

**Verteilungsapproximation durch konvexe  
Schranken**  
mit Anwendungen auf  
Summen lognormalverteilter Zufallsvariablen

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**doctor rerum naturalium**

**(Dr. rer. nat.)**

von

**Dipl.-Math. Karsten Brückner**

geboren am 14.02.1976 in Magdeburg

genehmigt durch die Fakultät für Mathematik der  
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Berthold Heiligers,  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Norbert Gaffke

eingereicht am: 05.12.2007

verteidigt am: 27.03.2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1 Risikomaße . . . . .	3
1.2 Gestutzte Erwartungswerte . . . . .	9
1.3 Konvexe Halbordnung von $W'$ -Verteilungen . . . . .	13
1.4 Komonotonie von $W'$ -Verteilungen . . . . .	18
1.5 Die Lognormalverteilung . . . . .	22
<b>2 Approximation einer Summenverteilung in der konvexen Halbordnung</b>	<b>27</b>
2.1 Konvexe Schranken . . . . .	28
2.2 Güte der Approximation, $\varrho$ -Abstand . . . . .	34
2.3 Konstruktion einer varianzgleichen Approximation. . . . .	35
2.4 Geometrische Schranken für den $\varrho$ -Abstand . . . . .	36
2.4.1 Obere Schranke(n) für den $\varrho$ -Abstand . . . . .	38
2.4.2 Untere und obere Schranken für gestutzte Erwartungswerte . . . . .	49
2.5 Alternative obere Schranke . . . . .	53
2.6 Vorteile des geometrischen Ansatzes . . . . .	56
<b>3 Schranken für Summen lognormalverteilter Zufallsvariablen</b>	<b>58</b>
3.1 Motivation und Modell . . . . .	58
3.2 Konvexe Schranken . . . . .	60
3.3 Formeln für die Kenngrößen der Schranken . . . . .	64
3.3.1 Komonotone obere Schranke $S^c$ . . . . .	64
3.3.2 Verbesserte obere Schranke $S^u$ . . . . .	64
3.3.3 Untere Schranke $S^l$ . . . . .	65
3.4 Wahl der bedingenden Zufallsvariable . . . . .	68
3.4.1 Approximative global-optimale Schranken . . . . .	68
3.4.2 Approximative lokal-optimale Schranken . . . . .	71
3.5 Alternative obere Schranke . . . . .	73
3.6 Anwendung: Auszahlung einer Asiatischen Option . . . . .	76

<b>4</b>	<b>Momentenbasierte Approximationen einer Summe von Lognormalverteilungen</b>	<b>84</b>
4.1	Approximation durch eine Lognormalverteilung . . . . .	84
4.2	Verstetigung . . . . .	87
4.3	Verallgemeinertes Modell . . . . .	91
4.3.1	Modell . . . . .	92
4.3.2	Vorbereitungen . . . . .	93
4.3.3	Kernresultat . . . . .	96
4.3.4	Weitere asymptotische Betrachtungen . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Anwendung: Fondssparen</b>	<b>104</b>
5.1	Modell . . . . .	104
5.2	Ersatzmodell . . . . .	107
5.2.1	Wahl der Verteilungsparameter . . . . .	107
5.2.2	Resultierendes Modell für den Vermögensendwert . . . . .	108
5.3	Fragestellung, interessierende Kenngrößen . . . . .	109
5.3.1	Allokationsverlauf, Volatilitätsreduktion . . . . .	110
5.3.2	Effiziente Allokationen . . . . .	112
5.4	Simulation . . . . .	114
5.4.1	Periodenrendite im Modell vs. Ersatzmodell . . . . .	115
5.4.2	Vermögensendwert im Modell vs. Ersatzmodell . . . . .	119
5.5	Approximationen und Schranken für den Vermögensendwert . . . . .	123
5.5.1	Verteilungsfunktion . . . . .	124
5.5.2	Gestutzte Erwartungswerte . . . . .	125
5.5.3	Quantile und Lower-Tail-Value-at-Risk . . . . .	127
5.5.4	Abschließende Bemerkungen . . . . .	130
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>132</b>
	<b>Abstract</b>	<b>134</b>
<b>A</b>	<b>Anhang zur Statistik</b>	<b>136</b>
	<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>	<b>139</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>144</b>

# Einführung

Das Thema dieser Arbeit entstand nach der Diskussion mit einem Versicherungsmathematiker über die Problematik der Bestimmung der Verteilung des Endkapitals eines Wertpapiersparplans. Man denke z.B. an einen persönlichen Sparplan, wobei ein Anleger regelmäßig in ein einzelnes Wertpapier oder ein Portfolio mehrerer Wertpapiere investiert. Oder an eine Personenversicherung (wie z.B. Kapital-Lebens- oder Rentenversicherung), wo die Beiträge (oder zumindest der nicht zur Sicherung der Garantierente/-verzinsung benötigte Teil davon, vermindert um die anfallenden Kosten) fondsgebunden angelegt werden. Von Interesse seien die gesamte Verteilung des Endkapitals, zumindest aber relevante Kenngrößen, wie z.B. Quantile und andere, neuere Risikomaße.

Die Problematik liegt nun darin, dass das Endkapital strukturell eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen ist, wenn Preisprozesse von an der Börse gehandelten Wertpapieren als geometrische Brownsche Bewegungen modelliert werden, was üblicherweise (und so auch in dieser Arbeit) der Fall ist. Die Verteilung einer solchen Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen ist einer analytischen Betrachtung jedoch nicht zugänglich. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer Approximation derselben. Die angesprochene Modellierung hat zur Folge, dass Summen lognormalverteilter Zufallsvariablen in der Finanzmathematik auch über die oben angesprochene Situation eines Wertpapiersparplans hinaus eine große Rolle spielen, was im Laufe der Arbeit noch deutlich werden wird.

Zunächst zur Gliederung der Arbeit. Kapitel 1 ist grundlegend für das Verständnis der weiteren Kapitel. Wir diskutieren geeignete Risikomaße, wobei gestutzten Erwartungswerten, wie  $E[(X - t)^+]$  für eine Zufallsvariable  $X$ , eine besondere Rolle zukommt. Mit letzteren eng verbunden sind die wichtigen Konzepte der konvexen Halbordnung und der Komonotonie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die wir ebenso vorstellen, wie die wichtigsten Eigenschaften der Lognormalverteilung.

Kapitel 2 stellt Approximationsmöglichkeiten für eine beliebige Summenverteilung vor, welche auf dem Konzept der konvexen Halbordnung beruhen. Diese Halbordnung ist äquivalent zu einer Halbordnung aller gestutzten Erwartungswerte. Wir erläutern zunächst, wie man Zufallsvariablen  $\bar{S}$  bzw.  $\underline{S}$  (*konvexe Schranken*) konstruieren kann, welche die in Frage stehende Summe  $S$  im Sinne der konvexen Halbordnung dominie-

ren bzw. von ihr dominiert werden. Hierbei spielt das Konzept der Komonotonie eine entscheidende Rolle. Wir konstruieren dann auf Basis eines geometrischen Ansatzes eine obere Schranke für den Approximationsfehler, im Sinne des Abstandes der gestutzten Erwartungswerte, welcher bei Approximation durch eine konvexe Schranke auftritt. Wir vergleichen diese Fehlerschranke mit einer bereits von Nielsen und Sandmann (2003) eingeführten. Auf Basis dieser Fehlerschranken können nun weitere obere und untere Schranken (über die durch  $\bar{S}$ ,  $\underline{S}$  gegebenen hinaus) für die gestutzten Erwartungswerte von  $S$  abgeleitet werden.

In Kapitel 3 sollen die allgemeinen Ergebnisse aus Kapitel 2 auf den Fall einer Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen angewandt werden. Hier können mehr oder weniger explizite Formeln für wichtige Kenngrößen der konvexen Schranken angegeben werden, ebenso für eine der Fehlerschranken. Außerdem wird diskutiert, welche der zur Auswahl stehenden konvexen Schranken zur (approximativen) Minimierung des Approximationsfehlers (in einem noch zu spezifizierenden Sinne) zu wählen ist. Wir illustrieren die Ergebnisse an der Auszahlung einer Asiatischen Option.

In Kapitel 4 liefern wir eine theoretische Rechtfertigung für die populäre Approximation der Verteilung einer Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen durch eine Lognormalverteilung. Wir gehen zu einem stetigen Modell (Integration über eine geometrische Brownsche Bewegung statt Summation lognormalverteilter Zufallsvariablen) über, welches die Ableitung weiterer Approximationsresultate ermöglicht.

Schließlich spannen wir in Kapitel 5 den Bogen zurück zum Ausgangsproblem der approximativen Bestimmung der Verteilung des Endkapitals eines Fonds-Sparplans. Hier tritt nun folgendes Problem auf: Die Rendite eines Fonds als Konvexkombination von lognormalverteilten Wertpapierrenditen ist nicht lognormalverteilt, womit das Endkapital keine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen mehr ist. Wir begründen aber, dass die Lognormalverteilung eine gute Approximation darstellt und benutzen dann die Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel. Um die Sensitivität des Modells gegenüber dieser Abweichung von den Modellannahmen zu quantifizieren, schließen wir die Arbeit mit einer Simulationsstudie für eine konkrete Vertragsgestaltung des Fonds-Sparplans.

Mit dem eingangs erwähnten Versicherungsmathematiker ist im Übrigen Prof. Dr. Berthold Heiligers angesprochen, dem ich für die Konfrontation mit diesem Thema und seine Betreuung — insbesondere in Anbetracht der räumlichen Distanz — herzlich danken möchte. In besonderem Maße danke ich auch Prof. Dr. Norbert Gaffke, der durch jahrelanges Fördern und Fordern einen nicht unbeträchtlichen Anteil daran hat, dass diese Dissertation nun vorliegt.

# Kapitel 1

## Grundlagen

Zu Beginn diskutieren wir kurz, welche Risikomaße im finanz- und versicherungsmathematischen Kontext sinnvoll sind. Da in deren Definition bzw. Berechnung in der Regel gestutzte Erwartungswerte eingehen, beleuchten wir auch deren Eigenschaften. Danach erläutern wir das Konzept der konvexen Halbordnung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welches eine gewisse Ordnung von Risiken ermöglicht.

Wenn wir später Verteilungen von Summen von Zufallsvariablen betrachten werden, und deren Risiko abschätzen wollen, ist das Konzept der Komonotonie von großem Nutzen. Dieses beschreibt eine in gewisse Weise extreme Abhängigkeitsform von Zufallsvariablen.

Schließlich fassen wir noch die wesentlichen Eigenschaften der ein- und mehrdimensionalen Lognormalverteilung zusammen, auf die wir im Laufe der Arbeit wiederholt Bezug nehmen werden.

Wir vereinbaren an dieser Stelle, dass wann immer im Folgenden von Zufallsvariablen die Rede ist, diese stets auf einem (immer demselben und nur im Hintergrund agierenden) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  definiert sind, sofern nichts Gegenteiliges erwähnt ist. Ist der Wertebereich  $W$  einer Zufallsvariablen eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so denke man sich den Bildraum der Zufallsvariablen als mit der Borel'schen Spur-Sigma-Algebra  $\mathfrak{B}_W^n$  ausgestattet.

### 1.1 Risikomaße

In der klassischen Portfoliotheorie werden Wertpapiere anhand der Erwartungswerte und Varianzen ihrer Renditen<sup>1</sup> beschrieben, wobei die Standardabweichung als Risikomaß interpretiert wird. Man spricht vom sogenannten  $\mu$ - $\sigma$ -Prinzip. Ein Portfolio wird

---

<sup>1</sup>Allgemein wollen wir unter der Rendite einer Kapitalanlage bzw. eines Wertpapiers hier und im Folgenden die relative Wert- bzw. Preisänderung *plus 1* verstehen.

einem anderen vorgezogen, falls es eine größere Rendite bei nicht größerem "Risiko" (hier: Standardabweichung) erwarten lässt.

Dieses bereits seit Jahrzehnten populäre Konzept hat jedoch einen nicht unerheblichen Makel: es berücksichtigt nicht die Schiefe der Renditeverteilung. So würde z.B. einem Portfolio mit rechtsschiefer Renditeverteilung dasselbe Risiko zugewiesen wie einem Portfolio mit linksschiefer Renditeverteilung, solange nur die Varianzen identisch sind. Dabei resultieren die mittleren Abweichungen vom Erwartungswert bei linksschiefer Verteilung von den (oft realisierten) niedrigen Renditen her, bei rechtsschiefer Verteilung sind sie Ausdruck einer (oft realisierten) "Überrendite".

In letzter Zeit ist man deshalb dazu übergegangen, sogenannte asymmetrische Risikomaße zu betrachten. Dies geschieht in Abgrenzung zu den sogenannten symmetrischen Risikomaßen, wie z.B. der Varianz, die nicht zwischen positiven und negativen Abweichungen von einem Referenzwert unterscheiden.

Wir präzisieren nun, was wir unter einem Risikomaß verstehen wollen und welches wünschenswerte Eigenschaften eines solchen sind.

**Definition 1.1 (kohärentes Risikomaß)**

Sei  $\mathcal{W}$  eine Menge reeller Zufallsvariablen. Eine Funktion  $\rho : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Risikomaß*.

$\rho$  heißt *kohärent* wenn es die Eigenschaften (i),(ii),(iii),(iv) oder die Eigenschaften (i'),(i'),(iii),(iv) besitzt.

(i) *Isotonie*,

d.h. für alle  $X, Y \in \mathcal{W}$  mit  $X \leq Y$  gilt  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .

(i') *Antitonie*,

d.h. für alle  $X, Y \in \mathcal{W}$  mit  $X \leq Y$  gilt  $\rho(X) \geq \rho(Y)$ .

(ii) *Translationsäquivarianz*,

d.h. für alle  $X \in \mathcal{W}$  und  $a \in \mathbb{R}$  mit  $X + a \in \mathcal{W}$  gilt  $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ .

(ii') *negative Translationsäquivarianz*,

d.h. für alle  $X \in \mathcal{W}$  und  $a \in \mathbb{R}$  mit  $X + a \in \mathcal{W}$  gilt  $\rho(X + a) = \rho(X) - a$ .

(iii) *positive Homogenität*,

d.h. für alle  $X \in \mathcal{W}$  und  $c > 0$  mit  $cX \in \mathcal{W}$  gilt  $\rho(cX) = c\rho(X)$ .

(iv) *Subadditivität*,

d.h. für alle  $X, Y \in \mathcal{W}$  mit  $X + Y \in \mathcal{W}$  gilt  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

■

Artzner, Delbaen, Eber und Heath (1999) legen ausführlich dar, warum die Betrachtung kohärenter Risikomaße sinnvoll ist.

**Bemerkung 1.2**

Sei  $\rho$  ein Risikomaß und das Risikomaß  $\rho'$  definiert gemäß  $\rho'(X) := \rho(-X)$ . Erfüllt  $\rho$  die Eigenschaft (i) bzw. (ii), so erfüllt  $\rho'$  die Eigenschaft (i') bzw. (ii'). Erfüllt  $\rho$  die Eigenschaft (iii) bzw. (iv), so auch  $\rho'$ . ■

**Bemerkung 1.3 (Gewinn- und Verlustvariablen)**

Welches Risikomaß in der Praxis zur Quantifizierung des Risikos gewählt wird, hängt davon ab, ob positive oder negative Abweichungen von einem Referenzwert als Risiko empfunden werden. Eine entsprechende Unterscheidung werden wir nun vornehmen.

Sind große Werte von  $X$  (oder dessen positive Abweichung von einem Referenzwert) "ungünstig" und stellen somit ein entsprechendes Risiko dar (z.B. wenn  $X$  den zufälligen Verlust eines Portfolios beschreibt), so wollen wir  $X$  als *Verlustvariable* bezeichnen. Sind hingegen kleine Werte von  $X$  (oder dessen negative Abweichung von einem Referenzwert) "ungünstig" und stellen ein entsprechendes Risiko dar (z.B. wenn  $X$  die zufällige Rendite eines Portfolios beschreibt), so sprechen wir von  $X$  als *Gewinnvariable*.

Soll nun das Risiko einer Verlustvariable quantifiziert werden, so wird man dies mittels eines isotonen und translationsäquivalenten Risikomaßes tun; das Risiko einer Gewinnvariable hingegen mittels eines antitonen und negativ-translationsäquivalenten Risikomaßes. Bemerkung 1.2 liefert eine einfache Methode zur Generierung eines antitonen und negativ-translationsäquivalenten Risikomaßes auf der Basis eines isotonen und translationsäquivalenten Risikomaßes. Dabei wird ausgenutzt, dass eine mit  $-1$  multiplizierte Verlustvariable eine Gewinnvariable ist. ■

Nach obiger Definition ist ein Risikomaß eine Funktion, dessen Argumente Zufallsvariablen sind. Haben nun zwei Zufallsvariablen dieselbe Verteilung, so wird man davon ausgehen wollen, das ihnen auch dasselbe Risiko zugewiesen wird:

$$X, Y \in \mathcal{W} : X \stackrel{d}{=} Y \implies \rho(X) = \rho(Y). \quad (1.1)$$

Diese zusätzliche Forderung an ein Risikomaß wird in der Literatur oft als *Verteilungsinvarianz* bezeichnet; wir halten diese Formulierung zwar für unglücklich, werden sie aber dennoch verwenden.

Im Folgenden sollen einige Kenngrößen von Zufallsvariablen daraufhin untersucht werden, ob sie kohärente Risikomaße darstellen.

**Definition 1.4 (Quantile)**

Sei  $X$  eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . Zu gegebenem  $p \in [0, 1]$  (mit der Konvention  $\inf \emptyset := \infty$  und  $\sup \emptyset := -\infty$ ) heißt

$$q_p(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

das *untere (kleinste)  $p$ -Quantil* von  $X$ , sowie

$$q^p(X) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq p\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

das *obere (größte)  $p$ -Quantil* von  $X$ .

### Bemerkung 1.5

Es gilt  $q_p(X) \leq q^p(X)$ ; die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Menge  $\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = p\}$  einelementig oder leer ist. Es besteht der folgende Zusammenhang:

$$q^p(X) = -q_{1-p}(-X). \quad (1.2)$$

Die gewählten Bezeichnungen für die Quantile unterstreichen die Abhängigkeit von der Zufallsvariable; dies ist im Kontext der Risikomaße sinnvoll. Oft soll jedoch die Abhängigkeit vom Niveau  $p$  betont werden; in diesem Fall werden wir die folgenden Bezeichnungen wählen:

$$F_X^{-1}(p) := q_p(X) \quad , \quad F_X^-(p) := q^p(X). \quad (1.3)$$

Die Funktionen  $F_X^{-1}(p)$  sowie  $F_X^-(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , sind linksseitig stetig und isoton; beides sind *Pseudoinversen* von  $F_X$ . ■

Man verifiziert leicht, dass  $q_p$  und  $q^p$  für alle  $p \in (0, 1)$  isotone, translationsäquivalente, positiv homogene und verteilungsinvariante (im Sinne von (1.1)) Risikomaße auf der Menge aller reellen Zufallsvariablen sind. Allerdings sind sie nicht subadditiv.

### Beispiel 1.6 (Quantile sind nicht subadditiv)

Seien  $X_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2$ , zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit  $P(X_i = 1) = 0.7$ . Man verifiziert leicht  $q_{0.25}(X_1) = q_{0.25}(X_2) = 0$  und  $q_{0.25}(X_1 + X_2) = 1$ , d.h. es gilt  $q_{0.25}(X_1 + X_2) > q_{0.25}(X_1) + q_{0.25}(X_2)$ .

Somit ist  $q_{0.25}$  nicht subadditiv und damit kein kohärentes Risikomaß auf der Menge aller reellen Zufallsvariablen.

### Bemerkung 1.7 (Value-at-Risk)

Für eine Verlustvariable  $X$  ist für  $q_{1-\alpha}(X)$  auch die Bezeichnung *Value-at-Risk zum Niveau  $\alpha$*  gebräuchlich;  $\alpha$  ist dabei üblicherweise klein, meist wird  $\alpha = 0.01$  gewählt. Der Verlust übersteigt diesen Value-at-Risk offenbar mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens  $\alpha$ , und das ist der kleinste Wert mit dieser Eigenschaft. Hält z.B. der Inhaber eines Verlust-Portfolios (z.B. ein Versicherungsunternehmen bei Versicherungsportfolios oder eine Bank bei Kreditportfolios) Kapital in Höhe des Value-at-Risk vor, dann reicht dieses mit hoher Wahrscheinlichkeit, nämlich mindestens  $1 - \alpha$ , zur Bedienung

der Forderungen (aus Versicherungszahlungen oder Kreditausfällen) aus. Vor diesem Hintergrund ist auch einsichtig, warum das kleinste  $(1 - \alpha)$ -Quantil als Value-at-Risk gewählt wird.

Obwohl in der Praxis bisher weniger üblich, lässt sich das Konzept des Value-at-Risk nun auch auf den Fall einer Gewinnvariable  $X$  übertragen. Das resultierende antitone Risikomaß ist gegeben durch  $q_{1-\alpha}(-X) = -q^\alpha(X)$ . Wir bezeichnen hier jedoch  $q^\alpha(X)$  als Value-at-Risk zum Niveau  $\alpha$ . Der Gewinn unterschreitet diesen Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens  $\alpha$  (wiederum klein), und dies ist der größte Wert mit dieser Eigenschaft. Sagt z.B. der Inhaber eines Gewinn-Portfolios (z.B. ein Versicherungsunternehmen bei einem persönlichen fondsgebundenen Altersvorsorgekonto) einem Dritten eine Auszahlung in Höhe des Value-at-Risk zu, so kann er diese Zusage mit hoher Wahrscheinlichkeit, nämlich mindestens  $1 - \alpha$ , einhalten. Auch hier ist unmittelbar einsichtig, warum das größte  $\alpha$ -Quantil als Value-at-Risk gewählt wird. ■

Die Eigenschaft der Subadditivität eines Risikomaßes lässt sich offenbar dahingehend interpretieren, dass Diversifikation (in zwei "Risiken"  $X$  und  $Y$ ) jedenfalls nicht zu einer Erhöhung des Risikos (gegenüber der Summe  $X + Y$  der beiden Einzelrisiken) führt. Da der Value-at-Risk diese Eigenschaft nicht aufweist, reduziert Diversifikation also nicht notwendig den Value-at-Risk. Dies ist jedoch nicht der einzige Nachteil bei Wahl des Value-at-Risk als Risikomaß. Es bleibt auch unberücksichtigt, wie hoch der Verlust bzw. der Gewinn im *worst case* ist. Dabei sei das Eintreten des *worst case* definiert als Über- (bei Verlustvariablen) bzw. Unterschreiten (bei Gewinnvariablen) des Value-at-Risk zu einem vorgegebenen Niveau  $\alpha$ .

Im Folgenden werden Risikomaße eingeführt, welche die Höhe des Verlustes bzw. Gewinns im *worst case* berücksichtigen und obendrein subadditiv sind.

### Definition 1.8 (Tail-Value-at-Risk)

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und  $X$  eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt

$$\text{TVaR}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp \in \overline{\mathbb{R}}$$

der *Tail-Value-at-Risk* (zum Niveau  $\alpha$ ) von  $X$ .

### Lemma 1.9

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und  $X$  eine reelle Zufallsvariable. Dann gelten die folgenden Darstellungen:

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = q_{1-\alpha}(X) + \frac{1}{\alpha} E[(X - q_{1-\alpha}(X))^+] \quad (1.4)$$

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = E[X | X > q_{1-\alpha}(X)], \text{ falls } F_X(F_X^{-1}(1 - \alpha)) = 1 - \alpha. \quad (1.5)$$

■

**Beweis:**

Darstellung (1.4) folgt (unter Verwendung von  $P^X = (R_{0,1})^{F_X^{-1}}$  und des elementaren Transformationssatzes für Integrale) aus

$$E[(X - q_{1-\alpha}(X))^+] = \int_0^1 (F_X^{-1}(p) - q_{1-\alpha}(X))^+ dp = \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp - \alpha q_{1-\alpha}(X).$$

Darstellung (1.5) ergibt sich wegen

$$E(X|X > q_{1-\alpha}(X)) = q_{1-\alpha}(X) + \frac{E[(X - q_{1-\alpha}(X))^+]}{P(X > q_{1-\alpha}(X))};$$

der Ausdruck im Nenner ist nach Voraussetzung gleich  $\alpha > 0$ . ■

Es gilt  $\text{TVaR}_\alpha(X) \in \mathbb{R}$ , falls  $E[(X - q_{1-\alpha}(X))^+] < \infty$ . Man verifiziert leicht, dass  $\text{TVaR}_\alpha$  ein isotones, translationsäquivalentes, positiv homogenes und verteilungsinvariantes (im Sinne von (1.1)) Risikomaß auf der Menge

$$\{X : X \text{ ist reelle Zufallsvariable mit } E[(X - q_{1-\alpha}(X))^+] < \infty\}$$

ist. Es ist auch subadditiv (und damit kohärent); den Nachweis dessen werden wir an späterer Stelle erbringen. Es wird jedoch lediglich für eine Verlustvariable  $X$  ein adäquates Risikomaß darstellen, da es ausschließlich den *upper tail* der Verteilung (der extrem hohe Verluste beschreibt) quantifiziert.

Im Fall einer Gewinnvariablen  $X$  wird ein Risikomaß adäquat sein, welches den *lower tail* der Verteilung (der zu extrem niedrigen Gewinnen korrespondiert) quantifiziert. Wir übertragen den eben eingeführten Begriff des Tail-Value-at-Risk gemäß Bemerkung 1.2 und erhalten das antitone Risikomaß  $\rho(X) := \text{TVaR}_\alpha(-X)$ . Wegen der besseren Interpretierbarkeit werden wir jedoch hier und im Folgenden stets die mit  $-1$  multiplizierte Risikomaßzahl betrachten.

**Definition 1.10 (Lower-Tail-Value-at-Risk)**

Für eine reelle Zufallsvariable  $X$  ist deren *Lower-Tail-Value-at-Risk* (zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ ) definiert gemäß

$$\text{L-TVaR}_\alpha(X) := -\text{TVaR}_\alpha(-X). \quad (1.6)$$

**Folgerung 1.11**

Aus Definition 1.10 ergeben sich (unter Berücksichtigung von (1.2)) sofort die folgenden Darstellungen für alle  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\text{L-TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^-(p) dp \quad (1.7)$$

$$\text{L-TVaR}_\alpha(X) = q^\alpha(X) - \frac{1}{\alpha} E[(q^\alpha(X) - X)^+] \quad (1.8)$$

$$\text{L-TVaR}_\alpha(X) = E[X|X < q^\alpha(X)], \text{ falls } P(X < q^\alpha(X)) = \alpha. \quad (1.9)$$

■

Die Bedingung  $F_X(F_X^{-1}(1 - \alpha)) = 1 - \alpha$  in (1.5) bzw.  $P(X < q^\alpha(X)) = \alpha$  in (1.9) ist insbesondere dann erfüllt, wenn die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$  stetig ist.

Gilt  $q_{1-\alpha}(X) = q^{1-\alpha}(X)$ , so lässt sich der Erwartungswert von  $X$  offenbar zerlegen gemäß

$$E(X) = (1 - \alpha)\text{L-TVaR}_{1-\alpha}(X) + \alpha\text{TVaR}_\alpha(X). \quad (1.10)$$

Untersuchen wir nun die praktische Relevanz des (Lower-)Tail-Value-at-Risk, vor allem im Vergleich zum Value-at-Risk, vgl. Bemerkung 1.7. Hält der Inhaber eines Verlust-Portfolios Reserven in Höhe des Tail-Value-at-Risk (der offenbar stets mindestens so groß wie der entsprechende Value-at-Risk ist) vor, dann reichen diese Reserven aus, um die im *worst case* anfallenden Forderungen (Portfoliowert) *im Mittel* zu bedienen. Macht der Inhaber eines Gewinn-Portfolios einem Dritten Zusagen in Höhe des Lower-Tail-Value-at-Risk (der stets nicht größer als der entsprechende Value-at-Risk ist), so wird im *worst case* der Portfoliowert *im Mittel* ausreichen, um diese Zusage einhalten zu können.

## 1.2 Gestutzte Erwartungswerte

Zur konkreten Bestimmung des (Lower-)Tail-Value-at-Risk einer Zufallsvariable  $X$  wird dessen Definition in der Praxis wenig hilfreich sein. Die Bestimmung gemäß (1.4) oder (1.8) (bzw. (1.5) oder (1.9) bei stetiger Verteilungsfunktion) ist in der Regel einfacher. Hierbei sind sogenannte *gestutzte Erwartungswerte* von  $X$  involviert,

$$E[(X - t)^+] \quad \text{bzw.} \quad E[(t - X)^+], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zur besseren Unterscheidung sprechen wir dabei von *linksseitig* bzw. *rechtsseitig* gestutzten Erwartungswerten. Je nach Anwendungsgebiet sind für diese unterschiedliche Bezeichnungen gebräuchlich: für die linksseitigen u.a. *integrated survival function* und *stop-loss-premium*, für die rechtsseitigen u.a. *expected (target) shortfall*, *lower partial first moment* und *downside expectation*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Man beachte, dass in der Literatur keine Einigkeit über den Gebrauch dieser Bezeichnungen besteht.

Die Vielzahl dieser Bezeichnungen deutet darauf hin, dass gestutzte Erwartungswerte (nicht nur wegen ihrer Beteiligung bei der Berechnung des (Lower-)Tail-Value-at-Risk) von großem Interesse zu sein scheinen. So stellen auch sie selbst bereits sinnvolle – wenn auch keine kohärenten – Risikomaße dar. Um dies einzusehen, betrachte man zum Beispiel einen Schadenversicherer mit zufälliger Schadensumme  $X$  und Deckungskapital/Rückstellungen in Höhe von  $t$ . Für den Fall, dass  $t$  durch  $X$  überschritten wird, wird sich der Versicherer in der Regel bei einem Rückversicherer absichern (dann zahlt der Rückversicherer dem Versicherer den Differenzbetrag  $X - t$ ), und zwar gegen einen Versicherungsbeitrag (*stop-loss-premium*) in Höhe von  $E[(X - t)^+]$ . Um eine Verbindung zum vorangehenden Abschnitt herzustellen frage man sich, wie  $t$  zu wählen ist (d.h. wie die Beiträge festzusetzen sind), damit der Versicherer nur im *worst case* auf den Rückversicherer zurückgreifen muss.

Nun wollen wir Eigenschaften gestutzter Erwartungswerte zusammentragen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit häufig ausnutzen werden. Die Formulierung erfolgt hier lediglich für die linksseitig gestutzten Erwartungswerte. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, da sich entsprechende Eigenschaften für die rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte aus den Resultaten über die linksseitigen gestutzten Erwartungswerte in der Regel problemlos auf Grund der Beziehung

$$E[(t - X)^+] = E[(X - t)^+] - E(X - t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

ableiten lassen. Im Übrigen werden wir uns auch im weiteren Verlauf der Arbeit auf linksseitig gestutzte Erwartungswerte konzentrieren; aus diesem Grund verzichten wir im Folgenden zumeist auf den Zusatz *linksseitig*.

**Lemma 1.12 (Eigenschaften gestutzter Erwartungswerte)**

Sei  $X$  eine integrierbare reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . Bezeichne  $\xi(t) := E[(X - t)^+]$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\xi(t) \geq \max\{0, E(X) - t\} = (E(X) - t)^+, \quad (1.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi(t) - (E(X) - t) = 0, \quad (1.13)$$

$$\xi(t) = E(X) - t \iff F_X(t-) = 0 \quad (1.14)$$

$$\xi(t) = 0 \iff F_X(t) = 1 \quad (1.15)$$

$$\xi(t) = \int_t^\infty 1 - F_X(s) ds. \quad (1.16)$$

■

Die beiden Aussagen in (1.13) ergeben sich (nach Ausnutzung von (1.11) bei der zweiten Aussage) mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz. Die letzte Formel folgt aus der bekannten Formel für den Erwartungswert einer nicht-negativen Zufallsvariable unter Berücksichtigung von  $F_{(X-t)^+}(s) = F_X(s+t)1_{[0,\infty)}(s)$ . Die anderen Aussagen sind ebenso leicht einsichtig.

**Folgerung 1.13**

Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Lemma 1.12 gelten die folgenden Aussagen:

(i)  $\xi$  ist konvex auf  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $\xi$  besitzt die links- bzw. rechtsseitigen Ableitungen

$$\xi'_-(t) = F_X(t-) - 1 \quad \text{bzw.} \quad \xi'_+(t) = F_X(t) - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(t) - (E(X) - t)^+ d\lambda(t) = \frac{1}{2} \text{Var}(X). \quad (1.18)$$

(iv) Sei  $Y$  eine integrierbare reelle Zufallsvariable mit  $E(Y) = E(X)$ ;  $X$  oder  $Y$  sei quadrat-integrierbar. Dann:

$$\int_{\mathbb{R}} E[(X - t)^+] - E[(Y - t)^+] d\lambda(t) = \frac{1}{2} (\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)). \quad (1.19)$$

**Beweis:**

(i) Eine bekannte Charakterisierung konvexer Funktionen ist die folgende, vgl. Roberts und Varberg (1973, Theorem 12A): Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  ist genau dann konvex auf  $I$ , wenn eine auf  $I$  isotone Funktion  $g$  existiert, so dass

$$f(t) - f(c) = \int_c^t g(s) ds, \quad \text{für alle } t, c \in I. \quad (1.20)$$

Mit (1.16) gilt nun aber offenbar

$$\xi(t) - \xi(c) = \int_c^t F_X(s) - 1 ds, \quad \text{für alle } t, c \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

und der Integrand ist auf Grund der Eigenschaften der Verteilungsfunktion isoton, womit die Konvexität von  $\xi$  nachgewiesen ist.

(ii) Auf Grund der Konvexität existieren in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  die linksseitigen und rechtsseitigen Ableitungen  $\xi'_-(t)$  bzw.  $\xi'_+(t)$ , vgl. Roberts und Varberg (1973, Theorem 11B).

Es gilt allgemein das folgende Resultat: Ist  $f$  konvex auf einem Intervall  $I$  und  $g$  die auf  $I$  isotone Funktion, die (1.20) erfüllt, so gilt  $f'_-(t) = g(t-)$  und  $f'_+(t) = g(t+)$ .

Für  $g(t) = F_X(t) - 1$ , vgl. Beweisteil (i), ergibt sich dann

$$\xi'_-(t) = F_X(t-) - 1 \quad , \quad \xi'_+(t) = F_X(t) - 1 .$$

Zum Nachweis des eben angesprochenen Resultats sei  $t \in I$  fest gewählt. Wir betrachten für  $h > 0$  den Differenzenquotienten

$$\frac{f(t) - f(t-h)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t g(s) ds .$$

Auf Grund der Isotonie von  $g$  existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:

$$|g(t-) - g(s)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } s \in (t - \delta, t) .$$

Damit erhalten wir für  $h < \delta$  die folgende Abschätzung für den Differenzenquotienten

$$g(t-) - \varepsilon = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t g(t-) - \varepsilon ds \leq \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_{t-h}^t g(t-) + \varepsilon ds = g(t-) + \varepsilon .$$

Für  $h \rightarrow 0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich daraus

$$g(t-) \leq f'_-(t) \leq g(t-) ,$$

was zu zeigen war. Analog zeigt man  $f'_+(t) = g(t+)$ .

(iii) Zunächst gilt

$$\int_{\mathbb{R}} E[(X-t)^+] - (E(X)-t)^+ d\lambda(t) = \int_{(-\infty, E(X))} E[(t-X)^+] d\lambda(t) + \int_{(E(X), \infty)} E[(X-t)^+] d\lambda(t) .$$

Schreiben der gestutzten Erwartungswerte als  $P$ -Integral, Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini und anschließende Auswertung des inneren Integrals liefert

$$\int_{(E(X), \infty)} E[(X-t)^+] d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{(E(X), \infty)} (x-t)^+ d\lambda(t) dP^X(x) = \frac{1}{2} \int_{(E(X), \infty)} (x-E(X))^2 dP^X(x) .$$

Analog erhält man:

$$\int_{(-\infty, E(X))} E[(t - X)^+] d\lambda(t) = \frac{1}{2} \int_{(-\infty, E(X))} (x - E(X))^2 dP^X(x);$$

zusammen ergibt sich die Behauptung.

(iv) folgt unmittelbar aus (iii). ■

### Bemerkung 1.14 (Verlauf der GEW-Funktion)

Wir wollen die Funktion  $\xi(t) = E[(X - t)^+]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , zukünftig als *GEW-Funktion von X* ansprechen. Die Abkürzung GEW steht dabei für **G**estutzer **E**rwartungs**W**ert.  $\xi$  weist – neben ihrer Konvexität – die folgenden Eigenschaften auf:

- $\xi$  ist stetig, was unmittelbar aus der Konvexität folgt.
- Die links- und rechtsseitigen Ableitungen  $\xi'_-$  und  $\xi'_+$  sind isoton; sie wachsen für wachsendes  $t$  von  $-1$  auf  $0$ . Dies ergibt sich sofort aus (1.17) unter Berücksichtigung der Isotonie von Verteilungsfunktionen.
- $\xi$  ist antiton. Dies folgt aus der Isotonie von  $\xi'_+$  unter Verwendung des folgenden allgemeinen Resultats: Ist  $f$  konvex auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f'_+(x) < 0$  (bzw.  $> 0$ ) für alle  $x \in I$ , dann ist  $f$  auf  $I$  strikt antiton (bzw. strikt isoton). Dieses Resultat sieht man leicht mit Hilfe der Integraldarstellung (1.20) der konvexen Funktion  $f$  ein; demnach ist

$$f(x + h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'_+(s) ds \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } h > 0.$$

- Für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet  $\xi$ ; für  $t \rightarrow -\infty$  ist  $t \mapsto E(X) - t$  die Asymptote von  $\xi$ , vgl. (1.13).

Abbildung 1.1 auf Seite 17 zeigt beispielhaft den Verlauf der GEW-Funktion einer Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion.

## 1.3 Konvexe Halbordnung von W' Verteilungen

### Definition 1.15 (Konvexe Halbordnung von W' Verteilungen)

Seien  $Q_1$  und  $Q_2$  zwei W' Verteilungen über  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit endlichen Erwartungswerten.  $Q_1$  wird in der konvexen Halbordnung dominiert durch  $Q_2$  (Schreibweise:  $Q_1 \leq_{cx} Q_2$ ), falls für alle konvexen Funktionen  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $Q_1$ - und  $Q_2$ -integrierbar sind, gilt:

$$E_{Q_1}(v) \leq E_{Q_2}(v).$$

**Bemerkung 1.16 (Konvexe Halbordnung von Zufallsvariablen)**

- (i) Die Definition der konvexen Halbordnung lässt sich in kanonischer Weise auf integrierbare reelle Zufallsvariablen übertragen:

$$X \leq_{cx} Y \quad :\iff \quad P^X \leq_{cx} P^Y .$$

- (ii) Gilt  $X \leq_{cx} Y$ , so folgt wegen der Konvexität der Funktion  $v(t) = -t$  sofort  $-X \leq_{cx} -Y$ , und weiter  $E(X) = E(Y)$ . Man beachte in diesem Zusammenhang, dass aus  $X \leq Y$  im Allgemeinen nicht  $X \leq_{cx} Y$  folgt.<sup>3</sup>
- (iii) Wegen der Konvexität der Funktion  $v(t) = t^2$  folgt aus  $X \leq_{cx} Y$  im Fall der Quadrat-Integrierbarkeit von  $X$  und  $Y$

$$\text{Var}(X) \leq \text{Var}(Y) ,$$

wobei hier Gleichheit genau dann gilt, wenn  $P^X = P^Y$ . Zum Beweis dieser Äquivalenzaussage benutze man das folgende Lemma in Verbindung mit (1.19).

**Lemma 1.17**

Seien  $X, Y$  integrierbare reelle Zufallsvariablen. Es gilt  $X \leq_{cx} Y$  genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $E(X) = E(Y)$   
(ii)  $E(X - t)^+ \leq E(Y - t)^+ \quad \forall t \in \mathbb{R} .$

Der Beweis der Hinrichtung ist einfach: (i) hatten wir bereits in Bemerkung 1.16 nachgewiesen und (ii) folgt auf Grund der Konvexität der Funktion  $v_t(x) = (x - t)^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Für den Beweis der Rückrichtung siehe Müller und Stoyan (2002).

**Bemerkung 1.18 (Konvexe Halbordnung via rechtsseitig gestutzte E-Werte)**

Die Bedingung (ii) in Lemma 1.17 lässt sich ersetzen durch die Bedingung

$$(ii') \quad E(t - X)^+ \leq E(t - Y)^+ \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Dies folgt aus (1.11).

Gilt  $X \leq_{cx} Y$ , so könnte man mit Blick auf Lemma 1.17 davon sprechen, dass  $X$  gleichmäßig kleinere *upper tails* als  $Y$  besitzt. Sind  $X, Y$  Verlustvariablen (z.B. zu leistende Zahlungen), so wird ein risikoaverser Entscheider deshalb die Zahlung  $X$  der

---

<sup>3</sup>Es gilt sogar:  $X < Y$   $P$ -f.s.  $\implies X \not\leq_{cx} Y$ .

Zahlung  $Y$  vorziehen. Sind  $X, Y$  Gewinnvariablen (z.B. eingehende Zahlungen), so wird derselbe Entscheider mit Blick auf Bemerkung 1.18 ebenso die Zahlung  $X$  der Zahlung  $Y$  vorziehen.

Das Konzept der konvexen Halbordnung besitzt also durchaus eine praktische Relevanz. Man betrachte zum Beispiel ein Versicherungsunternehmen, welches bei der Prämienkalkulation für eine Verlustvariable  $X$  (mit unbekannter oder schwer handzuhabender Verteilung) diese durch eine Zufallsvariable  $Y \geq_{cx} X$  (mit leicht handzuhabender Verteilung) ersetzt – und damit offenbar ihrem üblichen Vorsichtsprinzip folgt, weil sie das Risiko (im Sinne der gestutzten Erwartungswerte) stets überschätzt.

**Bemerkung 1.19**

Es ist leicht einzusehen, dass die Ordnungsrelation " $\leq_{cx}$ " auf der Menge  $\mathcal{W}$  der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit endlichen Erwartungswerten tatsächlich eine Halbordnung ist, da sie die erforderlichen Eigenschaften Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie aufweist. Sie ist jedoch keine (totale) Ordnungsrelation, weil sich offensichtlich nicht alle Elemente aus  $\mathcal{W}$  miteinander vergleichen lassen. Uns dessen bewusst wollen wir trotzdem zwei Verteilungen (oder auch Zufallsvariablen), die sich in der konvexen Halbordnung vergleichen lassen, als konvex *geordnet* bezeichnen. ■

**Lemma 1.20**

Gegeben seien integrierbare reelle Zufallsvariablen  $X, Y$  und eine weitere Zufallsvariable  $Z : \Omega \rightarrow N$ . Es gelte:

$$P^{X|Z=z} \leq_{cx} P^{Y|Z=z} \text{ für } P^Z\text{-fast alle } z \in N .$$

Dann gilt:

$$P^X \leq_{cx} P^Y .$$

**Beweis:**

Nach Voraussetzung gilt für jede konvexe Funktion  $v$ :

$$E(v \circ X|Z) \leq E(v \circ Y|Z) \text{ } P\text{-fast sicher .}$$

Damit erhält man sofort:

$$E(v \circ X) = E(E(v \circ X|Z)) \leq E(E(v \circ Y|Z)) = E(v \circ Y) .$$

■

Im Folgenden bezeichnet

$$\text{supp } X := \{t \in \mathbb{R} : F_X(t - \varepsilon) < F_X(t) \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

den Träger<sup>4</sup> der Verteilung einer reellen Zufallsvariablen  $X$ ; es gilt:

$$\text{supp } X = \{t \in \mathbb{R} : F_X^{-1}(F_X(t)) = t\}.$$

Von Interesse ist im Folgenden auch die Menge  $\text{int } \{0 < F_X < 1\}$ , die wir als *Trägerintervall* der Verteilung von  $X$  bezeichnen wollen. Man verifiziert leicht die Darstellung  $\text{int } \{0 < F_X < 1\} = (F_X^{-1}(0), F_X^{-1}(1))$ . Es besteht der folgende Zusammenhang:

$$\text{int}\{0 < F_X < 1\} = \text{int conv supp } X ;$$

d.h. das Trägerintervall ist das kleinste Intervall, welches das Innere des Trägers umfasst. Diese Begriffsbildung ist in gewisser Weise konsistent: Ist der Träger bereits ein Intervall, also  $F_X$  auf  $\text{supp } X$  strikt isoton, so fallen das Innere des Trägers und das Trägerintervall zusammen.

Man verifiziert leicht mit (1.14) und (1.15), dass für konvex geordnete Zufallsvariablen  $X \leq_{cx} Y$  die Trägerintervalle wie folgt geordnet sind,

$$\text{int } \{0 < F_X < 1\} \subseteq \text{int } \{0 < F_Y < 1\}. \quad (1.22)$$

**Bemerkung 1.21**

Man kann zeigen, dass sogar die Teilmengenbeziehung  $\{0 < F_X < 1\} \subseteq \{0 < F_Y < 1\}$  gilt. Dazu verbleibt lediglich nachzuweisen, dass aus  $F_X^{-1}(0) = F_Y^{-1}(0) (=: t^*)$  notwendig  $F_X(t^*) \leq F_Y(t^*)$  folgt. Betrachten wir dazu die beiden Funktionen  $a := E[(X - \cdot)^+]$  und  $b := E[(Y - \cdot)^+]$ , für die  $a \leq b$  auf Grund von  $X \leq_{cx} Y$  gilt. Wegen (1.14) gilt  $a(t^*) = b(t^*)$ . Nehmen wir an, es gelte  $F_X(t^*) > F_Y(t^*)$ , dann folgte  $a'_+(t^*) > b'_+(t^*)$  (wegen (1.17)) und daher  $a(t^*+) > b(t^*+)$ , was im Widerspruch zu  $a \leq b$  stünde.

**Bemerkung 1.22 (Zusammenhang Quantil- und Verteilungsfunktion)**

Ist die Quantilfunktion  $F_X^{-1}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , einer Zufallsvariable  $X$  gegeben, so lässt sich deren Verteilungsfunktion offenbar gemäß

$$F_X(x) = \sup\{p \in (0, 1) : F_X^{-1}(p) \leq x\}$$

bestimmen. Ist  $\text{supp } X$  ein Intervall, also  $F_X$  auf  $\text{supp } X$  strikt isoton, so ist für alle  $x \in \text{supp } X$  der Wert der Verteilungsfunktion an dieser Stelle,  $F_X(x)$ , die eindeutige Lösung (für  $p$ ) der Gleichung  $F_X^{-1}(p) = x$ . ■

---

<sup>4</sup>Man beachte, dass abweichend von dieser Begriffsbildung der Träger in der Literatur oft als Abschluss von  $\text{supp } X$  definiert wird.

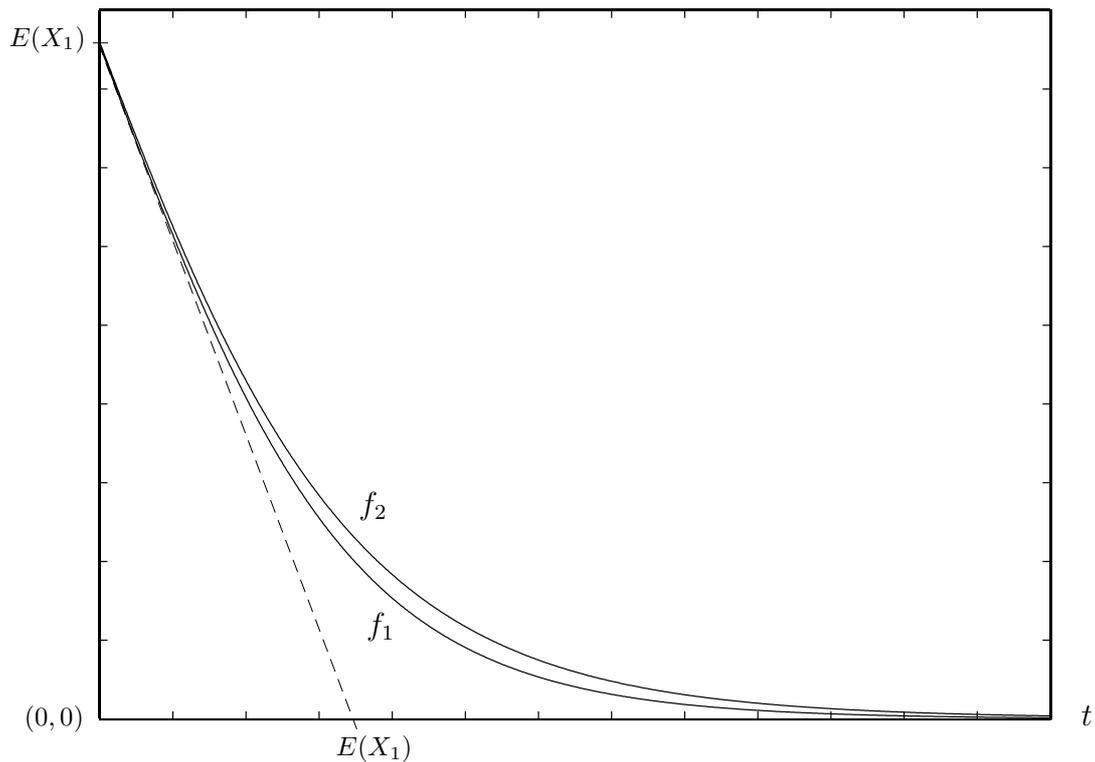


Abbildung 1.1: GEW-Funktionen  $f_1, f_2$  zweier konvex geordneter Zufallsvariablen  $X_1 \leq_{cx} X_2$  mit Träger  $\mathbb{R}$  und stetiger Verteilungsfunktion

Abbildung 1.1 visualisiert beispielhaft für zwei konvex geordnete Zufallsvariablen  $X_1 \leq_{cx} X_2$  den Verlauf ihrer GEW-Funktionen  $f_i(t) = E[(X_i - t)^+]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Sie berücksichtigt neben unserem Wissen über den prinzipiellen Verlauf von GEW-Funktionen, vgl. Bemerkung 1.14, dass  $f_2$  offenbar stets nicht unterhalb von  $f_1$  verläuft<sup>5</sup> und beide Funktionen auf Grund des identischen Erwartungswertes dieselben Asymptoten besitzen.

Wir werden nun sehen, dass die konvexe Halbordnung zweier Zufallsvariablen nicht nur äquivalent zu einer entsprechenden Halbordnung aller gestutzten Erwartungswerte ist, sondern auch eine gewisse Halbordnung des Tail-Value-at-Risk impliziert.

**Lemma 1.23**

Für zwei gemäß  $X \leq_{cx} Y$  konvex geordnete Zufallsvariablen  $X, Y$  gilt:

- (i)  $\text{TVaR}_\alpha(X) \leq \text{TVaR}_\alpha(Y) \quad \forall \alpha \in (0, 1)$ ,
- (ii)  $\text{L-TV aR}_\alpha(X) \geq \text{L-TV aR}_\alpha(Y) \quad \forall \alpha \in (0, 1)$ .

<sup>5</sup>Die beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  können sich jedoch berühren.

**Beweis:**

(i) Betrachte für  $\alpha \in (0, 1)$  die Funktion

$$f(t) = t + \frac{1}{\alpha} E[(X - t)^+], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung an eine Minimalstelle  $t_0$  der konvexen Funktion  $f$  lautet:  $f'_-(t_0) \leq 0 \leq f'_+(t_0)$ . Mit Hilfe von (1.17) reduziert sich diese Bedingung auf  $F_X(t_0-) \leq 1 - \alpha \leq F_X(t_0)$ , welche von  $t_0 = q_{1-\alpha}(X)$  erfüllt wird. Nun können wir unter Berücksichtigung von (1.4) wie folgt abschätzen:

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = f(q_{1-\alpha}(X)) \leq f(q_{1-\alpha}(Y)) \leq \text{TVaR}_\alpha(Y),$$

was zu zeigen war.

(ii) ergibt sich aus (i) unter Beachtung von Bemerkung 1.16 (ii) und Definition 1.10. ■

## 1.4 Komonotonie von $W$ -Verteilungen

In diesem Abschnitt beleuchten wir eine 'extreme' Abhängigkeitsform zwischen Zufallsvariablen: Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  hängen alle gleichläufig von einer einzigen anderen reellen Zufallsvariablen  $Y$  ab (d.h. sie sind allesamt isotone Transformationen von  $Y$ ), verhalten sich also 'mehr oder weniger' wie  $Y$ . Dies mag auch gleich die Bezeichnung *Komonotonie* für diese Abhängigkeitsform motivieren, die wir zunächst als Eigenschaft von Verteilungen einführen.

**Definition 1.24 (Komonotone Wahrscheinlichkeitsverteilung)**

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$  heißt komonoton, falls eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\tilde{Q}$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  und isotone messbare Funktionen  $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass gilt:

$$Q = \tilde{Q}^{(g_1, \dots, g_n)}.$$

**Lemma 1.25 (Äquivalente Charakterisierungen der Komonotonie)**

Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$  mit den eindimensionalen Randverteilungen  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und Randverteilungsfunktionen  $F_i$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i)  $Q$  ist komonoton.

(ii) Es existieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\tilde{Q}$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  und antitone Funktionen  $h_1, \dots, h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$Q = \tilde{Q}^{(h_1, \dots, h_n)}.$$

(iii) Es gilt die folgende Darstellung

$$Q = R_{0,1}^{(F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1})}.$$

(iv) Die Verteilungsfunktion von  $Q$  ist gegeben durch

$$F_Q(x_1, \dots, x_n) = \min_{i=1, \dots, n} F_i(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

■

Ein Beweis findet sich in Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas und Vyncke (2002a).

**Bemerkung 1.26 (Komonotone Zufallsvariable)**

Die Definition der Komonotonie lässt sich in kanonischer Weise auf Zufallsvariablen übertragen. Eine  $\mathbb{R}^n$ -wertige Zufallsvariable  $X = (X_1, \dots, X_n)$  heißt (oder auch: die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen) komonoton, wenn  $P^{(X_1, \dots, X_n)}$  komonoton ist. ■

Von besonderem Interesse wird im Folgenden die Verteilung der Summe der Komponenten einer komonotonen Zufallsvariablen (oder einfach: der Summe komonotoner Zufallsvariablen) sein. Das folgende Lemma offenbart zwei besondere Eigenschaften einer solchen Summe: deren Quantile und gestutzte Erwartungswerte lassen sich leicht aus den (Rand-)Verteilungen der Summanden bestimmen.

**Lemma 1.27**

Sei  $X^c = (X_1^c, \dots, X_n^c)$  eine komonotone integrierbare  $\mathbb{R}^n$ -wertige Zufallsvariable mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$ . Bezeichne  $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ . Dann gilt:

(i)  $F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(p) \quad \forall p \in (0, 1]$  .

(ii)  $E([S^c - d]^+) = \sum_{i=1}^n E([X_i^c - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]^+) - [d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d))](1 - F_{S^c}(d))$   
 $\forall d \in \text{int } \{0 < F_{S^c} < 1\}.$

**Beweis:**

Bezeichne  $U$  eine  $R_{0,1}$ -verteilte Zufallsvariable (die auch auf einem anderen W-Raum als  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  definiert sein mag). Charakterisierung (iii) der Komonotonie in Lemma 1.25 liefert die Darstellung  $(X_1^c, \dots, X_n^c) \stackrel{d}{=} (F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))$ .

- (i) Offenbar gilt  $S^c \stackrel{d}{=} h(U)$  mit der monoton wachsenden und linksseitig stetigen Funktion  $h(u) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u)$ ,  $u \in (0, 1)$ .

Für jede monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion  $g$  und jede reelle Zufallsvariable  $Y$  gilt

$$F_{g(Y)}^{-1}(p) = g(F_Y^{-1}(p)) \quad \text{für alle } p \in (0, 1). \quad (1.23)$$

Dies folgt aus der für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $p \in (0, 1)$  gültigen Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x &\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} p \leq F_{g(X)}(x) \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} p \leq F_X(\sup\{y | g(y) \leq x\}) \\ &\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y | g(y) \leq x\} \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} g(F_X^{-1}(p)) \leq x, \end{aligned}$$

mit  $F_X(-\infty) := 0$  und  $F_X(\infty) := 1$ ; dabei folgen die Äquivalenzen (a) jeweils aus der Quantildefinition, und die Äquivalenzen (b) jeweils auf Grund der für jede isotone und linksseitig stetige Funktion  $g$  gültigen Beziehung  $g(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq \sup\{y | g(y) \leq x\}$ .

Damit ergibt sich

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{h(U)}^{-1}(p) = h(F_U^{-1}(p)) = h(p) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(p) \quad \text{für alle } p \in (0, 1);$$

Grenzübergang für  $p \rightarrow 1$  liefert wegen der linksseitigen Stetigkeit von Quantilfunktionen die Behauptung für  $p = 1$ .

- (ii) Aus  $d \in \text{int}\{0 < F_{S^c} < 1\}$  folgt notwendig  $F_i^{-1}(F_{S^c}(d)) \in \mathbb{R}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Wir formen wie folgt um:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E([X_i^c - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]^+) &= \sum_{i=1}^n E([F_i^{-1}(U) - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]^+) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{F_{S^c}(d)}^1 F_i^{-1}(p) - F_i^{-1}(F_{S^c}(d)) dp \\ &= \int_{F_{S^c}(d)}^1 \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(p) - \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(F_{S^c}(d)) dp \end{aligned}$$

Mit (i) ist die zweite Summe unter dem Integralzeichen gleich  $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)) \leq d$ , die erste gleich  $F_{S^c}^{-1}(p)$ . Damit ist nun

$$\sum_{i=1}^n E([X_i^c - F_i^{-1}(F_{S^c}(d))]^+) = \int_{F_{S^c}(d)}^1 F_{S^c}^{-1}(p) - d dp + \int_{F_{S^c}(d)}^1 d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)) dp$$

Das erste Integral vereinfacht sich wegen  $p > F_{S^c}(d) \Leftrightarrow F_{S^c}^{-1}(p) > d$  zu

$$\int_0^1 [F_{S^c}^{-1}(p) - d]^+ dp = E([F_{S^c}^{-1}(U) - d]^+) = E([S^c - d]^+),$$

und das zweite Integral ist gleich  $[d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d))](1 - F_{S^c}(d))$ , was zu zeigen war. ■

**Bemerkung 1.28 (gestutzte Erwartungswerte einer komonotonen Summe)**

Teil (i) des vorstehenden Lemmas liefert alle Quantile von  $S^c$ , und nach Bemerkung 1.22 erhält man aus diesen sofort den in Teil (ii) benötigten Wert der Verteilungsfunktion von  $S^c$ .

Offensichtlich gilt im Fall  $d \in \text{supp } S^c$  gerade  $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)) = d$  und damit

$$[d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d))](1 - F_{S^c}(d)) = 0,$$

womit sich die Formel für  $E[(S^c - d)^+]$  in Lemma 1.27 (ii) entsprechend vereinfacht.

Für den Fall  $d \notin \text{int } \{0 < F_{S^c} < 1\}$  gilt im Übrigen wegen (1.14) und (1.15):

$$E([S^c - d]^+) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } d > F_{S^c}^{-1}(1) \\ E(S^c - d) & , \text{ falls } d \leq F_{S^c}^{-1}(0) \end{cases}.$$
■

Das folgende Lemma kann dahingehend interpretiert werden, dass sich durch Diversifizierung das als (Lower-)Tail-Value-at-Risk gemessene Risiko nicht verringert, wenn die 'Risiken', in die investiert wird, komonoton sind. Vor diesem Hintergrund ist die *komonotone Additivität* eine Forderung an ein Risikomaß, die zusätzlich zu der nach dessen Kohärenz äußerst sinnvoll erscheint.

**Lemma 1.29 (Komonotone Additivität des (Lower-)Tail-Value-at-Risk)**

In der Situation von Lemma 1.27 gilt für alle  $\alpha \in (0, 1)$ :

- (i)  $\text{TVaR}_\alpha(S^c) = \sum_{i=1}^n \text{TVaR}_\alpha(X_i^c),$
  - (ii)  $\text{L-TVaR}_\alpha(S^c) = \sum_{i=1}^n \text{L-TVaR}_\alpha(X_i^c).$
- 

Dies folgt sofort aus der Definition des (Lower-)Tail-Value-at-Risk in Verbindung mit Lemma 1.27 (i).

## 1.5 Die Lognormalverteilung

In der Einführung zu Beginn der vorliegenden Arbeit ist bereits deutlich geworden, dass lognormalverteilte Zufallsvariablen eine wichtige Rolle bei der Modellbildung im Finanzwesen spielen. Dies ist zumeist durch die Modellierung von Aktienkursen als Geometrische Brownsche Bewegung verursacht. Deshalb soll in diesem Abschnitt Wissenswertes über die Lognormalverteilung zusammengetragen werden, so dass später darauf zurück gegriffen werden kann.

### Definition 1.30

Eine reelle Zufallsvariable  $X > 0$  heißt *lognormalverteilt* mit Parametern  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\lambda^2 > 0$ , wenn

$$Y = \ln(X)$$

eine  $N(\tau, \lambda^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist. Man schreibt  $X \sim \mathfrak{L}(\tau, \lambda^2)$ . ■

Es folgt unmittelbar, dass eine mit einem positiven Faktor  $a$  multiplizierte  $\mathfrak{L}(\tau, \lambda^2)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  wiederum lognormalverteilt ist:  $aX \sim \mathfrak{L}(\tau + \ln a, \lambda^2)$ . Entsprechendes gilt bei Potenzbildung mit einem  $b \neq 0$ :  $X^b \sim \mathfrak{L}(b\tau, (b\lambda)^2)$ . Beides sind Folgerungen aus der linearen Transformationseigenschaft der Normalverteilung.

### Lemma 1.31 (Kenngrößen der Lognormalverteilung)

Für eine Zufallsvariable  $X \sim \mathfrak{L}(\tau, \lambda^2)$  gilt:

$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{\ln(t) - \tau}{\lambda}\right) \quad \forall t > 0 \quad (1.24)$$

$$q_p(X) = q^p(X) = e^{\tau + \lambda \Phi^{-1}(p)} \quad \forall p \in (0, 1) \quad (1.25)$$

$$E(X) = e^{\tau + \frac{\lambda^2}{2}} \quad (1.26)$$

$$\text{Var}(X) = e^{2 \cdot (\tau + \frac{\lambda^2}{2})} (e^{\lambda^2} - 1) \quad (1.27)$$

$$E[(X - t)^+] = e^{\tau + \frac{\lambda^2}{2}} \Phi\left(\lambda + \frac{\tau - \ln(t)}{\lambda}\right) - t \Phi\left(\frac{\tau - \ln(t)}{\lambda}\right) \quad \forall t > 0 \quad (1.28)$$

$$E[X|X > t] = e^{\tau + \frac{\lambda^2}{2}} \frac{\Phi\left(\lambda + \frac{\tau - \ln(t)}{\lambda}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau - \ln(t)}{\lambda}\right)} \quad \forall t > 0 \quad (1.29)$$

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = e^{\tau + \frac{\lambda^2}{2}} \frac{\Phi(\lambda - \Phi^{-1}(1 - \alpha))}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (1.30)$$

■

Die Formeln für die Verteilungsfunktion und die Quantile sind leicht zu verifizieren. Formel (1.28) für gestutzte Erwartungswerte erhält man nach einer längeren Rechnung

über die Definition des Erwartungswertes; alternativ leite man die gegebene Formel nach  $t$  ab, und vergewissere sich, dass man als Ableitung  $F_X - 1$  erhält. Die Formeln für den bedingten Erwartungswert und den Tail-Value-at-Risk folgen unmittelbar. Den Erwartungswert erhält man aus (1.28) für  $t \rightarrow 0$ , die Varianz über die Definition oder, vorteilhafter, unter Ausnutzung von  $X^2 \sim \mathfrak{L}(2\tau, (2\lambda)^2)$ .

**Bemerkung 1.32**

Eine Formel für  $E[(t - X)^+]$  ergibt sich leicht aus (1.28) unter Ausnutzung von (1.11); ferner erhält man

$$E[X|X < t] = t - \frac{E[(t - X)^+]}{P(X < t)},$$

und daraus durch Setzen von  $t = q^\alpha(X)$  schließlich den Lower-Tail-Value-at-Risk zum Niveau  $\alpha$ . ■

Ist  $X$  eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit  $E(X) = \mu$  und  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ , so ergeben sich die Verteilungsparameter  $\tau$  und  $\lambda^2$  offenbar als eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mu &= \exp\left\{\tau + \frac{\lambda^2}{2}\right\} \\ \sigma^2 &= \exp\left\{2\left(\tau + \frac{\lambda^2}{2}\right)\right\} (\exp\{\lambda^2\} - 1), \end{aligned}$$

welche gegeben ist durch

$$\lambda^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) \tag{1.31}$$

$$\tau = \ln(\mu) - \frac{1}{2} \lambda^2, \tag{1.32}$$

Mit Hilfe dieser *Inversionsformeln* können also die Parameter einer Lognormalverteilung in Abhängigkeit von ihren ersten beiden Momenten bestimmt werden.

Wenden wir uns nun der multivariaten Lognormalverteilung zu, denn in der interessierenden Anwendung werden wir es in der Regel mit korrelierten lognormalverteilten Zufallsvariablen zu tun haben.

**Definition 1.33 ( $n$ -dimensionale Lognormalverteilung)**

Eine Zufallsvariable  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  mit Werten in  $(0, \infty)^n$  heißt  $n$ -dimensional lognormalverteilt mit Parametern  $\tau = (\tau_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$  und  $\Lambda = ((\lambda_{ij}))_{i, j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht-negativ definit, wenn

$$Z = (\ln(X_1), \dots, \ln(X_n))^\top$$

eine  $N(\tau, \Lambda)$ -verteilte Zufallsvariable ist. Man schreibt:  $X \sim \mathfrak{L}(\tau, \Lambda)$ . ■

Der Erwartungswertvektor  $\mu = (\mu_i)_{i=1,\dots,n} = E(X)$  und die Kovarianzmatrix  $\Sigma = ((\sigma_{ij}))_{i,j=1,\dots,n} = \text{Cov}(X)$  von  $X$  ergeben sich gemäß

$$\mu_i = \exp\left\{\tau_i + \frac{1}{2}\lambda_{ii}\right\}, \quad (1.33)$$

$$\sigma_{ij} = \exp\left\{\tau_i + \frac{1}{2}\lambda_{ii}\right\} \exp\left\{\tau_j + \frac{1}{2}\lambda_{jj}\right\} (\exp\{\lambda_{ij}\} - 1). \quad (1.34)$$

**Bemerkung 1.34**

Die Komponenten einer  $n$ -dimensional lognormalverteilten Zufallsvariablen sind jeweils 1-dimensional lognormalverteilt. Die 1-dimensional lognormalverteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn sie unkorreliert sind. Beide Aussagen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für normalverteilte Zufallsvariablen.

**Lemma 1.35**

Seien ein Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und eine nicht-negativ definite Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben und  $X$  eine lognormalverteilte Zufallsvariable. Bezeichne

$$\Lambda = ((\lambda_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} = \left( \left( \ln \left( 1 + \frac{\sigma_{ij}}{\mu_i \mu_j} \right) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (1.35)$$

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $E(X) = \mu$  und  $\text{Cov}(X) = \Sigma$ ,
- (ii)  $X \sim \mathfrak{L}(\tau, \Lambda)$  mit

$$\tau = \left( \ln(\mu_i) - \frac{1}{2}\lambda_{ii} \right)_{1 \leq i \leq n}. \quad (1.36)$$

■

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt sofort nach Einsetzen von (1.35) und (1.36) in (1.33) und (1.34). Zum Beweis der Umkehrung verbleibt lediglich festzustellen, dass  $\tau$  und  $\Lambda$  gemäß (1.35) und (1.36) die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (1.33) und (1.34) darstellt.

Mit Hilfe der beiden *Inversionsformeln* (1.35) und (1.36) können also die Parameter der Lognormalverteilung bestimmt werden, wenn deren Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix vorgegeben sind.

Das folgende Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz aus der linearen Transformationseigenschaft der multivariaten Normalverteilung.

**Lemma 1.36 (Abgeschlossenheit bzgl. Produktbildung)**

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{L}(\tau, \Lambda)$  mit  $\tau \in \mathbb{R}^n$  und  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht-negativ definit, sowie  $c = (c_1, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\prod_{i=1}^n X_i^{c_i} \sim \mathcal{L}(c^\top \tau, c^\top \Lambda c).$$

**Bemerkung 1.37 (Korrelierte Aktienpreisprozesse im Black-Scholes-Modell)**

Sei  $(W_s^{(1)}, \dots, W_s^{(n)})_{t>0}$  ein  $n$ -dimensionaler Standard-Wienerprozess<sup>6</sup>, dessen Komponenten nicht als stochastisch unabhängig vorausgesetzt sind. Der zufällige Preis des  $k$ -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt  $s$  wird beschrieben durch die Zufallsvariable

$$A_s^{(k)} = A_0^{(k)} \exp \left\{ \left( \mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) s + \sigma_k W_s^{(k)} \right\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

wobei  $\mu_k \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_k > 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$  vorausgesetzt sei.  $A_0^{(k)}$  sei eine positive Konstante.  $(A_s^{(k)})_{s>0}$  ist also eine im Punkt  $(A_0^{(k)})$  startende geometrische Brownsche Bewegung mit Drift  $\mu_k$  und Volatilität  $(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2})$ .

Für die (matrixwertige) Kovarianzfunktion

$$K(s, t) := ((\text{Cov}(W_s^{(k)}, W_t^{(l)}))_{k,l=1,\dots,n})$$

des involvierten  $N$ -dimensionalen Wienerprozesses gelte  $K(s, t) = \min\{s, t\} \cdot C$ , wobei  $C = ((\varrho_{kl}))_{k,l=1,\dots,n}$  mit  $\varrho_{kl} = \text{Cov}(W_1^{(k)}, W_1^{(l)})$ . Diese Struktur impliziert die Unabhängigkeit von (nicht überlappenden) Zuwächsen je zweier Komponenten,

$$\text{Cov}(W_{t_2}^{(k)} - W_{t_1}^{(k)}, W_{s_2}^{(l)} - W_{s_1}^{(l)}) = 0 \quad \text{für } s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2;$$

was im betrachteten Finanzmarktmodell eine durchaus sinnvolle Annahme zu sein scheint: Wenn der Wertzuwachs einer Aktie in einer Periode unabhängig von dem Wertzuwachs dieser Aktie in einer vorhergehenden Periode modelliert wird, dann sollte letzteres auch für eine andere Aktie gelten. Ebenso impliziert die gegebene Struktur von  $K(s, t)$  eine gewisse zeitliche Homogenität der Kovarianz,

$$\text{Cov}(W_s^{(k)}, W_s^{(l)}) = s \cdot \text{Cov}(W_1^{(k)}, W_1^{(l)});$$

dies sorgt dafür, dass die Korrelation nicht von der Zeit abhängt:

$$\text{Corr}(W_s^{(k)}, W_s^{(l)}) = \text{Corr}(W_1^{(k)}, W_1^{(l)}).$$

---

<sup>6</sup>Ein  $n$ -dimensionaler stochastischer Prozess heiße Standard-Wienerprozess, wenn dessen Zuwche  $n$ -dimensional normalverteilt und über nicht-überlappende Zeitintervalle stochastisch unabhängig sind sowie jede Komponente ein Standard-Wienerprozess ist, d.h. wenn  $E(W_t^{(k)}) = 0$  und  $\text{Var}(W_t^{(k)}) = t$  für alle  $t \geq 0$  und alle  $k = 1, \dots, n$  gilt.

Vor diesem Hintergrund könnte man also  $\rho_{kl}$  auch einfach als "die Korrelation" der  $k$ -ten und  $l$ -ten Komponente des Wienerprozesses ansprechen. Man beachte, dass die Diagonalelemente von  $C$  sämtlich gleich 1 sind, da wir von einem Standard-Wienerprozess ausgegangen waren.

Die Rendite des  $k$ -ten Wertpapiers über einem Zeitintervall  $[s, t]$  ist nun offenbar

$$R_{s,t}^{(k)} = \frac{A_t^{(k)}}{A_s^{(k)}} = \exp \left\{ \sigma_k (W_t^{(k)} - W_s^{(k)}) + \left( \mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) (t - s) \right\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

und die Rendite aller  $n$  Wertpapiere über dem Zeitintervall  $[s, t]$ , aufgefasst als Spaltenvektor,

$$R_{s,t} = (R_{s,t}^{(1)}, \dots, R_{s,t}^{(n)})^\top,$$

ist eine  $\mathcal{L}(\tau, \Lambda)$ -verteilte Zufallsvariable, wobei sich deren Parameter wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \tau_k &= \left( \mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) (t - s), \quad k = 1, \dots, n, \\ \lambda_{kl} &= \sigma_k \sigma_l \rho_{kl} (t - s), \quad k, l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Erwartungswerte und Kovarianzen der Renditen ergeben sich in Abhängigkeit von den Parametern des Aktienpreisprozesses gemäß (1.33) und (1.34):

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(R_{s,t}^{(k)}) = e^{\mu_k(t-s)}, \quad k = 1, \dots, n, \\ \sigma_{kl} &= \text{Cov}(R_{s,t}^{(k)}, R_{s,t}^{(l)}) = e^{\mu_k(t-s)} e^{\mu_l(t-s)} (e^{\sigma_k \sigma_l \rho_{kl}(t-s)} - 1), \quad k, l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

■

# Kapitel 2

## Approximation einer Summenverteilung in der konvexen Halbordnung

In diesem Kapitel sollen Methoden zur Approximation der Verteilung einer Summe

$$S := \sum_{i=1}^n X_i .$$

von beliebigen reellen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  vorgestellt werden, die auf dem Konzept der konvexen Halbordnung beruhen. Dazu erläutern wir zunächst ausführlich, wie man Zufallsvariablen  $\bar{S}$  bzw.  $\underline{S}$  konstruieren kann, welche die Zufallsvariable  $S$  im Sinne der konvexen Halbordnung dominieren bzw. von ihr dominiert werden:

$$\underline{S} \leq_{cx} S \leq_{cx} \bar{S} .$$

Wir werden im Folgenden  $\bar{S}$  bzw.  $\underline{S}$  als *obere* bzw. *untere konvexe Schranke für  $S$*  ansprechen. Die Verteilung der in Abschnitt 2.1 konstruierten Schranken wird sich in der Regel als relativ einfach bestimmbar herausstellen; hierbei spielt das Konzept der Komonotonie eine entscheidende Rolle.

Wir hatten in Kapitel 1 bereits erwähnt, dass es gerade bei Fragestellungen im Bereich des Finanz- und Versicherungswesens sinnvoll sein kann, die Zufallsvariable  $S$  (mit schwer handzuhabender Verteilung) in den Berechnungen durch eine (je nach Fragestellung) untere oder obere konvexe Schranke zu ersetzen, d.h. zu approximieren. Hier stellt sich nun sogleich die Frage nach der Güte der Approximation. Zu deren Beantwortung werden wir später einen einfachen Abstands begriff einführen, der es erlaubt, obere Schranken für diesen Abstand zu konstruieren – oder anders ausgedrückt: den maximal möglichen Approximationsfehler zu quantifizieren.

## 2.1 Konvexe Schranken

Die im folgenden Resultat behauptete obere konvexe Schranke basiert auf der *oberen Fréchet-Schranke* für den Vektor  $X = (X_1, \dots, X_n)$  der Summanden von  $S$ . Dabei ist die obere Fréchet-Schranke gegeben durch den komonotonen Zufallsvektor mit denselben Randverteilungen wie  $X$ .

### Satz 2.1 (Komonotone obere Schranke für Summenverteilungen)

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine integrierbare  $\mathbb{R}^n$ -wertige Zufallsvariable und  $X^c = (X_1^c, \dots, X_n^c)$  eine komonotone integrierbare  $\mathbb{R}^n$ -wertige Zufallsvariable mit denselben Randverteilungen wie  $X$ . Dann gilt:

$$(S =) \sum_{i=1}^n X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n X_i^c (=: S^c).$$

#### Beweis:

Zu zeigen verbleibt  $E[(S - t)^+] \leq E[(S^c - t)^+]$ , denn die Erwartungswerte stimmen wegen der gleichen Randverteilungen bereits überein. Es bezeichnen  $F_1, \dots, F_n$  die Randverteilungsfunktionen von  $X$  (und somit von  $X^c$ ).

(i) Sei  $t \notin \{0 < F_{S^c} < 1\}$ .

Wir zeigen zunächst, dass daraus  $t \notin \{0 < F_S < 1\}$  folgt:

Es gilt

$$P\left(S \leq \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(1)\right) \geq P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq F_i^{-1}(1)\}\right) = 1,$$

und weiter  $\sum_{i=1}^n F_i^{-1}(1) = F_{S^c}^{-1}(1)$  nach Lemma 1.27 (i), womit  $F_S^{-1}(1) \leq F_{S^c}^{-1}(1)$  gezeigt ist. Andererseits gilt

$$P\left(S \geq \sum_{i=1}^n F_i^-(0)\right) \geq P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq F_i^-(0)\}\right) = 1,$$

und weiter  $\sum_{i=1}^n F_i^-(0) = F_{S^c}^-(0)$  nach Lemma 1.27 (i) in Verbindung mit (1.2) und Ausnutzung der Komonotonie von  $-X^c$ , womit  $F_S^-(0) \geq F_{S^c}^-(0)$  gezeigt ist.

Somit erhalten wir, unter Berücksichtigung von (1.14) und (1.15),

$$E[(S - t)^+] = E[(S^c - t)^+] = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \geq F_{S^c}^{-1}(1) \\ E(S) - t & , \text{ falls } t \leq F_{S^c}^-(0) \end{cases},$$

womit  $E[(S - t)^+] \leq E[(S^c - t)^+]$  sogar mit Gleichheit erfüllt ist.

(ii) Sei  $t \in \{0 < F_{S^c} < 1\}$ . Der weitere Beweis erfolgt nun lediglich für den Fall, dass der Träger von  $S^c$  ein Intervall ist<sup>1</sup>, also für  $\{0 < F_{S^c} < 1\} \subseteq \text{supp } S^c$ ; siehe Kaas, Dhaene und Goovaerts (2000) für den allgemeinen Fall. Wegen  $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(t)) = t$  gilt zunächst

$$(S - t)^+ = (S - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(t)))^+.$$

Nun lässt sich gemäß Lemma 1.27 (i)  $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(t))$  durch  $\sum_{i=1}^n F_i^{-1}(F_{S^c}(t))$  ersetzen; andererseits gilt  $[\sum_{i=1}^n (x_i - t_i)]^+ \leq \sum_{i=1}^n (x_i - t_i)^+$  für alle  $x_i, t_i \in \mathbb{R}$ , womit wir wie folgt abschätzen können:

$$(S - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(t)))^+ = \left[ \sum_{i=1}^n \left( X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(t)) \right) \right]^+ \leq \sum_{i=1}^n \left( X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(t)) \right)^+.$$

Erwartungswertbildung auf beiden Seiten liefert

$$E[(S - t)^+] \leq \sum_{i=1}^n E \left[ \left( X_i - F_i^{-1}(F_{S^c}(t)) \right)^+ \right],$$

und nach Ersetzen von  $X_i$  durch  $X_i^c$  ist die rechte Seite nach Lemma 1.27 (ii) gerade  $E[(S^c - t)^+]$ . ■

Der vorstehende Satz kann auch wie folgt gelesen werden: Innerhalb der Menge aller Zufallsvektoren mit vorgegebenen Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$  dominiert die Summe der Komponenten des komonotonen Zufallsvektors die Summe der Komponenten jedes anderen Zufallsvektors in der konvexen Halbordnung. Das Resultat geht zurück auf Rüschendorf (1983); alternative Beweise dafür finden sich in Denneberg (1994), Dhaene und Goovaerts (1996) sowie Müller (1997).

### Bemerkung 2.2

- (i) Die Quantilfunktion  $F_{S^c}^{-1}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , und die GEW-Funktion<sup>2</sup>  $E[(S^c - t)^+]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , lassen sich gemäß Lemma 1.27 einfach bestimmen. Die Verteilungsfunktion von  $S^c$  erhält man aus der Quantilfunktion gemäß Bemerkung 1.22.
- (ii) Nach Lemma 1.25 gilt  $X^c \stackrel{d}{=} (F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))$  mit einer  $R_{0,1}$ -verteilten Zufallsvariable  $U$ .

Zur späteren Verwendung wollen wir Satz 2.1 in kanonischer Weise für Verteilungen formulieren: Sei  $Q$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$  mit endlichem Erwartungswert, Randverteilungen  $Q_i$  und Randverteilungsfunktionen

<sup>1</sup>Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Träger der Summanden allesamt Intervalle sind.

<sup>2</sup>GEW steht wie bisher für Gestutzte-Erwartungswerte-Funktion.

$F_i, i = 1, \dots, n$ . Bezeichne  $\pi_i$  die  $i$ -te Projektionsabbildung,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt:

$$Q^{\sum_{i=1}^n \pi_i} \leq_{cx} \left( R_{0,1}^{(F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1})} \right)^{\sum_{i=1}^n \pi_i} .$$

■

Kaas et al. (2000) konnten diese komonotone obere konvexe Schranke verbessern. Zur Konstruktion dieser verbesserten oberen konvexen Schranke sind jedoch zunächst noch einige Vorbereitungen nötig.

**Lemma 2.3 (Hilfsresultat)**

Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (B, \mathcal{B})$  und  $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (C, \mathcal{C})$  sowie eine messbare Funktion  $f : (B \times C, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . Dann gilt:

$$P^{f(X,Z)|Z=z} = P^{f(X,z)} \quad \text{für } P^Z\text{-fast alle } z \in C .$$

**Beweis:**

Die gemäß  $K(z, E) := P^{f(X,z)}(E)$  definierte Funktion  $K : C \times \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$  ist offenbar ein Markov-Kern von  $(C, \mathcal{C})$  nach  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . Es verbleibt zu zeigen, dass für alle  $E \in \mathfrak{B}$  und  $F \in \mathcal{C}$  gilt:

$$P^{(f(X,Z),Z)}(E \times F) = \int_F P^{f(X,z)}(E) dP^Z(z) . \tag{2.1}$$

Bezeichnen wir  $g : (x, z) \mapsto (f(x, z), z)$ , so erhalten wir unter Ausnutzung der stochastischen Unabhängigkeit von  $X$  und  $Z$ :

$$\begin{aligned} P^{(f(X,Z),Z)}(E \times F) &= \int \mathbf{1}_{E \times F}(g(x, z)) dP^{(X,Z)}(x, z) \\ &= \int \int \mathbf{1}_E(f(x, z)) \mathbf{1}_F(z) dP^X(x) dP^Z(z) \\ &= \int_F \int_E dP^{f(X,z)}(x) dP^Z(z) . \end{aligned}$$

Das innere Integral ist jedoch gerade  $P^{f(X,z)}(E)$ , womit (2.1) gezeigt ist.

Also ist  $K$  eine bedingte Verteilung von  $f(X, Z)$  gegeben  $Z$ . Da diese eindeutig ist im Sinne von

$$K(z, \cdot) = P^{f(X,Z)|Z=z}(\cdot) \quad \text{für } P^Z\text{-fast alle } z \in C ,$$

folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden bezeichne für zwei Zufallsvariablen  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Z : \Omega \rightarrow C$   $F_{Y|Z=z}$  die Verteilungsfunktion von  $P^{Y|Z=z}$ ,  $z \in C$ . Für eine weitere Zufallsvariable  $U : \Omega \rightarrow (0, 1)$  definiert man dann  $F_{Y|Z}^{-1}(U) := g(U, Z)$ , wobei  $g(u, z) := F_{Y|Z=z}^{-1}(u)$ .

**Satz 2.4 (schärfere obere Schranke für eine Summenverteilung)**

Gegeben seien integrierbare reelle Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , sowie weitere Zufallsvariablen  $Z$  und  $U \sim R_{0,1}$ ; dabei seien  $Z, U$  stochastisch unabhängig.

Dann gilt:

$$(S =) \sum_{i=1}^n X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z}^{-1}(U) =: S^u .$$

**Beweis:**

Sei  $Z : \Omega \rightarrow C$  und  $z \in C$  beliebig, aber fest gewählt. Wir benutzen nun die Version von Satz 2.1 für Verteilungen, vgl. Bemerkung 2.2 (ii); wählen wir dort  $Q = P^{(X_1, \dots, X_n)|Z=z}$ , dann erhalten wir unter Berücksichtigung von  $F_i = F_{X_i|Z=z}$ :

$$P \sum_{i=1}^n X_i | Z = z \leq_{cx} P \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z=z}^{-1}(U) .$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $Z$  und  $U$  gilt mit Lemma 2.3 (man wähle dort  $f(x, z) = \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z=z}^{-1}(x)$  und  $X = U$ )

$$P \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z=z}^{-1}(U) = P \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z}^{-1}(U) | Z = z \quad \text{für } P^Z\text{-fast alle } z \in C ;$$

Lemma 1.20 liefert schließlich die Behauptung. ■

**Bemerkung 2.5**

(i) Die Zufallsvariable  $(F_{X_1|Z}^{-1}(U), \dots, F_{X_n|Z}^{-1}(U))$  hat dieselben Randverteilungen wie  $X$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} P(F_{X_i|Z}^{-1}(U) \leq t) &\stackrel{(a)}{=} \int_C P^{F_{X_i|Z}^{-1}(U)|Z=z}((-\infty, t]) dP^Z(z) \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_C P(F_{X_i|Z=z}^{-1}(U) \leq t) dP^Z(z) \\ &= \int_C P(U \leq F_{X_i|Z=z}(t)) dP^Z(z) \\ &= \int_C F_{X_i|Z=z}(t) dP^Z(z) \\ &= \int_C P^{X_i|Z=z}((-\infty, t]) dP^Z(z) \\ &\stackrel{(a)}{=} P^{X_i}((-\infty, t]) = F_{X_i}(t) ; \end{aligned}$$

dabei folgen die Identitäten (a) jeweils auf Grund der Eigenschaften von bedingten Verteilungen und die Identität (b) wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $U, Z$  in Verbindung mit Lemma 2.3.

(ii) Im Lichte von Lemma 2.1 folgt aus (i)

$$S^u \leq_{cx} S^c, \quad (2.2)$$

was nichts anderes bedeutet, als dass mittels einer bedingenden Zufallsvariablen  $Z$  eine obere konvexe Schranke gefunden werden kann, welche mindestens so scharf ist wie die komonotone obere Schranke aus Lemma 2.1. Keine Verschärfung ergibt sich im Fall der stochastischen Unabhängigkeit von  $X$  und  $Z$ , weil dann die beiden oberen Schranken offensichtlich zusammenfallen.

(iii) Andererseits gilt  $P^S = P^{S^u}$ , falls  $X$  komonoton ist (denn dann gilt neben (2.2) auch noch  $P^S = P^{S^c}$ ) oder  $P^{X|Z=z}$  für alle  $z \in N$  komonoton ist. Letzteres sieht man wiederum mit Bemerkung 2.2 (ii) ein.

(iv) Auf Grund der Isotonie von Verteilungsfunktionen ist für alle  $z \in C$  die Verteilung

$$P(F_{X_1|Z=z}^{-1}(U), \dots, F_{X_n|Z=z}^{-1}(U)),$$

welche nach Lemma 2.3 für  $P^Z$ -fast alle  $z \in C$  mit

$$P(F_{X_1|Z}^{-1}(U), \dots, F_{X_n|Z}^{-1}(U))|Z = z$$

übereinstimmt, komonoton. Daher lassen sich gemäß Lemma 1.27 die (bedingte) Quantilfunktion  $F_{S^u|Z=z}^{-1}$  sowie die GEW-Funktion  $E[(S^u - \cdot)^+ | Z = z]$  einfach bestimmen. Die Verteilungsfunktion von  $P^{S^u|Z=z}$  erhält man aus der Quantilfunktion gemäß Bemerkung 1.22. Erwartungswertbildung bezüglich  $P^Z$  liefert schließlich die gewünschten unbedingten Versionen von Verteilungs- und GEW-Funktion. ■

Das folgende Resultat zeigt, wie mit Hilfe der Jensen-Ungleichung eine untere konvexe Schranke für  $S$  konstruiert werden kann. Der mit den Grundlagen der Mathematischen Statistik vertraute Leser wird darin eine gewisse Verbindung zum Satz von Rao-Blackwell erkennen.

**Satz 2.6 (untere Schranke für eine Summenverteilung)**

Gegeben seien integrierbare reelle Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und eine weitere Zufallsvariable  $Z$ .

Dann gilt:

$$S^l := E(S|Z) = \sum_{i=1}^n E(X_i|Z) \leq_{cx} \sum_{i=1}^n X_i (= S).$$

**Beweis:**

Unter Ausnutzung der Jensen-Ungleichung ergibt sich für alle konvexen Funktionen  $v$ , für die  $v(S)$  integrierbar ist:

$$E[v(S)|Z] \geq v(E(S|Z)) \quad P\text{-f.s.};$$

Erwartungswertbildung auf beiden Seiten liefert die Behauptung. ■

**Bemerkung 2.7**

- (i) Ist die bedingende Zufallsvariable  $Z$  reellwertig und wird sie so gewählt, dass die Funktionen

$$g_i : z \mapsto E(X_i|Z = z) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

sämtlich isoton (oder sämtlich antiton) sind, dann ist  $(E(X_1|Z), \dots, E(X_n|Z))$  nach Definition komonoton. In diesem Fall liefert Lemma 1.27 wiederum eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung der Quantilfunktion (und damit der Verteilungsfunktion gemäß Bemerkung 1.22) sowie von gestutzten Erwartungswerten von  $S^l$ .

Sind die  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sämtlich isoton, so lässt sich unter der zusätzlichen Voraussetzung ihrer linksseitigen Stetigkeit die Quantilfunktion von  $S^l$  mit Hilfe von (1.23) besonders einfach berechnen; man erhält für alle  $p \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} F_{S^l}^{-1}(p) &= \sum_{i=1}^n F_{E(X_i|Z)}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{g_i(Z)}^{-1}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(F_Z^{-1}(p)) = \sum_{i=1}^n E(X_i|Z = F_Z^{-1}(p)); \end{aligned} \quad (2.3)$$

eine ähnliche Aussage gilt auch für den antitonen Fall.

- (ii) Im Allgemeinen hat  $(E(X_1|Z), \dots, E(X_n|Z))$  — im Unterschied zu den Summanden von  $S^c$  und  $S^u$  — nicht dieselben Randverteilungen wie  $X$ .
- (iii) Wird  $S$  durch  $Z$   $P$ -fast sicher determiniert, gilt also  $S = f \circ Z$   $P$ -f.s. für eine Abbildung  $f$ , so ergibt sich  $S^l = S$   $P$ -f.s. als "beste", jedoch in der Praxis nutzlose untere konvexe Schranke. Sind  $S, Z$  stochastisch unabhängig, so ergibt sich  $S^l = E(S)$   $P$ -f.s. (d.h.  $S^l$  ist einpunktverteilt in  $E(S)$ ) als "schlechteste" untere konvexe Schranke.

**Bemerkung 2.8 (Wahl der bedingenden Zufallsvariable  $Z$ )**

In der Praxis wird man nur für bestimmte Wahlen der bedingenden Zufallsvariable  $Z$  die bedingten Verteilungen der  $X_i$  gegeben  $Z$  und damit die Verteilungen der verbesserten oberen Schranke  $S^u = S^u(Z)$  bzw. der unteren Schranke  $S^l = S^l(Z)$  bestimmen können. Möchte man — was nicht unplausibel erscheint — den  $L^1$ -Abstand der GEW-Funktion von  $S$  zu der von  $S^u(Z)$  bzw.  $S^l(Z)$  minimieren, so wird man sich unter den zur Auswahl stehenden bedingenden Zufallsvariablen jedoch gerade für diejenige Zufallsvariable  $Z$  entscheiden, für welche  $\text{Var}(S^u(Z))$  minimal bzw.  $\text{Var}(S^l(Z))$  maximal wird. Denn nach (1.19) ist ja der  $L^1$ -Abstand der GEW-Funktionen zweier konvex geordneter Zufallsvariablen gleich dem halben Absolutbetrag der Differenz ihrer Varianzen. In diesem Sinne kann eine solche Wahl von  $Z$  dann als *global optimal* (unter den zur Auswahl stehenden  $Z$ ) angesehen werden.

## 2.2 Güte der Approximation, $\varrho$ -Abstand

Es stellt sich nun die Frage, wie der Approximationsfehler bei Approximation einer Summenvariable  $S$  durch eine ihrer konvexen Schranken quantifiziert werden soll.

Gängige Abstandsmaße für den Abstand zweier Verteilungen  $Q, Q'$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  sind beispielsweise der *Kolmogorov-Abstand*

$$d_K(Q, Q') := \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_Q(t) - F_{Q'}(t)| ,$$

oder der *Totalvariationsabstand*

$$d_\infty(Q, Q') := \sup_{B \in \mathfrak{B}^1} |Q(B) - Q'(B)| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_Q(t) - f_{Q'}(t)| d\mu(t) ,$$

wobei letztere Darstellung nur dann sinnvoll ist, wenn  $Q$  und  $Q'$  Dichten bezüglich eines Maßes  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$  besitzen. Die Bestimmung dieser Abstände, oder zumindest von Schranken für letztere, ist jedoch praktisch nicht möglich, wenn (wie im später noch zu untersuchenden Fall, dass  $Q$  die Verteilung eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen ist) die Verteilungs- bzw. Dichtefunktion von  $Q$  nur schwer oder gar nicht bestimmt werden kann.

Statt dessen betrachten wir mit Blick auf die eingangs ausführlich motivierten Risikomaße, die uns ja überhaupt erst zum Konzept der konvexen Halbordnung geführt hatten, einen anderen einfachen, aber zweckmäßigen Abstandsbegriff.

Dazu definieren wir eine Familie von Pseudometriken  $\{\varrho_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  auf der Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit endlichem Erwartungswert durch

$$\varrho_t(Q, Q') := |E_Q[(id - t)^+] - E_{Q'}[(id - t)^+]| , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Dies ist lediglich eine Pseudometrik, weil  $\varrho_t(Q, Q') = 0$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  nicht  $Q = Q'$  impliziert. Die beiden Verteilungen sind jedoch genau dann gleich, wenn  $\varrho_t(Q, Q') = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Wenn wir im Folgenden kurz vom  $\varrho$ -Abstand zweier Verteilungen sprechen, so ist damit die Familie  $\{\varrho_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  (oder äquivalent die Funktion  $t \mapsto \varrho_t(Q, Q')$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) angesprochen. Sind  $Q, Q'$  die Verteilungen zweier reeller Zufallsvariablen  $S, S'$ , so schreiben wir vereinfachend auch  $\varrho_t(S, S') := \varrho_t(Q, Q')$ .

Sei  $S$  nun und im weiteren Verlauf dieses Kapitels eine beliebige quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariable, also abweichend von der bisherigen Notation nicht notwendig eine Summenvariable, und  $S'$  eine quadrat-integrierbare (untere oder obere) konvexe Schranke für  $S$ . Für solche konvex geordneten Zufallsvariablen  $S, S'$  werden wir in Abschnitt 2.4 auf Basis eines geometrischen Ansatzes ein Resultat der Art

$$|\text{Var}(S') - \text{Var}(S)| \leq \varepsilon \implies \varrho_t(S, S') \leq \delta(\varepsilon, t)$$

herleiten, wobei in die Funktion  $\delta$  nur die Verteilung einer der beiden Zufallsvariablen eingeht. Anschließend soll in Abschnitt 2.5 noch eine alternative obere Schranke für die spezielle Wahl  $S' = E(S|Z)$  gemäß Satz 2.6 betrachtet werden.

Zuvor stellen wir noch kurz eine andere interessante Methode zur Approximation der Verteilung von  $S$  vor, in die sowohl eine untere als auch eine obere konvexe Schranke für  $S$  involviert sind.

## 2.3 Konstruktion einer varianzgleichen Approximation.

Vyncke, Goovaerts und Dhaene (2004) haben vorgeschlagen, aus einer oberen und einer unteren konvexen Schranke für  $S$  eine Zufallsvariable zu konstruieren, welche dieselbe Varianz wie  $S$  hat.

Sei  $S$  eine quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariable,  $\underline{S}$  eine untere konvexe Schranke für  $S$  und  $\overline{S}$  eine quadrat-integrierbare obere konvexe Schranke für  $S$ .

Sei eine Familie von Zufallsvariablen  $S_z$ ,  $z \in [0, 1]$ , gegeben mit

$$F_{S_z}(t) := zF_{\underline{S}}(t) + (1 - z)F_{\overline{S}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Integration auf beiden Seiten unter Berücksichtigung von (1.16) liefert:

$$E[(S_z - t)^+] = zE[(\underline{S} - t)^+] + (1 - z)E[(\overline{S} - t)^+] \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Nun gilt jedoch wegen (1.19):

$$\text{Var}(S_z) - \text{Var}(S) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} E[(S_z - t)^+] - E[(S - t)^+] dt.$$

Nullsetzen, Einsetzen von (2.4) und Auflösen nach  $z$  liefert

$$z^* = \frac{\text{Var}(S) - \text{Var}(\overline{S})}{\text{Var}(\underline{S}) - \text{Var}(\overline{S})} \in [0, 1].$$

Die Verteilung von  $S_{z^*}$  ist eine Konvexkombination von  $P^{\underline{S}}$  und  $P^{\overline{S}}$  mit derselben Varianz wie  $P^S$ . Bezeichnen wir  $S^m := S_{z^*}$ , so lässt sich  $S^m$  nun allerdings im Allgemeinen nicht mehr in der konvexen Halbordnung mit  $S$  vergleichen. Die hier vorgestellte Konstruktionsidee erscheint jedoch sinnvoll, wenn  $S$  durch eine Zufallsvariable mit denselben ersten beiden Momenten approximiert werden soll.<sup>3</sup>

Um eine Aussage über die Güte dieser Approximation treffen zu können, quantifizieren wir den Approximationsfehler im Sinne des  $\varrho$ -Abstandes. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir für jede Konvexkombination  $S_z$ ,  $z \in [0, 1]$ , und damit insbesondere für  $z = z^*$ , und alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\varrho_t(S, S_z) \leq z\varrho_t(S, \underline{S}) + (1 - z)\varrho_t(S, \overline{S}). \quad (2.5)$$

Maximierung der rechten Seite (bzgl.  $\varrho_t(S, \underline{S})$  und  $\varrho_t(S, \overline{S})$  bei festem  $t$ ) unter der Nebenbedingung  $\varrho_t(S, \underline{S}) + \varrho_t(S, \overline{S}) = \varrho_t(\underline{S}, \overline{S})$  liefert die folgende Abschätzung:

$$\varrho_t(S, S_z) \leq \max\{z, 1 - z\}\varrho_t(\underline{S}, \overline{S}) \quad \text{für alle } z \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

Wie bereits angekündigt, werden wir im folgenden Abschnitt Abschätzungen nach oben für  $\varrho_t(S, \underline{S})$  und  $\varrho_t(S, \overline{S})$  — und damit für die rechte Seite von (2.5) — konstruieren. Die so erhaltene obere Schranke für  $\varrho_t(S, S_z)$  kann dann mit der oberen Schranke (2.6) verglichen werden.

## 2.4 Geometrische Schranken für den $\varrho$ -Abstand

Sei  $S$  eine quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariable,  $\overline{S}$  eine quadrat-integrierbare obere konvexe Schranke für  $S$  und  $\underline{S}$  eine untere konvexe Schranke für  $S$ , d.h. es gelte  $\underline{S} \leq_{cx} S \leq_{cx} \overline{S}$ . Per Definition der konvexen Ordnung gilt also

$$E[(\underline{S} - t)^+] \leq E[(S - t)^+] \leq E[(\overline{S} - t)^+] \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Unter Berücksichtigung des typischen Verlaufs von GEW-Funktionen, vgl. Bemerkung 1.14, ergibt sich für die GEW-Funktionen von  $\underline{S}$ ,  $S$  und  $\overline{S}$  ein schematischer Verlauf wie in Abbildung 2.1. Es stellt sich nun, insbesondere im Lichte der beiden vorhergehenden Abschnitte, die Frage, wie weit die zu  $S$  korrespondierende (und damit in der Regel unbekannte) Kurve von den entsprechenden Kurven seiner konvexen Schranken entfernt ist.

---

<sup>3</sup>Der Superindex in der Notation  $S^m$  steht denn auch für **M**oment.

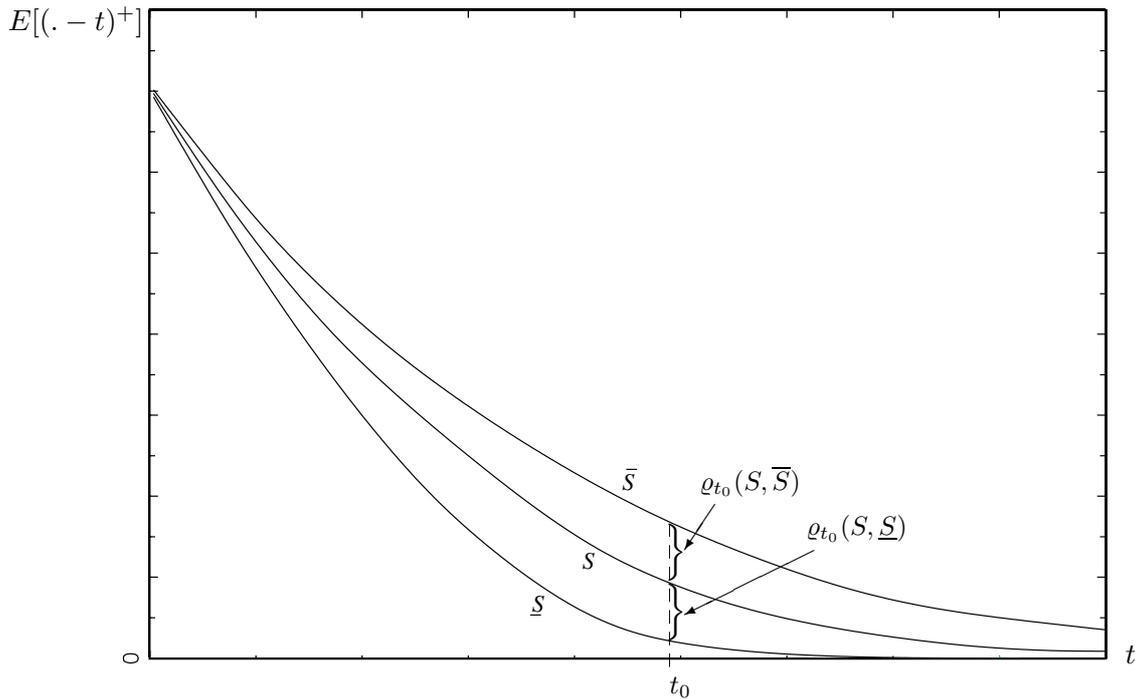


Abbildung 2.1: schematischer Verlauf der GEW-Funktionen von Zufallsvariablen  $\underline{S} \leq_{cx} S \leq_{cx} \bar{S}$  (Ausschnitt)

Wir werden im Folgenden für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl  $\nabla_{\bar{S}}(t)$  bzw.  $\Delta_{\underline{S}}(t)$  bestimmen, welche eine obere Schranke für den Abstand  $\varrho_t(S, \bar{S})$  bzw.  $\varrho_t(S, \underline{S})$  darstellt. Die Funktionen  $\nabla_{\bar{S}}$  bzw.  $\Delta_{\underline{S}}$  (als Funktionen von  $t \in \mathbb{R}$ ) sind dann obere Schranken für den Fehler ("Fehlerschranken") im Sinne des  $\varrho$ -Abstands, wenn  $S$  durch seine obere konvexe Schranke  $\bar{S}$  bzw. durch seine untere konvexe Schranke  $\underline{S}$  approximiert wird.

**Bemerkung 2.9 (triviale obere Schranke)**

Offensichtlich gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\varrho_t(S, \underline{S}), \varrho_t(S, \bar{S}) \leq E[(\bar{S} - t)^+] - E[(\underline{S} - t)^+] = \varrho_t(\underline{S}, \bar{S}). \quad (2.7)$$

Allerdings könnte diese *triviale* obere Fehlerschranke zu grob sein. Dies wird jedenfalls dann der Fall sein, wenn mindestens eine der konvexen Schranken einen großen  $\varrho_t$ -Abstand zu  $S$  besitzt. Andererseits könnte  $\varrho_t(\underline{S}, \bar{S})$  in der Praxis auch gar nicht oder nur aufwendig zu berechnen sein, z.B. weil die untere konvexe Schranke keine komonotone Struktur besitzt oder zur Berechnung der oberen konvexen Schranke eine numerische Integration erforderlich ist, vgl. die Bemerkungen 2.5 und 2.7.

### 2.4.1 Obere Schranke(n) für den $\varrho$ -Abstand

Im Sinne der Übersichtlichkeit beschränken wir uns im Folgenden auf zwei konvex geordnete Zufallsvariablen,  $X \leq_{cx} Y$ , und bestimmen eine obere Schranke für  $\varrho_t(X, Y)$  für den Fall, dass wir über die Verteilung einer der beiden Zufallsvariablen Kenntnis haben. In der oben besprochenen Situation setze man  $X = \underline{S}$  und  $Y = S$ , oder man setze  $X = S$  und  $Y = \overline{S}$ .

#### Lemma 2.10

Sei  $X$  eine integrierbare reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_X$  and bezeichne  $g : s \mapsto E[(X - s)^+]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Dann:

(i) Für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$q_t : s \mapsto g(s) - g(t) + (s - t), \quad s \in \{F_X > 0\},$$

strikt isoton. Es existiert die Umkehrfunktion  $q_t^{-1}$  auf dem Bild  $q_t(\{F_X > 0\}) \supseteq (0, \infty)$ .

(ii) Die Funktion  $g|_{\{F_X < 1\}}$  ist strikt antiton. Es existiert die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  auf dem Bild  $g(\{F_X < 1\}) = (0, \infty)$ .

(iii) Für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$h_t : z \mapsto z \cdot [q_t^{-1}(z) - g^{-1}(g(t) + z)], \quad z \in (0, \infty),$$

strikt isoton. Es existiert die Umkehrfunktion  $h_t^{-1}$  auf dem Bild  $h_t((0, \infty)) = (0, \infty)$ .

#### Beweis:

(i) Sei  $t \in \mathbb{R}$  fest gewählt. Wir zeigen zunächst, dass  $q_t$  eine isotone Funktion ist.  $q_t$  ist als Summe zweier konvexer Funktionen konvex. Es gilt  $q_t'(s) = (F_X(s) - 1) + 1 = F_X(s) > 0$  für  $s \in \{F_X > 0\}$ , und damit ist  $q_t$  auf  $\{F_X > 0\}$  strikt isoton, vgl. das allgemeine Resultat in Bemerkung 1.14.

Offensichtlich gilt auf Grund der Eigenschaften einer Verteilungsfunktion entweder  $\{F_X > 0\} = \mathbb{R}$ , oder  $\{F_X > 0\}$  ist eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . In letzterem Fall ist  $\{F_X > 0\}$  von der Form  $[c, \infty)$  oder  $(c, \infty)$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ ; hier gilt  $F_X(c-) = 0$  und damit wegen (1.14) auch  $g(c) = E(X) - c$ . Einsetzen liefert  $q_t(c) = (E(X) - t) - g(t)$ , und dieser Wert ist wegen (1.12) nicht-positiv. Wegen der Isotonie und Stetigkeit von  $q_t$  und wegen  $\lim_{s \rightarrow \infty} q_t(s) = \infty$  folgt sofort  $q_t(\{F_X > 0\}) \supseteq (0, \infty)$ . Analog zeigt man  $q_t(\{F_X > 0\}) \supseteq (0, \infty)$  im Fall  $\{F_X > 0\} = \mathbb{R}$ .

- (ii) Nach Folgerung 1.13 ist  $g$  eine konvexe Funktion mit  $g'_+(s) = F_X(s) - 1 < 0$  für  $s \in \{F_X < 1\}$ . Daher ist  $g$  (vgl. wiederum das allgemeine Resultat in Bemerkung 1.14) strikt antiton auf  $\{F_X < 1\}$ . Wegen (1.15) gilt  $\{F_X < 1\} = \{g > 0\}$ , woraus sofort  $g(\{F_X < 1\}) \subseteq (0, \infty)$  folgt. Ferner gilt  $\{F_X < 1\} = \mathbb{R}$ , oder  $\{F_X < 1\}$  ist von der Form  $(c, \infty)$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ ; ähnliche Argumente (Stetigkeit, Antitonie von  $g$ ) wie im Beweis von (i) liefern  $g(\{F_X < 1\}) \supseteq (0, \infty)$ .
- (iii) Sei wiederum  $t \in \mathbb{R}$  fest gewählt. Wir betrachten die Hilfsfunktion  $v(z) = g^{-1}(g(t) + z)$ ,  $z \in (0, \infty)$ . Diese ist als Inverse einer strikt antitonen Funktion ebenfalls strikt antiton. Ferner gilt  $q_t^{-1}(z) > v(z)$  für alle  $z > 0$ ; dies ergibt sich nach Anwendung der (strikt isotonen) Funktion  $q_t$  auf beiden Seiten und weiteren äquivalenten Umformungen. In Verbindung mit (i) stellt sich damit schließlich die Funktion  $h_t(z) = z \cdot [q_t^{-1}(z) - v(z)]$ ,  $z > 0$ , als strikt isoton heraus. Wegen  $\lim_{z \rightarrow 0, z > 0} h_t(z) = 0$  und der Stetigkeit von  $h_t$  folgt  $h_t((0, \infty)) = (0, \infty)$ .

Die Existenz der Umkehrfunktion folgt jeweils aus der Stetigkeit der Funktionen. ■

Nun sind wir in der Lage, das angekündigte Resultat über die Fehlerschranke für den  $\varrho$ -Abstand zweier konvex geordneter Zufallsvariablen zu formulieren. Die Konstruktion der Fehlerschranken beruht im Wesentlichen auf der Eigenschaft (1.19) von gestutzten Erwartungswerten. Diese lässt sich im Lichte des Abstandsbegriffes  $\varrho$  wie folgt formulieren: Für quadrat-integrierbare Zufallsvariablen  $X, Y$  mit  $X \leq_{cx} Y$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_t(X, Y) dt = \frac{1}{2}(\text{Var}(Y) - \text{Var}(X)). \quad (2.8)$$

Anders ausgedrückt: Die halbe Differenz der Varianzen ist gleich dem über ganz  $\mathbb{R}$  stetig kumulierten  $\varrho_t$ -Abstand, also dem Flächeninhalt des von den beiden GEW-Funktionen eingeschlossenen Bereichs.

### Satz 2.11

Seien  $X, Y$  zwei quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariablen mit  $X \leq_{cx} Y$ . Es bezeichne  $F_Y$  die Verteilungsfunktion von  $Y$ ,  $M = \text{int}\{0 < F_Y < 1\}$  das Innere des Trägerintervalls von  $Y$  sowie  $\varepsilon := \text{Var}(Y) - \text{Var}(X) > 0$ .

Sei  $h_t^X$  definiert wie in Lemma 2.10 für die Zufallsvariable  $X$ , sowie für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\nabla_Y(t) := \left( \frac{1}{F_Y(t-)} + \frac{1}{1 - F_Y(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot 1_M(t), \quad (2.9)$$

$$\Delta_X(t) := (h_t^X)^{-1}(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Dann gilt für alle  $t \in M$ :

$$\varrho_t(X, Y) \leq \min\{ \nabla_Y(t), \Delta_X(t) \} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Für alle  $t \in \mathbb{R} \setminus M$  gilt  $\varrho_t(X, Y) = 0$ .

**Bemerkung 2.12**

Mit Blick auf die Definitionen von  $\nabla_Y$  und  $\Delta_X$  stellt man fest, dass bei der Berechnung der Fehlerschranke  $\nabla_Y$  die Verteilung von  $X$  (über ihre Varianz hinaus) nicht eingeht, ebenso wenig wie die Verteilung von  $Y$  bei der Berechnung von  $\Delta_X$ . Dies ist auch sinnvoll, denn wir waren ja davon ausgegangen, dass wir nur die Verteilung einer der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  kennen; anderenfalls ließe sich  $\varrho_t(X, Y)$  sofort ausrechnen. Eigentlich liefert der vorstehende Satz also zwei Fehlerschranken

$$\min\{\nabla_Y(t), \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\} \quad \text{und} \quad \min\{\Delta_X(t), \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\},$$

von denen in der Praxis jedoch nur eine zu bestimmen sein wird.

Man beachte, dass – gegeben die Varianzen von  $X$  und  $Y$  – die Berechnung von  $\nabla_Y(t)$  nur Kenntnis über das *lokale* Verhalten der GEW-Funktion von  $Y$  (im Punkt  $t$ ) erfordert, während in die Berechnung von  $\Delta_X(t)$  das *globale* Verhalten der GEW-Funktion von  $X$  einfließt. Dies wird im nun folgenden Beweis des Satzes noch deutlich werden.

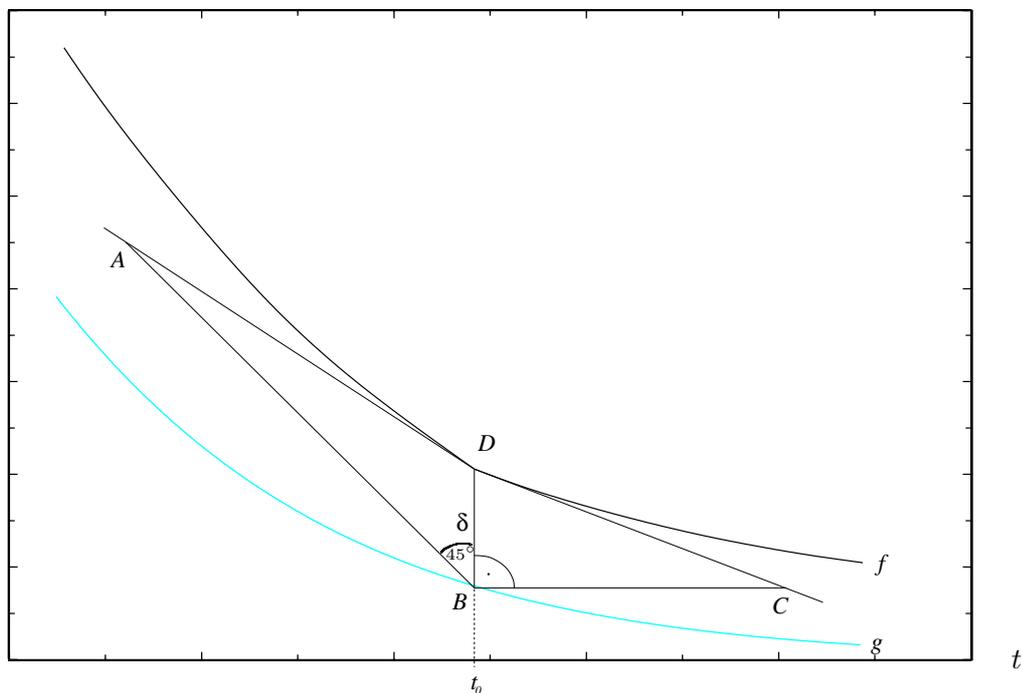


Abbildung 2.2: Abschätzung der Fläche zwischen den beiden Kurven nach unten gegen die Fläche des Vierecks  $ABCD$

**Beweis von Satz 2.11:**

Bezeichne wie in Lemma 2.10  $g(s) = E[(X - s)^+]$  und weiter  $f(s) = E[(Y - s)^+]$ . Damit gilt  $\varrho_t(X, Y) = f(t) - g(t)$ .

Die letzte Aussage des Satzes ist leicht einzusehen. Wegen  $X \leq_{cx} Y$  ist  $E(X) = E(Y)$  sowie  $g(t) \leq f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Offensichtlich gilt  $t \in \mathbb{R} \setminus M$  genau dann, wenn  $F_Y(t-) = 0$  oder  $F_Y(t) = 1$  gilt. Ist  $F_Y(t-) = 0$ , so gilt mit (1.14)

$$f(t) = E(Y) - t = E(X) - t \leq E[(X - t)^+] = g(t) \leq f(t),$$

also  $\varrho_t(X, Y) = 0$ . Ist hingegen  $F_Y(t) = 1$ , so gilt mit (1.15)  $0 = f(t) \geq g(t) \geq 0$ , also folgt auch in diesem Fall  $\varrho_t(X, Y) = 0$ .

Sei nun im weiteren  $t = t_0 \in M$  fest gewählt und bezeichne  $\delta := \varrho_{t_0}(X, Y)$ . Wir erläutern zunächst die Idee für den Beweis von (2.11). (2.8) liefert die obere Schranke  $\varepsilon/2$  für den Flächeninhalt der von den Funktionen  $f$  und  $g$  eingeschlossenen Fläche. Um nun zu der behaupteten Fehlerschranke (2.11) zu gelangen, werden wir einfache geometrische Figuren (mit möglichst großem Flächeninhalt) zwischen die Funktionen  $f$  und  $g$  einbeschreiben und ausnutzen, dass deren Flächeninhalt nach oben durch  $\varepsilon/2$  beschränkt ist. Als geometrische Figuren wählen wir Dreiecke, deren eine Seitenlänge gerade  $\delta$  ist und nutzen unser Wissen über die GEW-Funktionen  $f$  und  $g$  aus.

(i): Abbildung 2.2 zeigt, wie sich zwischen den Kurven  $f$  und  $g$  ein Viereck  $ABCD$  (bestehend aus den beiden Dreiecken  $\triangle ABD$  und  $\triangle BCD$ ) einbeschreiben lässt, dessen Flächeninhalt offenbar nach oben  $\varepsilon/2$  beschränkt ist.

Dabei sind die Eckpunkte wie folgt gewählt:

$$B = (t_0, g(t_0)), \quad D = (t_0, f(t_0)),$$

der Punkt  $A$  als der Schnittpunkt der linksseitigen Tangente<sup>4</sup> an  $f$  im Punkt  $t_0$  mit der Geraden  $w_1(s) = -s + g(t_0) + t_0$  (welche durch  $B$  verläuft und die Steigung  $-1$  aufweist) sowie  $C$  der Schnittpunkt der rechtsseitigen Tangente an  $f$  in  $t_0$  mit der zur Abszissenachse parallelen Geraden  $w_2(s) = g(t_0)$ .

Die Länge der zur Ordinatenachse parallelen Seite  $BD$  ist gerade  $\delta$  und die Länge der zur Abszissenachse parallelen Seite  $BC$  ist

$$-\frac{\delta}{f'_+(t_0)},$$

womit wir für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle BCD$  erhalten:

$$\text{area}(\triangle BCD) = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{f'_+(t_0)}.$$

---

<sup>4</sup>Die links- bzw. rechtsseitige Tangente an  $f$  in  $t_0$  ist hier definiert als die Gerade durch den Punkt  $(t_0, f(t_0))$ , deren Steigung gerade die linksseitige Ableitung  $f'_-(t_0)$  bzw. die rechtsseitige Ableitung  $f'_+(t_0)$  von  $f$  in  $t_0$  ist.

Das Dreieck  $\triangle ABD$  ist so konstruiert, dass der von den Seiten  $AB$  und  $BD$  eingeschlossene Winkel  $45^\circ$  beträgt. Dies sichert, dass dieses Dreieck auch wirklich zwischen den beiden Kurven liegt. Letzteres sieht man leicht ein, denn die Seite  $AB$  ist ein Segment der Geraden  $w_1(s) = -s + g(t_0) + t_0$  mit Steigung  $w_1'(s) = -1$ , und wegen  $g_+'(s) = F_X(s) - 1 \geq -1$  für alle  $s$  hat man  $g(s) \leq w_1(s)$  für alle  $s \leq t_0$ .

Wir bezeichnen für den Moment die Innenwinkel des Dreiecks  $\triangle ABD$  in den Punkten  $A, B$  bzw.  $D$  mit  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$  und berechnen die Dreiecksfläche mit Hilfe der Formel

$$\text{area}(\triangle ABD) = \frac{\delta^2 \sin(\beta) \sin(\gamma)}{2 \sin(\alpha)}.$$

Dazu stellen wir, unter Berücksichtigung von  $\beta = \frac{\pi}{4}$ , fest:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arctan(f_-'(t_0)), \quad \alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{\pi}{4} + \arctan(f_-'(t_0)).$$

Nun verwenden wir jeweils das wohlbekannte Additionstheorem  $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$ , benutzen hernach die für  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  gültigen Beziehungen

$$\sin(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

und erhalten

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_-'(t_0))^2}}, \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + f_-'(t_0)}{\sqrt{1 + (f_-'(t_0))^2}},$$

woraus sich der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABD$  ergibt:

$$\text{area}(\triangle ABD) = \frac{\delta^2 \sin(\beta) \sin(\gamma)}{2 \sin(\alpha)} = \frac{\delta^2}{2} \frac{1}{1 + f_-'(t_0)}.$$

Der Flächeninhalt des Vierecks  $ABCD$  ist dann schließlich als Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke gleich

$$\frac{\delta^2}{2} \left( \frac{1}{f_-'(t_0) + 1} - \frac{1}{f_+'(t_0)} \right)$$

und als solches nicht größer als der Flächeninhalt  $\varepsilon/2$  des von den beiden Kurven  $f$  und  $g$  eingeschlossenen Gebiets. Wir erhalten also für  $\delta$  (unter Berücksichtigung von  $f_-'(t_0) = F_Y(t_0-) - 1$  sowie  $f_+'(t_0) = F_Y(t_0) - 1$ , vgl. Folgerung 1.13 (ii)) die folgende Abschätzung nach oben,

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{F_Y(t_0-)} + \frac{1}{1 - F_Y(t_0)}}} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \nabla_Y(t_0).$$

Nun gilt wegen der Isotonie von  $F_Y$  offenbar

$$\nabla_Y(t_0) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{F_Y(t_0)} + \frac{1}{1-F_Y(t_0)}}} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

und die rechte Seite kann auch noch vorteilhaft umgeformt werden,

$$\nabla_Y(t_0) \leq \sqrt{F_Y(t_0) - F_Y^2(t_0)} \cdot \sqrt{\varepsilon} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon}.$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich auf Grund der Abschätzung  $F_Y - F_Y^2 \leq \frac{1}{4}$ .

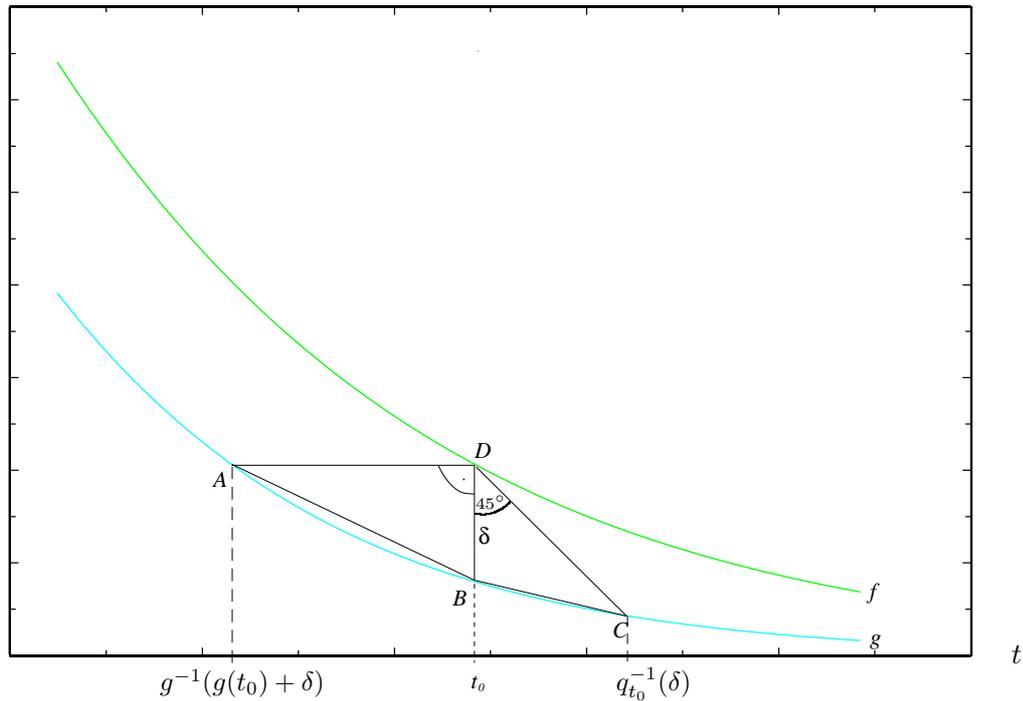


Abbildung 2.3: Abschätzung der Fläche zwischen den beiden Kurven nach unten gegen die Fläche des Vierecks  $ABCD$

(ii): Nun lässt sich auch auf andere Weise ein Viereck  $ABCD$  zwischen den beiden Kurven  $f$  und  $g$  einbeschreiben, siehe Abbildung 2.3. Dieses Mal werden wir jedoch unsere Kenntnis über den Verlauf der Kurve  $g$  ausnutzen. Wir betrachten dazu zunächst das rechtwinklige Dreieck  $\triangle ABD$ , dessen Eckpunkte wie folgt gewählt sind:

$$A = (g^{-1}(f(t_0)), f(t_0)), \quad B = (t_0, g(t_0)), \quad D = (t_0, f(t_0)).$$

Der Punkt  $A$  ist nach Lemma 2.10 (ii) wohldefiniert. Dieses Dreieck liegt auf Grund der Antitonie von  $f$  und der Konvexität von  $g$  zwischen den beiden Kurven  $f$  und  $g$ .

Die Länge der zur Ordinatenachse parallelen Kathete  $BD$  ist  $\delta$  und die der zur Abszissenachse parallelen Kathete  $AD$  ist offenbar  $t_0 - g^{-1}(f(t_0)) = t_0 - g^{-1}(g(t_0) + \delta)$ . Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$\text{area}(\triangle ABD) = \frac{\delta}{2}(t_0 - g^{-1}(g(t_0) + \delta)) .$$

Der Punkt  $C$  ist als Schnittpunkt der Funktion  $g(s)$  mit der Geraden  $m(s) := -s + g(t_0) + \delta + t_0$  (durch  $D$  mit Steigung  $-1$ ) gewählt. Diese Wahl von  $C$  sichert, dass das Dreieck  $\triangle BCD$  tatsächlich zwischen den beiden Kurven  $f$  und  $g$  liegt, denn es gilt  $m(s) \leq f(s)$  für  $s \geq t_0$ . Letzteres sieht man sofort ein, denn es gilt  $m(t_0) = f(t_0)$ ,  $m'(s) = -1$  und  $f'_+(s) \geq -1$  für alle  $s$ .

Die Abzisse von  $C$  ergibt sich also als Lösung der Gleichung  $g(s) = m(s)$ , d.h. als Lösung (für  $s$ ) von

$$g(s) - g(t_0) + (s - t_0) = \delta .$$

Aber die eindeutige Lösung dieser Gleichung hatten wir mit  $q_{t_0}^{-1}(\delta)$  bezeichnet, vgl. Lemma 2.10 (i). Wir erhalten:

$$C = ( q_{t_0}^{-1}(\delta), m(q_{t_0}^{-1}(\delta)) ) .$$

Somit ergibt sich die Länge  $u$  der Seite  $CD$  als

$$u = \sqrt{(q_{t_0}^{-1}(\delta) - t_0)^2 + [m(q_{t_0}^{-1}(\delta)) - (g(t_0) + \delta)]^2} = \sqrt{2}(q_{t_0}^{-1}(\delta) - t_0)$$

und die Länge der Seite  $BD$  ist  $\delta$ ; der Winkel zwischen diesen beiden Seiten ist offensichtlich  $45^\circ$ . Damit erhalten wir:

$$\text{area}(\triangle BCD) = \frac{1}{2}\delta u \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\delta}{2}(q_{t_0}^{-1}(\delta) - t_0) .$$

Der Flächeninhalt des Vierecks  $ABCD$  ist als Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke gleich

$$\frac{1}{2}\delta \cdot [q_{t_0}^{-1}(\delta) - g^{-1}(g(t_0) + \delta)] = \frac{1}{2}h_{t_0}^X(\delta) , \quad (2.13)$$

und als solches nicht größer als der Flächeninhalt des von den beiden Kurven  $g$  und  $f$  eingeschlossenen Gebiets; nach (1.19) haben wir also

$$\frac{1}{2}h_{t_0}^X(\delta) \leq \frac{1}{2}\varepsilon .$$

Nach Lemma 2.10 (iii) ist  $h_{t_0}^X$  strikt isoton, womit wir schließlich erhalten:

$$\delta \leq (h_{t_0}^X)^{-1}(\varepsilon) = \Delta_X(t_0) ;$$

unter Berücksichtigung der Ergebnisse in Teil (i) des Beweises ergibt sich weiter:

$$\delta \leq \min\{\nabla_Y(t_0), \Delta_X(t_0)\} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} .$$

Nun hatten wir aber zu Beginn  $t_0 \in M$  beliebig gewählt und  $\delta = \varrho_{t_0}(X, Y)$  gesetzt, womit die Behauptung bewiesen ist. ■

**Bemerkung 2.13 (zum Beweis von Satz 2.11)**

- (i) Die Gleichheit in (2.12) gilt offenbar genau dann, wenn  $t_0$  ein Stetigkeitspunkt von  $F_Y$  ist, d.h. falls  $f$  in  $t_0$  differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so führt dies zu einer Degeneration des Vierecks  $ABCD$  zu einem Dreieck  $\triangle ABC$ , vgl. Abbildung 2.2, und – einigermaßen bemerkenswert – zu einer Verschlechterung der Fehlerschranke  $\nabla_Y$  im Vergleich zum unstetigen Fall.
- (ii) Die Funktion  $h_t^X$  hat eine weitere geometrische Interpretation. Mit Blick auf (2.13) ist  $h_{t_0}^X(\delta)$  offenbar gerade der Flächeninhalt des Rechtecks in Abbildung 2.3, dessen eine Seitenlänge  $\delta$  beträgt und dessen andere Seitenlänge gerade so groß ist wie der Abstand der Abszissen der Punkte  $A$  und  $C$ .
- (iii) Existiert ein  $t^*$  mit  $F_Y(t^*) = 0.5$  (was insbesondere dann der Fall ist, wenn  $Y$  absolut-stetig verteilt ist), dann ist  $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$  die kleinste konstante Majorante für die Fehlerschranke  $\nabla_Y$ , denn letztere nimmt ihr Maximum  $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$  in  $t^*$  an. Siehe dazu das folgende Beispiel 2.14.  
 $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$  ist jedoch im Allgemeinen keine Majorante für  $\Delta_X$ , siehe dazu Beispiel 2.15 unten.

**Beispiel 2.14 (Exponentialverteilung als dominierende Verteilung)**

Es sei  $Y$  eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $1/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Für die Funktion  $\nabla_Y(t)$  gemäß Satz 2.11 gilt:

$$\nabla_Y(t) = e^{-\lambda t} \sqrt{e^{\lambda t} - 1} \sqrt{\varepsilon} 1_{(0, \infty)}(t).$$

Ihr eindeutiges Maximum nimmt sie in  $q_{0.5}(Y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(\frac{1}{2})$  an. Abbildung 2.4 zeigt den Verlauf der Funktion  $\nabla_Y$  für den Fall  $\lambda = 1$  und  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . ■

**Beispiel 2.15 (Einpunktverteilung als dominierte Verteilung)**

Es sei  $X$  eine im Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  einpunktverteilte Zufallsvariable. Man verifiziert leicht,

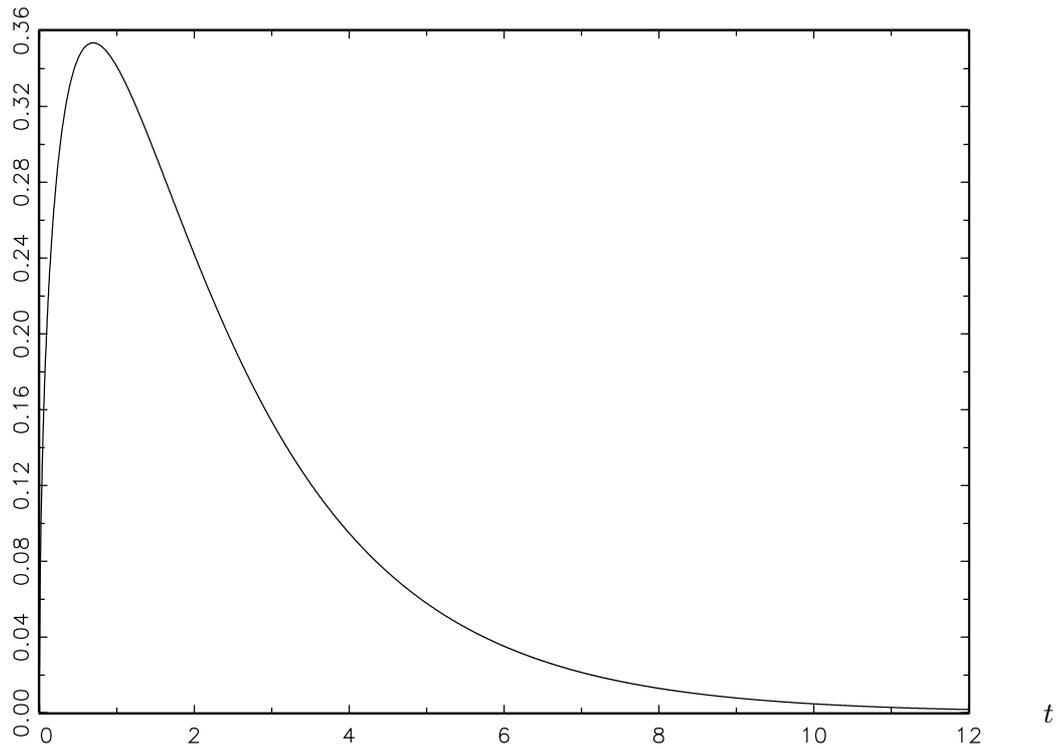


Abbildung 2.4: Obere Schranke  $\nabla_Y$  im Fall einer exponentialverteilten Zufallsvariable  $Y$

dass mit den Bezeichnungen von Satz 2.11 bzw. Lemma 2.10 gilt:

$$\begin{aligned}
 g(s) &= (t_0 - s)^+, \quad s \in \mathbb{R} \\
 q_t^{-1}(z) &= \begin{cases} z + t_0 & \text{für } t < t_0 \\ z + t & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}, \quad z > 0 \\
 g^{-1}(g(t) + z) &= \begin{cases} t - z & \text{für } t < t_0 \\ t_0 - z & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}, \quad z > 0 \\
 h_t(z) &= \begin{cases} 2z^2 + (t_0 - t)z & \text{für } t < t_0 \\ 2z^2 - (t_0 - t)z & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}, \quad z > 0 \\
 \Delta_X(t) = h_t^{-1}(\varepsilon) &= \begin{cases} -\frac{(t_0-t)}{4} + \sqrt{\frac{(t_0-t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}} & \text{für } t < t_0 \\ \frac{(t_0-t)}{4} + \sqrt{\frac{(t_0-t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}} & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $X$  wegen  $g(s) = (t_0 - s)^+$  von *jeder* Zufallsvariable mit Erwartungswert  $t_0$  im Sinne der konvexen Halbordnung dominiert wird. Die Funktion  $\Delta_X$  besitzt ihre Maximalstelle im Punkt  $t_0$ , das korrespondierende Maximum ist  $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon} > \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ . Abbildung 2.5 zeigt den Verlauf der Funktion  $\Delta_X$  für den Fall  $t_0 = 0$  und  $\varepsilon = 1$ .

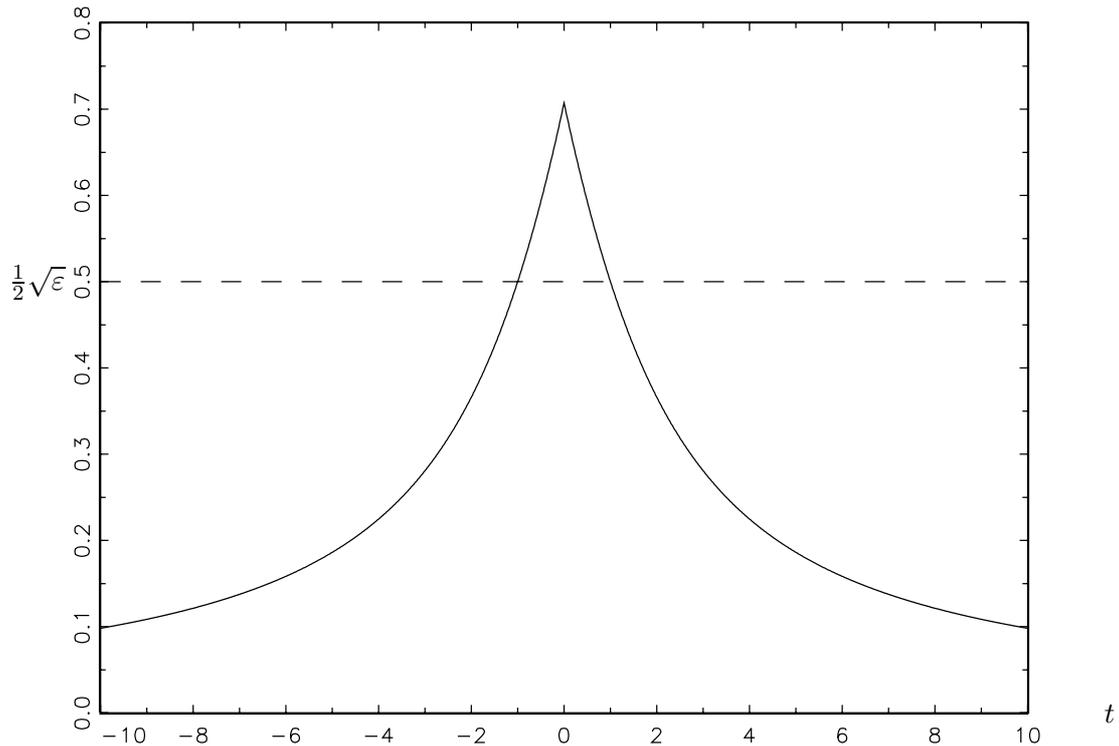


Abbildung 2.5: Obere Schranke  $\Delta_X$  im Fall einer im Punkt 0 einpunktverteilten Zufallsvariable  $X$

**Satz 2.16**

In der Situation von Satz 2.11 gilt:

- (i)  $\lim_{t \nearrow F_Y^{-1}(1)} \nabla_Y(t) = 0$ ,  $\lim_{t \searrow F_Y^{-1}(0)} \nabla_Y(t) = 0$ .
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_X(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta_X(t) = 0$ .

**Beweis:**

Aussage (i) ist auf Grund der Eigenschaften der Verteilungsfunktion  $F_Y$  unmittelbar einzusehen. Es folgt der Beweis von (ii).

Bezeichne  $g(s) = E[(X - s)^+]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  das Gleichungssystem in  $(s, z) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & z(s - g^{-1}(g(t) + z)) = \varepsilon \\ \text{(II)} \quad & g(s) + s - (g(t) + t) = z. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.10 besitzt dieses Gleichungssystem für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung, die mit  $(s_t, z_t)$  bezeichnet sei. Offenbar gilt  $z_t = \Delta_X(t)$ . Zu untersuchen bleibt also das asymptotische Verhalten von des Lösungskomponente  $z_t$ .

$t \rightarrow \infty$ :

Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge mit  $t_n \rightarrow \infty$ . Es folgt  $g(t_n) \rightarrow 0$  wegen (1.13). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Gleichung

$$(II) \quad g(s_{t_n}) + s_{t_n} - \underbrace{(g(t_n) + t_n)}_{\rightarrow \infty} = z_{t_n}.$$

Es folgt  $s_{t_n} \rightarrow \infty$ , denn  $l(s) := g(s) + s$  ist eine isotone Funktion mit  $\lim_{s \rightarrow \infty} l(s) = \infty$ , vgl. den Beweis von Lemma 2.10 (i).

Angenommen,  $z_{t_n}$  ist nach oben unbeschränkt. Dann existiert eine Teilfolge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $z_{t_{n_k}} \rightarrow \infty$ . Auf Grund der Gültigkeit der Gleichung

$$(I) \quad \underbrace{z_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty} \left( \underbrace{s_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{g^{-1}(g(t_{n_k}) + z_{t_{n_k}})}_{\rightarrow -\infty} \right) = \varepsilon,$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  ergibt sich ein offensichtlicher Widerspruch zur Annahme. Dabei haben wir die Antitonie der Funktion  $g^{-1}$  ausgenutzt, und dass deren Argument gegen  $\infty$  strebt.

Also ist  $z_{t_n}$  beschränkt. Aus der Gültigkeit der Gleichung

$$(I) \quad \underbrace{z_{t_n}}_{\text{beschr.}} \left( \underbrace{s_{t_n}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{g^{-1}(g(t_n) + z_{t_n})}_{\text{beschr.}} \right) = \varepsilon,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt nun  $z_{t_n} \rightarrow 0$ .

$t \rightarrow -\infty$ :

Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge mit  $t_n \rightarrow -\infty$ . Es folgt  $g(t_n) + t_n \rightarrow E(X)$  wegen (1.13).

Angenommen,  $z_{t_n}$  ist nach oben unbeschränkt. Dann existiert eine Teilfolge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $z_{t_{n_k}} \rightarrow \infty$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt Gleichung

$$(II) \quad g(s_{t_{n_k}}) + s_{t_{n_k}} - \underbrace{(g(t_{n_k}) + t_{n_k})}_{\rightarrow E(X)} = \underbrace{z_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty}.$$

Es folgt  $s_{t_{n_k}} \rightarrow \infty$  wegen der Eigenschaften der Funktion  $l(s) = g(s) + s$ , vgl. die Ausführungen im Fall  $t \rightarrow \infty$ . Auf Grund der Gültigkeit der Gleichung

$$(I) \quad \underbrace{z_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty} \left( \underbrace{s_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{g^{-1}(g(t_{n_k}) + z_{t_{n_k}})}_{\rightarrow -\infty} \right) = \varepsilon,$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme.

Also ist  $z_{t_n}$  nach oben beschränkt. Damit existiert ein Häufungspunkt  $c \geq 0$ .

Angenommen,  $c > 0$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $z_{t_{n_k}} \rightarrow c$ . Aus der Gültigkeit von

$$(I) \quad \underbrace{z_{t_{n_k}}}_{\rightarrow c} \left( \underbrace{s_{t_{n_k}}}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{g^{-1}(g(t_{n_k}) + z_{t_{n_k}})}_{\rightarrow -\infty} \right) = \varepsilon,$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt  $s_{t_{n_k}} \rightarrow -\infty$ . Dabei haben wir ausgenutzt, dass stets  $g(s) \geq E(X) - s$  gilt, vgl. (1.12), womit das Argument der Funktion  $g^{-1}$  gegen unendlich strebt. Auf Grund der Gültigkeit von

$$(II) \quad \underbrace{g(s_{t_{n_k}}) + s_{t_{n_k}}}_{\rightarrow E(X)} - \underbrace{(g(t_{n_k}) + t_{n_k})}_{\rightarrow E(X)} = \underbrace{z_{t_{n_k}}}_{\rightarrow c > 0}.$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme.

Damit ist  $z_{t_n} \rightarrow 0$  gezeigt. ■

Das vorstehende Lemma besagt, dass die Fehlerschranken  $\nabla_Y$  und  $\Delta_X$  asymptotisch (d.h. für  $|t| \rightarrow \infty$ ) scharf sind, denn nach (1.13) gilt bekanntlich  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varrho_t(X, Y) = 0$ .

## 2.4.2 Untere und obere Schranken für gestutzte Erwartungswerte

Kommen wir nun auf die zu Beginn dieses Abschnitts besprochene Situation zurück: Für eine beliebige quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariable  $S$  sei  $\underline{S}$  bzw.  $\overline{S}$  eine untere bzw. obere konvexe Schranke;  $\overline{S}$  sei quadrat-integrierbar.

Es bezeichne  $\nabla_{\overline{S}}$  die obere Schranke für  $\varrho(S, \overline{S})$  gemäß Satz 2.11 (man wähle dort  $X = S$  und  $Y = \overline{S}$ ) und  $\Delta_{\underline{S}}$  die obere Schranke für  $\varrho(S, \underline{S})$  gemäß Satz 2.11 (man wähle dort  $X = \underline{S}$  und  $Y = S$ ).

### Bemerkung 2.17 (Konstruktion von $\underline{S}$ bzw. $\overline{S}$ für eine Summenvariable $S$ )

Wir haben in Abschnitt 2.1 Methoden vorgestellt, wie konvexe Schranken für eine Summenvariable  $S$  konstruiert werden können. Der für die Bestimmung von  $\nabla_{\overline{S}}(t)$  notwendige Wert  $F_{\overline{S}}(t)$  lässt sich bei Wahl von  $\overline{S} = S^c$  oder  $\overline{S} = S^u(Z)$  (für eine Zufallsvariable  $Z$  gemäß Satz 2.4) dann nach der dort beschriebenen Vorgehensweise ermitteln; dasselbe gilt für die zur Bestimmung von  $\Delta_{\underline{S}}(t)$  benötigte GEW-Funktion  $E[(\underline{S} - \cdot)^+]$  bei Wahl von  $\underline{S} = S^l(Z)$  (für eine Zufallsvariable  $Z$  gemäß Satz 2.6), falls  $S^l(Z)$  kom monotone Summanden hat.

Satz 2.11 motiviert nun nochmals (vgl. Bemerkung 2.8) die Wahl der bedingenden Zufallsvariable  $Z$ , so dass  $\text{Var}(S^u(Z))$  möglichst klein (bzw.  $\text{Var}(S^l(Z))$  möglichst groß) ist: um eine möglichst kleine Fehlerschranke  $\nabla_{S^u(Z)}(t)$  (bzw.  $\Delta_{S^l(Z)}(t)$ ) zu erreichen. Denn die halbe Quadratwurzel aus der (dann kleinen) Differenz der Varianzen der beiden beteiligten Zufallsvariablen ist nach Satz 2.11 eine obere Schranke für den Fehler im Sinne des  $\varrho$ -Abstands. ■

Im Ergebnis von Satz 2.11 induziert die obere Schranke  $\nabla_{\overline{S}}$  unmittelbar die folgende **untere Schranke für  $E[(S - t)^+]$  auf der Basis der konvexen oberen Schranke  $\overline{S}$**

$$\text{LB}_{\overline{S}}(t) := E[(\overline{S} - t)^+] - \nabla_{\overline{S}}(t), \quad (2.14)$$

welche in dieser Eigenschaft offenbar mit  $E[(\underline{S} - t)^+]$  konkurriert. LB steht hierbei für **Lower Bound**.

Analog erhalten wir eine **obere Schranke für  $E[(S - t)^+]$  auf der Basis der konvexen unteren Schranke  $\underline{S}$**

$$\text{UB}_{\underline{S}}(t) := E[(\underline{S} - t)^+] + \min \left\{ \Delta_{\underline{S}}(t), \frac{1}{2} \sqrt{\text{Var}(S) - \text{Var}(\underline{S})} \right\}, \quad (2.15)$$

welche in dieser Eigenschaft mit  $E[(\overline{S} - t)^+]$  konkurriert. UB steht hierbei für **Upper Bound**.

Das nun folgende Korollar gibt Auskunft darüber, welche der zur Verfügung stehenden oberen bzw. unteren Schranken für  $E[(S - t)^+]$  schärfer sind.

**Korollar 2.18**

Sei  $S$  eine quadrat-integrierbare reelle Zufallsvariable mit konvexen Schranken  $\underline{S}$  und  $\overline{S}$ ,  $\underline{S} \leq_{cx} S \leq_{cx} \overline{S}$ ;  $\overline{S}$  sei quadrat-integrierbar. Sei  $t \in \mathbb{R}$  fest gewählt.

Bezeichne  $\Delta_{\underline{S}}(t)$  bzw.  $\nabla_{\overline{S}}(t)$  die obere Schranke für  $\varrho_t(\underline{S}, S)$  bzw.  $\varrho_t(S, \overline{S})$  gemäß Satz 2.11. Sei  $h_t^S$  definiert wie in Lemma 2.10 (wobei dort  $X$  durch  $\underline{S}$  zu ersetzen ist), sowie  $\text{LB}_{\overline{S}}(t)$  und  $\text{UB}_{\underline{S}}(t)$  wie in (2.14) und (2.15). Dann gilt:

- (i) Die untere Schranke  $\text{LB}_{\overline{S}}(t)$  ist schärfer (d.h. größer) als  $E[(\underline{S} - t)^+]$ , genau dann wenn

$$\text{Var}(\overline{S}) - \text{Var}(S) < \left( \frac{1}{F_{\overline{S}}(t-)} + \frac{1}{1 - F_{\overline{S}}(t)} \right) \cdot [\varrho_t(\underline{S}, \overline{S})]^2. \quad (2.16)$$

- (ii) Die obere Schranke  $\text{UB}_{\underline{S}}(t)$  ist schärfer (d.h. kleiner) als  $E[(\overline{S} - t)^+]$ , genau dann wenn

$$\text{Var}(S) - \text{Var}(\underline{S}) < \max \left\{ h_t^S(\varrho_t(\underline{S}, \overline{S})), [2\varrho_t(\underline{S}, \overline{S})]^2 \right\}. \quad (2.17)$$

■

Der Beweis ergibt sich im Wesentlichen durch elementare Umformungen der Ungleichungen  $E[(\underline{S} - t)^+] < \text{LB}_{\overline{S}}(t)$  bzw.  $\text{UB}_{\underline{S}}(t) < E[(\overline{S} - t)^+]$ .

**Bemerkung 2.19 (geometrische Interpretation)**

Man beachte, dass die Verteilung der Zufallsvariable  $S$  nur über ihre Varianz in (2.16) und (2.17) eingeht; somit können diese Bedingungen leicht überprüft werden. Nachdem man sie jeweils auf beiden Seiten mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert hat, haben sie eine interessante geometrische Interpretation.

Die linke Seite von (2.16) ist dann der Flächeninhalt zwischen den GEW-Funktionen von  $S$  und  $\overline{S}$ , während die rechte Seite gerade der Flächeninhalt des Vierecks  $ABCD$  in

Teil (i) des Beweises von Satz 2.11 ist (für  $X = \underline{S}$ ,  $Y = \overline{S}$  und  $t_0 = t$ ), vgl. Abbildung 2.2.

Die linke Seite von (2.17) ist der Flächeninhalt zwischen den GEW-Funktionen von  $S$  und  $\underline{S}$ . Auf der rechten Seite ist  $\frac{1}{2}h_t^{\underline{S}}(\varrho_t(\underline{S}, \overline{S}))$  gerade der Flächeninhalt des Vierecks  $ABCD$  in Teil (ii) des Beweises von Satz 2.11 (wiederum für  $X = \underline{S}$ ,  $Y = \overline{S}$  und  $t_0 = t$ ), vgl. Abbildung 2.3; der verbleibende Ausdruck im Maximum ist der Flächeninhalt eines offensichtlichen Rechtecks.

Ein Überprüfen der Bedingungen (2.16) und (2.17) läuft somit auf den Vergleich von Flächeninhalten hinaus.

**Bemerkung 2.20**

Wegen Satz 2.16 gilt offensichtlich

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{LB}_{\overline{S}}(t) - (E(S) - t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{LB}_{\overline{S}}(t) = 0. \quad (2.18)$$

Damit sind zwei notwendige Bedingungen dafür erfüllt, dass  $\text{LB}_{\overline{S}}(t)$  – als Funktion von  $t \in \mathbb{R}$  betrachtet – die GEW-Funktion einer Zufallsvariablen  $W$  ist. Wäre Letzteres der Fall, dann würde  $W$  durch  $S$  im Sinne der konvexen Halbordnung dominiert und sich die Verteilungsfunktion von  $W$  durch Differentiation von  $\text{LB}_{\overline{S}}(t)$  ergeben, vgl. (1.17).

Wir fragen also: Existiert eine Zufallsvariable  $W$  mit der Eigenschaft  $E[(W - t)^+] = \text{LB}_{\overline{S}}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ? Hinreichend für die Existenz eines solchen  $W$  wäre es, wenn die (rechtsseitige) Ableitung der Funktion  $\text{LB}_{\overline{S}}(t)$  die Eigenschaften einer (mit 1 subtrahierten) Verteilungsfunktion aufweist. Eine analoge Bemerkung gilt für die obere Schranke  $\text{UB}_{\underline{S}}(t)$ .

Im Allgemeinen existiert eine solche Zufallsvariable  $W$  nicht, vgl. das folgende Beispiel 2.21. In Spezialfällen ist dies jedoch durchaus möglich, wie das Beispiel 2.22 unten zeigt.

**Beispiel 2.21 (Fortsetzung von Bsp. 2.14)**

Sei  $\overline{S}$  eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und  $S \leq_{cx} \overline{S}$  mit  $\text{Var}(\overline{S}) - \text{Var}(S) = \varepsilon$ . Man verifiziert leicht

$$E[(\overline{S} - t)^+] = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Mit den Ergebnissen von Beispiel 2.14 erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{LB}_{\overline{S}}(t) &= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \sqrt{e^{\lambda t} - 1} \sqrt{\varepsilon} \\ &= e^{-\lambda t} \left( \frac{1}{\lambda} - \sqrt{\varepsilon(e^{\lambda t} - 1)} \right) \\ \frac{d}{dt} \text{LB}_{\overline{S}}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} \left( \frac{1}{\lambda} - \sqrt{\varepsilon(e^{\lambda t} - 1)} \right) - \frac{1}{2} \frac{\lambda \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(e^{\lambda t} - 1)}}. \end{aligned}$$

Es gilt  $\lim_{t \searrow 0} \frac{d}{dt} \text{LB}_{\underline{S}}(t) = -\infty$ , womit  $1 + \frac{d}{dt} \text{LB}_{\underline{S}}$  keine Verteilungsfunktion und somit  $\text{LB}_{\underline{S}}$  keine GEW-Funktion ist.

**Beispiel 2.22 (Fortsetzung von Bsp. 2.15)**

Sei  $\underline{S}$  eine im Punkt  $t_0$  einpunktverteilte Zufallsvariable und  $\underline{S} \leq_{cx} S$  mit  $\text{Var}(S) = \varepsilon$  (man beachte, dass  $\text{Var}(\underline{S}) = 0$  gilt). Wir betrachten zunächst die folgende obere Schranke für  $E[(S - t)^+]$ ,

$$\text{UB}_{\underline{S}}^*(t) = E[(\underline{S} - t)^+] + \Delta_{\underline{S}}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

die etwas grober als  $\text{UB}_{\underline{S}}$  ist, vgl. (2.15). Mit den Ergebnissen von Beispiel 2.15 erhalten wir

$$\text{UB}_{\underline{S}}^*(t) = \begin{cases} (t_0 - t) - \frac{(t_0 - t)}{4} + \sqrt{\frac{(t_0 - t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}} & \text{für } t < t_0 \\ \frac{(t_0 - t)}{4} + \sqrt{\frac{(t_0 - t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}} & \text{für } t \geq t_0 \end{cases};$$

vgl. Abbildung 2.6 für den Fall  $t_0 = 0$  und  $\varepsilon = 1$ . Differentiation liefert

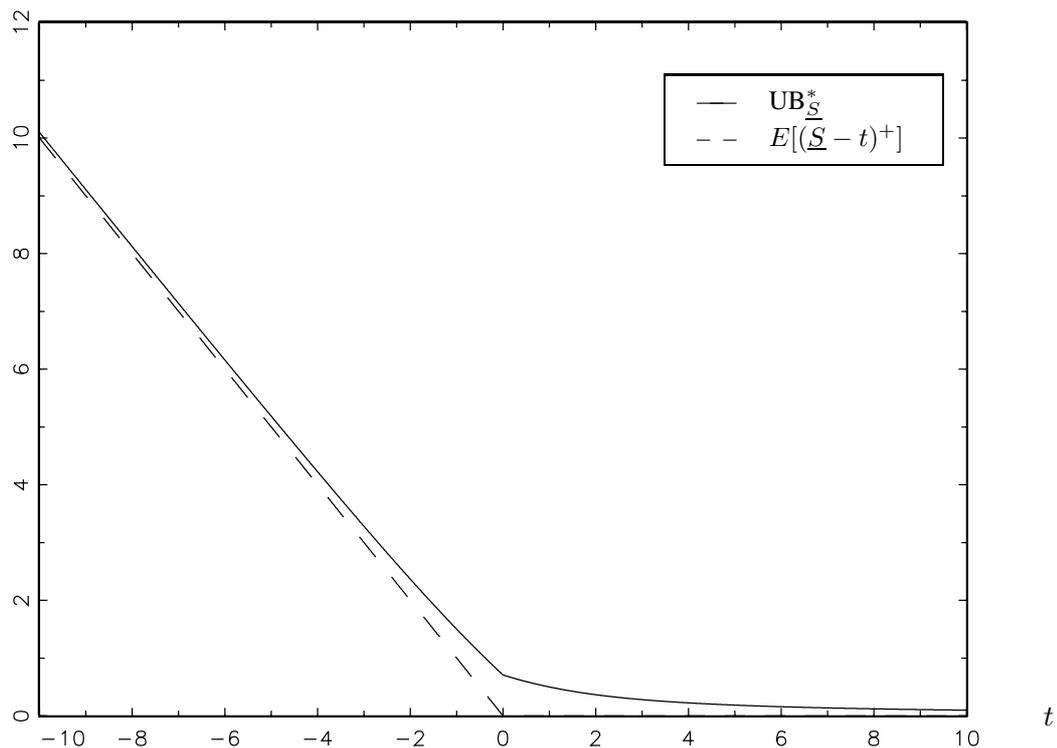


Abbildung 2.6: Obere Schranke  $\text{UB}_{\underline{S}}^*$  für  $E[(S - t)^+]$  auf Basis einer im Punkt 0 einpunktverteilten Zufallsvariable  $\underline{S}$  (die GEW-Funktion jeder Zufallsvariable  $S \geq_{cx} \underline{S}$  mit  $\text{Var}(S) = \varepsilon$  liegt zwischen den beiden Kurven)

$$\frac{d}{dt}\text{UB}_{\underline{S}}^*(t) = \begin{cases} -\frac{3}{4} - \frac{1}{16} \frac{t_0-t}{\sqrt{\frac{(t_0-t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}}} & \text{für } t < t_0 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \frac{t_0-t}{\sqrt{\frac{(t_0-t)^2}{16} + \frac{\varepsilon}{2}}} & \text{für } t \geq t_0 \end{cases} .$$

Die Funktion  $1 + \frac{d}{dt}\text{UB}_{\underline{S}}^*(t)$  erfüllt alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion und ist somit die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die  $S$  im Sinne der konvexen Halbordnung dominiert. Abbildung 2.7 zeigt den Verlauf dieser Verteilungsfunktion (wiederum für den Fall  $t_0 = 0$  und  $\varepsilon = 1$ ).

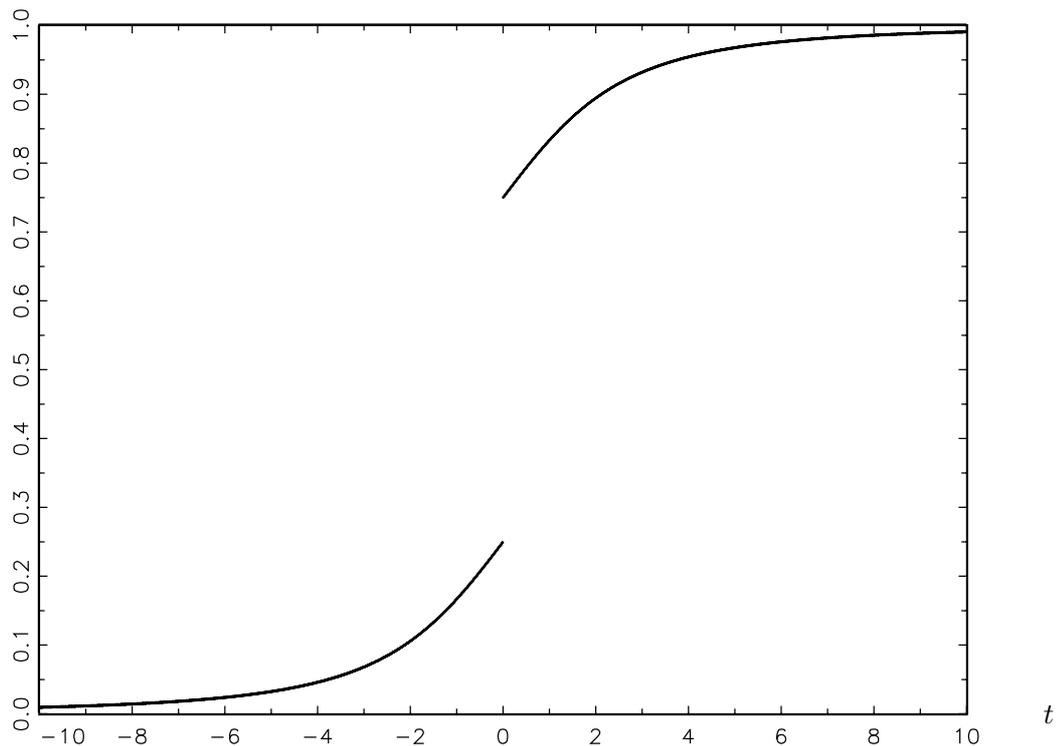


Abbildung 2.7: Zu  $\text{UB}_{\underline{S}}^*$  korrespondierende Verteilungsfunktion  $1 + \frac{d}{dt}\text{UB}_{\underline{S}}^*(t)$

Die Eigenschaft von  $\text{UB}_{\underline{S}}^*$ , die GEW-Funktion einer Zufallsvariablen zu sein, überträgt sich auf Grund der Minimumbildung mit  $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$  jedoch nicht auf  $\text{UB}_{\underline{S}}$ .

## 2.5 Alternative obere Schranke

Im Folgenden soll eine weitere Möglichkeit zur Konstruktion einer oberen Schranke für  $E[(S - t)^+]$  vorgestellt werden. Diese Konstruktion basiert auf der unteren konvexen Schranke  $S^l = E(S|Z)$  (für irgendeine Wahl von  $Z$  gemäß Satz 2.6) und geht auf

Rogers und Shi (1995) zurück; Nielsen und Sandmann (2003) haben diese weiterentwickelt. Wir stellen diese hier aus mehreren Gründen vor.

Zum einen, weil für eine Summenvariable  $S$  die konvexe obere Schranke  $S^c$  gemäß Satz 2.1 im Sinne der konvexen Halbordnung häufig recht weit von  $S$  entfernt liegt; entsprechend schlecht wird die resultierende obere Schranke  $E[(S^c - t)^+]$  für  $E[(S - t)^+]$  sein. Es lassen sich zwar bekanntlich für  $S$  bessere obere konvexe Schranken ( $S^u$ , vgl. Satz 2.4) als  $S^c$  finden, allerdings sind deren Verteilungen (und damit auch die gestutzten Erwartungswerte) recht schwierig zu bestimmen, weil eine numerische Integration nötig ist, vgl. Bemerkung 2.5. Die Verteilung der unteren konvexen Schranke  $S^l = E(S|Z)$  ist hingegen im komonotonen Fall von Bemerkung 2.7 (i) einfach zu bestimmen, und liegt in praktisch relevanten Fällen (bei geeigneter Wahl von  $Z$ ) im Sinne der konvexen Halbordnung in der Regel recht nah an  $S$ .

Zum anderen, weil die aus dem Ansatz von Nielsen/Sandmann resultierende obere Schranke für  $E[(S - t)^+]$ ,  $S$  Summenvariable, in praktisch relevanten Fällen schärfer als die meisten anderen bisher bekannten oberen Schranken zu sein scheint; in Nielsen und Sandmann (2003) sind entsprechende vergleichende Untersuchungen angestellt worden. Wir wollen diese auch mit der nach unserem geometrischen Ansatz erhaltenen oberen Schranke  $UB_{S^l}(t)$  vergleichen.

Ausgangspunkt der Konstruktion von Rogers und Shi (1995) ist die folgende Ungleichung, die für jede beliebige Wahl von reellen Zufallsvariablen  $X$  und  $Z$  gilt:

$$0 \leq E(X^+) - E[E(X|Z)^+] \leq \frac{1}{2} E \left[ \sqrt{\text{Var}(X|Z)} \right] ; \quad (2.19)$$

dabei bezeichne wie üblich<sup>5</sup>  $\text{Var}(X|Z) = E(X^2|Z) - E^2(X|Z)$ . Ungleichung (2.19) ist wie folgt einzusehen: Zunächst gilt für jede Zufallsvariable  $X$  die Beziehung

$$2 \cdot (E(X^+) - E(X)^+) = E(|X|) - |E(X)|,$$

welche sich leicht nachweisen lässt, indem man die Beträge auf der rechten Seite jeweils in ihre Positiv- und Negativteile zerlegt. Nun lässt sich die rechte Seite auch schreiben als  $E(|X| - |E(X)|)$ , was sich mittels einer Version der Dreiecksungleichung für Beträge nach oben gegen  $E(|X - E(X)|)$  und mittels der Jensen-Ungleichung weiter nach oben gegen  $\sqrt{\text{Var}(X)}$  abschätzen lässt. Damit erhalten wir:

$$0 \leq E(X^+) - E(X)^+ \leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{Var}(X)} .$$

Nun gilt Letzteres sicher auch für bedingte Erwartungswerte, denn diese sind nichts anderes als die Erwartungswerte von bedingten Verteilungen; es gilt also

$$0 \leq E(X^+|Z = z) - E(X|Z = z)^+ \leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{Var}(X|Z = z)} \quad \text{für } P^Z\text{-fast alle } z \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

---

<sup>5</sup>unter Beachtung der hier und im Folgenden verwendeten Notation  $E^2(\cdot) := [E(\cdot)]^2$

Eine Integration bzgl. der Verteilung von  $Z$  auf beiden Seiten liefert schließlich (2.19).

Setzen wir nun  $X = S - t$  und bezeichnen wie vorher  $S^t = E(S|Z)$ , so ergibt sich daraus die folgende obere Schranke für den Abstand der gestutzten Erwartungswerte der beiden konvex geordneten Zufallsvariablen  $S$  und  $S^t$ ,

$$(\varrho_t(S, S^t) =) E((S - t)^+) - E[(S^t - t)^+] \leq \frac{1}{2} E \left[ \sqrt{\text{Var}(S|Z)} \right], \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Man beachte, dass die rechte Seite nicht von  $t$  abhängt. Daher ist diese *konstante* (bzgl.  $t$ ) obere Schranke zumindest für sehr kleine bzw. sehr große  $t$  wenig aussagekräftig, denn wegen (1.13) gilt  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varrho_t(S, S^t) = 0$ .

An dieser Stelle setzen Nielsen und Sandmann (2003) an und bauen eine Abhängigkeit von  $t$  ein. Dazu nutzen Sie mögliches Wissen über die gemeinsame Verteilung von  $S$  und  $Z$  geschickt aus. Sei dazu zunächst  $t \in \mathbb{R}$  fest gewählt. Ist dann die Bedingung

$$\exists d(t) \in \mathbb{R} : \{Z \geq d(t)\} \subset \{S \geq t\} \quad (2.22)$$

erfüllt, dann folgt offenbar

$$E[(S - t)^+ | Z] \cdot 1_{\{Z \geq d(t)\}} = E(S - t | Z) \cdot 1_{\{Z \geq d(t)\}} = E(S - t | Z)^+ \cdot 1_{\{Z \geq d(t)\}} \quad P\text{-f.s.}$$

Unter Ausnutzung dessen und Beachtung von (2.20) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varrho_t(S, S^t) &= E \left( E[(S - t)^+ | Z] - (S^t - t)^+ \right) \\ &= E \left( (E[(S - t)^+ | Z] - (E(S|Z) - t)^+) \cdot 1_{\{Z < d(t)\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} E \left[ \sqrt{\text{Var}(S|Z)} 1_{\{Z < d(t)\}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{E[\text{Var}(S|Z) 1_{\{Z < d(t)\}}]} \sqrt{P(Z < d(t))} =: \Delta_{Si}^{\text{NS}}(t) \quad (2.23) \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) deshalb vorgenommen wurde, weil in der Regel  $E[\sqrt{\text{Var}(S|Z)} 1_{\{Z < d(t)\}}]$  wesentlich schwieriger zu bestimmen ist als  $E[\text{Var}(S|Z) 1_{\{Z < d(t)\}}]$ .

Die von Nielsen und Sandmann (2003) gemachte Voraussetzung (2.22) kann noch ein wenig abgeschwächt werden; offenbar genügt es, die Forderung  $\{Z \geq d(t)\} \subset \{S \geq t\}$  durch  $P(S < t, Z \geq d(t)) = 0$  zu ersetzen.

Wir nehmen im Folgenden an, dass für alle  $t \in \mathbb{R}$  ein  $d(t) < \infty$  mit  $P(S < t, Z \geq d(t)) = 0$  existiert, und dass  $d(t)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  isoton ist. Letzteres wird zum Beispiel durch die Wahl

$$d(t) := \inf \{d \in \mathbb{R} : P(S < t, Z \geq d) = 0\}, \quad (2.24)$$

erreicht: Für monoton wachsendes  $t$  muss  $P(Z \geq d(t))$  monoton fallen, um  $P(S < t, Z \geq d(t)) = 0$  zu erfüllen, und damit muss auch  $d(t)$  monoton wachsen.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Funktion  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  als Funktion von  $t \in \mathbb{R}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  offenbar isoton. Ferner gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = \begin{cases} F_Z^{-1}(1)+ & , \text{ falls } F_Z^{-1}(1) < \infty \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Damit haben wir  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z < d(t)) = 1$ , und  $1_{\{Z < d(t)\}}$  strebt für  $t \rightarrow \infty$   $P$ -fast sicher gegen 1.  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  konvergiert also für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{1}{2} \sqrt{E[\text{Var}(S|Z)]}$ .

Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned} E[\text{Var}(S|Z)] &= E[E(S^2|Z) - E^2(S|Z)] \\ &= E(S^2) - E^2(S) + E^2[E(S|Z)] - E[E^2(S|Z)] \\ &= \text{Var}(S) - \text{Var}(S^l) , \end{aligned} \tag{2.25}$$

womit wir schließlich erhalten:

$$\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t) \nearrow \frac{1}{2} \sqrt{\text{Var}(S) - \text{Var}(S^l)} \quad (t \rightarrow \infty) . \tag{2.26}$$

Also liefert der hier vorgestellte Ansatz — einigermaßen bemerkenswert — dieselbe *konstante* obere Schranke für  $\varrho_t(S, S^l)$  wie Satz 2.11 (dort bezeichneten wir  $\text{Var}(S) - \text{Var}(S^l) =: \varepsilon$ ), d.h.  $\varrho_t(S, S^l) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Diese konstante obere Schranke ist strikt positiv, wenn wir voraussetzen, dass  $S$  nicht gerade eine Transformation von  $Z$  (im fast sicheren Sinne, vgl. Bemerkung 2.7) ist.

Einerseits folgt somit aus (2.26) und der asymptotischen Schärfe von  $\Delta_{S^l}$ , vgl. Satz 2.16, dass es ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  geben muss, so dass gilt:

$$\Delta_{S^l}(t) \leq \Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t) \quad \text{für alle } t > t_0 . \tag{2.27}$$

In Worten: Für große  $t$  ( $t > t_0$ ) liefert der geometrische Ansatz (Satz 2.11) eine schärfere obere Schranke für  $\varrho_t(S, S^l)$  als der eben vorgestellte Nielsen-Sandmann-Ansatz.

Andererseits ist auch klar, dass die resultierende obere Schranke für  $E[(S - t)^+]$ ,

$$\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}(t) := E[(S^l - t)^+] + \Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t),$$

als Funktion von  $t \in \mathbb{R}$  betrachtet, keinesfalls eine GEW-Funktion sein kann, da die dafür notwendige Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t) = 0$  nicht erfüllt ist.<sup>6</sup>

## 2.6 Vorteile des geometrischen Ansatzes

Nielsen und Sandmann (2003) haben (für den Fall einer Summenvariable  $S$ ) in einer vergleichenden Studie gezeigt, dass ihre obere Schranke  $\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  für  $E[(S - t)^+]$  zumeist

<sup>6</sup>Man kann jedoch zeigen, dass  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t) \searrow 0$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) gilt.

schärfer als andere bekannte obere Schranken, insbesondere schärfer als  $E[(S^c - t)^+]$ , ist. Wegen (2.27) hat sich nun die hier vorgestellte geometrische Schranke  $UB_{S^l}(t)$  ab einem bestimmten  $t$  als noch schärfer erwiesen. Dies ist besonders vor dem Hintergrund interessant, dass zur Bestimmung des TVaR-Risikomaßes einer Verlustvariablen  $S$  der "Schwellenwert"  $t$  gerade als  $(1 - \alpha)$ -Quantil von  $S$  zu wählen ist, und letzteres ist für kleines  $\alpha$  typischerweise groß.

Unser geometrische Ansatz ist besonders dann hilfreich, wenn keine Zufallsvariable  $Z$  gefunden werden kann, sodass die Verteilung von  $E(S|Z)$  bestimmt werden kann. In diesem Fall ist es offenbar nicht möglich, die Verteilung der unteren konvexen Schranke  $S^l$  gemäß Satz 2.6 zu bestimmen, ebenso versagt der Nielsen-Sandmann-Ansatz, da bei der Berechnung von  $\Delta_{S^l}^{NS}(t)$  ebenfalls die Verteilung von  $E(S|Z)$  eingeht.

Unser geometrischer Ansatz liefert jedoch stets eine untere Schranke für  $E[(S - t)^+]$ : Ist  $\bar{S}$  eine obere konvexe Schranke mit bekannter Verteilung (man nehme z.B. die komonotone obere konvexe Schranke  $S^c$  gemäß Satz 2.1), so ist  $LB_{\bar{S}}(t)$  eine untere Schranke für  $E[(S - t)^+]$ .

Andererseits liefert der geometrische Ansatz eine obere Schranke  $UB_{\underline{S}}(t)$  für  $E[(S - t)^+]$ , solange für  $S$  irgendeine untere konvexe Schranke  $\underline{S}$  mit bekannter Verteilung verfügbar ist. Der Nielsen-Sandmann-Ansatz zur Konstruktion beruht jedoch zwingend auf dem Vorhandensein einer unteren konvexen Schranke  $E(S|Z)$  für irgendein  $Z$ . Zwar hat nach dem Satz von Strassen (vgl. Shaked und Shantikumar (1994), Theorem 5.A.1) jede konvexe untere Schranke  $\underline{S}$  von  $S$  eine Darstellung als bedingte Erwartung (es existieren Zufallsvariablen  $\hat{S} \stackrel{d}{=} S$  und  $\hat{Z} \stackrel{d}{=} \underline{S}$ , so dass  $\underline{S} \stackrel{d}{=} E(\hat{S}|\hat{Z})$  gilt), allerdings erfordert die Bestimmung von  $\Delta_{S^l}^{NS}(t)$  dann bekanntlich Kenntnis über die gemeinsame Verteilung von  $\hat{S}$  und  $\hat{Z}$ , welche im Allgemeinen nicht gegeben ist.

# Kapitel 3

## Schranken für Summen

## lognormalverteilter Zufallsvariablen

Es sollen nun die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels auf Summen gemeinsam lognormalverteilter Zufallsvariablen angewendet werden.

### 3.1 Motivation und Modell

Wir wollen zur Motivation zwei spezielle Situationen aus der Finanzwelt betrachten, wo sich als Folge der Modellierung von Wertpapierpreisprozessen als geometrische Brownsche Bewegungen (vgl. Bemerkung 1.37) Summen von lognormalverteilten Zufallsvariablen ergeben, deren Verteilung von Interesse ist.

- **Rendite eines Fonds. (Situation I)**

Ein Investor investiert Kapital in  $n$  verschiedene Wertpapiere, davon jeweils einen Anteil  $b_i \in [0, 1]$  in Wertpapier  $i$ , welches über den betrachteten Anlagehorizont eine zufällige Rendite von  $R_i$  erbringt. Ein gängiges Modell für die Gesamrendite

$$S = \sum_{i=1}^n b_i R_i, \quad \left( \sum_{i=1}^n b_i = 1 \right)$$

dieser Investition ist das folgende:

$$\begin{aligned} Y &= (Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(\tau, \Lambda) \\ R_i &= e^{Y_i} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

- **Wertpapiersparplan. (Situation II)**

Ein Investor investiert  $n$  Perioden lang regelmäßig Kapital in Höhe von  $b_i \geq 0$  (zusätzlich zum bis dahin erreichten Anlagevermögen) zu Beginn von Periode  $i$

in ein (nicht notwendig in jeder Periode dasselbe) Wertpapier. Dabei sei  $R_i$  die während der  $i$ -ten Periode erzielte zufällige Rendite. Ein gängiges Modell für das Anlagevermögen

$$S = \sum_{i=1}^n b_i R_i \cdot \dots \cdot R_n$$

am Ende von Periode  $n$  ist das folgende:

$$\begin{aligned} Y &= (Y_1, \dots, Y_n)^\top \sim N(\tau, \Lambda) \\ R_i &= e^{Y_i} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

In beiden Modellen ist die Zufallsvariable  $S$  eine (gewichtete) Summe von lognormalverteilten Zufallsvariablen. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass beide Modelle in ein allgemeines Basismodell eingebettet werden können:

### Basismodell

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n b_i \exp\{\omega_i^\top Y\}, & b_i \in \mathbb{R}, \omega_i \in \mathbb{R}^m, \\ Y &= (Y_1, \dots, Y_m)^\top \sim N(\tau, \Lambda), & \tau \in \mathbb{R}^m, \Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ nicht-neg. definit.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Bezeichnet  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die Matrix mit den Spalten  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ , dann erhält man den Spezialfall von Situation I für  $\Omega = I_n$  (Einheitsmatrix im  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ); den von Situation II hingegen für

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (3.2)$$

wenn also  $\Omega$  eine untere Dreiecksmatrix ist, deren Einträge auf und unterhalb der Hauptdiagonalen sämtlich 1 sind.

In der praktischen Anwendung wird die Kovarianzmatrix  $\Lambda$  in der Situation I meist keine Diagonalmatrix sein, da die Renditen von Wertpapieren über denselben Zeithorizont als (unter Umständen sogar stark) korreliert angenommen werden, während  $\Lambda$  in der Situation II meist Diagonalform haben wird, weil die Renditen von Wertpapieren über nicht-überlappende Zeitintervalle oft als stochastisch unabhängig angenommen werden. Trotzdem sind auch in Situation II im Allgemeinen die Summanden von  $S$  korreliert (aufgrund der Struktur von  $\Omega$ ).

## 3.2 Konvexe Schranken

Wir wollen nun die in Kapitel 2 hergeleiteten konvexen Schranken  $S^c, S^u$  sowie  $S^l$  für die Summe

$$S = \sum_{i=1}^n b_i \exp\{\omega_i^\top Y\}$$

konkret bestimmen. Die dortigen Sätze, welche Schranken für die Summe beliebiger Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  lieferten, können nach Setzen von  $X_i := b_i \exp\{\omega_i^\top Y\}$  direkt Anwendung finden.

Wir formulieren die Resultate als Lemmata, welche sich in ähnlicher Form bereits in Kaas et al. (2000) finden lassen, wo ein Spezialfall betrachtet wurde. Die Darstellungen für  $S^c, S^u, S^l$  werden aus Gründen des besseren Leseflusses zunächst gemeinsam formuliert und dann im Anschluss bewiesen.

### Lemma 3.1 (Komonotone obere Schranke)

Gegeben sei eine  $m$ -dimensional normalverteilte Zufallsvariable  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$  mit Erwartungswertvektor  $\tau \in \mathbb{R}^m$  und (nicht-negativ definiten) Kovarianzmatrix  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sowie eine Matrix  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , deren  $i$ -te Spalte mit  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bezeichnet ist, d.h.  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Bezeichne weiter

$$\mu := E(\Omega^\top Y) = \Omega^\top \tau \quad (3.3)$$

$$\Sigma = ((\sigma_{ij})) := \text{Cov}(\Omega^\top Y) = \Omega^\top \Lambda \Omega \quad (3.4)$$

$$\sigma_i^2 := \sigma_{ii} = \text{Var}(\omega_i^\top Y) = \omega_i^\top \Lambda \omega_i, \quad (3.5)$$

sowie  $U$  eine  $R_{0,1}$ -verteilte Zufallsvariable. Betrachte für  $b = (b_1, \dots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  die Zufallsvariable

$$S = \sum_{i=1}^n b_i \exp\{\omega_i^\top Y\}.$$

Dann gilt:

$$S \leq_{cx} S^c := \sum_{i=1}^n b_i \exp\{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(U)\}. \quad (3.6)$$

### Lemma 3.2 (Untere Schranke)

Bezeichne in der Situation von Lemma 3.1

$$r_i(\beta) := \text{Corr}(\beta^\top Y, \omega_i^\top Y), \quad i = 1, \dots, n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m.$$

Dann gilt für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$ :

$$S^l(\beta) := \sum_{i=1}^n b_i \exp\left\{\mu_i + r_i(\beta) \sigma_i \Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2(\beta)) \sigma_i^2\right\} \leq_{cx} S. \quad (3.7)$$

**Lemma 3.3 (Schärfere obere Schranke)**

Sei in der Situation von Lemma 3.1 noch eine von  $U$  stochastisch unabhängige Zufallsvariable  $V \sim R_{0,1}$  gegeben.

Dann gilt mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2 für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$ :

$$S \leq_{cx} S^u(\beta) := \sum_{i=1}^n b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i(\beta) \sigma_i \Phi^{-1}(V) + \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2(\beta)} \Phi^{-1}(U) \right\} \quad (3.8)$$

Ferner gilt:

$$S^u(\beta) \leq_{cx} S^c \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

**Bemerkung 3.4**

Die in den Lemmata 3.2 und 3.3 angegebenen Schranken für  $S$  beruhen (in der Notation der Sätze 2.6 und 2.4) auf der Wahl von  $Z = \beta^\top Y$  als bedingende Zufallsvariable, welche als Linearkombination gemeinsam normalverteilter Zufallsvariablen ebenfalls einer Normalverteilung unterliegt.

Da in die konvexen Schranken  $S^c$  und  $S^u$  bereits jeweils eine  $R_{0,1}$ -verteilte Zufallsvariable involviert ist, vgl. Sätze 2.1 und 2.4, haben wir in den eben gegebenen Darstellungen von  $S^u(\beta)$  bzw.  $S^l(\beta)$  die Zufallsvariable  $Z$  durch die verteilungsgleiche Zufallsvariable  $\sigma_Z \Phi^{-1}(V) + \mu_Z$  bzw.  $\sigma_Z \Phi^{-1}(U) + \mu_Z$  ersetzt. Dabei bezeichne  $\mu_Z = E(Z)$  sowie  $\sigma_Z^2 = \text{Var}(Z)$ . Dies hat allerdings zur Folge, dass diese "nur" in Verteilung mit den Schranken in den Sätzen 2.1 und 2.4 übereinstimmen. Alle drei konvexen Schranken  $S^c, S^u(\beta), S^l(\beta)$  sind nunmehr als Transformationen von  $R_{0,1}$ -verteilten Zufallsvariablen dargestellt. ■

Für den Moment setzen wir  $X_i = b_i \exp\{\omega_i^\top Y\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , schreiben

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

und bezeichnen mit  $F_i$  die Verteilungsfunktion von  $X_i$ .

**Beweis von Lemma 3.1:**

Nach Satz 2.1 gilt  $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ , wobei  $X^c = (X_1^c, \dots, X_n^c)^\top$  eine komonotone Zufallsvariable mit denselben Randverteilungen wie  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  bezeichnet.

Sei  $U \sim R_{0,1}$ . Nach Lemma 1.25 haben wir

$$X_i^c \stackrel{d}{=} F_i^{-1}(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Nun gilt aber

$$X_i = \exp\{\ln b_i + \omega_i^\top Y\} \sim \mathfrak{L}(\ln b_i + \omega_i^\top \tau, \omega_i^\top \Lambda \omega_i)$$

bzw. mit den Bezeichnungen im Vorspann des Lemmas:  $X_i \sim \mathcal{L}(\ln b_i + \mu_i, \sigma_i^2)$ . Unter Berücksichtigung von (1.25) ergibt sich

$$F_i^{-1}(U) = b_i \exp\{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(U)\},$$

was zu beweisen war. ■

Wir erwähnen an dieser Stelle ein Resultat im Zusammenhang mit Normalverteilungen, das in den folgenden Beweisen benötigt wird.

**Lemma 3.5 (Hilfsresultat)**

Gegeben sei eine bivariat normalverteilte Zufallsvariable

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Z \\ \rho\sigma_X\sigma_Z & \sigma_Z^2 \end{pmatrix} \right).$$

Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $P^{X|Z=z} = N \left( \mu_X + \sigma_X \rho \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right), \sigma_X^2 (1 - \rho^2) \right),$
- (ii)  $P^{e^X|Z=z} = \mathcal{L} \left( \mu_X + \sigma_X \rho \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right), \sigma_X^2 (1 - \rho^2) \right).$

**Beweis von Lemma 3.2:**

Gemäß Bemerkung 3.4 setzen wir  $Z = \beta^\top Y$  für ein beliebig gewähltes, aber vorerst festes  $\beta \in \mathbb{R}^m$ , und unterdrücken zunächst die Abhängigkeit von  $\beta$  in der Notation. Nach Satz 2.6 gilt:  $S^l = \sum_{i=1}^n E(X_i|Z)$ .

Nach dem vorgangegangenen Hilfsresultat haben wir für alle  $z \in \mathbb{R}$

$$P^{X_i|Z=z} = \mathcal{L} \left( \ln b_i + \mu_i + r_i \sigma_i \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right), (1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right). \quad (3.10)$$

Wegen  $E(X_i|Z = z) = E_{P^{X_i|Z=z}}(id)$  erhalten wir aus daraus in Verbindung mit (1.26) sofort

$$E(X_i|Z = z) = \exp \left\{ \ln b_i + \mu_i + r_i \sigma_i \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right) + \frac{(1 - r_i^2) \sigma_i^2}{2} \right\}.$$

Gehen wir nun vom bedingten Erwartungswert zur bedingten Erwartung über und ersetzen anschließend die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $(Z - \mu_Z)/\sigma_Z$  durch die verteilungsgleiche Zufallsvariable  $\Phi^{-1}(U)$ , so erhalten wir

$$E(X_i|Z) \stackrel{d}{=} b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2} (1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right\}. \quad (3.11)$$

Dies gilt aber für jedes  $\beta \in \mathbb{R}^m$ , was zu zeigen war. ■

**Beweis von Lemma 3.3:**

Wir setzen wie eben  $Z = \beta^\top Y$  für beliebiges, aber festes  $\beta \in \mathbb{R}^m$ . Nach Satz 2.4 gilt  $S^u = \sum_{i=1}^n F_{X_i|Z}^{-1}(U)$ .

Wegen (3.10) erhalten wir wiederum mit (1.25) für das  $p$ -Quantil von  $P^{X_i|Z}$ :

$$F_{X_i|Z}^{-1}(p) = b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \left( \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right) + \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2} \Phi^{-1}(p) \right\} .$$

Ersetzen wir  $(Z - \mu_Z)/\sigma_Z$  durch  $\Phi^{-1}(V)$  und anschließend  $p$  durch  $U$ , so ergibt sich

$$F_{X_i|Z}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(V) + \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2} \Phi^{-1}(U) \right\} . \quad (3.12)$$

Nach Bemerkung 2.5 gilt für das so konstruierte  $S^u$ :  $S^u \leq_{cx} S^c$ . Nun war  $\beta$  fest, aber beliebig gewählt. Das bisher Gezeigte gilt damit für alle  $\beta \in \mathbb{R}^m$ , was zu zeigen war. ■

**Bemerkung 3.6 (Schranken in Matrix-Notation)**

Im Folgenden sind die vorkommenden Transformationen  $e^x, x^2, \sqrt{x}$  komponentenweise zu verstehen, sofern Sie auf Vektoren angewendet werden.

Die in den Lemmata 3.1-3.3 gegebenen Schranken für

$$S = b^\top \exp\{\Omega^\top Y\}$$

lassen sich auch in Matrix-Notation darstellen, was sich als vorteilhaft für numerische Berechnungen mit Hilfe von matrizenorientierten Programmiersprachen (wie z.B. GAUSS) erweisen wird.

Bezeichne dazu:

$$\sigma^2 := (\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)^\top = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{nn})^\top . \quad (3.13)$$

Offensichtlich gilt

$$r_i(\beta) = \frac{\beta^\top \Lambda \omega_i}{\sqrt{\beta^\top \Lambda \beta} \sqrt{\omega_i^\top \Lambda \omega_i}} = \frac{1}{\sigma_i} \frac{\beta^\top \Lambda \omega_i}{\sqrt{\beta^\top \Lambda \beta}} =: \frac{1}{\sigma_i} \tilde{r}_i(\beta) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Nach Ersetzen von  $r_i(\beta)\sigma_i$  in den Formeln für die Schranken durch  $\tilde{r}_i(\beta)$ , Vereinbarung von

$$\tilde{\mathbf{r}}(\beta) := (\tilde{r}_1(\beta), \dots, \tilde{r}_n(\beta))^\top = \frac{1}{\sqrt{\beta^\top \Lambda \beta}} \Omega^\top \Lambda \beta$$

und Übergang zur Matrix-Notation ergeben sich schließlich die folgenden Ausdrücke

$$S^c = b^\top \exp\{\mu + \sigma \Phi^{-1}(U)\} \quad (3.14)$$

$$S^u(\beta) = b^\top \exp\{\mu + \tilde{\mathbf{r}}(\beta) \Phi^{-1}(V) + \sqrt{\sigma^2 - \tilde{\mathbf{r}}^2(\beta)} \Phi^{-1}(U)\} \quad (3.15)$$

$$S^l(\beta) = b^\top \exp\{\mu + \tilde{\mathbf{r}}(\beta) \Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\mathbf{r}}^2(\beta))\} . \quad (3.16)$$

### 3.3 Formeln für die Kenngrößen der Schranken

Wir wollen nun (möglichst) explizite Formeln für Quantile, gestutzte Erwartungswerte und den Lower-Tail-Value-at-Risk<sup>1</sup> der im vorigen Abschnitt hergeleiteten konvexen Schranken für  $S$  angeben. Da die Summanden dieser konvexen Schranken offenbar wiederum lognormalverteilt sind, bestimmen sich die Kenngrößen der Summanden jeweils gemäß Lemma 1.31.

#### 3.3.1 Komotone obere Schranke $S^c$

Das  $p$ -Quantil ( $p \in (0, 1)$ ) von  $S^c$  ist nach Lemma 1.27 (i) gegeben durch

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{b_i \exp(\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p))}_{=F_{X_i}^{-1}(p)}; \quad (3.17)$$

man erhält für alle  $x \in \text{supp } S^c = (0, \infty)$  den Wert der Verteilungsfunktion  $F_{S^c}(x)$  als eindeutige Lösung von

$$\sum_{i=1}^n b_i \exp(\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))) = x. \quad (3.18)$$

Lemma 1.27 (ii) liefert

$$E[(S^c - t)^+] = \sum_{i=1}^n E \left[ \left( X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(t)) \right)^+ \right] \quad (3.19)$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^n b_i \exp \left\{ \mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2} \right\} \Phi \left( \sigma_i - \Phi^{-1}(F_{S^c}(t)) \right) \right] - t(1 - F_{S^c}(t)). \quad (3.20)$$

Der Lower-Tail-Value-at-Risk bestimmt sich gemäß Lemma 1.29,

$$\text{L-TVaR}_\alpha(S^c) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \Phi(\Phi^{-1}(\alpha) - \sigma_i). \quad (3.21)$$

#### 3.3.2 Verbesserte obere Schranke $S^u$

Die bedingte Verteilung von  $S^u$  gegeben  $V = v$  ist offenbar komoton, vgl. Bemerkung 2.5 (iv). Also ergibt sich nach Lemma 1.27 (i) das  $p$ -Quantil von  $P^{S^u|V=v}$  als

$$F_{S^u|V=v}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(v) + \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2} \Phi^{-1}(p) \right\}}_{=F_{X_i|V=v}^{-1}(p)} \quad (3.22)$$

<sup>1</sup>Wir geben hier Formeln für den Lower-Tail-Value-at-Risk an, weil wir es in den noch folgenden Beispielen und Anwendungen stets mit einer Gewinnvariable  $S$  zu tun haben werden. Formeln für den Tail-Value-at-Risk sind ebenso leicht zu bestimmen.

Für  $x \in \text{supp } P^{S^u|V=v} = (0, \infty)$  ist der Wert der bedingten Verteilungsfunktion  $F_{S^u|V=v}(x)$  dann die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(v) + \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2} \Phi^{-1}(F_{S^u|V=v}(x)) \right\} = x ; \quad (3.23)$$

woraus man schließlich durch Integration die (unbedingte) Verteilungsfunktion von  $S^u$  erhält:

$$F_{S^u}(x) = \int_0^1 F_{S^u|V=v}(x) dv . \quad (3.24)$$

Ähnlich der Vorgehensweise für  $S^c$  lässt sich der (nun allerdings) *bedingte* gestutzte Erwartungswert von  $S^u$  bestimmen:

$$E[(S^u - t)^+ | V = v] = \sum_{i=1}^n E \left[ \left( X_i - F_{X_i|V=v}^{-1}(F_{S^u|V=v}(t)) \right)^+ \middle| V = v \right] \quad (3.25)$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(v) + \frac{1}{2} \sigma_i^2 (1 - r_i^2)} \Phi \left( \sigma_i \sqrt{1 - r_i^2} - \Phi^{-1}(\xi) \right) \right] - t(1 - \xi) , \quad (3.26)$$

mit  $\xi := F_{S^u|V=v}(t)$ . Den gewünschten (unbedingten) gestutzten Erwartungswert erhält man schließlich gemäß

$$E[(S^u - t)^+] = \int_0^1 E[(S^u - t)^+ | V = v] dv . \quad (3.27)$$

Der Lower-Tail-Value-at-Risk ergibt sich dann gemäß Lemma 1.29.

### 3.3.3 Untere Schranke $S^l$

Hier ist es sinnvoll, die Vorgehensweise danach zu differenzieren, ob  $S^l$  komonotone Summanden hat oder nicht. Mit Blick auf Lemma 3.2 ist ersteres offenbar genau dann der Fall, wenn alle auftretenden Korrelationskoeffizienten  $r_i = \text{Corr}(\omega_i^\top Y, \beta^\top Y)$ ,  $i = 1, \dots, n$  dasselbe Vorzeichen aufweisen, denn in diesem Fall sind sämtliche Summanden von  $S^l$  isotone (bzw. sämtliche Summanden antitone) Transformationen von  $U$ .

#### Summanden von $S^l$ komonoton.

Es gelte also  $r_i \leq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , oder  $r_i \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Letzteres ist z.B. in der zu Beginn dieses Kapitels angesprochenen Situation II der Fall, wenn  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix ist (dies entspricht dort der Annahme stochastisch unabhängiger Periodenrenditen) und  $\beta_i \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt.

Wir folgen der üblichen Vorgehensweise (Lemma 1.27 bzw. 1.29) zur Bestimmung der Kenngrößen einer komonotonen Summe. Danach ergibt sich das  $p$ -Quantil von  $S^l$  wie folgt:

$$F_{S^l}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n b_i \exp \left( \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(p) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right), \quad (3.28)$$

woraus sich  $F_{S^l}(x)$  (für  $x > 0$ ) als eindeutige Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n b_i \exp \left( \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^l}(x)) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right) = x \quad (3.29)$$

bestimmt. Der zugehörige gestutzte Erwartungswert lässt sich explizit bestimmen gemäß

$$E[(S^l - t)^+] = \left[ \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \Phi \left( r_i \sigma_i - \Phi^{-1}(F_{S^l}(t)) \right) \right] - t(1 - F_{S^l}(t)), \quad (3.30)$$

ebenso wie der Lower-Tail-Value-at-Risk,

$$\text{L-TVaR}_\alpha(S^l) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \Phi(\Phi^{-1}(\alpha) - r_i \sigma_i). \quad (3.31)$$

### Summanden von $S^l$ nicht komonoton.

In diesem Fall existieren also Indizes  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $r_i < 0$  und  $r_j > 0$ . Hier lässt sich immerhin noch eine explizite Formel für gestutzte Erwartungswerte von  $S^l$  angeben. Die Idee zur Konstruktion derselben, die für einen Spezialfall auf Lord (2006) zurückgeht, soll nun beschrieben werden.

Sei  $t \in \mathbb{R}$  im Folgenden fixiert. Wählen wir die Menge  $A_t \in \mathfrak{B}$  gemäß

$$A_t := \{z \in \mathbb{R} : E(S|Z = z) \geq t\}, \quad (3.32)$$

wobei wie bisher  $Z = \beta^\top Y$  bezeichnet, dann folgt offenbar

$$\begin{aligned} E[(S^l - t)^+] &= E[(E[S|Z] - t)1_{\{Z \in A_t\}}] = E[E(S|Z)1_{\{Z \in A_t\}}] - t \cdot E(1_{\{Z \in A_t\}}) \\ &= \sum_{i=1}^n E[E(X_i|Z)1_{\{Z \in A_t\}}] - t \cdot P(Z \in A_t). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass im hier vorliegenden Fall die Menge  $A_t$  gerade das Komplement eines (möglicherweise leeren) Intervalls ist, was uns eine explizite Berechnung von  $E[(S^l - t)^+]$  erlauben wird.

Bei der Darstellung von  $S^l = E(S|Z)$  hatten wir zur Vereinfachung  $U = \Phi\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)$  gesetzt; wir wollen dies hier beibehalten. Damit gilt  $E(S|Z) = g(U)$ , mit

$$g(u) = \sum_{i=1}^n b_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(u) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right\}, \quad u \in (0, 1),$$

vgl. Satz 3.2. Wählen wir nun  $B_t := \{u \in (0, 1) : g(u) \geq t\}$ , so gilt offenbar  $A_t = \sigma_Z \Phi^{-1}(B_t) + \mu_Z$  sowie  $\{Z \in A_t\} = \{U \in B_t\}$ .

Zur konkreten Bestimmung der Menge  $B_t$  betrachten wir die Ableitung der Funktion  $g$ ,

$$g'(u) = \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u))} \sum_{i=1}^n b_i r_i \sigma_i \exp \left\{ \mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(u) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2 \right\}.$$

Der Zähler ist eine strikt isotope und stetige Funktion von  $u$ , deren Funktionswerte für  $u \rightarrow 0$  gegen  $-\infty$  und für  $u \rightarrow 1$  gegen  $\infty$  konvergieren. Daher muss der Zähler genau eine Nullstelle  $u^*$  besitzen, welche wegen der Positivität des Nenners gleichzeitig die eindeutige Nullstelle von  $g'$  ist. Da nun  $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \lim_{u \rightarrow 1} g(u) = \infty$  gilt, muss  $u^*$  die eindeutige Minimalstelle von  $g$  sein; offenbar ist also  $g$  auf  $(0, u^*)$  antiton und auf  $(u^*, 1)$  isoton. Ist nun  $g(u^*) \geq t$ , so gilt also  $g(u) \geq t$  für alle  $u \in (0, 1)$ . Bezeichnen wir anderenfalls, d.h. für  $g(u^*) < t$ , die beiden Nullstellen der Funktion  $h_t(u) := g(u) - t$  mit  $c_t$  bzw.  $d_t$  ( $c_t < d_t$ ), so gilt  $\{g < t\} = (c_t, d_t)$ . Somit erhalten wir also für die gesuchte Menge

$$B_t = \begin{cases} (0, 1) & , \text{ falls } g(u^*) \geq t \\ (0, 1) \setminus (c_t, d_t) & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Nun wollen wir  $E[E(X_i|Z)1_{\{Z \in A_t\}}] =: \psi_i$  bestimmen,  $i = 1, \dots, n$ . Unter Berücksichtigung von (3.11) erhalten wir:

$$\psi_i = E[b_i e^{\mu_i + r_i \sigma_i \Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2} 1_{\{U \in B_t\}}] = b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}(1 - r_i^2) \sigma_i^2} E[e^{r_i \sigma_i \Phi^{-1}(U)} 1_{\{U \in B_t\}}].$$

Für den Fall  $B_t = (0, 1)$  erhalten wir sofort  $\psi_i = E(X_i) = b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2}$ . Zur Behandlung des verbleibenden Falles  $B_t = (0, 1) \setminus (c_t, d_t)$  stellen wir zunächst fest, dass für jede  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  und jede reelle Zahl  $s > 0$  gilt:

$$E[X 1_{\{X > s\}}] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi \left( \sigma + \frac{\mu - \ln s}{\sigma} \right) \quad (3.33)$$

$$E[X 1_{\{X < s\}}] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi \left( \frac{\ln s - \mu}{\sigma} - \sigma \right). \quad (3.34)$$

Dies lässt sich leicht mit Hilfe von (1.28) einsehen. Nun gilt offenbar für  $X := e^{r_i \sigma_i \Phi^{-1}(U)}$  gerade  $X \sim \mathcal{L}(0, r_i^2 \sigma_i^2)$  und  $\{U \in B_t\} = \{X < e^{r_i \sigma_i \Phi^{-1}(c_t)}\} \cup \{X > e^{r_i \sigma_i \Phi^{-1}(d_t)}\}$ . Es ergibt sich damit

$$E[e^{r_i \sigma_i \Phi^{-1}(U)} 1_{\{U \in B_t\}}] = e^{\frac{r_i^2 \sigma_i^2}{2}} \cdot [\Phi(\Phi^{-1}(c_t) - r_i \sigma_i) + \Phi(r_i \sigma_i + \Phi^{-1}(d_t))],$$

und schließlich

$$\psi_i = b_i e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \cdot [\Phi(\Phi^{-1}(c_t) - r_i \sigma_i) + \Phi(r_i \sigma_i + \Phi^{-1}(d_t))].$$

Fassen wir zusammen: Bezeichnet  $u^*$  die eindeutige Minimalstelle von  $g$ , so erhalten wir für die gestutzten Erwartungswerte von  $S^l$

(i) im Fall  $g(u^*) \geq t$ :

$$E[(S^l - t)^+] = E(S^l) - t = \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} - t,$$

(ii) im Fall  $g(u^*) < t$ :

$$E[(S^l - t)^+] = \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \cdot [\Phi(\Phi^{-1}(c_t) - r_i \sigma_i) + \Phi(r_i \sigma_i + \Phi^{-1}(d_t))] - t(1 + c_t - d_t), \quad (3.35)$$

wobei  $c_t < d_t$  die beiden Nullstellen der Funktion  $h_t(u) = g(u) - t$  bezeichnen.

Aus (i) folgt in Verbindung mit (1.14) offenbar  $\text{supp } S^l = (g(u^*), \infty)$ .

Wir bemerken, dass zur Bestimmung des gestutzten Erwartungswertes  $E[(S^l - t)^+]$  höchstens drei Nullstellen zu bestimmen sind: die eindeutige Nullstelle  $u^*$  der Funktion  $g'$  sowie — falls  $g(u^*) < t$  — die beiden Nullstellen der Funktion  $h_t$ .

Soll nun die gesamte GEW-Funktion  $t \mapsto E[(S^l - t)^+]$  bestimmt werden (z.B. um durch (numerisches) Differenzieren derselben die Verteilungsfunktion von  $S^l$  zu erhalten), so empfiehlt sich die folgende Vorgehensweise. Für die beiden streng monotonen und stetigen Funktionen  $h_1 := g|_{(0, u^*]}$  sowie  $h_2 := g|_{(u^*, 1)}$  werden ihre Inversen  $h_1^{-1}, h_2^{-1}$  (numerisch) bestimmt. Die für jedes  $t \in \mathbb{R}$  mit  $g(u^*) < t$  benötigten Nullstellen der Funktion  $h_t$  ergeben sich dann offenbar gemäß  $c_t = h_1^{-1}(t), d_t = h_2^{-1}(t)$ . Sollen noch Quantile von  $S^l$  bestimmt werden, die ja zur Bestimmung des (Lower-)Tail-Value-at-Risk benötigt würden, so ist die Verteilungsfunktion noch numerisch zu invertieren.

## 3.4 Wahl der bedingenden Zufallsvariable

Nun stellt sich die Frage, wie der Koeffizientenvektor  $\beta$  der bedingenden Zufallsvariable  $Z = \beta^\top Y$  zu wählen ist, so dass die Verteilungen der darauf beruhenden Schranken  $S^l(\beta)$  und  $S^u(\beta)$  die Verteilung von  $S$  möglichst gut approximieren.

Damit ist vor allem der praktisch relevante Fall angesprochen, wo es kein  $\beta \in \mathbb{R}^m$  mit  $r_i(\beta) = 1$  für alle  $i = 1, \dots, m$  gibt, denn in diesem Fall fielen die Schranken bereits in Verteilung mit  $S$  zusammen.

### 3.4.1 Approximative global-optimale Schranken

Auf Grund von (1.19) gilt für quadrat-integrierbare Zufallsvariablen  $X, Y$  mit  $X \leq_{cx} Y$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_t(X, Y) dt = \frac{1}{2}(\text{Var}(Y) - \text{Var}(X)). \quad (3.36)$$

Die rechte Seite kann offenbar als Maß für den globalen Fehler im Sinne des  $\varrho$ -Abstands bei Approximation von  $Y$  durch  $X$  interpretiert werden. Andererseits ist unmittelbar einsichtig, dass bei Verschwinden der rechten Seite sofort  $P^X = P^Y$  folgt.

In diesem Sinne wollen wir eine untere konvexe Schranke  $S^l(\beta^*)$  (und auch die korrespondierende bedingende Zufallsvariable  $Z = (\beta^*)^\top Y$  sowie  $\beta^*$ ) als *global-optimal* bezeichnen, falls

$$\text{Var}(S^l(\beta^*)) \geq \text{Var}(S^l(\beta)) \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}^m .$$

Entsprechend bezeichnen wir eine obere konvexe Schranke  $S^u(\beta^*)$  als *global-optimal*, falls

$$\text{Var}(S^u(\beta^*)) \leq \text{Var}(S^u(\beta)) \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}^m .$$

Da die entsprechende Minimierungs- bzw. Maximierungsaufgabe im Allgemeinen nur numerisch und dann auch nur aufwändig zu lösen sein wird, stellen wir nun Möglichkeiten vor, wie die global-optimalen Schranken *approximativ* bestimmt werden können.

### **$Z$ als lineare Approximation von $S$ .**

Bei genauerer Betrachtung der Schranken wird klar, dass bei der (in der Praxis leider nicht möglichen) Wahl von  $Z = S$   $P$ -f.s. die konvexen Schranken  $S^l(Z)$  sowie  $S^u(Z)$  in Verteilung mit  $S$  zusammenfallen. Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas und Vyncke (2002b) schlussfolgern daraus und aus den eben gemachten Ausführungen, dass  $Z$  und  $S$  sich so gleichartig wie möglich ("as alike as possible") verhalten sollten, um global-optimale konvexe Schranken zu erhalten. Mit anderen Worten sollte der Vektor  $\beta$  also so gewählt werden, dass  $Z = \beta^\top Y$  die Zufallsvariable  $S = \sum_{i=1}^n b_i e^{\omega_i^\top Y}$  so gut wie möglich nachbildet.

Dhaene et al. (2002b) schlagen deshalb vor,  $\beta$  so zu wählen, dass  $Z$  eine lineare Approximation von  $S$  ist. Wir erhalten also mittels Taylor-Approximation ( $e^x \approx 1 + x$  für kleines  $x$ ):

$$S = \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \omega_i^\top Y - \mu_i} \approx \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i} (1 + (\omega_i^\top Y - \mu_i)) = \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i} \omega_i^\top Y + c, \quad (3.37)$$

mit einer gewissen Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Die Approximation ist umso besser, je "kleiner"  $|\omega_i^\top Y - \mu_i|$  ist, also je kleiner  $\sigma_i^2 = \text{Var}(\omega_i^\top Y)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ist.<sup>2</sup>

Diese Betrachtungen legen die folgende Wahl von  $\beta$  nahe:

$$\beta_{FA} = \Omega a \quad \text{mit } a = (b_i e^{\mu_i})_{i=1, \dots, n}, \quad (3.38)$$

<sup>2</sup>In diesem Sinne könnte man auch formulieren: Die Approximation ist umso besser, je kleiner  $\|\text{Cov}(\Omega^\top Y)\|$  ist, wobei  $\|\cdot\|$  eine geeignete Matrixnorm bezeichne.

wobei der Index  $FA$  für **First order Approximation** steht. Wir bemerken, dass man für die resultierende bedingende Zufallsvariable  $Z_{FA} = (\beta_{FA})^\top Y$  intuitiv erwartet, dass  $E[\text{Var}(S|Z_{FA})]$  klein ist, und damit  $\text{Var}(S^l(\beta_{FA})) = \text{Var}(S) - E[\text{Var}(S|Z_{FA})]$  groß, vgl. (2.25).

### **Z als logarithmiertes geometrisches Mittel der Summanden von $S$ .**

Nielsen und Sandmann (2003) haben im Kontext der Bewertung Asiatischer Optionen vorgeschlagen, als bedingende Zufallsvariable das logarithmierte geometrische Mittel der Summanden  $X_1, \dots, X_n$  von  $S$  zu wählen. Dem scheint eine ähnliche Idee wie bei der Konstruktion von  $Z_{FA}$  zu Grunde zu liegen: Für kleine  $\omega_i^\top Y$  (also für kleine  $\mu_i$  und  $\sigma_i$ ),  $i = 1, \dots, n$ , gilt offenbar

$$S = \sum_{i=1}^n b_i e^{\omega_i^\top Y} \approx \sum_{i=1}^n b_i (1 + \omega_i^\top Y) = \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n b_i \omega_i^\top Y = c + \ln \left( \prod_{i=1}^n (e^{\omega_i^\top Y})^{b_i} \right).$$

Wir wählen also als bedingende Zufallsvariable  $Z_{GA} = \sum_{i=1}^n b_i \omega_i^\top Y$ , was die Form  $Z_{GA} = (\beta_{GA})^\top Y$  aufweist mit

$$\beta_{GA} = \Omega b, \tag{3.39}$$

wobei der Index  $GA$  für **Geometric Average** steht.

### **Z maximiert lineare Approximation von $\text{Var}(S^l)$ .**

Vanduffel, Hoedemakers und Dhaene (2005) konstruieren eine approximative global-optimale *untere* konvexe Schranke, indem Sie anstelle von  $\text{Var}(S^l)$  eine lineare Approximation dessen maximieren. Es ergibt sich mit (1.34) und anschließender Taylor-Approximation:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S^l(\beta)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} e^{\mu_j + \sigma_j^2/2} (e^{r_i r_j \sigma_i \sigma_j} - 1) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} e^{\mu_j + \sigma_j^2/2} (r_i r_j \sigma_i \sigma_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} e^{\mu_j + \sigma_j^2/2} \left( \frac{\text{Cov}(\beta^\top Y, \omega_i^\top Y) \text{Cov}(\beta^\top Y, \omega_j^\top Y)}{\text{Var}(\beta^\top Y)} \right) \\ &= \frac{1}{\text{Var}(\beta^\top Y)} \left[ \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} (\omega_i^\top Y), \beta^\top Y \right) \right]^2 \\ &= \left[ \text{Corr} \left( \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} (\omega_i^\top Y), \beta^\top Y \right) \right]^2 \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} (\omega_i^\top Y) \right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird offensichtlich maximal, wenn die auftretende Korrelation gleich 1 ist. Dies gelingt durch Wahl von  $\beta$  als

$$\beta_{VM} = \Omega a \quad \text{mit } a = (b_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2})_{i=1, \dots, n}, \quad (3.40)$$

wobei der Index  $VM$  für *Variance Maximizing* steht. Die durchgeführte Taylor-Approximation ist umso besser, je kleiner  $r_i r_j \sigma_i \sigma_j$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  ist.

Analoge Argumente lassen sich zur approximativen Minimierung von  $\text{Var}(S^u)$  auf Grund dessen schwierigerer Struktur, vgl. (3.8), nicht anwenden.

### 3.4.2 Approximative lokal-optimale Schranken

Nun ist es jedoch nicht immer von Interesse, eine im Sinne des  $\varrho$ -Abstandes global-optimale konvexe Schranke von  $S$  zu bestimmen. Man denke zum Beispiel an das TVaR-Risikomaß, welches vor allem das Verhalten der *tails* der entsprechenden Verteilung quantifiziert. Beispielsweise geht in die Berechnung von  $\text{TVaR}_\alpha(S)$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil  $q_{1-\alpha}(S)$  sowie der gestutzte Erwartungswert  $E[(S - q_{1-\alpha}(S))^+]$  ein, vgl. (1.4), wobei  $\alpha$  in der Regel klein ist. Aus diesem Blickwinkel würde  $S$  also durch eine solche Zufallsvariable gut approximiert werden, welche sich in den *tails* — in diesem Sinne also *lokal* — ähnlich wie  $S$  verhält; ihr Verhalten darüber hinaus — also global — spielt hingegen keine Rolle.

In Anlehnung an den oben eingeführten globalen Optimalitätsbegriff für konvexe Schranken bezeichnen wir eine untere bzw. obere konvexe Schranke  $S^l(\beta^*)$  bzw.  $S^u(\beta^*)$  für  $S$  als *lokal-optimal zum Niveau  $\alpha$* , wenn deren Tail-Value-at-Risk zu einem vorgegebenen Niveau  $\alpha$  maximal bzw. minimal ist. Dies legt die nach Lemma 1.23 für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gültige Beziehung

$$\text{TVaR}_\alpha(S^l(\beta)) \leq \text{TVaR}_\alpha(S) \leq \text{TVaR}_\alpha(S^u(\beta)) \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}^m$$

nahe. Wir bezeichnen dann – wie oben – auch  $Z^* = \beta^{*\top} Y$  sowie  $\beta^*$  als lokal-optimal.

Vanduffel, Chen, Dhaene, Goovaerts, Henrard und Kaas (2006) haben die in Abschnitt 3.4.1 vorgestellte Methode der approximativen Varianzmaximierung zur Bestimmung einer approximativen global-optimalen unteren konvexen Schranke auf den lokal-optimalen Fall übertragen.

Sei dazu ein Startwert  $\beta_0 \in \mathbb{R}^m$  vorgegeben, bezeichne  $Z_0 = (\beta_0^\top)^\top Y$  die resultierende bedingende Zufallsvariable sowie  $r_i^0 := \text{Corr}(Z_0, \omega_i^\top Y)$ . Vanduffel et al. (2006) wählen  $\beta_0 = \beta_{VM}$ , mit  $\beta_{VM}$  gemäß (3.40). Uns scheint jede andere approximativ global-optimale Wahl von  $\beta$  jedoch ebenso plausibel zu sein.

In der Formel für den Tail-Value-at-Risk approximieren wir zunächst die Vertei-

lungsfunktion  $\Phi$  um den Punkt  $r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha)$  linear:

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_\alpha(S^l(\beta)) &= E[S^l(\beta) | S^l(\beta) > q_{1-\alpha}(S^l(\beta))] \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \Phi(r_i \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha)) \\ &\approx \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} [\Phi(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha)) + \varphi(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha))(r_i \sigma_i - r_i^0 \sigma_i)] \end{aligned}$$

Als Funktion von  $\beta$  betrachtet (man beachte, dass die  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $\beta$  abhängen) wird dies genau dann maximal, wenn der folgende Ausdruck maximal wird,

$$\sum_{i=1}^n b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \varphi(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha)) r_i \sigma_i ;$$

dieser schreibt sich unter Berücksichtigung von  $r_i = \text{Corr}(\beta^\top Y, \omega_i^\top Y)$  und mit der Bezeichnung  $\gamma_i := b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} \varphi(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha))$  als

$$\text{Corr}\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i (\omega_i^\top Y), \beta^\top Y\right) \cdot \sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i (\omega_i^\top Y)\right)}.$$

Der auftretende Korrelationsterm ist offensichtlich gleich 1, falls  $\beta = \Omega \gamma$  gewählt wird mit  $\gamma = (\gamma_i)_{i=1, \dots, n}$ . Auswertung der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung und Vernachlässigung einer die Maximierung nicht beeinflussenden Konstanten liefert schließlich für die Maximalstelle:

$$\beta_{LO} = \Omega a \quad \text{mit} \quad a = \left( b_i e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} e^{-\frac{1}{2}(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha))^2} \right)_{i=1, \dots, n}, \quad (3.41)$$

wobei der Index  $LO$  für **L**ocally **O**ptimal steht.

### Bemerkung 3.7

Vanduffel et al. (2006) erwähnen, dass sich dieselbe Vorgehensweise nun iterativ wiederholen ließe, indem man im nächsten Schritt  $\Phi$  um die Stelle  $r_i^{LO} \sigma_i - \Phi^{-1}(1 - \alpha)$  entwickelte, wobei  $r_i^{LO} := \text{Corr}(\beta_{LO}^\top Y, \omega_i^\top Y)$ , usw. Man erwartet intuitiv, dass mit jeder Iteration die resultierende bedingende Zufallsvariable  $Z_{LO} := \beta_{LO}^\top Y$  zu einer weiteren Verbesserung der Approximation führt. ■

Der hier verwendete lokale Optimalitätsbegriff ist in gewisser Weise unabhängig davon, ob sich "lokal" auf den *left tail* oder der *right tail* bezieht. Um dies einzusehen, nutzen wir die folgende Dualität zwischen dem Tail-Value-at-Risk und dem Lower-Tail-Value-at-Risk aus,

$$E(S) = (1 - \alpha) \text{L-TVaR}_{1-\alpha}(S^l(\beta)) + \alpha \text{TVaR}_\alpha(S^l(\beta)) \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1),$$

vgl. (1.10). Offenbar ist daher  $\text{TVaR}_\alpha(S^l(\beta))$  genau dann maximal, wenn  $\text{L-TVaR}_{1-\alpha}(S^l(\beta))$  minimal ist.

Wir hätten also (äquivalent) eingangs "lokal-optimal zum Niveau  $\alpha$ " auch via *left-tail* definieren können, im Sinne von  $\min_{\beta \in \mathbb{R}^m} \text{L-TVaR}_{1-\alpha}(S^l(\beta))$ , was wegen

$$\text{L-TVaR}_\alpha(S) \leq_{cx} \text{L-TVaR}_\alpha(S^l(\beta)) \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}^m, \alpha \in (0, 1),$$

vgl. Lemma 1.23, eine plausible Begriffsbildung ist.

### Bemerkung 3.8

- (i) Liegt eine Verlustvariable vor, dann wird man an einer guten Approximation des *right tail* interessiert sein und zu vorgegebenem kleinen  $\alpha \in (0, 1)$  das zum Niveau  $\alpha$  (approximativ) lokal-optimale  $\beta_{LO}$  gemäß (3.41) bestimmen. Liegt hingegen eine Gewinnvariable vor, dann wird man an einer guten Approximation des *left tail* interessiert sein und zu vorgegebenem kleinen  $\alpha \in (0, 1)$  das zum Niveau  $1 - \alpha$  (approximativ) lokal-optimale  $\beta_{LO}$  gemäß (3.41) bestimmen.
- (ii) In bestimmten Situationen ist es möglicherweise wünschenswert,  $\varrho_t(S^l, S)$  für ein fixiertes  $t \in \mathbb{R}$  zu minimieren, d.h.  $E[(S^l - t)^+]$  zu maximieren. Mit Blick auf die Struktur von  $E[(S^l - t)^+]$ , vgl. (3.30) oder gar (3.35), stellt sich jedoch die Übertragung der eben vorgestellten Methode auf dieses Problem als schwerlich möglich heraus.
- (iii) Die hier vorgestellte Methode kann leider nicht zur approximativen Bestimmung einer lokal-optimalen oberen konvexen Schranke verwendet werden, da es keine explizite Darstellung für  $\text{TVaR}_\alpha(S^u)$  bzw.  $\text{L-TVaR}_\alpha(S^u)$  gibt.

## 3.5 Alternative obere Schranke

Im Folgenden soll eine explizite Formel für die in Abschnitt 2.5 vorgestellte obere Schranke

$$\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{E[\text{Var}(S|Z)1_{\{Z < d(t)\}}]} \sqrt{P(Z < d(t))} \quad (3.42)$$

für den  $\varrho_t$ -Abstand der Summenvariable  $S$  von ihrer unteren konvexen Schranke  $S^l$  bestimmt werden. Hierbei wählen wir (wie bisher in diesem Kapitel)  $S^l = S^l(\beta)$  für ein  $\beta \in \mathbb{R}^m$  gemäß Lemma 3.2, schreiben manchmal stattdessen auch  $S^l(Z)$ , um die Abhängigkeit von der bedingenden Zufallsvariable  $Z = \beta^\top Y$  in der Notation zum Ausdruck kommen zu lassen.

Wir präsentieren das Resultat aus Gründen der Übersichtlichkeit in einem Lemma.

**Lemma 3.9**

Sei  $S = \sum_{i=1}^n b_i e^{\omega_i^\top Y}$  definiert wie in Lemma 3.1 und  $Z = \beta^\top Y$  für ein  $\beta \in \mathbb{R}^m$ . Es existiere ein  $d(t) \in \mathbb{R}$  mit  $\{Z \geq d(t)\} \subset \{S \geq t\}$  und es bezeichne  $d^*(t) = \frac{d(t) - E(Z)}{\sqrt{\text{Var}(Z)}}$ . Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2 gilt dann für die gemäß (3.42) definierte obere Schranke

$$\Delta_{S^t}^{\text{NS}}(t) = \frac{1}{2} \left( \Phi(d^*(t)) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j (e^{\sigma_{ij}} - e^{r_i r_j \sigma_i \sigma_j}) e^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \Phi(d^*(t) - r_i \sigma_i - r_j \sigma_j) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.43)$$

**Beweis:**

Die Wahrscheinlichkeit unter der zweiten Wurzel in (3.42) ist offenbar  $\Phi(d^*(t))$ . Es verbleibt die Bestimmung des Ausdrucks unter der ersten Wurzel, der sich jedoch wie folgt zerlegen lässt:

$$E(\text{Var}(S|Z) \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}) = E(E(S^2|Z) \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}) - E(E^2(S|Z) \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}). \quad (3.44)$$

Wir kürzen ab:  $\mu_Z = E(Z)$ ,  $\sigma^2(Z) = \text{Var}(Z)$ .

(i) Der erste Summand besitzt die Darstellung

$$E(E(S^2|Z) \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j E[E(e^{U_{ij}}|Z) \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}].$$

mit  $U_{ij} := \omega_i^\top Y + \omega_j^\top Y$ . Es gilt offenbar  $U_{ij} = N(\mu_i + \mu_j, \sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_{ij})$ ; es bezeichne  $\mu_{U_{ij}} := E(U_{ij})$  sowie  $\sigma_{U_{ij}}^2 := \text{Var}(U_{ij})$ . Wegen Lemma 3.5 (ii) erhalten wir unter Berücksichtigung von  $\text{Corr}(U_{ij}, Z) = (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j) / \sigma_{U_{ij}}$  nun

$$\begin{aligned} E[e^{U_{ij}}|Z] &= \exp \left\{ \mu_{U_{ij}} + (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j) \left( \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right) + \frac{1}{2} (\sigma_{U_{ij}}^2 - (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j)^2) \right\} \\ &=: h_{ij}(Z) \end{aligned}$$

mit einer offensichtlich monotonen Transformation  $h_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ;  $h_{ij}$  ist strikt isoton (bzw. strikt antiton) für  $r_i \sigma_i + r_j \sigma_j > 0$  (bzw.  $< 0$ ), oder  $h_{ij}$  ist eine Konstante (für  $r_i \sigma_i + r_j \sigma_j = 0$ ). Es gilt:

$$h_{ij}(Z) \sim \mathcal{L} \left( \mu_{U_{ij}} + \frac{1}{2} \sigma_{U_{ij}}^2 - \frac{1}{2} (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j)^2, (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j)^2 \right).$$

Nun erhalten wir unter Berücksichtigung von (3.33) und (3.34):

$$\begin{aligned} E(E[e^{U_{ij}}|Z] \mathbf{1}_{\{Z < d(t)\}}) &= \begin{cases} E(h_{ij}(Z) \mathbf{1}_{\{h_{ij}(Z) < h_{ij}(d(t))\}}) & , \text{ falls } r_i \sigma_i + r_j \sigma_j > 0 \\ E(e^{U_{ij}}) \cdot P(Z < d(t)) & , \text{ falls } r_i \sigma_i + r_j \sigma_j = 0 \\ E(h_{ij}(Z) \mathbf{1}_{\{h_{ij}(Z) > h_{ij}(d(t))\}}) & , \text{ falls } r_i \sigma_i + r_j \sigma_j < 0 \end{cases} \\ &= e^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) + \sigma_{ij}} \Phi \left( \frac{d(t) - \mu_Z}{\sigma_Z} - r_i \sigma_i - r_j \sigma_j \right). \end{aligned}$$

(ii) Wenden wir uns nun der Bestimmung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (3.44) zu. Benutzen wir die in Lemma 3.2 gegebene Darstellung von  $E(S|Z)$  (dort mit  $S^l(\beta)$  bezeichnet) und ersetzen in dieser die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $\Phi^{-1}(U)$  (mit  $U \sim R_{0,1}$ ) durch die verteilungsgleiche Zufallsvariable  $(Z - \mu_Z)/\sigma_Z$ , so schreibt sich der gesuchte Ausdruck als

$$E[E^2(S|Z)\mathbb{1}_{\{Z < d(t)\}}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j E[e^{\tilde{U}_{ij}} \mathbb{1}_{\{Z < d(t)\}}]$$

mit  $\tilde{U}_{ij} := \mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) - \frac{1}{2}(r_i^2 \sigma_i^2 + r_j^2 \sigma_j^2) + (r_i \sigma_i + r_j \sigma_j) \left( \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)$ .

Die weitere Vorgehensweise ist analog derer in (i):  $e^{\tilde{U}_{ij}}$  ist entweder eine Konstante, oder eine lognormalverteilte Zufallsvariable und eine streng monotone Transformation von  $Z$ , wodurch sich mit Hilfe von (3.33) bzw. (3.34) bestimmen lässt:

$$E[e^{\tilde{U}_{ij}} \mathbb{1}_{\{Z < d(t)\}}] = e^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) + r_i r_j \sigma_i \sigma_j} \Phi \left( \frac{d(t) - \mu_Z}{\sigma_Z} - r_i \sigma_i - r_j \sigma_j \right).$$

Damit sind die beiden Summanden von (3.44) bestimmt; Zusammenfassen der beiden Doppelsummen liefert schließlich die Behauptung.  $\blacksquare$

Das eben bewiesene Lemma findet sich für den Spezialfall, dass  $E[(S - t)^+]$  die Auszahlung einer *Basket-* bzw. *Asiatischen Call-Option* ist, bereits in Deelstra, Liinev und Vanmaele (2004) bzw. Vanmaele, Deelstra, Liinev, Dhaene und Goovaerts (2006).

Da in die obere Schranke  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}$  die Verteilung der unteren konvexen Schranke  $S^l(Z)$  eingeht, ergeben sich dabei je nach Wahl von  $Z$  (was über die  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $d(t)$ ) eingeht) unterschiedliche Formeln. Wir zeigen nun, dass für alle in Abschnitt 3.4 vorgeschlagenen Wahlen  $Z_{FA}$ ,  $Z_{VM}$ ,  $Z_{GA}$  und  $Z_{LO}$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  jeweils ein Wert  $d(t) \in \mathbb{R}$  existiert, welcher die Voraussetzungen von Lemma 3.9 erfüllt.

Dazu stellen wir zunächst fest, dass die in Abschnitt 3.4 definierten Zufallsvariablen  $Z_{FA}$ ,  $Z_{VM}$ ,  $Z_{GA}$  und  $Z_{LO}$  jeweils die Form  $\sum_{i=1}^n b_i c_i (\omega_i^\top Y)$  mit  $c_i > 0$  aufweisen; Tabelle 3.1 enthält die korrespondierenden  $c_i$ .

$Z$	$c_i$
$Z_{FA}$	$e^{\mu_i}$
$Z_{VM}$	$e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}$
$Z_{GA}$	1
$Z_{LO}$	$e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2} e^{-\frac{1}{2}(r_i^0 \sigma_i - \Phi^{-1}(1-\alpha))^2}$

Tabelle 3.1: Darstellung  $Z = \sum_{i=1}^n b_i c_i (\omega_i^\top Y)$  für spezielle Wahlen von  $Z$

Bezeichnen wir

$$c := \sum_{i=1}^n b_i c_i (1 - \ln c_i) ,$$

so erhalten wir unter Ausnutzung der Abschätzung  $e^x \geq 1 + x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$S = \sum_{i=1}^n b_i e^{\omega_i^\top Y} = \sum_{i=1}^n b_i c_i e^{\omega_i^\top Y - \ln c_i} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i c_i (1 - \ln c_i)}_{=c} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i c_i (\omega_i^\top Y)}_{=Z} = c + Z .$$

Für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt nun offenbar  $d(t) = t - c$  die Bedingung  $\{Z \geq d(t)\} \subset \{S \geq t\}$  und somit die Voraussetzungen von Lemma 3.9. Ferner ist  $d(t)$  isoton in  $t$ , womit (2.26) folgt.

### Bemerkung 3.10

Wir haben im bisherigen Verlauf dieses Kapitels gesehen, dass sich für die Verteilung von Summen lognormalverteilter Zufallsvariablen leicht zu berechnende obere und untere Schranken für gestutzte Erwartungswerte und den Tail-Value-at-Risk. Dadurch eröffnen sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten gerade auf dem Gebiet der Finanz- und Versicherungsmathematik. Erwähnt seien hier die Arbeiten von Hoedemakers, Darkiewicz, Deelstra, Dhaene und Vanmaele (2005) (Lebensversicherung), Vanduffel, Dhaene und Goovaerts (2005) (Spar-Entnahme-Pläne), Dhaene, Vanduffel, Goovaerts, Kaas und Vyncke (2005) (Optimale Portfolioauswahl), Vanmaele et al. (2006) (Asiatische Optionen) sowie Deelstra, Diallo und Vanmaele (2006) (Basket-Optionen). Auch Erweiterungen des Konzeptes sind möglich, z.B. für Linearkombinationen von (lognormalverteilten) Zufallsvariablen mit zufälligen Linearkoeffizienten (vgl. Hoedemakers, Darkiewicz und Goovaerts (2005) sowie Ahcan, Darkiewicz, Goovaerts und Hoedemakers (2006)).

## 3.6 Anwendung: Auszahlung einer Asiatischen Option

Eine (gewöhnliche) Option auf ein Wertpapier ist ein Derivat ("abgeleitetes Wertpapier"), dessen Auszahlung durch den Kurs eines Wertpapiers (des sogenannten *Basiswertes*) zu einem vereinbarten Zeitpunkt  $T \in \mathbb{N}$  ("Stichtag") bestimmt ist. Optionen dienen in der Regel dazu, sich gegen eine stark negative oder positive Entwicklung des Kurses des Basiswertes abzusichern oder auf solche Entwicklungen zu spekulieren. Legt man dabei das populäre Black-Scholes-Modell zu Grunde, so wird der Kursverlauf  $(A_s)_{s>0}$  des Basiswertes durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert,

$$A_s = a_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s} , \quad s > 0; \quad (3.45)$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$  sei,  $(W_s)_{s>0}$  einen Standard-Wienerprozess und  $a_0 > 0$  den Initialkurs bezeichne. Die Auszahlung einer *Europäischen Call-Option* auf diesen Basiswert mit Stichtag  $T$  und Basispreis  $t$  ist beispielsweise gegeben durch  $(A_T - t)^+$ . Die erwartete Auszahlung  $E[(A_T - t)^+]$ , welche (bis auf Multiplikation mit einem konstanten Diskontierungsfaktor) den Preis der Option darstellt, ist leicht zu berechnen, weil  $A_T$  offenbar einer Lognormalverteilung unterliegt.

Auszahlungen von gewöhnlichen Optionen sind allerdings recht anfällig für Kursmanipulationen am Stichtag, wie sie häufig von großen Marktteilnehmern initiiert werden. Weniger anfällig gegen solche Manipulationen ist die Auszahlung einer *Asiatischen Option*. Diese ist durch das arithmetische Mittel von Kursen des Basiswertes an mehreren vereinbarten Stichtagen bestimmt.

Wir wollen nun eine (spezielle) Asiatische Option betrachten, deren Auszahlung  $X$  durch die Kurse des Basiswertes zu den  $n \leq T$  Zeitpunkten  $T - n + 1, \dots, T$  wie folgt bestimmt ist:

$$X = (S - t)^+ \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_{T-i+1}.$$

Dabei gilt wegen (3.45) für die Verteilung des Vektors  $A = (A_{T-n+1}, \dots, A_T)$ :

$$A \sim \mathcal{L}(\tau, \Lambda),$$

mit  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top$ ,  $\Lambda = ((\lambda_{ij}))_{i,j=1,\dots,n}$  und

$$\begin{aligned} \tau_i &= \ln a_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - i + 1), \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_{ij} &= \sigma^2 \min\{T - i + 1, T - j + 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Offenbar handelt es sich bei diesem Modell für  $S$  um einen Spezialfall des Basismodells (3.1), mit  $\tau$  und  $\Lambda$  wie oben,

$$b_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{und} \quad \Omega = I_n.$$

Die exakte Bestimmung der erwarteten Auszahlung  $E[(S-t)^+]$  ist unter diesen Umständen bekanntlich nicht möglich. Deshalb wollen wir nun einige der in diesem Kapitel vorgestellten Approximationen hinsichtlich ihrer Güte vergleichen, und zwar für die konkrete Wahl

$$a_0 = 100, \quad \mu = \frac{0.04}{12}, \quad \sigma = \frac{0.25}{\sqrt{12}}, \quad T = 36, \quad n = 36.$$

Diese Modellspezifikation wurde auch bereits von Nielsen und Sandmann (2003) und Vanmaele et al. (2006) verwendet, weshalb wir auf deren Untersuchungen vergleichend zurückgreifen können.

Es bezeichne im Folgenden abkürzend  $\xi_X$  die GEW-Funktion  $\xi_X(t) = E[(X - t)^+]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , einer Zufallsvariablen  $X$ .

### Approximation der erwarteten Auszahlung durch konvexe Schranken.

Wir wollen zunächst die Approximation von  $\xi_S$  durch  $\xi_{S^c}$  und  $\xi_{S^l}$  untersuchen, wobei  $S^c$  eine obere konvexe Schranke gemäß Satz 3.1 und  $S^l$  eine untere konvexe Schranke gemäß Satz 3.2 für  $S$  sind. Die bedingende Zufallsvariable  $Z$ , auf deren Basis  $S^l = S^l(Z)$  bestimmt wird, haben wir approximativ varianzmaximierend gemäß (3.40) gewählt.

Zunächst haben wir auf der Basis von  $N = 100000$  Realisierungen  $x_1, \dots, x_N$  der Zufallsvariable  $S$  deren empirische GEW-Funktion  $\widehat{\xi}_S$ ,

$$\widehat{\xi}_S(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - t)^+, \quad t \in \mathbb{R},$$

als Schätzung für  $\xi_S$  bestimmt; vgl. Bemerkung A.5 im Anhang für nähere Ausführungen zu empirischen gestützten Erwartungswerten. Wir gehen bei dem von uns gewählten Stichprobenumfang von einer guten Näherung aus, weil für alle  $t \in \mathbb{R}$  der empirische gestützte Erwartungswert  $\widehat{\xi}_S(t)$ , als Zufallsvariable aufgefasst,  $P$ -fast sicher gegen  $\xi_S(t)$  konvergiert.

Somit wird auch  $\xi_{S^c}(t) - \widehat{\xi}_S(t)$  eine gute Schätzung für  $\xi_{S^c}(t) - \xi_S(t) = \varrho_t(S, S^c)$  darstellen, ebenso wie  $\xi_{S^l}(t) - \widehat{\xi}_S(t)$  für  $\xi_{S^l}(t) - \xi_S(t) = -\varrho_t(S, S^l)$ . Abbildung 3.1 visualisiert diese Schätzungen als Funktionen von  $t \in \mathbb{R}$ .

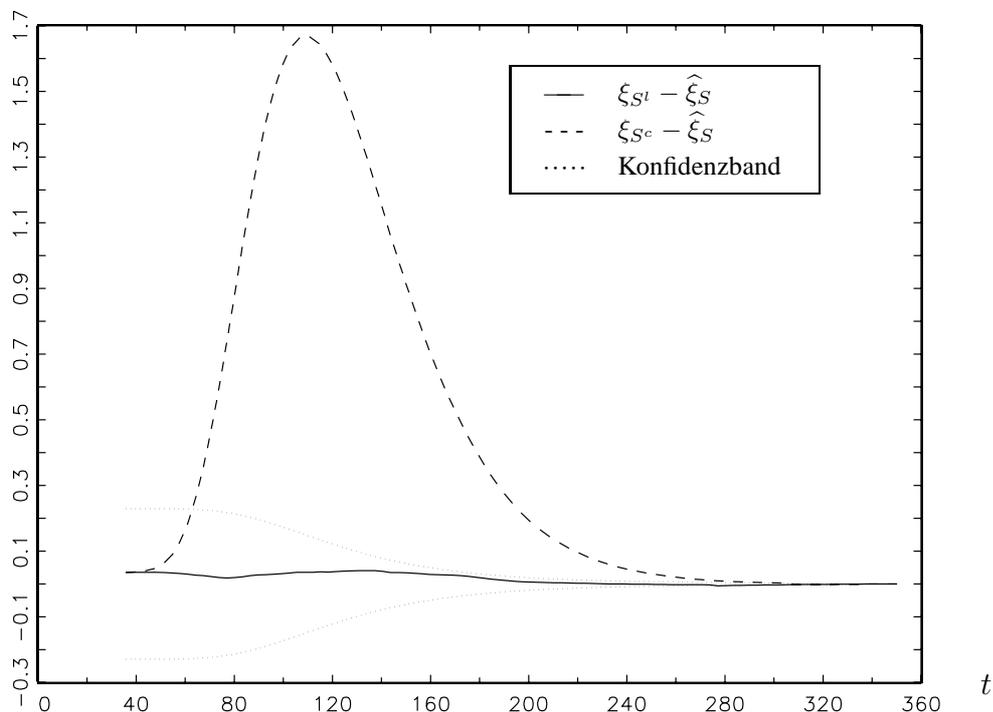


Abbildung 3.1: Abweichungen der GEW-Funktionen der konvexen Schranken

Um die Größe der Abweichungen besser einordnen zu können, haben wir versucht, die durch die Simulation verursachte Unsicherheit bzw. Variabilität geeignet zu quantifizieren. Dies soll uns dabei helfen zu entscheiden, ob die Abweichungen im Wesentlichen durch die Simulation oder durch die Unterschiede in den Verteilungen begründet sind. Als Hilfsmittel bedienen wir uns eines *Konfidenzbandes* für  $\xi_S$ :

Für jedes fixierte  $t \in \mathbb{R}$  ist ein approximatives  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\xi_S(t)$  gegeben durch

$$I(t) = \left[ \widehat{\xi}_S(t) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{K(t)} \right],$$

wobei  $K(t)$  eine erwartungstreue Schätzung<sup>3</sup> für die Varianz von  $\widehat{\xi}_S(t)$  und  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne, vgl. Bemerkung A.5. Als (approximatives)  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzband für die Funktion  $\xi_S$  bezeichnen wir die Menge  $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in I(t)\}$ . Man beachte, dass es sich dabei *nicht* um einen (”simultanen”) Konfidenzbereich für die (gesamte) Funktion  $\xi_S$  handelt.

Eingezeichnet in Abbildung 3.1 sind nun nicht die unteren und oberen Grenzen des 99%-Konfidenzbandes für  $\xi_S$ , sondern vielmehr deren Entsprechungen  $\pm u_{0.995} \sqrt{K(t)}$  für die Differenz  $\xi_S(t) - \widehat{\xi}_S(t)$ . Offenbar ist die auf der Simulation beruhende Unsicherheit für kleine Werte von  $t$  nicht unbedeutend, während sie für wachsendes  $t$  abnimmt. Es ist zu erkennen, dass die GEW-Funktion  $\xi_{S^l}$  für nahezu alle  $t \in \mathbb{R}$  innerhalb des Konfidenzbandes liegt.

Wie ist dies nun zu interpretieren? Man stelle sich vor, dass man sich zwischen zwei Approximationsalternativen zu entscheiden hat: der Approximation von  $\xi_S$  durch  $\xi_{S^l}$ , oder durch  $\widehat{\xi}_S$  auf der Basis von (maximal)  $N = 100000$  Realisierungen von  $S$ . Dies sind durchaus keine ”künstlichen” Alternativen, denn Simulationen nehmen Zeit in Anspruch und sind mit Kosten verbunden. Liegt  $\xi_{S^l}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , nun innerhalb des 99%-Konfidenzbandes, in diesem Sinne also im Rahmen der durch die Simulation verursachten Unsicherheit, dann legt dies nahe, dass die Approximation von  $\xi_S(t)$  durch  $\xi_{S^l}$  zumindest nicht schlechter ist als jene durch  $\widehat{\xi}_S(t)$ .

Die GEW-Funktion von  $S^c$  weicht hingegen recht stark von  $\widehat{\xi}_S$  ab; wir hatten ja bereits erwähnt, dass  $S^c$  zwar eine einfach bestimmbare, in der Regel jedoch relativ grobe obere konvexe Schranke ist.

### Geometrische Schranken und alternative Schranke für den Approximationsfehler.

Nun wollen wir uns den in dieser Arbeit betrachteten theoretischen oberen Schranken für  $\varrho_t(S, S^c)$  und  $\varrho_t(S, S^l)$  widmen. Abbildung 3.2 visualisiert für  $\varrho_t(S, S^c)$  die geometrische Schranke  $\nabla_{S^c}(t)$  (gemäß Satz 2.11) sowie die *triviale* obere Schranke  $\varrho_t(S^l, S^c)$ . Letztere ist für nahezu alle  $t \in \mathbb{R}$  schärfer als erstere. Dies liegt an der relativ großen

---

<sup>3</sup>Wir bezeichnen hier abkürzend die Realisierung eines erwartungstreuen Schätzers als erwartungstreue Schätzung.

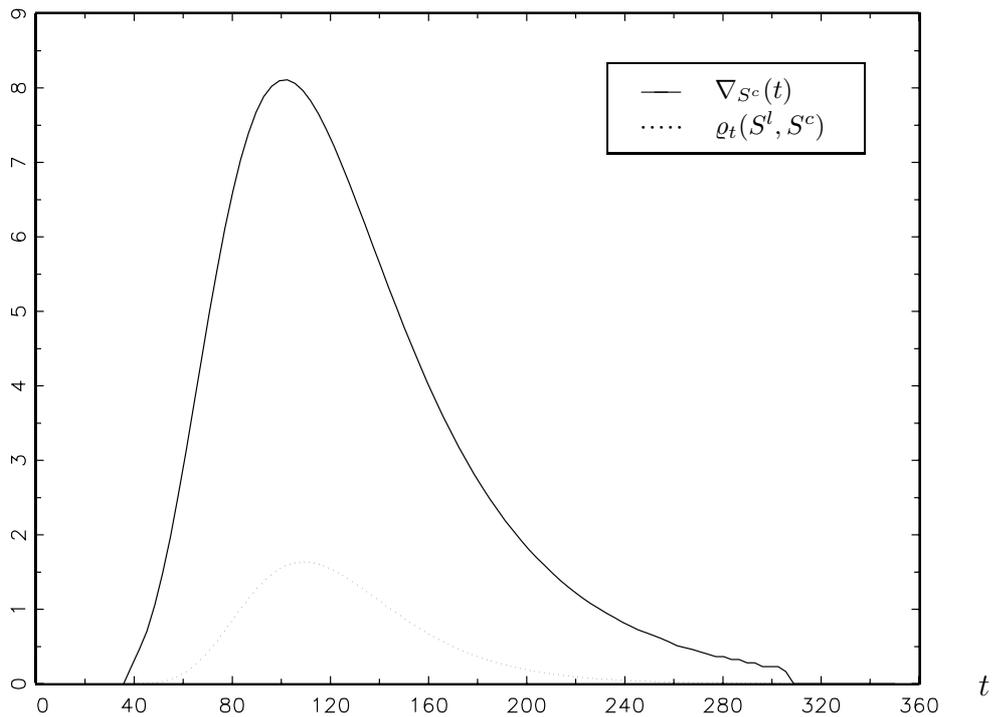


Abbildung 3.2: Schranken für  $\varrho_t(S, S^c)$

Differenz (263.09) der Varianzen von  $S$  und  $S^c$ . Nach Bemerkung 2.13 (iii) nimmt die Funktion  $\Delta_{S^c}$  ihr Maximum gerade in  $q_{0.5}(S^c)$  an; diese Maximalstelle liegt wegen der geringen Schiefe der Verteilung nahe  $E(S^c) = E(S) = 106.42$ .

Abbildung 3.3 visualisiert für  $\varrho_t(S, S^l)$  die *triviale* obere Schranke  $\varrho_t(S^l, S^c)$ , die geometrische Schranke  $\Delta_{S^l}(t)$  (gemäß Satz 2.11), sowie die Nielsen-Sandmann-Schranke  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  (gemäß (3.43)). Da die Differenz  $\text{Var}(S) - \text{Var}(S^l)$  hier sehr klein (1.57) ist, sind die nicht-trivialen Schranken beide recht scharf. Wir wissen, dass es einen Basiswert geben muss, ab dem die geometrische Schranke  $\Delta_{S^l}(t)$  schärfer als die Schranke  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  ist, vgl. (2.27). Letzteres ist etwa für Basiswerte  $t > 135$  der Fall, was insofern bemerkenswert ist, weil Nielsen und Sandmann (2003) gezeigt haben, dass  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  für Basispreise  $t > 160$  die schärfste unter allen von ihnen betrachteten Schranken<sup>4</sup> ist. Insofern stellt die in dieser Arbeit konstruierte geometrische Schranke  $\Delta_{S^l}(t)$  für  $t \in [135, 160]$  eine Verbesserung gegenüber den bisher verfügbaren Schranken dar. Im Übrigen schlägt die triviale Schranke  $\varrho_t(S^l, S^c)$  die anderen beiden Schranken für sehr kleine und sehr große  $t$ . Es scheint also (nicht nur in unserem Anwendungsbeispiel) geboten, die verfügbaren oberen Schranken für  $\varrho_t(S, S^l)$  zu einer einzigen zu kombi-

<sup>4</sup>In dem genannten Artikel werden mehrere obere Schranken für  $\varrho_t(S, S^l)$  verglichen.

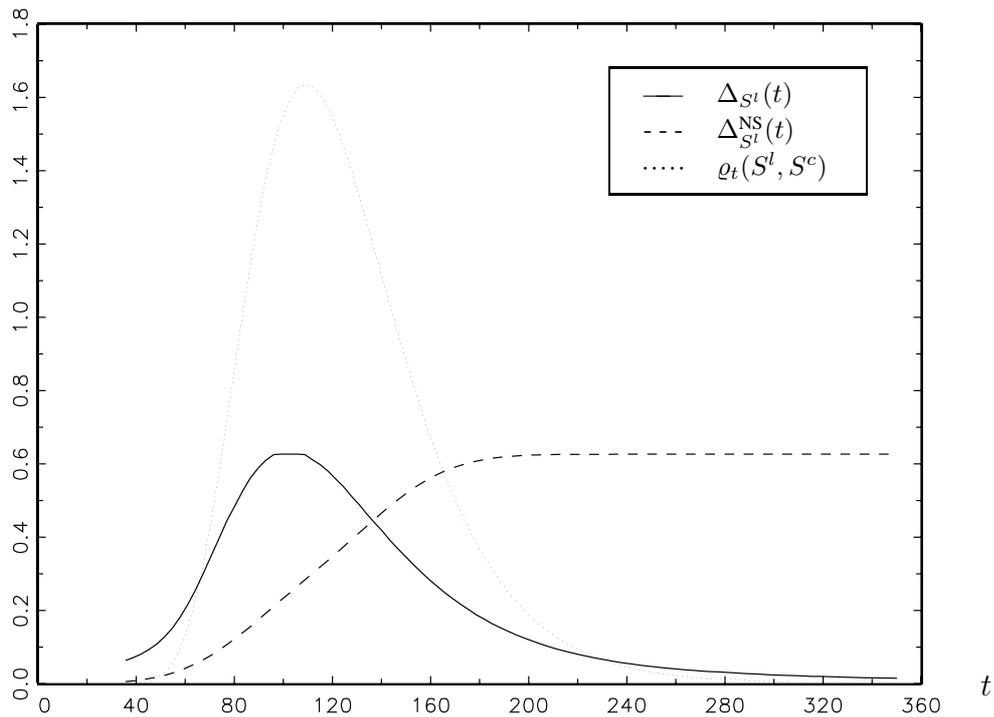


Abbildung 3.3: Schranken für  $\varrho_t(S, S^l)$

nieren:

$$\varrho_t(S^l, S) \leq \min\{\Delta_{S^l}, \Delta_{S^l}^{NS}, \varrho_t(S^l, S^c)\}.$$

### Vergleich unterer und oberer Schranken für die erwartete Auszahlung.

Wir wollen nun für eine bestimmte Auswahl von Basispreisen  $t$  untere und obere Schranken, welche auf der unteren konvexen Schranke  $S^l(Z)$  von  $S$  beruhen, für die erwartete Auszahlung  $\xi_S(t)$  genauer untersuchen. Besonderes Augenmerk soll dabei darauf liegen, welche Wahl der bedingenden Zufallsvariable  $Z$  jeweils die schärfste (untere bzw. obere) Schranke liefert. In den nun folgenden Tabellen sind die jeweils schärfsten Schranken fett gedruckt.

Tabelle 3.2 enthält für eine Auswahl von Basispreisen  $t$  jeweils den empirischen gestutzten Erwartungswert  $\widehat{\xi}_S(t)$  sowie die unteren Schranken  $\xi_{S^l(Z)}(t)$ ,  $Z \in \{Z_{VM}, Z_{GA}, Z_{FA}, Z_{LO}\}$ , für  $\xi_S(t)$ . Dabei ist  $Z_{FA}$  gemäß (3.38),  $Z_{GA}$  gemäß (3.39) und  $Z_{VM}$  gemäß (3.40) gewählt;  $Z_{LO}$  ist (approximativ) lokal-optimal zum Niveau  $\alpha = 0.99$  gemäß (3.41) gewählt. Außerdem ist zur Quantifizierung der Unsicherheit der Schätzung  $\widehat{\xi}_S(t)$  in der mit  $\pm KB$  überschriebenen Spalte die halbe Länge des um  $\widehat{\xi}_S(t)$  symmetrischen 99%-Konfidenzintervalls für  $\xi_S(t)$  angegeben. Bei der Betrachtung der Ergebnisse stel-

$t$	$\widehat{\xi}(t) \pm \text{KB}$		$\xi_{Si}(t)$			
			VM	GA	FA	LO
50	56,415	0,231	56,428	56,428	56,428	56,428
70	36,817	0,226	36,822	<b>36,824</b>	36,823	36,815
90	20,239	0,198	20,216	<b>20,218</b>	20,217	20,200
110	9,497	0,149	<b>9,456</b>	9,455	9,455	9,447
130	3,989	0,101	<b>3,955</b>	3,953	3,953	<b>3,955</b>
150	1,566	0,065	1,549	1,546	1,547	<b>1,553</b>
170	0,595	0,040	0,586	0,584	0,585	<b>0,590</b>
190	0,228	0,025	0,219	0,218	0,218	<b>0,222</b>

Tabelle 3.2: Simulierte erwartete Auszahlung der Option und untere Schranken

len wir folgendes fest: unabhängig vom Basispreis liefern alle bedingenden Zufallsvariablen sehr scharfe untere Schranken für die erwartete Auszahlung, die im Übrigen annähernd gleich sind (Abweichung stets kleiner als 0.02 Geldeinheiten). Hohe Basispreise,  $t \geq 130$ , korrespondieren zum *upper tail* der Verteilung, so dass es uns nicht überrascht, dass dort die zum Niveau 0.99 approximativ lokal-optimale Wahl  $Z_{LO}$  die schärfsten unteren Schranken liefert. Für Basispreise  $t \in \{50, 70\}$  sind die simulierten Werte kleiner als einige untere Schranken. Daraus ist jedoch nicht zu schließen, dass wir bei der Bestimmung der unteren Schranke und/oder der Simulation einen Fehler gemacht haben. Vielmehr ist in diesen Fällen die Abweichung der unteren Schranke vom wahren Wert sehr klein, zumindest im Vergleich zur Unsicherheit des empirischen gestutzten Erwartungswertes (hier quantifiziert durch die Spalte  $\pm \text{KB}$ ) auf Grund der Simulation.

$t$	$\text{UB}_{Si}(t)$				$\text{UB}_{Si}^{\text{NS}}(t)$			
	VM	GA	FA	LO	VM	GA	FA	LO
50	56,546	56,562	56,557	56,584	56,448	57,112	56,442	<b>56,435</b>
70	37,163	37,198	37,188	37,236	36,897	37,507	<b>36,883</b>	37,043
90	20,808	20,860	20,847	20,920	20,391	20,901	<b>20,366</b>	20,873
110	10,077	10,133	10,120	10,206	9,746	10,139	<b>9,720</b>	10,204
130	4,450	4,493	4,484	4,559	<b>4,361</b>	4,636	4,367	4,718
150	<b>1,895</b>	1,924	1,915	1,977	2,067	2,230	2,105	2,315
170	<b>0,813</b>	0,834	0,828	0,871	1,178	1,268	1,223	1,353
190	<b>0,367</b>	0,381	0,377	0,407	0,838	0,902	0,881	0,984

Tabelle 3.3: Obere Schranken für die erwartete Auszahlung der Option

Da sich die unteren Schranken für  $\xi_S(t)$  nun also als recht scharf herausgestellt haben und wir vorher den Approximationsfehler  $\varrho_t(S, S^l)$  durch  $\Delta_{S^l}(t)$  bzw.  $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  einigermäßen beschränken konnten, vermuten wir, dass die von den unteren Schranken gemäß (2.15) induzierten oberen Schranken brauchbar sind. Tabelle 3.3 enthält die oberen Schranken

$$\text{UB}_{S^l(Z)}(t) = \xi_{S^l(Z)} + \Delta_{S^l(Z)}(t) \quad \text{sowie} \quad \text{UB}_{S^l(Z)}^{\text{NS}}(t) = \xi_{S^l(Z)} + \Delta_{S^l(Z)}^{\text{NS}}(t),$$

wiederum jeweils für  $Z \in \{Z_{VM}, Z_{GA}, Z_{FA}, Z_{LO}\}$  und dieselbe Auswahl von Basispreisen  $t$ . Wir stellen fest, dass sich bei Wahl von  $Z_{LO}$  für hohe Basispreise zwar die schärfsten unteren Schranken, jedoch offenbar *nicht* die schärfsten oberen Schranken ergeben. Eine der schärfsten oberen Schranken, häufig sogar *die* schärfste, liefert stets  $Z_{VM}$ , und zwar unabhängig davon, ob  $\text{UB}_{S^l}$  oder  $\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}$  betrachtet wird. Als Faust-Regel (die bekanntlich durch Ausnahmen sogar bestätigt wird) für eine scharfe obere Schranke für  $\xi_S(t)$  könnte man formulieren: Wähle bei kleinen Basispreisen die obere Schranke  $\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}(t)$  auf Basis der bedingenden Zufallsvariablen  $Z_{FA}$ , und bei großen Basispreisen die obere Schranke  $\text{UB}_{S^l}(t)$  auf Basis der bedingenden Zufallsvariablen  $Z_{VM}$ .

### Bemerkung 3.11

Die untere Schranke  $\xi_{S^l}(t)$  für  $\xi_S(t)$  konkurriert bekanntlich mit der unteren Schranke  $\text{LB}_{S^c}(t) = \xi_{S^c}(t) - \nabla_{S^c}(t)$ . Letztere ist jedoch für nahezu alle  $t \in \mathbb{R}$  grober, denn es gilt mit Blick auf Abbildung 3.2  $\nabla_{S^c}(t) \geq \varrho_t(S^l, S^c)$  für nahezu alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Die oberen Schranken  $\text{UB}_{S^l}$  und  $\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}$  für  $\xi_S(t)$  konkurrieren mit der oberen Schranke  $\xi_{S^c}(t)$ . Letztere ist jedoch für  $t \in [50, 230]$  grober als die schärfere der beiden anderen, denn es gilt mit Blick auf Abbildung 3.3  $\min\{\Delta_{S^l}(t), \Delta_{S^l}^{\text{NS}}(t)\} \leq \varrho_t(S^l, S^c)$  für  $t \in [50, 230]$ .

Aus diesem Grunde haben wir auf die Einbeziehung der auf der Zufallsvariablen  $S^c$  basierenden oberen und unteren Schranken für  $\xi_S$  in die obigen Vergleiche bzw. Tabellen verzichtet. ■

# Kapitel 4

## Momentenbasierte Approximationen einer Summe von Lognormalverteilungen

### 4.1 Approximation durch eine Lognormalverteilung

Simulationen zeigen, dass die Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen häufig annähernd wieder lognormalverteilt ist. Deshalb ist es üblich, die Verteilung einer solchen Summe durch eine Lognormalverteilung zu approximieren. Dabei werden die Parameterwerte der approximierenden Lognormalverteilung meist so gewählt, dass Erwartungswerte und Varianzen der approximierenden und approximierten Verteilung jeweils übereinstimmen.<sup>1</sup> So plausibel dies auch erscheinen mag, so lag jedoch dieser Approximation in der Vergangenheit kein theoretisches Resultat zu Grunde, was als Rechtfertigung dessen dienen könnte. Erst ein Resultat in Dufresne (2004), was wir im Laufe dieses Kapitels noch erwähnen werden, kann — nach Korrektur eines Fehlers — als solche angesehen werden.

Obwohl sich der folgende Satz später als Spezialfall des o.g. Resultats herausstellen wird, wird er hier in dieser Form — soweit uns bekannt — erstmalig formuliert. Er stellt eine theoretische Grundlage für die oben angesprochenene Approximation bei hinreichend kleinen (Ko-)varianzen der Summanden dar.

#### Satz 4.1

Seien  $\tau \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in [0, \infty)^n \setminus \{0_n\}$ ,  $\Lambda^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht-negativ definit,  $Z_p \sim \mathfrak{L}(\tau, p^2 \Lambda^*)$ ,

---

<sup>1</sup>Möglicherweise ist zwar in der Praxis eine gute Approximation eines bestimmten Quantils, gestutzten Erwartungswertes oder Tail-Value-at-Risk von höherem Stellenwert als die der ersten beiden Momente der Summenverteilung. Letztere sind jedoch, im Gegensatz zu den anderen erwähnten Kenngrößen, leicht zu ermitteln.

$p > 0$ , und bezeichne  $\tilde{w} = (w_k e^{\tau_k})_{k=1, \dots, n}$ . Dann gilt:

$$\frac{\mathbf{1}^\top \tilde{w}}{p} \ln \left( \frac{w^\top Z_p}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}} \right) \xrightarrow{d} N(0, \tilde{w}^\top \Lambda^* \tilde{w}) \quad \text{für } p \rightarrow 0.$$

**Beweis:**

Sei  $U \sim N(0, \Lambda^*)$ . Dann gilt für  $Z_p = (Z_{p1}, \dots, Z_{pn})^\top$  offenbar die folgende Darstellung

$$Z_p \stackrel{d}{=} (e^{\tau_1} (e^{U_1})^p, \dots, e^{\tau_n} (e^{U_n})^p)^\top, \quad p > 0.$$

Bezeichnen wir noch  $v_k = \frac{w_k e^{\tau_k}}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , so gilt also:

$$\frac{1}{p} \ln \left( \frac{w^\top Z_p}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}} \right) \stackrel{d}{=} \frac{1}{p} \ln \left( \sum_{k=1}^n v_k (e^{U_k})^p \right).$$

Für  $p \rightarrow 0$  ist die rechte Seite ein Ausdruck vom Typ  $\frac{0}{0}$ , weshalb dessen Grenzwert nach l'Hospital mit dem Grenzwert des folgenden Ausdrucks zusammenfällt,

$$\frac{d}{dp} \ln \left( \sum_{k=1}^n v_k (e^{U_k})^p \right) = \frac{e^p}{\sum_{k=1}^n v_k (e^{U_k})^p} \sum_{k=1}^n v_k U_k,$$

falls dieser existiert. Dies ist jedoch der Fall; wir brauchen nur  $p = 0$  einzusetzen und auszunutzen, dass  $\sum_{k=1}^n v_k = 1$  gilt, und erhalten als Grenzwert  $\sum_{k=1}^n v_k U_k$ . Zusammenfassend haben wir also, mit  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ ,

$$\frac{1}{p} \ln \left( \frac{w^\top Z_p}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}} \right) \xrightarrow{d} v^\top U.$$

Nun gilt offenbar, unter Ausnutzung der linearen Transformationseigenschaft der multivariaten Normalverteilung,  $v^\top U \sim N(0, v^\top \Lambda^* v)$ ; unter Berücksichtigung von  $v = \frac{\tilde{w}}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}}$  ergibt sich schließlich die Behauptung. ■

Um eine praktisch anwendbare Approximationsheuristik zu erhalten, argumentieren wir nun so ähnlich, wie es üblicherweise beim Zentralen Grenzwertsatz der Fall ist: Für kleines  $p$  ist die Approximation der "normalisierten" Summenverteilung

$$\frac{\mathbf{1}^\top \tilde{w}}{p} \ln \left( \frac{w^\top Z_p}{\mathbf{1}^\top \tilde{w}} \right)$$

durch ihre Grenzverteilung gut, d.h.

$$w^\top Z_p \stackrel{d}{\approx} \mathcal{L} \left( \ln(\mathbf{1}^\top \tilde{w}), \frac{1}{(\mathbf{1}^\top \tilde{w})^2} \tilde{w}^\top (p^2 \Lambda^*) \tilde{w} \right).$$

Nun geht auf beiden Seiten  $p$  ausschließlich als Faktor  $p^2$  vor der Matrix  $\Lambda^*$  ein. Die Approximation wird also gut sein, wenn die Matrix  $\Lambda = p^2\Lambda^*$  klein im Sinne einer geeigneten Matrixnorm  $\|\cdot\|$  ist. Diese Überlegungen führen uns zur folgenden wichtigen Folgerung aus Satz 4.1.

**Folgerung 4.2**

Seien  $\tau \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in [0, \infty)^n \setminus \{0_n\}$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht-negativ definit,  $Z \sim \mathcal{L}(\tau, \Lambda)$ , und bezeichne  $\tilde{w} = (w_k e^{\tau_k})_{k=1, \dots, n}$ .  $\|\Lambda\|$  sei klein. Dann gilt:

$$w^\top Z \stackrel{d}{\approx} \mathcal{L} \left( \ln(1^\top \tilde{w}), \frac{1}{(1^\top \tilde{w})^2} \tilde{w}^\top \Lambda \tilde{w} \right).$$

**Bemerkung 4.3**

Die ersten beiden Momente der approximierenden Lognormalverteilung in Folgerung 4.2 stimmen *nicht* mit denen von  $S := w^\top Z$  überein. Um dies einzusehen, bestimmen wir die Parameter derjenigen Lognormalverteilung, welche dies leistet. Es gilt

$$E(S) = w^\top \mu = \sum_{i=1}^n w_i e^{\tau_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii}} \tag{4.1}$$

$$\text{Var}(S) = w^\top \Sigma w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i e^{\tau_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii}} w_j e^{\tau_j + \frac{1}{2} \lambda_{jj}} (e^{\lambda_{ij}} - 1), \tag{4.2}$$

wobei  $\mu = E(Z)$  und  $\Sigma = \text{Cov}(Z)$  gemäß (1.33) und (1.34) bestimmt wurden.

Die beiden Parameter  $t$  und  $l^2$  der Lognormalverteilung  $\mathcal{L}(t, l^2)$  mit denselben ersten beiden Momenten wie  $S$  erhält man nun gemäß (1.32) und (1.31),

$$t = \ln(E(S)) - \frac{1}{2} l^2, \tag{4.3}$$

$$l^2 = \ln \left( 1 + \frac{\text{Var}(S)}{E^2(S)} \right). \tag{4.4}$$

Diese Parameter unterscheiden sich offenbar von denen der approximierenden Lognormalverteilung in Folgerung 4.2. Wir werden am Ende dieses Kapitels jedoch noch sehen, dass diese beiden Wahlen der Parameter asymptotisch äquivalent sind (bei gleichmäßig kleiner werdender Kovarianzmatrix  $\Lambda$  im Sinne von Satz 4.1). Insofern läge dann auch eine theoretische Rechtfertigung für die Approximation einer Linearkombination  $S$  lognormalverteilter Zufallsvariablen<sup>2</sup> durch eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit denselben ersten beiden Momenten wie  $S$  vor. ■

<sup>2</sup>mit nicht-negativen Linearkoeffizienten

**Bemerkung 4.4 (Historie)**

Schon seit 1969 erfährt das Problem der Approximation einer Summe von Lognormalverteilungen große Aufmerksamkeit. Naus (1969) leitet die momentenerzeugende Funktion der *logarithmierten* Summe zweier unabhängiger Lognormalverteilungen her, Hamdan (1971) lässt später die Unabhängigkeitsannahme fallen. Janos (1970) untersucht das asymptotische Verhalten der *tails* der Verteilung einer Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen und konstruiert Schranken für Überlebenswahrscheinlichkeiten sowie höhere Momente. Slimane (2001) konstruiert Schranken für die Verteilungsfunktion einer Summe von unabhängigen lognormalverteilten Zufallsvariablen auf der Basis von Ordnungsstatistiken. Mahmoud und Oada (1973) approximieren die Dichte der Summenverteilung von äquikorrelierten lognormalverteilten Zufallsvariablen auf Basis der Pearson-Systematik (Pearson Typ I-VI). Barakat (1976) und Barouch, Kaufman und Glasser (1986) finden eine explizite Darstellung der charakteristischen Funktion der Summe im Fall unabhängiger Summanden (mittels einer Reihenentwicklung), so dass die Verteilungsfunktion durch inverse Fourier-Transformation erhalten werden kann. Diese Arbeiten waren motiviert durch das Auftreten solcher Summenverteilungen in der Technik, vor auf dem Gebiet der Kommunikation (Superposition von verschiedenen Signalquellen).

## 4.2 Verstetigung

Um weitere Approximationsresultate zu erhalten, gehen wir nun zu einem stetigen Modell über. Zur Motivation betrachten wir die Situation eines einfachen Wertpapier-Sparplans über  $n$  Perioden, wie er in Abschnitt 3.1 beschrieben wurde. Die Perioden seien alle gleich lang, und zu Beginn einer jeden Periode  $i \in \{1, \dots, n\}$  werde ein Beitrag in Höhe von  $b_i \equiv t/n$  in ein Wertpapier investiert, dessen Preisprozess  $(A_s)_{s>0}$  durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$  und Volatilität  $\sigma$  beschrieben ist, d.h.

$$A_s = A_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma W_s\right\}, \quad s > 0,$$

wobei  $(W_s)_{s>0}$  einen Standard-Wienerprozess bezeichne und  $A_0 > 0$  den konstanten Initialpreis.

Der zufällige Vermögensendwert des Wertpapiersparplans am Ende der  $n$ -ten Periode, also zum Zeitpunkt  $t$ , ist dann gegeben durch

$$S_{t,n} = \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} \frac{A_t}{A_{\frac{i-1}{n}t}} = \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t - \frac{(i-1)}{n}t\right) + \sigma(W_t - W_{\frac{(i-1)}{n}t})\right\}. \quad (4.5)$$

Lässt man nun die Anzahl der Perioden gegen  $\infty$  streben, so gilt offenbar

$$S_{t,n} \xrightarrow{P\text{-f.s.}} \int_0^t e^{\sigma(W_t - W_s) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} ds \quad (n \rightarrow \infty),$$

denn der Integrand ist wegen der  $P$ -fast sicher stetigen Pfade des Wienerprozesses  $P$ -fast sicher Riemann-integrierbar. Der Grenzwert hat nun dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable

$$M_t := \int_0^t e^{\sigma W_s + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s} ds, \quad (4.6)$$

was man unter Berücksichtigung der Verteilungsgleichheit der beiden stochastischen Prozesse  $(W_t - W_s)_{s>0}$  und  $(W_{t-s})_{s>0}$  für gegebenes  $t > 0$  leicht einsieht. In diesem Sinne kann  $M_t$  also als Vermögensendwert bei stetiger Investition in das Wertpapier aufgefasst werden. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$E(M_t) = \int_0^t e^{\mu s} ds = \frac{1}{\mu}(e^{\mu t} - 1). \quad (4.7)$$

Da die Verteilung von  $M_t$  selbst nicht bestimmt werden kann, werden wir zunächst das asymptotische Verhalten von  $M_t$  für  $t \rightarrow \infty$  untersuchen. Da sich als Grenzverteilung unter anderem die *Reziprok-Gammaverteilung* ergeben wird, wollen wir deren Eigenschaften zuvor noch zusammenfassen.

**Bemerkung 4.5 (Reziprok-Gammaverteilung)**

Eine Zufallsvariable  $X > 0$  heisst *reziprok-gammaverteilt* oder auch *invers-gammaverteilt* zu Parameterwerten  $\alpha, \beta > 0$ , (Schreibweise:  $X \sim \text{IGa}(\alpha, \beta)$ ), wenn  $Y = 1/X$  Gammaverteilt mit denselben Parameterwerten ist,  $Y \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ .

Dabei sei die  $\lambda^1$ -Dichte einer  $\text{Ga}(\alpha, \beta)$ -verteilten Zufallsvariablen  $Y$  gegeben durch

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} & , \text{ für } y > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Die wichtigsten Kenngrößen einer reziprok-gammaverteilten Zufallsvariable  $X \sim \text{IGa}(\alpha, \beta)$  sind gegeben durch:

$$F_X(t) = \left( 1 - F_{\text{Ga}(\alpha, \beta)}\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t > 0 \quad (4.8)$$

$$q_p(X) = \frac{1}{F_{\text{Ga}(\alpha, \beta)}^{-1}(1-p)}, \quad p \in (0, 1) \quad (4.9)$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta(\alpha - 1)}, \quad \text{falls } \alpha > 1 \quad (4.10)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \text{falls } \alpha > 2 \quad (4.11)$$

$$\text{TVaR}_p(X) = \frac{1}{p \cdot E(X)} \cdot F_{\text{Ga}(\alpha-1, \beta)}\left(\frac{1}{q_{1-p}(X)}\right), \quad \text{falls } \alpha > 1. \quad (4.12)$$

Für  $\alpha \leq 1$  ist das erste Moment  $m_1 := E(X)$  unendlich; für  $\alpha \leq 2$  ist das zweite Moment  $m_2 := E(X^2)$  unendlich. Mit Hilfe der folgenden Inversionsformeln können die Parameter der Reziprok-Gammaverteilung in Abhängigkeit von den ersten beiden Momenten  $m_1$  und  $m_2$  von  $X$  (falls diese endlich sind) berechnet werden,

$$\alpha = \frac{2m_1 - m_1^2}{m_2 - m_1^2}, \quad \beta = \frac{m_2 m_1}{m_2 - m_1^2}.$$

**Satz 4.6**

Sei  $M_t$  definiert gemäß (4.6) und bezeichne  $\varrho := (\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ . Dann gilt für  $t \rightarrow \infty$ :

(i) im Fall  $\varrho < 0$ :

$$M_t \xrightarrow{d} \text{IGa} \left( 1 - 2\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{2} \right),$$

(ii) im Fall  $\varrho = 0$ :

$$\frac{\ln M_t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \xrightarrow{d} |Z|, \quad \text{wobei } Z \sim N(0, 1),$$

(iii) im Fall  $\varrho > 0$ :

$$\frac{\ln M_t - \varrho t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

■

(i) wurde erstmals in Dufresne (1990) bewiesen. Ein alternativer, etwas handlicherer Beweis, findet sich in Milevsky und Posner (1998), der allerdings Kenntnisse auf dem Gebiet der Stochastischen Analysis (Diffusionsprozesse, Ito-Lemma) voraussetzt.

Ein Beweis von (ii) findet sich in Comtet, Monthus und Yor (1998).

Wir führen nun den Beweis von (iii), da der Original-Beweis von Dufresne (2004) eher als Skizze angesehen werden kann.

**Beweis von Satz 4.6 (iii):**

Nach den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts gilt

$$M_t \stackrel{d}{=} e^{\varrho t + \sigma W_t} \int_0^t e^{-\varrho s - \sigma W_s} ds;$$

Logarithmieren, Subtraktion von  $\varrho t$  und Division durch  $\sqrt{t}$  liefert

$$\frac{\ln M_t - \varrho t}{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} \sigma \frac{W_t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left\{ \int_0^t e^{-\varrho s - \sigma W_s} ds \right\}. \tag{4.13}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite unterliegt offenbar einer  $N(0, \sigma^2)$ -Verteilung. Der zweite konvergiert  $P$ -fast-sicher gegen 0, den nicht unbedingt evidenten Beweis dessen bleibt allerdings Dufresne (2004) schuldig, weshalb er hier nachgereicht wird.

Für das asymptotische Pfadverhalten des Wienerprozesses gilt das *Starke Gesetz der großen Zahlen für die Brownsche Bewegung*:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{W_s}{s} = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

denn bekanntlich (vgl. z.B. Bauer (1991, Satz 40.7)) ist mit  $W_s$  auch der stochastische Prozess  $(s \cdot W_{1/s} \cdot 1_{(0, \infty)}(s))_{s \geq 0}$  ein  $P$ -fast sicher in 0 startender Wienerprozess, weshalb  $\lim_{s \rightarrow 0} s W_{1/s} = 0$   $P$ -f.s. gilt.

Daher existiert ein  $t_0 > 0$  derart, so dass gilt:

$$-\frac{\varrho}{2\sigma} \leq \frac{W_s}{s} \leq \frac{\varrho}{2\sigma} \quad \text{für alle } s > t_0. \quad (4.14)$$

Wir zerlegen nun den Integrationsbereich  $[0, t]$  des Integrals in (4.13) gemäß  $[0, t_0] \cup (t_0, t]$  und schätzen anschließend mit Hilfe von (4.14) nach oben und unten ab:

$$C + \int_{t_0}^t e^{-\varrho s - \frac{1}{2}\varrho s} ds \leq \int_0^t e^{-\varrho s - \sigma W_s} ds \leq C + \int_{t_0}^t e^{-\varrho s + \frac{1}{2}\varrho s} ds,$$

wobei  $C$  die nicht von  $t$  abhängende Zufallsvariable

$$C := \int_0^{t_0} e^{-\varrho s - \sigma W_s} ds$$

bezeichnet. Nach Bestimmung der vorkommenden Integrale ergibt sich schließlich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left\{ C + \frac{2}{3\varrho} (e^{-\frac{3}{2}\varrho t_0} - e^{-\frac{3}{2}\varrho t}) \right\} \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left\{ \int_0^t e^{-\varrho s - \sigma W_s} ds \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left\{ C + \frac{2}{\varrho} (e^{-\frac{1}{2}\varrho t_0} - e^{-\frac{1}{2}\varrho t}) \right\} \end{aligned}$$

Sowohl obere als auch untere Schranke konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  fast sicher gegen 0, was zu beweisen war. ■

#### Bemerkung 4.7

Satz 4.6 (i) fasst eigentlich drei Resultate zusammen; genauer gelten unter der gemachten Voraussetzung (und mit der Bezeichnung  $M_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ ) die Aussagen:

$$(1) M_t \xrightarrow{P\text{-f.s.}} M_\infty, \quad (2) M_\infty < \infty \text{ } P\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad (3) M_\infty \sim \text{IGa} \left( 1 - 2\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{2} \right).$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz konvergieren auch alle Momente von  $M_t$  gegen die entsprechenden Momente der Grenzverteilung. Wegen (4.10) ist der Erwartungswert der Grenzverteilung allerdings nur im Fall  $\mu < 0$  endlich und in diesem Fall gleich  $-\frac{1}{\mu}$ ; die Varianz der Grenzverteilung ist nur für  $\mu < -\frac{\sigma^2}{2}$  endlich, vgl. (4.11).

Auch in (ii) und (iii) liegt — neben der Konvergenz in Verteilung — die Konvergenz aller Momente gegen die entsprechenden Momente der Grenzverteilung vor, vgl. Dufresne (2004). ■

Je nach Vorzeichen des Driftkoeffizienten  $\varrho$  der geometrischen Brownschen Bewegung kennen wir somit die asymptotische Verteilung von  $M_t$ . Wir können also davon ausgehen, dass diese die Verteilung des durch (4.5) gegebenen Vermögensendwertes  $S_{n,t}$  des Wertpapiersparplans zumindest für langen Zeithorizont  $t$  und große Periodenanzahl  $n$  gut approximiert.

### 4.3 Verallgemeinertes Modell

Nun ist in der Praxis die Periodenanzahl  $n$  nicht immer groß, auch sind die Perioden möglicherweise nicht gleich lang und/oder die Periodenbeiträge nicht proportional zur Periodenlänge. In diesen Fällen ist der Übergang zum stetigen Modell ( $M_t$ ) offenbar nicht gerechtfertigt.

Aber selbst wenn der Übergang zum stetigen Modell gerechtfertigt ist, so könnte der Zeithorizont  $t$  nicht groß genug sein, um eine gute Approximation gemäß Satz 4.6 zu gewährleisten.

Auch über den Vermögensendwert eines Sparplans hinaus ist man oft weniger an der Verteilung eines stetigen Mittels mit konstanten Gewichten wie in (4.6) interessiert, sondern eher an diskreten Mitteln mit nicht-konstanten Gewichten. Zur Preisfestsetzung Asiatischer Optionen ist z.B. die Verteilung eines gewichteten Mittels

$$\sum_{j=1}^m w_j A_{t_j}$$

von Werten einer einzelnen geometrischen Brownschen Bewegung  $(A_s)_{s \geq 0}$  von Interesse, zur Preisfestsetzung von Basket-Optionen hingegen die Verteilung eines gewichteten Mittels

$$\sum_{k=1}^n w_k A_{t_0}^{(k)}$$

von Werten mehrerer (nicht notwendig stochastisch unabhängiger) geometrischer Brownscher Bewegungen  $(A_s^{(k)})_{s > 0}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Kombinationen von beiden Mittelungsarten sind ebenso von Interesse, z.B. bei Asiatischen Basket-Optionen.

Wir werden nun eine sehr allgemeine Modellbildung vornehmen. Diese erlaubt sowohl eine stetige als auch eine diskrete Mittelung einer geometrischen Brownschen Bewegung; auch eine weitere diskrete Mittelung über mehrere geometrische Brownsche Bewegungen ist im Modell enthalten.

### 4.3.1 Modell

Bezeichne  $(W_s^{(1)}, \dots, W_s^{(n)})_{s>0}$  einen  $n$ -dimensionalen Standard-Wienerprozess, vgl. Bemerkung 1.37. Seien  $\mu_k \in \mathbb{R}, \sigma_k > 0$  und  $\nu^{(k)}$  ein endliches Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist für  $p > 0$  die Zufallsvariable

$$X_p = \sum_{k=1}^n \int_{(0,t]} \exp \left\{ \left( \mu_k - \frac{(p \sigma_k)^2}{2} \right) s + p \sigma_k W_s^{(k)} \right\} d\nu^{(k)}(s). \quad (4.15)$$

Je nach Wahl des Maßes  $\nu^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$  verbirgt sich hinter der Integration in (4.15) eine stetige oder diskrete Mittelung der geometrischen Brownschen Bewegung

$$A_s^{(k)} = A_0^{(k)} \exp \left\{ \left( \mu_k - \frac{(p \sigma_k)^2}{2} \right) s + (p \sigma_k) W_s^{(k)} \right\}, \quad s \in (0, t]. \quad (4.16)$$

Man erhält ein spezielles stetiges Mittel, wenn  $\nu^{(k)}$  als das Maß mit der  $\lambda$ -Dichte

$$s \mapsto \frac{A_0^{(k)}}{t} 1_{(0,t]}(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

gewählt wird:

$$X_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t} \int_0^t A_s^{(k)} ds.$$

Ein spezielles diskretes Mittel (zu Mittelungszeitpunkten  $0 \leq t_{k,1}, \dots, t_{k,n_k} \leq t$ ) ergibt sich für

$$\nu^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_k} w_j^{(k)} A_0^{(k)} \delta_{t_{k,j}}, \quad (4.17)$$

wobei die Gewichte  $w_j^{(k)}$  für alle  $j, k$  positiv sein mögen und  $\delta_x$  die Einpunktverteilung in  $x$  bezeichnet; man erhält in diesem Fall:

$$X_p = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} w_j^{(k)} A_{t_{k,j}}^{(k)}. \quad (4.18)$$

**Bemerkung 4.8** ( $S_{t,m}$  und  $M_t$  als Spezialfälle)

Man betrachte die Situation eines Wertpapiersparplans über  $m$  Perioden mit Parametern  $\mu, \sigma$  der involvierten geometrischen Brownschen Bewegung, vgl. die Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 4.2.

Betrachte die Zufallsvariable  $X_p$  für  $n = 1, \mu_1 = \mu, \sigma_1 = 1, p = \sigma$ .

- (i) Bei Wahl von  $\nu^{(1)} = \frac{t}{n} \sum_{i=1}^m \delta_{t-\frac{i-1}{n}t}$  ergibt sich, wie man leicht verifiziert,  $X_p \stackrel{d}{=} S_{t,m}$ , wobei  $S_{t,m}$  den Vermögensendwert eines Wertpapiersparplans gemäß (4.5) bezeichnet.
- (ii) Bei Wahl von  $\nu^{(1)} = \lambda_{(0,t]}^1$  ergibt sich  $X_p = M_t$ , vgl. (4.6) für die Definition von  $M_t$ .

■

Wir wollen im Folgenden das asymptotische Verhalten von  $X_p$  für  $p \rightarrow 0$  untersuchen. Lassen wir  $p$  gegen 0 streben, so gilt das offenbar ebenso für die Volatilitäten  $p\sigma_k$  aller geometrischen Brownschen Bewegungen  $(A_s^{(k)})_{s \geq 0}$ . Bevor wir das entsprechende Konvergenzresultat formulieren, sind jedoch noch einige Vorbereitungen nötig.

**4.3.2 Vorbereitungen**

Im nun folgenden Lemma fasse man die Funktion  $\ln(y)1_{\{y>0\}}$  als auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert auf, indem man sie auf  $(-\infty, 0]$  verschwinden lässt.

**Lemma 4.9**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Nullfolge,  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zufallsvariablen sowie  $Z$  eine weitere reelle Zufallsvariable.

- (i) Gilt  $Z_n \xrightarrow{P\text{-f.s.}} Z$ , dann folgt

$$\frac{1}{a_n} \ln(1 + a_n Z_n) \mathbb{1}_{\{1+a_n Z_n > 0\}} \xrightarrow{P\text{-f.s.}} Z .$$

- (ii) Gilt  $Z_n \xrightarrow{d} Z$ , dann folgt

$$\frac{1}{a_n} \ln(1 + a_n Z_n) \mathbb{1}_{\{1+a_n Z_n > 0\}} \xrightarrow{d} Z .$$

**Beweis:**

Wir bezeichnen

$$f_n(x) := \frac{1}{a_n} \ln(1 + a_n x) \mathbb{1}_{\{1+a_n x > 0\}}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

(i): Zu zeigen ist:

$$f_n(Z_n) \rightarrow Z \quad P\text{-f.s.} \quad (4.19)$$

Zweckmäßigerweise erweitert man dazu auf der linken Seite mit  $Z_n$  und setzt der Übersicht halber  $a_n Z_n =: X_n$ ; die linke Seite ist somit gleich

$$f(Z_n) = Z_n \frac{\ln(1 + X_n)}{X_n} \mathbb{1}_{\{1+X_n>0\}} .$$

Nun gilt wegen  $X_n \xrightarrow{P\text{-f.s.}} 0$  auch  $\mathbb{1}_{\{1+X_n>0\}} \xrightarrow{P\text{-f.s.}} 1$ , und außerdem (mit l'Hospital)  $\ln(1 + X_n)/X_n \xrightarrow{P\text{-f.s.}} 1$ , womit (4.19) gezeigt ist.

(ii): Nach dem Darstellungssatz von Skorokhod existieren ein W-Raum  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$  und (jeweils auf diesem W-Raum definierte) Zufallsvariablen  $\tilde{Z}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit der Eigenschaft  $P^{Z_n} = \tilde{P}^{\tilde{Z}_n}$  sowie eine Zufallsvariable  $\tilde{Z}$  mit der Eigenschaft  $P^Z = \tilde{P}^{\tilde{Z}}$ , für die gilt:

$$\tilde{Z}_n \xrightarrow{\tilde{P}\text{-f.s.}} \tilde{Z} .$$

(i) liefert

$$f_n(\tilde{Z}_n) \xrightarrow{\tilde{P}\text{-f.s.}} \tilde{Z} , \quad (4.20)$$

was sofort impliziert

$$P^{f_n(Z_n)} = \tilde{P}^{f_n(\tilde{Z}_n)} \xrightarrow{w} \tilde{P}^{\tilde{Z}} = P^Z ,$$

was zu zeigen war. ■

#### Lemma 4.10 (Integrierte Pfade eines Wienerprozesses)

Seien  $t > 0$  und  $C = ((\varrho_{kl}))_{k,l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht-negativ definit. Seien weiter  $(W_s^{(1)}, \dots, W_s^{(n)})_{s \geq 0}$  ein  $n$ -dimensionaler Standard-Wienerprozess mit Kovarianzfunktion  $K(s, u) = \min(s, u) \cdot C$ ,  $s, u \geq 0$ , sowie  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  endliche Maße auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ .

Es bezeichne

$$Z_k := \int_{(0,t]} W_s^{(k)} d\xi^{(k)}(s), \quad k = 1, \dots, n$$

sowie

$$V := ((v_{kl}))_{k,l=1,\dots,n} \text{ mit } v_{kl} = \varrho_{kl} \int_{(0,t]} \int_{(0,t]} \min(s, u) d\xi^{(k)}(s) d\xi^{(l)}(u) .$$

Dann gilt:

$$(Z_1, \dots, Z_n)^\top \sim N(0, V) .$$

**Beweis:**

Fast alle Pfade des Wienerprozesses  $(W_s^{(k)})_{s \geq 0}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sind stetig und auf  $[0, t]$  beschränkt. Daher ist  $W_s^{(k)}(\omega)$  für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$   $\xi^{(k)}$ -integrierbar und es gilt:

$$Z_{k,m} := \sum_{i=1}^m W_{\frac{i}{m}t}^{(k)} \xi^{(k)}\left(\left(\frac{i-1}{m}t, \frac{i}{m}t\right]\right) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} Z_k \quad (m \rightarrow \infty), \quad k = 1, \dots, n,$$

woraus sofort folgt:

$$Y_m := (Z_{1,m}, \dots, Z_{n,m}) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} (Z_1, \dots, Z_n) \quad (m \rightarrow \infty). \quad (4.21)$$

Auf Grund der Verteilungseigenschaften eines mehrdimensionalen Wienerprozesses gilt

$$Y_m \sim N(0, V_m), \quad (4.22)$$

mit  $V_m = ((\text{Cov}(Z_{k,m}, Z_{l,m})))_{k,l=1,\dots,n}$  und

$$\text{Cov}(Z_{k,m}, Z_{l,m}) = \varrho_{kl} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \min\left(\frac{i}{m}t, \frac{j}{m}t\right) \xi^{(k)}\left(\left(\frac{i-1}{m}t, \frac{i}{m}t\right]\right) \xi^{(l)}\left(\left(\frac{j-1}{m}t, \frac{j}{m}t\right]\right).$$

Nun gilt offenbar  $\text{Cov}(Z_{k,m}, Z_{l,m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v_{kl}$ , d.h. (bei elementweiser Auffassung des Limes)

$$V_m \rightarrow V \quad (m \rightarrow \infty). \quad (4.23)$$

(4.21)-(4.23) liefern zusammen die Behauptung. ■

Speziell ergibt sich aus dem vorstehenden Lemma im Fall  $n = 1$  und  $\xi^{(1)} = \lambda^1$  die folgende Aussage:

Ist  $(W_s)_{s \geq 0}$  ein Standard-Wienerprozess, so gilt

$$\int_0^t W_s ds \sim N\left(0, \frac{1}{3}t^3\right). \quad (4.24)$$

**Folgerung 4.11**

Sei  $(W_s^{(1)}, \dots, W_s^{(n)})_{s \geq 0}$  ein  $n$ -dimensionaler Standard-Wienerprozess mit Kovarianzfunktion  $K(s, u) = \min(s, u) \cdot C$  und nicht-negativ definiten Matrix  $C = ((\varrho_{kl}))_{k,l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Für endliche Maße  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  und  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$  bezeichne

$$Y := \sum_{k=1}^n \sigma_k \int_{(0,t]} W_s^{(k)} d\xi^{(k)}(s).$$

Dann gilt:

$$Y \sim N(0, v^2),$$

mit

$$v^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_k \sigma_l \varrho_{kl} \int_{(0,t]} \int_{(0,t]} \min(s, u) d\xi^{(k)}(s) d\xi^{(l)}(u) .$$

■

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 4.10.

### 4.3.3 Kernresultat

In dem bereits mehrfach zitierten Artikel von Dufresne (2004) findet sich (als Theorem 4.1) auch ein Resultat über das asymptotische Verhalten von  $X_p$  für  $p \rightarrow 0$ . Dieses scheint jedoch fehlerhaft zu sein; wir korrigieren dies nun, wobei wir uns bei der Beweisführung dennoch an der Beweisskizze von Dufresne (2004) orientieren.

#### Satz 4.12

Sei  $(W_s^{(1)}, \dots, W_s^{(n)})_{s \geq 0}$  ein Standard-Wienerprozess wie in Folgerung 4.11. Sei  $\nu^{(k)}$  ein endliches Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ , sowie  $\mu_k \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_k > 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Sei  $Y$  definiert wie in Folgerung 4.11, wobei  $\xi^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , das Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit der  $\nu^{(k)}$ -Dichte  $f^{(k)}(s) = e^{\mu_k s}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , bezeichnet.

Dann gelten für die gemäß (4.15) definierte Zufallsvariable  $X_p$  die folgenden Aussagen:

$$(i) \quad \frac{X_p - E(X_p)}{p} \xrightarrow{P\text{-f.s.}} Y$$

$$(ii) \quad \frac{1}{p} \ln \left( \frac{X_p}{E(X_p)} \right) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} \frac{Y}{X_0} .$$

#### Beweis:

*Beweis von (i):*

Die folgenden Betrachtungen erfolgen punktweise, d.h. für festes  $\omega \in \Omega$ . Elementare Umformungen von (4.15) liefern

$$\frac{X_p - E(X_p)}{p} = \sum_{k=1}^n \int_{(0,t]} \frac{\exp\{p \sigma_k W_s^{(k)} - \frac{1}{2} p^2 \sigma_k^2 s\} - 1}{p} e^{\mu_k s} d\nu^{(k)}(s) . \quad (4.25)$$

Wir ersetzen zunächst  $e^{\mu_k s} d\nu^{(k)}(s)$  durch  $d\xi^{(k)}(s)$ . Der verbleibende Integrand konvergiert nach l'Hospital  $P$ -f.s. gegen  $\sigma_k W_s^{(k)}$ . Um den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden zu können, verbleibt zu zeigen, dass der Integrand betragsmäßig durch eine integrierbare Funktion majorisiert werden kann. Wir tun dies o.B.d.A. für  $p \leq 1$ .

Zunächst stellen wir fest, dass für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt:  $|e^c - 1| \leq e^{|c|} - 1$ . Damit (und nach weiteren offensichtlichen Abschätzungen) erhalten wir

$$\left| \frac{1}{p} (e^{p\sigma_k W_s^{(k)} - \frac{1}{2}p^2\sigma_k^2 s} - 1) \right| \leq \frac{1}{p} (e^{q(s)p} - 1),$$

mit der nicht-negativen und auf  $(0, t]$  beschränkten Funktion  $q(s) = \sigma_k |W_s^{(k)}| + \frac{1}{2}p\sigma_k^2 s$ . Nun lässt sich leicht verifizieren, dass die rechte Seite eine isotone Funktion von  $p$  (bei festem  $s$ ) ist. Eine integrierbare Majorante ist also  $e^{q(s)} - 1$ ; der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert die fast sichere Konvergenz der rechten Seite von (4.25) gegen  $Y$ .

*Beweis von (ii):*

Zunächst stellen wir fest, dass nach dem Satz von Fubini gilt:

$$E(X_p) = \sum_{k=1}^n \int_{(0,t]} e^{\mu_k s} d\nu^{(k)}(s) = X_0 \quad \text{für alle } p > 0.$$

Unter Ausnutzung dessen erhalten wir

$$\frac{1}{p} \ln \left( \frac{X_p}{E(X_p)} \right) = \frac{1}{X_0} \frac{X_0}{p} \ln \left( 1 + \frac{p}{X_0} \frac{X_p - E(X_p)}{p} \right),$$

und die rechte Seite konvergiert nach Lemma 4.9, dessen Voraussetzungen wegen (i) und wegen  $p/X_0 \rightarrow 0$  ( $p \rightarrow 0$ ) erfüllt sind,  $P$ -fast sicher gegen

$$\frac{1}{X_0} Y.$$

■

### Bemerkung 4.13

(i) In der Formulierung der Aussagen (i) und (ii) kann wegen  $E(X_p) = X_0$  also  $E(X_p)$  durch  $X_0$  ersetzt werden.

(ii) Dufresne (2004) untersucht eigentlich die asymptotische Verteilung der Zufallsvariable

$$\widetilde{X}_p := \sum_{i=1}^n \int_{(0,t]} e^{\mu_k s + p\sigma_k W_s^{(k)}} d\nu^{(k)}(s),$$

bei der offensichtlich die Abhängigkeit der Drift der geometrischen Brownschen Bewegung von  $p$  nicht berücksichtigt ist. Nun kann man jedoch mit l'Hospital leicht nachprüfen, dass

$$\frac{\widetilde{X}_p - X_p}{p} \longrightarrow 0 \quad P\text{-f.s.} \quad (p \rightarrow 0)$$

gilt, womit in der Formulierung von Satz 4.12  $X_p$  durch  $\widetilde{X}_p$  ersetzt werden kann. Asymptotisch ist es also äquivalent, ob die Drift konstant gleich  $\mu_k$  ist oder quadratisch in  $p$  gegen  $\mu_k$  konvergiert, wie es bei  $(\mu_k - \frac{1}{2}(p\sigma_k)^2)$  der Fall ist.

#### Bemerkung 4.14

Satz 4.12 eröffnet in Verbindung mit Folgerung 4.11 offenbar die folgende Approximationsmöglichkeit für kleines  $p > 0$ :

$$X_p \stackrel{d}{\approx} X_0 \exp \left\{ p \frac{Y}{X_0} \right\} \sim \mathcal{L} \left( \ln(X_0), \frac{p^2 v^2}{X_0^2} \right),$$

mit  $v$  wie in Folgerung 4.11.

Auf den ersten Blick mag dies einen Widerspruch zum üblichen *moment matching* darstellen, bei dem die Verteilung von  $X_p$  durch eine Lognormalverteilung mit denselben ersten beiden Momenten approximiert wird,

$$X_p \stackrel{d}{\approx} \mathcal{L} \left( \ln(E(X_p)) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E(X_p^2)}{E^2(X_p)} \right), \ln \left( \frac{E(X_p^2)}{E^2(X_p)} \right) \right),$$

vgl. (1.32)-(1.31). Dufresne (2004) zeigt jedoch, dass für  $p \rightarrow 0$  die Parameterwerte asymptotisch äquivalent sind, er gibt sogar die Konvergenzordnung an. Da die Lognormalverteilung durch ihre Parameter stetig parametrisiert wird, sind somit auch die beiden Verteilungen asymptotisch äquivalent.

Wir wollen nun Satz 4.12 auf zwei spezielle Fälle einer diskreten Mittelung gemäß (4.17) anwenden.

#### Beispiel 4.15 (Auszahlung einer Asiatischen Option)

Wir betrachten ein gemäß  $w_1, \dots, w_n$  gewichtetes Mittel von Werten einer eindimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung zu Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$ ,

$$X_p = \sum_{j=1}^m w_j A_{t_j} = \sum_{j=1}^m w_j A_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{p^2}{2} \right) t_j + p W_{t_j} \right\}.$$

Es handelt sich hier um einen Spezialfall von (4.18) für  $n = 1$  und  $n_1 = m$ , der durch Wahl von  $\nu^{(1)} = \sum_{j=1}^m w_j A_0 \delta_{t_j}$  erreicht wird. (Wir verzichten deshalb auf den Index  $k$  für die Komponente des Wienerprozesses. Weil es dann auch nur einen einzigen Volatilitätsparameter  $\sigma^2 := (p\sigma_1)^2$  gibt, setzen wir zweckmäßigerweise  $\sigma_1 = 1$ ; es ist also  $p = \sigma$ .)

Die erwartete Auszahlung einer Asiatischen Option ergibt sich als gestutzter Erwartungswert eines solchen Mittels, vgl. Abschnitt 3.6.

Nach Satz 4.12 gilt dann für  $p \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{p} \ln \left( \frac{X_p}{X_0} \right) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} \frac{Y}{X_0}, \quad \text{mit} \quad Y = \sum_{j=1}^m w_j A_0 e^{\mu t_j} W_{t_j}.$$

Bezeichnet  $a := (w_i A_0 e^{\mu t_i})_{i=1, \dots, m} \in \mathbb{R}^m$  sowie  $C = ((\min\{t_i, t_j\}))_{i, j=1, \dots, m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , dann gilt offenbar  $Y \sim N(0, a^\top C a)$ .

#### Beispiel 4.16 (Fondsrendite)

Ein Fonds, der aus  $n$  Wertpapieren besteht, deren gemeinsamer Preisprozess durch  $(A_s^{(1)}, \dots, A_s^{(n)})_{s>0}$  mit  $A_s^{(k)}$  gemäß (4.16) beschrieben ist, liefert im Zeitintervall  $[0, t]$  die Rendite

$$X_p = \sum_{k=1}^n w_k \frac{A_t^{(k)}}{A_0^{(k)}} = \sum_{k=1}^n w_k \exp\left\{ \left( \mu_k - \frac{(p \sigma_k)^2}{2} \right) t + (p \sigma_k) W_t^{(k)} \right\},$$

wenn die Fonds gemäß  $w_1, \dots, w_n$  gewichtet werden. Es handelt sich hier um einen Spezialfall von (4.15) für  $n_k = 1, t_{k,1} = t$  sowie  $\nu^{(k)} = w_k \delta_t$  für alle  $k = 1, \dots, n$ .

Dann gilt für  $p \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{p} \ln \left( \frac{X_p}{X_0} \right) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} \frac{Y}{X_0}, \quad \text{mit} \quad Y = \sum_{k=1}^n w_k \sigma_k e^{\mu_k t} W_t^{(k)}. \quad (4.26)$$

Es gilt mit  $a := (w_k e^{\mu_k t})_{k=1, \dots, n}$  und  $C = ((t \sigma_k \sigma_l \varrho_{kl}))$ :

$$Y \sim N(0, a^\top C a).$$

#### Bemerkung 4.17 (Alternative Betrachtung des vorangehenden Beispiels)

Die Betrachtungen in Beispiel 4.16 können auch losgelöst von einer  $n$ -dimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung erfolgen. In diesem Fall scheint es geboten, anstelle von  $X_p$  die in Bemerkung 4.13 angesprochene Zufallsvariable  $\widetilde{X}_p$  zu betrachten; die bedeutet keine Einschränkung, denn nach den dortigen Ausführungen verhalten sich die beiden Größen asymptotisch gleich.

Zweckmäßigerweise setzen wir o.B.d.A.  $t = 1$  (lässt sich in  $\mu_k$  bzw.  $\sigma_k$  "schieben") und bezeichnen  $w := (w_1, \dots, w_n)^\top$  sowie  $Z_p := (Z_{p1}, \dots, Z_{pn})^\top$ , wobei

$$Z_{pk} = \exp\{\mu_k + (p \sigma_k) W_1^{(k)}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Bezeichnet weiter  $\Lambda := ((\sigma_k \sigma_l \varrho_{kl}))_{k, l=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\widetilde{w} := (w_k e^{\mu_k})_{k=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$  sowie  $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt offensichtlich  $Z_p \sim \mathfrak{L}(\mu, p^2 \Lambda)$  und es ist  $\widetilde{X}_p = w^\top Z_p$ . Nach (4.26) hat man schließlich:

$$\frac{X_0}{p} \ln \left( \frac{\widetilde{X}_p}{X_0} \right) \xrightarrow{d} N(0, \widetilde{w}^\top \Lambda \widetilde{w}) \quad \text{für } p \rightarrow 0. \quad (4.27)$$

Nun hat aber  $\Lambda$  (neben der positiven Definitheit, die sich von  $((\varrho_{kl}))$  überträgt) keine spezielle Struktur. Damit ergibt sich in diesem Spezialfall aus Satz 4.12 gerade der zu Beginn dieses Kapitels formulierte Satz 4.1.

In Verbindung mit Bemerkung 4.14 können somit in Folgerung 4.2 die Parameter der approximierenden Lognormalverteilung so gewählt werden, dass deren ersten beiden Momente mit jenen der zu approximierenden Summenverteilung übereinstimmen.

#### 4.3.4 Weitere asymptotische Betrachtungen

Nach Bemerkung 4.8 ergibt sich  $M_t$  (definiert gemäß (4.6)) als gewisser Spezialfall aus  $X_p$ . Als Folgerung aus Satz 4.13 erhalten wir deshalb unmittelbar das folgende Konvergenzresultat.

##### Folgerung 4.18 (Grenzverteilungen von $M_t$ für $\sigma \rightarrow 0$ )

Sei  $M_t, t > 0$ , wie in (4.6) und bezeichne

$$v(\sigma) = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \min\{s, u\} e^{\mu s} e^{\mu u} ds du .$$

Dann gilt für  $\sigma \rightarrow 0$ :

$$(i) \quad \frac{M_t - E(M_t)}{\sqrt{v(\sigma)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$(ii) \quad \frac{E(M_t)}{\sqrt{v(\sigma)}} \ln \left\{ \frac{M_t}{E(M_t)} \right\} \xrightarrow{d} N(0, 1) .$$

■

Wir wollen nun untersuchen, ob eine Verbindung mit dem folgenden Resultat von Dufresne (2004) besteht. Zu diesem Zweck werden wir dessen Beweis kurz skizzieren.

##### Satz 4.19 (Dufresne (2004))

Sei  $M_t, t > 0$ , definiert wie in (4.6).

Dann gilt für  $t \rightarrow 0$ :

$$(i) \quad \frac{M_t - E(M_t)}{\sqrt{\text{Var}(M_t)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$(ii) \quad \frac{E(M_t)}{\sqrt{\text{Var}(M_t)}} \ln \left\{ \frac{M_t}{E(M_t)} \right\} \xrightarrow{d} N(0, 1) .$$

**Beweis:**

Man substituiert in (4.6)  $u = \sigma^2 s$  und setzt anschließend

$$z := \sigma^2 t \tag{4.28}$$

sowie  $\nu := \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ . Definiert man nun

$$\widetilde{M}_z := \int_0^z \exp\{\nu u + W_u\} du, \quad z > 0,$$

so gilt offenbar

$$M_t \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sigma^2} \widetilde{M}_{\sigma^2 t} \quad \text{für alle } t > 0; \tag{4.29}$$

zum Nachweis dessen benutze man, dass für gegebenes  $c > 0$  die Prozesse  $(\sqrt{c}W_s)_{s>0}$  und  $(W_{cs})_{s>0}$  verteilungsgleich sind.

Man zeigt nun

$$\frac{\widetilde{M}_z - E(\widetilde{M}_z)}{\sqrt{\text{Var}(\widetilde{M}_z)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{für } z \rightarrow 0, \tag{4.30}$$

woraus unter Berücksichtigung der Substitution (4.28) offenbar folgt:

$$\frac{\widetilde{M}_{\sigma^2 t} - E(\widetilde{M}_{\sigma^2 t})}{\sqrt{\text{Var}(\widetilde{M}_{\sigma^2 t})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{für } t \rightarrow 0. \tag{4.31}$$

Unter Berücksichtigung von (4.29) ergibt sich nun (i). (ii) folgt aus (i) mit Lemma 4.9. ■

Dufresne (2004) folgert nun in Anbetracht der von ihm getätigten Substitution  $z = \sigma^2 t$ , dass die in (4.30) behauptete Konvergenz für  $z \rightarrow 0$  nicht nur durch  $t \rightarrow 0$  (bei konstantem  $\sigma$ ) sondern auch durch  $\sigma \rightarrow 0$  (bei konstantem  $t$ ) erreicht werden kann. Dies aber käme der folgenden Behauptung gleich:

$$\frac{M_t - E(M_t)}{\sqrt{\text{Var}(M_t)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{für } \sigma \rightarrow 0. \tag{4.32}$$

Dies würde jedoch nur dann aus (4.30) folgen, wenn  $\nu$  nicht von  $\sigma$  abhängt. Es gilt jedoch  $\nu = \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ .

Wir weisen nun nach, dass (4.32) trotzdem richtig ist.

**Lemma 4.20**

In Folgerung 4.18 lässt sich  $v(\sigma)$  durch  $\text{Var}(M_t)$  ersetzen. ■

**Beweis:**

Zu zeigen ist:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\text{Var}(M_t)}{v(\sigma)} = 1.$$

In der Situation von Folgerung 4.18 gilt offenbar

$$v(\sigma) = \sigma^2 \text{Var} \left( \int_0^t W_s e^{\mu s} ds \right),$$

vgl. Folgerung 4.11. Daher genügt der Nachweis von

$$\frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(M_t) \rightarrow \text{Var} \left( \int_0^t W_s e^{\mu s} ds \right) \quad (\sigma \rightarrow 0).$$

Eine Taylorreihen-Entwicklung (mit Integralrestglied) der Funktion  $\sigma \mapsto e^{\sigma W_s}$  um den Nullpunkt liefert

$$M_t = \int_0^t \left( 1 + \sigma W_s + \sigma^2 W_s^2 \int_0^1 e^{\sigma W_s y} (1-y) dy \right) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s} ds.$$

Unter Ausnutzung der Linearität des Integrals erhält man mit den Bezeichnungen

$$Y_\sigma = \int_0^t W_s e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s} ds, \quad Y'_\sigma = \int_0^t W_s^2 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s} \int_0^1 e^{\sigma W_s y} (1-y) dy ds$$

sowie einer positiven reellen Konstanten  $c$ ,

$$M_t = c + \sigma Y_\sigma + \sigma^2 Y'_\sigma$$

und schließlich

$$\text{Var}(M_t) = \sigma^2 \text{Var}(Y_\sigma) + \sigma^4 \text{Var}(Y'_\sigma) + \sigma^3 \text{Cov}(Y_\sigma, Y'_\sigma).$$

Für  $\sigma \rightarrow 0$  folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_\sigma) &\rightarrow \text{Var} \left( \int_0^t W_s e^{\mu s} ds \right), \\ \text{Var}(Y'_\sigma) &\rightarrow c_1 \in [0, \infty), \\ \text{Cov}(Y_\sigma, Y'_\sigma) &\rightarrow c_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. ■

**Bemerkung 4.21**

In einigen Fällen waren für die (möglicherweise infinitesimale) Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen gleichzeitig zwei Grenzverteilungen (auf der Basis zweier verschiedener "Normalisierungen"), die Normal- und die Lognormalverteilung, vorhanden, welche in gewisser Weise miteinander konkurrieren. Es ist jedoch bekannt, dass

in der Regel die Approximation durch eine Normalverteilung wesentlich schlechter ist, als die durch eine Lognormalverteilung. Hier kann also davon ausgegangen werden, dass die Konvergenz gegen die Lognormalverteilung "schneller" erfolgt, als die gegen die Normalverteilung. Aus diesem Grund wird die Normalverteilung als Approximationsmöglichkeit für eine Summe von Lognormalverteilungen in den noch folgenden Untersuchungen nicht weiter berücksichtigt.

# Kapitel 5

## Anwendung: Fondssparen

Die in den vorhergehenden Kapiteln erhaltenen Ergebnisse sollen nun beispielhaft zur Lösung einer Problemklasse aus der Praxis dienen, mit der Privatanleger, Banken und Versicherer gleichermaßen konfrontiert sind. Betrachtet wird die Situation der Besparung eines typischen Fonds-Sparplans, wie er so oder ähnlich zum Zwecke der privaten Altersvorsorge bei den meisten Banken und Versicherungen abgeschlossen werden kann.

Zunächst formulieren wir das zu Grunde liegende Modell. Weil sich dieses als zu komplex erweisen wird, stellen wir in Abschnitt 5.2 ein Ersatzmodell vor. In Abschnitt 5.3 stellen wir zusammen, welche Fragestellungen und Kenngrößen im Modell typischerweise von Interesse sind und reichern das Modell noch mit einigen Details an, welche die Investitionsentscheidung betreffen. Die Adäquatheit des Ersatzmodells überprüfen wir mittels Simulation in Abschnitt 5.4, während Abschnitt 5.5 Approximationen und Schranken interessierender Kenngrößen für eine typische Modellspezifikation enthält.

### 5.1 Modell

Wir betrachten ein  $n$ -Perioden-Modell,  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Periode ist dabei, je nach Produkt, meist ein Monat, ein Quartal, ein Halbjahr oder sogar ein Jahr; für die Modellierung ist dies nicht von Belang.

Zu Beginn der Periode  $i$  werde ein (nicht-stochastischer) **Beitrag**

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

angelegt. Dieser versteht sich Netto, d.h. etwaige fixe (d.h. von der jeweiligen Anlage unabhängige) Kosten sind schon abgezogen.

Es bezeichne  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , das zufällige Fondsvermögen am Ende der  $i$ -ten Periode.

Der zu Beginn der Periode  $i$  eingehende Beitrag werde, zusätzlich zu dem zu diesem Zeitpunkt bereits erreichten Fondsvermögen  $S_{i-1}$ , während der  $i$ -ten Periode so angelegt, dass die zufällige Rendite dieser Anlage in der Periode  $R_i$  beträgt.

Rekursiv ergibt sich also, mit  $S_0 := 0$ , die folgende Formel für das **Fondsvermögen am Ende der  $j$ -ten Periode**:

$$S_j = (S_{j-1} + b_j) \cdot R_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Sukzessives Einsetzen liefert für den **Vermögensendwert** (also das Fondsvermögen am Ende der  $n$ -ten Periode):

$$S_n = \sum_{i=1}^n b_i R_i \cdot \dots \cdot R_n. \quad (5.2)$$

Die folgende Darstellung für  $S_n$  wird sich ebenfalls als nützlich erweisen, etwa dann, wenn der Wert  $S_{j-1}$  des Fondsvermögens am Ende von Periode  $j - 1$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , bereits bekannt ist,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i R_i \cdot \dots \cdot R_n, \quad \text{mit } \tilde{b}_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i \in \{1, \dots, j-1\} \\ S_{j-1} + b_j & \text{für } i = j \\ b_i & \text{für } i \in \{j+1, \dots, n\} \end{cases}. \quad (5.3)$$

Es verbleibt die stochastische Modellierung der Periodenrenditen  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Hierfür nehmen wir an, dass stets in einen oder mehrere von  $l \in \mathbb{N}$  Grundfonds investiert wird. Diese weisen in der  $i$ -ten Periode die Renditen  $\tilde{R}_{i1}, \dots, \tilde{R}_{il}$  auf, wobei wir für die gemeinsame Verteilung der **Renditen der Grundfonds** voraussetzen:

$$\tilde{R}_i = (\tilde{R}_{i1}, \dots, \tilde{R}_{il})^\top \sim \mathfrak{L}(\tilde{\tau}, \tilde{\Lambda}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n \text{ stoch. unabh.}, \quad (5.4)$$

mit  $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^l$  und  $\tilde{\Lambda} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  nicht-negativ definit. Diese Lognormalverteilungsannahme ist eine Konsequenz aus der üblichen Modellierung von Wertpapierpreisprozessen als geometrische Brownsche Bewegungen, ebenso wie die Unabhängigkeitsannahme. Die Parameterwerte  $\tilde{\tau}$  und  $\tilde{\Lambda}$  der Verteilungen der Grundfonds-Renditen seien bekannt.

Bei einer Aufteilung der in Periode  $i$  anzulegenden Anlagesumme auf die  $l$  Grundfonds (mit nichtnegativen Gewichten  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{il}$ ) ergibt sich die Rendite der Gesamtanlage in Periode  $i$  — die  **$i$ -te Periodenrendite** — gemäß

$$R_i = \alpha_i^\top \tilde{R}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

wobei für den  **$i$ -ten Allokationsvektor**  $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{il})^\top$  gilt:  $\alpha_i^\top \mathbf{1}_l = 1$ . Wir wollen die Menge der zulässigen Allokationsvektoren bezeichnen mit

$$\mathcal{A}_l := \{\beta \in [0, 1]^l : \mathbf{1}_l^\top \beta = 1\}.$$

Man beachte, dass sich die stochastische Unabhängigkeit der  $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n$  auf die Periodenrenditen  $R_1, \dots, R_n$  überträgt.

**Bemerkung 5.1 (Renditen der Grundfonds)**

In der Praxis wird man für  $\tilde{\tau}$  und  $\tilde{\Lambda}$  Schätzungen auf der Basis von Grundfonds-Renditedaten aus der Vergangenheit verwenden.

Bei langen Laufzeiten wird die Anlagegesellschaft dabei vermutlich nicht umhinkommen, in gewissen Abständen die Parameterwerte  $\tilde{\tau}$  und  $\tilde{\Lambda}$  zu ändern (auf Grund von neuen Schätzungen auf verbreiterter oder aktualisierter Datenbasis). Findet eine solche Anpassung am Beginn der  $j$ -ten Periode statt, so ist die Realisierung  $s_{j-1}$  von  $S_{j-1}$  bereits bekannt und  $S_n$  ergibt sich gemäß (5.3); im Modell sind die Parameterwerte  $\tilde{\tau}$  und  $\tilde{\Lambda}$  nun aber entsprechend der neuen Schätzungen zu wählen.

**Bemerkung 5.2 (Sequentielle Betrachtung)**

Auch ohne Veränderung der Parameterwerte während der Laufzeit des Sparplans scheint es geboten, die Information über das bis zu einem bestimmten Zeitpunkt angesammelte Vermögen zu nutzen, um auf dieser Basis die Verteilung von  $S_n$  zu bestimmen. Am Beginn der  $j$ -ten Periode,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , ist die Realisierung  $s_{j-1}$  von  $S_{j-1}$  ja bereits bekannt. Daher kann  $S_n$  gemäß (5.3) bestimmt und dessen Verteilung nun als bedingte Verteilung von  $S_n$  unter  $S_{j-1} = s_{j-1}$  gesehen werden.

**Bemerkung 5.3 (Spezialfälle)**

Wir wollen zunächst noch zwei Spezialfälle betrachten, die das eben formulierte Modell beinhaltet.

- **Ein-Perioden-Modell.**

Setzen wir  $n = 1$ , so degeneriert der Fondssparplan zu einer Einmalanlage. Für den Vermögensendwert erhalten wir

$$S_1 = b_1 \cdot (\alpha_1^\top \tilde{R}_1),$$

d.h.  $S_1/b_1$  ist gerade die Rendite der Einmalanlage.

- **Ein-Fonds- oder Switch-Modell**

Hiermit ist der Spezialfall angesprochen, wo in jeder Periode der gesamte Anlagebetrag in genau einen Fonds investiert wird, wobei letzterer in jeder Periode ein anderer sein kann. Formal erhalten wir diesen Spezialfall für

$$\alpha_i \in \{e_1, \dots, e_l\} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n, \quad (5.6)$$

wobei  $e_j$  den  $j$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^l$  bezeichne,  $j = 1, \dots, l$ .

Beides sind Spezialfälle ergibt des Basis-Modells 3.1, welches wir in Kapitel 3 ausführlich untersucht hatten. Es handelt sich bei dem Vermögensendwert jeweils um eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen; dabei entspricht das Ein-Perioden-Modell der in Abschnitt 3.1 angesprochenen Situation (I), das Ein-Fonds-Modell der Situation (II).

## 5.2 Ersatzmodell

Liegt keiner der beiden Spezialfälle aus Bemerkung 5.3 vor, so wird die folgende Problematik offenbar: Die Periodenrenditen  $R_1, \dots, R_n$  sind jeweils Summen lognormalverteilter Zufallsvariablen, womit deren Verteilungen einer analytischen Betrachtung nicht zugänglich sind. Diese könnten nun zwar gemäß den in Kapitel 3 vorgestellten (auf dem Konzept der konvexen Halbordnung beruhenden) Methoden approximiert werden, allerdings ließen sich dann die Verteilungen von beliebigen Produkten der  $R_j$  und damit auch des zufälligen Vermögensendwertes,

$$S_n = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{j=i}^n R_j,$$

nur schwer handhaben.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, gehen wir zu einem Ersatzmodell über. In diesem approximieren wir die Periodenrendite  $R_j$  (motiviert durch die Ausführungen in Kapitel 4) durch eine lognormalverteilte Zufallsvariable  $R_j^*$  mit denselben ersten beiden Momenten wie  $R_j$ , d. h. mit

$$E(R_j^*) = E(R_j) \quad \text{und} \quad \text{Var}(R_j^*) = \text{Var}(R_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Da die  $R_1, \dots, R_n$  stochastisch unabhängig sind, wählen wir auch  $R_1^*, \dots, R_n^*$  als stochastisch unabhängig.

Weiterhin nehmen wir an, dass  $(R_1^*, \dots, R_n^*)^\top$   $n$ -dimensional lognormalverteilt ist. Damit sind auch beliebige Produkte der  $R_j^*$  lognormalverteilt, womit der **Vermögensendwert im Ersatzmodell**,

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{j=i}^n R_j^*,$$

eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen ist und deshalb zur approximativen Bestimmung von dessen Verteilung gemäß Kapitel 3 vorgegangen werden kann.

### 5.2.1 Wahl der Verteilungsparameter

Die Grundfonds-Renditen  $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n$  hatten wir als unabhängig und identisch  $\mathcal{L}(\tilde{\tau}, \tilde{\Lambda})$ -verteilt angenommen. Bezeichnen wir  $\tilde{\mu} := E(\tilde{R}_1)$  und  $\tilde{\Sigma} := \text{Cov}(\tilde{R}_1)$ , so gilt mit (1.33) und (1.34):

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \left( \exp\left\{\tilde{\tau}_i + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ii}\right\} \right)_{i=1, \dots, l} \\ \tilde{\Sigma} &= \left( \left( \exp\left\{\tilde{\tau}_i + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ii}\right\} \exp\left\{\tilde{\tau}_j + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{jj}\right\} (\exp\{\tilde{\lambda}_{ij}\} - 1) \right) \right)_{i,j=1, \dots, l}, \end{aligned}$$

und folglich für die ersten beiden Momente der  $i$ -ten Periodenrendite  $R_i, i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} E(R_i) &= \alpha_i^\top \tilde{\mu} \\ \text{Var}(R_i) &= \alpha_i^\top \tilde{\Sigma} \alpha_i. \end{aligned}$$

Gemäß den Inversionsformeln (1.35) und (1.36) erhalten wir nun die Parameter  $\tau_i$  und  $\lambda_i^2$  jener Lognormalverteilung, welche dieselben ersten beiden Momente wie  $R_i$  aufweist,

$$\lambda_i^2 = \ln \left( 1 + \frac{\alpha_i^\top \tilde{\Sigma} \alpha_i}{(\alpha_i^\top \tilde{\mu})^2} \right) \quad (5.7)$$

$$\tau_i = \ln(\alpha_i^\top \tilde{\mu}) - \frac{1}{2} \lambda_i^2. \quad (5.8)$$

Mit diesen Bezeichnungen haben wir also für die Verteilung der Periodenrenditen im Ersatzmodell:

$$R_i^* \sim \mathfrak{L}(\tau_i, \lambda_i^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad R_1^*, \dots, R_n^* \text{ stoch. unabh.} \quad (5.9)$$

## 5.2.2 Resultierendes Modell für den Vermögensendwert

Wir wollen das Ersatzmodell nun so (um-)formulieren, dass die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 unmittelbar angewendet werden können. Bezeichne dazu  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ , mit

$$Y_i := \ln R_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann befinden wir uns im Basismodell (3.1) von Kapitel 3: Für den Vermögensendwert ergibt sich die Darstellung

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n b_i e^{\omega_i^\top Y},$$

wobei

$$P^Y = N(\tau, \Lambda) \quad \text{mit} \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$$

wie oben sowie

$$\omega_i = \sum_{k=i}^n e_k \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

d.h. die ersten  $i - 1$  Komponenten von  $\omega_i$  sind gleich 0, die restlichen gleich 1 ( $e_k$  bezeichne wie üblich den  $k$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$ ) — dies entspricht der Wahl von  $\Omega$  als untere Dreiecksmatrix wie in (3.2). Die Diagonalform von  $\Lambda$  ergibt sich auf Grund der stochastischen Unabhängigkeit der  $Y_1, \dots, Y_n$ , welche sich von den  $R_1^*, \dots, R_n^*$  überträgt.

## 5.3 Fragestellung, interessierende Kenngrößen

Gegenstand der Untersuchungen ist die Verteilung des Vermögensendwertes  $S_n$  bzw. deren Kenngrößen. Approximationen oder Schranken für folgende Kenngrößen der Verteilung von  $S_n$  sind dabei insbesondere von Interesse:

(i) Werte der **Verteilungsfunktion**  $F_{S_n}(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Beispiel: Für gegebenes Ziel  $r \in (0, \infty)$  ( $r$  z.B. der Vermögensendwert der korrespondierenden sicheren Anlage) ist  $F_{S_n}(r) = P(S_n < r)$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Vermögensendwert des Fondssparplans sein Ziel nicht erreicht. Der Anwender bezeichnet  $F_{S_n}(r)$  oft als (*target*) *shortfall probability*.

(ii) **Quantile**  $q_p(S_n)$  für  $p \in (0, 1)$ .

Beispiel: Der Vermögensendwert überschreitet  $q_{0.01}(S_n)$  mit Wahrscheinlichkeit 99%. Der Anwender spricht dann manchmal davon, dass dieser Wert "stochastisch gesichert" nicht unterschritten wird. Wird  $q_{0.01}(S_n)$  unterschritten, so wollen wir davon sprechen, dass der *worst case* eingetreten ist.

(iii) **gestutzte Erwartungswerte**  $E[(S_n - t)^+]$  bzw.  $E[(t - S_n)^+]$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Beispiel:  $E[(S_n - r)^+]$  bzw.  $E[(r - S_n)^+]$  ist der erwartete absolute Überschuss bzw. Unterschuss im Vergleich zum Ziel  $r$ .

(iv) **bedingte Erwartungswerte**  $E[S_n | S_n > t]$  bzw.  $E[S_n | S_n < t]$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Beispiel:  $E[S_n | S_n < q_{0.01}(S_n)]$  ist gerade der erwartete Vermögensendwert, falls der *worst case* eintritt.

(v) den **Lower-Tail-Value-at-Risk**  $\text{TVaR}_\alpha(S_n)$  für  $\alpha \in (0, 1)$ .

Es gilt:  $\text{L-TVaR}_{0.01}(S_n) = E[S_n | S_n < q_{0.01}(S_n)]$ . Garantiert die Anlagegesellschaft (Bank oder Versicherer) dem Sparer eine Auszahlung in Höhe dieses Wertes zum Ende der  $n$ -ten Periode, so wird der Vermögensendwert (sogar) im *worst case* im Mittel ausreichen, diese Auszahlung zu leisten, vgl. die Ausführungen in Abschnitt 1.1.

In der Praxis mussten die Verteilung von  $S_n$  bzw. deren Kenngrößen bisher aufwendig simuliert werden, und zwar letztlich für jeden individuellen Fondssparplan separat. Denn die Verteilung von  $S_n$  hängt vom **Beitragsvektor**

$$b = (b_1, \dots, b_n)^\top$$

ebenso ab wie von der Aufteilung (Allokation) auf die  $l$  Grundfonds in jeder Periode, d.h. von der **Allokations-Matrix**

$$A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) \in \mathbb{R}^{l \times n}.$$

Da sowohl  $b$  als auch  $A$  je nach Sparvertrag unterschiedlich, also in diesem Sinne individuell sind, stellt sich eine Simulation der Verteilung des individuellen Vermögenswertes als unpraktikabel heraus, wenn — wie es bei Banken und Versicherungen der Fall ist — viele Sparverträge vorliegen.

Von großem Interesse für die Anlagegesellschaft wird die Abhängigkeit des Vermögenswertes von der Wahl der Allokationen  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sein.<sup>1</sup> In der Praxis wird man nämlich in den ersten Perioden (d.h. für kleine  $i$ ) eine andere Aufteilung des Beitrages auf die Grundfonds wählen als in den letzten Perioden (für große  $i$ ), denn für den Anleger steht anfangs der Renditeaspekt, am Ende jedoch der Sicherheitsaspekt im Vordergrund. Dies wird insofern berücksichtigt, indem anfangs eher in Fonds mit hoher erwarteter Rendite — verbunden mit einer hohen Varianz — investiert wird; während der Laufzeit verschiebt sich dann die Gewichtung hin zu Fonds mit geringer Rendite-Varianz — verbunden mit geringer Renditeerwartung.

### 5.3.1 Allokationsverlauf, Volatilitätsreduktion

Im Hinblick auf die sich mit der Laufzeit verändernde Einstellung des Beitragszahlers gegenüber dem Risiko wird die Anlagegesellschaft während der Laufzeit eine Volatilitätsreduktion vornehmen.

Wir werden uns die Standardabweichung  $\zeta_j$  der  $j$ -ten Periodenrendite  $R_j$  vorgeben, und die Allokation  $\alpha_j$  auf die Grundfonds in der  $j$ -ten Periode gerade entsprechend wählen, d.h. so dass

$$\text{Var}(R_j) = \alpha_j^\top \tilde{\Sigma} \alpha_j = \zeta_j^2 ; \quad (5.10)$$

dabei ist  $\zeta_j$  innerhalb gewisser Grenzen zu wählen, siehe (5.12) unten. Es ist plausibel, dass bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ausschließlich in den Grundfonds mit der höchsten Renditeerwartung, verbunden mit der höchsten Volatilität, investiert wird. Ebenso plausibel ist es, ab einem bestimmten Zeitpunkt nur noch jene Allokation zu wählen, für welche die Volatilität der zugehörigen Periodenrendite minimal ist. Zwischen diesen Zeitpunkten sollte die Volatilität in immer stärker werdendem Maße abnehmen. Wir wollen diese typische Volatilitätsentwicklung formalisieren:

Dazu bezeichne  $t_0 \in \{1, \dots, n\}$  die Nummer der ersten Periode mit verringerter Volatilität, und  $t_1 \in \{t_0 + 1, \dots, n\}$  die Nummer der Periode, ab der keine Volatilitätsreduktion mehr stattfindet, d.h.

$$\zeta_j = \begin{cases} \zeta_0 & \text{für } j \in \{1, \dots, t_0 - 1\} \\ \zeta_{\min} & \text{für } j \in \{t_1, \dots, n\} \end{cases}, \quad (5.11)$$

---

<sup>1</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir in der Bezeichnung der Periodenrendite  $R_i$  auf eine explizite Abhängigkeit von  $\alpha_i$  verzichtet.

wobei  $\zeta_{\min} \leq \zeta_0 \leq \zeta_{\max}$  mit

$$\zeta_{\max}^2 = \max_{k=1,\dots,l} \tilde{\sigma}_{kk}, \quad \zeta_{\min}^2 = \min_{\beta \in \mathcal{A}_l} \beta^\top \tilde{\Sigma} \beta. \quad (5.12)$$

$\zeta_0$  stellt hier offenbar eine individuelle (je nach Riskoeinstellung) Volatilitätsobergrenze dar. In den restlichen Perioden werden die Standardabweichungen wie folgt gewählt:

$$\zeta_j = \zeta_0 - \frac{1 - (1+c)^{j-t_0+1}}{1 - (1+c)^{t_1-t_0+1}} (\zeta_0 - \zeta_{\min}), \quad j \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}, \quad (5.13)$$

wobei ein  $c \geq 0$  vorgegeben ist. Durch diese Wahl wächst die absolute Volatilitätsreduktion ("superlinear") im Vergleich zur Vorperiode um  $c \cdot 100\%$ . Im Fall  $c = 0$ , d.h. im Fall linearer Volatilitätsreduktion, ist (5.13) als Limes für  $c \rightarrow 0$  zu verstehen, d.h.

$$\zeta_j = \zeta_0 - \frac{j - t_0 + 1}{t_1 - t_0 + 1} (\zeta_0 - \zeta_{\min}), \quad j \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}. \quad (5.14)$$

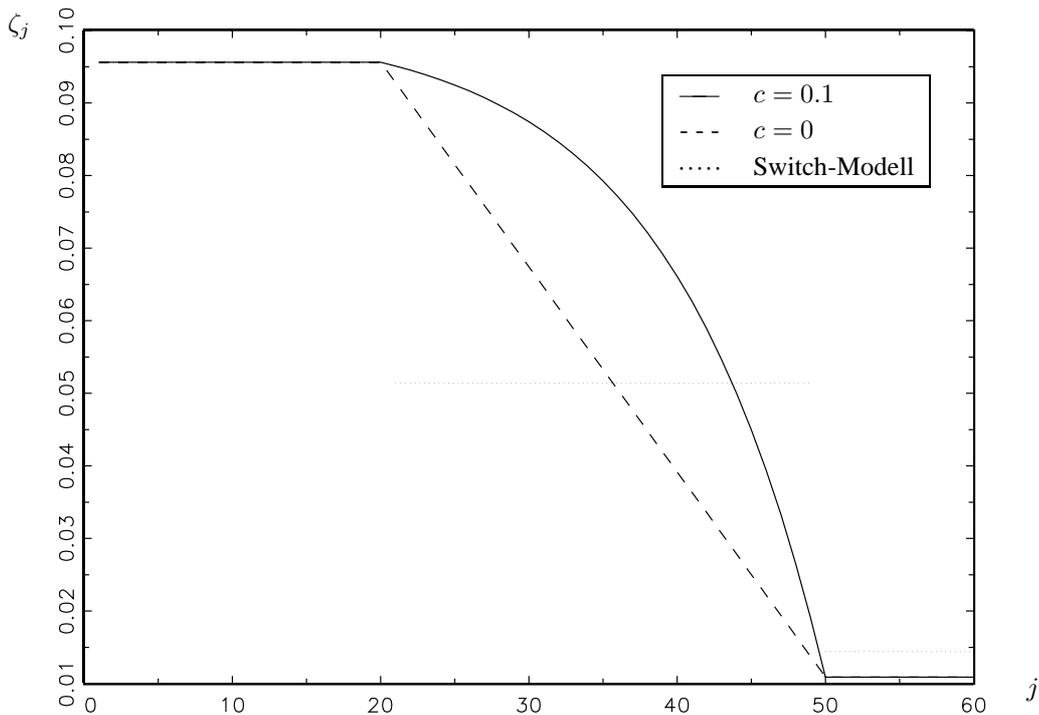


Abbildung 5.1: Volatilitätsreduktion für  $n = 60$ ,  $t_0 = 21$ ,  $t_1 = 50$ ,  $\zeta_0 = \zeta_{\max} = 0.0956$  und  $\zeta_{\min} = 0.0109$ .

Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft für  $c = 0$  sowie  $c = 0.1$  die Volatilitätsentwicklung für eine bestimmte Wahl der Parameter  $n, t_0, t_1, \zeta_0, \zeta_{\max}$  und  $\zeta_{\min}$ . Zum Vergleich ist

auch beispielhaft die Volatilitätsentwicklung eines *Switch-Modells*<sup>2</sup> mit 3 Grundfonds angeben, im dessen Rahmen die folgenden Allokationen gewählt werden:

$$\alpha_j = \begin{cases} (1, 0, 0)^\top & \text{für } j \in \{1, \dots, t_0 - 1\}, \\ (0, 1, 0)^\top & \text{für } j \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}, \\ (0, 0, 1)^\top & \text{für } j \in \{t_1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, dass die Elemente auf der Hauptdiagonalen von  $\tilde{\Sigma}$  absteigend geordnet sind. Auch im Rahmen dieses Switch-Modells findet während der Laufzeit also eine, wenn auch sprunghafte, Volatilitätsreduktion statt.

#### Bemerkung 5.4 (Risiko)

Bei der in diesem Abschnitt beschriebenen Volatilitätsreduktion dient offenbar die Varianz der Periodenrendite als Risikomaß. Dies geschieht aus Gründen der Einfachheit und nicht zuletzt deshalb, weil dann — wie im folgenden Abschnitt — Resultate aus der Portfoliotheorie Anwendung finden können. Es spricht allerdings einiges dafür, auch hier asymmetrische Risikomaße zu betrachten (denn Abweichungen von der erwarteten Rendite nach oben werden in der Regel nicht als Risiko empfunden). ■

### 5.3.2 Effiziente Allokationen

Für einen Grundfonds-Renditevektor  $\tilde{R}_1$  und eine zulässige Allokation  $\beta$  gibt  $\beta^\top \tilde{\mu}$  den Erwartungswert und  $\beta^\top \tilde{\Sigma} \beta$  die Varianz der resultierenden Periodenrendite  $\beta^\top \tilde{R}_1$  an. Abbildung 5.2 visualisiert beispielhaft den Rand der Menge

$$\mathcal{D} = \{(\sqrt{\beta^\top \tilde{\Sigma} \beta}, \beta^\top \tilde{\mu}) : \beta \in \mathcal{A}_l\}$$

im sogenannten *Rendite-Volatilitäts-Diagramm*, und zwar gerade für die spezielle Wahl

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} 1.0348 \\ 1.0266 \\ 1.0193 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma} = 0.01 \cdot \begin{pmatrix} 0.914 & 0.266 & -0.063 \\ 0.266 & 0.264 & -0.031 \\ -0.063 & -0.031 & 0.021 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Zu jedem Punkt  $(x, y) \in \mathcal{D}$  korrespondiert dabei eine Allokation  $\beta$  mit  $\beta^\top \tilde{\mu} = y$  und  $\beta^\top \tilde{\Sigma} \beta = x^2$ .

Ist die Standardabweichung  $\zeta_j$  der  $j$ -ten Periodenrendite vorgegeben, dann wird es im Allgemeinen mehrere Allokationsvektoren  $\beta$  mit der Eigenschaft  $\zeta_j^2 = \beta^\top \tilde{\Sigma} \beta$  geben. Es liegt auf der Hand, dass wir unter diesen gerade jene Allokation wählen werden, welche die erwartete Rendite maximiert,

$$\alpha_j := \arg \max_{\beta \in \mathcal{A}_l} \{\beta^\top \tilde{\mu} : \beta^\top \tilde{\Sigma} \beta = \zeta_j^2\}.$$

<sup>2</sup>vgl. Bemerkung 5.3

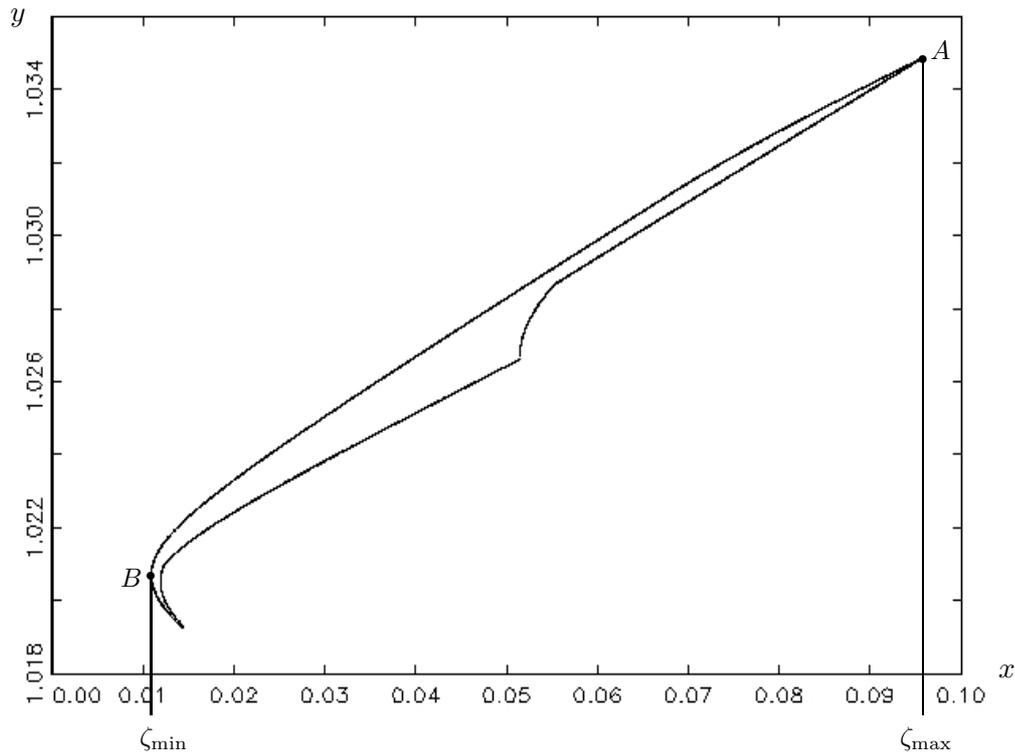


Abbildung 5.2: Rendite-Volatilitäts-Diagramm ( $\mathcal{D}$  ist die von der Kurve eingeschlossene Menge)

Eine solche Allokation — die zu vorgegebener Volatilität die erwartete Rendite maximiert — heißt *effizient*. Offensichtlich sind gerade jene Allokationen effizient, die zu Punkten des nordwestlichen Randes (Randsegment zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ ) von  $\mathcal{D}$  korrespondieren. Der nördlichste Punkt  $A$  der Menge  $\mathcal{D}$  korrespondiert zur effizienten Allokation mit der höchsten Standardabweichung  $\zeta_{\max} = 0.0956$ ; der westlichste Punkt,  $B$ , korrespondiert zur effizienten Allokation mit der geringsten Standardabweichung  $\zeta_{\min} = 0.0109$ .

**Bemerkung 5.5 (Beschreibung des effizienten Randes)**

Die *Portfoliotheorie* beschäftigt sich damit, wie effiziente Allokationen bestimmt werden. Ein zentrales Resultat besagt, dass der effiziente Rand stets stückweise aus Hyperbelsegmenten besteht, was eine explizite Darstellung des Erwartungswertes der Periodenrendite  $R_j = \alpha_j^\top \tilde{R}_1$  in Abhängigkeit von  $\zeta_j$  erlaubt:

$$E(R_j) = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} + \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}{\gamma_3} (\zeta_j^2 - \gamma_3^{-2})},$$

wobei die  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  entsprechend zu wählen sind. Dabei existiert für jedes Hyperbelseg-

ment ein  $I \subseteq \{1, \dots, l\}$ ,  $|I| > 1$ , so dass

$$\gamma_1 = \tilde{\mu}_I^\top \tilde{\Sigma}_I^{-1} \tilde{\mu}_I \quad \gamma_2 = \mathbf{1}_{|I|}^\top \tilde{\Sigma}_I^{-1} \tilde{\mu}_I, \quad \gamma_3 = \mathbf{1}_{|I|}^\top \tilde{\Sigma}_I^{-1} \mathbf{1}_{|I|}.$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\mu}_I$  den  $|I|$ -dimensionalen Teilvektor von  $\tilde{\mu}$  mit den in  $I$  enthaltenen Komponentenindizes. Entsprechend bezeichnet  $\tilde{\Sigma}_I$  die  $|I| \times |I|$ -dimensionale Matrix, die nach Streichung jener Zeilen und Spalten übrigbleibt, welche zu den nicht in  $I$  enthaltenen Indizes korrespondieren. Die zu einem vorgegebenen  $\zeta_j$  korrespondierende Indexmenge  $I$  enthält dabei gerade die Indizes der positiven Komponenten des zugehörigen (effizienten) Allokationsvektors  $\alpha_j$ . Damit verbleibt für gegebenes  $\zeta_j$  nur noch das korrespondierende  $I$  zu bestimmen, d.h. festzustellen, auf welcher Hyperbel man sich gerade befindet. Wie dies geschieht, soll hier nicht im Detail erläutert werden.

Für unsere spezielle Wahl (5.15) der Parameterwerte  $\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}$  ergeben sich die folgenden Indexmengen:

$$\begin{aligned} \zeta_j \in [\zeta_{\min}, 0.0676) &\implies I = \{1, 2, 3\}, \\ \zeta_j \in [0.0676, \zeta_{\max}] &\implies I = \{1, 2\}. \end{aligned}$$

In letzterem Fall wird also durch effiziente Allokationen der Fonds mit der geringsten erwarteten Rendite (und geringsten Volatilität) nicht mehr berücksichtigt. ■

Ist die Standardabweichung  $\zeta_j$  der Periodenrendite  $R_j$  vorgegeben, so ergibt sich für unsere spezielle Wahl (5.15) der Parameterwerte  $\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}$  die folgende Formel für den Erwartungswert der Periodenrendite  $R_j = \alpha_j^\top \tilde{R}_1$ ,

$$E(R_j) = \begin{cases} 1.0207 + \sqrt{0.0242 \cdot (\zeta_j^2 - 0.0001)} & , \quad \text{für } \zeta_j \in [\zeta_{\min}, 0.0676) \\ 1.0266 + \sqrt{0.0105 \cdot (\zeta_j^2 - 0.0026)} & , \quad \text{für } \zeta_j \in [0.0676, \zeta_{\max}] \end{cases} \quad (5.16)$$

Eine explizite Formel für die (in der Regel eindeutig bestimmte<sup>3</sup>) effiziente Allokation  $\alpha_j$  ist ebenfalls verfügbar und für die konkrete Anwendung von höchstem Interesse, wird aber hier für die weiteren Berechnungen nicht benötigt.

## 5.4 Simulation

In diesem Abschnitt wollen wir anhand einer konkreten Modellspezifikation überprüfen, ob der Übergang zum Ersatzmodell, vgl. Abschnitt 5.2, gerechtfertigt ist.

Dabei gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst überprüfen wir, ob die Periodenrenditen  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gut durch lognormalverteilte Zufallsvariablen  $R_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit denselben ersten beiden Momenten approximiert werden können.

<sup>3</sup>Dies ist der Fall, wenn die Komponenten von  $\tilde{\mu}$  paarweise verschieden sind und  $\tilde{\Sigma}$  positiv definit ist.

In einem zweiten Schritt überprüfen wir die Güte der Approximation des Vermögenswertes  $S_n$  durch den Vermögenswert  $S_n^*$  im Ersatzmodell.

### 5.4.1 Periodenrendite im Modell vs. Ersatzmodell

Die Grundfonds-Renditevektoren  $\tilde{R}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sind identisch verteilt. Wir wollen nun die Verteilungen von  $R_1 = \beta^\top \tilde{R}_1$  (der Periodenrendite im Modell) und  $R_1^*$  (der Periodenrendite im Ersatzmodell) für verschiedene Wahlen des Allokationsvektors  $\beta$  vergleichen.

Es seien  $l = 3$  Grundfonds verfügbar; die Parameterwerte der Verteilung  $\mathfrak{L}(\tilde{\tau}, \tilde{\Lambda})$  des Grundfonds-Renditevektors  $\tilde{R}_1$  seien gegeben durch

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.025 \\ 0.019 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = 0.01 \cdot \begin{pmatrix} 0.85 & 0.25 & -0.06 \\ 0.25 & 0.25 & -0.03 \\ -0.06 & -0.03 & 0.02 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Diese Parameter sind (mit Lemma 1.35) gerade so gewählt, dass gilt:

$$E(\tilde{R}_1) = \tilde{\mu} \quad \text{und} \quad \text{Cov}(\tilde{R}_1) = \tilde{\Sigma},$$

mit  $\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}$  wie in (5.15). Abbildungen 5.1 und 5.2 sowie die Beschreibung (5.16) des effizienten Randes korrespondieren also gerade zu dem hier spezifizierten Modell für die Grundfonds-Renditen. Die Parameterwahl (5.17) kann als typisch für die gemeinsame Verteilung der Halbjahresrenditen dreier Grundfonds (Aktien-, Renten-, Geldmarktfonds) angesehen werden.

Um einschätzen zu können, wie groß der Fehler bei der Approximation von  $R_1 = \beta^\top \tilde{R}_1$  durch  $R_1^*$  ist, haben wir nun die Verteilung von  $R_1$  für verschiedene Wahlen des Allokationsvektors  $\beta$  simuliert. Bezeichne  $M := \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ . Für jeden der 18 verschiedenen (in gewisser Weise repräsentativen) Allokationsvektoren

$$\beta \in \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in M^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

wurden mit Hilfe eines Rechners  $N = 10000$  unabhängige Realisierungen  $x_1, \dots, x_N$  der Zufallsvariable  $R_1 = \beta^\top \tilde{R}_1$  erzeugt und die resultierende empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , bestimmt, vgl. die Ausführungen zu empirischen Verteilungsfunktionen im Anhang.

In den  $N$  Sprungpunkten  $x_1, \dots, x_N$  dieser Funktion haben wir die Funktionswerte der Verteilungsfunktion  $F_{R_1^*}$  der approximierenden Lognormalverteilung berechnet, wobei deren Parameter gemäß (5.7) und (5.8) bestimmt wurden. Anschließend haben wir den Kolmogorov-Abstand zwischen den Verteilungsfunktionen  $\hat{F}_{x_1, \dots, x_N}$  und  $F_{R_1^*}$  bestimmt gemäß

$$d_K(\hat{F}_{x_1, \dots, x_N}, F_{R_1^*}) = \max_{k=1, \dots, N} \left\{ |\hat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x_k) - F_{R_1^*}(x_k)|, |\hat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x_{k-}) - F_{R_1^*}(x_k)| \right\},$$

welcher (als Schätzer aufgefasst) für  $N \rightarrow \infty$  fast sicher gegen  $d_K(F_{R_1}, F_{R_1^*})$  konvergiert, vgl. die Ausführungen zum Kolmogorov-Abstand im Anhang. Wir gehen bei  $N = 10000$  von einer guten Näherung aus. In Tabelle 5.1 ist für jede der 18 untersuchten Allokationen der Kolmogorov-Abstand  $d_K(\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}, F_{R_1^*})$  als Schätzung für  $d_K(F_{R_1}, F_{R_1^*})$  angegeben.

$\beta^\top$	$d_K(\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}, F_{R_1^*})$
0 0.2 0.8	0.0102
0 0.4 0.6	0.0051
0 0.6 0.4	0.0050
0 0.8 0.2	0.0033
<b>0.2 0 0.8</b>	<b>0.0148</b>
0.2 0.2 0.6	0.0097
0.2 0.4 0.4	0.0048
0.2 0.6 0.2	0.0020
0.2 0.8 0	0.0036
0.4 0 0.6	0.0128
0.4 0.2 0.4	0.0079
0.4 0.4 0.2	0.0022
0.4 0.6 0	0.0026
0.6 0 0.4	0.0087
0.6 0.2 0.2	0.0068
0.6 0.4 0	0.0043
0.8 0 0.2	0.0047
0.8 0.2 0	0.0057

Tabelle 5.1: Kolmogorov-Abstand zwischen empirischer Verteilung und approximierender Lognormalverteilung

In Abbildung 5.3 ist beispielhaft für die fett gedruckte Allokation  $\beta = (0.2, 0, 0.8)^\top$  die Differenz  $\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N} - F_{R_1^*}$  der beiden zu vergleichenden Verteilungsfunktionen eingezeichnet. Die gestrichelten Linien sollen wieder dazu dienen, die Größe der Abweichungen besser einschätzen zu können, denn schließlich ist die empirische Verteilungsfunktion als Ergebnis der Simulation mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

- *Quantifizierung der lokalen Unsicherheit*

Die beiden nicht-linearen gestrichelten Linien visualisieren das approximative 95%-Konfidenzband für  $F_{R_1}$ . Ist  $I(t)$  ein  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $F_{R_1}(t)$ , dann bezeichnen wir die Menge  $\{(t, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : y \in I(t)\}$  als 95%-Konfidenzband für  $F_{R_1}$ , vgl. Bemerkung A.4 im Anhang. Eingezeichnet sind hier

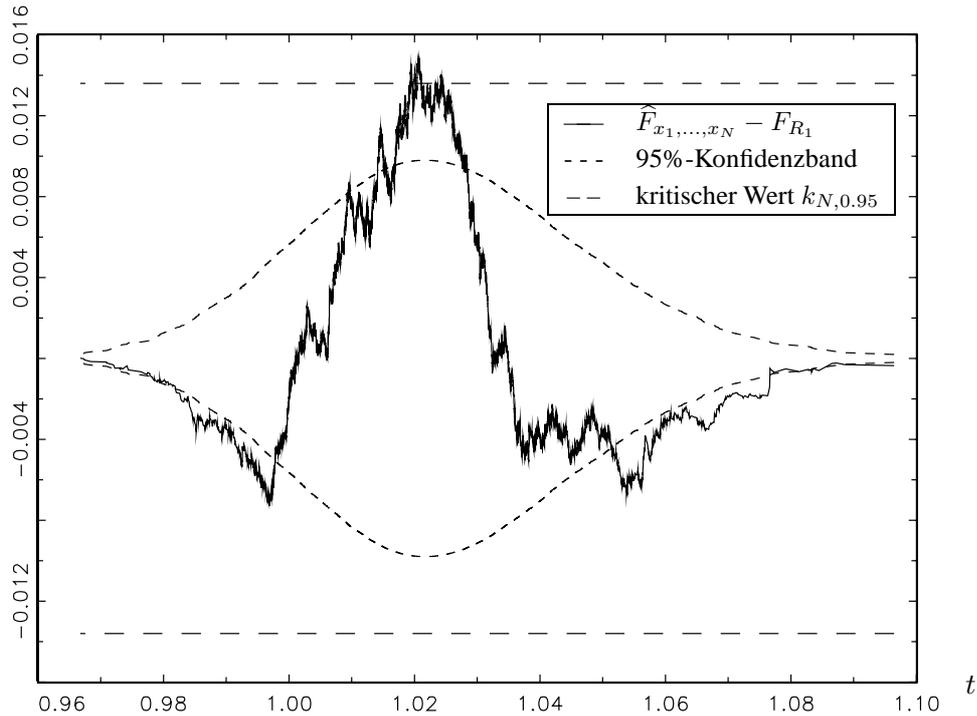


Abbildung 5.3: Differenz der empirischen Verteilungsfunktion und der Verteilungsfunktion der approximierenden Lognormalverteilung

jedoch nicht die oberen und unteren Grenzen des Konfidenzbandes für  $F_{R_1}$ , sondern deren Entsprechungen (positive und negative halbe Länge des Konfidenzintervalls für  $F_{R_1}$ ) für die Differenz  $\hat{F}_{x_1, \dots, x_N} - F_{R_1}$ .

Abbildung 5.3 ist zu entnehmen, dass die Unsicherheit auf Grund der Simulation für sehr kleine und sehr große Werte von  $t$  sehr gering ist; während sie für mittlere Werte von  $t$  größer ist. Selbst wenn  $F_{R_1}$  durch  $F_{R_1^*}$  nahezu perfekt approximiert würde, wären dort also größere Abweichungen zu erwarten. Aus Abbildung 5.3 ist außerdem abzulesen, dass im hier visualisierten Fall die Funktion  $F_{R_1^*}$  nicht allzu stark aus dem 95%-Konfidenzband für  $F_{R_1}$  ausbricht. Vgl. hinsichtlich der Interpretation dessen die Ausführungen zum Konfidenzband einer GEW-Funktion in Abschnitt 3.6.

- *Quantifizierung der globalen Unsicherheit*

Die beiden gestrichelten Geraden visualisieren den (positiven und negativen) kritischen Wert  $k_{10000,0.95} \approx 0.0136$  des Kolmogorov-Smirnov-Tests zum Niveau 0.05 für das Testproblem

$$H_0 : F_{R_1} = F_{R_1^*} \quad \text{gegen} \quad H_1 : F_{R_1} \neq F_{R_1^*},$$

vgl. Bemerkung A.3 im Anhang. Dieser Test lehnt die Nullhypothese ab, wenn

der Kolmogorov-Abstand  $d_K(\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}, F_{R_1^*})$  den kritischen Wert überschreitet. Letzteres ist bei der hier visualisierten Allokation (in geringem Maße), jedoch bei keiner der anderen 17 untersuchten Allokationen der Fall, vgl. Tabelle 5.1.

**Bemerkung 5.6 (Zur Anwendung des Kolmogorov-Smirnov-Tests)**

Wir *wissen*, dass für Allokationsvektoren, deren Komponenten sämtlich kleiner als 1 sind ("echte" Mischungen), die Alternativhypothese richtig ist. Zur Beurteilung, ob die Approximation von  $F_{R_1}$  durch  $F_{R_1^*}$  gerechtfertigt ist, wollen wir jedoch dieses Wissen für den Moment ignorieren. Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass die untersuchte Approximation nur dann schlecht ist, wenn sie im Sinne des Kolmogorov-Abstandes schlechter als die Approximation durch  $\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}$  (zu unserem aus Kostengründen fest gewählten  $N$ ) ist. Letzteres würde nahe gelegt, wenn die Daten Signifikanz für  $F_{R_1} \neq F_{R_1^*}$  zu dem gewählten Niveau 95% zeigen. ■

Die Daten zeigen bei 17 von 18 untersuchten Allokationen keine Signifikanz für  $F_{R_1} \neq F_{R_1^*}$ , bei der verbleibenden nur "knapp". Und selbst bei dieser bewegt sich die Verteilungsfunktion der approximierenden Lognormalverteilung *im Wesentlichen* innerhalb der 95%-Konfidenzbänder der zu approximierenden Verteilungsfunktion.

Offenbar ist die Approximation der Verteilung der Periodenrenditen durch eine Lognormalverteilung mit denselben ersten beiden Momenten also recht gut. Im Lichte von Satz 4.1 (und der diesem nachfolgenden Bemerkung 4.3) ist also die Kovarianzmatrix  $\widetilde{\Sigma}$  offenbar so "klein", dass die Verteilungskonvergenz gegen die Lognormalverteilung bereits spürbar "greift".

**Bemerkung 5.7**

Wir verschweigen nicht, dass uns die Güte dieser Approximation in gewisser Weise nicht überrascht. Da es üblich ist, Wertpapier-Renditen als lognormalverteilt anzunehmen, ist die Rendite eines Fonds nun als Konvexkombination mehrerer solcher Wertpapier-Renditen im Allgemeinen nicht lognormalverteilt. Allerdings kann ein Fonds durchaus auch als Wertpapier aufgefasst werden, womit dessen Rendite auch als lognormalverteilt angenommen werden könnte. Diese Auffassung ist bereits in das Modell eingegangen, indem die Renditen der Grundfonds als lognormalverteilt angenommen wurden. Daher wäre es nur konsequent, die Rendite eines aus drei Teilfonds bestehenden Fonds ebenfalls als lognormalverteilt anzunehmen. Unsere Untersuchungen stützen dies: die Verteilung der Rendite eines Fonds, der aus drei Wertpapieren (hier gerade unsere Grundfonds) besteht, und die Lognormalverteilung mit denselben ersten beiden Momenten stimmen in der Regel näherungsweise überein.

### 5.4.2 Vermögensendwert im Modell vs. Ersatzmodell

Nach den eben gemachten Ausführungen scheint es also in der vorliegenden Situation durchaus gerechtfertigt, das Ersatzmodell an Stelle des eigentlichen Modells zu Grunde zu legen. Zu untersuchen bleibt jedoch noch, wie sich die (wenn auch offenbar kleinen) Approximationsfehler bei den Periodenrenditen durch Produkt- und Summenbildung auf den Vermögensendwert auswirken. Es ist immerhin denkbar, dass diese sich so kumulieren, dass die Approximation von  $S_n$  durch  $S_n^*$  (vgl. Abschnitt 5.2) schlecht ausfällt. Dass Letzteres nicht der Fall ist, werden wir nun illustrieren. Dazu müssen wir noch die restlichen Modellparameter fixieren.

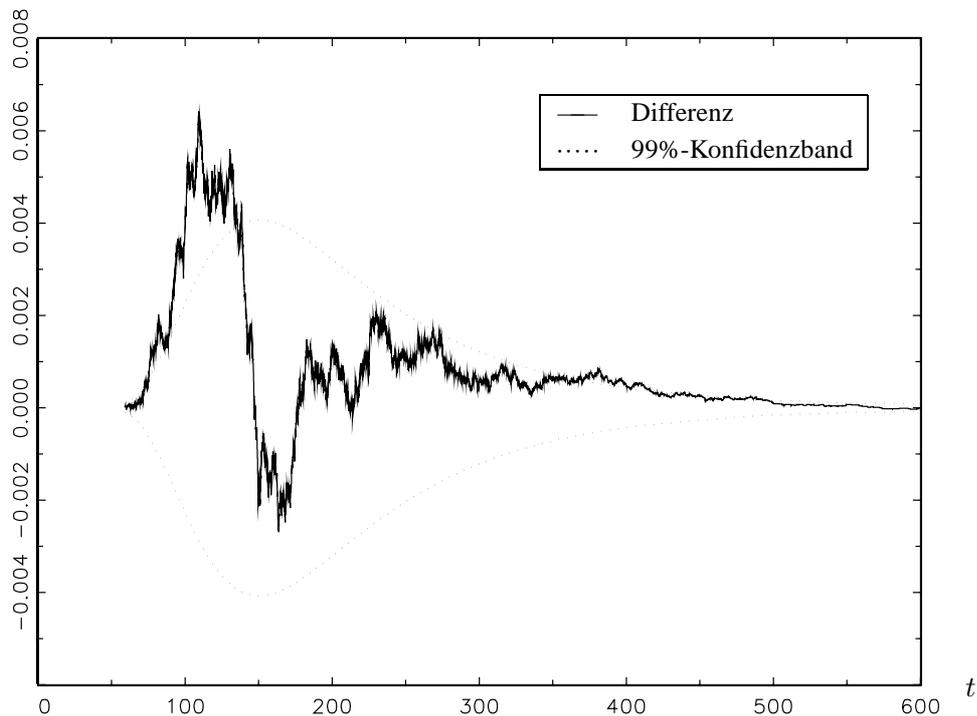


Abbildung 5.4: Differenz der empirischen Verteilungsfunktionen von  $S_n$  und  $S_n^*$ .

Wir nehmen als Laufzeit des Sparplans  $n = 60$  Perioden<sup>4</sup> an; wir werden deshalb im Folgenden auf den Periodenindex in den Notationen  $S_n$  und  $S_n^*$  verzichten. Die Beiträge seien konstant, d.h.

$$b_i = b > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $b = 1$  setzen. Die Parameter  $\tilde{\tau}, \tilde{\Lambda}$  der Grundfonds-Renditevektoren seien wie in (5.17) gewählt. Für die Periodenrenditen  $(R_j)_{j=1, \dots, n}$  sei eine Volatilitätsentwicklung  $(\zeta_j)_{j=1, \dots, n}$  gemäß (5.11) und (5.13) zugrunde gelegt, mit  $t_0 = 21$ ,  $t_1 = 50$ ,  $\zeta_0 = \zeta_{\max}$  und  $c = 0.1$ ;  $\zeta_{\max} = 0.0956$  und

<sup>4</sup>Man stelle sich vor, dass eine Periode gerade ein Halbjahr ist.

$\zeta_{\min} = 0.0109$  ergeben sich gemäß (5.12); diese Volatilitätsentwicklung wurde bereits in Abbildung 5.1 illustriert. Die Allokationen  $\alpha_j$  sind jeweils effizient gewählt, und zwar so, dass die Varianz von  $R_j = \alpha_j^\top \tilde{R}_j$  gleich dem vorgegebenen Wert  $\zeta_j^2$  ist,  $j = 1, \dots, n$ .

Um einschätzen zu können, wie groß der Fehler bei der Approximation von  $S$  durch  $S^*$  ist, haben wir beide Verteilungen auf einem Rechner simuliert. Auf diesem haben wir  $N = 100000$  unabhängige Realisierungen  $x_1, \dots, x_N$  der Zufallsvariable  $S$  und ebenso viele unabhängige Realisierungen  $x_1^*, \dots, x_N^*$  der Zufallsvariable  $S^*$  erzeugt.

Abbildung 5.4 zeigt die Differenz der beiden empirischen Verteilungsfunktionen. Offenbar ist die betragsmäßig größte Abweichung kleiner als 0.007, was durchaus als klein angesehen werden kann. Zur besseren Einordnung der Größe der Abweichung ist auch das 99%-Konfidenzband der Verteilungsfunktion von  $S$  eingezeichnet.

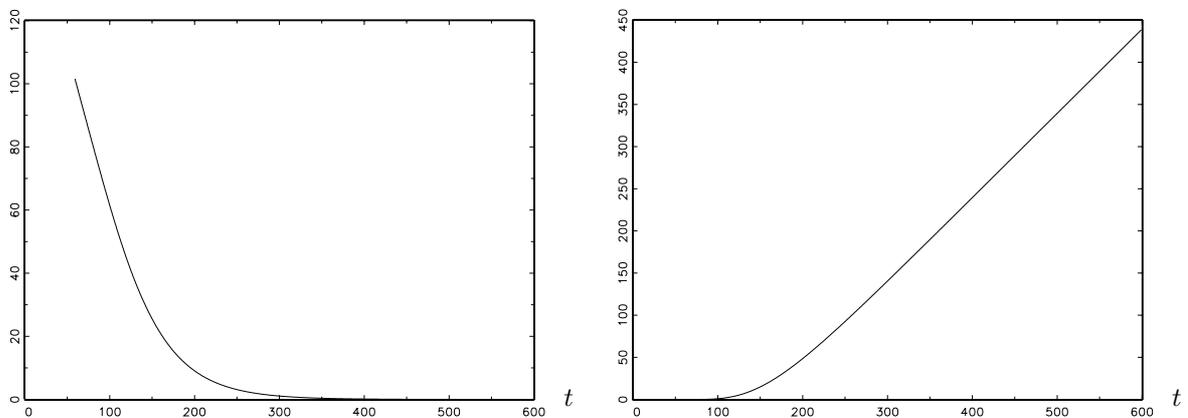


Abbildung 5.5: empirische linksseitig (links) bzw. rechtsseitig (rechts) gestutzte Erwartungswerte von  $S$

Abbildung 5.5 gibt einen Eindruck von der Größenordnung der links- bzw. rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von  $S$ .

Abbildungen 5.6 – 5.9 zeigen die (absoluten und relativen) Abweichungen der empirischen Quantile, gestutzten Erwartungswerte und L-TVaR's. Sind gepunktete Linien eingezeichnet, so handelt es sich um die 99%-Konfidenzbänder der entsprechenden empirischen gestutzten Erwartungswerte von  $S$ , die wir zum Vergleich angegeben haben.

Diese Abbildungen legen nahe, dass der Fehler, den wir machen, wenn wir für den Vermögensendwert das Ersatzmodell anstelle des ursprünglichen Modells zugrunde legen, hinsichtlich aller betrachteten Kenngrößen (Verteilungsfunktionen, Quantile, gestutzte Erwartungswerte, L-TVaR) zu vernachlässigen sein wird. Gerade der Fehler bezüglich des Lower-Tail-Value-at-Risk, der stets 1% (relativ) nicht übersteigt, ist als sehr klein anzusehen.

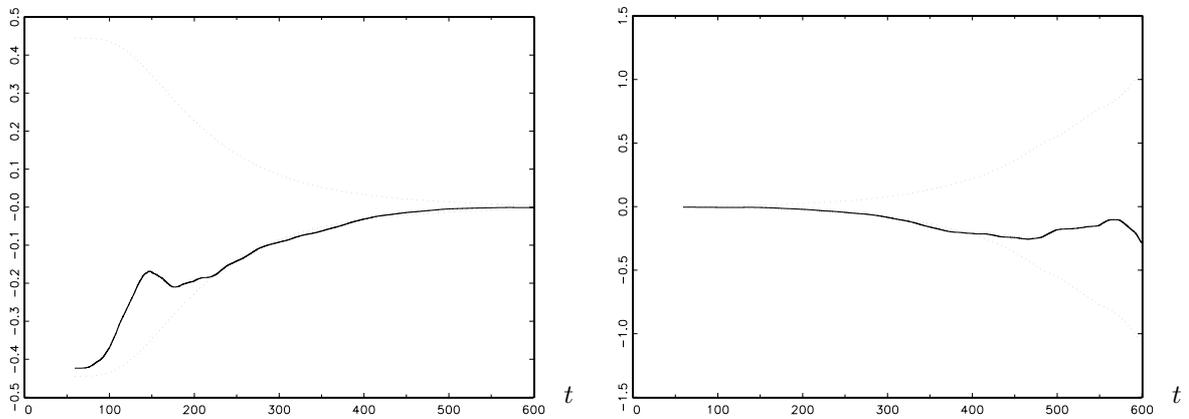


Abbildung 5.6: Differenz der empirischen linksseitig gestutzten Erwartungswerte von  $S$  und  $S^*$  (links absolut, rechts relativ)

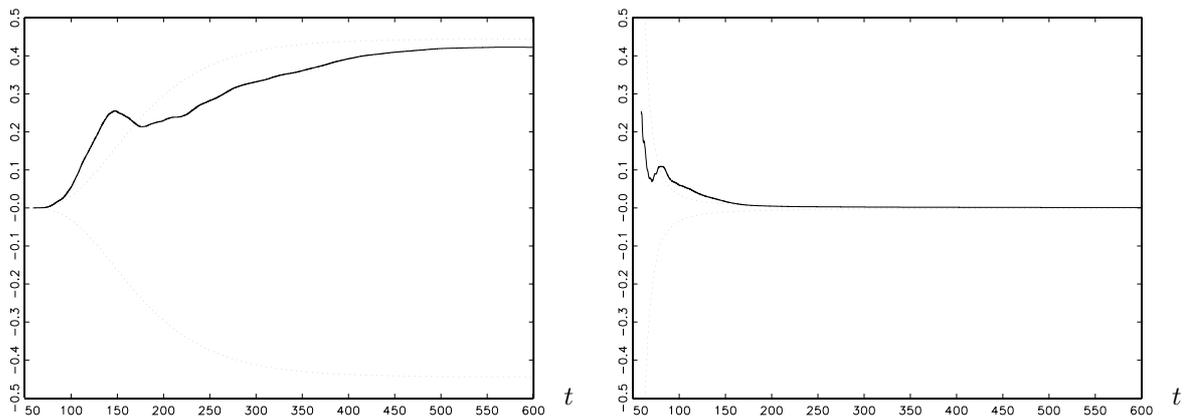


Abbildung 5.7: Differenz der empirischen rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von  $S$  und  $S^*$  (links absolut, rechts relativ)

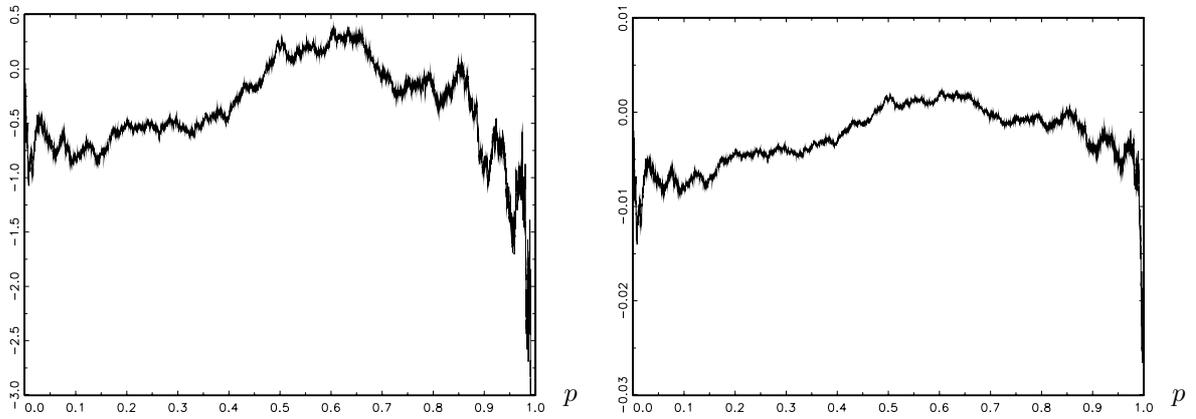


Abbildung 5.8: Differenz der empirischen Quantile von  $S$  und  $S^*$  (links absolut, rechts relativ)

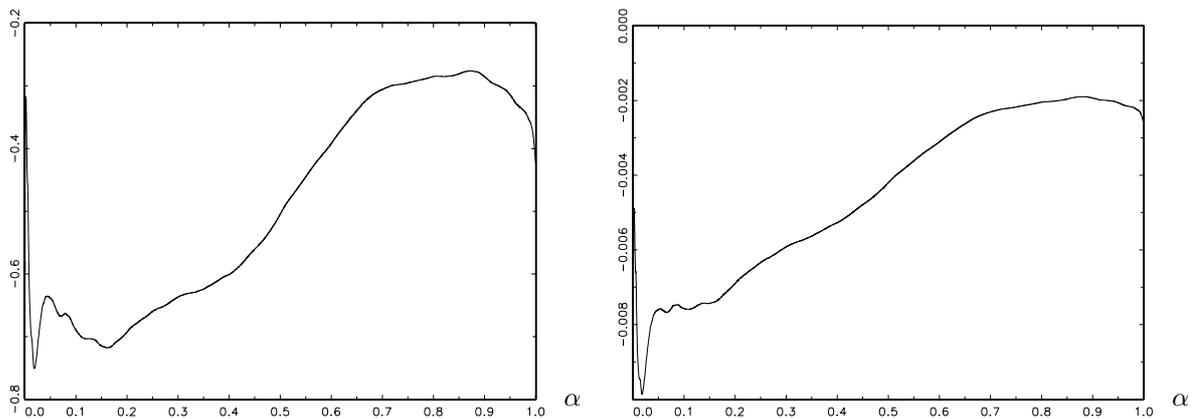


Abbildung 5.9: Differenz der empirischen L-TVAr's von  $S$  und  $S^*$  (links absolut, rechts relativ)

## 5.5 Approximationen und Schranken für den Vermögensendwert

Auf Grund der im vorherigen Abschnitt gemachten Untersuchungen ist also davon auszugehen, dass für die dort unterstellte Modellspezifikation die Approximation des Vermögensendwertes  $S$  durch den Vermögensendwert  $S^*$  im Ersatzmodell sehr gut ist. Wir wollen nun die Verteilung von  $S^*$  mittels der in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Methoden approximieren.

Dazu betrachten wir die folgenden,  $S^*$  und damit auch  $S$  approximierenden, Zufallsvariablen:

- *Schranken im Sinne der konvexen Halbordnung*
  - $S^c$ , die komonotone obere konvexe Schranke für  $S^*$
  - $S^l$ , die komonotone untere konvexe Schranke für  $S^*$ , wobei als bedingende Zufallsvariable  $Z_{VM}$  gewählt wurde (gemäß (3.40))
- *Momentenbasierte Approximationen*
  - $S^m$ , die Konvexkombination aus  $S^c$  und  $S^l$  mit denselben ersten beiden Momenten wie  $S^*$  (gemäß Abschnitt 2.3)
  - $L$ , eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit denselben ersten beiden Momenten wie  $S^*$
  - $J$ , eine reziprok-gammaverteilte Zufallsvariable mit denselben ersten beiden Momenten wie  $S^*$

Die ersten beiden Momente von  $S$  und  $S^*$  fallen nach Konstruktion zusammen; es gilt:

$$E(S) = 160.80 \text{ und } \text{Var}(S) = 2999.67 ;$$

dies entspricht einer Standardabweichung von 54.77. Wir weisen darauf hin, dass  $S$  und  $S^*$  im Allgemeinen nicht konvex geordnet sein werden. Somit sind die konvexen Schranken für  $S^*$  *keine* konvexen Schranken mehr für  $S$ ; entsprechendes gilt für die auf diesen basierenden oberen Schranken für  $\varrho(S^*, S^l)$  und  $\varrho(S^*, S^c)$ .

Hinsichtlich der Approximation durch eine reziprok-gammaverteilte Zufallsvariable ist zu erwähnen, dass Satz 4.6 (i) lediglich als Motivation dafür verstanden werden kann. Die Voraussetzungen des Satzes können kaum als erfüllt angesehen werden; insbesondere können positive Werte von  $\tau_i = E(\ln R_i^*)$ , wie sie hier vorliegen, nicht zu einer negativen Drift der korrespondierenden geometrischen Brownschen Bewegung führen, wie sie im erwähnten Satz gefordert wird.

Wir untersuchen im Folgenden stets den Fehler bei der Approximation von  $S$  (und nicht von der Hilfsvariablen  $S^*$ ) durch  $S^c, S^l, S^m, J, L$ . Soweit Kenngrößen simuliert worden sind, so beruhen diese stets auf  $N = 100000$  Realisierungen der Zufallsvariable  $S$ . Wir bezeichnen im Folgenden aus Konsistenzgründen mit  $\hat{S}$  eine Zufallsvariable, deren Verteilung gerade die auf diesen Realisierungen beruhende empirische Verteilung ist.

### 5.5.1 Verteilungsfunktion

Abbildung 5.10 visualisiert die (absoluten) Abweichungen der Verteilungsfunktionen der approximierenden Zufallsvariablen von der empirischen Verteilungsfunktion von  $S$ . Die stärker schwankende der beiden durchgezogenen Linien korrespondiert zu  $S^c$ . Die

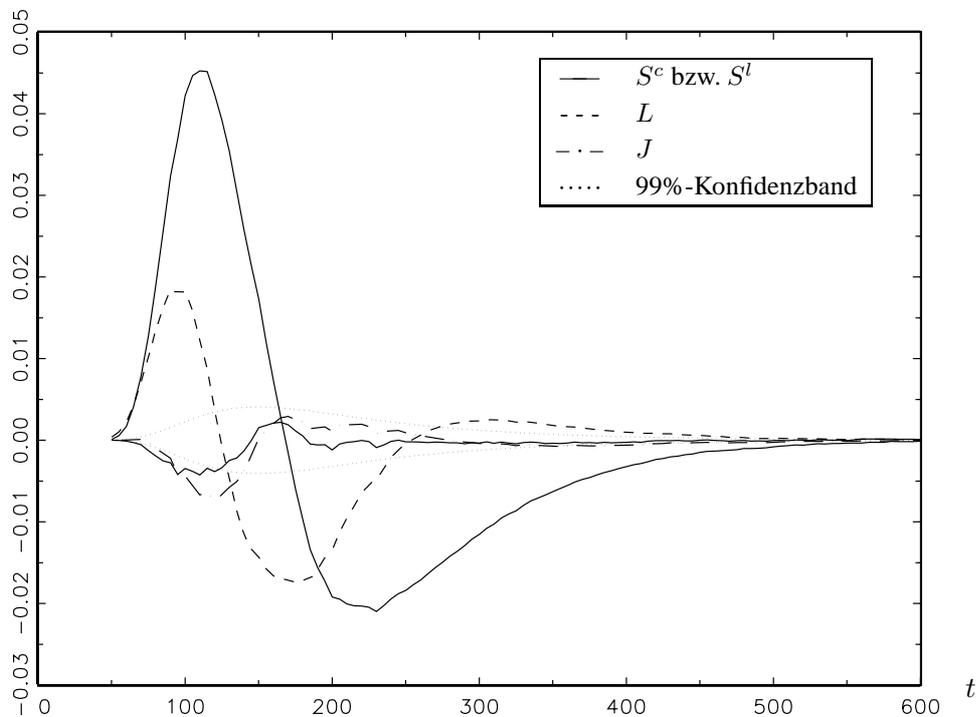


Abbildung 5.10: Abweichungen der Verteilungsfunktionen von der empirischen Verteilungsfunktion von  $S$

zu  $S^m$  korrespondierende Linie ist nicht eingezeichnet, da sie optisch von der zu  $S^l$  korrespondierenden Linie nicht zu unterscheiden ist. Dies liegt daran, dass der Anteil der konvexen unteren Schranke an der Konvexkombination mehr als 0.99 beträgt. Die optisch beste Anpassung liefert jedenfalls  $S^l$ , dessen Verteilungsfunktion *im Wesentlichen* innerhalb des 99%-Konfidenzbandes für  $S$  verläuft und mit einem Fehler, der betragsmäßig nie größer als 0.005 ist.

Zur Illustration betrachten wir das Ziel  $r = 93.27$ . Dies ist der Vermögensendwert eines (sicheren) Banksparplans selber Laufzeit (60 Perioden) mit einer Verzinsung in Höhe von 2.75% p.a. Die folgende Tabelle enthält die Approximationen für  $F_S(r)$ , also für die Wahrscheinlichkeit, dass der Fondssparplan keinen größeren Vermögensendwert als der sichere Banksparplan liefert. Die beste Approximation ist hier offenbar durch  $S^m$  gegeben.

$\widehat{F}_S(r)$	$F_L(r)$	$F_J(r)$	$F_{S^c}(r)$	$F_{S^l}(r)$	$F_{S^m}(r)$
0.0511	0.0696	0.0477	0.0868	0.0476	0.0480

### 5.5.2 Gestutzte Erwartungswerte

Abbildung 5.11 bzw. 5.12 visualisieren für die auf der konvexen Halbordnung basierenden Approximationen die (absoluten und relativen) Abweichungen der linksseitig bzw. rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von ihren empirischen Entsprechungen von  $S$ . Die gepunkteten Linien visualisieren jeweils das 99%-Konfidenzband.

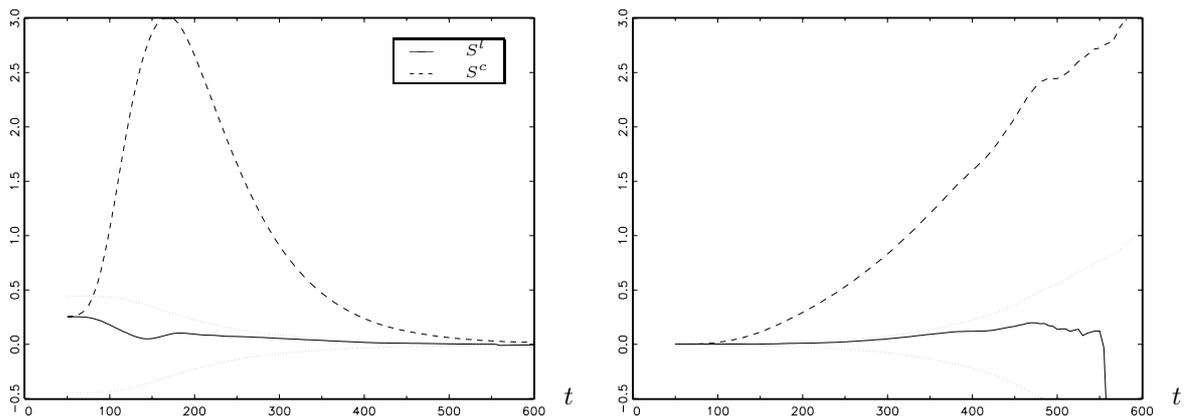


Abbildung 5.11: Konvexe Schranken: Abweichungen der linksseitig gestutzten Erwartungswerte von den empirischen von  $S$  (links absolut, rechts relativ)

Augenscheinlich liefert  $S^l$  stets die beste Anpassung; die Abweichung liegt für die linksseitig gestutzten Erwartungswerte stets innerhalb des Konfidenzbandes, während sie für die rechtsseitig gestutzten *im Wesentlichen* innerhalb liegt. (Der steile Abfall der zu  $S^l$  korrespondierenden Kurve in der rechten Grafik von Abbildung 5.11 ist auf eine numerische Instabilität bei der Berechnung zurückzuführen.)

Abbildung 5.13 bzw. 5.14 visualisiert für die momentenbasierten Approximationen die (absoluten und relativen) Abweichungen der linksseitig bzw. rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von ihren empirischen Entsprechungen von  $S$ . Die gepunkteten Linien visualisieren wieder das 99%-Konfidenzband.

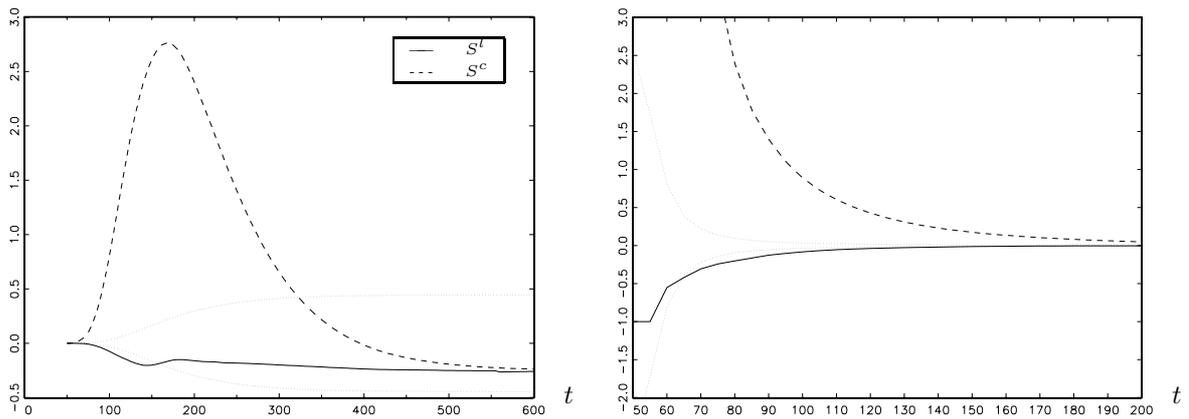


Abbildung 5.12: Konvexe Schranken: Abweichungen der rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von den empirischen von  $S$  (links absolut, rechts relativ)

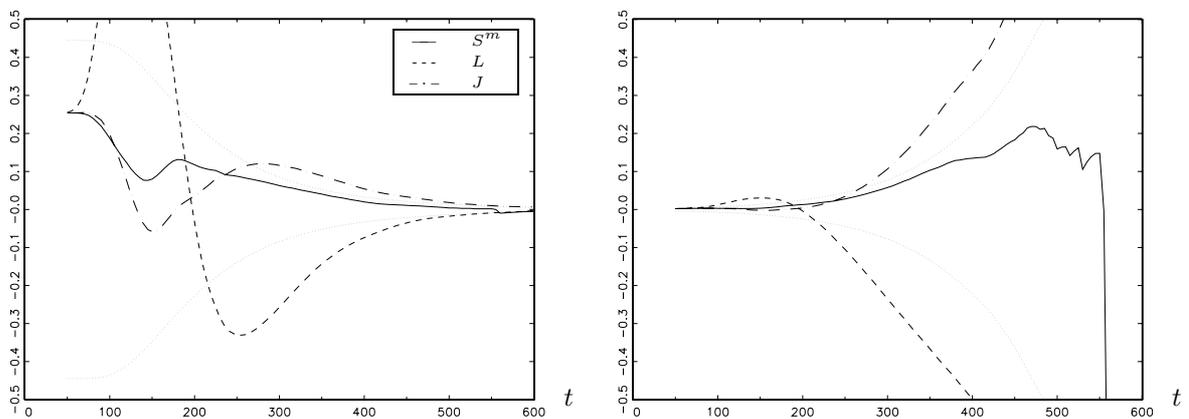


Abbildung 5.13: Momentbasierte Approximationen: Abweichungen der linksseitig gestutzten Erwartungswerte von den empirischen von  $S$  (links absolut, rechts relativ)

Nachdem wir bereits bemerkt hatten, dass die Verteilungen von  $S^m$  und  $S^l$  sehr ähnlich sind, überrascht es nicht, dass unter den momentenbasierten Approximationen  $S^m$  die beste Anpassung bezüglich der gestutzten Erwartungswerte liefert, denn  $S^l$  lieferte ja bereits eine sehr gute Anpassung. Offenbar ist jedoch auch die Anpassung durch die reziprok-gamma-verteilte Zufallsvariable  $J$  recht gut; für Argumente kleiner als 100 ist sie sogar besser als die durch  $S^m$ .

Die folgende Tabelle enthält Approximationen bzw. Schranken für den erwarteten Über- bzw. Unterschuss bezogen auf das Ziel  $r = 93.27$  (Vermögensendwert des sicheren Banksparrplans). Auch hier liefert die reziprok-gammaverteilte Zufallsvariable eine gute, im Fall des Unterschusses sogar die beste Approximation. Man beachte, dass

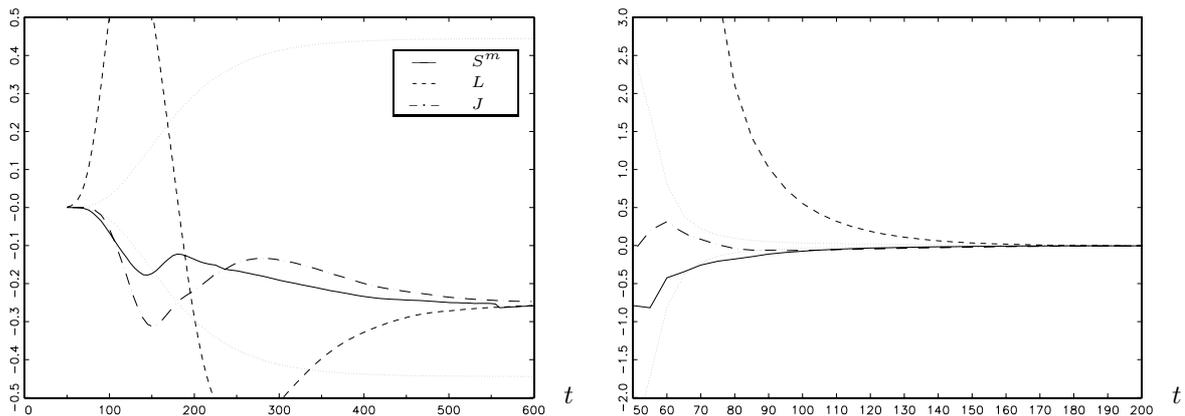


Abbildung 5.14: Momentbasierte Approximationen: Abweichungen der rechtsseitig gestutzten Erwartungswerte von den empirischen von  $S$  (links absolut, rechts relativ)

der simulierte Überschuss kleiner als  $E[(S^l - r)^+]$  ist, welches zwar stets eine untere Schranke für  $E[(S^* - r)^+]$ , jedoch im Allgemeinen nicht für  $E[(S - r)^+]$  ist. Nichtsdestotrotz liefert  $S^l$  die beste Approximation für den Überschuss.

	$\widehat{S}$	$L$	$J$	$S^c$	$S^l$	$S^m$
$E[(\cdot - r)^+]$	67.74	68.37	67.96	68.54	<b>67.94</b>	67.95
$E[(r - \cdot)^+]$	0.459	0.841	<b>0.430</b>	1.008	0.409	0.415

Schließlich wollen wir in Abbildung 5.15 einige in dieser Arbeit thematisierte obere Schranken für den  $\varrho$ -Abstand zwischen  $S^c$  und  $S^*$  bzw. zwischen  $S^l$  und  $S^*$  visualisieren und vergleichen. Dabei ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei der Auszahlung der Asiatischen Option in Abschnitt 3.6: die geometrische Schranke  $\nabla_{S^c}$  ist vergleichsweise schlecht gegenüber der trivialen oberen Schranke  $\varrho.(S^c, S^l)$ , während die geometrische Schranke  $\Delta_{S^l}$  ab einem bestimmten Wert (hier für Argumente größer als 225) die Nielsen-Sandmann-Schranke  $\Delta_{S^l}^{NS}$  schlägt. Für sehr kleine Argumente (kleiner als 75) oder sehr große (größer als 400) ist jedoch auch hier die triviale obere Schranke  $\varrho.(S^c, S^l)$  die beste.

Wie bereits erwähnt, sind diese oberen Schranken für  $\varrho.(S^*, S^c)$  bzw.  $\varrho.(S^*, S^l)$  im Allgemeinen *keine* oberen Schranken mehr für  $\varrho.(S, S^c)$  bzw.  $\varrho.(S, S^l)$ . Approximativ bleibt diese Eigenschaft aber sicher erhalten, denn  $S^*$  approximiert  $S$  bekanntlich sehr gut.

### 5.5.3 Quantile und Lower-Tail-Value-at-Risk

Wir wollen die Güte der Approximation hinsichtlich der Quantile und des Tail-Value-at-Risk untersuchen. Eine gewisse Aufmerksamkeit wollen wir nun auch dem Einfluss

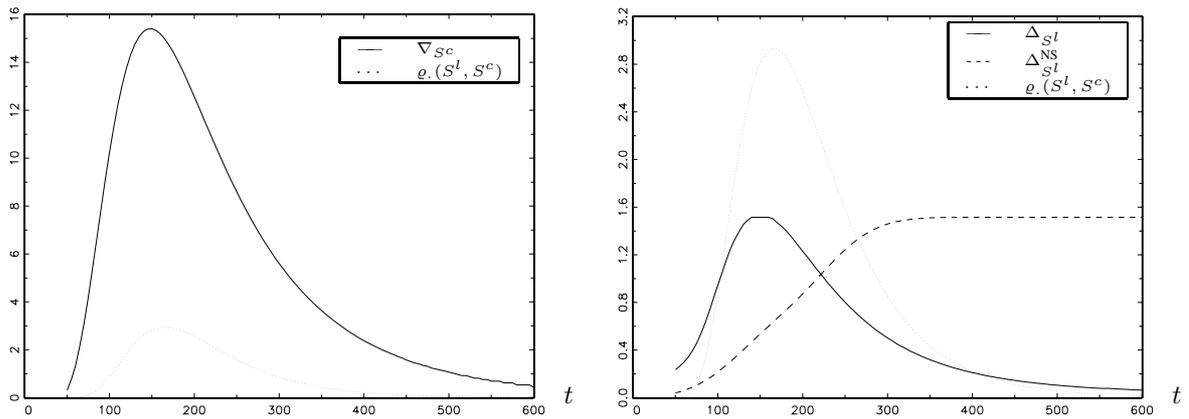


Abbildung 5.15: obere Schranken für  $q_t(S^*, S^c)$  (links) bzw.  $q_t(S^*, S^l)$  (rechts)

der Wahl der bedingenden Zufallsvariable  $Z$  widmen.

Tabelle 5.2 bzw. 5.3 enthält für eine relevante Auswahl von Niveaus  $\alpha$  jeweils neben dem simulierten Quantil bzw. Tail-Value-at-Risk die entsprechenden Approximationen. Die jeweils besten Approximationen sind wie üblich fett hervorgehoben.

$\alpha$	$\hat{S}$	$J$	$L$	$S^c$	$S^l$				$S^m$			
					VM	LO	FA	GA	VM	LO	FA	GA
0.0001	58.22	56.95	44.40	48.70	59.72	58.92	59.59	58.92	59.74	<b>57.97</b>	59.60	57.63
0.0005	63.16	<b>62.73</b>	51.17	54.01	64.74	64.09	64.63	64.10	64.77	62.32	64.63	62.32
0.001	65.98	<b>65.65</b>	54.68	56.81	67.38	66.81	67.27	66.81	67.42	65.38	67.28	65.38
0.0025	70.36	<b>70.13</b>	60.06	61.16	71.46	71.00	71.37	71.01	71.49	69.72	71.22	69.72
0.005	73.83	74.14	64.84	65.10	75.14	74.78	75.05	74.79	75.09	<b>73.66</b>	74.95	73.53
0.01	78.27	78.83	70.43	69.79	79.50	79.24	79.42	79.25	79.44	<b>78.22</b>	79.30	78.15
0.025	85.81	86.50	79.52	77.60	86.72	86.62	86.66	86.64	86.71	<b>85.75</b>	86.57	<b>85.75</b>
0.05	93.02	93.84	88.27	85.34	93.82	93.85	93.78	93.88	93.77	93.16	93.70	<b>93.09</b>
0.1	102.54	103.48	99.56	95.64	103.22	103.39	<b>102.80</b>	103.42	103.21	<b>102.80</b>	103.14	<b>102.80</b>

Tabelle 5.2: Quantile: Approximationen und simulierte Werte

Es stellt sich heraus, dass die Approximationen durch  $J$  sowie durch  $S^m$  (wenn die bedingende Zufallsvariable lokal-optimal (LO) gewählt wird) in der Regel ausgezeichnet sind. Dies ist nicht sonderlich überraschend: Sowohl was die Approximation der Verteilungsfunktion als auch der gestutzten Erwartungswerte von  $S$  betrifft, war die Approximation durch  $J$  (unter den momentenbasierten) bzw.  $S^m$  (unter den auf der konvexen Ordnung basierenden) unter den besten — zumindest für kleine Argumente. Die Güte dieser Approximation überträgt sich auf den Lower-Tail-Value-at-Risk (für kleine Niveaus  $\alpha$ ), vgl. dessen Definition.

Wir wissen, dass  $L\text{-TVaR}_\alpha(S)$  gerade der erwartete Vermögensendwert ist, falls der

$\alpha$	$\hat{S}$	$J$	$L$	$S^c$	$S^l$				$S^m$			
					VM	LO	FA	GA	VM	LO	FA	GA
0.0001	54.95	<b>54.13</b>	41.12	46.19	57.33	56.45	57.20	56.44	56.61	53.99	56.33	53.75
0.0005	59.81	<b>59.17</b>	47.04	50.77	61.68	60.94	61.56	60.94	61.26	58.45	61.05	58.31
0.001	62.23	<b>61.72</b>	50.07	53.15	63.93	63.26	63.82	63.26	63.59	61.09	63.40	60.97
0.0025	65.93	<b>65.58</b>	54.64	56.81	67.37	66.80	67.26	66.80	67.11	65.01	66.95	64.91
0.005	69.08	<b>68.94</b>	58.66	60.06	70.42	69.93	70.32	69.94	70.20	68.38	70.06	68.30
0.01	72.63	<b>72.81</b>	63.27	63.85	73.96	73.56	73.87	73.57	73.78	72.22	73.65	72.15
0.025	78.47	78.94	70.59	70.00	79.68	79.41	79.60	79.43	79.53	<b>78.31</b>	79.43	78.25
0.05	84.09	84.68	77.41	75.88	85.10	84.96	85.04	84.98	84.98	<b>84.00</b>	84.89	83.95
0.1	91.10	91.82	85.85	83.35	91.96	91.94	91.91	91.97	91.86	91.12	91.79	<b>91.09</b>

Tabelle 5.3: Lower-Tail-Value-at-Risk: Approximationen und simulierte Werte

*worst case* eintritt (wobei letzterer gerade als das Ereignis definiert ist, dass der Vermögensendwert sein  $\alpha$ -Quantil nicht übersteigt). Ist nun eine (möglichst scharfe) untere Schranke  $u$  für  $L\text{-TVaR}_\alpha(S)$  verfügbar, und garantiert die Anlagegesellschaft dem Beitragszahler zum Ende der Laufzeit eine Auszahlung in Höhe von  $u$ , so wird der Vermögensendwert bei Eintritt des *worst case* im Mittel ausreichen, diese Auszahlung zu leisten. Garantiert die Anlagegesellschaft dem Beitragszahler eine Auszahlung in Höhe von  $v > u$ , so muss sie einen Betrag in Höhe von  $v - u$  zurücklegen (oder sich in Höhe dieses Betrages rückversichern), um im *worst case* die garantierte Auszahlung leisten zu können.

Nun erinnern wir uns daran, dass  $L\text{-TVaR}_\alpha(S^c) \leq L\text{-TVaR}_\alpha(S^*) \leq L\text{-TVaR}_\alpha(S^l)$  gilt. Wir können davon ausgehen, dass diese Ungleichung approximativ richtig bleibt, wenn wir  $S^*$  durch  $S$  ersetzen, denn wir hatten bereits (auf der Basis von Simulationen) herausgefunden, dass der Fehler bei Ersetzen von  $S$  durch  $S^*$  bezüglich des Tail-Value-at-Risk sehr klein ist (weniger als 1%). Allerdings hilft uns das in unserem Fall kaum weiter: wählen wir zum Beispiel (wie in der Praxis üblich)  $\alpha = 0.01$ , so liegt die untere Schranke  $L\text{-TVaR}_\alpha(S^c) = 63.83$  relativ weit vom simulierten Lower-Tail-Value-at-Risk 72.63 entfernt.

Statt also nach einer ohnehin nicht exakten unteren Schranke zu suchen, scheint es zweckmäßiger zu sein, nach einer guten Approximation für  $L\text{-TVaR}_\alpha(S)$  zu suchen. Im Fall  $\alpha = 0.01$  kommt dafür z.B.  $L\text{-TVaR}_{0.01}(J) = 72.81$  in Frage, dessen relative Abweichung vom simulierten Wert 72.63 weniger als 0,25% beträgt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass je nach Modellspezifikation eine bestimmte Approximationsmethode gute oder schlechte Ergebnisse liefern kann. Bei der hier betrachteten war beispielsweise die Approximation durch die Zufallsvariable  $J$  recht gut. Dass dies nicht immer der Fall sein muss, unterstreicht das folgende Beispiel.

**Bemerkung 5.8 (Vergleich mit dem Switch-Modell)**

Zum Vergleich haben wir einmal ein Switch-Modell untersucht, und zwar gerade jenes, welches (annähernd) denselben erwarteten Vermögensendwert liefert, wie die bisher untersuchte Modellspezifikation. Dies wird erreicht durch die folgenden Allokationen:

$$\alpha_j = \begin{cases} (1, 0, 0)^\top & \text{für } j \in \{1, \dots, 31\}, \\ (0, 1, 0)^\top & \text{für } j \in \{32, \dots, 57\}, \\ (0, 0, 1)^\top & \text{für } j \in \{58, \dots, 60\}. \end{cases}$$

Für den Vermögensendwert  $S$  dieses Sparplans ergeben sich  $E(S) = 160.84$  sowie  $\text{Var}(S) = 3217.81$ . Es überrascht nicht, dass die Varianz hier höher ausfällt, als bei der oben untersuchten Modellspezifikation (dort war  $\text{Var}(S) = 2999.67$ ), denn erstens sind ab Periode 32 die Allokationen nicht mehr effizient und zweitens wirken sich natürlich auch die sprunghaften Umschichtungen in der 32. und 58. Periode des jeweils bis dahin angesammelten Kapitals auf die Varianz ungünstig aus. Wir wollen nicht noch einmal zwei große Tabellen präsentieren und beschränken uns auf die Untersuchung der Quantile und des Lower-Tail-Value-at-Risk zum Niveau  $\alpha = 0.01$ .

	$\hat{S}$	$J$	$L$	$S^c$	$S^l$				$S^m$			
					VM	LO	FA	GA	VM	LO	FA	GA
$q_{0.01}$	74.65	77.22	68.39	65.18	75.90	75.53	75.79	75.60	75.77	<b>74.13</b>	75.58	73.88
$\text{TVaR}_{0.01}$	68.25	71.19	61.23	58.87	69.98	69.40	69.85	69.45	69.74	<b>67.59</b>	69.55	67.31

Tabelle 5.4: Approximationen für Risikomaße zum Niveau  $\alpha = 0.01$  im Switch-Modell

Mit Blick auf die Tabelle fällt auf, dass hier die Approximation durch  $S^m$  um einiges besser ist als jene durch  $J$ .

Übrigens: Eine Anlagegesellschaft, welche  $\text{LTVaR}_{0.01}(S)$  auf der Basis von  $S^m$  (LO) schätzt, kann dem Beitragszahler im oben betrachteten Modell eine um 6,85% höhere Auszahlung<sup>5</sup> (72,22) garantieren, als im Switch-Modell (67,59). ■

**5.5.4 Abschließende Bemerkungen**

Wir haben beispielhaft einen typischen Fondsparplan untersucht, wobei wir die Periodenrenditen jedes einzelnen von drei Fonds als lognormalverteilt vorausgesetzt haben. Dabei haben wir angenommen, dass in jeder Periode die Investitionssumme zuzüglich zum bis dahin erreichten Vermögen effizient auf die drei Fonds aufgeteilt wird. Dies geschieht im Hinblick auf die sich mit der Laufzeit verändernde Einstellung gegenüber dem Risiko so, dass während der Laufzeit eine stetige Volatilitätsreduktion vorgenommen wird.

<sup>5</sup>die sie im worst case im Mittel aus dem Endvermögen des Sparplans bestreiten kann

Wir haben im Laufe der Zeit für einige weitere Modellspezifikationen die verschiedenen Approximationsmöglichkeiten untersucht. Dabei war unser Eindruck, dass die Approximation mittels  $S^m$  (bzgl. aller hier untersuchter Kenngrößen) stets gute Ergebnisse lieferte; wenn sie einmal nicht die beste war, dann war sie meist nur wenig schlechter als diese. Wir wagen also hier die Empfehlung, die Verteilung von  $S$  durch die Verteilung der Zufallsvariablen  $S^m$  zu approximieren, welche ganz nebenbei den Vorteil hat, dieselben ersten beiden Momente wie  $S$  aufzuweisen.

Nun zur konkreten Anwendung der erzielten Ergebnisse in der Praxis. Die Anlagegesellschaft wird für in gewisser Weise "typische" Ausgestaltungen der Sparpläne (etwa: Laufzeit kurz, mittel, lang; Volatilitätsreduktion linear, superlinear, Fonds-Switch) den resultierenden Vermögensendwert simulieren und für interessierende Kenngrößen die jeweils besten Approximationsmöglichkeiten ermitteln. Soll nun für einen konkreten Sparplan eine gewisse Kenngröße der Vermögensendwertverteilung bestimmt werden, so wird der Sparplan zunächst einem ähnlichen "typischen" Sparplan zugeordnet, für den dann bereits die beste Approximationsmöglichkeit bekannt ist.

Für Lebensversicherer ist sicherlich die Untersuchung eines Spar-Entnahme-Plans (fondsgebundene Rentenversicherung) interessant, wo also bis zu einem bestimmten, determinierten Zeitpunkt (Rentenbeginn) Beiträge geleistet werden, danach finden nur noch Entnahmen statt (Rentenzahlungen); das noch nicht entnommene Vermögen bleibt dabei weiter in den Fonds investiert. Hier ist z.B. die Mindesthöhe der (konstanten) Beiträge von Interesse, welche geleistet werden müssen, damit mit hoher Wahrscheinlichkeit alle geplanten (bzw. zugesicherten) Entnahmen möglich sind. Siehe hierzu Vanduffel, Dhaene und Goovaerts (2005) für den Fall *eines* Fonds (also mit *identisch* lognormalverteilten Periodenrenditen). Eine "Fortsetzung" des oben untersuchten Fonds-Sparplans auf einen Fonds-Spar-Entnahmeplan war im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht mehr möglich.

# Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, Möglichkeiten zur Approximation des Vermögensendwerts von Fonds-Sparplänen, wie sie typischerweise von Banken und Versicherungen angeboten werden, aufzuspüren und zu untersuchen. Von Interesse sind hierbei Approximationen für die Verteilungsfunktion, Quantile, gestutzte Erwartungswerte und Tail-Values-at-Risk. Die Modellierung der zu Grunde liegenden Wertpapierpreisprozesse erfolgt, wie üblich, als geometrische Brownsche Bewegung, wodurch der Vermögensendwert eines Wertpapiersparplans strukturell eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen ist. Die Verteilung einer solchen Summe ist jedoch bekanntlich nicht explizit anzugeben; deren Simulation ist natürlich möglich, jedoch ob der Vielzahl von bei einer Bank oder Versicherung zu verwaltender Sparpläne unpraktikabel.

Immer wieder stößt man auf Arbeiten, in denen darauf hingewiesen wird, dass die Summe von lognormalverteilten Zufallsvariablen gut durch eine eindimensional lognormalverteilte Zufallsvariable, in der Regel durch eine mit demselben Erwartungswert und derselben Varianz, approximiert würde. Dies konnte meist einzig und allein durch Simulationen und numerische Berechnungen gestützt werden. Wir präsentieren hier ein Resultat, welches eine Rechtfertigung für die genannte Approximation liefert: die Verteilungskonvergenz gegen eine Lognormalverteilung bei verschwindenden Varianzen/Kovarianzen der Summanden. Es stellt sich heraus, dass sich dieses Resultat als Spezialfall eines Resultats von Dufresne (2004) ergibt, der in jenem Artikel die asymptotische Verteilung von stetigen und diskreten Mitteln geometrischer Brownscher Bewegungen untersucht.

Relativ neu ist die Idee, Approximationen für die Summenverteilung auf der Basis der Konzepte der Komonotonie und der konvexen Halbordnung von Zufallsvariablen zu konstruieren. Eine obere konvexe Schranke ist gegeben durch die Summe der Komponenten der bekannten *oberen Frechet-Schranke* für den Vektor der Summanden; eine verbesserte obere Schranke konnte von Kaas et al. (2000) konstruiert werden. Eine konvexe untere Schranke für die Summe geht zurück auf Rogers und Shi (1995). Die Anwendung dieser Resultate auf Summen mit lognormalverteilten Summanden liefert sofort leicht zu berechnende obere und untere Schranken für gestutzte Erwartungswerte und den Tail-Value-at-Risk der Summenverteilungen. Dadurch eröffnen sich vielfältige

Anwendungsmöglichkeiten gerade auf dem Gebiet der Finanz- und Versicherungsmathematik.

Bei der Approximation der Summenverteilung durch eine ihrer oberen oder unteren konvexen Schranken stellt sich die Frage nach der Güte der Approximation. Wir konstruieren auf Basis eines geometrischen Ansatzes eine obere Schranke für den Approximationsfehler im Sinne des Abstandes der gestutzten Erwartungswerte. Eine herausragende Eigenschaft dieser Schranke ist es, dass die Varianz die einzige Kenngröße der Summenverteilung ist, die in die Berechnung eingeht. Die Schranke für den Approximationsfehler der oberen konvexen Schranke induziert eine neue untere Schranke, die Schranke für den Approximationsfehler der unteren Schranke induziert eine neue obere Schranke für die gestutzten Erwartungswerte der Summenverteilung. Die letztere vergleichen wir mit einer bereits von Nielsen und Sandmann (2003) konstruierten. Unsere "geometrische" Schranke ist im Gegensatz zur Nielsen-Sandmann-Schranke stets verfügbar, solange nur irgendeine konvexe untere Schranke mit bekannter Verteilung für die Summenverteilung vorhanden ist; außerdem stellt sich heraus, dass die geometrische Schranke für bestimmte gestutzte Erwartungswerte schärfer als die von Nielsen und Sandmann ist.

Schließlich widmen wir uns als Anwendung der realen Situation eines "echten" Fondssparplans, bei dem also in jeder Periode nicht nur in ein einzelnes Wertpapier, sondern in mehrere Wertpapiere investiert werden darf. Der resultierende Vermögensendwert ist nun nicht länger eine Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen. Wir zeigen, dass die Summanden jedoch approximativ als lognormalverteilt angenommen werden können, und zwar auf Grund des oben erwähnten Resultats über die asymptotische Verteilung einer Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen mit verschwindenden Varianzen/Kovarianzen. Wir weisen an Hand von Simulationen nach, dass diese Approximation in der von uns überprüften konkreten Situation ausgezeichnet ist. Diese Güte überträgt sich auch auf die Approximation des resultierenden Vermögensendwertes. Schließlich werden alle in dieser Arbeit untersuchten Approximationsmöglichkeiten für die Verteilung des (nunmehr als Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen angenommenen) Vermögensendwertes verglichen. Insbesondere eine Konvexkombination aus konvexer oberer und unterer Schranke, welche dieselben ersten beiden Momente wie die Summenverteilung aufweist, erzielt hier gute Approximationsergebnisse. Der Nutzen dieser Approximation liegt vor allem darin, dass sie dem Anleger bzw. der Anlagegesellschaft zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit des Fondssparplans (bei einer beliebigen festgelegten Anlagestrategie) die einfache (approximative) Bestimmung relevanter Kenngrößen der Vermögensendwertverteilung erlaubt.

# Abstract

The intention of this work was to find and investigate approximation methods for the distribution of the final wealth of a fund saving plan, as it is usually offered by banks or insurance companies. Of special interest are approximations of the cumulative distribution function, quantiles, truncated first moments and tail-values-at-risk. The final wealth of a stock saving plan is a sum of lognormally distributed random variables due to the modelling of stock price processes as geometric Brownian motions. It is well known that the distribution of such a sum can not be calculated explicitly. Although simulation is possible, mostly it is not practicable due to the large amount of saving plans which have to be managed by a bank or insurer.

In many articles it is claimed that the sum of lognormally distributed random variables is well approximated by a single lognormally distributed random variable having the same expectation and variance like the sum. This is mostly only based on simulations. We now present a result, which justifies this approximation: the suitably normalized sum converges in distribution to a lognormal distribution, when the variances/covariances of the summands tend to zero. We find that this is a special case of a result in Dufresne (2004) about the asymptotic distribution of continuous and discrete averages of geometric Brownian motions.

Relatively new is the idea to construct approximations to a sum distribution based on the concepts of comonotonicity and convex order. An upper convex bound for the sum distribution is given by the sum of the components of the well-known *upper Fréchet bound* for the vector of the summands. An improved upper bound was introduced by Kaas et al. (2000), while a lower bound goes back to Rogers und Shi (1995). Application of this bounds to sums of lognormally distributed random variables leads to easy computable upper and lower bounds for truncated first moments and tail-values-at-risk. Thus, this approach can be applied to many problems in insurance and finance.

In order to quantify the error when approximating the sum distribution by one of its convex order bounds, we construct an upper bound for the approximation error in terms of truncated first moments. One important feature of this upper bound, which is found on the basis of a geometric approach, is the following: the variance is the only characteristic of the sum distribution which is involved in its computation. The bound for the

error of the approximation by the upper convex bound yields a new lower bound for truncated first moments of the sum distribution. Similarly, the bound for the error of the approximation by the lower convex bound yields a new upper bound for them. We compare the latter with those obtained by Nielsen und Sandmann (2003). Our "geometrical" bound can (in contrast to the latter) be easily computed, as long as *any* lower convex bound (with known distribution) for the sum distribution is available. Additionally, it is for certain truncated first moments sharper than the Nielsen-Sandmann bound. We also discuss, how in the special situation of sums of lognormally distributed random variables the convex order bounds have to be chosen in order to minimize the approximation error in a specific sense.

At the end we consider as practical application a fund saving plan, where in each period the investment can be made in more than one stock. Unfortunately, the resulting final wealth is then no longer a sum of lognormally distributed random variables. However, we show that its summands can be assumed to be *approximately* lognormally distributed, justified by the above mentioned result about the asymptotic distribution of a normalized sum of lognormals. The quality of this approximation is very good, as we show by simulation in a specific setting. This quality carries over to the approximation of the final wealth. Furthermore, we compare all approximation methods for the final wealth (now assumed to be lognormally distributed) explained in this thesis. It turns out, that a convex combination of an upper and a lower convex bound having the same expectation and variance like the sum yields in many cases a very good approximation. The benefit of this approximation is that it allows at any time during the saving plan's duration an easy computation of relevant characteristics of the distribution of the final wealth.

# Anhang A

## Anhang zur Statistik

Seien im Folgenden  $X_1, \dots, X_N$  stets unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$ .

### Bemerkung A.1 (empirische Verteilungsfunktion)

$$\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(X_k), \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt *empirische Verteilungsfunktion* von  $X_1, \dots, X_N$ . Für Realisierungen  $x_i = X_i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\omega \in \Omega$ , heißt dann

$$\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(x_k), \quad x \in \mathbb{R},$$

die *empirische Verteilungsfunktion zu Beobachtungen*  $x_1, \dots, x_N$ .

Für gegebenes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Zufallsvariable  $N \cdot \widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(x)$  binomial-verteilt mit Parameterwerten  $N$  und  $F(x)$ ; insbesondere gilt

$$E(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(x)) = F(x), \quad \text{Var}(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(x)) = \frac{1}{N} F(x)(1 - F(x)).$$

Somit ist  $\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(x)$  ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für  $F(x)$ .

### Bemerkung A.2 (Kolmogorov-Abstand)

Sind  $G$  und  $H$  die Verteilungsfunktionen zweier reeller Zufallsvariablen, so heißt

$$d_K(G, H) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(x) - H(x)|$$

der *Kolmogorov-Abstand* von  $G$  und  $H$ .

Ist  $\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}$  die empirische Verteilungsfunktion von  $X_1, \dots, X_N$  und  $H$  eine stetige Verteilungsfunktion, so gilt

$$d_K(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}, H) = \max_{k=1, \dots, N} \left\{ |\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(X_k) - H(X_k)|, |\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}(X_k-) - H(X_k)| \right\},$$

sowie nach dem Satz von Glivenko-Cantelli

$$d_K(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}, F) \xrightarrow{P\text{-f.s.}} 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

### Bemerkung A.3 (Kolmogorov-Smirnov-Test)

Sei  $F$  unbekannt und  $F_0$  eine gegebene stetige Verteilungsfunktion. Ein  $\alpha$ -Niveau-Signifikanztest für das Testproblem

$$H_0 : F = F_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : F \neq F_0$$

ist gegeben durch

$$\varphi(X_1, \dots, X_N) = \mathbb{1}_{\{d_K(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}, F_0) > k_{N, 1-\alpha}\}},$$

wobei  $k_{N, 1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung von  $d_K(\widehat{F}_{X_1, \dots, X_N}, F_0)$  unter  $H_0$  ist. (Letztgenannte Verteilung hängt nicht von  $F_0$  ab; die Quantile  $k_{N, 1-\alpha}$  liegen deshalb in tabellierter Form vor.)

### Bemerkung A.4 (Konfidenzbereich/Konfidenzband für $F$ )

Ein  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für die Verteilungsfunktion  $F$  ist offenbar gegeben durch

$$\{G : G \text{ ist stetige Verteilungsfunktion mit } |\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N} - G| \leq k_{N, 1-\alpha}\}.$$

Dieser leitet sich unmittelbar aus dem Kolmogorov-Smirnov-Test ab, unter Beachtung der Äquivalenz

$$d_K(\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}, G) \leq k_{N, 1-\alpha} \iff |\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N} - G| \leq k_{N, 1-\alpha}.$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist der Wert der empirischen Verteilungsfunktion  $\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x)$  die Realisierung einer Zufallsvariable. Auf Basis dieser Realisierung können wir für großes  $N$  ein approximatives  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für  $F(x)$  angeben,

$$I(x) = \left\{ z \in [0, 1] : |\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x) - z| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x)(1 - \widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}(x))}{N}} \right\},$$

wobei  $u_\beta$  das  $\beta$ -Quantil von  $N(0, 1)$  bezeichnet,  $\beta \in (0, 1)$ . Wir bezeichnen die Menge  $\{(x, z) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : z \in I(x)\}$  als (approximatives)  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzband für  $F$ . Der Wortbestandteil *Konfidenz* ist hier offenbar punktweise zu verstehen.

**Bemerkung A.5 (empirische GEW-Funktion und deren Konfidenzband)**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ . Als Schätzer für den gestutzten Erwartungswert

$$\xi(t) = E[(X - t)^+], \quad t \in \mathbb{R},$$

betrachten wir den *empirischen gestutzten Erwartungswert*

$$\widehat{\xi}_{X_1, \dots, X_N}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - t)^+.$$

Offenbar gilt für die Varianz dieses erwartungstreuen Schätzers

$$\text{Var}(\widehat{\xi}_{X_1, \dots, X_N}(t)) = \frac{1}{N} \text{Var}[(X - t)^+],$$

und ein erwartungstreuer Schätzer für diese ist gegeben durch

$$K_{X_1, \dots, X_N}(t) = \frac{1}{N(N-1)} \left( \sum_{i=1}^N [(X_i - t)^+]^2 - N[\widehat{\xi}_{X_1, \dots, X_N}(t)]^2 \right).$$

Da  $\widehat{\xi}_{X_1, \dots, X_N}(t)$  (geeignet standardisiert) nach dem zentralen Grenzwertsatz asymptotisch (für großes  $N$ ) normalverteilt ist, erhalten wir auf der Basis von Realisierungen  $x_1, \dots, x_N$  der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_N$  ein approximatives  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\xi(t)$  gemäß

$$I(t) = \left[ \widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_N}(t) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{K_{x_1, \dots, x_N}(t)} \right].$$

Wir bezeichnen die Menge  $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in I(t)\}$  als (approximatives)  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzband für die Funktion  $\xi(t)$ .

# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

$1_M$	Indikatorfunktion der Menge $M$ . . . . .	11
$\alpha_i$	$i$ -ter Allokationsvektor, effizient gewählt . . . . .	104
$\beta_{xx}$	spezielle Wahlen für $\beta$ , $xx \in \{FA, GA, VM, LO\}$ . . . . .	69
$\Delta_{S^l}^{\text{NS}}$	obere Schranke für $\varrho(S, S^l)$ nach Nielsen-Sandmann . . . . .	55
$\delta_x$	Dirac-Maß, Einpunktverteilung im Punkt $x$ . . . . .	92
$\Delta_X$	obere Schranke für $\varrho(X, S)$ , wobei $X \leq_{cx} S$ . . . . .	36
$\mathcal{L}(\tau, \lambda^2)$	eindimensionale Lognormalverteilung . . . . .	22
$\lambda$	Lebesgue-Maß über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . . . . .	11
$\lambda_M$	auf $M$ eingeschränktes Lebesgue-Maß über $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . . . . .	92
$\leq_{cx}$	Äquivalenzrelation konvexe Halbordnung . . . . .	13
$\mathbb{R}^{n \times k}$	Menge aller reellen $(n \times k)$ -Matrizen . . . . .	23
$\mathcal{A}_l$	Menge der zulässigen $l$ -dimensionalen Allokationsvektoren . . . . .	104
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^n$	Borelsche $\sigma$ -Algebra über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
$\mathfrak{B}_W, \mathfrak{B}_W^n$	Borelsche Spur- $\sigma$ -Algebra über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Menge $W$ . . . . .	3
$\mathcal{L}(\tau, \Lambda)$	mehrdimensionale Lognormalverteilung . . . . .	23
$\nabla_Y$	obere Schranke für $\varrho(Y, S)$ , wobei $S \leq_{cx} Y$ . . . . .	36
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . . . . .	6
$\Phi$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ . . . . .	22
$\pi_i$	Projektionsabbildung auf die $i$ -te Komponente . . . . .	29
$\stackrel{d}{=}, \stackrel{d}{\rightarrow}$	Gleichheit bzw. Konvergenz in Verteilung . . . . .	5
$\xrightarrow{P\text{-f.s.}}$	$P$ -fast sichere Konvergenz . . . . .	90
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz . . . . .	94
$\text{L-TVaR}_\alpha(X)$	Lower-Tail-Value-at-Risk der Zufallsvariable $X$ zum Niveau $\alpha$ . . . . .	8
$\text{TVaR}_\alpha(X)$	Tail-Value-at-Risk der Zufallsvariable $X$ zum Niveau $\alpha$ . . . . .	7
$\text{IGa}(\alpha, \beta)$	Reziprok-Gammaverteilung . . . . .	88
$\text{LB}_{\overline{S}}$	untere Schranke für $E[(S - \cdot)^+]$ auf der Basis von $\nabla_{\overline{S}}$ . . . . .	49
$\text{supp } X$	Träger der Zufallsvariable $X$ . . . . .	15
$\text{UB}_{S^l}^{\text{NS}}$	obere Schranke für $E[(S - \cdot)^+]$ auf der Basis von $\Delta_{S^l}^{\text{NS}}$ . . . . .	56
$\text{UB}_{\underline{S}}$	obere Schranke für $E[(S - \cdot)^+]$ auf der Basis von $\Delta_{\underline{S}}$ . . . . .	49

$\underline{S}, \overline{S}$	untere bzw. obere konvexe Schranke für die Zufallsvariable $S$ . . . . .	27
$\varphi$	$\lambda$ -Dichte der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ . . . . .	67
$\varrho_t$	$\varrho_t$ -Abstand zweier Verteilungen oder Zufallsvariablen . . . . .	35
$\widehat{\xi}_X, \xi_{\widehat{X}}$	empirische GEW-Funktion der Zufallsvariable $X$ . . . . .	77
$\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}$	empirische Verteilungsfunktion zu $x_1, \dots, x_N$ . . . . .	114
$\widehat{S}$	Zufallsvariable mit Vtlgsfkt. $\widehat{F}_{x_1, \dots, x_N}$ , wobei $x_1, \dots, x_N$ Realisierungen v. $S$ sind	123
$\xi_X$	GEW-Funktion der Zufallsvariable $X$ . . . . .	77
$\zeta_i$	vorgegebene Standardabweichung für die $i$ -te Periodenrendite $R_i$ . . . . .	109
$d_K$	Kolmogorov-Abstand von Verteilung(sfunktion)en . . . . .	34
$e_k$	$k$ -ter Einheitsvektor . . . . .	107
$f'_-, f'_+$	links- bzw. rechtsseitige Ableitung der Funktion $f$ . . . . .	12
$f(t-)$	linksseitiger Grenzwert der Funktion $f$ im Punkt $t$ . . . . .	11
$f^+, f^-$	Positiv- bzw. Negativteil der Funktion $f$ . . . . .	8
$F_Q, F_X$	Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung $Q$ bzw. der Zufallsvariable $X$ .	5
$h_t, h_t^X$	eine Hilfsfunktion . . . . .	38
$I_n$	Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{n \times n}$ . . . . .	59
$id$	identische Abbildung . . . . .	35
$intM, convM$	Inneres bzw. konvexe Hülle der Menge $M$ . . . . .	16
$M_t$	bis zum Zeitpunkt $t$ integrierte (spezielle) geometrische Brownsche Bewegung . . . . .	88
$N(\tau, \Lambda)$	mehrdimensionale Normalverteilung . . . . .	23
$N(\tau, \lambda^2)$	eindimensionale Normalverteilung . . . . .	22
$P$ -f.s.	$P$ -fast sicher . . . . .	14
$P^X$	Verteilung der Zufallsvariable $X$ unter $P$ . . . . .	15
$q^p(X), F_X^-(p)$	größtes $p$ -Quantil der Zufallsvariable $X$ . . . . .	6
$q_p(X), F_X^{-1}(p)$	kleinstes $p$ -Quantil der Zufallsvariable $X$ . . . . .	6
$q_t$	eine Hilfsfunktion . . . . .	38
$R_i, \widetilde{R}_i$	$i$ -te Periodenrendite, $i$ -ter Grundfonds-Renditevektor . . . . .	104
$r_i, r_i(\beta)$	. . . . .	60
$R_i^*$	$i$ -te Periodenrendite im Ersatzmodell, lognormalverteilt . . . . .	106
$R_{0,1}$	stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ . . . . .	8
$S^c$	komonotone obere Schranke für die Zufallsvariable $S$ . . . . .	28
$S^l(\beta)$	untere konvexe Schranke für eine Summe $S$ lognormalverteilter Zufallsvariablen . . . . .	60
$S^l, S^l(Z)$	untere Schranke für $S$ . . . . .	32
$S^m$	spezielle Konvexkombination von $P^{\underline{S}}$ und $P^{\overline{S}}$ . . . . .	36
$S^u, S^u(Z)$	schärfere obere Schranke für $S$ . . . . .	31
$S^u(\beta)$	schärfere obere konv. Schranke f. eine Summe $S$ lognormalverteilter Zufallsvariablen	61
$S_n$	Fondsvermögen am Ende der $n$ -ten Periode . . . . .	104

$S_n^*$	Fondsvermögen am Ende der $n$ -ten Periode im Ersatzmodell . . . . .	107
$W_s$	Standard-Wienerprozess . . . . .	25
$X_p$	(spezielles) diskretes/stetiges Mittel von geometrischen Brownschen Bewegungen . .	92
$Z_{xx}$	spezielle Wahl $Z_{xx} = \beta_{xx}^\top Y$ für $Z, xx \in \{FA, GA, VM, LO\}$ . . . . .	69

# Literaturverzeichnis

- Ahcan, A., Darkiewicz, G., Goovaerts, M. und Hoedemakers, T. (2006), 'Computation of convex bounds for present value functions with random payments', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **186**, 23–42.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. und Heath, D. (1999), 'Coherent measures of risk', *Mathematical Finance* **9**, 203–228.
- Barakat, R. (1976), 'Sums of independent lognormally distributed random variables', *Journal of the Optical Society of America* **66**, 211–216.
- Barouch, E., Kaufman, G. und Glasser, M. (1986), 'On sums of lognormal random variables', *Studies in Applied Mathematics* **75**, 37–55.
- Bauer, H. (1991), *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Berlin.
- Comtet, A., Monthus, C. und Yor, M. (1998), 'Exponential functionals of brownian motion and disordered systems', *Journal of Applied Probability* **35**, 255–271.
- Deelstra, G., Diallo, I. und Vanmaele, M. (2006), 'Bounds for asian basket options', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **akzeptiert**.
- Deelstra, G., Liinev, J. und Vanmaele, M. (2004), 'Pricing of arithmetic basket options by conditioning', *Insurance: Mathematics and Economics* **34**, 55–77.
- Denneberg, D. (1994), *Non-additive measure and integral*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R. und Vyncke, D. (2002a), 'The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory', *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 3–33.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R. und Vyncke, D. (2002b), 'The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory', *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 133–161.

- Dhaene, J. und Goovaerts, M. (1996), ‘Dependency of risks and stop-loss order’, *ASTIN Bulletin* **26**, 201–212.
- Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M., Kaas, R. und Vyncke, D. (2005), ‘Comonotonic approximations for optimal portfolio selection problems’, *Journal of Risk and Insurance* **72**, 253–300.
- Dufresne, D. (1990), ‘The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding’, *Scandinavian Actuarial Journal* **9**, 39–79.
- Dufresne, D. (2004), ‘The log-normal approximation in financial and other applications’, *Advances in Applied Probability* **36**, 747–773.
- Hamdan, M. (1971), ‘The logarithm of the sum of two correlated log-normal variates’, *Journal of the American Statistical Association* **66**, 105–106.
- Hoedemakers, T., Darkiewicz, G., Deelstra, G., Dhaene, J. und Vanmaele, M. (2005), ‘Bounds for stop-loss premiums of stochastic sums (with applications to life contingencies)’, *under review* .
- Hoedemakers, T., Darkiewicz, G. und Goovaerts, M. (2005), ‘Applications for life annuity contracts in a stochastic environment’, *Insurance: Mathematics and Economics* **37**, 239–269.
- Janos, W. (1970), ‘Tail of the distribution of sums of log-normal variates’, *IEEE Transactions on Information Theory* **16**, 299–302.
- Kaas, R., Dhaene, J. und Goovaerts, M. (2000), ‘Upper and lower bounds for sums of random variables’, *Insurance: Mathematics and Economics* **27**, 151–168.
- Lord, R. (2006), ‘Partially exact and bounded approximations for arithmetic asian options’, *Journal of Computational Finance* p. forthcoming.
- Mahmoud, M. und Oada, A. (1973), ‘The approximate distributions for the sum of equi-correlated lognormal variates’, *Mathematische Operationsforschung und Statistik* **4**, 229–242.
- Milevsky, M. und Posner, S. (1998), ‘Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution’, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **33**, 409–422.
- Müller, A. (1997), ‘Stop-loss order for portfolios of dependent risks’, *Insurance: Mathematics and Economics* **21**, 219–223.

- Müller, A. und Stoyan, D. (2002), *Comparison methods for stochastic models and risks*, Wiley, Chicester.
- Naus, J. (1969), 'The distribution of the logarithm of the sum of two log-normal variates', *Journal of the American Statistical Association* **64**, 655–659.
- Nielsen, J. und Sandmann, K. (2003), 'Pricing bounds on asian options', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **38**, 449–473.
- Roberts, A. und Varberg, D. (1973), *Convex functions*, Academic Press, London.
- Rogers, L. und Shi, Z. (1995), 'The value of an asian option', *Journal of Applied Probability* **32**, 1077–1088.
- Rüschendorf, L. (1983), 'Solution of statistical optimization problem by rearrangement methods', *Metrika* **30**, 55–61.
- Shaked, M. und Shantikumar, J. (1994), *Stochastic orders and their applications.*, Academic Press, London.
- Slimane, S. (2001), 'Bounds on the distribution of a sum of independent lognormal random variables', *IEEE Transactions on Communications* **49**, 975–978.
- Vanduffel, S., Chen, X., Dhaene, J., Goovaerts, M., Henrard, L. und Kaas, R. (2006), 'A note on optimal lower bound approximations for risk measures of sums of lognormals', *working paper KU Leuven* .
- Vanduffel, S., Dhaene, J. und Goovaerts, J. (2005), 'On the evaluation of 'saving-consumption' plans', *Journal of Pension Economics and Finance* **4**, 17–30.
- Vanduffel, S., Hoedemakers, T. und Dhaene, J. (2005), 'Comparing approximations for risk measures of sums of non-independent lognormal random variables', *North American Actuarial Journal* **9**, 71–82.
- Vanmaele, M., Deelstra, G., Liinev, J., Dhaene, J. und Goovaerts, M. (2006), 'Bounds for the price of discrete arithmetic asian options', *Journal of Computational and Applied Mathematics* **185**, 51–90.
- Vyncke, D., Goovaerts, M. und Dhaene, J. (2004), 'An accurate analytical approximation for the price of a european-style arithmetic asian option', *Advances in Applied Probability* **36**, 747–773.