$

$(m-l)(l-j) > r$: In diesem Fall existiert nicht notwendig ein δ , das die Bedingung aus 3.4.18b) erfüllt. Sind r und j so gewählt, daß $j(m-l) < m-r-1$ gilt, so ist $r \leq l-j-1$. Für $j=1$ oder $m=l+1$ ist diese Implikation trivial, ansonsten wird sie wegen $j \leq (j-1)(m-l)$ durch $r < m-j(m-l) - 1 = l - (j-1)(m-l) - 1 \leq l-j-1$ begründet. Der Vergleich mit a) liefert hier also

$$\beta_1 + \dots + \beta_j \leq j + \lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor = j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j.$$

Für $m-r-1 \leq j(m-l)$ wird die Funktion $h(r, j) := \lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor + \lceil \frac{m-r-1}{j} \rceil$ durch $m-l+1$ nach oben beschränkt. (Man beachte $h(r, j) = h(m-r-2, l-j)$.) Es folgt

$$\beta_1 + \dots + \beta_j \leq j + \lfloor \frac{r}{l-j} \rfloor \leq j + m - l - \lceil \frac{m-r-1}{j} \rceil + 1 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j.$$

In jedem Fall wird β von α dominiert. \square

Somit sind wir bereits in der Lage, die Anzahl der Polyominos fester Breite, Höhe und Fläche zu bestimmen, wenn letztere hinreichend groß ist. Im Anhang (A, Tabelle 6) wird die Verteilung von $(\text{exc}, \text{dexc})$ auf \mathcal{M}_6 angegeben. (Wir erinnern uns: $M_6^{(\text{exc}, \text{dexc})}(e, k) = p_{6, e+1, k+7}$.) Zur Orientierung wurden dort alle Werte markiert, die nicht aus der folgenden Aussage resultieren.

Korollar 3.4.20 Für alle $a > (m-l)(l-1) + l + 1$ gilt

$$p_{m,l,a} = \sum_{r \geq 0} c_r(m, l) c_{r+m+l-a}(m, l).$$

Beweis. Sei $\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}$ vom Rang r . Für die Konstruktion eines Polyominos der Fläche a muß α mit einer Komposition vom Rang $r + m + l - a$ kombiniert werden, die von α dominiert wird. Nach Satz 3.4.19 ist diese Bedingung für $a > (m-l)(l-1) + l + 1$ notwendig erfüllt. \square

Korollar 3.4.21

- Für $k \leq m - 2$ ist $p_{m,l,l(m+2-l)-k}$ der Koeffizient von q^k in $G(m-1, l-1)^2$.
- Sei l fest und $k \geq 0$. Dann ist $p_{m,l,l(m+2-l)-k}$ der Koeffizient von q^k in $G(l+k-1, l-1)^2$ für alle $m \geq l+k$.

Beweis. a) Die Anpassung der Summationsgrenzen in 3.4.20 liefert

$$\begin{aligned} p_{m,l,a} &= \sum_{r=a-m-l}^{(m-l)(l-1)} c_r(m, l) c_{r+m+l-a}(m, l) = \sum_{r \geq 0} c_r(m, l) c_{r+a-m-l}(m, l) \\ &= \sum_{r \geq 0} c_r(m, l) c_{l(m+2-l)-a-r}(m, l), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit auf der Symmetrie 3.4.10b) beruht. Nach Korollar 3.4.12 ist $p_{m,l,a}$ also der Koeffizient von $q^{l(m+2-l)-a}$ in der Faltung von $G(m-1, l-1)$ mit sich selbst.

b) Für alle Werte m aus dem angegebenen Bereich erfüllt $l(m+2-l) - k$ die Bedingung an die Fläche des Polyominos aus Korollar 3.4.20. (Für $l = 1$ ist die Aussage trivial; diesen Fall können wir also außer acht lassen.) Somit gilt

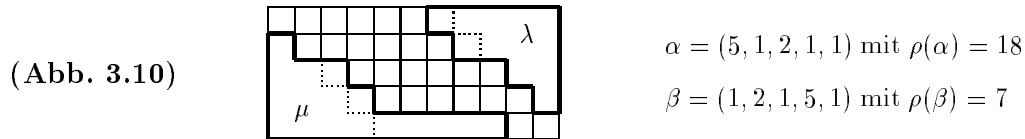
$$p_{m,l,l(m+2-l)-k} = \sum_{r=0}^k c_r(m, l) c_{k-r}(m, l)$$

für alle $m \geq l+k$. Die Koeffizienten von q^0, \dots, q^k in $G(m-1, l-1)$ sind aber wegen der definierenden Rekursion der Gaußschen Polynome gerade die von q^0, \dots, q^k in $G(l+k-1, l-1)$. (Folglich stimmen auch die Koeffizienten von q^0, \dots, q^k in den Quadraten der beiden Polynome überein.) Nach a) ist also $p_{m,l,l(m+2-l)-k} = p_{l+k,l,l(k+2-l)-k}$ der Koeffizient von q^k in $G(l+k-1, l-1)^2$. \square

Bemerkung 3.4.22 Sei $\mathcal{P}_r(m, l)$ die Menge der Partitionen von r in höchstens $l-1$ Teile, deren größter $\leq m-l$ ist. Nach Bemerkung 3.4.15 gilt $|\mathcal{P}_r(m, l)| = c_r(m, l)$.

Der Teil a) von Korollar 3.4.21 zeigt daher: Für $a > (m-l)(l-1) + l + 1$ zählt $p_{m,l,a}$ alle Paare $(\lambda, \mu) \in \mathcal{P}_r(m, l) \times \mathcal{P}_s(m, l)$ mit $r + s = l(m+2-l) - a$. (Die Summe $r + s$ entspricht gerade der Differenz von a zur maximal möglichen Fläche).

Kombinatorisch läßt sich diese Identität wie folgt beweisen. Sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ ein Polyomino der Fläche a . Das Komplement von (α, β) bezüglich eines $(m+1) \times l$ -Rechtecks besteht aus zwei Bereichen, die durch Partitionen $\lambda \vdash ml - m - \frac{1}{2}l(l-1) - \rho(\alpha)$ und $\mu \vdash \rho(\beta) + \frac{1}{2}l(l-1)$ beschrieben werden, die aus jeweils $l-1$ verschiedenen Teilen $\leq m-1$ bestehen (vergleiche dazu die Ausführungen zum Satz 3.2.3 und Proposition 3.4.8a)).



Die Differenzen

$$(\lambda_1 - (l-1), \lambda_2 - (l-2), \dots, \lambda_{l-1} - 1) \in \mathcal{P}_{(m-l)(l-1) - \rho(\alpha)}(m, l)$$

$$(\mu_1 - (l-1), \mu_2 - (l-2), \dots, \mu_{l-1} - 1) \in \mathcal{P}_{\rho(\beta)}(m, l)$$

sind die gesuchten Partitionen. (Es gilt $a((\alpha, \beta)) = \rho(\alpha) - \rho(\beta) + m + l$).

Für $a \leq (m-l)(l-1) + l + 1$ ist diese Abbildung nicht surjektiv.

Der Fall $a \in \{m+l, \dots, (m-l)(l-1) + l + 1\}$ erscheint zunächst recht diffizil. Es existieren nun möglicherweise Kompositionen, deren Rangdifferenz zwar den Wert $a - m - l$ annimmt, die aber nicht vergleichbar bezüglich \preceq sind.

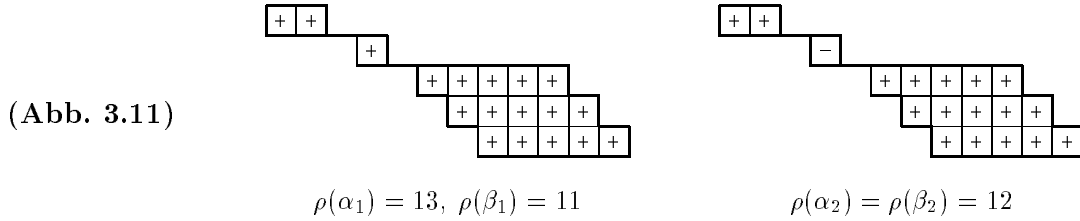
Aber: Auch dieses Problem ist essentiell bereits gelöst. Nach Proposition 3.1.5 berühren sich die durch α und β beschriebenen Pfade in bestimmten Punkten, wenn β nicht von α dominiert wird. Durch $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ mit $\beta \not\prec \alpha$ wird eine Anordnung von disjunkten Polyominos beschrieben, deren Gesamtbreite $\leq m+1$ und deren Gesamthöhe genau l ist.

Dennoch sind bei der Aufstellung der daraus resultierenden Rekursionen noch einige Schwierigkeiten zu bewältigen. Die erste sei durch das nachfolgende Beispiel illustriert.

Beispiel und Definition 3.4.23 Die Kompositionen $\alpha_1 = (1, 2, 6, 1, 1)$ und $\beta_1 = (3, 2, 1, 1, 4)$ sowie $\alpha_2 = (1, 1, 7, 1, 1)$ und $\beta_2 = (4, 1, 1, 1, 4)$ erzeugen dieselbe Anordnung von Polyominos.

Um diese unterscheiden zu können, werden alle Polyominokästchen unterhalb des von α beschriebenen Pfades *positiv*, alle Kästchen oberhalb *negativ* gewichtet. Die Fläche $a^+((\alpha, \beta))$ umfasse alle positiven, die Fläche $a^-((\alpha, \beta))$ alle negativen Kästchen. Insbesondere gilt für

$(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ dann $a((\alpha, \beta)) := a^+((\alpha, \beta)) - a^-((\alpha, \beta)) = \rho(\alpha) - \rho(\beta) + m + l$.



In Analogie zu $p_{m,l,a}$ definieren wir die Zahl

$$q_{m,l,a} := \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_{m,l}} |\{\beta \in \mathcal{C}_{m,l} : \beta \not\leq \alpha, \rho(\beta) = \rho(\alpha) + m + l - a\}|.$$

(Die Wahl des zulässigen Bereichs für den Parameter a impliziert insbesondere $\rho(\alpha) \geq \rho(\beta)$.) Nach Satz 3.4.19 verschwindet $q_{m,l,a}$ für $a \geq (m - l)(l - 1) + l + 2$. Eine Übersicht über ausgewählte Werte $q_{m,l,a}$ gibt der Anhang (A, Tabelle 8).

Sind die Parameter l und a in gewissem Sinn extremal, so entstehen durch die Pfadüberkreuzungen ausschließlich Polyminos von positiver, im Vergleich zu den Ausmaßen großer Fläche. Deren Anzahl kennen wir nach Korollar 3.4.20 bereits.

Proposition 3.4.24

a) Für festes $l \geq 3$ und $m \geq l + 2$ gilt

$$q_{m,l,a^*(m,l)} = 2 \cdot \sum_{i=2}^{m-l+1} \sum_{j=l-1}^{m-i} p_{j,l-1,a^*-i},$$

wobei $a^*(m, l) := (m - l)(l - 2) + l + 3$ sei.

Dadurch sind die Werte von $q_{m,l,a}$ im Bereich $a \in \{a^*(m, l), \dots, (m - l)(l - 1) + l + 1\}$ vollständig bestimmt, denn es gilt

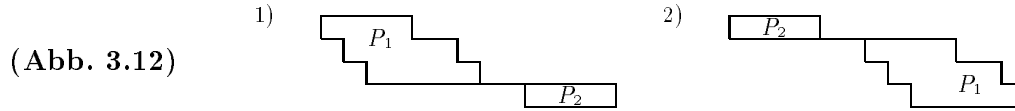
$$q_{m,l,a} = q_{m-a+a^*(m,l),l,a^*(m-a+a^*(m,l),l)}$$

für alle $m \geq l + 2$ und $a \geq a^*(m, l)$.

- b) $q_{m,l,a} = q_{m,m+1-l,a+m+1-2l}$ für alle $a = m + l, \dots, l(m + 2 - l)$.
- c) $q_{m,1,a} = q_{m,2,a} = 0$ für alle m und alle a .
- d) Im Extremalfall $a = m + l$ gilt

$$q_{m,l,a} = \sum_{r \geq 0} c_r(m, l)(c_r(m, l) - 1).$$

Beweis. **a)** Die einzig mögliche Zerlegung in Polyominos der Gesamtfläche a^* ist die in ein Polyomino P_1 mit den Parametern $(m_1, l-1, a_1)$ und ein Polyomino P_2 mit den Parametern $(m_2, 1, a^* - a_1)$



wobei $m_1, m_2 \geq 1$ und $m_1 + m_2 + 2 \leq m + 1$ ist. Wir können uns auf den ersten Fall beschränken. (Die Anordnung 2) geht durch geeignete Rotationen aus 1) hervor.)

Für $2 \leq l_2 \leq l_1$ beträgt die Fläche $a((\alpha, \beta))$ von P_1 und P_2 nach Proposition 3.4.8b) höchstens

$$l_1(m_1 + 2 - l_1) + l_2(m_2 + 2 - l_2).$$

Wegen $l \leq 2l_1$, $l - l_1 = l_2 \leq m_2 \leq m - m_1 - 1$ und $m > l + 1$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} a((\alpha, \beta)) &\leq l_1(m_1 + 2 - l_1) + (l - l_1)(m - m_1 + 1 - l + l_1) \\ &= m_1(2l_1 - l) - l_1(l_1 - 2) + (l - l_1)(m + 1 - l + l_1) \\ &\leq (m - 1 - l + l_1)(2l_1 - l) - l_1(l_1 - 2) + (l - l_1)(m + 1 - l + l_1) \\ &= l_1(m - l - 1) + 2l \\ &\leq (l - 2)(m - l - 1) + 2l \\ &= a^*(m, l) - 1. \end{aligned}$$

Also ist $l_2 = 1$ und $a_2 = m_2 + 1$. Insbesondere wird dadurch auch die Zerlegung in mehr als zwei disjunkte Polyominos ausgeschlossen. Die Fläche des Polyominos P_1 erfüllt die Bedingung des Korollars 3.4.20:

$$\begin{aligned} a_1 &= a^*(m, l) - a_2 = (m - l_1)(l_1 - 1) + 4 - m_2 \geq (m - l_1)(l_1 - 1) + 4 - (m - m_1 - 1) \\ &= (m_1 - l_1)(l_1 - 1) + l_1 + 1 + (m - m_1 - 1)(l_1 - 2) + 2 > (m_1 - l_1)(l_1 - 1) + l_1 + 1. \end{aligned}$$

Folglich existieren

$$p_{m_1, l-1, a^*-a_2} = \sum_{r \geq 0} c_r(m_1, l-1) c_{r+a^*-a_2-m_1-l+1}(m_1, l-1)$$

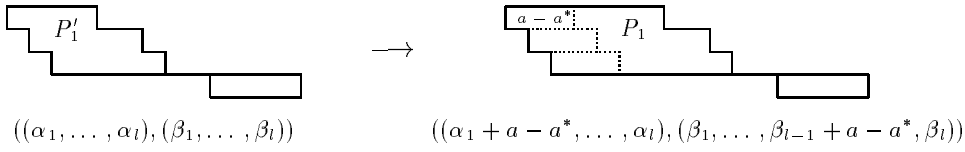
Polyominos, die den Anforderungen an P_1 genügen. Die Fläche a_2 variiert wegen $m_1 \geq l-1$ zwischen $2 \leq a_2 \leq m-l+1$, die Breite m_1 ist durch $m - a_2 = m - m_2 - 1$ beschränkt. Der Faktor 2 in der resultierenden Summation schließt den (zum ersten völlig analogen) Fall der Anordnung 2) ein.

Übersteigt die Fläche $a((\alpha, \beta))$ den Wert $a^*(m, l)$, so ist (erst recht) nur die Partitionierung von

l in $(l-1, 1)$ bzw. $(1, l-1)$ möglich.

Sei nun $m' := m - (a - a^*)$ und die disjunkten Komponenten von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m', l} \times \mathcal{C}_{m', l}$ von der Fläche $a^*(m', l)$. O.E. sei die Dominanzbedingung $\beta_1 + \dots + \beta_j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j$ für $j = l-1$ verletzt. (Dies entspricht dem obigen Fall 1). Dann entsteht durch das Anfügen von $a - a^*$ Kästchen an jede Zeile von P'_1 eine Zerlegung mit den gewünschten Parametern.

(Abb. 3.13)



Die Gesamtfläche der Komponenten in der rechten Anordnung ist wegen

$$a^*(m', l) + (a - a^*)(l-1) = (m' - l)(l-2) + l + 3 + (m - m')(l-1) = a^* + m - m'$$

gerade a . Dies sind aber auch die einzigen Zerlegungen. Sei (m_1, a_2) ein Indexpaar mit $m_1, a_2 \geq 2$ derart, daß $m_1 + a_2 \leq m$ und $p_{m_1, l-1, a-a_2}$ positiv ist (vergleiche dazu auch den Teil a) der nachfolgenden Bemerkung). Zudem sei die Bedingung $(m_1 - l + 1)(l-2) + l < a - a_2$ erfüllt, also $p_{m_1, l-1, a-a_2}$ nach 3.4.20 berechenbar. Dann ist

$$p_{m_1, l-1, a-a_2} = p_{m_1 - (a-a^*), l-1, a^*(m', l) - a_2}.$$

Laut Korollar 3.4.21b) gibt es ebenso viele Polyominoes vom Format (m, l, a) wie vom Format (n, l, b) , wenn $l(m+2-l) - a = l(n+2-l) - b = k \geq 0$ und $m, n \geq l+k$ ist. Nun gilt zum einen

$$\begin{aligned}
 k &= (l-1)(m_1 - a + a^* + 3 - l) - a^*(m - a + a^*, l) + a_2 \\
 &= (l-1)(m_1 - a + (m-l)(l-2) + 6) - (m - a + (m-l)(l-2) + 3)(l-2) - l - 3 + a_2 \\
 &= (l-2)(m_1 + 3 - m) + m_1 - a + (m-l)(l-2) + 6 - l - 3 + a_2 \\
 &= (l-1)(m_1 + 3 - l) - a + a_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(die Nichtnegativität von k folgt aus der Konstruktion; $(l-1)(m_1 + 3 - l)$ ist die maximal mögliche Fläche eines $(l-1)$ -zeiligen Polyominoes der Breite $m_1 + 1$) und zum anderen

$$\begin{aligned}
 m_1 - (a - a^*) - (k + l) &= m_1 - a + (m-l)(l-2) + l + 3 - (l-1)(m_1 + 4 - l) - 1 + a - a_2 \\
 &= (m - m_1)(l-2) - 2l + 6 - a_2 \\
 &\geq a_2(l-3) - 2l + 6 && (m_1 + a_2 \leq m) \\
 &\geq 2(l-3) - 2l + 6 = 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Behauptung aus Teil a) bewiesen.

b) Die Symmetrie folgt unmittelbar aus Proposition 3.4.16; die dort beschriebene Bijektion ψ

war ordnungserhaltend.

c) Offensichtlich. (Für $l = 2$ besteht der Verband $\mathcal{C}_{m,l}$ aus einer einzigen Kette.)

d) Für $a = m + l$ gilt $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$. Ranggleiche Kompositionen aus $\mathcal{C}_{m,l}$ sind genau dann vergleichbar bezüglich \preceq , wenn sie übereinstimmen. \square

Bemerkungen 3.4.25

- a) Die Formel für q_{m,l,a^*} im Teil a) berücksichtigt der Einfachheit halber alle Werte $j \geq l - 1$. Aufgrund der Beschränkung $a^* - i \leq (l - 1)(j + 3 - l)$ (vergleiche 3.4.8b)) ist es rechentechnisch vorteilhafter, die untere Summationsgrenze auf $j = \lceil \frac{a^* - i}{l - 1} \rceil + l - 3$ anzuheben. Es treten dann in der Tat nur positive Summanden auf.
- b) Für $n \geq 0$ gilt $q_{m,m-n-2,a^*(m,m-n-2)} = 2 \cdot p_{2n+2,n+1,n(n+3)+3}$ für alle $m \geq 2n + 5$. Für die gewählten Parameter reduziert sich die Summe in 3.4.24a) auf einen einzigen Term:

$$q_{m,m-n-2,a^*(m,m-n-2)} = 2 \cdot p_{m-2,m-n-3,(n+3)(m-n-4)+3}.$$

(Für alle $i \geq 2$ ist $n + 5 \leq \lceil \frac{a^* - i}{m - n - 3} \rceil + i$; die Gleichheit tritt nur für $i = 2$ ein.)

Nach Korollar 3.4.21a) ist $p_{m-2,m-n-3,(n+3)(m-n-4)+3}$ der Koeffizient von q^n im Polynom $G(m-3, m-n-4)^2 = G(m-3, n+1)^2$. Aufgrund der Rekursionsgleichung der Gaußschen Polynome stimmt dieser mit dem Koeffizienten von q^n in $G(k, n+1)^2$ für $k \geq 2n+1$ überein. Die Behauptung folgt für $k = 2n + 1$. (Man beachte $G(2n + 1, n + 1) = G(2n + 1, n)$.) In Bemerkung 3.4.22 wurde darauf hingewiesen, daß $p_{m,l,a}$ für hinreichend großes a der Mächtigkeit von $\bigcup_{r \geq 0} (\mathcal{P}_r(m, l) \times \mathcal{P}_{l(m+2-l)-a-r}(m, l))$ entspricht. Im vorliegenden Fall gilt somit

$$\begin{aligned} p_{2n+2,n+1,n(n+3)+3} &= \left| \bigcup_{r \geq 0} (\mathcal{P}_r(2n+2, n+1) \times \mathcal{P}_{n-r}(2n+2, n+1)) \right| \\ &= \left| \bigcup_{r \geq 0} (\mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_{n-r}) \right| = \sum_{r=0}^n p(r)p(n-r). \end{aligned}$$

Für $r \leq n$ umfaßt die Menge $\mathcal{P}_r(2n+2, n+1)$ alle Partitionen von r . Die Folge

$$\left(\frac{1}{2} q_{m,m-n-2,a^*(m,m-n-2)} \right)_n$$

geht also für $m \rightarrow \infty$ in die Koeffizientenfolge der Reihe $\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 - q^k)^{-2}$ über. (Für die erzeugende Funktion der Partitionenanzahl $p(n) := |\mathcal{P}_n|$ siehe [1, Th. 1.1].)

Im Anhang (A, Tabelle 8d) wird dieser Sachverhalt anhand der ersten Folgenglieder demonstriert.

Die Anzahl der Kompositionenpaare (α, β) mit fester Rangdifferenz und $\beta \not\preceq \alpha$ läßt sich nun für alle übrigen Parameterwerte rekursiv aus den bekannten Größen $p_{m,l,a}$ und $q_{m,l,a}$ berechnen.

In unseren bisherigen Betrachtungen spielte der Fall $m = 0$ keine Rolle. Durch die Zerlegung kann – wie im Beispiel gesehen – auch das Polyomino der Breite 1 auftreten. Wir setzen daher $p_{0,1,1} := 1$ und $p_{0,l,r} := 0$ für alle $l, r > 1$.

Proposition 3.4.26 *Für festes $l \geq 3$ und $m \geq l + 2$ gilt*

$$\begin{aligned}
q_{m,l,a} &= \sum_{i=2}^{a-2} \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j_1=k}^{m-2} \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_1+j_2 \leq m-1}}^{m-2} (p_{j_1,k,a-i} p_{j_2,l-k,i} + q_{j_1,k,a-i} q_{j_2,l-k,i}) \\
&+ \sum_{i=2}^{a-2} \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j_1=k-1}^{m-2} \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_1+j_2 \leq m-2}}^{m-2} (m-1-j_1-j_2)(p_{j_1,k-1,a-i-1} p_{j_2,l-k,i} + q_{j_1,k-1,a-i-1} q_{j_2,l-k,i}) \\
&+ \sum_{i=2}^{a-2} \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j_1=k-1}^{m-2} \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_1+j_2 \leq m-3}}^{m-2} (m-2-j_1-j_2)(p_{j_1,k-1,a-i} p_{j_2,l-k,i} + q_{j_1,k-1,a-i} q_{j_2,l-k,i}).
\end{aligned}$$

für alle $a \in \{m+l, \dots, a^*(m, l) - 1\}$.

Beweis. Die Rekursion ergibt sich aus der sukzessiven Kombination von Polyominos. Dabei werden alle Möglichkeiten berücksichtigt, der Anordnung von disjunkten Polyominos ein weiteres hinzuzufügen. Die Differenzierung zwischen positiven und negativen Flächen ergibt sich aus der Konstruktion. \square

Bemerkung 3.4.27 Auch hier empfiehlt es sich, vor der rechentechnischen Auswertung die Summationsgrenzen anzupassen (vergleiche auch 3.4.25a)).

Die Definition der Zahlen $q_{m,l,a}$ liefert den abschließenden

Satz 3.4.28 *Für alle $m \in \mathbb{N}$, $l \in \{1, \dots, m\}$ und $a \in \{m+l, \dots, l(m+2-l)\}$ gilt*

$$p_{m,l,a} = \sum_{r \geq 0} c_r(m, l) c_{r+m+l-a}(m, l) - q_{m,l,a},$$

wobei $q_{m,l,a} := 0$ für $a > (m-l)(l-1) + l + 1$ sei.

(Der Fall $a > (m-l)(l-1) + l + 1$ war bereits Gegenstand des Korollars 3.4.20. Wir haben ihn hier der Vollständigkeit halber einbezogen.)

3.5 Eine Korrespondenz zwischen Parallelogrammpolyominos und Motzkin-Pfaden

Das Korollar 3.4.5 und die anschließende Bemerkung geben eine Bijektion zwischen den Polyominos der Breite $n + 1$ und den Motzkin-Pfaden Ω_n an.

Viele der Enumerationen von Polyominoklassen basieren auf Bijektionen zu bestimmten Gitterpfaden. Die wohl bekannteste wurde von Delest und Viennot ([13]) konstruiert:

Die Parallelogrammpolyominos (im allgemeinen Sinn) vom Umfang $2n + 2$ korrespondieren zu den *Dyck-Pfaden* der Länge $2n$. (Letztere sind die oberhalb der x -Achse vom Punkt $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$ verlaufenden Gitterpfade über der Schrittmenge $\{[1, 1], [1, -1]\}$.)

Sei dazu a_i die Anzahl der Kästchen der i -ten Spalte und $b_i + 1$ die Anzahl der gemeinsamen Zeilen der Spalten i und $i + 1$. (Man beachte die anschließende Bemerkung.) Die Folgen (a_1, \dots, a_s) und (b_1, \dots, b_{s-1}) beschreiben ein Parallelogrammpolyomino der Breite s vollständig. Das zugehörige Dyck-Wort wird durch

$$\omega := x^{a_1} \bar{x}^{a_1-b_1} x^{a_2-b_1} \bar{x}^{a_2-b_2} x^{a_3-b_2} \bar{x}^{a_3-b_3} \dots \bar{x}^{a_{s-1}-b_{s-1}} x^{a_s-b_{s-1}} \bar{x}^{a_s}$$

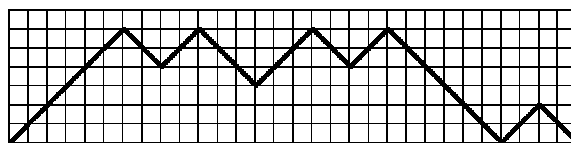
definiert; die Potenzierung bezeichne dabei die Wiederholung des Faktors. Die Gipfelhöhen des entsprechenden Dyck-Pfades sind a_1, \dots, a_s , die Täler sind von der Höhe b_1, \dots, b_{s-1} . (Die Faktoren x in ω korrespondieren zu einem Einheitsschritt \nearrow , die Faktoren \bar{x} zu einem Schritt \searrow .)

Die Anzahl der Gipfel entspricht also der Spaltenanzahl (Breite), die Summe der Gipfelhöhen der Fläche des Parallelogrammpolyominos. Zudem zeigten [12], daß die Faktoren $\bar{x}xx$ im Dyck-Wort durch die inneren Ecken des linken Grenzpfades gezählt werden.

Bemerkung 3.5.1 Unsere Darstellungsweise eines Polyominos weicht vom Standard ab. Üblicherweise (so auch bei Delest und Viennot) beginnen die Begrenzungsprofile im Punkt $(0, 0)$ und setzen sich aus Schritten $[1, 0]$ und $[0, 1]$ zusammen. Durch eine Linksdrehung um 90° können wir diese Form herstellen. Die im Abschnitt 3.1 eingeführte Notation entsprach dem Wunsch, daß ein Polyomino stets breiter als hoch ($m \geq l$) sein sollte.

Beispiel 3.5.2 Dem in 3.2 bereits mehrfach (vergleiche 3.2.1 und 3.2.9) betrachteten Polyomino $((5, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 5, 1))$ wird (nach Rotation!) der Dyck-Pfad

(Abb. 3.14)



zugeordnet. Folgende Parameter des Polyominos $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{10,5} \times \mathcal{C}_{10,5}$ werden dabei verschlüsselt.

Umfang: Der Umfang von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ beträgt gerade $2(m + 1 + l)$. Der zugehörige Dyck-Pfad ist von der Länge $2(m + l)$.

Breite (früher Höhe): Die Breite von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ beträgt nun l . Der zugehörige Dyck-Pfad hat also l Gipfel.

Fläche: Die Summe der Gipfelhöhen $a_1 + \dots + a_l$ im Dyck-Pfad stimmt mit der Fläche von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ überein. Sie beträgt $\rho(\alpha) - \rho(\beta) + m + l$.

Anzahl der inneren Ecken: Der linke (α entsprechende) Grenzpfad von $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{m,l} \times \mathcal{C}_{m,l}$ hat stets $l - 1$ innere Ecken, eine Folge der normierten Horizontallängen (früher Vertikallängen). Der zugehörige Dyck-Pfad enthält also $l - 1$ Teilpfade $\setminus / /$.

Wie in 3.2.12b) bereits bemerkt, gibt es C_n (allgemeine) Parallelogrammpolyomino vom Umfang $2n + 2$. Die Bijektion zu unseren Polyomino ist elementar: Sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$ ein Polyomino (in seiner ursprünglichen Ausrichtung). Die Folgen

$$\gamma := (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 - 1, \dots, \alpha_l - 1) \in \mathbb{N}_0^l, \quad \delta := (\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \dots, \beta_{l-1} - 1, \beta_l) \in \mathbb{N}_0^l$$

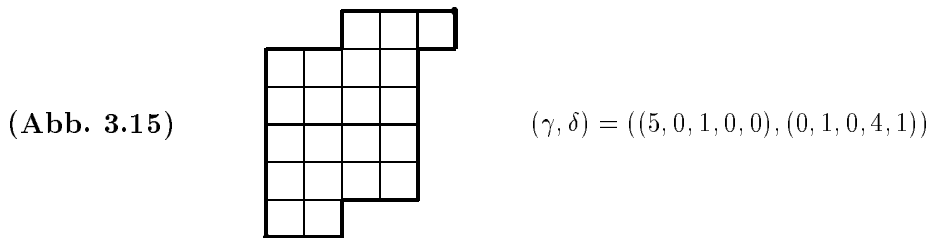
beschreiben ein Parallelogrammpolyomino. Die Grenzen von (γ, δ) werden durch die im Punkt $(0, 0)$ beginnenden Gitterpfade

$$\begin{aligned} &([0, \gamma_1], [1, 0], [0, \gamma_2], [1, 0], \dots, [0, \gamma_l], [1, 0]) \quad \text{und} \\ &([1, 0], [0, \delta_1], [1, 0], [0, \delta_2], \dots, [1, 0], [0, \delta_l]) \end{aligned}$$

markiert. Wegen $\gamma_1 + \dots + \gamma_l = \delta_1 + \dots + \delta_l = n + 1 - l$ und $\beta \preceq \alpha$ enden diese im Punkt $(l, n + 1 - l)$ und berühren sich nur in den gemeinsamen Anfangs- und Endpunkten. (Man beachte, daß entgegen unserer sonstigen Polyominonotation auch γ_1 und δ_l der tatsächlichen Schrittlänge entsprechen.) Der Umfang von (γ, δ) beträgt

$$\sum_{j=1}^l (\gamma_j + \delta_j) + 2l = 2n + 2.$$

Beispiel 3.5.3 Das Polyomino $(\alpha, \beta) = ((5, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 5, 1))$ geht auf diese Weise in

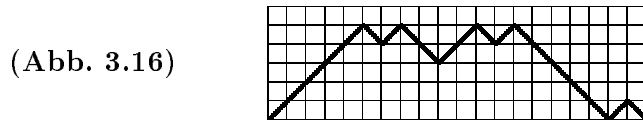


über. Die Breite von (γ, δ) ist die Anzahl, die Höhe von (γ, δ) die Summe der Komponenten von γ (oder δ).

Bemerkungen 3.5.4

- a) Diese Konstruktion ist als Nachweis von $\sum_l p_{n,l} = C_n$ sicherlich naheliegender, aber auch weniger interessant als die im Abschnitt 3.2 benutzte Bijektion zu den beschränkten Young-Diagrammen.
- b) Wendet man die Delest-Viennot-Konstruktion direkt auf die zu den Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$ gehörenden Polyomino (α, β) an, so variieren die Dyck-Pfade in ihrer Länge (diese beträgt $2(n + \text{exc}(\pi) + 1)$).

Bildet man jedoch (α, β) zunächst auf (γ, δ) ab, so sind die zu (γ, δ) korrespondierenden Dyck-Pfade alle von der Länge $2n$. Aufgrund der Konstruktion ist das „Gefälle“ der Pfade in beiden Fällen gleich; der über den Zwischenschritt (γ, δ) entstandene Pfad besitzt lediglich um 1 verringerte An- und Abstiege. Zum Vergleich (mit Abbildung 3.13) der Dyck-Pfad zum Polyomino $(\gamma, \delta) = ((5, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 4, 1))$:



Diese Bijektion zwischen den Polyomino (α, β) (bzw. den 321-freien Permutationen) und den Dyck-Pfaden wurde bereits in [6, Anm. nach Beweis von Th. 2.1] beschrieben. Mit den dortigen Notationen wird $\pi \in \mathcal{M}_n$ auf den Gitterpfad abgebildet, der die folgenden Punkte in der (x, y) -Ebene durch Horizontal- bzw. Vertikalschritte verbindet:

$$(0, 0), (c_{j_1} + j_1 - 1, 0), (c_{j_1} + j_1 - 1, j_1), (c_{j_2} + j_2 - 1, j_1), (c_{j_2} + j_2 - 1, j_2), \\ \dots, (c_{j_e} + j_e - 1, j_{e-1}), (c_{j_e} + j_e - 1, j_e), (n, j_e), (n, n).$$

Dabei seien c_{j_1}, \dots, c_{j_e} mit $j_1 < \dots < j_e$ die positiven Komponenten der Folge (c_1, \dots, c_n) , die durch $c_i := |\{j \in [n] : j > i, \pi_j < \pi_i\}|$ definiert wird. Diese entsprechen jedoch den von Null verschiedenen Einträgen der **dexc**-Folge von π (vergleiche Abschnitt 2.3). Die Zahlen j_1, \dots, j_e sind also gerade die Aufstiege von π mit $\pi_{j_k} = c_{j_k} + j_k$ für $k \in [e]$. Für die Koordinaten der von (n, j_e) verschiedenen äußeren Ecken (Schrittfolge $-|$) des Pfades gilt

$$(c_{j_k} + j_k - 1, j_{k-1}) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_k, \beta_1 + \dots + \beta_{k-1}),$$

für die der inneren Ecken (Schrittfolge $|-$)

$$(c_{j_k} + j_k - 1, j_k) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_k, \beta_1 + \dots + \beta_k)$$

mit $k = 1, \dots, e$ und $j_0 = \beta_0 = 0$. (Dabei sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,e+1} \times \mathcal{C}_{n,e+1}$ das zu π gehörende Polyomino.) Insbesondere überschreitet der Pfad die Gerade $x = y$ nicht.

Transformieren wir nun die Koordinaten (die Gerade $x = y$ wird zur x -Achse), so erhalten wir die Reversion des Dyck-Pfads der Länge $2n$, der nach Delest-Viennot zum Parallelogrammpolyomino $((\alpha_1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_{e+1} - 1), (\beta_1 - 1, \dots, \beta_e - 1, \beta_{e+1}))$ korrespondiert.

- c) Die Anzahl l der Zeilen von (α, β) stimmt mit der Breite von (γ, δ) überein; für die Fläche gilt $a((\gamma, \delta)) = a((\alpha, \beta)) - l$. Folglich zählt $p_{n,l,a}$ die Parallelogrammpolyomino mit dem Umfang $2n + 2$, der Breite l und der Fläche $a - l$.

Der erste Schritt für die Enumeration der Parallelogrammpolyomino bezüglich der beiden Parameter Umfang und Fläche ist also getan. Der nächste wäre, die zugehörige erzeugende Funktion zu analysieren - eine nach Delest ([10]: „But all the research on polyominoes so far has led one to believe that it is a harder problem when it comes to solve the distribution for two parameters at the same time (e.g. both the perimeter and the area).“) nicht ganz einfache Aufgabe.

Die Kombination aus Korollar 3.4.5 und den vorangegangenen Ausführungen liefert den

Satz 3.5.5 *Es gibt eine Bijektion zwischen den Parallelogrammpolyomino vom Umfang $2n + 2$ und den Motzkin-Pfaden Ω_n derart, daß*

- 1) $a((\gamma, \delta)) - h((\gamma, \delta)) = h_1(c) + \dots + h_n(c)$,
- 2) $h((\gamma, \delta)) = |\{i \in [n] : c_i = \nearrow\}| + |\{i \in [n] : c_i = -\}|$ und
- 3) $w((\gamma, \delta)) = |\{i \in [n] : c_i = \nearrow\}| + |\{i \in [n] : c_i = \dots\}| + 1$.

Dabei sei a die Fläche, w die Spaltenanzahl (Breite) und h die Zeilenanzahl (Höhe) des Parallelogrammpolyomino (γ, δ) und seien h_1, \dots, h_n die Höhen des Pfades $c \in \Omega_n$.

Beweis. Die Korrespondenz folgt unmittelbar aus Korollar 3.4.5 und der oben angegebenen Polyominoabbildung. Wir geben hier die direkte Beschreibung an:

Sei $((\gamma_1, \dots, \gamma_l), (\delta_1, \dots, \delta_l))$ ein Parallelogrammpolyomino vom Umfang $2n + 2$. Desweiteren seien die folgenden Mengen definiert

$$\begin{aligned} A &:= \{\gamma_1 + 1, \gamma_1 + \gamma_2 + 2, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 3, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_{l-1} + l - 1\}, \\ B &:= \{\delta_1 + 1, \delta_1 + \delta_2 + 2, \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 3, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_{l-1} + l - 1\}, \\ C &:= A \cap B. \end{aligned}$$

Der zu (γ, δ) gehörige Motzkin-Pfad $c \in \Omega_n$ setzt sich nun aus den Schritten c_1, \dots, c_n mit

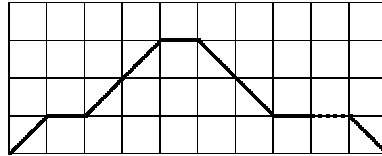
$$c_i := \begin{cases} \searrow & \text{falls } i \in A \setminus C, \\ \nearrow & \text{falls } i \in B \setminus C, \\ \dots & \text{falls } i \in C, \\ - & \text{falls } i \notin A \cup B \text{ ist,} \end{cases}$$

zusammen. Die Übertragung der Parameter ist klar. \square

Beispiele 3.5.6

- a) Das Parallelogrammpolyomino $((5, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 4, 1))$ (vergleiche Abbildung 3.14) korrespondiert zum Pfad

(Abb. 3.17)



- b) Im Anhang (B, Abbildung 7) werden die Parallelogrammpolyominoes vom Umfang 10 ihren Motzkin-Pfaden gegenübergestellt.

Bemerkungen 3.5.7

- a) Sei $(\gamma, \delta)^*$ das Parallelogrammpolyomino, das durch Rotation um 180° aus (γ, δ) hervorgeht. Dann gilt offensichtlich $(\gamma, \delta)^* = ((\delta_l, \delta_{l-1}, \dots, \delta_1), (\gamma_l, \gamma_{l-1}, \dots, \gamma_1))$. Die zugehörigen Motzkin-Pfade sind folglich revers zueinander, d.h. $c((\gamma, \delta)^*) = c_n c_{n-1} \cdots c_1$ für $c((\gamma, \delta)) = c_1 c_2 \cdots c_n$.
- b) Die in Bemerkung 3.3.7b) angegebene Bijektion zwischen den Motzkin-Pfaden Ω_n und den Dyck-Pfaden Δ_n ist *nicht* die Komposition aus der oben beschriebenen Abbildung und der Delest-Viennot-Konstruktion.

Parallelogrammpolyominoes sind nichts anderes als spezielle Schiefdiagramme – die kombinatorischen Grundbausteine in der Theorie der symmetrischen Funktionen.

Zur Erinnerung: Für zwei Partitionen λ und μ mit $\mu \subseteq \lambda$ (d.h. $\mu_i \leq \lambda_i$ für alle i) sei das Schiefdiagramm λ/μ die mengentheoretische Differenz der Young-Diagramme von λ und μ (siehe beispielsweise [26, Abschnitt I.1]). Besteht λ/μ aus einer einzigen Zusammenhangskomponente – sind also jeweils zwei Kästchen von λ/μ durch eine Kette von Zellen aus λ/μ verbunden, so daß aufeinanderfolgende Kettenglieder eine gemeinsame Seite besitzen – so ist λ/μ ein Parallelogrammpolyomino.

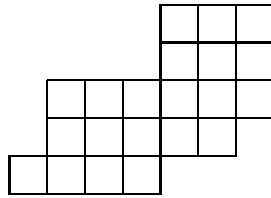
Umgekehrt wird durch das Parallelogrammpolyomino (γ, δ) das Schiefdiagramm λ/μ mit

$$\lambda := (i^{\delta_i} : \delta_i > 0, i = l, \dots, 1) \quad \text{und} \quad \mu := ((i-1)^{\gamma_i} : \gamma_i > 0, i = l, \dots, 2)$$

beschrieben (die Potenzierung meint dabei die Wiederholung des Faktors).

Beispiel 3.5.8 Das Parallelogrammpolyomino $((1, 2, 0, 0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1, 3))$

(Abb. 3.18)



entspricht dem Schiefdiagramm $(7, 7, 7, 6, 4)/(4, 4, 1, 1)$.

In [29] wurde der *Rang eines Schiefdiagramms* als

$$\text{rang}(\lambda/\mu) := d^+(\lambda/\mu) - d^-(\lambda/\mu)$$

definiert. Dabei bezeichne d^+ die Gesamtlänge der Außen- und d^- die Gesamtlänge der Innendiagonalen. Im Spezialfall $\mu = \emptyset$ entspricht dies gerade dem (Durfee-) Rang der Partition λ . Stanley gab in [39] einige einfache äquivalente Definitionen von $\text{rang}(\lambda/\mu)$ an. Wir benutzen hier die des reduzierten Codes von λ/μ .

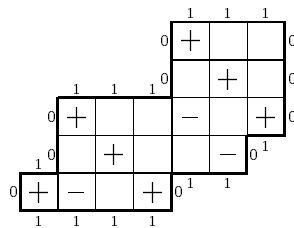
Dazu werden alle vertikalen Grenzen mit einer Null und alle horizontalen Grenzen mit einer Eins versehen. Lesen wir diese Zahlen den Grenzpfaden folgend (im Nullpunkt beginnend), so erhalten wir die binären Folgen $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$ (für den rechten Pfad) und $b_1 b_2 \dots b_{n+1}$ (für den linken Pfad). Dabei ist $2n+2$ der Umfang von λ/μ . Aufgrund der Konstruktion gilt stets $a_1 = b_{n+1} = 1$ und $a_{n+1} = b_1 = 0$. Der reduzierte Code ist nun das Zweizeilen-Array

$$\overline{\text{code}}(\lambda/\mu) = \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n+1} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & b_n & 1 \end{matrix}.$$

Nach [39] entspricht der Rang von λ/μ der Anzahl der Spalten $\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$ (oder äquivalent $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$) im reduzierten Code.

Beispiel 3.5.9 Das Schiefdiagramm $\lambda/\mu = (7, 7, 7, 6, 4)/(4, 4, 1, 1)$

(Abb. 3.19)



$$d^+ = 7, d^- = 3$$

$$\overline{\text{code}} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

hat den Rang 4.

Auch diese Größe eines Parallelogrammpolyomino kann am zugehörigen Motzkin-Pfad abgelesen werden. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Rang des durch (γ, δ) beschriebenen Schiefdiagramms λ/μ mit $\text{rang}((\gamma, \delta))$.

Korollar 3.5.10 Sei (γ, δ) ein Parallelogrammpolyomino vom Umfang $2n + 2$ und $c \in \Omega_n$ der dazu korrespondierende Motzkin-Pfad. Dann gilt

$$\text{rang}((\gamma, \delta)) = 1 + |\{i : c_i c_{i+1} \in \{\searrow\searrow, \searrow\cdots, -\searrow, -\cdots\}, i = 2, \dots, n-1\}|.$$

Beweis. Betrachten wir den reduzierten Code von (γ, δ) . In der binären Folge $b_1 \dots b_{n+1}$ treten die Einträge 1 an den Positionen

$$\gamma_1 + 1, \gamma_1 + \gamma_2 + 2, \dots, \gamma_1 + \dots + \gamma_{l-1} + l - 1, \gamma_1 + \dots + \gamma_l + l = n + 1$$

auf. Dies sind (mit Ausnahme von $n + 1$) gerade die Elemente der Menge A aus der Definition des Motzkin-Pfades. Die Einsen in $a_1 \dots a_{n+1}$ befinden sich an den Stellen

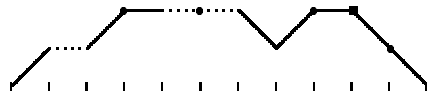
$$1, \delta_1 + 2, \delta_1 + \delta_2 + 3, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_{l-1} + l.$$

Folglich ist der Eintrag a_i für $i > 1$ genau dann 0, wenn $i - 1 \notin B$ ist (vergleiche den Beweis zu Satz 3.5.5).

Der Rang von (γ, δ) zählt nun die Spalten $(a_i, b_i) = (0, 1)$. Für $i = n + 1$ ist diese Bedingung stets erfüllt, für $i = 2, \dots, n$ genau dann, wenn $i \in A$ und $i - 1 \notin B$ ist. Im Motzkin-Pfad entspricht dies den vier Schrittfolgen $\searrow\searrow, \searrow\cdots, -\searrow$ und $-\cdots$. \square

Beispiel 3.5.11 Der Motzkin-Pfad zum Polyomino $(\gamma, \delta) = ((1, 2, 0, 0, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1, 3))$ (bzw. $(7, 7, 7, 6, 4)/(4, 4, 1, 1)$ in der Schiefdiagrammdarstellung) ist

(Abb. 3.20)



Der Rang von (γ, δ) ist folglich 4 (vergleiche dazu Beispiel 3.5.9).

Bemerkung 3.5.12 Aufgrund der Symmetrie können statt $\searrow\searrow, \searrow\cdots, -\searrow, -\cdots$ auch die Teilpfade $\swarrow\swarrow, \swarrow-, \cdots\swarrow, \cdots-$ im Bereich $c_1 \dots c_{n-1}$ gezählt werden (Spalten $\frac{1}{0}$ im Code).

Daraus folgt sofort, daß die Parallelogrammpolyominoes zu zueinander reversen Motzkin-Pfaden ranggleich sind. Nach Bemerkung 3.5.7a) gilt also

$$\text{rang}((\gamma, \delta)) = \text{rang}((\gamma, \delta)^*),$$

wobei $*$ die Rotation um 180° bezeichnet. (Diese nach der Nazarov-Tarasov-Definition nicht offensichtliche Eigenschaft *jedes* Schiefdiagramms folgt unmittelbar, wenn die codebasierte Beschreibung des Ranges zugrunde gelegt wird.)

Eine Anwendung der Bijektion ist die Enumeration der Partitionen festen Umfangs bezüglich ihres Ranges.

Lemma 3.5.13 *Ein Motzkin-Pfad $c \in \Omega_n$ korrespondiert genau dann zu einer Partition, wenn ein $k \in [n]$ mit $c_1, \dots, c_k \in \{/, -\}$ und $c_{k+1}, \dots, c_n \in \{\backslash, \dots\}$ existiert.*

Beweis. Das Paar $((\gamma_1, \dots, \gamma_l), (\delta_1, \dots, \delta_l))$ mit $\gamma_1 + \dots + \gamma_l = \delta_1 + \dots + \delta_l = n + 1 - l$ beschreibt eine Partition λ , wenn $\gamma_2 = \dots = \gamma_l = 0$ ist. Insbesondere gilt dann $\lambda_1 + \lambda'_1 = n + 1$.

Der zu λ korrespondierende Pfad $c \in \Omega_n$ wird gemäß 3.5.5 konstruiert. Die dort definierte Menge A enthält die Elemente $n + 2 - l, n + 3 - l, \dots, n$. Folglich ist $c_k \in \{\backslash, \dots\}$, falls $k \geq n + 2 - l$, und $c_k \in \{/, -\}$ sonst. \square

Lemma 3.5.14 *Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $a < b \leq c$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{c-b} \binom{a+k}{a} \binom{c-a-1-k}{b-a-1} = \binom{c}{b}.$$

Beweis. Man wähle b aus c Elementen aus und zähle die unmarkierten vor dem $(a+1)$ -ten der b markierten Elemente. (Es ist $0 \leq a < b$.) Diese Anzahl k variiert zwischen 0 und $c - b$. Für ein festes a und k existieren $\binom{a+k}{a}$ Möglichkeiten der Wahl der a markierten und k unmarkierten Elemente vor dem $(a+1)$ -ten markierten Objekt. Die Elemente hinter diesem lassen sich auf $\binom{c-a-1-k}{b-a-1}$ Arten festlegen. \square

Satz 3.5.15 *Die Anzahl der Partitionen λ mit $\lambda_1 + \lambda'_1 = n + 1$ und $\text{rang}(\lambda) = d$ beträgt*

$$\binom{n}{2d-1}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.5.13 läßt sich der zu λ korrespondierende Motzkin-Pfad in zwei Teile zerlegen. Sei k der (eindeutig bestimmte) Index mit $c_k \in \{/, -\}$ und $c_{k+1} \in \{\backslash, \dots\}$.

Der Rang von λ entspricht nun der um 1 erhöhten Anzahl der Folgen $//$ und $/-$ im Bereich $c_1 \cdots c_k$ (vergleiche Bemerkung 3.5.12). Für die Positionierung von $d - 1$ derartigen Sequenzen gibt es $\binom{k-1}{d-1}$ Möglichkeiten. (Man wähle die Schritte $/$ in $c_1 \cdots c_{k-1}$.) Das Wort $c_{k+1} \cdots c_n \in \{\backslash, \dots\}^{n-k}$ muß $d - 1$ Komponenten \backslash (als Gegenstücke der $d - 1$ Diagonalschritte im ersten Teil) enthalten; es kann also auf $\binom{n-k}{d-1}$ Arten gewählt werden.

Folglich gibt es

$$\sum_{k=d}^{n+1-d} \binom{k-1}{d-1} \binom{n-k}{d-1} = \sum_{k=0}^{n+1-2d} \binom{k+d-1}{d-1} \binom{n-k-d}{d-1} = \binom{n}{2d-1}$$

Partitionen vom Rang d und Umfang $2(n+1)$. Für die zweite Gleichung verwende man Lemma 3.5.14 mit den Parametern $a = d - 1$, $b = 2d - 1$ und $c = n$. \square

Ein analoges Resultat für alle zusammenhängenden (d.h. aus einer Zusammenhangskomponente bestehenden) Schiefdiagramme können wir hier nur – aufgrund von Computerexperimenten – vermuten.

Vermutung 3.5.16 Die Anzahl der zusammenhängenden Schiefdiagramme λ/μ vom Umfang $2(n+1)$ und dem Rang d beträgt

$$2^{n+1-2d} \binom{n-1}{2d-2} C_{d-1}.$$

Bemerkungen 3.5.17

- a) Für den Extremalfall $d = 1$ liefert die Pfadinterpretation eine sehr einfache Erklärung. Nach Bemerkung 3.5.12 enthält der Motzkin-Pfad c zu einem Schiefdiagramm vom Rang 1 keine Teilfolgen der Form

$$\backslash\backslash, \backslash\text{---}, -\backslash, -\text{---}, //, /-, \text{---}/, \text{---}-.$$

Für die erste Komponente c_1 gilt $c_1 \in \{/, -\}$. (Nach Definition von Ω_n ist das Niveau jedes punktierten Horizontalschritts positiv.) Für c_2, \dots, c_{n-1} sind jeweils zwei Schritte zulässig. Man beachte, daß das Verbot der obigen Sequenzen die Beschränkung $h_i(c) \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ bewirkt. Die Komponente c_n ist wegen der Forderung $h_{n+1}(c) = 0$ festgelegt. Die Anzahl der zusammenhängenden Schiefdiagramme von minimalem Rang beträgt also 2^{n-1} .

- b) Wie im Abschnitt 3.2 bereits angegeben, zählt der Koeffizient

$$m_{n-1,d-1} = \binom{n-1}{2d-2} C_{d-1}$$

die (ursprünglichen, also über der Menge $\{/, \backslash, -\}$ definierten) Motzkin-Pfade der Länge $n-1$ mit $d-1$ Schritten $/$.

Kapitel 4

Von der Menge \mathcal{M}_n zur \mathcal{S}_n

In diesem Kapitel schließt sich nun der Kreis. Wir können unsere Erkenntnisse über die gemeinsame Verteilung der Statistiken **exc** und **dexc** auf der Menge der bi-ansteigenden Permutationen nutzen, um die in Abschnitt 2.2 aufgeworfene Frage nach der entsprechenden Verteilung über der symmetrischen Gruppe zu beantworten.

Wie bereits zu Beginn des dritten Kapitels erwähnt, fassen wir dazu die Permutationen in Klassen mit jeweils einem bi-ansteigenden Vertreter zusammen. Im Abschnitt 1 werden wir zunächst klären, wie viele Elemente diese Klassen jeweils umfassen. Auch hier erweist sich die Darstellung der bi-ansteigenden Permutationen durch die Polyominos als sehr hilfreich.

Der Abschnitt 2 setzt schließlich alle Puzzleteile zusammen und endet mit einer rekursiven Beschreibung der Koeffizienten der gemeinsamen Verteilung von **exc** und **dexc** auf der \mathcal{S}_n .

4.1 Die E-invarianten Transpositionen

Die Abbildung $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$, die jedem $\pi \in \mathcal{S}_n$ die Permutation $\hat{\pi}$ zuordnet, die durch die Sortierung von π_E und π_{NE} entsteht, ist eine sowohl **exc**- als auch **dexc**-invariante Surjektion (vergleiche dazu den Beweis von Satz 2.3.2). Die grundlegende Frage, die wir in diesem Abschnitt untersuchen wollen, ist: Wie viele Urbilder besitzt eine bi-ansteigende Permutation bezüglich dieser Abbildung?

Definition 4.1.1 Für $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{M}_n$ sei T_E die Menge der Transpositionen von $E(\pi)$ und T_{NE} die Menge der Transpositionen auf den Fallstellen von π . (Jede Transposition θ aus T_E bzw. T_{NE} läßt sich als Permutation von $[n]$ interpretieren.) Die Elemente der Menge

$$T(\pi) := \{\theta \in T_E : E(\pi_{\theta(1)} \cdots \pi_{\theta(n)}) = E(\pi)\} \cup \{\theta \in T_{NE} : E(\pi_{\theta(1)} \cdots \pi_{\theta(n)}) = E(\pi)\}$$

bezeichnen wir als *E-invariante Transpositionen von π* . (Im allgemeinen stellen wir ein $\theta \in T(\pi)$

in der Form (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ dar.) Für die Anwendung von $\theta \in T(\pi)$ auf die Indizes von π schreiben wir abkürzend π_θ .

Während jede Transposition (i, j) auf \mathbf{E} mit $\pi_i > \pi_j$ die Menge der Aufstiege von $\pi \in \mathcal{S}_n$ invariant läßt (Beweis von 2.3.2), ist dies bei der Anwendung eines $(i, j) \in T_{\mathbf{E}}$ auf $\pi \in \mathcal{M}_n$ nicht notwendig der Fall. Zwar ist $i < \pi_i < \pi_j$ auch in $\pi_{(i,j)}$ ein Aufstieg, die Position j wird jedoch möglicherweise zur Fallstelle. Die Menge $T(\pi)$ ist also im allgemeinen eine echte Teilmenge von $T_{\mathbf{E}} \cup T_{\mathbf{NE}}$.

Mit den Transpositionen (i, j_1) und (i, j_2) ist offensichtlich auch (j_1, j_2) in $T(\pi)$ enthalten, vorausgesetzt $j_1 < j_2$. Jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\hat{\sigma} = \pi$ entsteht durch die Anwendung eines Produkts von Elementen aus $T(\pi)$ der Form

$$\tau := (i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_s, j_s) \in \mathcal{S}_n \quad \text{mit} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_s \quad (s \geq 0)$$

auf die Indizes von π . Die Anzahl dieser Permutationen beträgt folglich

$$\prod_{i \geq 1} \left(|\{j : (i, j) \in T(\pi)\}| + 1 \right)$$

und wird im folgenden mit $o(\pi)$ bezeichnet.

(Analog der ersten Komponente gilt: Sind (i_1, j) und (i_2, j) \mathbf{E} -invariant, so auch (i_1, i_2) . Die Anzahl $o(\pi)$ ist daher ebenso das Produkt der Zahlen $|\{i : (i, j) \in T(\pi)\}| + 1$ für $j = 2, \dots, n$.)

Beispiele 4.1.2

- a) Die \mathbf{E} -invarianten Transpositionen der Permutation $\pi = \underline{6} 1 \underline{7} \underline{9} 2 3 4 5 \underline{10} 8 \in \mathcal{M}_{10}$ sind

$$T(\pi) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 10)\}.$$

Folglich hat π genau $o(\pi) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 576$ Urbilder bezüglich der Sortierung von $\pi_{\mathbf{E}}$ und $\pi_{\mathbf{NE}}$.

- b) Für $\pi = 4 5 1 2 6 3 \in \mathcal{M}_6$ erhalten wir $T(\pi) = \{(1, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 6)\}$. Die $o(\pi) = 12$ Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_6$ mit $\hat{\sigma} = \pi$ sind von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = 4 5 1 2 6 3 & (\tau = \text{id}), & \sigma_7 = 5 4 3 2 6 1 & (\tau = (1, 2)(3, 6)), \\ \sigma_2 = 5 4 1 2 6 3 & (\tau = (1, 2)), & \sigma_8 = 5 4 1 3 6 2 & (\tau = (1, 2)(4, 6)), \\ \sigma_3 = 4 5 2 1 6 3 & (\tau = (3, 4)), & \sigma_9 = 4 5 2 3 6 1 & (\tau = (3, 4)(4, 6)), \\ \sigma_4 = 4 5 3 2 6 1 & (\tau = (3, 6)), & \sigma_{10} = 4 5 3 1 6 2 & (\tau = (3, 6)(4, 6)), \\ \sigma_5 = 4 5 1 3 6 2 & (\tau = (4, 6)), & \sigma_{11} = 5 4 2 3 6 1 & (\tau = (1, 2)(3, 4)(4, 6)), \\ \sigma_6 = 5 4 2 1 6 3 & (\tau = (1, 2)(3, 4)), & \sigma_{12} = 5 4 3 1 6 2 & (\tau = (1, 2)(3, 6)(4, 6)). \end{array}$$

Für die Anzahl der \mathbf{E} -invarianten Transpositionen von π gibt es eine einfache Interpretation im Kontext der Statistiken.

Satz 4.1.3 Für jedes $\pi \in \mathcal{M}_n$ gilt $|T(\pi)| = \mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi)$.

Beweis. Ist i ein Aufstieg von $\pi \in \mathcal{M}_n$, so gilt $\pi_i - i - 1 = |\{k > i : \pi_i > k\}|$.

Für $k \in \mathbf{E}(\pi)$ ist die Bedingung $i < k < \pi_i$ äquivalent zu $(i, k) \in T(\pi)$. Sei nun k eine Fallstelle von π mit $i < k < \pi_i$. Dann korrespondiert (i, k) zu einer Transposition (k, j) mit $j > k \geq \pi_j$, also einem Element aus $T(\pi)$. Es genügt dafür zu zeigen, daß die Anzahl der Aufstiege $i < k$ mit $\pi_i > k$ und die Anzahl der Fallstellen $j > k$ mit $\pi_j \leq k$ übereinstimmen. Dies ist jedoch offensichtlich: Für s der $k-1$ von π_k verschiedenen Werte π_l mit $k \geq \pi_l$ gelte $l > k$. (Die Position l ist dann zwangsläufig eine Fallstelle von π .) Folglich besitzen $k-1-s$ der vor k befindlichen Stellen l einen Wert $\pi_l \leq k$ und somit s Positionen einen Wert $\pi_l > k$. (Die letzteren sind automatisch Aufstiege von π .)

Die Menge $T(\pi)$ enthält also

$$\sum_{i \in \mathbf{E}(\pi)} (\pi_i - i - 1) = \mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi) = \mathbf{inv}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi)$$

Elemente. □

Übersetzen wir die Größen $T(\pi)$ und $o(\pi)$ gemäß den Ausführungen des vorigen Kapitels in die Sprache der Polyominos, so erhalten wir die folgende Beschreibung.

Satz 4.1.4 Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ und $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$ das zugehörige Polyomino. Dann gilt:

- a) $|T(\pi)| = \rho(\alpha) - \rho(\beta)$,
- b) $o(\pi) = b_1 \cdots b_n$ mit $b_i := |\{j \in [l-1] : \beta_1 + \dots + \beta_j < i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j\}| + 1$.

Beweis. **a)** Nach Satz 3.4.3 beträgt die Fläche des Polyominos (α, β) gerade $n+1 + \mathbf{dexc}(\pi)$, die Zeilenanzahl l entspricht $\mathbf{exc}(\pi) + 1$. Bemerkung 3.4.9 liefert nun $\rho(\alpha) - \rho(\beta) = \mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi)$.

b) Sei a_i die um 1 erhöhte Anzahl der Transpositionen (i, \cdot) aus $T(\pi)$. Der Argumentation des Beweises von Satz 4.1.3 folgend, erhalten wir

$$a_i = |\{j \in \mathbf{E}(\pi) : i < j < \pi_i\}| + 1 = |\{j \in \mathbf{E}(\pi) : i \leq j < \pi_i\}|$$

für jeden Aufstieg i und

$$a_i = |\{j \in \mathbf{E}(\pi) : j < i < \pi_j\}| + 1$$

für jede Fallstelle i von π . Nach Bemerkung 3.2.10 sind die Partialsummen $\beta_1, \dots, \beta_1 + \dots + \beta_{l-1}$ die Aufstiege von π und $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} + 1$ die dazugehörigen Werte. Damit ergibt sich für $i \notin \mathbf{E}(\pi)$ unmittelbar

$$a_i = |\{j \in [l-1] : \beta_1 + \dots + \beta_j < i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j\}| + 1 = b_i.$$

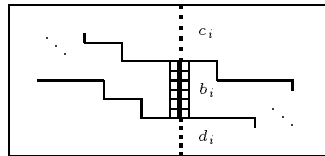
Für einen Aufstieg i von π stimmen a_i und b_i nicht mehr notwendig überein, es gilt jedoch

$$\begin{aligned}
 \prod_{i \in E(\pi)} a_i &= \prod_{i \in [l-1]} |\{j \in [l-1] : \beta_1 + \dots + \beta_i \leq \beta_1 + \dots + \beta_j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_i\}| \\
 &= \prod_{i \in [l-1]} |\{j \geq i : \beta_1 + \dots + \beta_j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_i\}| \\
 &= \prod_{i \in [l-1]} |\{j \leq i : \beta_1 + \dots + \beta_i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j\}| \\
 &= \prod_{i \in [l-1]} (|\{j < i : \beta_1 + \dots + \beta_i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j\}| + 1) \\
 &= \prod_{i \in E(\pi)} b_i.
 \end{aligned}$$

(Ein Aufstieg i von π ist von der Form $\beta_1 + \dots + \beta_k$ für ein k ; die Größe $b_i - 1$ zählt also alle Indizes $j < k$ mit $\beta_1 + \dots + \beta_k \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_j$.) \square

Bemerkung 4.1.5 Die Beschreibung von $o(\pi)$ erscheint recht technisch. Der Wert b_i ist aber eine ganz natürliche Kenngröße des Polyominos, er zählt die gemeinsamen Zeilen der Spalten i und $i + 1$. Betrachten wir dazu die Einbettung von (α, β) in ein $(n + 1) \times l$ -Rechteck.

(Abb. 4.21)



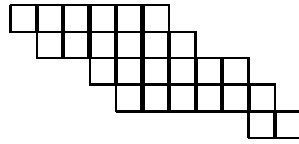
Die l Zeilen der i -ten Spalte teilen sich wie folgt auf: c_i Zeilen enden vor der Spalte $i + 1$, b_i Zeilen sind der i -ten und $(i + 1)$ -ten Spalte gemeinsam, d_i Zeilen beginnen nach der Spalte i . Der Anfang und das Ende der Zeile j wird durch $\beta_1 + \dots + \beta_{j-1}$ ($\beta_0 := 0$) bzw. $\alpha_1 + \dots + \alpha_j + 1$ angegeben (vergleiche dazu den Beweis von 3.2.8). Es gilt also

$$b_i = l - |\{j \in [l-1] : \alpha_1 + \dots + \alpha_j < i\}| - |\{j \in [l-1] : \beta_1 + \dots + \beta_j \geq i\}|.$$

Wie im Beweis von Teil a) ausgeführt, läßt sich auch $|T(\pi)|$ sofort an der Visualisierung von (α, β) ablesen. Die Anzahl der E-invarianten Transpositionen entspricht gerade der Differenz aus der Fläche und den Maßen n und l .

Beispiel 4.1.6 Die im Beispiel 4.1.2a) betrachtete Permutation $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$ korrespondiert zum Polyomino $((5, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 5, 1))$.

(Abb. 4.22)



Wir stellen die verschiedenen Interpretationen der Zahlen $|T(\pi)|$ und $o(\pi)$ gegenüber:

$$|T(\pi)| = 11 : \quad \mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi) = 15 - 4;$$

$$\rho(\alpha) - \rho(\beta) = 18 - 7;$$

$$a((\alpha, \beta)) - (10 + 5) = 26 - 15.$$

$$o(\pi) = 576 : \quad T(\pi) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 10)\},$$

$$\text{also } o(\pi) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1;$$

$$b = (1, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1, 1), \text{ also } o(\pi) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4.$$

Bemerkung 4.1.7 An dieser Stelle kehren wir noch einmal zurück zum Beweis des Satzes 2.2.9 im Abschnitt 2.3. Dort wurde behauptet, daß eine Permutation $\sigma \in \mathcal{M}_n$ und ihr Bild $\Phi(\sigma) \in \mathcal{M}_n$ dieselbe Anzahl an Urbildern bezüglich der Sortierung besitzen. Um dies zu zeigen, wurden die Zahlen $a_i(\sigma) := |\{j \in E(\sigma) : j < i < \sigma_j\}|$ für $i \in [n]$ mit den entsprechenden Werten für $\Phi(\sigma)$ verglichen. Es galt $a_i(\Phi(\sigma)) = a_{n+1-i}(\sigma)$ für alle $i \in [n]$. Wegen $b_i(\sigma) = a_i(\sigma) + 1$ ist dieser Schluß nach Satz 4.1.4b) zulässig. Das Produkt der Zahlen $b_i(\sigma)$ und $b_i(\Phi(\sigma))$ ist identisch; die Anzahl der Urbilder von σ und die Anzahl der Urbilder von $\Phi(\sigma)$ stimmen also überein. Genauer existieren ebenso viele $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\hat{\pi} = \sigma$ und $\mathbf{inv}(\pi) - \mathbf{inv}(\sigma) = t$ wie Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ mit $\hat{\pi} = \Phi(\sigma)$ und $\mathbf{inv}(\pi) - \mathbf{inv}(\Phi(\sigma)) = t$.

Müssen wir nun tatsächlich die Urbilder *jeder* Permutation $\pi \in \mathcal{M}_n$ auf diese Weise abzählen? Die nachfolgenden Ausführungen zeigen, daß $o(\pi)$ durch die Werte $\mathbf{exc}(\pi)$ und $\mathbf{dexc}(\pi)$ gewissermaßen festgelegt ist.

Wir können uns auf die Betrachtung von bi-ansteigenden Permutationen mit höchstens $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ Aufstiegen beschränken. Wie soeben angemerkt, ist die Urbildanzahl unter der zum Nachweis der Symmetrie von $M_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}$ konstruierten Involution Φ (vergleiche 2.3.17) invariant.

Ist die Menge $T(\pi)$ der E-invarianten Transpositionen extremal, so hängt $o(\pi)$ ausschließlich von der Anzahl der Aufstiege und ihrer gewichteten Summe ab. (Man beachte, daß der Wert der Statistik \mathbf{dexc} nach 2.3.15 die Relationen $\mathbf{exc}(\pi) \leq \mathbf{dexc}(\pi) \leq \mathbf{exc}(\pi)(n - \mathbf{exc}(\pi))$ erfüllt.)

Proposition 4.1.8 Sei $\pi \in \mathcal{M}_n$ mit $\text{exc}(\pi) = e$ und $\text{dex}(\pi) = k$. Desweiteren sei $2e \leq n - 1$. Dann gilt

a) $o(\pi) = 2^{k-e}$, falls $k - e \leq 3$ ist und

b) $o(\pi) = (e+1)^{n-2e} \cdot e!^2$ für $k = e(n-e)$ sowie $o(\pi) = e(e+1)^{n-2e-1} \cdot e!^2$ für $k = e(n-e) - 1$.

Beweis. **a)** Für $k - e = |T(\pi)| \leq 2$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $o(\pi)$. (Im Fall $k - e = 2$ unterscheiden sich die beiden E-invarianten Transpositionen in ihrer ersten Komponente; andernfalls wäre auch ihre Verkettung in $T(\pi)$ enthalten.)

Sei nun $k - e = 3$ und $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,e+1} \times \mathcal{C}_{n,e+1}$ das zu π gehörende Polyomino. Nach Satz 4.1.4a) beträgt die Differenz der Ränge von α und β gerade 3. Gemäß Bemerkung 3.4.9c) ist also $\alpha = \tilde{\psi}_{i_3} \tilde{\psi}_{i_2} \tilde{\psi}_{i_1} \cdot \beta$ für geeignete (nicht notwendig verschiedene) Indizes i_1, i_2, i_3 . (Die Anwendung der Operation $\tilde{\psi}_i$ auf die Komposition β erhöht deren i -te Partialsumme um 1, alle anderen Summen bleiben unverändert.)

Wir betrachten nun die drei möglichen Fälle. Sei dazu $s(\alpha) := (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{e+1})$ die Folge der Partialsummen von α und $s(\beta)$ entsprechend die Summenfolge von β .

- Stimmen die drei Indizes i_1, i_2, i_3 überein, so gilt $s(\alpha)_{i_1} = s(\beta)_{i_1} + 3$ und $s(\alpha)_j = s(\beta)_j$ für alle $j \neq i_1$. Insbesondere ist $s(\beta)_{i_1-1} = s(\alpha)_{i_1-1} < s(\beta)_{i_1}$. Die Größen

$$b_i = e + 1 - |\{j \in [e] : s(\alpha)_j < i\}| - |\{j \in [e] : s(\beta)_j \geq i\}|$$

nehmen also die folgenden Werte an: $b_{s(\alpha)_{i_1}} = b_{s(\alpha)_{i_1-1}} = b_{s(\alpha)_{i_1-2}} = e + 1 - (i_1 - 1) - (e - i_1) = 2$ und $b_i = 1$ für alle übrigen Indizes $i \in [n]$.

- Ist o. E. $i_1 = i_2$ verschieden von i_3 , so erhalten wir mit analoger Argumentation $b_{s(\alpha)_{i_1}} = b_{s(\alpha)_{i_1-1}} = b_{s(\alpha)_{i_3}} = 2$ und $b_i = 1$ für alle übrigen Indizes $i \in [n]$.
- Im Fall paarweise verschiedener Indizes i_1, i_2, i_3 folgt $b_{s(\alpha)_{i_1}} = b_{s(\alpha)_{i_2}} = b_{s(\alpha)_{i_3}} = 2$. Alle anderen Komponenten der Folge b sind 1.

In jedem Fall ergibt sich $o(\pi) = 2^3$.

b) Sei wiederum $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,e+1} \times \mathcal{C}_{n,e+1}$ das zu π korrespondierende Polyomino. Ist der Abstand der Ränge derart groß, sind α und β eindeutig bestimmt. Nach Satz 3.4.10 gilt

$$c_0(n, e + 1) = c_1(n, e + 1) = c_{e(n-e-1)-1}(n, e + 1) = c_{e(n-e-1)}(n, e + 1) = 1$$

für alle n und e . Für $k = e(n-e)$ ist notwendig $\alpha = (n-e, 1, \dots, 1)$ und $\beta = (1, \dots, 1, n-e)$; die resultierende Folge der Zahlen b_i ist von der Form $b = (1, 2, \dots, e+1, e+1, \dots, e+1, e, \dots, 1)$. Im Fall $k = e(n-e) - 1$ ist entweder α maximal im Verband $\mathcal{C}_{n,e+1}$ und $\beta = (1, \dots, 1, 2, n-e-1)$ oder $\alpha = (n-e-1, 2, 1, \dots, 1)$ und β minimal. Für die Folge der b_i erhalten wir

$$(1, 2, \dots, e-1, e, e, e+1, e+1, \dots, e+1, e, \dots, 1)$$

bzw. deren Reversion. Die Anzahl der Urbilder ist das Produkt der Komponenten von b . \square

Für sehr kleine Zahlen $|T(\pi)|$ nimmt $o(\pi)$ also einen einzigen Wert an. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Wir können die Mengen

$$\mathcal{O}_n^{(t)} := \{o(\pi) : \pi \in \mathcal{M}_n, |T(\pi)| = t\}$$

jedoch mittels einer auf den b -Folgen basierenden Rekursion vollständig beschreiben.

Im folgenden bezeichne $b((\alpha, \beta))$ die Folge der in Satz 4.1.4b) für ein Polyomino (α, β) definierten Zahlen b_i . (Die Anzahl der E-invarianten Transpositionen der zugehörigen Permutation entsprach gerade der Differenz der Ränge von α und β .)

Lemma 4.1.9 *Sei $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$ ein Polyomino, das die Bedingung $\rho(\alpha) - \rho(\beta) = t$ erfüllt. Desweiteren sei $b((\alpha, \beta)) = (b_1, \dots, b_n)$. Existiert ein Index $i \in \{2, \dots, n-1\}$ mit $b_i = 1$, so ist*

$$(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

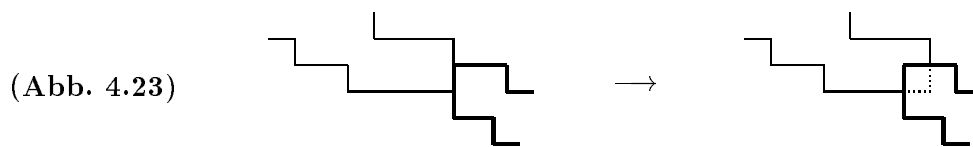
die b -Folge eines Polyominos $(\gamma, \delta) \in \mathcal{C}_{n-1, \leq l} \times \mathcal{C}_{n-1, \leq l}$ mit $\rho(\gamma) - \rho(\delta) = t$. Andernfalls entspricht die Reduktion

$$(b_2 - 1, b_3 - 1, \dots, b_{n-1} - 1)$$

der b -Folge eines Polyominos $(\gamma, \delta) \in \mathcal{C}_{n-2, l-1} \times \mathcal{C}_{n-2, l-1}$ mit $\rho(\gamma) - \rho(\delta) = t + 2 - n$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.1.5 zählt b_i die gemeinsamen Zeilen der Spalten i und $i + 1$ des Polyominos (α, β) . Folglich gilt stets $b_1 = b_n = 1$.

Existiert nun eine weitere Komponente $b_i = 1$, so läßt sich (α, β) durch die vollständige Verschiebung der Spalten $i + 1, \dots, n + 1$ (und gegebenenfalls anschließender Zeilenverschiebung)



in das Polyomino (γ, δ) mit $b((\gamma, \delta)) = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$ transformieren. (Gibt es mehrere solche Indizes, wähle man den minimalen). Ist die j -te die gemeinsame Zeile der Spalten i und $i + 1$, so gilt

$$\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_l) \quad \text{und} \quad \delta = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j - 1, \beta_{j+1}, \dots, \beta_l).$$

Im Fall $\alpha_j = 1$ bzw. $\beta_j = 1$ sind zudem die Zeilen $j + 1, \dots, l$ bzw. j, \dots, l um eine Einheit nach oben zu verschieben; dies reduziert die Zeilenanzahl auf $l - 1$. Wir erhalten somit für $\alpha_j = 1$

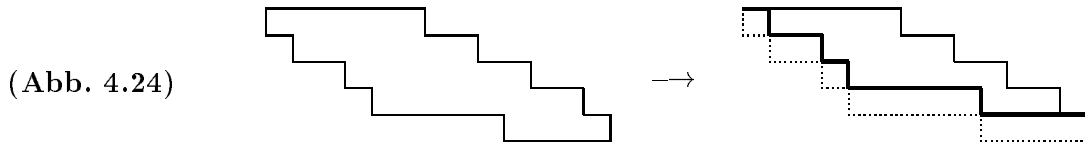
$$\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_l) \quad \text{und} \quad \delta = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j + \beta_{j+1} - 1, \beta_{j+2}, \dots, \beta_l)$$

und für $\beta_j = 1$ die Kompositionen

$$\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-2}, \alpha_{j-1} + \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_l) \quad \text{und} \quad \delta = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_l).$$

Diese Umformungen verändern die Differenz der Ränge nicht.

Sind alle Komponenten $b_2, \dots, b_{n-1} > 1$, so gilt notwendig $\alpha_l = \beta_1 = 1$ und $\alpha_1, \beta_l > 1$. Wir können das Polyomino (γ, δ) daher wie folgt konstruieren:



Der zu β korrespondierende Pfad wird um eine Einheit nach oben verschoben. Dies bewirkt

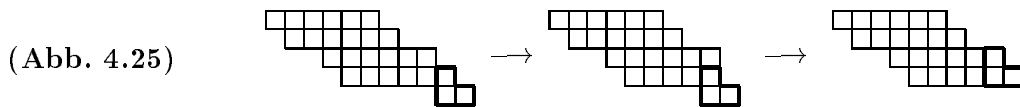
$$\gamma = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}) \in \mathcal{C}_{n-2, l-1} \quad \text{und} \quad \delta = (\beta_2, \dots, \beta_{l-1}, \beta_l - 1) \in \mathcal{C}_{n-2, l-1},$$

also $\rho(\gamma) - \rho(\delta) = t + 2 - n$. □

Beispiel 4.1.10 Das Polyomino $((5, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 5, 1)) \in \mathcal{C}_{10,5} \times \mathcal{C}_{10,5}$ hat die b -Folge

$$b = (1, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, \underline{1}, 1)$$

(vergleiche auch Beispiel 4.1.6). Es wird gemäß dem ersten Fall (mit $j = 4$ und $a_4 = 1$) durch die Verschiebung von Spalten und auch Zeilen zu $(\gamma, \delta) = ((5, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 5)) \in \mathcal{C}_{9,4} \times \mathcal{C}_{9,4}$ umgeformt.



Es gilt $b((\gamma, \delta)) = (1, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1)$.

Die Elemente der Menge $\mathcal{O}_n^{(t)}$ lassen sich also aus denen der Mengen $\mathcal{O}_{n-1}^{(t)}$ und $\mathcal{O}_{n-2}^{(t+2-n)}$ erzeugen.

Satz 4.1.11 Für $t = 0, \dots, \lfloor \frac{1}{4}(n-1)^2 \rfloor$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^{(t)} &= \{1 \cdot c_1 \cdots c_{n-1} : c_1 \cdots c_{n-1} \in \mathcal{O}_{n-1}^{(t)}\} \\ &\quad \cup \{1 \cdot 1 \cdot (c_1 + 1) \cdots (c_{n-2} + 1) : c_1 \cdots c_{n-2} \in \mathcal{O}_{n-2}^{(t+2-n)}\} \end{aligned}$$

mit den Startmengen $\mathcal{O}_1^{(0)} = \{1\}$ und $\mathcal{O}_2^{(0)} = \{1^2\}$. Ansonsten ist die Menge $\mathcal{O}_n^{(t)}$ leer.

Beweis. Die Rekursion folgt unmittelbar aus dem Lemma 4.1.9 und der Definition von $o(\pi)$ als Produkt der Komponenten der b -Folge des zu π korrespondierenden Polyominos.

Der Bereich für den Parameter t folgt aus den möglichen Werten der Statistiken **exc** und **dexc**:

$$|T(\pi)| = \mathbf{dexc}(\pi) - \mathbf{exc}(\pi) \leq \mathbf{exc}(\pi)(n - \mathbf{exc}(\pi) - 1).$$

(Der Term wird maximal für $\mathbf{exc}(\pi) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.) □

Bemerkung 4.1.12 Die umständliche Notation der Elemente von $\mathcal{O}_n^{(t)}$ ist für die sukzessive Konstruktion notwendig. Der Rekursionsschritt benötigt die Faktoren c_i (nicht zu verwechseln mit der Zerlegung in Primzahlen) der Zahlen $o(\pi)$.

Beispiele 4.1.13

a) Die Menge $\mathcal{O}_{10}^{(12)}$ vereint die manipulierten Elemente von $\mathcal{O}_9^{(12)}$ und $\mathcal{O}_8^{(4)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_9^{(12)} &= \{4^2 3^2 2^2 1^3, 4 3^3 2^3 1^2, 3^5 2^2 1^2\} = \{576, 864, 972\}, \\ \mathcal{O}_8^{(4)} &= \{3 2^2 1^5, 2^4 1^4\} = \{12, 16\} \end{aligned}$$

und somit $\mathcal{O}_{10}^{(12)} = \{4^2 3^2 2^2 1^4, 4 3^3 2^3 1^3, 3^5 2^2 1^3, 4 3^2 2^5 1^2, 3^4 2^4 1^2\} = \{576, 864, 972, 1152, 1296\}$.

Die Anzahl der Urbilder jeder bi-ansteigenden Permutation von $[10]$ mit 12 E-invarianten Transpositionen (dies sind 374 Permutationen) entspricht also einem der Elemente dieser Menge.

b) Im Anhang (A, Tabelle 9) sind die Elemente der Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$ für $n = 3, \dots, 10$ (in platzsparender Potenzschreibweise) aufgelistet.

4.2 Die vollständige Verteilung auf der symmetrischen Gruppe

Die letzte Hürde auf dem Weg zu den Koeffizienten $S_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k)$ ist die Abzählung der Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$, deren Urbildanzahl $o(\pi)$ in Abhängigkeit von $\mathbf{exc}(\pi)$ und $\mathbf{dexc}(\pi)$ einen bestimmten Wert annimmt. Es gilt

$$S_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k) = \sum_{i=1}^s o_i(n, k - e) m_i(n, e, k),$$

wobei $o_1(n, t) < \dots < o_s(n, t)$ die Elemente der Menge $\mathcal{O}_n^{(t)}$ seien und mit $m_i(n, e, k)$ die Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_n$ gezählt werden, für die $\mathbf{exc}(\pi) = e$, $\mathbf{dexc}(\pi) = k$ und $o(\pi) = o_i(n, k - e)$ ist. Insbesondere sind die Zahlen $m_i(n, e, k)$ die Teile einer Komposition des Verteilungskoeffizienten $M_n^{(\mathbf{exc}, \mathbf{dexc})}(e, k)$.

Die Ränder der Verteilung sind uns also bereits bekannt, da die entsprechenden Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$

einelementig sind. Auch hier genügt es, Permutationen mit höchstens $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ Aufstiegen zu betrachten. Die Symmetrie von $S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, k)$ im Parameter e wurde im Abschnitt 2.3 nachgewiesen.

Korollar 4.2.1

- a) Für $t \leq 3$ gilt $S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+t) = 2^t \cdot M_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+t)$.
 b) Sei nun $2e \leq n-1$. Dann ist

$$S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e(n-e)) = (e+1)^{n-2e} \cdot e!^2,$$

$$S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e(n-e)-1) = 2e(e+1)^{n-2e-1} \cdot e!^2.$$

Beweis. Das Element der entsprechenden Menge $\mathcal{O}_n^{(t)}$ wurde in Proposition 4.1.8 bestimmt. Zudem gilt $M_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e(n-e)) = p_{n, e+1, e(n-e)+n+1} = 1$ und $M_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e(n-e)-1) = p_{n, e+1, e(n-e)+n} = 2$, vorausgesetzt $e \geq 1$. (Für den Teil a) vergleiche auch Proposition 2.3.13.) \square

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, daß sich die Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$ rekursiv erzeugen lassen. Dies gilt auch für die Zahlen $m(n, e, k)$.

Der Einfachheit halber indizieren wir $m(n, e, k)$ im folgenden mit dem Element $o \in \mathcal{O}_n^{(k-e)}$, dessen Auftreten als Urbildanzahl gerade von $m(n, e, k)$ gezählt wird, also

$$m_o(n, e, k) := |\{\pi \in \mathcal{M}_n : \text{exc}(\pi) = e, \text{dex}(\pi) = k, o(\pi) = o\}|.$$

Proposition 4.2.2 Für jede Zahl $c_1 \cdots c_r \in \mathcal{O}_n^{(t)}$ gilt

$$m_{c_1 \cdots c_r}(n, e, e+t) = m_{1^2 \cdot (c_1+1) \cdots (c_r+1)}(n+2, e+1, e+t+n+1).$$

Beweis. Die im zweiten Teil von Lemma 4.1.9 beschriebene Transformation (Verschiebung des unteren Begrenzungspfades) ist eine Bijektion. Durch sie werden die Polyominos $(\gamma, \delta) \in \mathcal{C}_{n,l} \times \mathcal{C}_{n,l}$ mit der Rangdifferenz $\rho(\gamma) - \rho(\delta) = t$ und der b -Folge $b((\gamma, \delta)) = (b_1, \dots, b_n)$ auf $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_{n+2, l+1} \times \mathcal{C}_{n+2, l+1}$ mit $\rho(\alpha) - \rho(\beta) = t+n$ und $b((\alpha, \beta)) = (1, b_1+1, b_2+1, \dots, b_n+1, 1)$ abgebildet. (Man beachte den vom Lemma verschiedenen Blickwinkel auf die Parameter.) \square

Bemerkung und Beispiel 4.2.3 Für alle zweielementigen Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$ sind somit die entsprechenden Verteilungskoeffizienten bekannt, da die Zahl $m(n, e, e+t)$ für mindestens eines der beiden Elemente der Rekursion des Lemmas unterliegt. Durch Differenzenbildung erhalten wir:

- $n = 6, t = 1 : \mathcal{O}_6^{(1)} = \{1^5 2\}$

$$S_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+1) = 1^5 \cdot 2 \cdot m_{1^5 2}(6, e, e+1) = 2 \cdot M_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+1)$$

e	0	1	2	3	4	5
$M_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+1)$	0	4	12	12	4	0
$S_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+1)$	0	8	24	24	8	0

- $n = 8, t = 7 : \mathcal{O}_8^{(7)} = \{1^3 2^3 3^2, 1^2 2^5 3\}$

$$\begin{aligned}
& S_8^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+7) \\
&= 72 \cdot m_{1^3 2^3 3^2}(8, e, e+7) + 96 \cdot m_{1^2 2^5 3}(8, e, e+7) \\
&= 72 \cdot m_{1^3 2^3 3^2}(8, e, e+7) + 96 \cdot m_{1^5 2}(6, e-1, e) \\
&= 72 \cdot m_{1^3 2^3 3^2}(8, e, e+7) + 96 \cdot M_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e-1, e) \\
&= 72 \cdot (M_8^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+7) - M_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e-1, e)) + 96 \cdot M_6^{(\text{exc}, \text{dex})}(e-1, e)
\end{aligned}$$

e	0	1	2	3	4	5	6	7
$M_8^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+7)$	0	0	4+4	16+12	16+12	4+4	0	0
$S_8^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+7)$	0	0	672	2304	2304	672	0	0

- $n = 10, t = 15 : \mathcal{O}_{10}^{(15)} = \{1^3 2^2 3^2 4^3, 1^2 2^3 3^3 4^2, 1^2 2^2 3^5 4\}$

$$\begin{aligned}
& S_{10}^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+15) \\
&= 2304 \cdot m_{1^3 2^2 3^2 4^3}(10, e, e+15) + 3456 \cdot m_{1^2 2^3 3^3 4^2}(10, e, e+15) \\
&\quad + 3888 \cdot m_{1^2 2^2 3^5 4}(10, e, e+15) \\
&= 2304 \cdot m_{1^3 2^2 3^2 4^3}(10, e, e+15) + 3456 \cdot m_{1^3 2^3 3^2}(8, e-1, e+6) \\
&\quad + 3888 \cdot m_{1^2 2^5 3}(8, e-1, e+6)
\end{aligned}$$

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M_{10}^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+15)$	0	0	0	2+4+4	6+16+12	6+16+12	2+4+4	0	0	0
$S_{10}^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, e+15)$	0	0	0	33984	115776	115776	33984	0	0	0

Durch die Kombination von Proposition 4.2.2 und Differenzenbildung sind jedoch nicht alle Zahlen $m_o(n, e, k)$ berechenbar. Die im ersten Teil des Beweises von Lemma 4.1.9 angegebene Abbildung liefert zwar einen Zusammenhang zu den entsprechenden Koeffizienten über der \mathcal{S}_{n-1} , ist jedoch nicht eindeutig. Es ist daher nicht ohne weiteres möglich, diese Abhängigkeit formal zu beschreiben. Da die Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$ aber (in Abhängigkeit von n) sehr klein sind, ist die folgende Vorschrift für den Koeffizienten der gemeinsamen Verteilung der Statistik **exc** und ihrem gewichteten Partner **dexc** durchaus praktikabel.

Satz 4.2.4 Für alle $n \in \mathbb{N}$, $e \in \{0, \dots, n-1\}$ und $k \in \{e, \dots, e(n-e)\}$ gilt

$$S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, k) = \sum_{o \in \mathcal{O}_n^{(k-e)}} o \cdot m_o(n, e, k).$$

Aufgrund der umfangreichen Rekursionen gewährt uns die Formel für $S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, k)$ nur sehr wenige Einblicke in das Verhalten der Verteilungsfunktion. Wir sind nun aber in der Lage, diesen Koeffizienten sehr viel schneller zu berechnen als auf der Grundlage seiner kombinatorischen Definition.

Eine mögliche Alternative stellt die Betrachtung der erzeugenden Funktion

$$f_n(x, q) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} x^{\text{exc}(\pi)} q^{\text{dex}(\pi)}$$

dar. Clarke et al. bewiesen in [8, Th. 10], daß die erzeugende Funktion von $f_n(x, q)$ wie folgt als Kettenbruch dargestellt werden kann:

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x, q) t^n = \frac{1}{1 - b_0 t - \frac{a_1 t^2}{1 - b_1 t - \frac{a_2 t^2}{\ddots \frac{a_{n+1} t^2}{1 - b_n t - \ddots}}}}$$

mit $b_n := (x + 1)q^n$ und $a_n := xq^{2n-1}$.

Mit $S_n^{(\text{exc}, \text{dex})}(e, k)$ ist natürlich auch die Verteilung der Statistik **dexc** auf der symmetrischen Gruppe gegeben. (Man summiere über die Anzahl der Aufstiege.) Wegen der Gleichverteilungsaussagen des Abschnitts 2.2 sind zudem die Verteilungskoeffizienten von **ddes** und **(des, ddes)** bestimmt.

Kapitel 5

Abschließende Bemerkungen

In diesem letzten Kapitel stellen wir einige Probleme vor, die als Fortsetzung der vorangegangenen Betrachtungen interpretiert werden können. Es werden Ansätze für weitere – unserer Meinung nach durchaus lohnenswerte – Untersuchungen angegeben.

Erweiterung auf Wörter

Die obligate Frage, die sich nach dem Studium einer Permutationsstatistik stellt, ist die nach der Verallgemeinerung für Klassen von Wörtern.

Für ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ über einem Alphabet \mathcal{A} sei $R(w)$ die *Klasse der Umordnungen von w* , d.h. die Menge aller Wörter, die durch Permutation von a_1, \dots, a_n entstehen. (Bereits MacMahon formulierte seine Gleichverteilungsgesetze auf diesen Klassen.) Sind die Buchstaben paarweise verschieden, so ist w eine Permutation und $R(w)$ die symmetrische Gruppe auf $\{a_1, \dots, a_n\}$. Unter allen Umordnungen sei $\bar{w} = b_1 \cdots b_n \in R(w)$ das Wort, das die Bedingung $b_i \leq b_{i+1}$ für alle $i \in [n-1]$ erfüllt.

In Analogie zu den Permutationen heißt eine Stelle $i \in [n-1]$ *Abstieg von w* , falls $a_i > a_{i+1}$ und *Aufstieg von w* , falls $a_i > b_i$ gilt. Die Menge der Abstiege bezeichnen wir mit $D(w)$, die der Aufstiege mit $E(w)$.

Beispiel 5.1.1 Das zu $w = 3\ 2\ 5\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 1\ 5$ gehörende Biwort $\binom{\bar{w}}{w}$ ist von der Form

$$\binom{\bar{w}}{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Folglich hat w die Abstiege $D(w) = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ und die Aufstiege $E(w) = \{1, 3, 5, 6\}$.

In [8] wurden alle betrachteten Teilstatistiken, unter anderem auch die Summen der positiven Differenzen, bereits für Wörter definiert. Dazu sind die folgenden Größen notwendig.

Für $w = a_1 \cdots a_n$ sei $h_w(a_i) := |\{j \in [n] : a_j < a_i\}| + 1$ die *Höhe von a_i* . Desweiteren bezeichne

$l_w(a_i)$ die Anzahl der Buchstaben links von a_i , die mit a_i übereinstimmen. Der Wert des i -ten Buchstabens in w wird nun als

$$v_i(w) := h_w(a_i) + l_w(a_i)$$

definiert. Ist w eine Permutation, so gilt $v_i(w) = h_w(a_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$. Ersetzen wir jeden Buchstaben a_i durch seinen Wert $v_i(w)$, so erhalten wir eine Permutation, die dieselben Aufstiege, Abstiege und Inversionen besitzt wie w .

Das Analogon zu **ddes** auf den Wörtern ist somit

$$\mathbf{ddes}(w) := \sum_{i \in \mathbf{D}(w)} (h_w(a_i) - v_{i+1}(w)).$$

Aufgrund der Konstruktion ist die Stelle i genau dann ein Abstieg in w , wenn $h_w(a_i) > v_{i+1}(w)$ gilt. Die Statistik **dexc** wird als

$$\mathbf{dexc}(w) := \sum_{i \in \mathbf{E}(w)} (h_w(a_i) - i)$$

definiert. Auch diese Differenzen sind ausschließlich positiv; die Position i gehört genau dann zu den Aufstiegen von w , wenn $h_w(a_i) > i$ ist.

Beispiel 5.1.2 Für das Wort $w = 3\ 2\ 5\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 1\ 5$ erhalten wir die Folgen

$$h_w = (4, 2, 8, 2, 6, 8, 6, 4, 1, 8), \quad l_w = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 2), \quad v(w) = (4, 2, 8, 3, 6, 9, 7, 5, 1, 10).$$

Es gilt also $\mathbf{ddes}(w) = (4 - 2) + (8 - 3) + (8 - 7) + (6 - 5) + (4 - 1) = 12$ und $\mathbf{dexc}(w) = (4 - 1) + (8 - 3) + (6 - 5) + (8 - 6) = 11$.

Clarke et al. zeigten, daß sich der in Abschnitt 2.3 beschriebene Zusammenhang zwischen der Anzahl der Inversionen und **dexc** (der zur Definition der Menge \mathcal{M}_n führte) verallgemeinern läßt. Sei dazu

$$\mathbf{inv}(w) := |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i > a_j\}|$$

die Anzahl der *Inversionen* und

$$\mathbf{winv}(w) := |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i \geq a_j\}|$$

die Anzahl der *schwachen Inversionen von w* . Dann erfüllt jedes Wort w die Bedingung

$$\mathbf{inv}(w) = \mathbf{dexc}(w) + \mathbf{winv}(w_{\mathbf{E}}) + \mathbf{inv}(w_{\mathbf{NE}}),$$

wobei $w_{\mathbf{E}}$ die Einschränkung von w auf die Aufstiege $\mathbf{E}(w)$ und $w_{\mathbf{NE}}$ die Einschränkung auf die Fallstellen von w bezeichne (vergleiche [8, Th. 2]).

Beispiel 5.1.3 Für das Wort $w = 3\ 2\ 5\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 1\ 5$ sind $w_E = 3\ 5\ 4\ 5$ und $w_{NE} = 2\ 2\ 4\ 3\ 1\ 5$ die Einschränkungen auf die Menge $E(w)$ bzw. ihr $[n]$ -Komplement, und es gilt

$$\text{inv}(w) = \text{dexc}(w) + \text{winv}(w_E) + \text{inv}(w_{NE}) = 11 + 2 + 5 = 18.$$

In Analogie zu den Permutationen sollten die Wörter untersucht werden, für die die Statistiken inv und dexc denselben Wert annehmen. Darüber hinaus sind natürlich die Eigenschaften der Verteilungen der gewichteten Statistiken ddeg und dexc auf den Umordnungsclassen von Interesse.

Verbotene Teilsequenzen in Permutationen

Eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ heißt τ -frei, wenn π keine Teilfolge enthält, die die durch $\tau \in \mathcal{S}_k$ beschriebenen Relationen erfüllt. Die Menge dieser Permutationen wird oftmals mit $\mathcal{S}_n(\tau)$ bezeichnet. Für $R = \{\tau_1, \dots, \tau_s\} \subseteq \mathcal{S}_k$ sei allgemeiner $\mathcal{S}_n(R) := \mathcal{S}_n(\tau_1) \cap \dots \cap \mathcal{S}_n(\tau_s)$ die Menge der Permutationen von $[n]$, die jedes der Muster τ_1, \dots, τ_s vermeiden. Der meistuntersuchte Fall untersagt die Existenz einer speziellen Folge der Länge 3 (siehe etwa [24] und [35]).

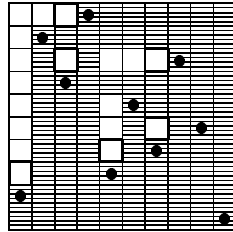
Für jedes $\tau \in \mathcal{S}_3$ gilt $|\mathcal{S}_n(\tau)| = C_n$; die Mengen der 123-, 132-, 213-, 231-, 312- und 321-freien Permutationen korrespondieren also paarweise. Aufgrund einfacher Symmetrieargumente genügt es, jeweils ein Muster der beiden Klassen $\{123, 321\}$ und $\{132, 213, 231, 312\}$ zu untersuchen. Bijektionen zwischen den 123- und den 132-freien Permutationen wurden u.a. von [35, Prop. 19] und [42, Th. 2.8] angegeben.

Wir haben im Kapitel 3 die Korrespondenz der bi-ansteigenden, also 321-freien, Permutationen zu verschiedenen kombinatorischen Objekten nachgewiesen. Eine davon – die zu den in ihrer Gestalt beschränkten Young-Diagrammen – liefert nun unmittelbar den Zusammenhang zu den 132-freien Permutationen. (Auch dies ist ein Grund, die Diagrammabbildung 3.2.3 offensichtlicheren Korrespondenzen, wie etwa der im Abschnitt 3.5 beschriebenen Polyominotransformation, vorzuziehen.)

Wir betrachten dazu das *Diagramm einer Permutation* $\pi \in \mathcal{S}_n$. Das zu $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n \in \mathcal{S}_n$ gehörende Diagramm $D(\pi)$ erhält man durch eine einfache Operation: Man stelle π als $n \times n$ -Array mit einem Punkt in jeder Zelle (i, π_i) dar und schattiere alle Kästchen rechts und unterhalb dieser Punkte sowie (i, π_i) selbst. (Offensichtlich läßt sich jede Permutation eindeutig aus ihrem Diagramm bestimmen.)

Beispiel 5.1.4 Das Diagramm von $\pi = 4\ 2\ 8\ 3\ 6\ 9\ 7\ 5\ 1\ 10 \in \mathcal{S}_{10}$ ist

(Abb. 5.26)



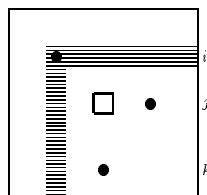
Die weißen Kästchen bilden die *Komponenten* (im Sinne von Zusammenhangskomponenten) von $D(\pi)$. Aufgrund der Konstruktion ist jede dieser Komponenten das Young-Diagramm einer Partition, ihre Ecken definieren die sogenannte „essential set“ $\mathcal{E}(\pi)$. (Fulton führte in [23] diese Menge, versehen mit einer Rangfunktion, als Werkzeug zur algebraischen Betrachtung der Schubert-Polynome ein. In [19] untersuchten Eriksson und Linusson $\mathcal{E}(\pi)$ für eine 321-freie Permutation.) Die Anzahl der Zeilen von $D(\pi)$, die eine solche Ecke enthalten, entspricht gerade $\text{des}(\pi)$.

Es läßt sich nun zeigen, daß die 132-freien Permutationen durch ihre Diagramme charakterisiert werden.

Satz 5.1.5 Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine von der Identität verschiedene Permutation. Dann ist π genau dann 132-frei, wenn das Diagramm $D(\pi)$ aus einer einzigen Komponente besteht, die die Zelle $(1,1)$ enthält.

Beweis. Existieren drei Indizes $i < j < k$ mit $\pi_i < \pi_k < \pi_j$, dann ist die Zelle (j, π_k) offensichtlich weiß

(Abb. 5.27)

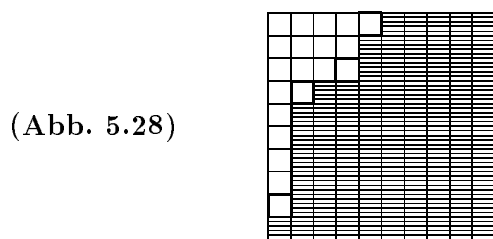


und hängt nicht mit der Zelle $(1,1)$ zusammen. Ist $\pi \neq \text{id}$ hingegen 132-frei, so bilden die mit $(1,1)$ verbundenen nicht schattierten Kästchen die einzige Komponente von $D(\pi)$. (Die Zelle $(1,1)$ ist notwendig in der Komponente enthalten, da andernfalls $\pi_1 = 1$ und somit $\pi_i = i$ für $i \in [n]$ folgt.) \square

Konstruktionsbedingt stellt diese Komponente ein Young-Diagramm dar, das sich vollständig in $(n-1, n-2, \dots, 1)$ einbetten läßt. Der Satz 3.2.3 liefert nun eine Bijektion Φ zwischen den 321- und den 132-freien Permutationen von $[n]$. Die Anzahl der Ecken des Young-Diagramms entspricht gerade der Anzahl der Aufstiege von $\pi \in \mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n(321)$. Folglich gilt sogar $\text{des}(\Phi(\pi)) = \text{exc}(\pi)$ für alle $\pi \in \mathcal{M}_n$.

Ohne die in 3.2.3 verwendete Umschreibung von π durch das Kompositionenpaar (α, β) liest sich die Abbildung $\Phi : \mathcal{S}_n(321) \rightarrow \mathcal{S}_n(132)$ wie folgt: Seien $i_1 < \dots < i_e$ die Aufstiege von $\pi \in \mathcal{S}_n(321)$. Die Komponente des Diagramms von $\Phi(\pi)$ wird durch ihre Ecken $(i_k, n+1-\pi_{i_k})$ mit $k = 1, \dots, e$ bestimmt. Die Rekonstruktion von $\Phi(\pi)$ aus dem Diagramm ist trivial. (Man setze zeilenweise, in der ersten Zeile beginnend, einen Punkt in die am weitesten links befindliche Spalte, die in dieser Zeile schattiert ist und noch keinen Punkt enthält.)

Beispiel 5.1.6 Die 321-freie Permutation $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$ korrespondiert zu dem Diagramm

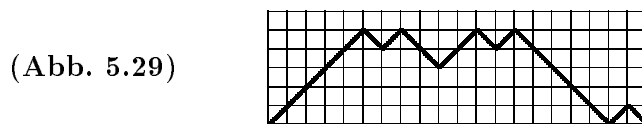


also zu $\Phi(\pi) = 6\ 5\ 7\ 3\ 2\ 4\ 8\ 9\ 10\ 1 \in \mathcal{S}_{10}(132)$. Insbesondere gilt $\text{exc}(\pi) = \text{des}(\Phi(\pi)) = 4$.

Somit lassen sich die Resultate des Kapitels 3 (insbesondere die Bijektionen zu den Polyominos und den Motzkin-Pfaden) auf die 132-freien Permutationen übertragen.

Die Menge $\mathcal{S}_n(132)$ ist auch der Gegenstand einiger erst kürzlich erschienener Arbeiten ([25], [7], [33]). Unter anderem gibt Krattenthaler eine Bijektion zwischen den 132-freien Permutationen und den Dyck-Pfaden an. Es läßt sich zeigen, daß diese durch Φ exakt auf die in der Bemerkung 3.5.4b) erwähnte Konstruktion von [6] übertragen wird.

Beispiel 5.1.7 Sei $\pi = 6\ 1\ 7\ 9\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 8 \in \mathcal{M}_{10}$ und $\sigma = \Phi(\pi)$. Dann korrespondiert π nach Billey-Jockusch-Stanley und σ nach Krattenthaler zum Dyck-Pfad



Derartige Untersuchungen lassen sich möglicherweise auch auf mehrfach beschränkte Permutationen ausweiten. So kann auch der Durchschnitt $\mathcal{S}_n(\{132, 321\})$ anhand der zugehörigen Diagramme beschrieben werden.

Korollar 5.1.8 Sei $\pi \in \mathcal{S}_n(132)$ von der Identität verschieden. Die Permutation π ist genau dann auch 321-frei, wenn die Komponente von $D(\pi)$ genau eine Ecke besitzt. Insbesondere gilt also $\text{des}(\pi) = 1$.

Die Anzahl der 321- und 132-freien Permutationen von $[n]$ beträgt nach [35, Prop. 11] genau $\binom{n}{2} + 1$. (Dies folgt nach unserem Ansatz sofort aus Korollar 3.2.6: $|\mathcal{S}_n(\{132, 321\})| = p_{n1} + p_{n2}$.)

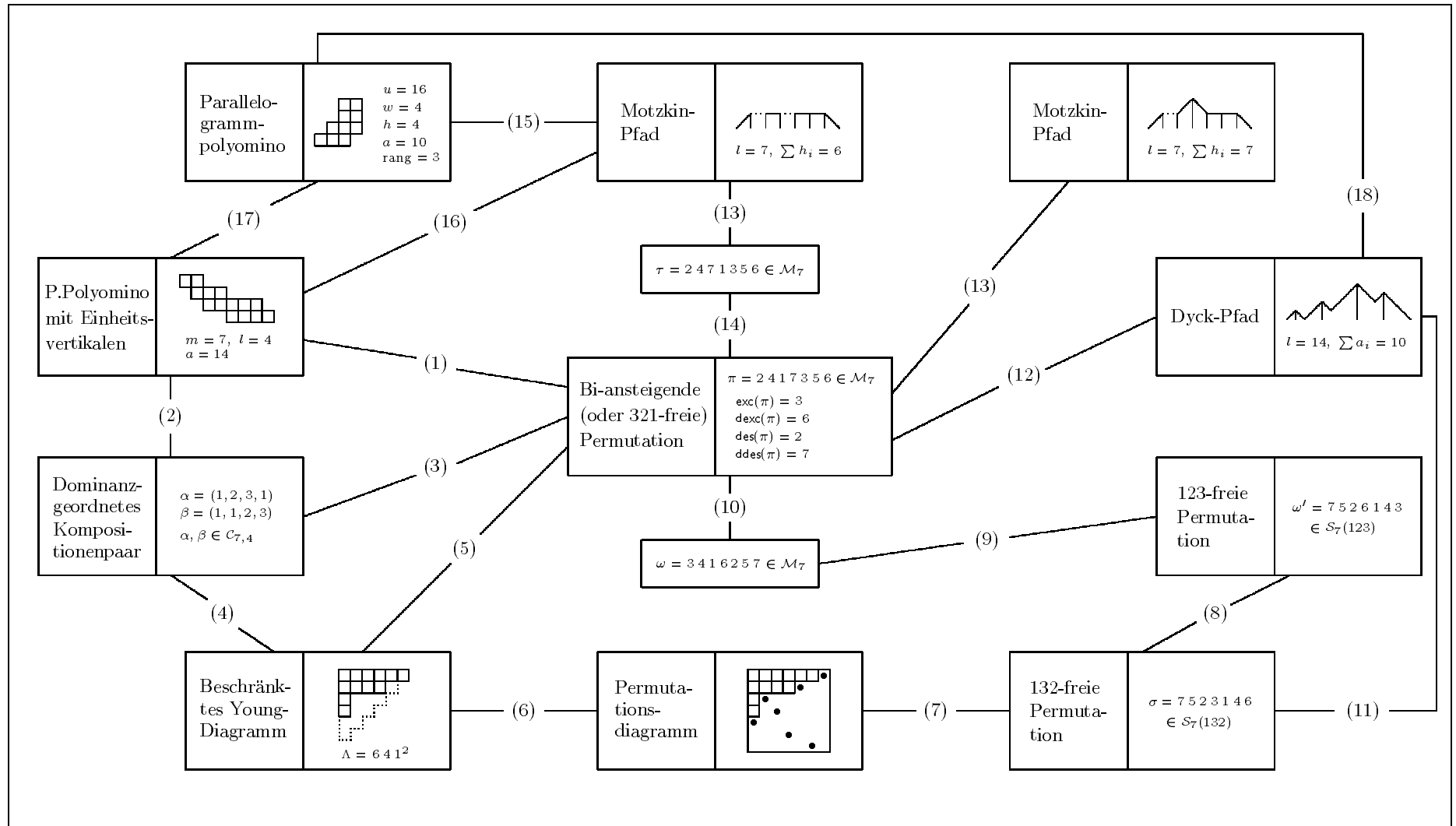
Umgekehrt ist es ebenso interessant zu untersuchen, welche Erkenntnisse aus den für die 132-freien Permutationen formulierten Resultaten durch die Übersetzung mittels Φ für die Menge \mathcal{M}_n gewonnen werden können.

Bemerkung 5.1.9 Auch die von Simion und Schmidt in [35, Prop. 19] konstruierte Bijektion zwischen den 123- und den 132-freien Permutationen (historisch der erste kombinatorische Beweis für $|\mathcal{S}_n(123)| = |\mathcal{S}_n(132)|$) findet sich in diesem Zusammenhang wieder. Bildet man einerseits die bi-ansteigende Permutation π auf $\Phi(\pi) \in \mathcal{S}_n(132)$ ab und andererseits das Bild $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ von π bezüglich der in 2.3.17 (zum Nachweis der Symmetrie von $(\text{exc}, \text{dexc})$) betrachteten Involution auf seine Reversion $\sigma_n \cdots \sigma_1 \in \mathcal{S}_n(123)$, so sind $\Phi(\pi)$ und $\sigma_n \cdots \sigma_1$ durch die Simion-Schmidt-Korrespondenz verbunden.

Die Diagramme bieten sich zudem als Ausgangspunkte für das Studium von (verbotenen) Mustern in Arrays an.

Weitere Korrespondenzen

Die nachfolgende Übersicht stellt die in der Arbeit untersuchten Zusammenhänge zwischen den Permutationen, den Polyominos und den Gitterpfaden schematisch dar. Dieses Bild ist nur ein kleiner Ausschnitt aus dem umfassenden Geflecht von kombinatorischen Objekten, das durch die Catalan-Zahlen geschaffen wird. Hier eröffnen sich viele Möglichkeiten, die Untersuchungen auf andere Strukturen (beispielsweise Bäume) auszudehnen und die Wechselwirkungen der Objekte zu studieren.



(1) 3.2.8

(2) 3.1.3

(3) 3.2.10

(4) 3.2.3

(5) Anmerkungen nach 5.1.5

(6) Anmerkungen nach 5.1.5

(7) 5.1.5

(8) Simion-Schmidt, [35, Prop. 19]

(9) Reversion

(10) 2.3.17 (Symmetrie)

(11) Krattenthaler [25, Abschn. 2]

(12) Billey-Jockusch-Stanley [6, S. 361]

(13) 3.3.1

(14) 3.4.1 (Gleichverteilung)

(15) 3.5.5

(16) 3.4.6a)

(17) Anmerkungen nach 3.5.2

(18) Delest-Viennot [13, Abschn. 4]

Anhang A

Verteilungen diverser Permutationsstatistiken

Tabelle 1 Verteilung von dexc (bzw. ddes) auf \mathcal{S}_n für $n = 1, \dots, 10$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			3	7	12	18	25	33	42	52
3				9	24	46	76	115	164	224
4				4	35	93	187	327	524	790
5					24	137	366	765	1400	2350
6					20	148	591	1523	3226	6072
7						136	744	2553	6436	13768
8						100	884	3696	11323	27821
9						36	832	4852	17640	50461
10							716	5708	25472	83420
11							360	5892	33280	127840
12							252	5452	40520	182256
13								4212	44240	242272
14								2844	45512	301648
15								1764	40608	350864
16								576	35496	382576
17									25632	389232
18									18108	373536
19									8064	332640
20									5184	273060
21										208548
22										136512
23										81792
24										46656
25										14400

Tabelle 8 Anzahl $q_{m,l,a}$ für ausgewählte Werte m, l, a

$l = 3$:

$m \setminus a$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
5	2														
6		6	2												
7			14	6	2										
8				26	14	6	2								
9					44	26	14	6	2						
10						68	44	26	14	6	2				
11							100	68	44	26	14	6	2		
12								140	100	68	44	26	14	6	2

$l = 4$:

$m \setminus a$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
6	6	2													
7		28	15	4	2										
8			84	54	26	12	4	2							
9				200	145	86	49	22	12	4	2				
10					416	322	218	140	78	44	22	12	4	2	
11						780	636	466	327	206	129	72	44	22	12
12							1360	1148	892	664	458	308	192	122	72
13								2236	1940	1570	1226	898	643	432	291

$l = 5$:

$m \setminus a$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
7	14	6	2											
8		84	54	26	12	4	2							
9			320	238	151	86	46	24	10	4	2			
10				944	772	558	374	231	142	78	44	22	10	4
11					2382	2052	1618	1192	825	552	353	222	134	76
12						5344	4780	3979	3138	2340	1690	1169	802	531
13							10988	10072	8723	7206	5689	4342	3201	2320

$$a = a^*(m, l) := (m - l)(l - 2) + l + 3:$$

$l \setminus m$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	2	4	12	22	44	72	122	184	282	402	576	786	1074	1416	1866
5		2	4	10	22	42	74	130	210	332	510	760	1104	1582	2212
6			2	4	10	20	42	74	132	218	360	562	870	1300	1928
7				2	4	10	20	40	74	132	222	368	588	924	1412
8					2	4	10	20	40	72	132	222	372	598	950
9						2	4	10	20	40	72	130	222	372	602
10							2	4	10	20	40	72	130	220	372

Tabelle 9 Elemente der Mengen $\mathcal{O}_n^{(t)}$ für $n = 3, \dots, 10$

$t \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1^3	1^4	1^5	1^6	1^7	1^8	1^9	1^{10}
1	21^2	21^3	21^4	21^5	21^6	21^7	21^8	21^9
2		$2^2 1^2$	$2^2 1^3$	$2^2 1^4$	$2^2 1^5$	$2^2 1^6$	$2^2 1^7$	$2^2 1^8$
3			$2^3 1^2$	$2^3 1^3$	$2^3 1^4$	$2^3 1^5$	$2^3 1^6$	$2^3 1^7$
4			$32^2 1^2$	$32^2 1^3$ $2^4 1^2$	$32^2 1^4$ $2^4 1^3$	$32^2 1^5$ $2^4 1^4$	$32^2 1^6$ $2^4 1^5$	$32^2 1^7$ $2^4 1^6$
5				$32^3 1^2$	$32^3 1^3$ $2^5 1^2$	$32^3 1^4$ $2^5 1^3$	$32^3 1^5$ $2^5 1^4$	$32^3 1^6$ $2^5 1^5$
6				$3^2 2^2 1^2$	$3^2 2^2 1^3$ $32^4 1^2$	$3^2 2^2 1^4$ $32^4 1^3$ $2^6 1^2$	$3^2 2^2 1^5$ $32^4 1^4$ $2^6 1^3$	$3^2 2^2 1^6$ $32^4 1^5$ $2^6 1^4$
7					$3^2 2^3 1^2$	$3^2 2^3 1^3$ $32^5 1^2$	$3^2 2^3 1^4$ $32^5 1^3$ $2^7 1^2$	$3^2 2^3 1^5$ $32^5 1^4$ $2^7 1^3$
8					$3^3 2^2 1^2$	$3^3 2^2 1^3$ $3^2 2^4 1^2$	$3^3 2^2 1^4$ $3^2 2^4 1^3$ $32^6 1^2$	$3^3 2^2 1^5$ $3^2 2^4 1^4$ $32^6 1^3$ $2^8 1^2$
9					$43^2 2^2 1^2$	$43^2 2^2 1^3$ $3^3 2^3 1^2$	$43^2 2^2 1^4$ $3^3 2^3 1^3$ $3^2 2^5 1^2$	$43^2 2^2 1^5$ $3^3 2^3 1^4$ $3^2 2^5 1^3$ $32^7 1^2$
10						$43^2 2^3 1^2$ $3^4 2^2 1^2$	$43^2 2^3 1^3$ $3^4 2^2 1^3$ $3^3 2^4 1^2$	$43^2 2^3 1^4$ $3^4 2^2 1^4$ $3^3 2^4 1^3$ $3^2 2^6 1^2$
11						$43^3 2^2 1^2$	$43^3 2^2 1^3$ $43^2 2^4 1^2$ $3^4 2^3 1^2$	$43^3 2^2 1^4$ $43^2 2^4 1^3$ $3^4 2^3 1^3$ $3^3 2^5 1^2$
12						$4^2 3^2 2^2 1^2$	$4^2 3^2 2^2 1^3$ $43^3 2^3 1^2$ $3^5 2^2 1^2$	$4^2 3^2 2^2 1^4$ $43^3 2^3 1^3$ $3^5 2^2 1^3$ $43^2 2^5 1^2$ $3^4 2^4 1^2$
13							$4^2 3^2 2^3 1^2$ $43^4 2^2 1^2$	$4^2 3^2 2^3 1^3$ $43^4 2^2 1^3$ $43^3 2^4 1^2$ $3^5 2^3 1^2$
14							$4^2 3^3 2^2 1^2$	$4^2 3^3 2^2 1^3$ $4^2 3^2 2^4 1^2$ $43^4 2^3 1^2$ $3^6 2^2 1^2$
15							$4^3 3^2 2^2 1^2$	$4^3 3^2 2^2 1^3$ $4^2 3^3 2^3 1^2$ $43^5 2^2 1^2$
16							$54^2 3^2 2^2 1^2$	$54^2 3^2 2^2 1^3$ $4^3 3^2 2^3 1^2$ $4^2 3^4 2^2 1^2$

Tabelle 10 Gemeinsame Verteilung von $(exc, dexc)$ auf $\mathcal{S}_n \mid \mathcal{M}_n$ für $n = 5, 6, 7$

$n = 5$:

$exc \backslash dexc$	0	1	2	3	4	5	6
0	1 1						
1		4 4	6 3	8 2	8 1		
2			6 6	12 6	20 5	16 2	12 1
3				4 4	6 3	8 2	8 1
4					1 1		

$n = 6$:

$exc \backslash dexc$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1 1									
1		5 5	8 4	12 3	16 2	16 1				
2			10 10	24 12	48 12	64 8	72 5	48 2	36 1	
3				10 10	24 12	48 12	64 8	72 5	48 2	36 1
4					5 5	8 4	12 3	16 2	16 1	
5						1 1				

$n = 7$:

$exc \backslash dexc$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1 1									
1		6 6	10 5	16 4	24 3	32 2	32 1			
2			15 15	40 20	88 22	144 18	212 14	224 8	216 5	144 2
3				20 20	60 30	144 36	248 31	360 24	432 16	432 10
4					15 15	40 20	88 22	144 18	212 14	224 8
5						6 6	10 5	16 4	24 3	32 2
6							1 1			

$exc \backslash dexc$	10	11	12
0			
1			
2	108 1		
3	360 5	216 2	144 1
4	216 5	144 2	108 1
5	32 1		
6			

Anhang B

Polyominos und Gitterpfade

Abbildung 1 Gitterpfade von $(0, 4)$ nach $(4, 0)$ über der Schrittmenge $\{[1, 0], [0, -1]\}$, die die Gerade $x + y = 4$ nicht überschreiten

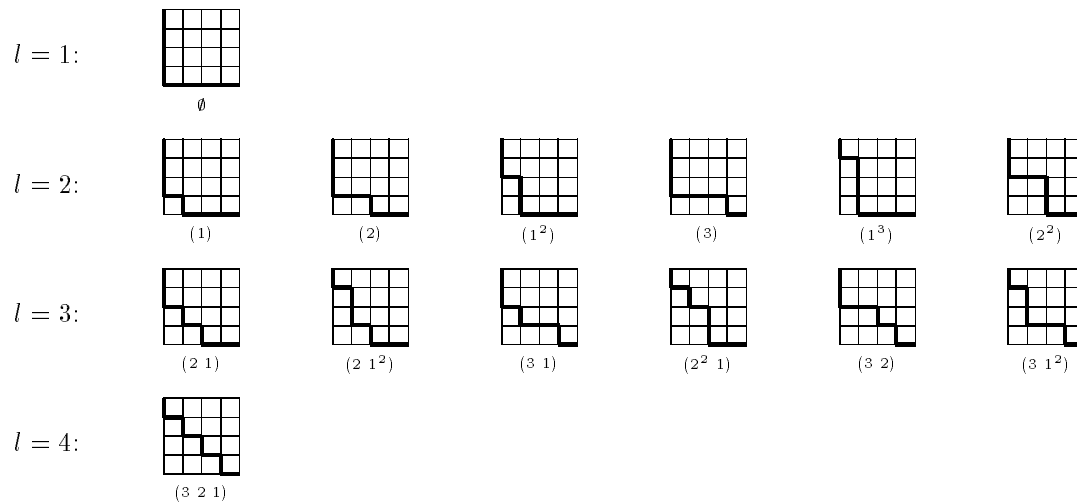


Abbildung 2 Motzkin-Pfade der Länge 4 über der Schrittmenge $\{[1, 0], [1, 1], [1, -1]\}$



Abbildung 3 Korrespondenz zwischen den bi-ansteigenden Permutationen $\pi \in \mathcal{M}_4$, den Polyominos, den Young-Diagrammen beschränkter Gestalt und den Motzkin-Pfaden

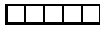

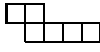

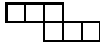

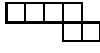

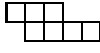

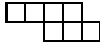

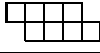

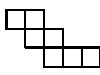

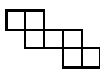

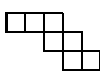

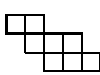

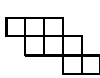

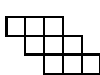

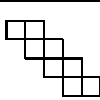

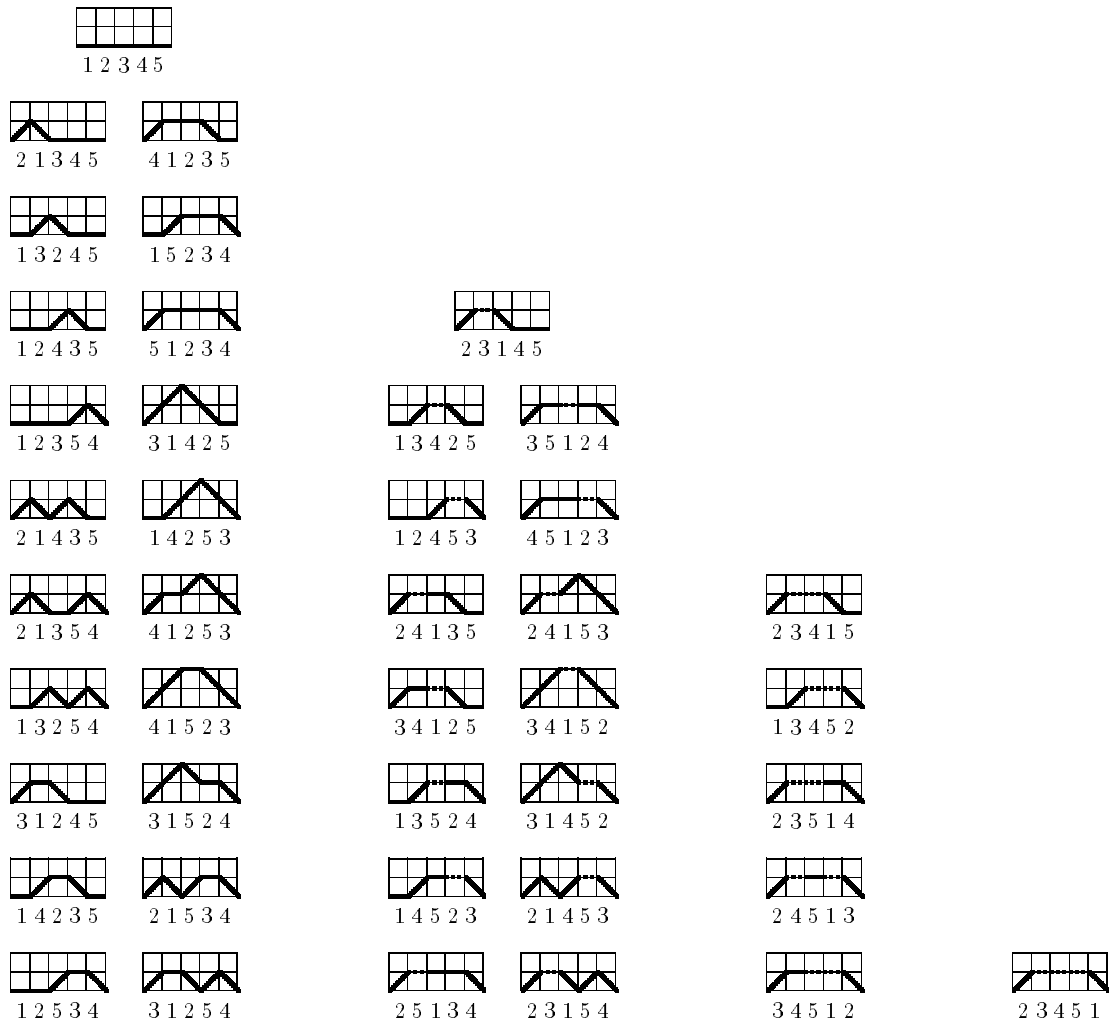
π	$\text{exc}(\pi)$	$\text{des}(\pi)$	(α, β) nach 3.2.8	Λ nach 3.2.3	c nach 3.3.1
1 2 3 4	0	0		\emptyset	
2 1 3 4	1	1		(3)	
1 3 2 4	1	1		(2 ²)	
1 2 4 3	1	1		(1 ³)	
3 1 2 4	1	1		(2)	
1 4 2 3	1	1		(1 ²)	
4 1 2 3	1	1		(1)	
2 3 1 4	2	1		(3 2)	
2 1 4 3	2	2		(3 1 ²)	
1 3 4 2	2	1		(2 ² 1)	
2 4 1 3	2	1		(3 1)	
3 1 4 2	2	2		(2 1 ²)	
3 4 1 2	2	1		(2 1)	
2 3 4 1	3	1		(3 2 1)	

Abbildung 4 Von der Motzkin-Zahl zur Catalan-Zahl (Übergang für $n = 5$)



$\lfloor b_5^{(1)} = M_5 = 21 \rfloor$

$\lfloor \text{-----} b_5^{(2)} = 36 \text{-----} \rfloor$

$\lfloor \text{-----} b_5^{(3)} = 41 \text{-----} \rfloor$

$\lfloor \text{-----} b_5^{(4)} = C_5 = 42 \text{-----} \rfloor$

Abbildung 5 Hasse-Diagramme der Verbände $\mathcal{C}_{6,l}$ für $l = 2, \dots, 5$

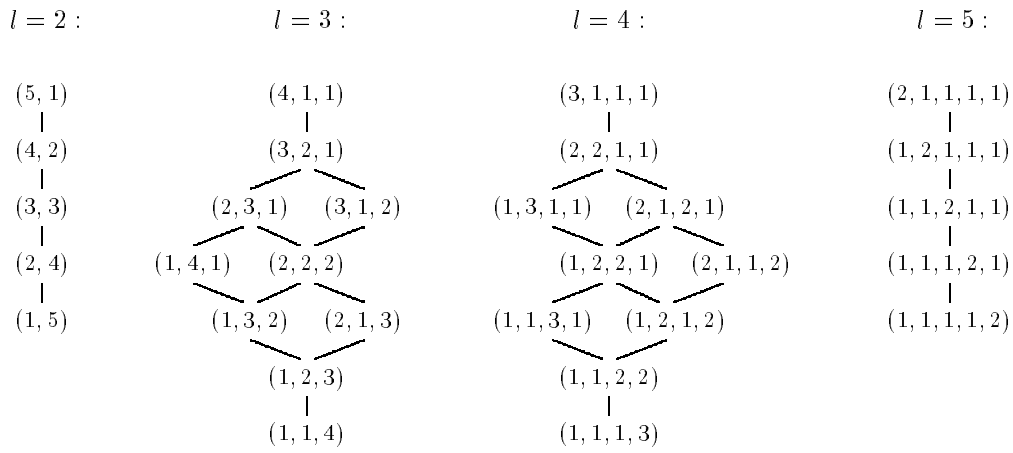


Abbildung 6 Schematische Darstellung des in 3.4.10c) beschriebenen Modells für $m = 6, l = 3$

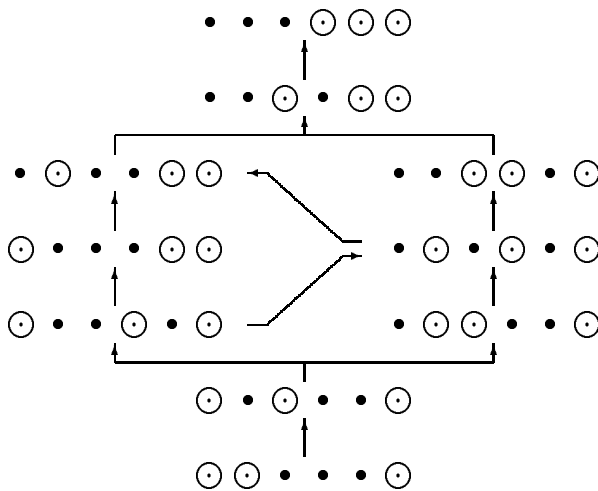






























Abbildung 7 Korrespondenz zwischen den Parallelogrammpolyomino vom Umfang $2n + 2$ und den Motzkin-Pfaden der Länge n für $n = 4$

$((4), (4))$		
$((1, 2), (0, 3))$		
$((2, 1), (1, 2))$		
$((3, 0), (2, 1))$		
$((2, 1), (0, 3))$		
$((3, 0), (1, 2))$		
$((3, 0), (0, 3))$		
$((1, 1, 0), (0, 1, 1))$		
$((1, 0, 1), (0, 0, 2))$		
$((2, 0, 0), (1, 0, 1))$		
$((1, 1, 0), (0, 0, 2))$		
$((2, 0, 0), (0, 1, 1))$		
$((2, 0, 0), (0, 0, 2))$		
$((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$		

Literaturverzeichnis

- [1] G. E. ANDREWS, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, 1984.
- [2] E. BABSON, E. STEINGRÍMSSON, *Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics*, Sémin. Lothar. Comb. **44** (2000), B44b (elektronisch).
- [3] E. BARCUCCI, A. DEL LUNGO, E. PERGOLA, R. PINZANI, *A construction for enumerating k -coloured Motzkin paths*, Lecture Notes in Comp. Sci. **959** (1995), 254-263.
- [4] E. BARCUCCI, A. DEL LUNGO, E. PERGOLA, R. PINZANI, *From Motzkin to Catalan permutations*, Discrete Math. **217** (2000), 33-49.
- [5] P. BIANE, *Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions, et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine*, Eur. J. Comb. **14** (1993), 277-284.
- [6] S. C. BILLEY, W. JOCKUSCH, R. P. STANLEY, *Some Combinatorial Properties of Schubert Polynomials*, J. Alg. Comb. **2** (1993), 345-374.
- [7] P. BRÄNDÉN, A. CLAESSON, E. STEINGRÍMSSON, *Catalan continued fractions and increasing subsequences in permutations*, Preprint, 2002.
- [8] R. J. CLARKE, E. STEINGRÍMSSON, J. ZENG, *New Euler-Mahonian statistics on permutations and words*, Adv. Appl. Math. **18** (1997), 237-270.
- [9] J. P. COSTAS, *Medium constraints on sonar design and performance*, EASCON Convention Record (1975), 68A-68L.
- [10] M. P. DELEST, *Polyominoes and animals: some recent results*, J. Math. Chem. **8** (1991), 3-18.
- [11] M. P. DELEST, J. M. FEDOU, *Enumeration of skew Ferrers diagrams*, Discrete Math. **112** (1993), 65-79.
- [12] M. P. DELEST, D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, B. VAUQUELIN, *Enumeration of parallelogram polyominoes with given bond and site perimeter*, Graphs and Comb. **3** (1987), 325-339.

- [13] M. P. DELEST, X. G. VIENNOT, *Algebraic languages and polyominoes enumeration*, Theoretical Comp. Sci. **34** (1984), 169-206.
- [14] M. DENERT, *The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields*, Math. Comp. **54** (1990), 449-465.
- [15] E. DEUTSCH, Amer. Math. Monthly **107**, no. 7 (2000), 652.
- [16] R. DONAGHEY, *Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations*, J. Comb. Theory Ser. B **22** (1977), 114-121.
- [17] R. DONAGHEY, L. W. SHAPIRO, *Motzkin numbers*, J. Comb. Theory Ser. A **23** (1977), 291-301.
- [18] R. EHRENBORG, E. STEINGRÍMSSON, *The Excedance Set of a Permutation*, Adv. Appl. Math. **24** (2000), 284-299.
- [19] K. ERIKSSON, S. LINUSSON, *The size of Fulton's essential set*, Electron. J. Comb. **2** (1995), Research Paper 6 (elektronisch).
- [20] D. FOATA, *Rearrangements of Words*, in M. Lothaire, Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 1983.
- [21] D. FOATA, D. ZEILBERGER, *Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian*, Studies Appl. Math. **83** (1990), 31-59.
- [22] J. FRANÇON, X. G. VIENNOT, *Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler, nombres de Genocchi*, Discrete Math. **28** (1979), 21-35.
- [23] W. FULTON, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas*, Duke Math. J. **65** (1992), 381-420.
- [24] D. E. KNUTH, *The Art of Computer Programming Volume 3, Sorting and Searching*, Addison-Wesley, 1973.
- [25] C. KRATTENTHALER, *Permutations with restricted patterns and Dyck paths*, Adv. Appl. Math. **27** (2001), 510-530.
- [26] I. G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press, 1995.
- [27] P. A. MACMAHON, *Combinatory Analysis Volumes I and II*, Cambridge University Press, 1915/16 (neu aufgelegt von Chelsea, 1984).

- [28] A. DE MÉDICIS, X. G. VIENNOT, *Moments des q -Polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger*, Adv. Appl. Math. **15** (1994), 262-304.
- [29] M. NAZAROV, V. TARASOV, *On irreducibility of tensor products of Yangian modules associated with skew Young diagrams*, Preprint, math. QA/0012039 (elektronisch), 2000.
- [30] J. NOONAN, D. ZEILBERGER, *The enumeration of permutations with a prescribed number of "forbidden" patterns*, Adv. Appl. Math. **17** (1996), 381-407.
- [31] G. PÓLYA, *On the number of certain lattice polygons*, J. Comb. Theory **6** (1969), 102-105.
- [32] A. RANDRIANARIVONY, *Correspondances entre les différents types de bijections entre le groupe symétrique et les chemins de Motzkin valués*, Sémin. Lothar. Comb. **35** (1995), B35h (elektronisch).
- [33] A. ROBERTSON, D. SARACINO, D. ZEILBERGER, *Refined restricted permutations*, Preprint, 2002.
- [34] O. RODRIGUEZ, *Note sur les inversions, ou dérangements produits dans les permutations*, J. de Math. **4** (1839), 236-240.
- [35] R. SIMION, F. W. SCHMIDT, *Restricted Permutations*, Europ. J. Comb. **6** (1985), 383-406.
- [36] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics Volume I*, Cambridge University Press, 1997.
- [37] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics Volume II*, Cambridge University Press, 1999.
- [38] R. P. STANLEY, *Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry*, Graph Theory Appl. East and West, Ann. New York Acad. Sci., vol. **576** (1989), 500-535.
- [39] R. P. STANLEY, *The Rank and Minimal Border Strip Decompositions of a Skew Partition*, Preprint, math. CO/0109092 (elektronisch), 2001.
- [40] R. P. STANLEY, *Catalan Addendum, Version of 20 March 2002*, verfügbar unter <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/>.
- [41] R. A. SULANKE, *Counting Lattice Paths by Narayana Polynomials*, Electron. J. Comb. **7** (2000), Research Paper 40 (elektronisch).
- [42] J. WEST, *Generating trees and the Catalan and Schröder numbers*, Discrete Math. **146** (1995), 247-262.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorgelegte Dissertation selbständig verfaßt, noch nicht als Dissertation, Diplom- oder ähnliche Prüfungsarbeit verwendet und die benutzten Hilfsmittel vollständig angegeben habe.

Magdeburg, den 22. April 2002

Astrid Reifegerste