

# Modellbildung und Untersuchung eines magnetisch gelagerten Rundtisches

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieurin / Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Olaf Petzold

geb. am 03.04.1969 in Magdeburg

genehmigt durch die Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Frank Palis  
Prof. Dr.-Ing. Jürgen Meins  
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Gabbert

Promotionskolloquium am 19.10.2006



### Schriftliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe einer kommerziellen Promotionsberatung in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes auch noch nicht veröffentlicht.

Magdeburg, den 11. Dezember 2006



# Vorwort

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war die Anfrage eines Industrieunternehmens, das sich durch den Einsatz der Magnetschwebe- und Direktantriebstechnik im Werkzeugmaschinenbereich neue Alleinstellungsmerkmale und Marktchancen erhofft. Daraus entwickelte sich ein Industrieprojekt unter Beteiligung lokaler Unternehmen, das mir die Möglichkeit zur Durchführung wissenschaftlicher Untersuchungen eröffnete, welches die Grundlage für meine Dissertation bildete.

Das Zustandekommen eines solchen umfassenden Projektes ist ohne den Zuspruch, den Ideen und Inspirationen anderer Menschen kaum möglich. Ich möchte mich auf diesem Wege bei Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Frank Palis, Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Ulrich Gabbert und Prof. Dr.-Ing. Roland Kasper für ihre Unterstützung und Förderung meiner Arbeit bedanken.

Auch Prof. Dr.-Ing. Jürgen Meins von der TU Braunschweig und Dr.-Ing. Klaus Riemekasten der Universität Magdeburg gilt mein Dank für die vielen Stunden fachlich konstruktiver Diskussionen und Hinweise.

Ebenfalls möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Thomas Schallschmidt, Dipl.-Ing. Janko Wuchatsch und M. Sc. Tamara Nestorovic für ihre tatkräftige Unterstützung der Arbeiten am Rundtisch bedanken; Dank gebührt auch Dr.-Ing. Gerald Schmidt für die Unterstützung bei den Modalanalysen.

Auf diesem Weg möchte ich auch ganz besonders meinen Eltern und meiner Verlobten Manuela danken. Durch ihre großzügige Unterstützung und ihrer Anteilnahme an den Höhen und Tiefen meines bisherigen Berufslebens und des Projektes Magnetschwebetechnik haben sie entscheidend zur Fertigstellung der vorliegenden Arbeit beigetragen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>XVII</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Aufgabe und Ziel . . . . .	2
1.2 Aufbau und Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1 Konventionelle Technik . . . . .	7
2.2 Magnetlager . . . . .	9
2.3 Magnetführungen . . . . .	16
<b>3 Konzept und Modellbildung</b>	<b>23</b>
3.1 Konzept des Rundtisches . . . . .	23
3.2 Aufbau des Rundtisches . . . . .	24
3.3 Modellbildung . . . . .	26
3.3.1 Das Prinzip der Entkoppelung der Freiheitsgrade . . . . .	28
3.3.2 Prinzip der Koppelung . . . . .	30
3.4 Bestimmung der JACOBI-Matrizen . . . . .	32
3.4.1 Bestimmung der Sensormatrix . . . . .	32
3.4.2 Bestimmung der JACOBI-Matrix für die Aktoren . . . . .	34
3.5 Modell der Regelstrecke . . . . .	37
3.6 Erweitertes Modell der Regelstrecke . . . . .	39
3.7 Identifikation der Massenmatrix . . . . .	42
3.8 Anforderungsmodell der Aktoren . . . . .	48
3.8.1 Bestimmung dynamischer Kräfte . . . . .	48
3.8.2 Bestimmung statischer Kräfte . . . . .	49
3.9 Analytisches Modell der Magnetaktoren . . . . .	53
3.9.1 Prinzipieller Aufbau eines Hybrid- bzw. polarisierten Elektromagneten . . . . .	54
3.9.2 Luftspaltenergie . . . . .	55
3.9.3 Statische Auslegung . . . . .	59
3.9.4 Dynamische Auslegung . . . . .	63
3.9.5 Elektro- vs. Hybridmagnet . . . . .	68

<b>4</b>	<b>Mehrgrößenregelung des Rundtisches</b>	<b>71</b>
4.1	Prinzip der entkoppelten Zustandsregelung . . . . .	71
4.2	Störgrößenbeobachter . . . . .	74
4.3	Störgrößenbeobachter mit Messvektor . . . . .	77
4.4	Auslegung des Zustandsreglers . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Realisierung und experimentelle Verifikation</b>	<b>81</b>
5.1	Komponenten des Rundtisches . . . . .	81
5.1.1	Wirbelstromsensoren . . . . .	81
5.1.2	Winkelmesssystem . . . . .	82
5.1.3	Magnetaktoren . . . . .	83
5.1.4	Direktantrieb . . . . .	85
5.1.5	Leistungsverstärker . . . . .	86
5.1.6	Implementation der Zustandsregelung . . . . .	88
5.1.7	Der Rundtisch . . . . .	90
5.2	Ergebnis der statischen und dynamischen Messungen . . . . .	92
5.2.1	Allgemeiner Betrieb . . . . .	92
5.2.2	Analyse der Messbedingungen . . . . .	93
5.2.3	Schwebe in Ruhe . . . . .	94
5.2.4	Führungsverhalten . . . . .	95
5.2.5	Störverhalten . . . . .	96
5.2.6	Aufspannplatte . . . . .	99
5.2.7	Identifikation der Massenmatrix . . . . .	100
5.3	Auswertung . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>105</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	105
6.2	Weiterführende Arbeiten . . . . .	108
	<b>Anhang</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Rundtisch</b>	<b>111</b>
A.1	Parameter . . . . .	111
A.2	Gehäuse . . . . .	113
A.3	Aufspannplatte . . . . .	114
A.4	Führungsverhalten . . . . .	116
A.5	Störverhalten . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Mehrkörpersystem</b>	<b>125</b>
B.1	Einleitung . . . . .	125
B.2	Bewegungsgleichung eines starren Körpers . . . . .	125
B.3	Kinematik des starren Körpers . . . . .	127
B.3.1	Lage . . . . .	128
B.3.2	Geschwindigkeit . . . . .	130
B.3.3	Beschleunigung . . . . .	133
B.4	Kinetik des starren Körpers . . . . .	135
B.5	Kinetik nach der NEWTON-EULER-Methode . . . . .	135

B.5.1	Impulssatz bzw. Schwerpunktsatz . . . . .	136
B.5.2	Drall- bzw. Drehimpuls . . . . .	138
B.5.3	Trägheitstensor . . . . .	139
B.5.4	Drallsatz bzw. Momentensatz . . . . .	144
B.5.5	Massenmatrix . . . . .	147
B.5.6	Gyroskopische Matrix . . . . .	149
<b>C</b>	<b>MOORE-PENROSE-Inverse</b>	<b>151</b>
C.1	Definition der MOORE-PENROSE Inverse . . . . .	151
C.2	Eigenschaften der MOORE-PENROSE Inverse . . . . .	152
C.3	MOORE-PENROSE Inverse einiger spezieller Matrizen . . . . .	152
C.4	Berechnung der MOORE-PENROSE Inverse . . . . .	153
<b>D</b>	<b>Das Pseudo-Rausch-Binär-Signal</b>	<b>155</b>
<b>E</b>	<b>Industrie-Anforderung</b>	<b>157</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>159</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Konventionelles Axial-Radiallager . . . . .	6
2.2	Magnetlager der Firma MECOS Traxler AG . . . . .	9
	(a) Turbomolekularpumpe für CO <sub>2</sub> -Laser . . . . .	9
	(b) Vakuumpumpe für die Halbleiterindustrie . . . . .	9
2.3	Magnetlager der Firma Revolve Magnetic Bearing Inc. (SKF) . . . . .	10
	(a) Radiallager . . . . .	10
	(b) Hyperspin Serie . . . . .	10
	(c) Magnetlager Controller . . . . .	10
2.4	23 MW Gaskompressor der Firma Waukesha . . . . .	11
2.5	Reifenprüfstand . . . . .	12
2.6	HeartMate der Firma LEViTRONIX . . . . .	13
	(a) Elektromagnetische Pumpe HeartMate . . . . .	13
	(b) HeartMate im Körper . . . . .	13
2.7	Transrapid TR08 . . . . .	17
2.8	Förderfahrzeug mit Hybridmagneten (RWTH Aachen) . . . . .	18
2.9	Magnetführung der TU Hannover . . . . .	20
2.10	Werkzeugmaschine mit magnetisch gelagerter z-Achse (TU Hannover) . . . . .	21
2.11	Linearführung an der RWTH Aachen . . . . .	22
3.1	CAD-Modell des Rundtisches . . . . .	25
3.2	Sensoranordnung am Rundtisch . . . . .	32
3.3	Aktoranordnung am Rundtisch . . . . .	35
	(a) Frontsicht . . . . .	35
	(b) Draufsicht . . . . .	35
3.4	Regelstrecke Mehrfreiheitsgrad Magnetlager . . . . .	39
3.5	Erweiterte Regelstrecke . . . . .	43
3.6	PRBS Signalfolge und Phasenverschiebung . . . . .	45
3.7	Prinzipieller Ansatz zur Schätzung der inversen Massenmatrix . . . . .	46
3.8	Kraft-Zeit-Diagramm eines Einzahnfräsers, [Mös97] . . . . .	49
3.9	Steifigkeit-Frequenzgang . . . . .	50
3.10	Definition der Kräfte und Hebel des 8-Punkt Lagers am Rundtisch . . . . .	51
	(a) Lagerdefinition Front . . . . .	51
	(b) Lagerdefinition Draufsicht . . . . .	51
3.11	Histogramm Lagerreaktionskräfte . . . . .	52
3.12	Definition der Flächen zur Kraftberechnung eines EI-Elektromagneten . . . . .	54
3.13	Magnetischer Kreis eines Hybridmagneten . . . . .	56
3.14	Feldverteilung innerhalb des Hybridmagneten . . . . .	58
	(a) Strom $i_A = -30$ A . . . . .	58

(b) Strom $i_A = +30$ A . . . . .	58
3.15 Kraft-Weg-Faktor . . . . .	59
(a) Federkraft . . . . .	59
(b) Magnetkraft bei $i = \text{konst.}$ . . . . .	59
3.16 Hybridmagnete in Differentialanordnung . . . . .	62
3.17 Dynamisches Modell eines Magnetaktors . . . . .	63
3.18 Normierte $\frac{dF}{d\Theta}$ Kennlinie eines Hybridmagneten . . . . .	67
3.19 Normierte $\frac{dF}{d\Theta}$ Kennlinie eines Elektromagneten . . . . .	69
4.1 Prinzip Freiheitsgradregelung . . . . .	71
4.2 Einfache Lageregelung eines Mehrfreiheitsgrad-Magnetlagers . . . . .	72
4.3 Zustandsregler mit Beobachter zur Freiheitsgrad-Regelung . . . . .	74
4.4 Zeitkontinuierlicher Störgrößenbeobachter für die Rotation . . . . .	75
4.5 Mehrgrößenregelung mit Kreiselterme . . . . .	76
4.6 Störgrößenbeobachter für die Rotation mit Beschleunigungsmessung . . . . .	77
4.7 Zustandsregler zur Freiheitsgradregelung mit Beschleunigungsmessung . . . . .	78
5.1 Wirbelstromsensormesssystem der Firma vibro-meter . . . . .	81
(a) Sensor-Kopf . . . . .	81
(b) Oszillator mit Verstärker . . . . .	81
5.2 RON 886 . . . . .	82
5.3 Axialer Magnetaktor . . . . .	83
5.4 Radialer Magnetaktor . . . . .	83
5.5 Gemessene und gemittelte Kennlinie eines Hybridmagneten . . . . .	84
5.6 CAD-Modell des Rundtisches mit Magnetaktoren . . . . .	85
5.7 Torque-Motor CAD-Modell mit Partialschnitt . . . . .	86
5.8 Stromsteller der Firma INDRAMAT . . . . .	87
(a) SMVE 2430 . . . . .	87
(b) SMVE 2430 im Rack . . . . .	87
5.9 Bode Diagramm des geschlossenen Regelkreises . . . . .	89
5.10 Realisierter Rundtisch . . . . .	91
5.11 Modalanalyse Gehäuse, 1. Eigenform . . . . .	92
5.12 Lagerung des Rundtisches . . . . .	93
5.13 Starrkörperschwingung des Rundtisches . . . . .	93
5.14 Sensorrauschen . . . . .	94
5.15 FFT des Sensorrauschens . . . . .	94
5.16 Sollwertsprung um $100 \mu\text{m}$ der $y$ -Achse . . . . .	96
5.17 Stör-Sprungantwort der $\phi_y$ -Achse . . . . .	97
5.18 Freiheitsgrade mit Schwingungen in der Aufspannplatte . . . . .	99
5.19 FFT der Freiheitsgrade . . . . .	99
5.20 Prinzip der Realisierung der Aufspannplatte . . . . .	100
5.21 1. Eigenform der verspannten Aufspannplatte ( $f=582,31$ kHz) . . . . .	100
A.1 Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 1 bei 736,92 Hz . . . . .	113
A.2 Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 2 bei 957,95 Hz . . . . .	113
A.3 Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 3 bei 1138,99 Hz . . . . .	113

A.4	Aufspannplatte des Rundtisches . . . . .	114
A.5	Detail der Knotenbleche an der Aufspannplatte . . . . .	114
A.6	Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 1 bei 582,31 Hz . . . . .	115
A.7	Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 2 bei 625,46 Hz . . . . .	115
A.8	Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 3 bei 905,72 Hz . . . . .	115
A.9	Sollwertsprung um 100" um die $\phi_x$ -Achse . . . . .	116
A.10	Sollwertsprung um 100" um die $\phi_y$ -Achse . . . . .	116
A.11	Sollwertsprung um 100 $\mu\text{m}$ der $x$ -Achse . . . . .	117
A.12	Sollwertsprung um 100 $\mu\text{m}$ der $y$ -Achse . . . . .	117
A.13	Sollwertsprung um 100 $\mu\text{m}$ der $z$ -Achse . . . . .	118
A.14	FFT Sollwertsprung Abbildung A.9 ( $\phi_x$ -Achse) . . . . .	118
A.15	FFT Sollwertsprung Abbildung A.10 ( $\phi_y$ -Achse) . . . . .	119
A.16	FFT Sollwertsprung Abbildung A.11 ( $x$ -Achse) . . . . .	119
A.17	FFT Sollwertsprung Abbildung A.12 ( $y$ -Achse) . . . . .	120
A.18	FFT Sollwertsprung Abbildung A.13 ( $z$ -Achse) . . . . .	120
A.19	Störgrößensprungantwort der $\phi_x$ -Achse . . . . .	121
A.20	Störgrößensprungantwort der $\phi_y$ -Achse . . . . .	121
A.21	Störgrößensprungantwort der $z$ -Achse . . . . .	122
A.22	FFT der Störgrößensprungantwort Abbildung A.19 ( $\phi_x$ -Achse) . . . . .	122
A.23	FFT der Störgrößensprungantwort Abbildung A.20 ( $\phi_y$ -Achse) . . . . .	123
A.24	FFT der Störgrößensprungantwort Abbildung A.21 ( $z$ -Achse) . . . . .	123
B.1	[Bezugssystem mit körperfester Referenz . . . . .	127
B.2	Drehung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems . . . . .	129
B.3	Bezugsvektor, Schwerpunktvektor und Vektor zu einem Massenelement . . . . .	136
B.4	Transformation durch Drehung des Koordinatensystems . . . . .	141
D.1	5-Bit rückgekoppeltes Schieberegister . . . . .	156
D.2	PRBS Signal und AKF eines 5-stufigen Schieberegisters . . . . .	156
	(a) PRBS Signal . . . . .	156
	(b) Autokorrelationsfunktion . . . . .	156
E.1	Anfrage eines Industrieunternehmens . . . . .	158



# Tabellenverzeichnis

3.1	Statische und dynamische Aktoranforderungen . . . . .	53
5.1	Verbesserungen durch Störgrößenbeobachter . . . . .	90
5.2	Geschätzte Parameter der Massenmatrix ohne Aufspannplatte und nach Angaben des CAD Systems gemäß Tabelle A.1 . . . . .	101
A.1	Parameter der Massenmatrix . . . . .	111
A.2	Parameter Sekundärteil Torquemotor . . . . .	111
A.3	Auszug über Axial- und Radialkraft des Torque-Motors, [ETE01] . . . . .	111
A.4	Geometrische Parameter des Rundtisches . . . . .	112
A.5	Parameter des Reglers . . . . .	112



# Nomenklatur

$\mathbf{0}$	Nullmatrix	$\Delta\delta_Z$	Vektor der Änderung der Störkraftauslenkungen
$A$	Systemmatrix	$\delta_0$	Aktorluftspalt im Arbeitspunkt
$A$	Fläche (allg.)	$\delta_{A_i}$	Luftspalt des Aktor $i$
$A_{Fe}$	Polschuhfläche des Magneten	$\delta_A$	Aktorluftspalt
$A_i$	Aktor $i$	$\dot{\delta}_A$	Aktorluftspaltgeschwindigkeit
$A_{Mgnt}$	Gesamtfläche des Magneten	$D$	Dämpfungsmatrix (allg.)
$A_{Pm}$	Fläche Permanentmagnet	$\Delta F$	Kraftänderung
$B$	Steuermatrix	$\frac{dF}{dr}$	Kraftanstieg
$B$	Magnetische Flussdichte	$\hat{e}$	Beobachterfehler
$B_L$	Magnetische Flussdichte im Luftspalt	$e_{\ddot{q}}$	Schätzfehler Beschleunigung
$B$	Körperfester Bezugspunkt ("Base Point")	$e_Q$	Schätzfehler Kraft
$C$	Ausgangsmatrix	$F$	Steifigkeitsmatrix (allg.)
$C$	Schwerpunkt ("Center of Mass")	$F$	Kraftvektor
$c_{SA}$	axialer Kraft-Weg-Faktor des Torque Motors	$F$	Kraft (allg.)
$c_{SR}$	radialer Kraft-Weg-Faktor des Torque Motors	$f$	Anzahl der Freiheitsgrade
$\Delta\delta_{A_i}$	Änderung des Aktorluftspaltes $i$	$F_0$	Kraft im Arbeitspunkt
$\Delta\delta_{Z_i}$	Änderung der Auslenkung bez. $i$ -ten Störkraft	$F_N$	Normalkraft
		$F_{A_i}$	Kraft eines $i$ -ten Aktors
		$F_{A_{Soll}}$	Aktor Sollkraft
		$F_A$	Aktorkraft
		$F_G$	Gewichtskraft
		$F_{M_i}$	Kraft eines $i$ -ten Magneten
		$F_{max}$	Maximalkraft
		$F_O$	Kraft oberer Magnet
		$F_U$	Kraft unterer Magnet

## Nomenklatur

$F_Z$	Störkraft	$\mathcal{K}_2$	Koordinatensystem 2
$F$	Kreiselmatrix (allg.)	$k_i$	Kraft-Strom-Vektor der magn. Aktoren
$G_B$	Kreiselmatrix bez. $B$	$k_i$	Kraft-Strom-Faktor eines magn. Aktors
${}^0G_B$	Kreiselmatrix im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$	$k_s$	Kraft-Weg-Vektor der magn. Aktoren
$h$	Rückführungsvektor Beobachter	$k_s$	Kraft-Weg-Faktor eines magn. Aktors
$k$	Rückführungsvektor Zustandsregler	$\lambda$	Haltefaktor für das PRBS Signal
$H$	Magnetische Feldstärke	$L$	Beobachtermatrix
$h_{TqM}$	Abstand Kraftangriff Torque Motor zu $B$	$L$	Drallvektor (allg.)
$h_{Zm}$	Abstand radiale Magnetaktoren des Magnetlagers	$L$	Induktivität (allg.)
$\ddot{q}_{B_{Soll}}$	Vektor Sollbeschleunigung	$l_i$	$i$ -te wegabhängiger Hebel
$I$	Einheitsmatrix	$L_{EMag}$	Induktivität Elektromagnet
$i$	Strom (allg.)	$l_{Fe}$	Mittlere Länge der Feldlinien im Eisen
$i_0$	Strom im Arbeitspunkt	$L_{HMag}$	Induktivität Hybridmagnet
$i_{A_{Soll}}$	Aktor Sollstrom	$l_{Pm}$	Stärke Permanentmagnet
$i_A$	Aktorstrom	$\check{M}$	geschätzte Massenmatrix
$i_{max}$	Maximalstrom	$M$	Massenmatrix (allg.)
$J$	JACOBI-Matrix (allg.)	$M_B$	Massenmatrix bez. $B$
$J_{AB}$	Aktor JACOBI-Matrix bez. $B$	$\mu_0$	Absolute Permeabilität
$J_B$	Trägheitstensor bez. $B$	$\mu_r$	Relative Permeabilität
$J_{SB}$	Sensor JACOBI-Matrix bez. $B$	$\mu_{Fe}$	Permeabilität Eisen
$J_{ZB}$	JACOBI-Matrix der Störkräfte bez. $B$	$\mu_{Pm}$	Permeabilität Permanentmagnet
$\mathcal{K}_0$	Stator-Koordinatensystem	${}^0M_B$	Massenmatrix im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$
$\mathcal{K}_1$	Rotor-Koordinatensystem		

$M$	Momentenvektor	$r_B$	Vektor translatorischer Freiheitsgrade bez. $B$
$m$	Masse (allg.)	$\Psi$	Verketteter magnetischer Fluss
${}^0N_B$	Matrix der nichtkonservativen Kräfte im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$	${}^0\hat{\psi}_B$	Fiktiver, beobachteter Geschwindigkeitsvektor im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$
$n_{A_a}$	Anzahl der axialen Aktoren	$\hat{\psi}_B$	Fiktiver, beobachteter Geschwindigkeitsvektor
$n_{A_r}$	Anzahl der radialen Aktoren	$\ddot{q}_{B_{Ist}}$	Ist-Beschleunigungsvektor bez. Bezugssystem $B$
$n_A$	Anzahl Aktoren (allg.)	$\ddot{q}_B$	Beschleunigung bez. $B$
$n_{LFSB}$	Anzahl der Schieberegister	$\dot{q}_B$	Geschwindigkeit bez. $B$
$\tilde{\omega}$	Tilde Operator der Winkelbeschleunigung	$Q_b$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\omega$	Kreisfrequenz	$Q_s$	Steuerbarkeitsmatrix
$\tilde{\omega}$	Tilde Operator	${}^0Q_B$	Vektor verallg. Kräfte und Momente im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$
$p_{Id}$	Periode Identifikation	${}^0q_B$	Verschiebung im Statorkoordinatensystem $\mathcal{K}_0$
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$Q$	Kraft- und Momentenvektor (allg.)
$\phi$	Winkel (allg.)	$q$	Verschiebung (allg.)
$\hat{\phi}_x$	beobachtete Geschwindigkeit	$q_{B_{Ist}}$	Ist-Sensorvektor bez. Bezugssystem $B$
$\phi_z$	Freiheitsgrad, Koordinate, bzw. Winkel	$Q_B$	Vektor verallg. Kräfte und Momente bez. $B$
$\hat{\phi}_y$	beobachtete Geschwindigkeit	$q_B$	Verschiebung bez. $B$
$\phi_x$	Freiheitsgrad, Koordinate bzw. Winkel	$\tilde{q}_B$	geschätzter Vektor der verallg. Beschleunigung
$\hat{\phi}_z$	beobachtete Beschleunigung	$\tilde{Q}_B$	geschätzter Vektor der verallg. Kräfte und Momente
$\hat{\phi}_z$	beobachtete Geschwindigkeit	$\ddot{r}_C$	Beschleunigung Schwerpunktsvektor im Inertialsystem
$\phi_{z_{Ist}}$	aktuelle Winkellage Hauptachse $z$		
$\phi_z$	Freiheitsgrad, Koordinate bzw. Winkel		
$\phi_B$	Vektor rotativer Freiheitsgrade bez. $B$		

## Nomenklatur

$\dot{r}_C$	Geschwindigkeit Schwerpunktvektor im Inertialsystem	$TCP$	Werkzeugposition ("Tool Center Point")
$r_{BC}$	Schwerpunktvektor bez. $B$	$i$	Spannung (allg.)
$r_C$	Schwerpunktvektor im Inertialsystem	$u_A$	Spannung über Aktor
$R$	Widerstand (allg.)	$u_{KI}$	Klemmspannung
$r_{Tm}$	Radius axiale Magnetaktoren des Magnetlagers	$u_L$	Spannung über Spule
$r_S$	Sensorradius	$V_L$	Luftspaltvolumen
$\delta_{S_1} - \delta_{S_6}$	Sensorspalte	$\Delta W$	Energieänderung
$\delta_S$	Sensorvektor	$w$	Sollwert Vektor
$\Theta_{El}$	elektrische Durchflutung	$w$	Windungszahl
$\Theta_{Ges}$	Gesamtdurchflutung	$W_L$	Magnetische Luftspaltenergie
$\Theta_{Pm}$	Permanentmagnetische Durchflutung	$x$	Freiheitsgrad, Koordinate bzw. Verschiebung
${}^{01}T^1$	Transformationsmatrix vom System $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_0$ bezogen auf System $\mathcal{K}_1$	$\xi_{B_{Soll}}$	Test Signal Sollwert-Vektor
${}^{01}T$	Transformationsmatrix vom System $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_0$	$\xi_B$	Test Signal Vektor
$t$	Zeit (allg.)	$y$	Freiheitsgrad, Koordinate bzw. Verschiebung
$t_R$	Zykluszeit des Regelalgorithmus	$y_{Z_i}$	$y$ Koordinate der $i$ -ten Störkraft
$t_{Id}$	Identifikationsdauer	$z$	Freiheitsgrad, Koordinate bzw. Verschiebung
$t_{PRBS}$	Zykluszeit des PRBS Signals	$z_{Z_i}$	$z$ Koordinate der $i$ -ten Störkraft

# Kurzfassung

Das Ziel dieser Abhandlung ist die Erarbeitung theoretischer Grundlagen für einen magnetisch gelagerten Rundtisch für den primären Einsatz im Werkzeugmaschinenbau. Weiterhin ist der praktische Nachweis anhand eines Prototypen zu erbringen.

Schwerpunkt der Arbeit ist die Modellbildung und Erprobung eines regelungstechnischen Konzepts, das auch bei variabler Beladung mit Werkstücken den Anforderungen im Werkzeugmaschinenbau genügt, insbesondere den daraus resultierenden Parameterschwankungen der Regelstrecke. Zur Lösung der gestellten Anforderungen wird der Einsatz einer vollständigen Beobachterlösung vorgeschlagen. Zur Umsetzung dieser Strategie wird ein Beobachter eingesetzt, der sich darüber hinaus noch durch ein reduziertes Messwertrauschen auszeichnet. Durch die Einführung des Wegintegrals als zusätzliche Zustandsgröße kann die notwendige stationäre Genauigkeit erreicht werden. Zur Bestimmung der jeweils aktuellen Masse auf dem Rundtisch und der Lage des resultierenden Schwerpunktvektors werden Parameteridentifikationsverfahren eingesetzt, die die Grundlage für die untersuchte adaptive Positionsregelung bilden.

Es werden in der vorliegenden Arbeit die Rückwirkungen des Direktantriebes auf das Magnetlager in die Betrachtungen einbezogen. Aufgrund der breiten Verfügbarkeit handelsüblicher Servo-Umrichter wird eine autonome und kommerziell verfügbare Lösung eingesetzt und somit auf die Regelung des Antriebes der Hauptachse nicht weiter eingegangen.

In der Zusammenfassung werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit dargestellt, die erkannten Probleme diskutiert und ein Ausblick auf die Lösung noch offener Fragen gegeben.



# Abstract

The goal of this underlying thesis is to work out the theoretical basics for a round table based on active magnetic bearing technology for use in machine tools and the experimental verification based on a prototype.

The main of this work is focused to the modelling and testing of a concept of this round table. The concept has to meet the requirements of variable loads, especially concerning the varying erratic fluctuations of the parameters of the plant.

As a solution for the staged requirements the use of a full state observer design is suggested. For the implementation of these policy an observer is used which features a reduced measurement noise. By introducing the integral of the distances as an additional state variable the required accuracy of the steady-state is satisfied. For the identification of the mass actually used on the round table and the determination of there center of mass techniques of parameter identifications are used. These techniques build the base of the analysed adaptive control.

Due to the availability of marketable servo drives there was chosen an autonomous and commercially available solution. That is why it is no defer to work out controlling the rotational axis. Only the retroactively of the direct drive upon the active magnetic bearing will be defer.

In the summarization of this work all the essential results will be presented, discerned problems discussed and it will be given an outlook of solutions for open questions.



# 1 Einführung

Magnetlager gewinnen im heutigen Prozess der Automatisierung industrieller Prozesse immer weiter an Bedeutung. Ihr Einsatzgebiet befindet sich meist dort, wo die konventionelle Lagertechnik an ihre Grenzen stößt, z. B. aufgrund von Lagerreibung oder Einschränkungen hinsichtlich des Einsatzes von Schmiermitteln.

Im Werkzeugmaschinenbau kommen weiterhin Beschränkungen hinsichtlich der dynamischen Eigenschaften zum Tragen, da diese den Bearbeitungsprozess insbesondere in der Hochgeschwindigkeitszerspannung (HSC) begrenzen. Aber auch in Hinblick auf die geforderte Präzision müssen die Lager hohen Anforderungen genügen. Ebenso wie sich derzeit der Trend weg von mechanischen Antrieben hin zu den Direktantrieben abzeichnet, werden vielerorts Anstrengungen unternommen, die Magnetlagertechnik im Werkzeugmaschinenbau zu etablieren. Dieses betrifft die lineare, als auch die rotative Führung bzw. Lagerung von Schlitten und Wellen. Das Entwicklungsziel derartiger Magnetlager, speziell im Werkzeugmaschinenbau, geht insbesondere in Richtung hoher Präzision und Steifigkeit, um den Bearbeitungsprozess hinsichtlich des Kosten/Leistungsverhältnisses besser ausnutzen zu können. Auch gilt es, die Besonderheiten der Magnetlager für den Fertigungsprozess gegenüber den konventionellen Lagern stärker hervorzuheben, umso Eigenschaften zu erhalten, welche mit konventionellen Mitteln nur schwer oder gar nicht erreichbar sind, wie z. B. aktive Lagerdämpfung oder in-situ Messungen. Gerade hierdurch ergeben sich neue Aspekte und Perspektiven in der Fertigung, in der Technologie als auch in der Konzeption neuer Werkzeugmaschinen.

In den nächsten Jahren wird eine erhöhte Akzeptanz seitens der Anwender dieser Technologie erwartet. Auch sind intensive Bemühungen auf dem Gebiet der Materialforschung zu erkennen, wodurch bessere Magnetwerkstoffe die bisherigen physikalischen Grenzen überwinden und neue Anwendungsbereiche erschließen.

Im Allgemeinen versteht man unter dem Begriff "aktives Magnetlager" die Lagerung rotierender Wellen mit Hilfe von Magnetaktoren und der dazugehörigen Regelungstechnik. Entsprechend versteht man unter dem Begriff der aktiven Linearführung die magnetische Lagerung bzw. Führung einer translatorischen Bewegung. Beide Begriffe werden unter dem Begriff Magnetschwebetechnik zusammengefasst.

In der vorliegenden Arbeit wird speziell die rotative Lagerung eines Rundtisches untersucht. Dabei wird der Begriff Magnetlager als Synonym für den magnetisch gelagerten Rundtisch verwendet, da die Aussagen in der Regel allgemein gültig sind. Sofern es notwendig erscheint, wird auf Besonderheiten eingegangen, die für den magnetisch gelagerten Rundtisch zutreffend sind.

## 1.1 Aufgabe und Ziel

Der magnetisch gelagerte Rundtisch soll für universelle Fräs-, Bohr- und Dreharbeiten einsetzbar sein. Ausgangspunkt für die Anforderungen war eine Anfrage eines Industrieunternehmens, Kapitel E.

Aufgrund des Einsatzes in der Industrie sind besondere Kriterien zu beachten. Ein wichtiges Kriterium für die Marktchancen eines neuen Produktes ist der Preis. Nach Aussagen des Industrieunternehmens sind die Anwender für mehr Flexibilität und Qualität bereit, bis zu einem Drittel mehr zu zahlen als für herkömmliche Technik, sofern die Folgekosten um ca. die Hälfte sinken. Um das künftige Produkt am Markt absetzen zu können, muss jedoch auch die Verfügbarkeit der Baugruppen gewährleistet sein.

Aus diesem Grunde erfolgt die Entwicklung des magnetisch gelagerten Rundtisches in Hinsicht auf niedrige Herstellungskosten sowie dauerhafte Verfügbarkeit der elektronischen Systeme. Daher werden nur am Markt etablierte Systeme preiswerter Hersteller für die Leistungselektronik eingesetzt.

Bedingt durch den Einsatz des Rundtisches im Werkzeugmaschinenbau mit wechselnden Bearbeitungssituationen kann kein statisches Regelungskonzept verwendet werden, da sich die Massen und Trägheitsmomente in Abhängigkeit von der Zuladung ständig ändern. Es muss daher ein flexibles Regelungskonzept entwickelt werden, welches eine schnelle Adaption an diese Änderungen gewährleisten kann.

Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, bedarf es bereits in der Konzeptionsphase eines brauchbaren Modells. Die vorliegende Arbeit hat somit das Ziel der Erarbeitung eines zweckdienlichen Modells in Hinblick auf die eigentliche Regelstrecke. Ein weiterer Schwerpunkt besteht in der Modellbildung zur Bestimmung der Anforderungen an die Komponenten des Magnetlagers.

## 1.2 Aufbau und Gliederung der Arbeit

Im Kapitel 2 wird zur Erarbeitung des Standes der Technik eine Literaturrecherche durchgeführt. Sie bietet Einblicke in konventionelle mechanische Lagerungen und in das breite Anwendungsgebiet der Magnetschwebetechnik. Dabei werden die Vor- und Nachteile beider Systeme diskutiert. Weiterhin werden aktuelle Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der Magnetlager und -führungen vorgestellt.

Die Modellbildung ist Inhalt von Kapitel 3. Hierzu wird auf den Aufbau des Rundtisches eingegangen und die entsprechenden Modelle werden vorgestellt. Ferner wird das Modell des Mehrfreiheitsgradlagers eingeführt, welches auf die Beschreibung von Mehrkörpersystemen starrer Körper aufbaut. Dabei wird das Problem der Überbestimmtheit infolge der Anzahl der Aktoren und der Freiheitsgrade im Raum durch die Entkoppelung mit Hilfe von Matrizen gelöst. Hierbei wird der Einfachheit halber mit einem einfachen Modell begonnen, welches sukzessive erweitert wird, um die physikalischen Vorgänge schrittweise besser beschreiben zu können. Dabei wird auf die Identifikation der kinetischen Eigenschaften

des Werkstückes eingegangen. Ebenfalls in diesem Kapitel werden mehrere eindimensionale Modelle vorgestellt, die eine statische und dynamische Bestimmung der Anforderungen an die Aktoren des Magnetlagers ermöglichen und es wird ein analytisches Modell zur statischen und dynamischen Auslegung der Magnetaktoren vorgestellt.

Die Regelung des Modells ist Gegenstand von Kapitel 4. Darin wird eine entkoppelte Zustandsregelung verwendet, welche entsprechend der Modellbildung des vorhergehenden Kapitels schrittweise erweitert wird. Aufgrund der Eigenart derartiger Regelstrecken wird ein Beobachter zur Bestimmung der Zustandsgrößen als auch ein Störgrößenbeobachter zur Störgrößenaufschaltung eingesetzt.

Kapitel 5 stellt die Realisierung des magnetisch gelagerten Rundtisches mit seinen einzelnen Komponenten vor.

Abschließend werden in Kapitel 6 die Ergebnisse zusammengefasst und Hinweise für die weiteren, notwendigen Entwicklungsarbeiten gegeben.

Im Anhang A werden die in dieser Arbeit verwendeten Parameter aufgelistet. Er enthält die Ergebnisse der Modalanalyse des Rundtisches sowie ausgewählte Messungen bez. des Führungs- und Störverhaltens. Der Anhang B enthält eine detaillierte Ausarbeitung über die Kinetik und Kinematik eines Mehrkörpersystems in einem Umfang, wie es aufgrund des hier vorgestellten Konzeptes der Regelung als notwendig erachtet wird. Weiterhin wird im Anhang C auf die MOORE-PENROSE-Inverse eingegangen, da sie in der vorliegenden Arbeit für die Modellbildung sowie für den Identifikationsvorgang entscheidend ist. Daneben wird im Anhang D auf das für die Identifikation notwendige Pseudo-Random-Binary-Signal (PRBS) eingegangen. Anhang E enthält letztlich die für diese Arbeit ausschlaggebende Industrieanforderung.



## 2 Stand der Technik

Seit jeher versucht der Mensch, Körper mit Hilfe magnetischer Kräfte zum Schweben zu bringen. Im 19. Jahrhundert versuchte man dies durch physikalische Gesetze auszudrücken. Schon im Jahre 1842 wies Earnshaw [Ear42] nach, dass man allein mit Permanentmagneten kein Schweben in allen Freiheitsgraden erreichen kann. 1939 wurde dies durch Braunbek [Bra39] weiter verdeutlicht. Nur wenn die verwendeten Materialien diamagnetische Eigenschaften aufweisen, lassen sich mit geeigneter Konfiguration von Permanentmagneten Feldverteilungen für ein stabiles Schweben aufbauen, [Jun88]. Allerdings waren die Resultate nicht von technischem Interesse, da die von diamagnetischen Werkstoffen erzeugten Kräfte zu gering waren.

Prinzipiell unterscheidet man drei Grundprinzipien des magnetischen Schwebens:

- **Elektromagnetisches Schweben (EMS)**,
- **Elektrodynamisches Schweben (EDS)**
- **Permanentmagnetisches Schweben (PMS)**.

Das EMS hat dabei die größte Anwendungsbreite erfahren. Einen entsprechenden Überblick über die Magnetkraftherzeugung ist in [STB93] zu finden.

Allgemein steht der Begriff des Magnetschwebesystems "Magnetlager" für rotierende und "Magnetführung" für lineare Systeme. Bekannte Vertreter der Magnetlager sind Pumpen und Spindeln. Bei der Magnetführung ist es die Magnetschwebebahn Transrapid.

Magnetschwebesysteme bzw. -lager besitzen gegenüber konventionellen Lagern Vorteile:

- Sie sind berührungsfrei und durch das Fehlen von Schmierstoffen gekennzeichnet.
- Sehr hohe Umfangsgeschwindigkeiten sind erreichbar.
- Die Lagerverluste sind gering, da keine mechanische Reibung auftritt.
- Die Lebensdauer ist bei geringen Wartungskosten aufgrund des fehlenden mechanischen Verschleißes hoch.
- Die Dynamik ist durch entsprechende Wahl des Regelungsgesetzes innerhalb der physikalischen Grenzen frei wählbar.
- Der Rotor lässt sich mit einer hohen Genauigkeit regeln.
- Die Vorgabe von Bahnen (Orbits) für einzelne Achsen ist möglich, z. B. für das Unrunddrehen.



**Abbildung 2.1:** Konventionelles Axial-Radiallager YRT der Firma INA Schaeffler KG

- Die Sensorsignale ermöglichen In-Situ Messungen bzw. eine Online-Diagnose. Damit kann z. B. auf den Betriebszustand geschlossen werden.
- Der Einsatz des magnetischen Lagers als Aktor ermöglicht z. B. die Dämpfung kritischer Drehzahlen.

Dem stehen aber auch Nachteile gegenüber:

- Aufgrund der Komplexität sind Magnetlager im Allgemeinen teurer als konventionelle Lösungen, insbesondere wenn keine Serien gefertigt werden.
- Die Akzeptanz seitens der Anwender fehlt, da diese in der Regel nicht um die Besonderheiten wissen und über entsprechende Kenntnisse verfügen.
- Magnetlager besitzen schnellere Entwicklungszyklen als konventionelle Lager.
- Der Forschungsbedarf bez. vieler Sicherheits- und Zuverlässigkeitsaspekte ist hoch.

Im Folgenden werden die konventionelle Technik und exemplarisch einige Anwendungen der Magnetlager aus der Industrie sowie aktuelle Ergebnisse aus der Forschung vorgestellt. Ziel ist es, Einblicke in die konventionelle Technologie zu gewähren und die typischen Domänen der aktiven Magnetlager vorzustellen. Hauptaugenmerk liegt dabei neben den HSC-Spindeln bei Sonderanwendungen aus Industrie und Forschung.

Die Einzigartigkeit des entwickelten magnetisch gelagerten Rundtisches hinsichtlich seines Einsatzbereiches im Werkzeugmaschinenbereich lässt keinen direkten Vergleich bez. der rotierenden Maschinen zu. Daher erscheint es notwendig, auch auf Magnetführungen einzugehen, wo Ansätze für den Einsatz im Werkzeugmaschinenbau bereits zu sehen sind.

## 2.1 Konventionelle Technik

Wälzlager sind lange bekannt und haben ihren festen Platz im Werkzeugmaschinenbau und in anderen Bereichen.

Mit Torque-Motoren angetriebene Präzisions-Rundtische in Werkzeugmaschinen benötigen in der Regel eine Lagerung, die sowohl für hohe Drehzahlen geeignet ist, aber auch höchste Steifigkeit bietet. Konventionell gelagerte Rundtische setzen dabei häufig Axial-Radiallager der Firma INA der Serie YRT ein, Abbildung 2.1. Sie sind verfügbar von 80...950 mm Wellendurchmesser, d. h. der Außendurchmesser beträgt bis zu 1.200 mm bei einer Bauhöhe von 132 mm, [INA02a, INA02b]. Das YRT Lager nimmt beidseitig axiale und zusätzlich radiale Kräfte bis zu 1.040 kN bzw. 600 kN (dynamisch) sowie Kippmomente bis zu 284 kNm auf. Das Lager ist nach dem Einbau axial und radial vorgespannt, wodurch die Lagerung senk- und kippsteif ist.

Der Trend geht bei den mechanischen Lagern zu Systemen mit integrierter Messeinrichtung, so z. B. das Axial-Radiallager YRTM mit integriertem Messsystem, das Winkel im Bereich von wenigen Winkelsekunden magnetoresistiv erfasst, [INA04]. Dabei ist die Maßverkörperung auf den Innenring in mehreren Schichten aufgebracht. Das System besteht aus zwei Sensorköpfen und einer Messelektronik mit DSP, welche den effektiven Winkelwert berechnet und das Ergebnis als inkrementelle, jeweils um 90° phasenverschobene Signale A und B mit einem Ausgangspegel von ca. 1 V<sub>SS</sub>-Wert ausgibt.

Allerdings haben konventionelle Lager Begrenzungen und Besonderheiten, welche im Folgenden erläutert werden sollen.

Durch das Aufbringen einer mechanischen Vorspannung in den konventionellen Lagern und Führungen kann die Steifigkeit wesentlich erhöht bzw. das mechanische Lagerspiel verringert werden. Dies bedeutet, dass der Wälzkörper bereits mit einer vorgegeben Belastung beaufschlagt ist und somit die Einfederung aufgrund der veränderten Federkennlinie bei hohen Belastungen verringert wird. Im Vergleich zu nicht vorgespannten Systemen besitzt ein vorgespanntes System bei gleicher Drehmomentenbelastung eine bis zum Faktor 2,8 höhere Steifigkeit bei gleichzeitiger Halbierung der Einfederung, [INA02a]. Dies bedingt jedoch einen höheren Abrieb und stärkere thermische Einträge in den Lagerkäfig infolge der erhöhten Reibung. Diese muss durch Schmiermittel wieder verringert werden.

Damit ein Schmierstoffverlust während des Betriebes oder ein Eindringen von Fremdstoffen in das Lager vermieden wird, werden abriebfeste Dichtungen aus hochwertigem synthetischen Gummi eingesetzt. Schmierung und Wartung sind wichtig für die zuverlässige Funktion und lange Gebrauchsdauer der Wälzlager. Der Schmierstoff soll an den Kontaktflächen einen ausreichend tragfähigen Schmierfilm bilden, bei Ölschmierung die Wärme ableiten, bei Fettschmierung das Lager zusätzlich nach außen gegen feste und flüssige Verunreinigungen abdichten, das Laufgeräusch dämpfen und vor Korrosion schützen. Im Allgemeinen ist unter normalen Bedingungen spätestens nach 100 km Laufstrecke oder nach sechs Monaten nachzuschmieren, [INA02a].

Die erforderliche Größe eines Wälzlagers hängt von den Anforderungen an seine Tragfähigkeit, Lebensdauer und Betriebssicherheit ab. Das Maß für die Tragfähigkeit sind die

statischen und dynamischen Tragzahlen. Das Ermüdungsverhalten des Werkstoffs bestimmt die dynamische Tragfähigkeit des Lagers. Sie wird beschrieben durch die nominelle Lebensdauer. Die Lebensdauer als Ermüdungszeitraum hängt von der Belastung, der Betriebsdrehzahl und der statistischen Zufälligkeit des ersten Schadeneintritts ab und wird vom Hersteller jeweils angegeben.

Bei vielen Anwendungen wirkt neben der rein radialen bzw. axialen Kraft zusätzlich eine Kraft in axialer bzw. radialer Richtung auf das Lager. In diesem Fall muss diese kombinierte Belastung gemäß Herstellerangaben umgerechnet werden. Diese äquivalente Belastung hat auf die Lebensdauer die gleiche Auswirkung wie die kombinierte Belastung. Die Lebensdauerberechnung setzt zeitlich konstante Lagerbelastung und konstante Drehzahl voraus, ansonsten müssen äquivalente Betriebswerte bestimmt werden. Im Allgemeinen führen Lebensdaueranforderungen über 60.000 h zu überdimensionierten Lagerungen, [INA02a].

Bei hoher ruhender oder stoßartiger Last entstehen weiterhin an den Laufbahnen und Wälzkörpern plastische Verformungen. Diese Verformungen begrenzen die statische Tragfähigkeit und Lebensdauer des Wälzlagers.

Daneben können Teile einer Maschine der Tribokorrosion<sup>1</sup> ausgesetzt sein, wenn Vibrationen oder Stöße während des Betriebes auftreten oder sich durch den Transport der Maschine Schwingungen mit niedriger Frequenz ergeben.

Daher haben die Entwickler von konventionellen Lagern folgende Ziele:

- Die Erreichung eines minimalen Lagerspieles. Damit kann eine hohe Präzision gewährleistet werden.
- Die Lagerreibung auf ein Minimum senken. Damit wird weniger Antriebsleistung benötigt und diese steht so für hoch dynamische Beschleunigungen zur Verfügung.
- Ein konstantes Reibungsmomente erreichen. Über den gesamten Drehzahlbereich wird der Antriebsstrang somit einfach und sehr gut regelbar.
- Die Lagererwärmung zu minimieren. Dieses führt zu einer höheren Genauigkeit der Gesamtbaugruppe.
- Die zulässigen Drehzahlgrenzen nach oben hin zu verschieben. Damit wird die volle Leistungsfähigkeit von Direktantrieben nutzbar gemacht.

Viele dieser Punkte stimmen mit den Entwicklungszielen der Magnetlager überein, auch wenn die konkrete Problematik eine andere ist.

---

<sup>1</sup> Passungsrost: An Passflächen von Eisenwerkstoffen durch Reibkorrosion entstandener Rost

(a) Turbomolekularpumpe für CO<sub>2</sub>-Laser

(b) Vakuumpumpe für die Halbleiterindustrie

**Abbildung 2.2:** Magnetlager der Firma MECOS Traxler AG

## 2.2 Magnetlager

Die Anzahl der kommerziellen Anbieter für Magnetlager ist aufgrund ihrer Komplexität dieser Lager vergleichsweise gering.

In Europa sind die führenden Anbieter EAAT [EAA] und LEViTEC [LEVa] aus Deutschland, S2M/Frankreich [Soc02], und Levitronix [Levb] sowie MECOS Traxler AG [MEC] aus der Schweiz.

In den USA sind dies CalNetix [Cal], Waukesha Magnetic Bearings [Wau], Mohawk Innovative Technology Inc., Foster Miller Technologies [Fos], Airex Corporation [Air] sowie Revolve aus Kanada [Rev] als Ausgründung von SKF.

Für große Laser bietet MECOS Traxler [MEC] Magnetlager für die Aufrechterhaltung der Zirkulation von CO<sub>2</sub>-Lasern an, Abbildung 2.2(a). Dazu dreht der 3,6 kg schwere Rotor mit Turbinenschaufeln mit bis zu 66.000 min<sup>-1</sup> bei einer Motorleistung von 10 kW. Für KOYO Seiko Co. Ltd./Japan hat MECOS Traxler in Kooperation Vakuum-Pumpen für die Halbleiterindustrie entwickelt, Abbildung 2.2(b). Diese besitzen eine Motorleistung von 800 W und eine Drehzahl von 24.000 min<sup>-1</sup>. Daneben produziert MECOS Traxler auch Pumpen für die Pipelines der Gasindustrie mit einer Leistung von 450 kW und 32.000 min<sup>-1</sup>. Ein derartiges magnetisches Lager besitzt einen Durchmesser von 110 mm, wobei der Rotor 110 kg wiegt und die Wellenlänge 1100 mm beträgt.



(a) Radiallager



(b) Hyperspin Serie

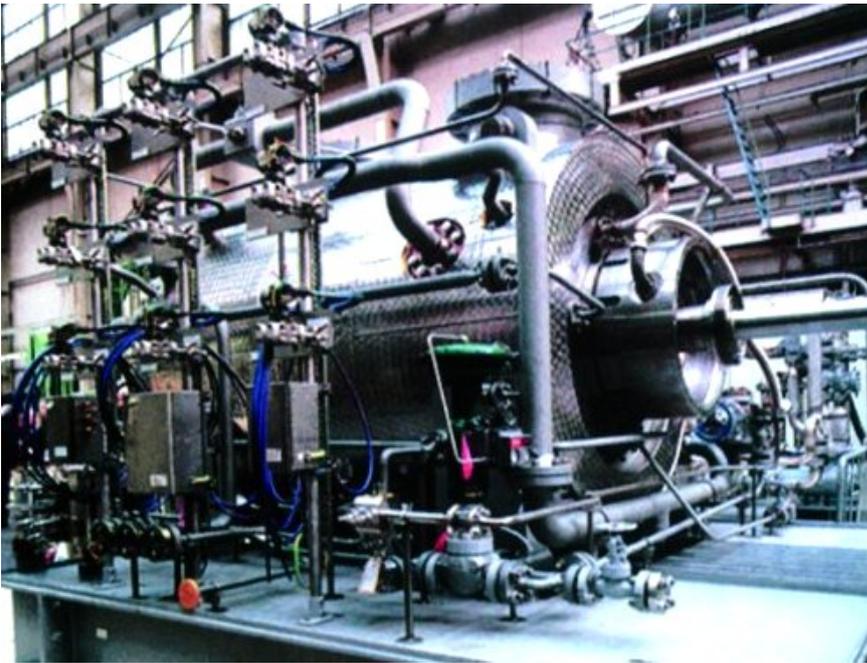


(c) Magnetlager Controller

**Abbildung 2.3:** Magnetlager der Firma Revolve Magnetic Bearing Inc. (SKF)

SKF, der größte Hersteller von Kugellagern weltweit, beteiligte sich 1992 an einem Spin-off und gründete die Revolve Magnetic Bearing Inc., [Rev]. Heute bietet Revolve Radial Lager für Radialkräfte von 50 ... 25.000 N und Wellendurchmesser zwischen 9 ... 230 mm an, Abbildung 2.3(a). Diese Lager sind in Maschinen mit Umdrehungen im Bereich  $1.800 \dots 100.000 \text{ min}^{-1}$  installiert. Für Sonderanwendungen existieren auch hermetisch geschlossene Systeme sowie Magnetlager, welche für Temperaturen bis zu  $220 \text{ }^\circ\text{C}$  ausgelegt sind. Als Beispiel ist in [LEVa] ein Turbokompressor mit einem Wellendurchmesser von 120 mm angegeben, welcher mit  $12.000 \text{ min}^{-1}$  dreht, wobei das Radiallager für 4.500 N ausgelegt ist. Revolve bietet mit ihrem Hyperspin Modell serienmäßig Magnetlager mit Synchron- oder Asynchronmotoren mit Drehzahlen bis zu  $60.000 \text{ min}^{-1}$  und Leistungen im Bereich von 0,3 ... 55 kW an, Abbildung 2.3(b). Daneben bietet Revolve noch konische Lager zur Aufnahme von axialen und radialen Kräften an. Diese können bis zu 8.900 N radial und 17.800 N axial aufnehmen und werden u. a. in Vakuumpumpen bei  $38.500 \text{ min}^{-1}$  eingesetzt. Als Steuer- und Regelungselektronik werden DSP eingesetzt. Zur Versorgung der kleineren Magnetlager werden 40 V und 2 A zur Verfügung gestellt, für größere 200 V und 50 A, Abbildung 2.3(c).

S2M [Soc02] ist eine der wenigen Firmen, welche aktive magnetische Lager im größeren Maßstab projektieren und herstellen. Die von S2M realisierten Magnetlager reichen



**Abbildung 2.4:**  
23 MW Gaskompressor der Firma Waukesha

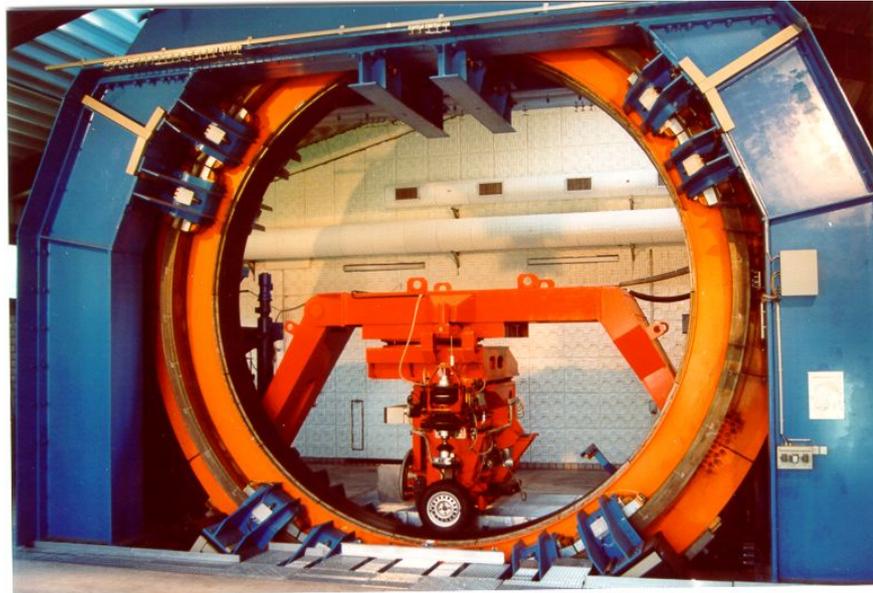
von einem 60 g schweren Rotor, welcher mit  $800.000 \text{ min}^{-1}$  dreht, bis zu Rotoren von 3 t Gewicht zum Feinstdrehen spiegelglatter Oberflächen. Ebenso gehören aber auch Frässpindeln mit einer Antriebsleistung von 20 kW und einer Nenndrehzahl von  $30.000 \text{ min}^{-1}$  zum Sortiment.

Interessant ist auch die Möglichkeit, ein Unipolarlager durch ein von LEViTEC [LEVA] patentiertes Verfahren an herkömmlichen Drehstromumrichtern zu betreiben. Aufgrund der Vormagnetisierung durch Permanentmagnete ist der elektrische Leistungsbedarf dieser Lager äußerst gering.

Waukesha stellt ebenfalls aktive Magnetlager mit Wellendurchmessern von 38...1.470 mm und Umdrehungen von  $400 \dots 120.000 \text{ min}^{-1}$  her, arbeitet jedoch vorwiegend im Bereich der Pumpen. Abbildung 2.4 zeigt einen Gaskompressor mit 23 MW, welcher für Demag Delaval Turbomachinery in den USA entwickelt wurde. Er wird von einem 25 MW Synchronmotor von SIEMENS angetrieben, welcher die 10 t schwere Welle auf bis zu  $6.900 \text{ min}^{-1}$  antreibt. Dabei werden Motor und Kompressor oberhalb ihrer kritischen Drehzahlen betrieben.

Eine messtechnisch orientierte Anwendung für Magnetlager befindet sich in der Bundesanstalt für Straßenwesen (BASt), Abbildung 2.5. Hierbei handelt es sich um einen Reifenprüfstand mit magnetisch gelagerter Fahrbahntrommel zur praxisnahen Untersuchung von Wechselwirkungen zwischen Pkw-Rad und Fahrbahnoberfläche. Der mit auswechselbaren Straßenbelägen bestückbare Trommelinnendurchmesser beträgt 5,5 m und erreicht eine Umfangsgeschwindigkeit von bis zu 250 km/h. Dabei kann die Radlast bis zu 10 kN betragen. Angetrieben wird die Trommel von einem Linearmotor mit 200 kW, wobei Elemente aus der Magnetbahntechnik zur Anwendung kamen.

An der FH Zittau/Görlitz steht das von dem Forschungszentrum Jülich ausgemusterte und nach eigenen Aussagen mit einer Länge von 2.350 mm und einem Durchmesser von



**Abbildung 2.5:**  
Reifenprüfstand  
der Bundesanstalt  
für Straßenwesen  
(BASt)

1.011 mm größte Magnetlager Europas. Der Rotor besitzt eine Masse von 1.300 kg und dreht sich bis zu  $7.200 \text{ min}^{-1}$ , angetrieben von einer Asynchronmaschine mit 249 kW.

Eine weitere interessante Anwendung der Magnetlager ist die Bestimmung von aerodynamischen Dämpfungskoeffizienten [Ste95], oder die magnetische Führung für Flächenmotoren, [KSNS97]. In [KKSH88] wurde ein Prototyp mit der Integration von Magnetlagern und Linearmotoren in einer Baugruppe für Chip-Industrie vorgestellt.

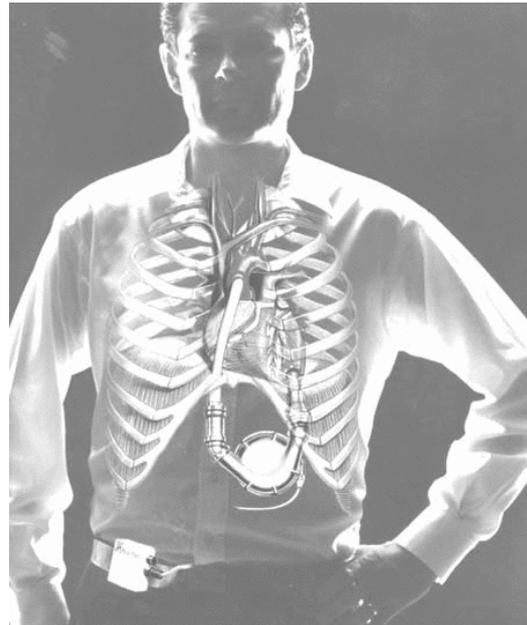
Am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching wurde 1974 ein stationärer Schwungradspeicher zur Bereitstellung von 155 MW Leistung für einen Zeitraum von 10...15 s für Fusionsexperimente aufgestellt. Das Schwungrad besteht aus vier geschmiedeten Stahlscheiben konstanter Dicke, die auf eine gemeinsame Welle aufgezogen sind. Die maximale speicherbare Energie beträgt 1.000 kWh. Aufgrund der kurzen Laufzeit und des vorherbestimmten Einsatzzeitpunktes der Anlage wird auf eine evakuierte Atmosphäre verzichtet, was bei einer Drehzahl von  $1.650 \text{ min}^{-1}$  zu Luftreibungsverlusten von 650 kW führt, [Ste87, KKS81].

Am Forschungszentrum Karlsruhe wurde 1995 ein neues Versuchsschwungrad entwickelt. Hierbei sind zwei Schwungradscheiben aus Hochleistungsfaserverbundwerkstoff über eine Welle miteinander verbunden. Die Welle dient gleichzeitig als Rotor für die Homopolarmaschine mit abschaltbarer Erregung. Oberhalb und unterhalb dieser hantelförmigen Anordnung sind die beiden Magnetlager angebracht. Bei einer Drehzahl von  $50.000 \text{ min}^{-1}$  speichert dieses Schwungrad 300 Wh, [Bor94, Bor95, Bor96].

Levitronix hat in Verbindung mit Thermo Cardiosystems Inc. aus den USA eine implantierbare Blutpumpe für bis zu  $10 \frac{1}{\text{min}}$  entwickelt, [SL]. Sie besitzt einen Durchmesser von 112 mm und eine Höhe von 40 mm bei einem Gewicht von 1.193 g, Abbildung 2.6. Der Patient trägt ein externes Gerät (260 g) mit Gurt sowie Akkus mit weiteren 650 g. In [FR99] werden ebenfalls Blutpumpen beschrieben.



(a) Elektromagnetische Pumpe HeartMate



(b) HeartMate im Körper

**Abbildung 2.6:** HeartMate der Firma LEViTRONIX

Magnetlager sind bereits seit längerem Gegenstand der Forschung. Viele Veröffentlichungen beziehen sich auf das Gebiet der klassischen Magnetlagertechnik, weniger auf das Gebiet der magnetischen Linearführung, wobei viele Untersuchungen und Ergebnisse für die Rotation auf die Linearbewegung übernommen werden können.

Heute ist das Einsatzgebiet von Magnetlagern breit gefächert, jedoch ist deren Einsatz aufgrund der verhältnismäßig hohen Kosten nur Sonderanwendungen vorbehalten. Daher werden Magnetlager vor allem dort industriell eingesetzt, wo herkömmliche Kugel- oder Gleitlager keine Verwendung finden können, z. B. in Reinstromanwendungen, wie z. B. in der Halbleiterindustrie mit ihren Turbo-Molekularpumpen. Aufgrund der berührungslosen Lagerung können keine Schmierstoffe oder Abriebe die Umgebung verunreinigen. Die Vorteile bestehen u. a. in der Realisierbarkeit von extrem hohen Drehzahlen, welche nur von der Festigkeit des Rotors begrenzt werden.

Ein weiteres Einsatzgebiet sind Spezialpumpen. Dort vereinfacht der Einsatz von Magnetlagern z. B. in Kernkraftanlagen die Wartung der Kühlwasserpumpen, da der verstrahlte Rotor einfach ausgetauscht werden kann.

Daneben haben Magnetlager auch in der Raumfahrt [Stu72, Stu78, Rob81, Rob82] einen festen Platz für Schwung- und Kreiselstabilisierungsräder in Satelliten bis hin zu Turbopumpen für Raketentriebwerke.

Im Maschinenbau und im Werkzeugmaschinenbereich sind es die Schleif- und Fräsanwendungen, insbesondere in der HSC-Bearbeitung. Hohe Drehzahlen ermöglichen hier eine hohe Werkstückqualität und eine hohe Wirtschaftlichkeit. In [Hör92] wurde für das Schleifen festgestellt, dass sich bei einer um 25% gesteigerten Schnittgeschwindigkeit bei konstantem Spanvolumen die Kräfte um 43% verringern. Wurde mit Erhöhung der

Schnittgeschwindigkeit auch eine höhere Vorschubgeschwindigkeit eingestellt, so konnte bei konstanter Schleifkraft mit einer um 45% gesteigerten Schnittgeschwindigkeit das Spanvolumen verdreifacht werden. Daraus ergab sich eine um 67% kürzere Bearbeitungszeit. Bei den Untersuchungen wurden die Vorteile hinsichtlich Steifigkeit, Dämpfung und Schwingungsverhalten gegenüber Wälzlagerspindeln festgestellt. Ähnliche Untersuchungen wurden in [Arn95] durchgeführt.

Ein Ziel bei der Entwicklung der Magnetlager ist die Verringerung der Leistungsaufnahme von Spindeln, z. B. das Minimum-Strom Magnetlager in [KSN99]. Darin wurden verschiedene Konfigurationen der Permanentmagnete vorgestellt. Weiterhin wurde der magnetische Fluss jeweils im Stator oder Rotor aufgebracht und axial, radial sowie tangential geführt.

Ein weiteres Forschungsgebiet ist die Untersuchung der Stabilität der Spindeln bzw. deren dynamische Eigenschaften. Dies ist insbesondere Gegenstand der Rotordynamik, [GP75]. In [See98] werden ausgiebig die notwendigen Stabilitätskriterien untersucht.

Der Einfluss eines elastischen Rotors wird in [Sal88] anhand eines LAVAL<sup>2</sup>-Läufers untersucht. Gewählt wurde ein Zustandsregler, wobei das System in mehrere Subsysteme unterteilt wurde. Das System wurde dabei als Mehrkörpersystem beschrieben und diskretisiert. Dazu wurden modal reduzierte Rotormodelle verwendet und durch Messungen verifiziert. Im quasistationären Fall kann so die biegekritische Drehzahl mit einer statischen Unwucht ersetzt werden. Die Wirkungsweise konnte durch das problemlose Durchfahren von fünf kritischen Drehzahlen gezeigt werden.

In [Nor98] wird eine Modalanalyse anhand von gemessenen Lagerkräften vorgestellt. Dazu wird die Flussdichte in den jeweiligen Luftspalten mit Hilfe von Hall-Sensoren gemessen. Dieses Prinzip hat den Vorteil, dass die Flussdichte direkt proportional zur Kraft und unabhängig von Sättigungserscheinungen im Eisen ist.

Unabhängig von der modalen Darstellung der Regelstrecke wird in [Wur97] ein Rotor als hinreichend steif angenommen und damit ausreichend genaue Ergebnisse erreicht. Der Regler wurde als Zustandsregler ausgelegt und der Beobachter als KALMAN-Filter.

Ein wesentlicher Teil der Eigenschaften des Magnetlagers wird durch seine Nichtlinearitäten bestimmt. In [LM95a, LM95b, LM95c] und [Lai99] werden dazu folgende Punkte aufgeführt:

- Wesentliche Einflussgröße auf die nichtlineare Abhängigkeit der Magnetkräfte ist der magnetische Luftspalt und der Spulenstrom.
- Die magnetische Sättigung und Hysterese des Kernmaterials wird als weitere Einflussgröße ausgemacht.
- Der D-Anteil des Reglers besitzt ebenfalls Einfluss, da er sich nicht nur dämpfend auf das System auswirkt, sondern wegen der nichtlinearen Magnetkraft einen Trägheitsterm in die Modellbildung einbringt.

---

<sup>2</sup>Gustav P. de Laval(1845-1913): schwedischer Ingenieur

- Die Nichtlinearitäten der Leistungsverstärker sind aufgrund ihrer Begrenzung der Maximalströme ein weiterer Faktor.
- Die begrenzte Spannungsreserve der Leistungsverstärker bei Systemen mit Stromeinprägung ist ebenfalls ein Einflussfaktor.
- Die Totzeit des Digitalrechners bestimmt ebenfalls die Nichtlinearität aufgrund immer komplexer werdender Regelalgorithmen.

Als Ergebnis dieser Arbeit entstand eine Lösung zur regelungstechnischen Kompensation der nichtlinearen Kraftcharakteristik der Elektromagnete. Die Kompensation wird durch eine Linearisierung der Magnetkraft per Software mit einem Zweikomponenten-Regler erreicht, [HM97b, HM97a, HM97c, HM98, HMRG98, Hof99]. Zur Bestimmung der erforderlichen Kompensationsfunktion wird die Magnetkraftcharakteristik bezüglich des Stromes invertiert. Hierbei wird zur Interpolation die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme angewendet. Bereits für kleine Polynomordnungen wurden Abweichungen kleiner 10 % realisiert. Gerade das An- und Auslaufverhalten des Rotors konnte verbessert werden, d.h. die für nichtlineare Systeme typischen Amplitudensprünge bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen treten nicht mehr auf. Grenzen findet der Ansatz jedoch durch Sättigung im Material und dem begrenzten Stromanstieg des Stellgliedes.

Neben den Magnetlagern mit Elektromagneten existiert auch eine Lösung mit Permanentmagneten. Den Durchbruch dazu gab 1955 der Amerikaner Roswell Gilbert mit seiner berührungslosen Aufhängung. Er durchbrach das Vorurteil, dass man Permanentmagnete nicht verwenden könne. In Bonn begann um 1965 die Entwicklung von permanentmagnetischen Lagern, die nur einen geringen Materialaufwand erfordern und sich daher auch für die industrielle Anwendung eignen, [Deu]. Die Bonner Aktivitäten wurden 1974 an das Forschungszentrum Jülich (KFA) verlagert, wo weiterhin Grundlagenuntersuchungen [BF92, Fre00] zur permanentmagnetischen Lagerung betrieben und in KFA-Lizenz industriell gefertigt sowie vertrieben werden.

In [Sch97] werden verschiedene numerische Verfahren zur thermischen und magnetischen Berechnung zur Magnetkreisberechnung wie FEM, BEM und elektrische Netzwerke untersucht und verglichen. Dabei wurde das nichtlineare Verhalten der Materialien berücksichtigt und magnetische und mechanische Größen sowie thermische Belastungen bestimmt. Es wurde eine gute Übereinstimmung der statischen und dynamischen Berechnung zwischen der Netzwerk- und den FE-Methoden bei wesentlich geringerem Verbrauch der Ressourcen des Computers festgestellt. Jedoch ist die Flexibilität bei der Netzwerkmethode deutlich geringer, welche sich in den notwendigen Vorbereitungen zur Berechnung niederschlägt.

Ein anderer Weg als den Einsatz eines Zustandsreglers wird in [Xia94] beschrieben. Hier wird der Einsatz von Fuzzy-Systemen in Magnetlagern untersucht und gezeigt, dass sich nichtlineare Regler durchaus mit Hilfe der Fuzzy-Logik entwerfen lassen. Allerdings verschlechtert sich die Genauigkeit bei fehlenden Fuzzy-Regeln. Diese Modellfehler können jedoch durch selbstlernende Verfahren minimiert werden. Andererseits können reale und komplexe Systeme beliebig genau wiedergegeben werden. In Simulationen wurde auch

gezeigt, dass eine gesteuerte Parameteradaption möglich ist. Damit wird ein gleich bleibendes Reglerverhalten über einen großen Drehzahlbereich erzielt. An Grenzen kam dieses Verfahren jedoch bei der Bestimmung der Reglerbasis, welches Echtzeitanwendungen zum Zeitpunkt der Veröffentlichung ausschloss. Der entwickelte Fuzzy-Regler mit dezentraler Struktur ist jedoch robust und echtzeitfähig und kann mit einem Lernalgorithmus "off-line" die Regelbasis optimieren.

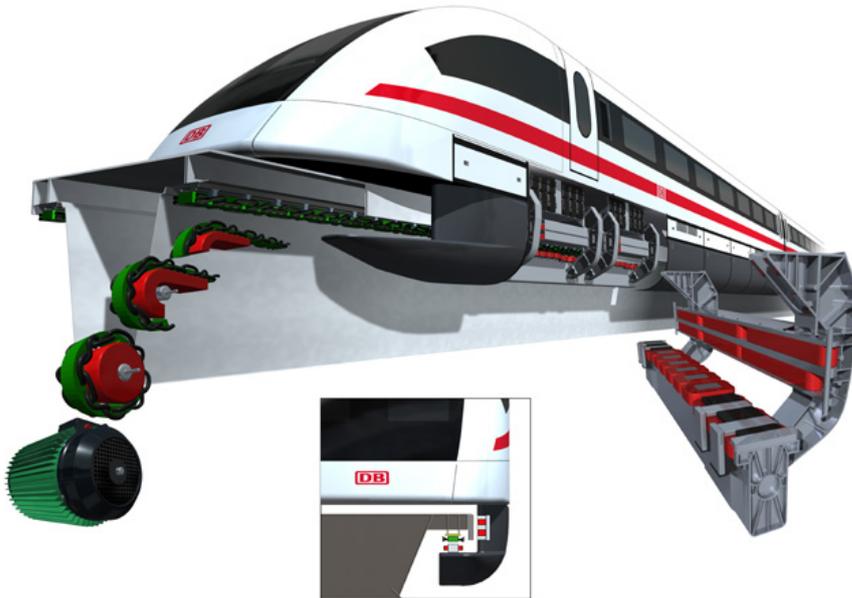
In [HCSW00] wird ein Controller vorgestellt, der sich durch eine Zykluszeit von bis zu 100  $\mu\text{s}$  auszeichnet. Realisiert wird diese durch ein im Speicher abgelegtes Kennlinienfeld, welches durch einen AD-Umsetzer adressiert wird und den an der entsprechenden Adresse abgelegten Wert an den DA-Umsetzer gibt. Das Kennlinienfeld beschreibt dabei einen beliebigen Regelalgorithmus und wird "off-line" berechnet und abgelegt. Eine Kaskadierung für Mehrgrößensysteme ist ebenfalls möglich.

Üblicherweise werden als Reglerhardware DSP-Systeme [dSp] oder Betriebssystem mit Echtzeitfähigkeit eingesetzt. Die bekanntesten kommerziellen Vertreter der Echtzeitbetriebssysteme stellen dabei Lynx [Lyn], QNX [QNX, Hil92] oder VxWorks [Win] für die x86 und PowerPC Plattform dar. In [HHA99] wurden Untersuchungen bezüglich der Eignung von RT-Linux für magnetgelagerte Spindeln mit dem Ergebnis durchgeführt, dass es durchaus den Anforderungen an Echtzeitfähigkeit genügt. Als System wurde ein mit Ein- und Ausgabekarten erweitertes, handelsübliches PC-System mit einer Zykluszeit von 125  $\mu\text{s}$  eingesetzt. Der Rotor wurde als extrem flexibel angenommen. Diese Annahme wurde durch einen Zustandsregler mit 45 Zuständen berücksichtigt, während die 5-Freiheitsgrade durch einen PID-Algorithmus geregelt wurden. Allgemeinere Untersuchungen zum Einsatz von RT-Linux zur Regelung in anderen Anwendungen wurden in [Ard99], [Wur99] und [BDGM99] angestellt.

Speziell zum hier behandelten magnetisch gelagerten Rundtisch existieren bereits verschiedene Veröffentlichungen. Ansätze zur Modellbildung hinsichtlich der Aktoren und der Modellierung als Starrkörper sind in [KP03] zu finden. Weitere Untersuchungen, insbesondere in Hinsicht zur Regelung des magnetisch gelagerten Rundtisches, existieren in [SPP03, Sch03]. In [WG03] wird das System Werkzeugmaschine hinsichtlich der Simulation des Magnetrundtisches unter Nutzung elastischer Mehrkörpermodelle vorgestellt.

### 2.3 Magnetführungen

Anfang des 20. Jahrhunderts begann die Entwicklung der Magnetschwebetechnik in Deutschland. Den Grundstein dafür legte 1934 der deutsche Ingenieur H. Kemper mit seinem Patent [Kem34] mit dem Titel "Schwebebahn mit räderlosen Fahrzeugen, die an eisernen Fahrschienen mittels magnetischer Felder entlang schwebend geführt werden". In seiner Patentschrift verwendete er einen kapazitiven Sensor und einen Röhrenverstärker. Vorgegangen war eine rapide Entwicklung auf dem Gebiet der Elektrotechnik, insbesondere in der Röhrentechnik sowie der Regelungstechnik.



**Abbildung 2.7:**  
Transrapid TR08

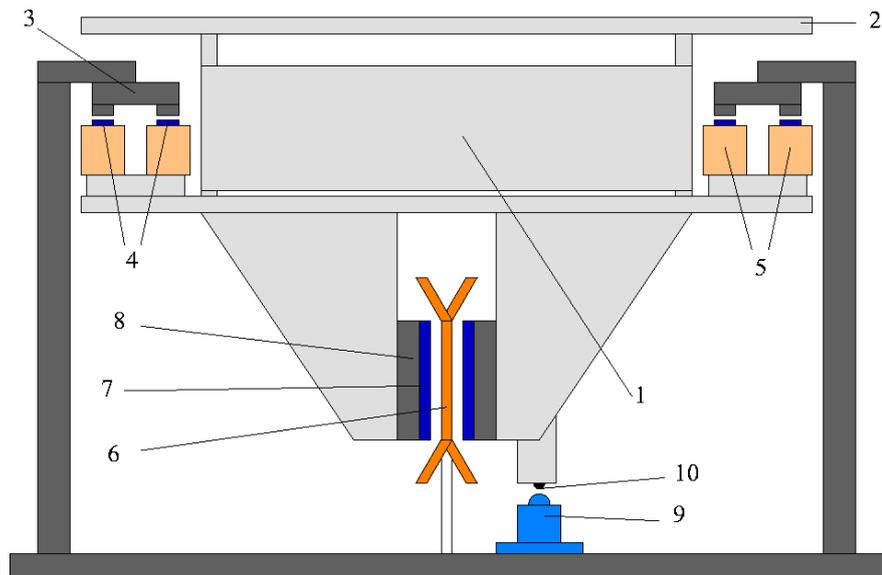
Dieses bildete die Grundlage für die heutige Entwicklung des Transrapids. Ausgehend von einem Labormodell aus dem Jahre 1969 wurde 1988 die Einsatzreife des Magnetschnellbahnsystems auf der Versuchsstrecke im Emsland nachgewiesen [MVP89]. Heute ist dieses System mit dem Transrapid TR 08 (Abbildung 2.7) serienreif und stellt wohl das bekannteste Beispiel für die Magnetschwebetechnik dar. Das nach dem elektromagnetischen Prinzip (EMS) gelagerte Magnetschwebefahrzeug MAGLEV<sup>3</sup> hängt berührungslos mit mehreren Magneten an der Eisenschiene der Fahrbahn. Im Vordergrund stehen dabei hohe Verfahrgeschwindigkeiten und Personensicherheit.

Das System des Transrapids beruht auf einer kombinierten Trag- und Antriebstechnik mit separatem Führungssystem. Alle Magnete sind spaltabhängig geregelt. Die gleichzeitige Nutzung des magnetischen Tragsystems zur Erregung des synchronen Langstatormotors führt zu einer gewichtsmäßigen Entlastung und zu einer Vereinfachung der Fahrwegausrüstung, [Weh95a, Weh95b]. Das Leergewicht des Transrapids beträgt für zwei Sektionen ca. 100 t bei einer Nutzlast von ca. 24 t. Er erreicht Geschwindigkeiten von ca. 450 km/h bei Beschleunigungen bis  $1,5 \text{ m/s}^2$ . Der Luftspalt beträgt dabei 10 mm, [Thy97].

Die zur Aufrechterhaltung des Schwebezustandes notwendige Energie wird im Stillstand durch Bordbatterien und ab ca. 50 km/h durch die in den Tragemagneten integrierten Lineargeneratoren bereitgestellt, [CFHH94, MR96]. Neben der generatorischen Bremsmöglichkeit besteht mit den Wirbelstrombremsen ein weiteres unabhängiges Bremssystem zur Verfügung. Durch das Absetzen auf die mit dem Schwebegestell mechanisch verbundenen Gleitkufen ist es möglich, bei Ausfall sämtlicher Bremssysteme zum Stillstand zu kommen.

In [Röd94] wurde an der RWTH Aachen ein Förderfahrzeug entwickelt, welches zur Lagerung Hybridmagnete verwendet, Abbildung 2.8. Ziel war es vor allem, den Energie-

<sup>3</sup>magnetically levitated vehicle



**Abbildung 2.8:**

Förderfahrzeug mit Hybridmagneten (RWTH Aachen)

- 1 - Aluminium - Rahmen
- 2 - Holzplatte
- 3 - Stahlträger
- 4 - Tragmagnete
- 5 - Spulen

- 6 - Statorwicklung
- 7 - Permanentmagnete (Läufer)
- 8 - Eisenjoch
- 9 - Positionssensor
- 10 - Positionsgeber

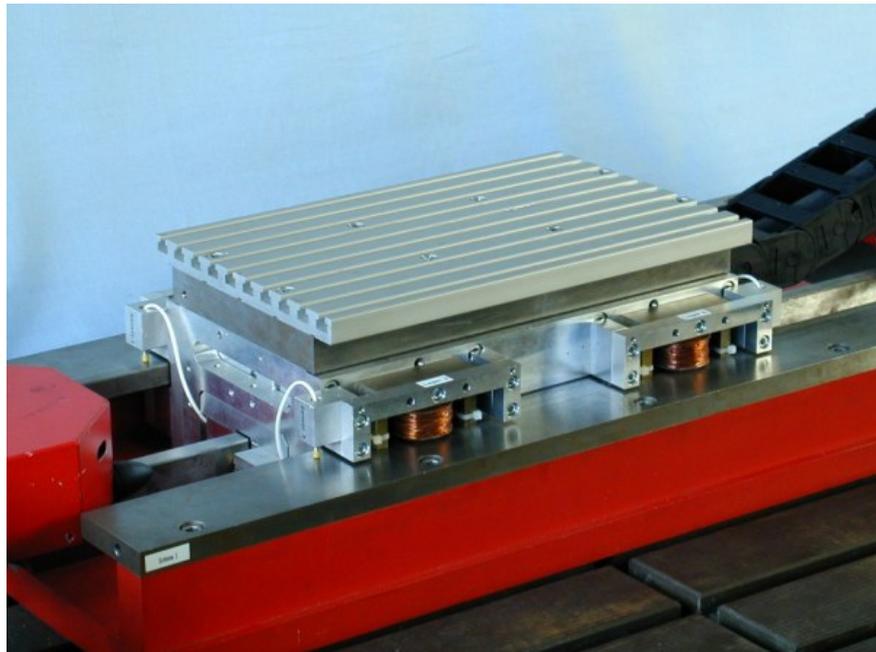
verbrauch zu minimieren. Zur Führung wurden die Seitenkräfte der Hybridmagnete ausgenutzt, die durch eine Nutung des Rückschlussjoches noch weiter vergrößert wurden. Das Fahrzeug wurde für eine Zuladung von 50 kg und eine Verfahrgeschwindigkeit von 3 m/s ausgelegt. Die Regelung zielt nicht auf eine hohe Steifigkeit hin, sondern realisiert ein Niedrigenergielager und basiert auf einer Spannungsregelung. Es werden vier einzelne Zustandsregler mit Rückführung des Ist-Stromes über einen Integralanteil verwendet. Dadurch wird ein von der Zuladung unabhängiger Aktorstrom eingestellt. Entsprechend ändert sich der Luftspalt in Abhängigkeit von der Zuladung. Aufgrund der vier Magnete ist das System statisch überbestimmt. Eine Entkoppelung der einzelnen Freiheitsgrade ist nicht vorgesehen. Daher wird das Fahrzeug formal in zwei Untersysteme unterteilt, die mit einer Torsionsfeder gekoppelt sind. Für dieses Schwebefahrzeug wurde in [Reu96] ein eisenloser Synchronmotor mit einer Vorschubkraft von 100 N entwickelt. Aufgrund des eisenlosen Stators wirken keine statischen Anziehungskräfte zwischen Primär- und Sekundärteil, die ansonsten vom Schwebesystem aufzunehmen wären. Das Schwebefahrzeug wurde in [Fri97] zu einem sensorlosen Magnetlager (self-sensing magnetic bearing) weiterentwickelt, welches Kanteneffekte des magnetischen Feldes zur linearen Führung ausnützt. Die zur Regelung benötigten Größen werden dabei aus den elektrischen Betriebsdaten des Lagers gewonnen, [LM98]. Aus der Sprungantwort des Stromes auf die pulsweitenmodulierte Spannung wird das Abstandssignal zwischen Schiene und Lager gewonnen. Grundvoraussetzung für die Regelung ohne Abstandssensor ist jedoch eine ausreichend genaue Systemidentifikation. Da die Fahrschienen aus massivem Eisen ausgeführt wurden, mussten Wirbelstromeffekte berücksichtigt werden. Zur Regelung wurde ein Zustandsregler mittels eines  $H_\infty$ -Entwurfs ausgelegt, während der Beobachter als KALMAN-Filter ausgelegt wurde. Die erreichten Eigenschaften waren jedoch schlechter als bei Einsatz von Sensoren und wurden aber für ein Förderfahrzeug als ausreichend

befunden.

An der TU Braunschweig wurde in [Hup95, Ste96] ein weiteres Nahverkehrsfahrzeug vorgestellt. Das Trag- und Führsystem benutzt dabei ebenfalls Kanteneffekte. Da die Tragkraft bei seitlichen Auslenkungen mit Vergrößerung des magnetischen Widerstandes abnimmt, sind beide Kraftkomponenten nicht unabhängig voneinander. Diese Koppelung wird durch die Tragregelung ausgeglichen. Um die Tragkraft konstant zu halten, erhöht der Tragregler die Durchflutung mit Abnahme der Tragkraft. Damit wächst die Führkraft überproportional mit der seitlichen Verschiebung der Pole und es kommt zu einer Ausrichtung zur Führung. Aus energetischen und thermischen Gründen werden ebenfalls permanentmagnetisch erregte Systeme eingesetzt. Das Versuchsfahrzeug besteht aus vier kombinierten Trag- und Führeinheiten mit einer Masse von 400 kg. Die Luftspaltregelung besteht aus einem PID-Regler und einem übergeordneten Strom-Null-Regler. Weiterhin besitzt es einen steifen Fahrzeugrahmen, wobei die Magneteinheiten in vertikaler und transversaler Richtung elastisch aufgehängt sind und damit die Freiheitsgrade entkoppelt werden.

Erste Ansätze zum Einsatz von aktiven Magnetlagern im Werkzeugmaschinenbau sind an der Universität Hannover in [TP93] zu finden. Dort wurden Vorversuche zur Entwicklung einer magnetisch getragenen Linearführung für Werkzeugmaschinen an einem Einfreiheitsgradlager beschrieben, die durch die Magnetschwebbahn inspiriert wurden. Ziel war es unter anderem, ein Vormagnetisierungsverfahren zu finden, welches eine gute Linearität bei gleichzeitig geringer Verlustleistung ergibt. Der Aktor bestand aus einer Differenzanordnung zweier geblechter EI-Kern Magneten, während als Ankerschiene weichgeglühter Stahl verwendet wurde. Weiterhin besitzt jeder Magnet eine Steuer- und eine Vormagnetisierungsspule. Da die Differenzwicklung zur Vermeidung der Umkehrung der Durchflutungsrichtung einen hohen Vormagnetisierungsstrom benötigt und somit starke Wärmeverluste entstehen, wurde eine Alternative gesucht und in einer modifizierten Art der Differenzansteuerung gefunden. Damit wurde bei kleinerer Vormagnetisierung bei gleicher Linearität eine 10-15% geringere Verlustleistung als bei der Differenzwicklung erreicht. Als Nachteil wird eine nicht optimale Dynamik erwähnt, welche sich durch eine großzügigere Dimensionierung des Leistungsverstärkers kompensieren lässt. Als Regler wurde ein Zustandsregler mit Spannungssteuerung verwendet, welcher unter RTOS-UH [Had00], einem an der Universität Hannover entwickelten Echtzeit-OS mit einer Abtastrate von 2 kHz läuft.

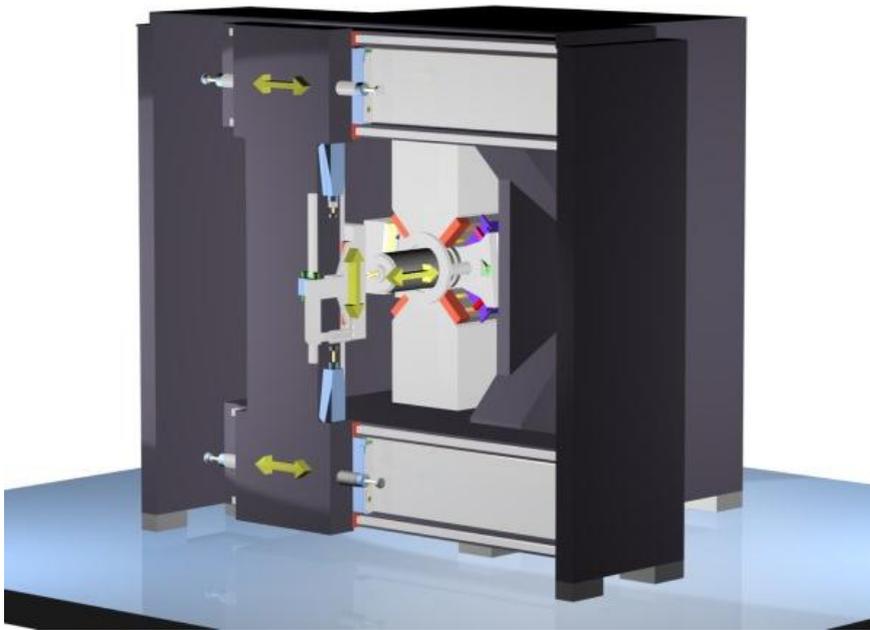
Auf der Industrial Conference on Magnetic Bearings (MAG'97) wurde in [TP97] die Erweiterung zur Linearführung mit einer Tischmasse von 25 kg ohne Antrieb vorgestellt, Abbildung 2.9. Die Idee besteht in einer entkoppelten Kaskadenregelung mit PID oder Zustandsregler mit einem als KALMAN-Filter ausgeführten Beobachter zur Lagekontrolle und einer sehr schnellen analogen PWM-Stromregelung, welche selbst entwickelt wurde mit  $U = 220 \text{ V}$  und  $i_{Max} = 6 \text{ A}$ . Dadurch konnte die Aktordynamik für den Entwurf des Lagereglers vernachlässigt werden. Der Ansatz basiert auf der Kompensation der negativen Steifigkeit der 6 Aktoren und der Verwendung eines inversen Modells der Regelstrecke. Weiterhin wurde ein Verfahren zur Identifikation der verwendeten Massenmatrix mit Hilfe der Korrelationsanalyse vorgestellt. Diese Arbeiten wurden 1997 in [Tie97] zusammengefasst. Darin werden auch zwei verschiedene Regelansätze untersucht, wobei die Zustandsregelung gegenüber der  $PIDT_1$  die besseren Ergebnisse liefert. Die über den



**Abbildung 2.9:**  
Magnetführung der  
TU Hannover

gesamten Frequenzbereich erreichte maximale dynamische Nachgiebigkeit lagen unter  $1 \mu\text{m}/\text{N}$ , während die Genauigkeit der Identifikation der Masse bzw. des Trägheitstensors bei weniger als 10% lag. Allerdings zeigten sich auch strukturmechanische Probleme bei hohen Verstärkungen, da die Eigenfrequenzen des Schlittens angeregt wurden. Zu deren Lösung wurde u. a. ein Torsionsregler vorgeschlagen, jedoch nicht verifiziert.

Die Arbeiten wurden in [RP98a, RP98b, RPTL99] weitergeführt, wobei aufgrund verbesserter Regler-Hardware die maximale Steifigkeit auf  $11 \text{ N}/\mu\text{m}$  erhöht wurde. Weiterhin wurde ein von der DFG gefördertes Maschinenkonzept mit kontaktloser Linearachse vorgestellt, Abbildung 2.10. In allen 3 Achsen wurden Direktantriebe eingesetzt. Zusätzlich wurde die Spindelachse mit einer magnetischen Führung ausgestattet. Auf der ISMB-7 wurde 2000 in [RP00, DPKR03] dieses Konzept der Werkzeugmaschine weiter ausgeführt, wobei u. a. die Normalkraft des Direktantriebes zum Gewichtsausgleich benutzt und patentiert wurde. Durch die Modellierung der Nichtlinearität und Berücksichtigung von Wirbelstromeffekten soll die theoretische dynamische Steifigkeit  $150 \text{ N}/\mu\text{m}$  betragen und die Dämpfung nahe  $D = 1$  liegen. Dazu werden die Nichtlinearitäten mit Hilfe der inversen Kraftkennlinie bzw. eines nichtlinearen Kompensators ähnlich [HM97b, HM98] kompensiert, d. h.  $i_A = i_A(\delta_A, F_A)$ . Die Approximation der gemessenen Kraftkennlinie  $F_A = F_A(i_A, \delta_A)$  erfolgt durch ein Polynom 4-ten Grades. Bei den Messungen der Magnetkennlinien sind Sättigungserscheinungen und Streuflüsse in die Koeffizienten mit eingeflossen. Bezüglich der Kompensation der Wirbelstromeffekte wird ein Filter zur Phasenverschiebung vorgeschlagen, um den Phasenfehler infolge dieses Effektes zu kompensieren. Anhand dieser Verbesserung und der damit an der vorhandenen Linearführung erreichten minimalen Steifigkeit von  $5 \text{ N}/\mu\text{m}$  wurde für die 600 kg schwere Achse die zu erwartende Steifigkeit auf  $150 \text{ N}/\mu\text{m}$  hochgerechnet. 2002 wurde auf der ISMB-8 gezeigt, dass durch die Verwendung von Beschleunigungssensoren die dynamische Steifigkeit um den Faktor 3 bei gleichen Reglereinstellungen verbessert werden kann, [RP02]. Dazu wurden die Beschleunigungen in den 5 Freiheitsgraden der Linearführung mit Hilfe von Beschleunigungssensoren



**Abbildung 2.10:**  
Werkzeugmaschine  
mit magnetisch  
gelagerter z-Achse  
(TU Hannover)

bestimmt und dem als KALMAN-Filter ausgeführten Beobachter zugeführt. Die erreichte maximale Nachgiebigkeit wurde auf  $55 \mu\text{m}/\text{N}$  bestimmt. Daneben wurde zur Lagebestimmung ein Laser und ein PSD-Array benutzt, dessen Genauigkeit jedoch aufgrund des Sensorrauschens auf  $5 \mu\text{m}$  beschränkt war. Auf der MOVIC 2002 wurde ein Frequenz-Tracking Verfahren für einen Freiheitsgrad der Linearführung vorgestellt, um verschiedene periodische Störfrequenzen zu erkennen und zu kompensieren, [RRP02]. Bei diesem Ansatz wird der Vorteil der Diskreten Fourier Transformation (DFT), der in einem hohen Störabstand gegenüber Rauschen besteht, mit der Einfachheit von Differenzgleichungen kombiniert, um im Zeitbereich die Frequenzbestimmung durchführen zu können. Hierbei wurden Frequenzen von  $5 \dots 1.000 \text{ Hz}$  kompensiert, wobei die Anzahl der zu kompensierenden Frequenzen durch die Rechenleistung der CPU begrenzt wird.

Etwas später als an der TU Hannover wurde 1997 an der RWTH Aachen das Thema magnetische Linearführung aufgegriffen. In [WW97, WKW97] ist das Konzept der zu bauenden Linearführung und ein Magnetprüfstand zur Messung der Magnetparameter beschrieben. Interessant ist die Zusammenfassung der Magnete zu einem "genormten" Modul. In [WW98, SWP98, WYWH98] wird dieses Konzept um ein Permanentmagnetmodul zur Aufnahme statischer Kräfte erweitert und die Ergebnisse des Einfreiheitsgradlagers vorgestellt. In [WW99, WYWH99, YH99] wurde die magnetgelagerte Linearführung mit einem Direktantrieb vorgestellt, Abbildung 2.11. Die Masse des zu verfahrenen Tisches beträgt  $550 \text{ kg}$  und die Vorschubkraft des Linearmotors  $11 \text{ kN}$ . Es handelt sich um eine entkoppelte Zustandsregelung mit unterlagerter Stromregelung und einem Entkoppelungsnetzwerk zur inversen Darstellung der Regelstrecke, äquivalent [Tie97]. Der selbst entwickelte analog ausgeführte  $200 \text{ V}$ -Stromsteller liefert  $6 \text{ A}$  bei einer Verlustleistung von  $1,2 \text{ kW}$  und ist wassergekühlt. Erweitert wurde das Modell um die Normalkräfte des Permanentmagnetmodules sowie die des Direkt- bzw. Linearantriebes. Als erreichte maximale Steifigkeit werden  $20 \text{ N}/\mu\text{m}$  angegeben. Durch Einsatz eines KALMAN-Filters konnte die maximale Steifigkeit auf  $31 \text{ N}/\mu\text{m}$  gesteigert werden. Allerdings wurden diese Werte nicht wie in



**Abbildung 2.11:**  
Linearführung an  
der RWTH Aachen

[RP02] mit Hilfe eines Shakers bestimmt, sondern durch das Aufschalten eines Sollwertsignals auf die Magnete, d. h. zur Messung des Nachgiebigkeits-Frequenzganges ist die Aktordynamik mit in das Ergebnis eingeflossen. Die Arbeiten wurden in [Yah00, Wah02] zusammengefasst, wobei Stromsteller nach dem Toleranzbandverfahren für die Magnetführung eingesetzt wurden.

Während für Magnetspindeln und Pumpen bzw. Kompressoren vorhersagbare und während ihrer Lebenszeit gleich bleibende Einsatzbedingungen überwiegen, sind diese im Werkzeugmaschinenbereich auf Grund der Komplexität des Bearbeitungsvorganges nur selten voraussagbar. Dennoch kommen aus der Entwicklung der Magnetspindeln Impulse für alle Bereiche der Magnetlagertechnik, da sie bereits eine breite Verwendung gefunden haben. Auch zeigen diese Anwendungen, was hinsichtlich der maximalen Drehzahl und Modellbildung als elastische Welle möglich ist. Der Transrapid wiederum zeigt, dass das Prinzip der magnetischen Lagerung auch mit hohen Lasten und ebenfalls verhältnismäßig hohen Geschwindigkeiten sicher funktioniert. Die Linearführung im Werkzeugmaschinenbau kann diese Eigenschaften verbinden, wobei die Lastadaption neue Konzepte erfordert. Dabei besteht insbesondere Forschungsbedarf in der Konzeption und Modellbildung eines rotierenden Magnetlagers für die im Werkzeugmaschinenbereich auftretenden Anforderungen, wie z. B. Identifikation und Adaption variabler Werkstücke. Ein solches Modell bzw. Konzept wird im Folgenden vorgestellt.

# 3 Konzept und Modellbildung

Nachfolgend wird das Konzept des realisierten Rundtisches vorgestellt sowie auf die Modellbildung eingegangen. Die Regelung, welche auf Basis des Modells entworfen wird, stabilisiert die instabile offene Regelstrecke in allen ihren Freiheitsgraden.

Aus dem Aufbau des Rundtisches werden sukzessive die einzelnen relevanten Teilmodelle entwickelt, welche in das Gesamtmodell einfließen. Die Teilmodelle umfassen u. a. die Modellierung der Koppelung zwischen den Aktoren und Sensoren in den einzelnen Freiheitsgraden sowie die Kinetik des Rundtisches mit fest verbundenen Werkstück. Das mechanische Modell beruht dabei auf der Annahme von Starrkörpern und wird als Mehrkörpermodell beschrieben. Darüber hinaus wird ein analytisches Modell für die Aktoren entwickelt sowie weitere Modelle zur Bestimmung der Anforderungen an die Aktoren angegeben.

## 3.1 Konzept des Rundtisches

Ausgehend von der Anfrage bzw. den Anforderungen eines Industrieunternehmens E.1, mussten bereits zu Beginn der Konzeptionsphase die drastischen Anforderungen bez. der Einhaltung von Bearbeitungskräften und Abmessungen als unrealistisch angesehen werden. Entsprechend wurden die Kräfte auf ca. 45% reduziert. Die Begründung liegt in der begrenzten Kraftdichte eines magnetischen Aktors, welche mit ca.  $0,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  bei  $B_{max} = 1,2 \text{ T}$  weit unter der Tragfähigkeit von konventionellen oder hydrostatischen Lagern liegt. Die Begrenzung erfolgte in Hinblick auf die Einhaltung des äußeren Durchmessers von 1 m. Deshalb ist auch die geforderte Bauhöhe nicht erreichbar, da die Magnetaktoren für die resultierenden Lagerreaktionskräfte eine Mindestbaugröße besitzen und der Direktantrieb ebenfalls nicht beliebig klein gebaut werden kann. Zudem werden Mindestanforderungen an die Strukturmechanik hinsichtlich Kräfte und Momente gestellt, welche entsprechend steif bzw. stabil ausgeführt werden muss.

Innerhalb der Konzeptionsphase kristallisierte sich schnell heraus, dass das Bauvolumen aufgrund der "inneren" Kraftdichte der einzelnen Komponenten konstant ist, d. h. bei gleichen Anforderungen an die Kräfte bzw. Momente kann der resultierende Rundtisch entweder flach bei einem großen Durchmesser oder mit einer entsprechenden Höhe bei einem kleinen Durchmesser konstruiert werden. Die letzte Option wurde aus strategischen Gründen in der vorliegenden Arbeit gewählt.

Während der Konzeption wurde zur Aufnahme der axialen Lagerreaktionskräfte das 8-Punkt-Lager favorisiert. Es bietet in axialer Richtung ein Optimum hinsichtlich der Kraft bildenden Fläche der Magnetaktoren bei kleinem Durchmesser. Zur Aufnahme der radialen Kräfte wurde ein Zentriermagnet entwickelt, der einen einfachen Einbau in den Rundtisch ermöglicht.

Eine weitere Einschränkung gibt der Markt hinsichtlich des Direktantriebes vor. Keiner der zurzeit verfügbaren Direktantriebe vereint ein derartig hohes Drehmoment bei der hohen Drehzahl, wie es in der Anfrage E.1 gefordert wird. Daher wurde als Kompromiss einem Direktantrieb mit hohem Drehmoment für hohe Bearbeitungsmomente Vorzug gegeben. Zur Regelung des Antriebs stehen ausgereifte und komplexe Systeme zur Verfügung, so dass das Antriebssystem als unabhängig vom Magnetlager betrachtet und eingesetzt wird.

Allerdings bedingt eine derartige Konzentration an Energie und Leistung eine ausreichende Kühlung, welche durch Flüssigkeitskühlung insbesondere für den Direktantrieb realisiert wurde. Um das Einbringen von Wärme in das Gehäuse infolge der thermischen Verlustleistung seitens der Aktoren zu verringern, wurden Hybridmagnete eingesetzt. Sie besitzen einen permanentmagnetischen Anteil zur leistungslosen Aufbringung einer Kraft und verringern durch ihren Einsatz thermische Spannungen und Verzüge im Rundtisch. Der Kühlkreislauf des Direktantriebes kann optional für die Magnetaktoren mit verwendet werden.

## 3.2 Aufbau des Rundtisches

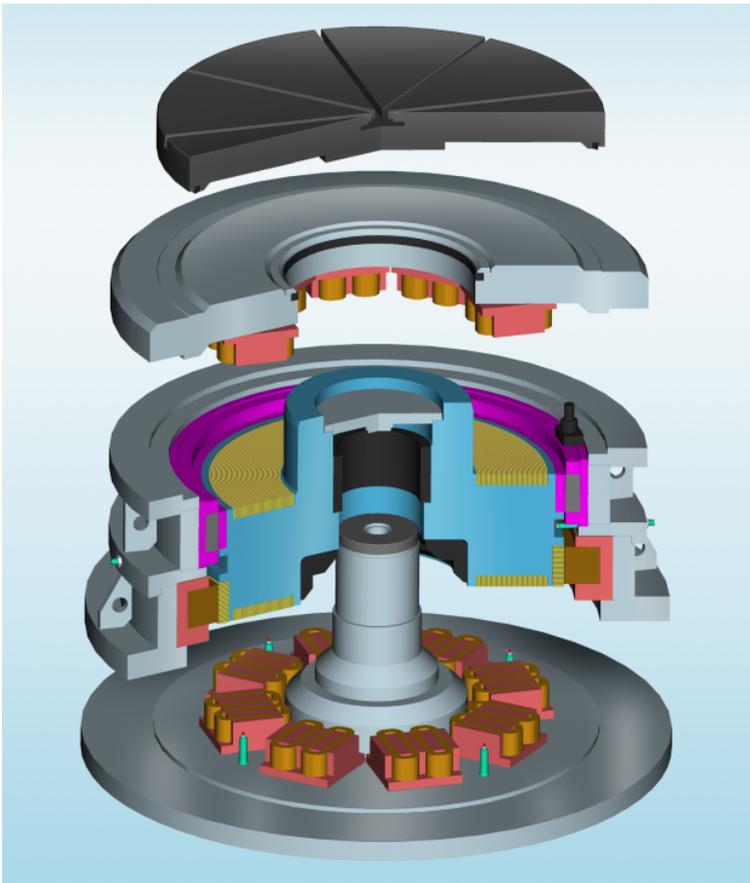
Abbildung 3.1 zeigt die Explosionsansicht des realisierten Rundtisches. Darin ist die Aktoranordnung als 8-Punkt-Lager zu erkennen, ebenso die axialen und radialen Sensoren zur Bestimmung der Lage des Rotors sowie der Direktantrieb. Weiterhin zeigt die Explosionsansicht das Gehäuse mit der Aufspannplatte. Im Weiteren werden die Baugruppen kurz angerissen und in den nachfolgenden Kapiteln genauer erklärt.

Das Gehäuse selbst ist im Wesentlichen 4-teilig und als Schweißkonstruktion ausgeführt. Es besteht aus dem Deckel, dem Boden und zwei ringförmigen Elementen.

Das untere der beiden ringförmigen Elemente nimmt den Torque-Motor auf. Aufgrund der Notwendigkeit, ein konstantes Haltemoment aufbringen zu müssen, ist dieser als Synchronmotor ausgeführt.

Der radiale Magnetaktor bzw. Zentriermagnet ist in dem oberen der beiden ringförmigen Elemente des Gehäuses montiert. Der Zentriermagnet wurde zur Vereinheitlichung des Kühlsystems konstruktiv an den Torque-Motor angepasst, d. h. als runde Baugruppe entworfen. Dabei sind die einzelnen Magnetaktoren des radialen Aktors in 4 Gruppen in der Art symmetrisch aufgeteilt, dass sie eine Differentialanordnung bilden und mit dem Koordinatensystem des Rundtisches ausgerichtet sind. Der Zentriermagnet ist als Hybridmagnet ausgeführt.

Die 16 axialen Aktoren sind symmetrisch am Boden und Deckel befestigt, wobei obere und untere Aktoren jeweils paarweise gegenüber liegend angeordnet sind und somit 8



**Abbildung 3.1:** CAD-Modell des Rundtisches in der Explosionsansicht

Differentialanordnungen bilden. Die Anordnung ist infolge der Lagerreaktionskräfte während der Bearbeitung notwendig. Sie erlaubt zudem eine dynamischere Kraftänderung als einer einfachen magnetischen Aufhängung. Die axialen Magnetaktoren sind ebenfalls als Hybridmagnet ausgeführt.

Der Rotor selber wurde aus mechanischen Gründen aus geschmiedetem Vollrundmaterial gedreht. Er besitzt zur Verminderung von Wirbelströmen eingeklebte und geblechte Sekundärteile, die sich jeweils gegenüber den axialen und radialen Magnetaktoren befinden. Auf dem Rotorhals wird die Aufspannplatte befestigt. Am unteren Teil des Rotors ist das konische Fanglager zu erkennen, welches aus verschleißfreiem Kunststoff besteht. Durch die Konusform wird die Bewegungsfreiheit des Rotors im Gehäuse horizontal und vertikal eingeschränkt, wobei ein weiteres horizontales Fanglager am Deckel angebracht ist, welches in der Explosionsansicht jedoch nicht erkennbar ist.

In der Mitte der Explosionsansicht ist der Dom zu erkennen, an dessen oberem Ende ein Inkrementaldrehgeber zur Erfassung der rotativen Lage des Rotors angebracht ist. Dabei überträgt die fest mit dem Rotor verbundene Mitnehmerscheibe die Rotationsbewegung auf den Drehgeber. Das untere Ende des Domes ist fest mit der Bodenplatte verbunden und ist konisch als Gegenstück zu dem Fanglager des Rotors ausgeführt.

Die Lagesensoren zur Bestimmung der Position des Rotors befinden sich auf der Bodenplatte und in dem ringförmigen Gehäuse. Die vier axialen und zwei radialen Sensoren

sind mit dem Koordinatensystem des Rundtisches orthogonal ausgerichtet. Hierbei werden Wirbelstromsensoren aufgrund ihrer Robustheit eingesetzt.

## 3.3 Modellbildung

Die Aufgabe des Modells besteht in der Wiedergabe der Eigenschaften des Magnetlagers im Zusammenhang mit den verschiedensten Werkstücken in ausreichender Genauigkeit. Somit kann eine hohe Regelungsqualität erreicht werden, um die im Fertigungsprozess geforderten mechanischen Fertigungstoleranzen bei der Bearbeitung einhalten zu können.

Ziel der Modellbildung des Systems Magnetlager ist es, eine geeignete Form der Beschreibung für das Verhalten dieses mechatronischen Systems zu finden. Ein Kriterium ist dabei die *Echtzeitfähigkeit* der darauf aufbauenden Implementierung, d. h. das Modell muss mit wenigen einfachen Gleichungen implementierbar sein. Weitere Anforderungen werden an die *Flexibilität* des Modells gestellt. Es muss an verschiedene Gegebenheiten angepasst werden können, z. B. an verschiedene zu bearbeitende Werkstücke, deren Masse sowie Geometrien variieren können. Folglich ändert sich der Schwerpunkt und das Trägheitsmoment in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Parameter müssen mit Hilfe des Magnetlagers identifiziert werden und im Regler adaptierbar sein. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu den magnetgelagerten Spindeln bzw. Wellen, welche ihre Parameter auf Lebenszeit beibehalten.

Als mechanisches Modell für das hier vorgestellte Konzept des Magnetlagers eignet sich die Beschreibung als Mehrkörpersystem (MKS) besonders, da es eine einfache Beschreibung für verschiedene und komplizierte Geometrien ermöglicht und dabei ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Freiheitsgrade liefert. Dabei werden die einzelnen Körper als nicht schwingungsfähig angenommen, d. h. als Starrkörper modelliert. Ein Mehrkörpersystem ist ein mechanisches Ersatzsystem und besteht aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Die einzelnen Körper sind durch Gelenke bzw. passive oder aktive, wie z. B. elektromechanische Aktoren, verbunden. Zugleich treten kinematische Bindungen auf, welche die Bewegungsfreiheit des MKS einschränken und als Zwangsbedingungen formuliert werden. Dabei können auf die Körper äußere Kräfte bzw. Momente einwirken, [Rod97, DD94, GH91].

Um ein möglichst einfaches mechanisches System zu erhalten, wird das MKS des magnetisch gelagerten Rundtisches in 3 Teile aufgeteilt:

- Das Gehäuse, das fest mit dem Fundament verbundenen ist.
- Dem Rotor, der durch die magnetischen Aktoren in Schwebelage gehalten wird.
- Das Werkstück, welches fest mit dem Rotor verbundenen ist.

Dabei sind lediglich Rotor und Werkstück in Abhängigkeit vom jeweiligen Werkstück zeitvariant hinsichtlich seiner Masse und somit auch Schwerpunktlage, Trägheits- bzw. Deviationsmomenten.

Um ebenfalls für die Aktoren ein einfaches und lineares Gleichungssystem zu erhalten, werden diese als trägheitslose und linearisierte Aktoren beschrieben.

Das hier vorgestellte Konzept in Verbindung mit der gewählten Modellbeschreibung folgende Möglichkeiten und Vorteile:

- Die Beschreibung als MKS liefert ein flexibles und erweiterbares Modell in Form eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Kinetik, Kinematik und den Aktoren.
- Es ist aufgrund seiner Einfachheit echtzeitfähig.
- Eine Adaption an zeitvariable Werkstücke und eine Identifikation dieser hinsichtlich Masse, Schwerpunktvektor und Trägheitsmomente ist möglich, ohne den Regler selbst neu entwerfen zu müssen.
- Identifizierte und zeitvariante Unwuchten des Werkstückes können in der Regelung berücksichtigt werden.
- Fehler in den Parametern der linearisierten Magnetaktoren werden nach Anwendung der Identifikation kompensiert.
- Das infolge der Actor- und Sensoranzahl an sich überbestimmte System wird in den kartesischen Freiheitsgraden entkoppelt und somit getrennt regel- und einstellbar bez. seiner statischen und dynamischen Eigenschaften.
- Es werden einfache Anforderungsmodelle für die Aktoren bez. der Auslegung möglich.
- Aufgrund der im Hybridmagneten bereits existierenden Vormagnetisierung vereinfacht sich die Leistungselektronik, da sie nur noch einen Strom in die Magnetaktoren einprägen und keine weiteren bei den Elektromagneten üblichen Vormagnetisierungsströme liefern muss.
- Der Einsatz von Hybridmagneten als Aktoren ermöglicht eine größere Toleranz hinsichtlich der Abweichungen vom Arbeitspunkt als die üblicherweise eingesetzten Elektromagnete, wie sie z. B. infolge mechanischer Fertigungstoleranzen auftreten.
- Der Direktantrieb kann aufgrund seines großen magnetischen Luftspaltes quasistatisch betrachtet werden und so mit Hilfe eines Kraft-Weg-Faktors als lineare Gleichung modelliert.

Aufgrund dieser Vereinfachungen und der getroffenen Annahmen in der Modellbildung unterliegt das Modell folgenden Einschränkungen:

- Das hier verwendete MKS-Modell basiert auf der Annahme von starren Körpern, d.h. die elastischen Schwingungsmoden der mechanischen Struktur werden vernachlässigt.

- Daneben vernachlässigt das vorliegende MKS-Modell die kinematische Kette, [Rod97]. Solange das Gehäuse fest mit dem Maschinenfundament verbunden ist, können die Kräfte als rückwirkungsfrei betrachtet werden. Bei Einsatz eines magnetisch gelagerten Rundtisches in Verbindung mit einer mechanisch bzw. magnetisch gelagerten Linearführung oder Befestigung auf dem Werkzeuggestisch einer weiteren Maschine ist diese Annahme nicht mehr haltbar.
- Durch die Linearisierung der Magnetaktoren werden Wirbelstrom-Bremseffekte und Hystereseverluste im magnetischen Kreis vernachlässigt. Sie bestimmen den Teil der nichtkonservativen Lagerkräfte, welche typisch für Magnetlager sind, da keinerlei mechanische Reibung auftritt. Weiterhin ist der magnetische Kreis aufgrund der magnetischen Sättigung des Eisens und dessen Hysterese nichtlinear, welches ebenfalls vernachlässigt wird.
- Die Hybridmagnete wurden als lineare Stellglieder modelliert, indem ihre Kennlinien  $F_A = F(i_A, \delta_A)$  um einen Arbeitspunkt linearisiert werden. Des Weiteren werden die Aktoren als hinreichend schnell angenommen, was insbesondere bei hohen dynamischen Vorgängen mit hohen Kraftanstiegen  $\frac{dF}{dt}$  nicht mehr korrekt ist.
- Die Kräfte der Aktoren werden als Punktkräfte angenommen, welche im Flächenschwerpunkt der kraftaufbringenden Magnetfläche ihren Ursprung haben. Genau genommen handelt es sich dabei jedoch um Flächenkräfte, welche einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Kraft und Luftspalt besitzen.
- Der Direktantrieb wird bei der Modellierung der Normalkräfte nur quasistatisch betrachtet. An sich beeinflusst jede Stromänderung in der Statorwicklung zusätzlich die Normalkraft bei der Erzeugung des Momentes.

#### 3.3.1 Das Prinzip der Entkoppelung der Freiheitsgrade

Die Regelung des Rundtisches baut auf einem regelungstechnischen Modell der Regelstrecke des Magnetlagers auf und beruht im Wesentlichen auf der Entkoppelung der Freiheitsgrade.

Ausgehend von der Beschreibung des Magnetlagers als MKS (siehe Anhang Kapitel B) kann das Modell der Regelstrecke gebildet werden. Dabei wird zur Bildung eines einfachen Modells von einer offenen kinematischen Kette ausgegangen, d.h. die strukturmechanischen Verkoppelungen zwischen den mechanischen Systemen und den Aktoren werden in der Bewegungsgleichung (B.6) aus Abschnitt B.2 vernachlässigt. Dieses bedeutet insbesondere, dass die Dämpfungsmatrix  $D$  und Steifigkeitsmatrix  $F$  aus Gleichung (B.6) als Nullmatrizen angenommen werden. Darüber hinaus werden die durch die Matrix  $N$  beschriebenen nichtkonservativen Lagerkräfte, wie z.B. Bremsseffekte infolge des Durchfahrens der magnetischen Hystereseurve, vernachlässigt.

Aufgrund der Funktion des Magnetlagers als Rundtisch und der damit auftretenden Winkelgeschwindigkeiten, insbesondere der der Hauptachse, muss die Matrix der gyroskopi-

schen Kräfte (Kreisel- und Corioliskräfte)  $G$  berücksichtigt werden. Die allgemeine Gleichung des MKS (B.6) reduziert sich somit zu:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} = Q. \quad (3.1)$$

Dabei muss das Magnetlager des Rundtisches alle drei translatorischen Freiheitsgrade und die zwei Freiheitsgrade der Rotation einschränken. Lediglich die Rotation um die Hauptachse  $z$  ist uneingeschränkt. Die Hauptachse wird durch einen Direktantrieb angetrieben, welcher durch einen kommerziellen Servo-Umrichter geregelt wird.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Antrieb der Hauptachse durch das Magnetlager nicht beeinflusst wird. Eine Umkehrung dieser Vereinfachung ist jedoch nicht möglich, da aufgrund des Prinzips des Synchronantriebes die Permanentmagnete des Sekundärteiles Normalkräfte auf das Magnetlager ausüben.

Eine notwendige Bedingung für das Magnetlager ist die vollständige Steuer- und Beobachtbarkeit. Daraus ergeben sich die Bedingungen für die Anordnung der Aktoren und Sensoren.

Prinzipiell müssen mindestens so viele Aktoren vorhanden sein, wie mechanische Freiheitsgrade zu regeln sind, d. h.  $n_A \geq f$ . Praktisch sind die  $n_A$  Aktoren des Magnetlagers an das mechanische System gekoppelt, welches  $f$  Freiheitsgrade besitzt. Aufgrund der Anordnung der Aktoren ist dieses System im Allgemeinen überbestimmt, d. h. es gilt:  $n_A > f$ . Es muss sichergestellt sein, dass die Aktoren in der Lage sind, alle mechanischen Freiheitsgrade unabhängig voneinander anzusteuern. Dies wird durch die Entkoppelung mit Hilfe der JACOBI-Matrix erreicht, auf die in Abschnitt 3.3.2 eingegangen wird.

Äquivalent gilt dies auch für die Sensoren, d. h. die Sensoren müssen ebenfalls unabhängig voneinander alle Freiheitsgrade des Rotors erfassen können, somit gilt:  $n_S \geq f$ .

Die Flexibilität des verwendeten Modells zeigt sich insbesondere bei der Adaption an verschiedene Werkstücke, z. B. veränderlicher Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente des als Starrkörper modellierten, fest mit dem Rotor verbundenen Werkstückes.

In der Modellierung des Magnetlagers als MKS wird ein Referenzpunkt B eingeführt. Da sich die Bewegungsgleichung (3.1) des MKS auf diesen Referenzpunkt bezieht, kann eine Adaption der genannten Größen relativ zu diesem Referenzpunkt B mit Hilfe der Massenmatrix  $M_B$  und Matrix der gyroskopischen Kräfte  $G_B$  vorgenommen werden. Hierbei gehen Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente als Variablen in die einzelnen Matrizen ein, welches eine Identifizierung und anschließende Adaption erleichtert.

Praktisch wird der Bezugspunkt B einem körperfesten Symmetriepunkt am Rotor zugeordnet, der unabhängig vom Schwerpunkt ist. Durch die Symmetrie vereinfacht sich das Gleichungssystem, was der Echtzeitfähigkeit aufgrund des geringeren Rechenaufwands entgegenkommt. Durch den körperfesten, vom Schwerpunkt unabhängigen Bezugspunkt wird der Einfluss der Variablen auf das Gleichungssystem verhindert, so dass mit konstanten Matrizen gerechnet werden kann.

Bei der Verwendung des Schwerpunktes als Bezugspunkt entstehen einfache Gleichungssysteme. Allerdings sind neben der Massenmatrix auch die Koppelgleichungen zwischen dem mechanischen System und den Aktoren lastabhängig. Da sich der Schwerpunktvektor durch die mechanische Bearbeitung am Werkstück ändert, wenn auch verhältnismäßig langsam, bedarf es einer ständigen Anpassung, so dass letztlich eine äquivalente Struktur der hier vorgestellten Lösung entsteht.

#### 3.3.2 Prinzip der Koppelung

In der Modellbeschreibung als MKS existiert eine Verkoppelung zwischen den Aktoren und dem mechanischen System, einschließlich dem Antriebsmoment und anderer Störkräfte. Der Vektor der verallgemeinerten Kräfte  $Q_B$  wird durch die Aktoren und ihren Kräfte  $F_A$  gebildet. Daneben wirken der Weg  $q_B$  und die Geschwindigkeit  $\dot{q}_B$  der  $f$  Freiheitsgrade des mechanischen Systems auf die Luftspalte  $\delta_A$  und Luftspaltgeschwindigkeiten  $\dot{\delta}_A$  der magnetischen Aktoren zurück.

Mit Hilfe der JACOBI-Matrix kann eine allgemeine Beziehung zwischen den äußeren Kräften und Momenten  $Q$  und den durch die Magnetaktoren aufgebrachten Kräften  $F_A$  hergestellt werden. Zur Ableitung bedient man sich des Prinzips der virtuellen Verschiebung: bewegt man gedanklich ein mechanisches System, das sich im Gleichgewicht befindet, ein Stück längs einer der möglichen Bahnen, so ist die Summe der Arbeiten, welche die angreifenden Kräfte und Momente leisten, gleich Null. Hierbei wird Reibungslosigkeit vorausgesetzt.

Zur Erläuterung wird ein vereinfachtes Magnetlager angenommen, welches sich bereits im Gleichgewichtszustand befindet. Würde z. B. einer oder mehrere Aktoren für einen kurzen Augenblick Kräfte  $F_{A_i}$  liefern, die ein wenig größer oder kleiner als für den Gleichgewichtszustand notwendig wären, so würde sich der Rotor ein wenig um die jeweiligen Luftspalte  $\Delta \delta_{A_i}$  verschieben. Somit hätten die  $n_A$  Magnetaktoren eine Arbeit verrichtet:

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n_A} F_{A_i} \Delta \delta_{A_i}. \quad (3.2)$$

Die Winkeländerungen ( $\phi \ll 1$ ) werden in der obigen Gleichgewichtsbedingung (3.2) durch eine äquivalente Verschiebung approximiert. Der Rotor würde z. B. um  $\Delta q = (\Delta x \Delta y \Delta z)^T$  bewegt werden und, falls eine äußere Kraft  $Q = (F_x F_y F_z)^T$  angreift, die Arbeit  $Q^T \Delta q$  nach außen abgeben. Zu beachten ist, dass die Arbeit als Skalarprodukt definiert ist und Vektoren im Allgemeinen als Spaltenvektoren geschrieben werden. Folglich muss aus energeti-

scher Betrachtung die Gleichheit der verrichteten Arbeit gelten:

$$\sum_{i=1}^{n_A} F_{A_i} \Delta \delta_{A_i} = \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{q}$$

$$\begin{pmatrix} F_{A_1} & F_{A_2} & \cdots & F_{A_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_{A_1} \\ \Delta \delta_{A_2} \\ \vdots \\ \Delta \delta_{A_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{F}_A^T \Delta \delta_A = \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{q}. \quad (3.4)$$

Nun gilt mit der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}$ :

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J} \Delta \delta_A. \quad (3.5)$$

Gleichung (3.5) in (3.4) eingesetzt führt zu:

$$\mathbf{F}_A^T \Delta \delta_A = (\mathbf{Q}^T \mathbf{J}) \Delta \delta_A. \quad (3.6)$$

Diese Gleichung muss für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\Delta \delta_A$  gelten. Daher folgt aus Gleichung (3.6) die Beziehung:

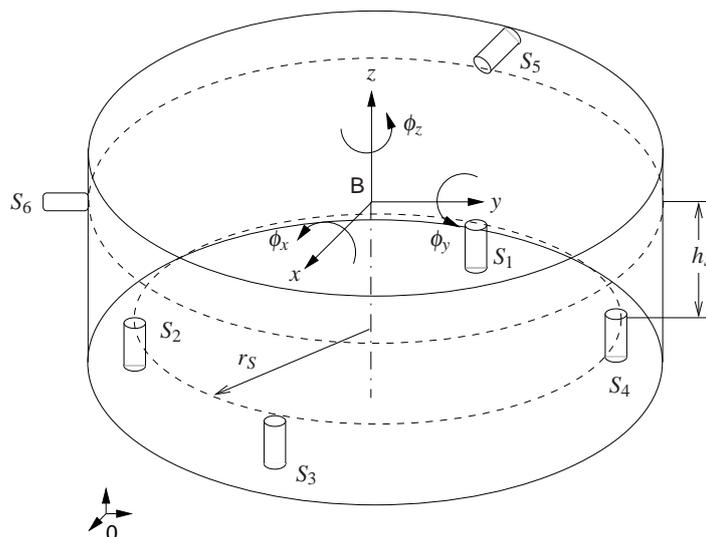
$$\mathbf{F}_A^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{J} \quad (3.7)$$

bzw.

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{J}^T \mathbf{Q}. \quad (3.8)$$

Diese Beziehung gilt für jede mögliche Verschiebung  $\Delta \mathbf{q}$  sowie für die Transformation von Momenten und ist auch als  $\mathbf{J}^T$ - bzw. Kraftprinzip bekannt, [Mül92].

Neben den Aktoren sind auch die Sensorsignale überbestimmt, da im Allgemeinen mehr Sensoren verwendet werden als das System Freiheitsgrade besitzt. Die Gründe sind Redundanz und Überlegungen hinsichtlich der einfachen Berechnung des generalisierten Koordinatenvektors  $\mathbf{q}_B$ . Die Entkoppelung geschieht mit Hilfe einer weiteren JACOBI-Matrix, welche formal aus der partiellen Ableitung der Sensorgleichungen nach den generalisierten Koordinaten hervorgeht. Dieses wird im nächsten Abschnitt erläutert.



**Abbildung 3.2:**  
Sensoranordnung am Rundtisch mit Bezugspunkt B in der Sensorebene  $S_5/S_6$

### 3.4 Bestimmung der JACOBI-Matrizen

Ausgehend vom Aufbau des Rundtisches, wie in der Explosionsansicht 3.1 dargestellt, können die Transformationsmatrizen aufgestellt werden. Diese sind im Einzelnen die JACOBI-Matrix zur Bestimmung des Lagevektors aus dem Sensorvektor und die Aktormatrix zur Bestimmung der Aktorluftspalte aus dem Lagevektor.

#### 3.4.1 Bestimmung der Sensormatrix

Mit den Sensoren soll die translatorische und rotatorische Lage bzw. Änderung des Bezugspunktes, repräsentiert durch den verallgemeinerten Lagevektor  $\mathbf{q}_B$ , direkt durch Abstandsmessung bestimmt werden.

Hierbei werden lineare Sensoren vorausgesetzt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Messflächen des Rotors am Umfang isotrop sind, d. h. keine Abhängigkeit  $\delta_{S_i} \neq f(\phi_z)$  existiert.

Dazu werden mit Hilfe der Sensormatrix die jeweils gemessenen  $n_S$  Sensorabstände  $\delta_{S_1} \cdots \delta_{S_N}$  in den generalisierten Koordinaten-Vektor transformiert:

$$\mathbf{q}_B = \begin{pmatrix} x & y & z & \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Mit der Sensormatrix wird gleichfalls der Bezugspunkt B festgelegt. Im Folgenden wird dieser in die durch die radialen Sensoren  $S_5/S_6$  aufgespannte Ebene gelegt, Abbildung 3.2. Bei dem vorliegenden Rundtisch sind die axialen Sensoren neben den Magneten in den jeweiligen Koordinatenachsen angeordnet.

Dabei wurde der Bezugspunkt in Hinblick auf die Rechenzeit bzw. Echtzeitfähigkeit so gewählt, dass sich einfache Gleichungen ergeben.

Die Bestimmung der Sensormatrix erfolgt durch Aufstellen der 6 Sensorgleichungen:

$$\delta_{S_1} = z + r_S \phi_y \quad (3.10a)$$

$$\delta_{S_2} = z - r_S \phi_x \quad (3.10b)$$

$$\delta_{S_3} = z - r_S \phi_y \quad (3.10c)$$

$$\delta_{S_4} = z + r_S \phi_x \quad (3.10d)$$

$$\delta_{S_5} = x \quad (3.10e)$$

$$\delta_{S_6} = y, \quad (3.10f)$$

wobei für die Winkeländerungen  $\phi_x \ll 1$  und  $\phi_y \ll 1$  gelten.

Nach Zusammenfassung der 6 Sensorauslenkungen zu dem Sensorvektor  $\delta_S = (\delta_{S_1} \cdots \delta_{S_6})^T$  mit  $\delta_S = \delta_S(q_B)$  durch Bildung des totalen Differentials:

$$\mathbf{J}_{SB} = \frac{\partial \delta_S}{\partial q_B} \quad (3.11)$$

erhält man die  $(6 \times 6)$  JACOBI-Matrix:

$$\delta_S = \mathbf{J}_{SB} q_B$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{S_1} \\ \delta_{S_2} \\ \delta_{S_3} \\ \delta_{S_4} \\ \delta_{S_5} \\ \delta_{S_6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & r_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -r_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_S & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Man erkennt an der Nullspalte, dass die Rotation durch die Sensoren nicht erfasst werden kann. Daher wird die Matrix auf die wesentlichen Komponenten durch Streichung dieser Spalte reduziert. Folglich muss der um  $\phi_z$  reduzierte verallgemeinerte Lagevektor:

$$\begin{aligned} q_B &= (r_B \phi_B)^T \\ &= (x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y)^T \end{aligned} \quad (3.13)$$

eingeführt werden, welcher der bisherigen Notation folgt, und man erhält folglich die  $(6 \times 5)$  Sensormatrix.

Um aus dem Sensorvektor  $\delta_S$  den generalisierten Koordinatenvektor  $q_B$  zu erhalten, muss von der Matrix (3.12) die Inverse gebildet werden. Die  $(6 \times 5)$  Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}$  kann nur

mit Hilfe der Moore-Penrose-Inversen invertiert werden:

$$\mathbf{q}_B = \mathbf{J}_{SB}^+ \boldsymbol{\delta}_S$$

$$\begin{pmatrix} r_B \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2r_S} & 0 & \frac{1}{2r_S} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2r_S} & 0 & -\frac{1}{2r_S} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{S_1} \\ \delta_{S_2} \\ \delta_{S_3} \\ \delta_{S_4} \\ \delta_{S_5} \\ \delta_{S_6} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Diese  $(5 \times 6)$  Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  beschreibt die Koppelung zwischen den gemessenen Sensorabständen und der Translation und Rotation des Bezugspunktes B. Hält man sich den reduzierten verallgemeinerten Lagevektor  $\mathbf{q}_B$  (3.13) vor Augen, so erkennt man z. B., dass die Koordinate  $z$  durch den Mittelwert aller Luftspalte in  $z$ -Richtung ( $\delta_{S_1}$  bis  $\delta_{S_4}$ ) gebildet wird oder der Winkel  $\phi_y$  für  $\phi_y \ll 1$  der Tangens der Gegenkathete  $\frac{1}{2}(\delta_{S_1} - \delta_{S_3})$  und der Ankathete  $r_S$  ist. Die Winkel des Lagevektors  $\mathbf{q}_B$  sind folglich im Bogenmaß.

Es muss angemerkt werden, dass die Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  (3.14) auch direkt durch Aufstellen der entsprechenden Gleichungen gebildet werden kann. Es muss aber beachtet werden, dass die Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  aufgrund der Überbestimmtheit des Sensorvektors dann nicht mehr invertierbar ist.

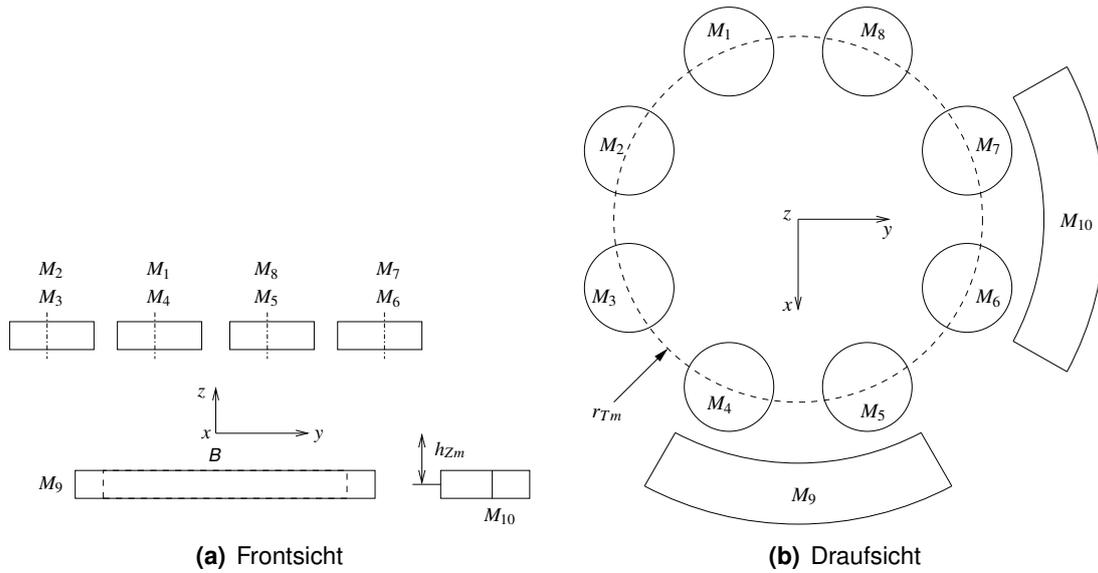
Aus den durch die Sensoren bestimmten Abständen lassen sich 5 der 6 Freiheitsgrade errechnen. Der 6. Freiheitsgrad, die Rotation um die  $z$ -Achse als Hauptbewegung, muss durch einen zusätzlichen Drehgeber ermittelt werden.

#### 3.4.2 Bestimmung der JACOBI-Matrix für die Aktoren

Mit Hilfe der Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  kann aus dem gemessenen Sensorvektor  $\boldsymbol{\delta}_S$  der verallgemeinerte Lagevektor  $\mathbf{q}_B$  bestimmt werden, welcher im Lageregler zur Verfügung steht. Mit diesem können  $\mathbf{q}_B$  die einzelnen Luftspalte  $\delta_{A_i}$  der Aktoren bestimmt werden.

Die 8 axialen Magnetaktoren  $A_1 \dots A_8$  des Rundtisches sind um  $45^\circ$  untereinander versetzt angeordnet, wie aus dem Aufbau in der Explosionsansicht 3.1 zu ersehen ist. Aus konstruktiven Gründen sind die axialen Aktoren um  $22,5^\circ$  aus dem Koordinatensystem versetzt. Dies ist bedingt durch die Anordnung der axialen Sensoren im Koordinatensystem und um den Umfang des Rundtisches gering zu halten, Abbildung 3.3.

Zur Bestimmung der JACOBI-Matrix werden die erzeugten Kräfte wiederum als punktförmig wirkend angenommen. Zur Transformation in das kartesische Koordinatensystem des


**Abbildung 3.3:** Aktoranordnung am Rundtisch

Stators bzw. Rundtisches werden zwei Hilfsfunktionen eingeführt:

$$\mathbf{Gk}(n) = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(n-1)\right) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Ak}(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(n-1)\right), \quad (3.16)$$

mit deren Hilfe die axialen Magnet-Luftspalte als Funktion geschrieben werden können:

$$\delta_{A_i} = z - r_{Tm} \mathbf{Gk}(n) \phi_x + r_{Tm} \mathbf{Ak}(n) \phi_y \quad \text{mit } n = 1 \dots 8. \quad (3.17)$$

Somit lauten die 8 axialen Magnet-Luftspalte:

$$\delta_{A_1} = z - r_{Tm} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_x + r_{Tm} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18a)$$

$$\delta_{A_2} = z - r_{Tm} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_x + r_{Tm} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18b)$$

$$\delta_{A_3} = z - r_{Tm} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_x - r_{Tm} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18c)$$

$$\delta_{A_4} = z - r_{Tm} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_x - r_{Tm} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18d)$$

$$\delta_{A_5} = z + r_{Tm} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_x - r_{Tm} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18e)$$

$$\delta_{A_6} = z + r_{Tm} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_x - r_{Tm} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18f)$$

$$\delta_{A_7} = z + r_{Tm} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_x + r_{Tm} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \phi_y \quad (3.18g)$$

$$\delta_{A_8} = z + r_{Tm} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_x + r_{Tm} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \phi_y. \quad (3.18h)$$

### 3 Konzept und Modellbildung

Die beiden verbleibenden radialen Aktor-Luftspalte können wie folgt berechnet werden:

$$\delta_{A_9} = x - h_{Zm} \phi_y \quad (3.19a)$$

$$\delta_{A_{10}} = y + h_{Zm} \phi_x. \quad (3.19b)$$

Bei der Bestimmung der Aktorluftspalte gemäß Gleichung (3.18) bzw. (3.19) werden die Kräfte der Aktoren als punktförmig angenommen. Weiterhin besitzen diese Gleichungen nur Gültigkeit für kleine Winkeländerungen, d. h. es gilt:  $\phi_x \ll 1$  und  $\phi_y \ll 1$ .

Zur weiteren Vereinfachung werden in Gleichung (3.18) die Substitutionen  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  und  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  sowie:

$$\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) = sn \quad (3.20a)$$

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = cs \quad (3.20b)$$

durchgeführt.

Nach Zusammenfassen der 10 Aktor-Spalte zu dem Aktor-Luftspaltvektor  $\delta_A = (\delta_{A_1} \cdots \delta_{A_{10}})^T$  mit  $\delta_A = \delta_A(q_B)$  und Bildung des totalen Differentials gemäß:

$$J_{AB} = \frac{\partial \delta_A}{\partial q_B} \quad (3.21)$$

erhält man die  $(n_A \times f)$  JACOBI-Matrix. Wie bereits in den Gleichungen (3.18) zu ersehen war, ist der 6. Freiheitsgrad  $\phi_z$  unerheblich für die Luftspalte der Aktoren - es besteht folglich keine Rückwirkung der Aktoren auf den Freiheitsgrad um die  $z$ -Achse. Entsprechend ist in der Matrixschreibweise die letzte Spalte eine Nullspalte und wird im Folgenden nicht weiter geschrieben:

$$\delta_A = J_{AB} q_B$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{A_1} \\ \delta_{A_2} \\ \delta_{A_3} \\ \delta_{A_4} \\ \delta_{A_5} \\ \delta_{A_6} \\ \delta_{A_7} \\ \delta_{A_8} \\ \delta_{A_9} \\ \delta_{A_{10}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -r_{Tm} sn & r_{Tm} cs \\ 0 & 0 & 1 & -r_{Tm} cs & r_{Tm} sn \\ 0 & 0 & 1 & -r_{Tm} cs & -r_{Tm} sn \\ 0 & 0 & 1 & -r_{Tm} sn & -r_{Tm} cs \\ 0 & 0 & 1 & r_{Tm} sn & -r_{Tm} cs \\ 0 & 0 & 1 & r_{Tm} cs & -r_{Tm} sn \\ 0 & 0 & 1 & r_{Tm} cs & r_{Tm} sn \\ 0 & 0 & 1 & r_{Tm} sn & r_{Tm} cs \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -h_{Zm} \\ 0 & 1 & 0 & h_{Zm} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_B \\ \phi_B \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Weiterhin muss der um  $\phi_z$  reduzierte verallgemeinerte Kraft- und Momentenvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B &= (\mathbf{F}_B \mathbf{M}_B)^T \\ &= (F_x F_y F_z M_x M_y)^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

eingeführt werden, welcher der bisherigen Notation folgt.

Wie in Abschnitt 4.1 zu ersehen ist, wird für die Modellbildung des Lagereglers die Inverse der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}$  gesucht. Die  $(10 \times 5)$  JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}$  (3.22) kann mit Hilfe der Moore-Penrose-Inversen invertiert werden. Nach der Invertierung wird zur Vereinfachung folgende Substitution durchgeführt:

$$c_1 = \frac{1}{4} \frac{h_{Zm}}{r_{Tm}} \quad (3.24a)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \frac{1}{r_{Tm}}, \quad (3.24b)$$

so dass die inverse  $(5 \times 10)$  JACOBI-Matrix durch Gleichung (3.25) dargestellt wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_B &= \mathbf{J}_{AB}^+ \delta_A \\ \begin{pmatrix} r_B \\ \phi_B \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 c s & c_1 s n & -c_1 s n & -c_1 c s & -c_1 c s & -c_1 s n & c_1 s n & c_1 c s & 1 & 0 \\ c_1 s n & c_1 c s & c_1 c s & c_1 s n & -c_1 s n & -c_1 c s & -c_1 c s & -c_1 s n & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -c_2 s n & -c_2 c s & -c_2 c s & -c_2 s n & c_2 s n & c_2 c s & c_2 c s & c_2 s n & 0 & 0 \\ c_2 c s & c_2 s n & -c_2 s n & -c_2 c s & -c_2 c s & -c_2 s n & c_2 s n & c_2 c s & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_A. \end{aligned} \quad (3.25)$$

## 3.5 Modell der Regelstrecke

Aus den einzelnen Modellen wird die offene Regelstrecke modelliert. Dabei beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 5$ . Diese werden unabhängig voneinander geregelt, wie in Kapitel 4 gezeigt werden wird. Hinzu kommt die Überbestimmtheit infolge der Menge der Aktoren und Sensoren. Diese wird, wie bereits in Abschnitt 3.4.1 und 3.4.2 geschildert, durch Transformationsmatrizen gelöst.

Die Aktoren müssen in der Lage sein, alle mechanischen Freiheitsgrade unabhängig voneinander anzusteuern, somit darf die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}^+$  (3.25) keine linear voneinander abhängigen Zeilen bzw. Spalten enthalten, d. h.:

$$\text{rg}(\mathbf{J}_{AB}^+) = f. \quad (3.26)$$

Gleiches gilt für die Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  (3.14). Sie muss aus dem Sensorvektor  $\delta_S$  eindeutig

### 3 Konzept und Modellbildung

den generalisierten Koordinatenvektor  $\mathbf{q}_B$  bilden, d. h.:

$$\text{rg}(\mathbf{J}_{SB}^+) = f. \quad (3.27)$$

Die Rangbestimmung kann durch elementare Umformungen (z. B. GAUSSCHEN Algorithmus) oder einfach in MAPLE bzw. MATLAB erfolgen. Wie zu erwarten, beträgt der Rang der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}^+$  und Sensormatrix  $\mathbf{J}_{SB}^+$  jeweils 5, entsprechend den  $f = 5$  vom Magnetlager beeinflussbaren bzw. messbaren Freiheitsgraden. Er ist somit höchstens gleich der kleineren Zeilen- oder Spaltenanzahl und ist unabhängig vom Transponieren einer Matrix, [ZF84].

Das nachfolgend gebildete Modell basiert der Einfachheit wegen auf einem nicht rotierenden Körper, der als MKS dargestellt wird. Dies erlaubt, das in Abschnitt 3.3.1 grundlegende Prinzip darzustellen. Diese grobe Vereinfachung wird in einem späteren Kapitel (3.6) durch die Erweiterung zurückgenommen. Somit lautet die Bewegungsgleichung zunächst:

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_B = \mathbf{Q}_B. \quad (3.28)$$

Jeder der  $n_A$  magnetischen Aktoren erzeugt, wie noch ausführlich in Abschnitt 3.9 beschrieben wird, in Abhängigkeit von Luftspalt  $\delta_A$  und dem von den Stromstellern bereitgestellten Strom  $i_A$  in der linearisierten Darstellung die Kraft:

$$F_A = k_i i_A + k_s \delta_A, \quad (3.29)$$

wobei die für die Modellbeschreibung jeweiligen einzelnen Aktor-Luftspalte  $\delta_A$  aus den generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}_B$  mit Hilfe der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}$  (3.22) bestimmt werden müssen:

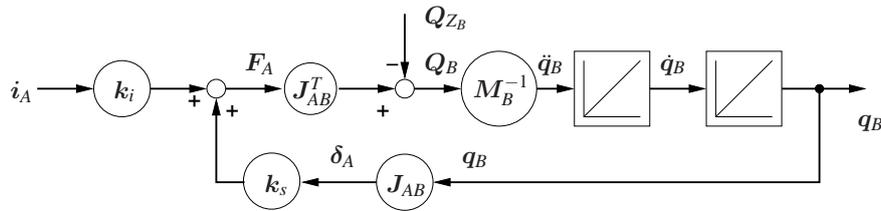
$$\mathbf{F}_A = \mathbf{k}_i \mathbf{i}_A + \mathbf{k}_s \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B. \quad (3.30)$$

Diese an dem Rotor verteilt angreifenden Kräfte müssen in die Koordinaten des MKS-Modells transformiert und zu dem Vektor der generalisierten Kräfte und Momente  $\mathbf{Q}_B$  zusammengefasst werden. Zur Transformation wird die bereits in Abschnitt 3.4.2 aufgestellte JACOBI-Matrix benutzt:

$$\delta_A \stackrel{(3.22)}{=} \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B, \quad (3.31)$$

wobei das Prinzip der virtuellen Verschiebung aus Abschnitt 3.3.2 beachtet werden muss. Für die Energiebilanz aus Gleichung (3.3) bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A^T \delta_A &= \mathbf{Q}_B^T \mathbf{q}_B \\ \mathbf{F}_A^T (\mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B) &= \mathbf{Q}_B^T \mathbf{q}_B \\ \mathbf{J}_{AB}^T \mathbf{F}_A &= \mathbf{Q}_B. \end{aligned} \quad (3.32)$$


**Abbildung 3.4:** Regelstrecke Mehrfreiheitsgrad Magnetlager

Somit kann die Bewegungsgleichung in den Koordinaten des MKS mit dem Störkraftvektor  $Q_{Z_B}$  aufgestellt werden:

$$\ddot{q}_B = M_B^{-1} (Q_B - Q_{Z_B}). \quad (3.33)$$

Werden die Gleichungen zusammengefasst, so ergibt sich das Modell der Regelstrecke als MKS, welches in Abbildung 3.4 dargestellt ist. Bei Vernachlässigung des Störkraftvektors  $Q_{Z_B}$  in Gleichung (3.33) und nach Ersetzung von  $Q_B$  durch Gleichung (3.32) und  $F_A$  durch (3.30) erhält man:

$$\ddot{q}_B = M_B^{-1} J_{AB}^T (k_i i_A + k_s J_{AB} q_B) \quad (3.34)$$

bzw. in der Zustandsdarstellung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_B \\ \dot{q}_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ M_B^{-1} J_{AB}^T k_s J_{AB} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} q_B \\ \dot{q}_B \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M_B^{-1} J_{AB}^T k_i \end{pmatrix}}_B i_A \quad (3.35a)$$

$$q_B = \underbrace{\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} q_B \\ \dot{q}_B \end{pmatrix}. \quad (3.35b)$$

Hierin ist  $A$  die  $(10 \times 10)$  Systemmatrix mit  $\text{rg}(A) = 10$  sowie  $B$  die  $(10 \times 10)$  Steuer- und  $C$  die  $(5 \times 10)$  Ausgangsmatrix, jeweils mit dem Rang von 5. Die Bestimmung des Ranges der  $(10 \times 50)$  Steuerbarkeitsmatrix  $Q_s$  und der  $(50 \times 5)$  Beobachtbarkeitsmatrix  $Q_b$  für das Mehrfreiheitsgradlager ergibt für beide Matrizen den Rang 5. Somit ist das System vollständig steuer- und beobachtbar.

### 3.6 Erweitertes Modell der Regelstrecke

Die Annahme eines nicht rotierenden Rotors ist insbesondere für einen magnetgelagerten Rundtisch nicht haltbar. Insofern muss das regelungstechnische Modell aus dem vorhergehenden Abschnitt erweitert werden. Das bisherige Modell aus Abschnitt 3.5 hat in der

### 3 Konzept und Modellbildung

Bewegungsgleichung (3.28) lediglich die konstante Massenmatrix  $M_B$  berücksichtigt. Zudem vernachlässigt es den Einfluss der Normalkräfte des Direktantriebes.

Konkret wird bei der Erweiterung des Modells die Matrix der gyroskopischen Kräfte (Kreisel- und Corioliskräfte)  $G$  berücksichtigt, womit die bisherige Bewegungsgleichung des MKS entsprechend erweitert werden muss:

$$M_B \ddot{q}_B + G_B \dot{q}_B = Q_B. \quad (3.36)$$

Allerdings treten nur in der Hauptachse  $z$  nennenswerte Winkelgeschwindigkeiten auf. Entsprechend werden nur jene Terme berücksichtigt, welche mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_z$  der Hauptachse gekoppelt sind. Des Weiteren sind die quadratischen Geschwindigkeitssterme  $\dot{\phi}_x^2$  und  $\dot{\phi}_y^2$  in den Nebenachsen vernachlässigbar klein. Diese Annahmen wurden durch Simulationen bestätigt. In diesen Achsen treten hohe Beschleunigungen auf, die jedoch aufgrund ihrer linearen Abhängigkeit bereits in Gleichung (B.102) berücksichtigt wurden. Entsprechend werden auch die Produkte der beiden Geschwindigkeiten  $\dot{\phi}_x$  und  $\dot{\phi}_y$  vernachlässigt.

Für die mit der Hauptachse  $z$  gekoppelten Winkelgeschwindigkeiten wird daher der Vektor der verknüpften Geschwindigkeitsterme  $\dot{\psi}_B$  neu definiert, siehe auch Abschnitt B.5.6. Entsprechend lautet der neue fiktive Geschwindigkeitsvektor:

$$\dot{\psi}_B = \left( \dot{\phi}_z^2 \quad \dot{\phi}_y \dot{\phi}_z \quad \dot{\phi}_x \dot{\phi}_z \right)^T \quad (3.37)$$

und der Beschleunigungsvektor in den generalisierten Koordinaten:

$$\ddot{q}_B = \left( \ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z} \quad \ddot{\phi}_x \quad \ddot{\phi}_y \quad \ddot{\phi}_z \right)^T. \quad (3.38)$$

Die gegenüber Abschnitt 3.5 erweiterte Bewegungsgleichung für die Rotation um die  $z$ -

Achse lautet:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{Q}_B &= {}^0\mathbf{M}_B {}^0\ddot{\mathbf{q}}_B + {}^0\mathbf{G}_B {}^0\dot{\boldsymbol{\psi}}_B \\
 {}^0\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} &= {}^0\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mr_{BC_z} & -mr_{BC_y} \\ 0 & m & 0 & -mr_{BC_z} & 0 & mr_{BC_x} \\ 0 & 0 & m & mr_{BC_y} & -mr_{BC_x} & 0 \\ 0 & -mr_{BC_z} & mr_{BC_y} & J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ mr_{BC_z} & 0 & -mr_{BC_x} & J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \end{bmatrix} {}^0\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi}_x \\ \ddot{\phi}_y \\ \ddot{\phi}_z \end{pmatrix} \\
 &+ {}^0\begin{bmatrix} -mr_{BC_x} & 0 & mr_{BC_z} \\ -mr_{BC_y} & mr_{BC_z} & 0 \\ 0 & mr_{BC_y} & mr_{BC_x} \\ -J_{yz} & J_{zz} - J_{yy} & -J_{yx} \\ J_{xz} & J_{xy} & J_{xx} - J_{zz} \end{bmatrix} {}^0\begin{pmatrix} \dot{\phi}_z^2 \\ \dot{\phi}_y \dot{\phi}_z \\ \dot{\phi}_x \dot{\phi}_z \end{pmatrix}. \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass die Gleichung (3.39) in dem System  $\mathcal{K}_0$  des Stators dargestellt ist. Da der Schwerpunktvektor  $\mathbf{r}_{BC}$  und der Trägheitstensor  $\mathbf{J}_B$  jedoch in den Koordinaten des Rotors  $\mathcal{K}_1$  bekannt sind, müssen diese zuvor in die Ständerkoordinaten  $\mathcal{K}_0$  transformiert werden. Den Schwerpunktvektor erhält man durch einfache Koordinatentransformation:

$${}^0\mathbf{r}_{BC} = {}^{01}\mathbf{T}^1 \mathbf{r}_{BC} \tag{3.40}$$

und den Trägheitstensor gemäß Gleichung (B.84):

$${}^0\mathbf{J}_B(\phi_z) = {}^{01}\mathbf{T}^1 \mathbf{J}_B {}^{01}\mathbf{T}^T \tag{3.41}$$

jeweils in den Ständerkoordinaten  $\mathcal{K}_0$ . Diese Transformation ist jedoch nur für die Simulation der Regelstrecke relevant.

Die Erweiterung des Modells erfolgt weiterhin um den Einfluss des Direktantriebes. Aufgrund seines Synchron-Prinzips besitzt der Torque-Motor eine Normalkraft äquivalent einem Permanentmagneten. Daher kann die Abhängigkeit der Normalkraft vom Luftspalt sehr einfach als weiterer Kraft-Weg-Faktor des Torque-Motors modelliert werden. Hierzu werden die Angaben des Herstellers aus [ETE01] genutzt. Es handelt sich um eine sehr einfache Erweiterung um den Direktantrieb, da die durch den Motor dynamisch erzeugten Störkräfte und -momente nicht ohne Weiteres genauer beachtet werden können. Dies hat seine praktischen Ursachen in der fehlenden Schnittstelle bzw. Unterstützung des Servo-Umrichters zu der Lageregelung des Magnetlagers.

Zur Bestimmung der Matrix werden die jeweiligen Einzelgleichungen mit dem axialen und radialen Kraft-Weg-Faktor  $c_{s_A}$  bzw.  $c_{s_R}$  für den Torque-Motor im Bezugspunkt B für  $\phi_x$  und

$\phi_y \ll 1$  aufgestellt:

$$F_x = c_{sR} x \quad (3.42a)$$

$$F_y = c_{sR} y \quad (3.42b)$$

$$F_z = c_{sA} z \quad (3.42c)$$

$$M_x = \phi_x c_{sR} h_{TqM} \quad (3.42d)$$

$$M_y = \phi_y c_{sR} h_{TqM} \quad (3.42e)$$

$$M_z = 0. \quad (3.42f)$$

Der Torque-Motor wird also auf seinen permanentmagnetisch wirkenden Anteil im Modell reduziert, welcher je nach Hersteller tabellarisch aufgeführt ist. Wie zu erwarten, wird der 6. Freiheitsgrad infolge der Normalkräfte des Torque-Motors bez. des Magnetlagers nicht beeinflusst, so dass die  $(5 \times 5)$  Matrix der nichtkonservativen Kräfte gebildet werden kann:

$${}^0\mathbf{Q}_B = {}^0\mathbf{N}_B {}^0\mathbf{q}_B$$

$${}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{sR} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{sR} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{sA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{sR} h_{TqM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{sR} h_{TqM} \end{bmatrix} {}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{r}_B \\ \phi_B \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Somit kann die Bewegungsgleichung (B.6) entsprechend erweitert werden:

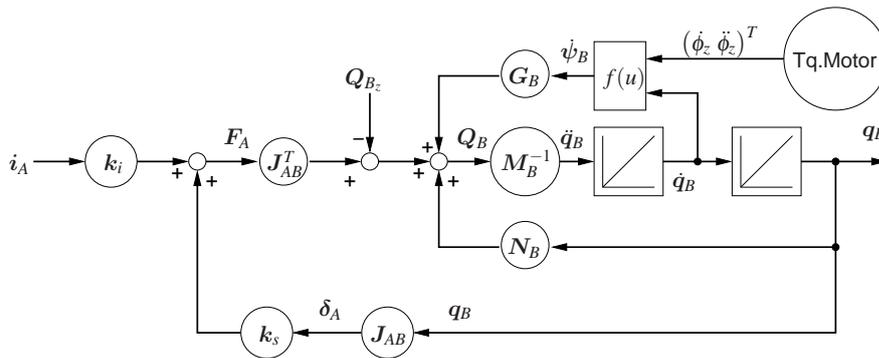
$${}^0\mathbf{M}_B {}^0\ddot{\mathbf{q}}_B + {}^0\mathbf{G}_B {}^0\dot{\mathbf{q}}_B + {}^0\mathbf{N}_B {}^0\mathbf{q}_B = {}^0\mathbf{Q}_B. \quad (3.44)$$

Auffällig ist die Diagonal-Struktur der Matrix  $\mathbf{N}_B$  (3.43) für die Normalkräfte des Torque-Motors. Sie resultiert aus der Annahme, dass die Normalkräfte des Torque-Motors kartesisch in den Koordinaten des Bezugspunktes B wiedergegeben werden.

Mit den Erweiterungen kann das regelungstechnische Modell verbessert werden, Abbildung 3.5.

### 3.7 Identifikation der Massenmatrix

Allgemein wird in der Modellbildung bzw. Regelungstechnik davon ausgegangen, dass die Parameter der Regelstrecke hinreichend genau bekannt sind. Bei der Inbetriebnah-



**Abbildung 3.5:**  
Erweiterte Regelstrecke

me des Magnetlagers bzw. Mehrgrößenreglers stehen im Allgemeinen viele mechanische Parameter aus dem CAD System wie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente zur Verfügung. Die Parameter der Magnete werden durch Messung bestimmt oder per FEM berechnet.

Praktisch ändern sich jedoch die Parameter während der Betriebszeit, z. B. durch Zulaufungen. Weiterhin sind in der Fertigung Toleranzen zulässig, die umso größer werden, je größer die Abmessungen sind. Bei dem magnetgelagerten Rundtisch mit 1500 mm im Durchmesser betragen die Toleranzen wenige  $\frac{1}{10}$  mm, wobei der Luftspalt der magnetischen Aktoren mit 0,8 mm bereits in diesen Bereich fällt.

Erschwerend kommt hinzu, dass die Parameter aufgrund der Instabilität der Regelstrecke erst im geschlossenen Regelkreis bestimmt werden können. Hierin liegt aber auch die Chance für eine automatische Parameteridentifikation, welche im Folgenden vorgestellt werden soll.

Grundlage für die Identifikation ist das Modell für die Lageregelung, Abbildung 4.2. Die normierte Auslegung des Lageregelkreises ermöglicht es, alle konfigurationsabhängigen Parameter des Magnetlagers zusammenzufassen. Die gemessene bzw. berechnete nicht-lineare Magnetkraft-Charakteristik wurde für den linearisierten Magnetaktor im inversen Magnetmodell zusammengefasst. Die konstanten geometrischen Parameter der Sensor- und Aktoranordnung geben die Sensor-  $J_{SB}^+$  (3.14) bzw. Aktor-JACOBI-Matrix  $J_{AB}^+$  (3.25) wieder. Die Massen- und Gyroskopische Matrix  $M$  bzw.  $G$  aus Kapitel B enthält dagegen die kinetischen Größen. Im Gegensatz zu dem *zeitinvarianten* inversen Magnetmodell und den JACOBI-Matrizen, können sich Masse  $m$ , Trägheitstensor  $J$  und der Schwerpunktvektor  $r_{BC}$  und somit die Elemente der Massen- und Kreiselmatrix ändern, Tabelle A.1. Folglich sind die beiden Matrizen  $M$  (B.102) und  $G$  (B.105) in Hinblick auf die Rotation *zeitvariant*. Zur optimalen Anpassung der Regelung an die variable Beladung ist daher eine Adaption der Matrizen erforderlich. Da die Kreiselmatrix  $G$  die gleichen Elemente wie die Massenmatrix besitzt, ist es ausreichend, nur die Massenmatrix  $M$  zu identifizieren. Die Einstellungen des Zustandsreglers bleiben dabei unverändert, was den Vorzug des vorliegenden Konzeptes unterstreicht.

Das Prinzip der vorliegenden Identifikation besteht in der Sollwertaufschaltung eines Testsignalvektors zur gleichzeitigen Anregung aller Freiheitsgrade. Als Testsignal wird ein Pseudo-Rausch-Binär-Signal (PRBS) verwendet, Anhang D. Dabei ist aus den resultierenden Messvektoren eine konstante Matrix zu bestimmen, die als Proportionalfaktor ei-

### 3 Konzept und Modellbildung

nes als linear angenommen Systems bzw. in der Bewegungsgleichung wirkt. Folglich wird also kein lineares dynamisches System im Sinne von [Ise92a, Ise92b] identifiziert.

Das Testsignal muss das System in allen Freiheitsgraden ausreichend anregen, um eine gute Qualität der Schätzergebnisse zu gewährleisten. Die im Rundtisch realisierte getrennte Regelung der einzelnen Freiheitsgrade ist hierbei von Vorteil. Der Frequenzbereich wird durch die Dynamik des zu identifizierenden Systems bzw. der Aktoren vorgegeben. Für den Rundtisch ist dies der Bereich unter 200 Hz. Um die Mehrgrößen-Identifikation der Massenmatrix durchführen zu können, wird für jeden der 5 Freiheitsgrade ein Signalvektor:

$$\xi_{B_{Soll}} = \left( \xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_{\phi_x}, \xi_{\phi_y} \right)^T \quad (3.45)$$

orthogonaler Testsignale benötigt, welche als Sollwert für die Lageregelung wirken. Die Orthogonalität wird durch Zeitverschiebung des PRBS Signals aus dem Grundsignal erreicht. Die Anpassung an den Frequenzbereich erfolgt durch einen Haltefaktor  $\lambda$ , mit dem das Testsignal gedehnt, d.h. jeweils für  $\lambda$  Abtastwerte konstant gehalten wird. Mit  $t_R$  für die Zykluszeit des Regelalgorithmus und  $t_{PRBS}$  für die Signallänge des PRBS Signals kann der Haltefaktor:

$$\lambda = \frac{t_{PRBS}}{t_R} \quad (3.46)$$

bestimmt werden. Folglich beträgt die Identifikationsdauer  $t_{Id}$  über  $p_{Id}$  Perioden:

$$t_{Id} = (2^{n_{LFSR}} - 1) t_{PRBS} p_{Id}. \quad (3.47)$$

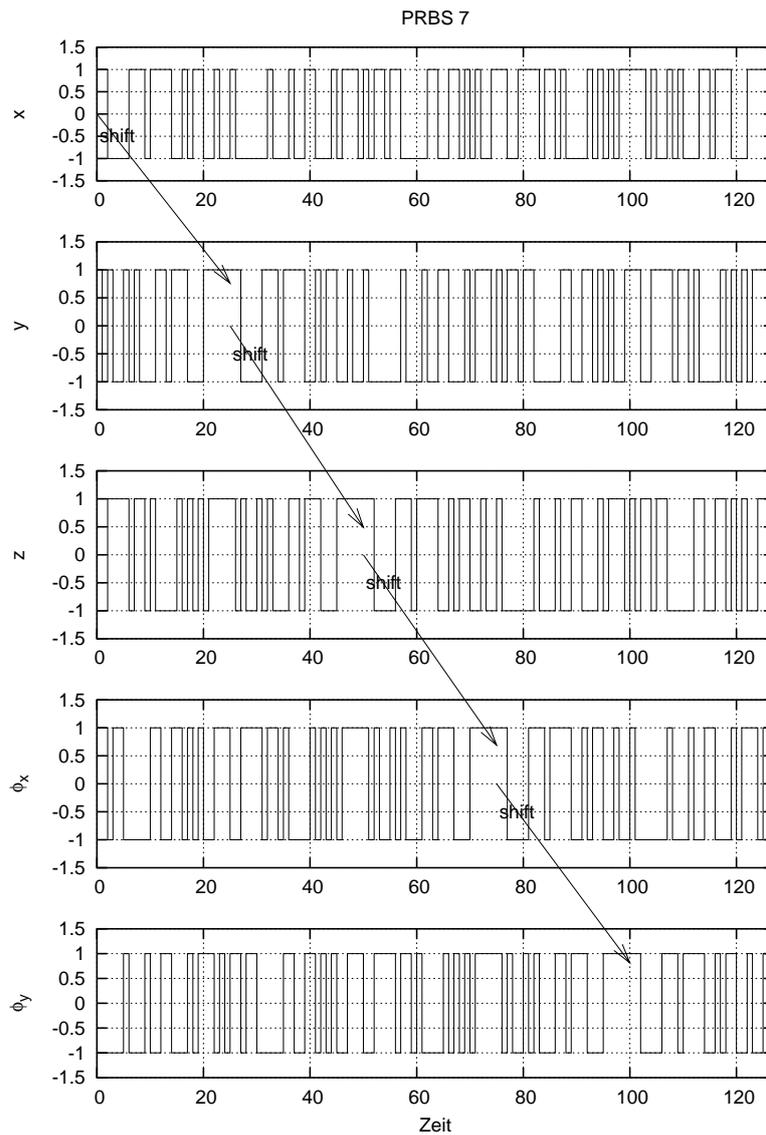
Für die Mehrgrößenidentifikation werden die verschobenen Testsignale mit dem Freiheitsgrad entsprechender Amplitude zu dem Testsignalvektor  $\xi_B(f)$  zusammengefasst und als Sollwerte auf den Lageregelkreis gegeben. Für die  $f = 5$  Freiheitsgrade ist der Signalvektor in Abbildung 3.6 dargestellt. Man erkennt die Verschiebung der Signale zueinander.

Bei der Messung wird das PRBS-Signal periodisch geschlossen, d.h. über  $p_{Id}$  wiederholt. Durch eine Mittelung über eine Periode lässt sich der Einfluss des Messrauschens mit Hilfe statistischer Methoden, wie z.B. Mittelwertbildung verringern. Weiterhin erfolgt eine Bandbreitenbegrenzung auf die Bereiche des größten Energieeintrags mit Hilfe eines Tiefpasses, z.B. IIR-Butterworth Filter 4. Ordnung, [OS89]. Die Filterung beeinflusst die Identifikation nicht negativ, da alle Signale mit dem selben Filter behandelt werden und somit die gleiche Phasenverschiebung erfahren.

Für die gleichzeitige Identifikation von  $f$  Freiheitsgraden ist eine Signallänge von  $(2^{n_{LFSR}} - 1) \geq f$  erforderlich. Gleichzeitig ist zu gewährleisten, dass die Anregungen nicht miteinander korrelieren. Um die Koppelungen der einzelnen Freiheitsgrade identifizieren zu können werden orthogonale Signale benötigt.

Ausgangspunkt für die Identifikation ist die Bewegungsgleichung:

$$Q_B \stackrel{(B,100)}{=} M_B \ddot{q}_B \quad (3.48)$$

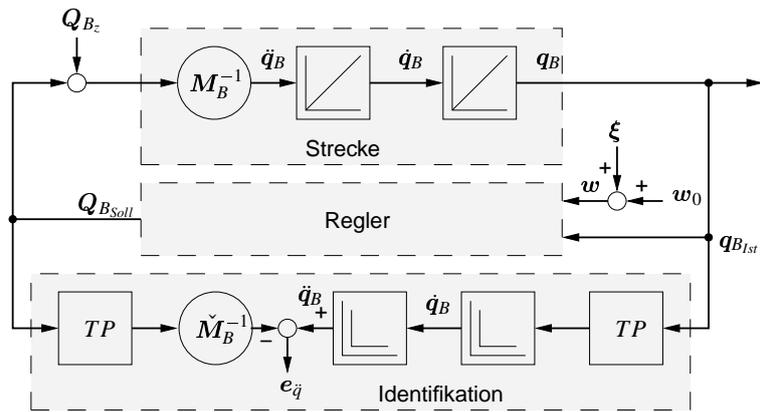


**Abbildung 3.6:** PRBS Signalfolge und Phasenverschiebung auf die 5 Freiheitsgrade ( $n_{LFSR} = 7$ )

in den generalisierten Koordinaten des Statorsystems  $\mathcal{K}_0$ , wobei das Bezugssystem bei den weiteren Betrachtungen nicht weiter explizit notiert werden soll. Hierbei ist der Vektor der generalisierten Kräfte und Momente  $\mathbf{Q}_B$  aufgrund des inversen Modells identisch mit dem Sollwert am Ausgang des Lagereglers, wie später gezeigt wird. Die Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}_B$  erfolgt durch zweifache Differentiation des gemessenen Vektors  $\mathbf{q}_B$  in den generalisierten Koordinaten. Infolge der starken Rauschempfindlichkeit der numerischen Differentiation ist eine nachfolgende Filterung mit Hilfe eines Tiefpasses unumgänglich.

Für die Schätzung der Massenmatrix stehen zwei unterschiedliche Ansätze zur Verfügung: die Schätzung der inversen Massenmatrix mit anschließender Invertierung und die direkte Schätzung.

Die Schätzgleichung für die Schätzung der inversen Massenmatrix ist in Abbildung 3.7



**Abbildung 3.7:** Prinzipieller Ansatz zur Schätzung der inversen Massenmatrix

dargestellt und lautet:

$$e_{\ddot{q}} = \ddot{q}_B - \check{M}_B^{-1} Q_B \quad (3.49)$$

mit der zu identifizierenden Massenmatrix  $\check{M}$  und dem Fehler in der Beschleunigung  $e_{\ddot{q}}$ . Die alternative Schätzungsgleichung zur direkten Schätzung der Massenmatrix  $\check{M}$  lautet:

$$e_Q = Q_B - \check{M}_B \ddot{q}_B \quad (3.50)$$

mit dem Kraftfehler  $e_Q$ . Beide Ansätze zur Bestimmung der Schätzungsgleichung unterscheiden sich hinsichtlich der Zusammensetzung des Fehlers, welcher minimiert werden soll. Sie werden im Folgenden vorgestellt.

Zur Lösung der Mehrgrößen-Schätzaufgabe ist die Auswertung der Signalverläufe von  $Q_B(t)$  bzw.  $\ddot{q}_B(t)$  in den einzelnen erregten Freiheitsgraden erforderlich, da diese Signale die notwendigen Informationen besitzen. Die einzelnen Signale liegen in abgetasteter Form als  $Q_B(k)$  und  $\ddot{q}_B(k)$  vor. Neben einer ausreichenden Anregung aller Freiheitsgrade ist eine genügend große Signallänge Voraussetzung.

Für die Schätzung werden die  $n_N$  abgetasteten Messwerte  $Q_B(k)$  und  $\ddot{q}_B(k)$  zu den  $[n_N \times f]$ -Matrizen:

$$\tilde{Q}_B = \begin{bmatrix} Q_B[1] \\ Q_B[2] \\ \vdots \\ Q_B[n_N] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

bzw.:

$$\tilde{\ddot{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_B[1] \\ \ddot{q}_B[2] \\ \vdots \\ \ddot{q}_B[n_N] \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

zusammengefasst. Die Informationen über den Zusammenhang zwischen Kraft  $Q_B$  und Beschleunigung  $\ddot{q}_B$  liegen in den  $n_N$  Zeilen, d. h. jede einzelne Zeile  $k$  mit  $k = 1 \dots n_N$  repräsentiert jeweils eine davon. Die entstehenden Messmatrizen sind spaltenregulär, d. h. es gilt  $f < n_N$ .

Gesucht ist die geschätzte inverse Massenmatrix  $\check{M}_B^{-1}$  aus Gleichung (3.49) bzw. die geschätzte Massenmatrix  $\check{M}_B$  aus (3.50) bei gegen Null gehenden Schätzfehler  $e_{\check{q}}$  bzw.  $e_Q$ .

Durch Umstellen und Linksmultiplikation von Gleichung (3.49):

$$\begin{aligned}\check{q}_B &= \check{M}_B^{-1} \check{Q}_B \\ \check{Q}_B^T \check{q}_B &= \check{M}_B^{-1} \check{Q}_B^T \check{Q}_B \\ \left(\check{Q}_B^T \check{Q}_B\right)^{-1} \check{Q}_B^T \check{q}_B &= \check{M}_B^{-1}\end{aligned}\quad (3.53)$$

erhält man die geschätzte inverse Massenmatrix  $\check{M}_B^{-1}$ . Die Massenmatrix selbst erhält man durch anschließende Inversion von Gleichung (3.53):

$$\begin{aligned}\check{Q}_B^T \check{q}_B &= \left(\check{Q}_B^T \check{Q}_B\right) \check{M}_B^{-1} \\ \check{M}_B &= \left(\check{Q}_B^T \check{q}_B\right)^{-1} \check{Q}_B^T \check{Q}_B.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Äquivalent wird mit (3.50) verfahren und man erhält die direkte Schätzgleichung:

$$\begin{aligned}\check{Q}_B &= \check{M}_B \check{q}_B \\ \check{q}_B^T \check{Q}_B &= \check{M}_B \check{q}_B^T \check{q}_B \\ \left(\check{q}_B^T \check{q}_B\right)^{-1} \check{q}_B^T \check{Q}_B &= \check{M}_B.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Beide Schätzgleichungen sind ein Spezialfall der MOORE-PENROSE Inversen nach Abschnitt C.1, der so genannten Linksinversen. Jedes einzelne Element der geschätzten Massen-Matrix wird auf die euklidische Norm zurückgeführt, wodurch sie die Lösung im Sinne der kleinsten Summe der Quadrate ist. Die  $n_N$  Informationen tragen zur Minimierung des Fehlers  $e_{\check{q}}$  bzw.  $e_Q$  bei. Daher wird dieses Verfahren auch als Schätzung bezeichnet. Die beiden Ansätze unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Qualität der geschätzten Massenmatrix.

Der Ansatz der Schätzung der inversen Massenmatrix (3.49) benutzt vorrangig die aus dem Regler bereitgestellten Soll-Kräfte  $Q_B$  in den Matrizenmultiplikationen (3.54), während die direkte Schätzung (3.50) hauptsächlich das aus dem gemessenen Lagevektor  $q_{B|st}$  durch numerische Differentiation erzeugte Beschleunigungssignal  $\ddot{q}_B$  in Gleichung (3.55) zur Schätzung benutzt. Letzteres Signal ist entsprechend mit einem größeren

Fehler behaftet, weshalb die inverse Schätzung (3.49) der Massenmatrix bzw. (3.54) zu bevorzugen ist.

Ein Maß für die Qualität der Schätzung stellt die Kondition der Messmatrizen  $\tilde{Q}_B$  und  $\tilde{q}_B$  dar, welche möglichst nahe bei 1 liegen sollte.

## 3.8 Anforderungsmodell der Aktoren

Zur Bestimmung der dynamischen und statischen Anforderungen der Aktoren werden in diesem Abschnitt 3 verschiedene Modelle vorgestellt. Die eindimensionalen Modelle dienen zur schnellen Abschätzung der notwendigen Dynamik, während das räumliche Modell eine Berechnung der notwendigen statischen Lagerkräfte der Aktoren ermöglicht.

### 3.8.1 Bestimmung dynamischer Kräfte

In der Praxis lassen sich keine einfachen analytischen Modelle zur Berechnung dynamischer Schnittkräfte entwickeln, daher ist es gängige Praxis, empirische Modelle zu verwenden. Das hier verwendete Modell basiert auf einem normierten Material (C<sub>45</sub>-Stahl) und auf entsprechenden technologischen Parametern. Die im Maschinenbau üblichen Berechnungsmethoden zur Leistungsberechnung während der Bearbeitung beziehen sich auf quasistatische Kräfte und sind somit nur bedingt zur dynamischen Auslegung des Magnetlagers geeignet.

Abbildung 3.8 ermöglicht eine grobe Abschätzung dynamischer Kräfte bei Fräsarbeiten. Betrachtet wird ein so genannter Einzahnfräser, also ein Fräskopf mit nur einer Schneide. Man erkennt anhand des Kraftanstiegs, wie die Schneide den Span aus dem Werkstück herauschält und anschließend der Span abbricht und somit die Bearbeitungskraft steil abfällt, [Mös97]. Hierbei handelt es sich um eine eindimensionale Betrachtungsweise, welche jedoch einen Hinweis auf die zu erwartenden Kraftanstiege liefert.

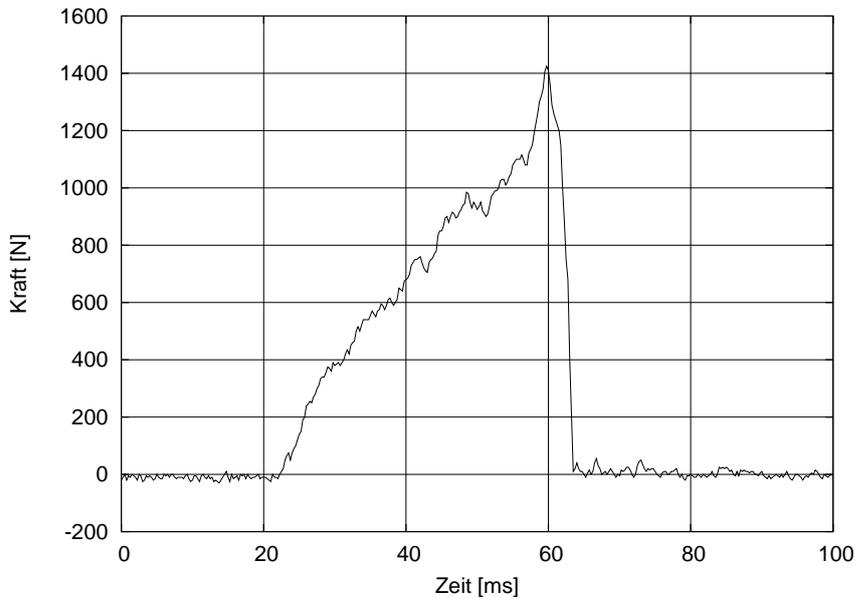
Eine detaillierte Auswertung ergibt einen Kraftanstieg  $\frac{dF}{dt}$  von ca. 1,2 kN/ms. Abbildung 3.8 liegt als Material C<sub>45</sub>-Stahl zu Grunde. Die Parameter wurden bei einer Schnitttiefe von 1,8 mm, einer Drehzahl von 40 min<sup>-1</sup> und einem Vorschub von 12 mm/min bestimmt.

Zur Bestimmung des Einflusses der Masse auf die Auslenkungen des Magnetlagers geht man von einem Starrkörper sowie einer periodischen Störkraft aus:

$$F(t) = F_{Max} \sin(\omega t) \quad (3.56)$$

mit der Spitzenkraft  $F_{Max}$  und deren Kreisfrequenz  $\omega$ , welche von außen auf das Magnetlager einwirkt. Hierbei werden weiterhin Punktmassen angenommen, welche nur einen Freiheitsgrad besitzen. Gemäß dem Newton'schen Gesetz:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) \quad (3.57)$$



**Abbildung 3.8:**  
Kraft-Zeit-  
Diagramm eines  
Einzahnfräasers,  
[Mös97]

beschleunigt diese Kraft die magnetisch gelagerte Masse, wobei letztlich nur die Auslenkung interessiert:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F(t) \quad (3.58)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int F(t) dt = -\frac{1}{m} \frac{F_{Max}}{\omega} \cos(\omega t) \quad (3.59)$$

$$x(t) = \frac{1}{m} \iint F(t) dt = -\frac{1}{m} \frac{F_{Max}}{\omega^2} \sin(\omega t). \quad (3.60)$$

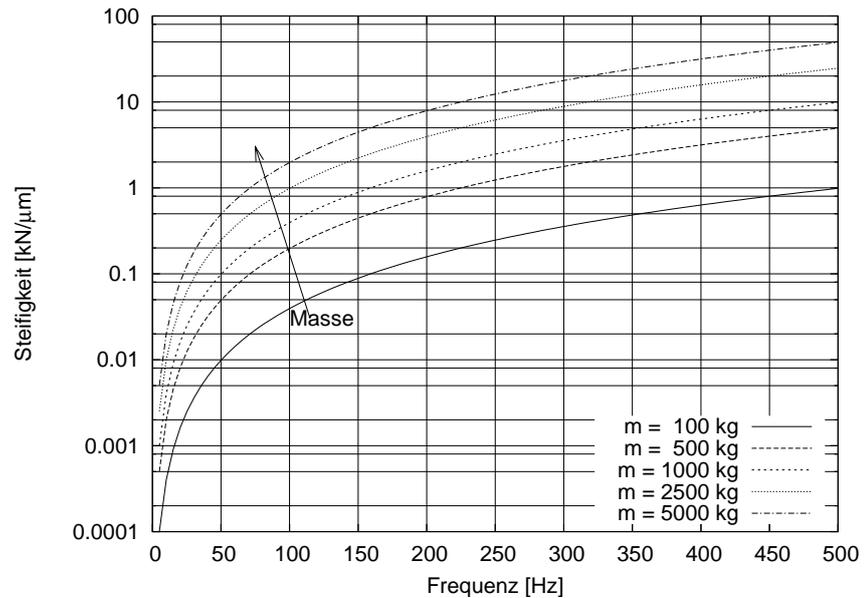
Um Aussagen über den Einfluss der Masse hinsichtlich ihrer absoluten Auslenkungen aus der Ruhelage treffen zu können, werden keine Zeitabhängigkeiten oder Wirkungsrichtungen betrachtet, Gleichung (3.60) reduziert sich somit zu:

$$x_{max} = \frac{F_{Max}}{m \omega^2}. \quad (3.61)$$

Folglich ist die Nachgiebigkeit proportional zu  $\frac{1}{m \omega^2}$  bzw. die Steifigkeit proportional zu  $m \omega^2$  und kann entsprechend in einem Steifigkeit-Frequenzgang dargestellt werden, Abbildung 3.9.

### 3.8.2 Bestimmung statischer Kräfte

Zur Bestimmung der statischen Kräfte der Magnetaktoren müssen die Lagerreaktionskräfte berechnet werden. Dazu wird das 8-Punkt Lager des Rundtisches betrachtet. Hierbei sind die 8 axialen Aktoren  $A_1$  bis  $A_8$  in einem Winkel von jeweils  $45^\circ$  angeordnet. Weiterhin



**Abbildung 3.9:**  
Steifigkeit-  
Frequenzgang

werden die radialen Kräfte von 2 radialen Aktoren  $A_9$  und  $A_{10}$  aufgebracht, welche jeweils in den Koordinatenachsen  $x$  bzw.  $y$  wirken, Abbildung 3.10(a) bzw. 3.10(b).

Die Besonderheit dieses Magnetlagers liegt in der Überbestimmtheit der Anzahl der Lagerpunkte. Zur Bestimmung der notwendigen statischen Kräfte der Aktoren wird der Rotor als hinreichend steifer Körper angenommen. Somit ist ein Einfluss von mechanischen Durchbiegungen ausgeschlossen. Zur überschlägigen Bestimmung ist diese Annahme hinreichend genau. Ansonsten müsste mit dem E-Modul in einem überbestimmten System gerechnet werden. Weiterhin werden ideale Aktoren angenommen. Bei dieser Annahme sind die Kräfte unabhängig zur Auslenkung und greifen in einem Punkt an.

Die Berechnung der notwendigen Aktorkräfte in Abhängigkeit von den angreifenden Störkräften wird wiederum mit Hilfe der virtuellen Verschiebung durchgeführt. Dabei werden die verallgemeinerten Kräfte und Momente der Aktor- und Störkräfte im Bezugspunkt B zusammengefasst.

Für die Verschiebungen in den Aktoren bzw. für die angreifenden Störkräfte gelten:

$$\Delta \delta_A = \mathbf{J}_{AB} \Delta \mathbf{q}_B \quad (3.62)$$

$$\Delta \delta_Z = \mathbf{J}_{ZB} \Delta \mathbf{q}_B. \quad (3.63)$$

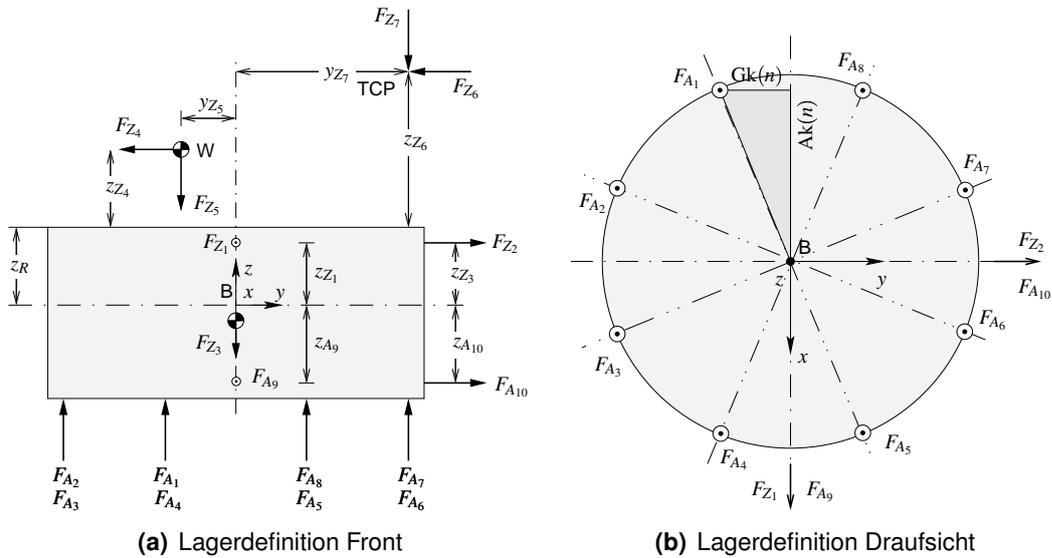
Somit gilt:

$$\Delta \mathbf{q}_B = \mathbf{J}_{AB}^+ \Delta \delta_A \quad (3.64)$$

bzw.:

$$\Delta \delta_Z = \mathbf{J}_{ZB} \mathbf{J}_{AB}^+ \Delta \delta_A. \quad (3.65)$$

Gemäß des Prinzips der virtuellen Verschiebung muss zwischen der Arbeit in den Aktoren



**Abbildung 3.10:** Definition der Kräfte und Hebel des 8-Punkt Lagers am Rundtisch

und den Störkräften ein Gleichgewichtszustand bestehen:

$$\mathbf{F}_A^T \Delta \delta_A = \mathbf{F}_Z^T \Delta \delta_Z. \quad (3.66)$$

Entsprechend gilt:

$$\mathbf{F}_A^T \Delta \delta_A = \mathbf{F}_Z^T (\mathbf{J}_{ZB} \mathbf{J}_{AB}^+) \Delta \delta_A \quad (3.67)$$

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{J}_{AB}^{T+} \mathbf{J}_{ZB}^T \mathbf{F}_Z. \quad (3.68)$$

Die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}^{T+}$  wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt 3.4.2 bestimmt. Für die Verschiebung in den Störkräften gilt:

$$\delta_{Z_1} = x + z_{Z_1} \phi_y \quad (3.69a)$$

$$\delta_{Z_2} = y - z_{Z_2} \phi_x \quad (3.69b)$$

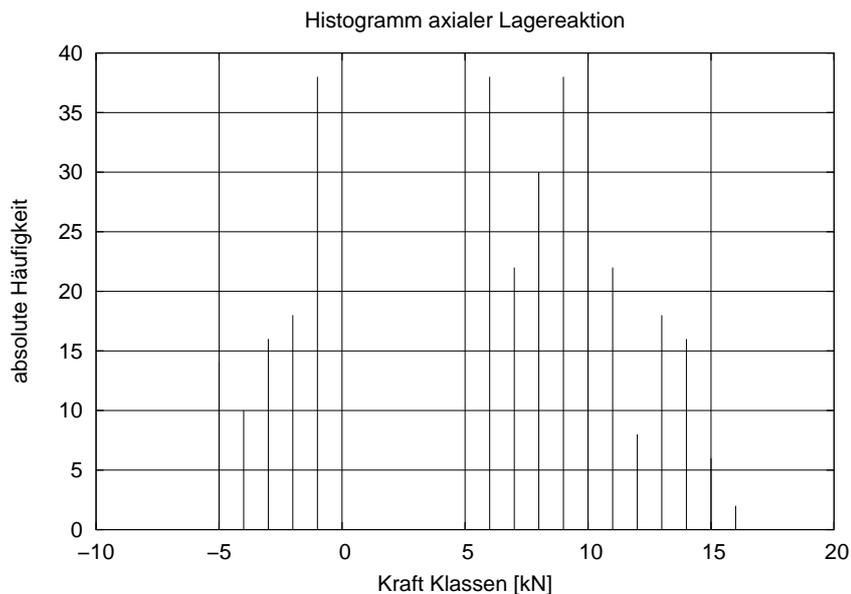
$$\delta_{Z_3} = -z \quad (3.69c)$$

$$\delta_{Z_4} = -y + (z_R + z_{Z_4}) \phi_x \quad (3.69d)$$

$$\delta_{Z_5} = -z + y_{Z_5} \phi_x \quad (3.69e)$$

$$\delta_{Z_6} = -y + (z_R + z_{Z_6}) \phi_x \quad (3.69f)$$

$$\delta_{Z_7} = -z + y_{Z_7} \phi_x \quad (3.69g)$$



**Abbildung 3.11:**  
Einteilung der Maxima axialer Lagerreaktionskräfte in Häufigkeitsklassen

und man erhält die  $(7 \times 6)$  Matrix:

$$\mathbf{F}_{Z_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{Z_1} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{Z_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & z_R + z_{Z_4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & y_{Z_5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & z_R + z_{Z_6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & y_{Z_7} & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad (3.70)$$

Damit können die axialen statischen Lagerkräfte bei gegebener Geometrie und bekannten äußeren Kräften berechnet werden. Als problematisch erweist sich in diesem Zusammenhang die Abhängigkeit der notwendigen resultierenden Maximalkraft der Magnete von der Konstruktion und der damit verbundenen Masse, welches zu einer iterativen Berechnung und Konstruktion führt. Ursache ist die begrenzte Kraft pro Fläche der Magneten. Der hier vorgestellte Ansatz setzt ideale Aktoren mit unendlicher, punktförmig wirkender Kraft voraus. Praktisch ändert jede Änderung der Magnetfläche  $A_{Mgnt}$  den durch die 8 axialen Magnetaktoren aufgespannten Radius  $r_{Tm}$  und beeinflusst damit direkt den Rotordurchmesser. Folglich ändert sich indirekt die Masse des Rotors, wodurch ein iteratives Vorgehen bei der Berechnung der axialen Aktoren notwendig wird. Die gleiche Problematik betrifft die radialen Aktoren, da die Bauhöhe der radialen Aktoren die Höhe des Rotors beeinflusst.

Die maximalen Lagerreaktionskräfte wurden aus Annahmen über die plausible Kombination der einwirkenden Bearbeitungskräfte  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$  und  $F_z$  bestimmt und stellen somit einen theoretischen Wert zur Aktorauslegung dar.

	statisch	dynamisch
axial	$F_{max} \geq 16 \text{ kN}$ $F_{min} \leq -5 \text{ kN}$	$L \leq 9 \text{ mH}$
radial	$F_{max} \geq 16 \text{ kN}$ $F_{min} \leq -5 \text{ kN}$	$L \leq 18 \text{ mH}$

**Tabelle 3.1:** Statische und dynamische Aktoranforderungen

Aufgrund der extremen Anforderungen aus der Anfrage des Industrieunternehmens (siehe Anhang Kapitel E) mussten diese auf ca. 45% reduziert werden. Hauptkriterium für die Reduzierung war die Einhaltung der Abmessungen, um eine nachrüstbare Komponente für den Werkzeugmaschinenbau zu erhalten. In einer Vorkonstruktion wurde dabei die Eigenmasse des Rotors auf ca. 1,5 t geschätzt.

Daraus ergeben sich neben den Maximal- und Minimalwerten der Kräfte auch eine absolute Verteilung der Häufigkeit der Extremwerte, wie in Abbildung 3.11 dargestellt.

Daneben erleichtern derartige Extremfälle die optimale Aktorauslegung insofern, als dass einfache Aussagen über die thermische Belastung und den Arbeitspunkt getroffen werden können. Der Arbeitspunkt wird somit statistisch vergeben, da keine Aussagen über das zu bearbeitende Werkstück aufgrund der Universalität des Einsatzbereichs des Magnetlagers bzw. Rundtisches getroffen werden können.

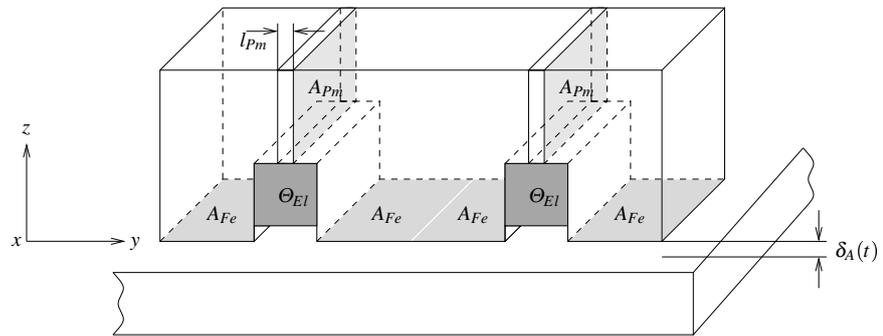
So kann letztlich auch ein Kompromiss zwischen dem Preis/Leistungs-Verhältnis des zu berechnenden Magnetlagers erzielt werden. Daneben zeigt dies die Möglichkeiten auf, wie ein Magnetlager an den jeweiligen Arbeitsprozess angepasst werden kann, z. B. in der Serienfertigung. Tabelle 3.1 zeigt die Mindestanforderungen, welche mit den Modellen in diesem Abschnitt bestimmt wurden. Die statischen Kräfte ergeben sich aus den Lagerreaktionskräften aus Abschnitt 3.8.2. Entsprechend ergibt sich allein aus den resultierenden Kräften eine Differentialanordnung der axialen und radialen Aktoren. Die dynamischen Anforderungen sind entsprechend dem Kraftanstieg eines Einzahnfräasers nach Abbildung 3.8 ausgelegt und als maximale Induktivität ausgedrückt. Dabei wird von einer Stromeinprägung und einer Zwischenkreisspannung von  $U_{KI} = 240 \text{ V}$  ausgegangen. Bei der Bestimmung der dynamischen Kräfte wurde von einer allseitigen Bearbeitung ausgegangen, so dass die dynamischen Anforderungen in allen Achsen gleich sind. Dabei sind die Anforderung der gemeinsame Nenner von axialen und radialen Kräften, um einen gemeinsamen Magnetentwurf zu Grunde legen zu können. Damit wird eine Kostenoptimierung erreicht.

### 3.9 Analytisches Modell der Magnetaktoren

Das analytische Modell dient zur konkreten Auslegung der Aktoren entsprechend den drei Anforderungsmodellen aus dem vorhergehenden Abschnitt. Wichtige Parameter des analytischen Modells sind neben dem Kraftanstieg im linearisierten Arbeitspunkt der Absolut-

**Abbildung 3.12:**

Definition der Flächen zur Kraftberechnung eines EI-Elektromagneten



wert der Kraft. Für diese dynamischen und statischen Aspekte werden im Folgenden zwei weitere Modelle zur Berechnung vorgestellt.

### 3.9.1 Prinzipieller Aufbau eines Hybrid- bzw. polarisierten Elektromagneten

Bei den Elektromagneten erfolgt eine Unterteilung in eine Grunderregerwicklung und in eine Steuerwicklung mit einer vergleichsweise geringen Induktivität. Während die Grunderregerwicklung mit einem konstanten Strom betrieben wird und die statische Kraft erzeugt, wird die Steuerwicklung zur Aufbringung dynamischer Kräfte benutzt. Eine fortgeschrittenere Bauart verwendet anstelle der Grunderregerwicklung Permanentmagnete, [STB93, KEQ94].

Der Vorteil von den Hybridmagneten liegt in einem kleineren Kupfervolumen der Steuerwicklung, wodurch kleinere Zeitkonstanten als bei herkömmlichen Elektromagneten erreichbar sind. Die permanentmagnetisch erregten Hybridmagneten besitzen aufgrund der Dicke der Permanentmagneten einen größeren effektiven Luftspalt als reine Elektromagnete, welcher sich auf die Kraft-Luftspalt Kennlinie linearisierend auswirkt. Dieses Prinzip der Luftspaltvergrößerung wird bei Drosseln zur Realisierung einer linearen Übertragungskennlinie eingesetzt.

Für die exakte Berechnung der Magnetkraft realer Magneten wird die genaue Kenntnis der Geometrie und der nichtlinearen Verhältnisse des magnetischen Kreises benötigt. Meist wird eine Überprüfung der analytischen Lösung mit der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Die analytische Lösung basiert auf einem stark vereinfachten Modell bzw. idealen Elektromagneten. Mit der FE-Methode können Streuungen des Magnetfeldes oder Sättigungseffekte im Material etc. einfacher berücksichtigt werden als mit der analytischen Berechnung.

Weitergehende Berechnungen sind in der Praxis oft nur schwer zu realisieren. Die Begründung liegt in den schwankenden Materialeigenschaften, da die Hersteller von Elektroblechen bzw. Permanentmagneten keine Garantien für die Einhaltung der angegebenen Parameter übernehmen. Meist sind nur Grenz- bzw. Richtwerte angegeben, d.h. die Eigenschaften sind abhängig von der jeweiligen Charge.

Der betrachtete Magnet nach Abbildung 3.12 besitzt eine Polschuhfläche von  $A_{Fe}$  bzw. eine Gesamtmagnetfläche  $A_{Mgnt} = 4A_{Fe}$  und repräsentiert einen Magneten mit einem EI-Kern. Die folgenden Gleichungen werden für ein Polpaar bzw. UI-Kern hergeleitet, um sie allgemein gültig zu halten.

Die Spule des Magnetaktors mit  $n$  Windungen wird von einem zeitabhängigen Strom  $i_A(t)$  durchflossen und erzeugt eine elektrische Durchflutung  $\Theta_{El}$ . Daneben besitzt der betrachtete Hybridmagnet im Rücken Permanentmagnete der Stärke  $l_{Pm}$ , welche eine zusätzliche Durchflutung  $\Theta_{Pm}$  einbringen. Weiterhin besitzt der Magnetaktor einen von der Zeit abhängigen Luftspalt  $\delta_A(t)$ .

Durch eine Anpassung des Flächenverhältnisses von Permanentmagnetfläche zur Eisenfläche kann die Grunderregung sehr einfach aufgebracht werden. Somit können leistungsschwache und preiswerte Permanentmagnete eingesetzt werden, welche durch den Sammler-Effekt an der Eisenseite eine größere Grunderregung zur Verfügung stellen, als sie selber besitzen.

Wird der Luftspalt so an die Last angepasst, dass die zum Schweben benötigte Kraft im statistischen Mittel vom Permanentmagneten aufgebracht wird, so kann eine leistungsarme Magnetlagerung z.B. für ein Transportsystem aufgebaut werden. Die Steuerwicklung wird dann mit geringen Durchflutungen betrieben und dient zur Stabilisierung des Arbeitspunktes. Lediglich bei dynamischen Vorgängen werden kurzzeitig höhere Ströme bei hohen Stromanstiegsgeschwindigkeiten benötigt, wobei die vergleichsweise kleinere Zeitkonstante der Hybridmagnete vorteilhaft ist.

### 3.9.2 Luftspaltenergie

Im Unterschied zu den Kräften, die auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld wirken (Lorentzkraft), entsteht die Anziehung von Magneten an den Grenzflächen unterschiedlicher Permeabilität z.B. zwischen Luft und Eisen. Dabei wirkt diese Reluktanzkraft senkrecht zur Trennfläche der beiden Stoffe. Diese Kraft versucht den magnetischen Widerstand<sup>1</sup> der mechanischen Anordnung zu verkleinern.

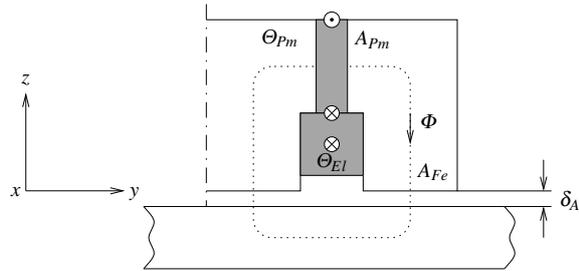
Zur Berechnung der Reluktanzkraft für ein Polpaar geht man von der im Luftspalt gespeicherten Energie  $W_L$  aus. Für ein angenommenes, homogenes Feld im Luftspalt mit dem Volumen  $V_L$  ist die Luftspaltenergie definiert als:

$$W_L = \frac{1}{2} B H V_L. \quad (3.71)$$

Unter Vernachlässigung der Sättigung des Eisens und mit der Materialgleichung für die magnetische Flussdichte im Luftspalt  $B = \mu_0 H$  gilt:

$$W_L = \int_0^{\delta_A} \frac{B^2}{2\mu_0} A \, ds, \quad (3.72)$$

<sup>1</sup>In Anlehnung an die Elektrotechnik wird der magnetische Widerstand auch "Reluktanz" genannt



**Abbildung 3.13:** Magnetischer Kreis eines Hybridmagneten (EI-Kern Halbschnitt)

wobei das Luftspaltvolumen durch die noch näher zu bestimmende Fläche  $A$  und den Luftspalt  $\delta_A$  gebildet wird.

Die Bestimmung der Flussdichte bzw. Induktion  $B$  im Luftspalt erfolgt mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes:

$$\Theta_{Ges} = \oint_l H dl. \quad (3.73)$$

Dabei wird die Durchflutung  $\Theta_{Ges}$  zum einen durch den Permanentmagnet  $\Theta_{Pm}$  und zum anderen durch den elektrischen Strom  $i_A w$  in der Spule aufgebracht. Bei der folgenden Betrachtung wird jedoch zunächst keine Unterscheidung zwischen diesen Anteilen gemacht. Für den magnetischen Kreis gilt entsprechend Abbildung 3.13 für ein Polpaar eines Hybridmagneten:

$$\begin{aligned} \Theta_{Ges} &= \int_0^{2\delta_A} H_L dl + \int_0^{l_{Fe}} H_{Fe} dl + \int_0^{l_{Pm}} H_{Pm} dl \\ &= 2H_L \delta_A + H_{Fe} l_{Fe} + H_{Pm} l_{Pm}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Mit den jeweils entsprechenden linearen Materialgleichungen:

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (3.75)$$

kann das Durchflutungsgesetz geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \Theta_{Ges} &= H_L 2\delta_A + H_{Fe} l_{Fe} + H_{Pm} l_{Pm} \\ &= \frac{B_L}{\mu_0} 2\delta_A + \frac{B_L}{\mu_0 \mu_{Fe}} l_{Fe} + \frac{B_{Pm}}{\mu_0 \mu_{Pm}} l_{Pm}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Der magnetische Fluss  $\Phi$  wird im Folgenden als konstant angenommen (Prinzip der Flusskonstanz):

$$\Phi = B_{Pm} A_{Pm} = B_L A_{Fe}, \quad (3.77)$$

womit folglich die Annahme getroffen wird, dass das magnetische Feld im Luftspalt homogen verteilt ist und an den Randzonen des Eisens keine Kanteneffekte auftreten. Damit ist die magnetische Flussdichte bzw. Induktion  $B$  an allen Stellen des Luftspaltes gleich. Folglich tritt keine Streuung auf und die Induktion im Permanentmagneten wird durch das Flächenverhältnis von Eisen- und Permanentmagnetfläche bestimmt:

$$B_{Pm} = B_L \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}}. \quad (3.78)$$

Das Durchflutungsgesetz lautet somit bez. der Luftspaltinduktion:

$$\begin{aligned} \Theta_{Ges} &= \frac{B_L}{\mu_0} \left( 2 \delta_A + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right) \\ &= 2 \frac{B_L}{\mu_0} \left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Somit ergibt sich die Luftspaltinduktion durch Umstellung von Gleichung (3.79) nach  $B_L$ :

$$B_L = \frac{1}{2} \frac{\Theta_{Ges} \mu_0}{\delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right)}, \quad (3.80)$$

d. h. die Luftspaltinduktion ist durch das Flächenverhältnis von Eisen-  $A_{Fe}$  zur Permanentmagnetfläche  $A_{Pm}$  leicht beeinflussbar<sup>2</sup>.

Die elektrische Durchflutung  $\Theta_{El}$  wird dazu genutzt, die resultierende magnetische Kraft von 0 bis zu einem Maximalwert zu regulieren. Die Spule übernimmt entsprechend die Aufgabe der Steuerung bzw. Modulierung der Magnetkraft über den vollen Arbeitsbereich.

Soll die Induktion zu Null und somit auch die Kraft zu Null geregelt werden, so muss bei der Auslegung auf Symmetrie bez. des permanentmagnetischen und elektrischen Anteils geachtet werden, d. h. der permanentmagnetische bzw. elektrische Anteil muss jeweils die Hälfte der maximalen Durchflutung erzeugen.

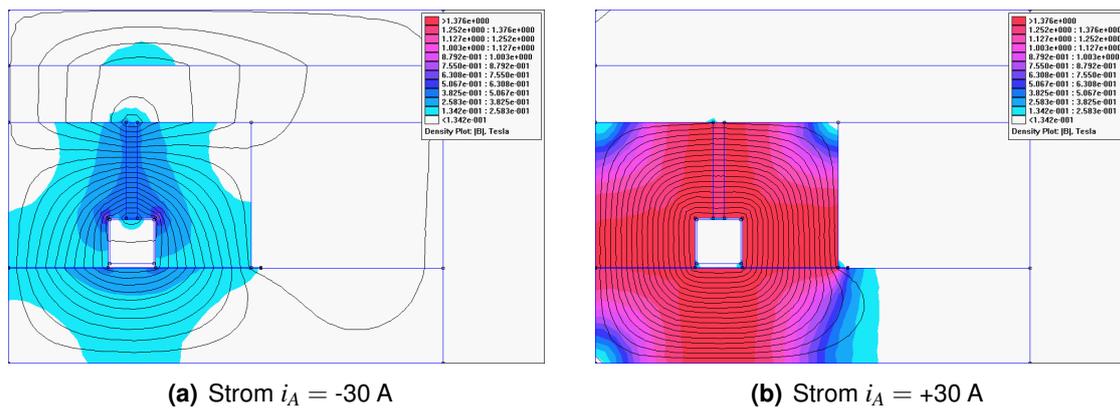
Mit der Luftspaltinduktion  $B_L$  (3.80) kann die magnetische Energie (3.72) als:

$$W_L = \int_0^{\delta_A} \frac{1}{8} \frac{\Theta_{Ges}^2 \mu_0 A}{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right) \right)^2} ds \quad (3.81)$$

geschrieben werden und führt nach Auflösung des Integrals für ein Polpaar mit  $A = 2A_{Fe}$

<sup>2</sup> daher folgt der Begriff des Sammlers für den polarisierten Elektromagneten

### 3 Konzept und Modellbildung



**Abbildung 3.14:** Feldverteilung innerhalb des Hybridmagneten bei verschiedenen Strömen

zur Luftspaltenergie eines Hybridmagneten mit UI-Kern:

$$|W_L| = \frac{1}{4} \frac{\Theta_{Ges}^2 \mu_0 A_{Fe}}{\delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right)}. \quad (3.82)$$

Abbildung 3.14 zeigt die FEM-Berechnung des Verlaufs der Feldlinien bzw. der magnetischen Flussdichte bei verschiedenen Strömen bzw. elektrischen Durchflutungen  $\Theta_{EI}$ . Der Entwurf wurde hinsichtlich einer gleichmäßigen Flussverteilung an den beiden Polen optimiert.

Daneben erkennt man in der Abbildung 3.14 die Wirkungsweise des Hybridmagneten: Je nach Stromrichtung wird der Feldverlauf aufgrund der Wirkungsrichtung von elektrischer und permanentmagnetischer Durchflutungen beeinflusst, d. h. nicht nur der Absolutbetrag der Stromstärke bestimmt wie bei einem Elektromagneten die Induktion im Luftspalt  $\delta_A$ , sondern auch die Stromrichtung ist entscheidend. Ebenso kann man Streuungen des Magnetfeldes erkennen, welche durch die analytischen Berechnungen nur schwer zu erfassen sind. Daher bietet die Überprüfung und Weiterbearbeitung des analytischen Entwurfes mit FEM weitreichende Korrektur- und Optimierungsmöglichkeiten für die Modellbildung bzw. für den Entwurf.

Abbildung 3.15 stellt den Unterschied zwischen der Kraft-Weg-Charakteristik einer mechanischen Feder 3.15(a) und der eines Magneten 3.15(b) dar. Während die mechanische Feder ein lineares Kraft-Weg Gesetz besitzt, beschreibt der Kraft-Weg-Faktor  $k_s$  des magnetischen Aktors ein nichtlineares Verhalten als auch ein inverses Verhalten der Kraft-Weg-Charakteristik. Mit steigender Verschiebung entlang der  $x$ -Achse sinkt die Kraft, während sie bei der mechanischen Feder steigt. Das negative Vorzeichen des Kraft-Weg-Faktors  $k_s$  trägt dem Rechnung.

### 3.9.3 Statische Auslegung

#### 3.9.3.1 Kraft

Die auf den ferromagnetischen Körper ( $\mu_r \gg 1$ ) wirkende Kraft entsteht durch die Änderung der Feldenergie im Luftspalt, z. B. durch Lageänderung des Ankers. Der magnetische Fluss  $\Phi = BA_{Fe}$  ist für kleine Verschiebungen  $d\delta_A$  konstant. Vergrößert sich der Luftspalt um  $d\delta_A$ , so vergrößert sich auch das Luftspaltvolumen  $A_{Fe} \delta_A$ . Die Energie im Feld nimmt um  $dW$  zu, welche über die mechanische Arbeit eingebracht wurde. Es muss also eine anziehende Kraft überwunden werden. Die Kraft ist gleich der partiellen Ableitung der Feldenergie nach der interessierenden Koordinate - hier dem Luftspalt (Prinzip der virtuellen Verschiebung). Im Folgenden wird von einer zeitlich konstanten Luftspaltenergie ausgegangen:

$$F_N = \frac{\partial W_L}{\partial \delta_A}. \quad (3.83)$$

Angewandt auf die Definitionsgleichung der Feldenergie (3.72) ergibt dies die allgemein bekannte Formel für die Magnetkraft:

$$F_N = \frac{B^2}{2\mu_0} A_{Mgmt}. \quad (3.84)$$

Auf die Feldenergie (3.82) des Hybridmagneten angewendet, erhält man die Kraft eines Polpaares des Hybridmagneten:

$$|F_N| = \frac{1}{4} \frac{\Theta_{Ges}^2 \mu_0 A_{Fe}}{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right) \right)^2}. \quad (3.85)$$

Die Herleitung der Kraft mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung gilt jedoch für ein abgeschlossenes System: Bei einem Elektromagneten wird jedoch über die Spulenklammern elektrische Energie in das System eingespeist, d. h. es darf keine Energie über die Wicklungen in das Feld zu- oder abfließen, Gleichung (3.84) bzw. (3.85) gilt also bei konstantem  $B$ -Feld.

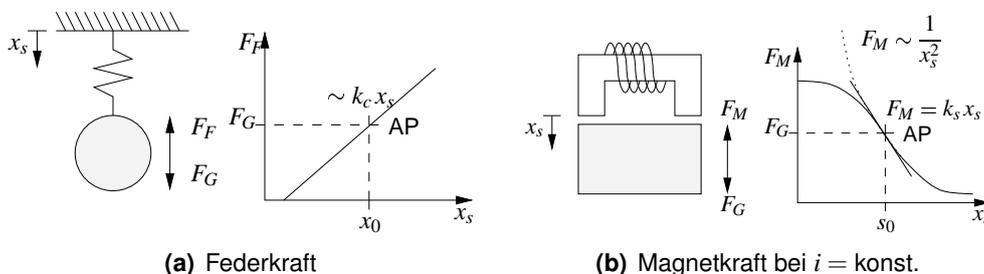


Abbildung 3.15: Kraft-Weg-Faktor

### 3 Konzept und Modellbildung

Auch wirkt die Kraft stets senkrecht anziehend zur Magnetfläche  $A_{Fe}$  zwischen Magnet und Anker. Wird die gespeicherte Luftspaltenergie nach einer anderen Koordinate abgeleitet, so erhält man die Tangentialkräfte.

In Gleichung (3.85) ist auch die nichtlineare Kraftcharakteristik magnetischer Aktoren erkennbar:

$$F_N \sim \frac{(i_A w + \Theta_{Pm})^2}{\delta_A^2}. \quad (3.86)$$

Gleichung (3.86) zeigt den bekannten Sachverhalt, dass die Kraft proportional zum Quadrat des Stromes  $i_A(t)$  und umgekehrt zum Quadrat des Luftspaltes  $\delta_A(t)$  ist. Praktisch behilft man sich durch die Linearisierung der Kraftcharakteristik.

#### 3.9.3.2 Linearisierung der Kraft

Auf Grund der Nichtlinearität der magnetischen Kraft werden die Aktoren in einem Arbeitsbereich linearisiert.

Die Kraft eines Polpaares des Hybridmagneten berechnet sich mit  $\Theta_{Ges} = i_A w + \Theta_{Pm}$  gemäß Gleichung (3.85) zu:

$$F_N(i_A, \delta_A) = \frac{1}{2} \frac{(i_A w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right)^2}. \quad (3.87)$$

Bei der Linearisierung wird ein Arbeitspunkt  $AP = (i_0, \delta_0)$  mit  $F_0 = F_N(i_0, \delta_0)$  festgelegt und die Änderungen der Variablen um den Arbeitspunkt betrachtet:

$$\Delta i_A = (i_A - i_0) \quad (3.88)$$

$$\Delta \delta_A = (\delta_A - \delta_0) \quad (3.89)$$

und eine TAYLOR-Reihenentwicklung durchgeführt:

$$F_N|_{AP} = F_0 + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial F_N}{\partial i_A} \right|_{AP} (i_A - i_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial F_N}{\partial \delta_A} \right|_{AP} (\delta_A - \delta_0) + \dots \quad (3.90)$$

wobei nach dem ersten linearen Glied abgebrochen wird:

$$\begin{aligned}
 F_{Mgnt}|_{AP} = & \frac{1}{4} \frac{(i_0 w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\underbrace{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right)^2}_{F_0}} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{(i_A w + \Theta_{Pm}) \mu_0 A_{Fe} w}{\underbrace{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right)^2}_{k_i}} (i_A - i_0) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{(i_A w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\underbrace{\left( \delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right)^3}_{k_s}} (\delta_A - \delta_0).
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Hierbei ist der erste Term gleich der Kraft im Arbeitspunkt mit  $s_0, i_0$ , siehe auch Gleichung (3.87). Der zweite Term entspricht dem Kraft-Weg-Faktor  $[k_s] = 1 \text{ N/m}$  und der dritte dem Kraft-Strom-Faktor  $[k_i] = 1 \text{ N/A}$ .

Entsprechend kann die Magnetkraftcharakteristik für kleine Auslenkungen um  $s_0$  bzw. kleine Stromänderungen um  $i_0$  linearisiert dargestellt werden:

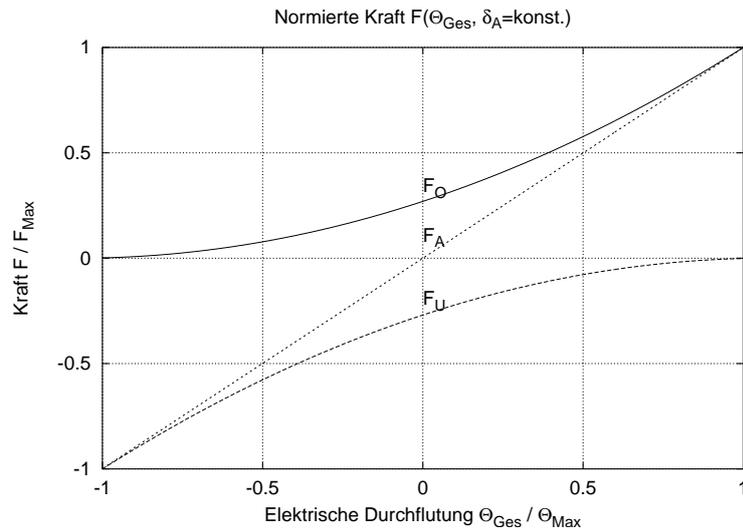
$$F_{Mgnt}|_{s_0, i_0} = F_N(s_0, i_0) + k_i (i_A - i_0) + k_s (\delta_A - \delta_0). \tag{3.92}$$

Der negative Kraft-Weg-Faktor  $k_s$  ist typisch für magnetische Aktoren. Hierin liegt auch die Ursache für die Instabilität von ungeregelten Magneten bzw. Magnetlagern.

### 3.9.3.3 Magnete in Differentialanordnung

In der Magnetlagertechnik werden häufig positive wie auch negative Kräfte benötigt. Dies kann zum einen aus Optimierungsgründen erforderlich sein, wenn z. B. hohe dynamische Anforderungen gestellt sind. Bei einer magnetischen Aufhängung wird die negative Beschleunigungskraft durch die Gewichtskraft des Schwebekörpers erzeugt, allerdings mit der maximalen Beschleunigung von  $1 g$  - der Erdanziehung. Zum anderen kann sich die Notwendigkeit einfach aus den Lagerreaktionen ergeben, Abschnitt 3.8.2.

Im Folgenden wird das Verhalten eines Hybridmagneten untersucht, wobei von gleichartigen bzw. baugleichen Aktoren ausgegangen wird. Prinzipiell können auch verschieden ausgelegte Aktoren eingesetzt werden, da aufgrund der Krafrichtung der Gewichtskraft die oberen Aktoren im Allgemeinen für eine deutlich größere Kraft dimensioniert werden müssen.



**Abbildung 3.16:** Addition der Kräfte zweier Hybridmagnete in Differentialanordnung bei konstantem Luftspalt

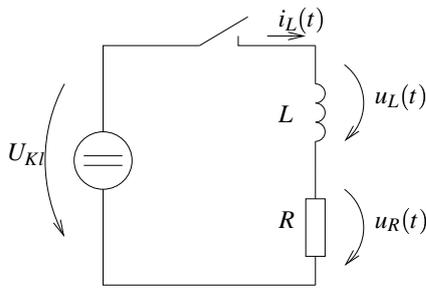
Werden die Magnete in Differentialanordnung betrieben, so kombiniert man die Kraftwirkung der Einzelmagnete zueinander entgegengesetzt. Die Gesamtkraft ergibt sich allgemein aus der resultierenden Kraft, also der nichtlinearen Differenzkraft des oberen und unteren Magneten  $F_O$  bzw.  $F_U$ . Hierbei werden Aktor-Kräfte  $F_A$  als positiv angenommen, sofern sie mit der positiven  $z$ -Achse verlaufen und als negativ, wenn sie entgegen verlaufen:

$$F_A(i_A, \delta_A) = F_O(i_A, \delta_A) - F_U(i_A, \delta_A). \quad (3.93)$$

Weiterhin wird definiert, dass ein positiver Strom die Kraft des einzelnen magnetischen Aktors ansteigen lässt, während ein negativer Strom den Magnetfluss im Luftspalt verringert und somit zu einer Kraftminderung führt. Den entsprechenden Zusammenhang zwischen resultierender Aktor-Kraft  $F_A$  und elektrischer Durchflutung zeigt Abbildung 3.16. Hierin ist ebenso erkennbar, dass die Differentialanordnung eine Linearisierung der Kraft zur Folge hat, sofern der Aktor-Luftspalt  $\delta_A$  konstant bleibt.

Für den oberen Aktor bzw. dessen Polpaar lautet dann die linearisierte Kraftgleichung im Arbeitspunkt  $(i_0, \delta_0)$ :

$$\begin{aligned} \Delta F_O &= F_{Mgt}(+\Delta i_A, -\Delta \delta_A) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\Delta i_A w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\left(-\Delta \delta_A + \frac{1}{2} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}}\right)\right)^2} \end{aligned} \quad (3.94)$$



**Abbildung 3.17:** Dynamisches Modell eines Magnetaktors

bzw. für den unteren:

$$\begin{aligned} \Delta F_U &= F_{Mgnt}(-\Delta i_A, +\Delta \delta_A) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-\Delta i_A w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\left(+\Delta \delta_A + \frac{1}{2} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}}\right)\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Die Linearisierung geschieht äquivalent zu der des einzelnen Magneten durch TAYLOR-Reihenentwicklung gemäß Abschnitt 3.9.3.2. Dabei stellt der erste Term wiederum die Kraft im Arbeitspunkt  $(i_0, \delta_0)$  dar, der zweite den Kraft-Weg-Faktor  $k_s$ :

$$k_s = -\frac{(i_A^2 w^2 + \Theta_{Pm}^2) \mu_0 A_{Fe}}{\left(\delta_A + \frac{1}{2} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}}\right)\right)^3} \quad (3.96)$$

und der dritte den Kraft-Strom-Faktor  $k_i$ :

$$k_i = \frac{(i_A^2 w^2 + \Theta_{Pm}^2) \mu_0 A_{Fe} w}{\left(\delta_A + \frac{1}{2} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}}\right)\right)^2}. \quad (3.97)$$

Man erkennt die Verdopplung des Kraft-Weg-Faktors  $k_s$  (3.96) und des Kraft-Strom-Faktors  $k_i$  (3.97) durch die Differentialanordnung, welche neben der Linearisierung der Kraft-Kennlinie auch eine Erhöhung der Aktordynamik bewirkt.

## 3.9.4 Dynamische Auslegung

### 3.9.4.1 Induktivität und Spannungsinduktion

In Abbildung 3.17 ist das elektrische Ersatzschaltbild eines elektromagnetischen Aktors dargestellt.

### 3 Konzept und Modellbildung

Die entsprechende Spannungsgleichung lautet:

$$u_{KI}(t) = \underbrace{R i_A(t)}_{u_R(t)} + \dot{\Psi}(t). \quad (3.98)$$

Dabei beschreibt der verkettete Fluss  $\Psi$  die Koppelung zwischen dem elektrischen und magnetischen Kreis. Ihn erhält man über den magnetischen Fluss in der Fläche  $A_{Fe}$ :

$$\Phi = \int B dA_{Fe}. \quad (3.99)$$

Mit:

$$\Psi = w \Phi \quad (3.100)$$

berechnet sich der verkettete Fluss zu:

$$\Psi = w \int B dA_{Fe} \quad (3.101)$$

$$= w B A_{Fe}. \quad (3.102)$$

Mit dem magnetischen Fluss  $B$  (3.80) in einem Hybridmagneten gilt:

$$\Psi = \frac{1}{2} \frac{w \Theta_{Ges}^2 \mu_0 A_{Fe}}{\delta_A + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right)}. \quad (3.103)$$

Mit der Gesamtdurchflutung des Hybridmagneten und Einführung der Zeitabhängigkeiten:

$$\Theta_{ges}(t) = i_A(t) w + \Theta_{Pm} \quad (3.104)$$

kann der verkettete Fluss bestimmt werden:

$$\Psi(i_A, \delta_A) = \frac{1}{2} \frac{(i(t) w + \Theta_{Pm})^2 \mu_0 A_{Fe}}{\delta_A(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right)}. \quad (3.105)$$

Wie zu erkennen ist, ist der Fluss abhängig von den zeitlichen Größen Strom  $i_A$  und Luftspalt  $\delta_A$  des Magnetaktors.

Durch partielle Ableitung von Gleichung (3.105) erhält man den rechten Term in der Spannungsgleichung (3.98), der entsprechend die elektrische Spannung bzw. deren Verlauf

über die Spule des Magnetaktors darstellt:

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= \frac{\partial}{\partial i_A} \Psi(i_A, \delta_A) + \frac{\partial}{\partial \delta_A} \Psi(i_A, \delta_A) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{w^2 \mu_0 A_{Fe}}{\delta_A(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right)} \frac{d i_A}{d t} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_L \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{(i(t) w + \Theta_{Pm})^2 w \mu_0 A_{Fe}}{\left( \delta_A(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right)^2} \frac{d \delta_A}{d t}.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Dabei ist der erste Term die Induktivität eines Polpaars und der zweite der so genannte  $k_v$ -Faktor, welcher in der Literatur auch als Stromänderungs-Geschwindigkeits-Faktor bezeichnet wird. Entsprechend beschreibt die Induktivität die Stromanstiegsgeschwindigkeit im elektrischen bzw. die Anstiegsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses im magnetischen Kreis und der  $k_v$ -Faktor die von der Luftspaltgeschwindigkeit abhängige induzierte Spannung. Diese wirkt gemäß dem Lenz'schen Gesetz seiner Ursache entgegen, was das negative Vorzeichen ausdrückt. Die Induktivität ist ebenso wie der  $k_v$ -Faktor abhängig von dem jeweiligen Arbeitspunkt, konkret dem Luftspalt  $\delta_A$ .

Praktisch wird die Induktivität auf einen spezifischen Gleichstrom  $i_0$  und Luftspalt  $\delta_0$  bezogen und wird als Gleichstrominduktivität bezeichnet:

$$L = \frac{1}{2} \frac{w^2 \mu_0 A_{Fe}}{\delta_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right)}. \tag{3.107}$$

Die Proportionalgröße  $k_v$  in Gleichung (3.106) resultiert aus der Eigenschaft des Magnetaktors ein elektromechanisches Wandlerelement zu sein. Ähnlich wie ein Elektromotor als Generator betrieben werden kann, so kann auch der Magnetaktor Energie in das System zurückspeisen. Die induzierte Gegenspannung macht man sich vorrangig bei sensorlosen Magnetschwebesystemen zu Nutze. Entsprechend lautet die vollständige, linearisierte Spannungsgleichung:

$$u_{KI}(t) = R i_A(t) + L \frac{d i_A(t)}{d t} + k_v \dot{\delta}_A(t). \tag{3.108}$$

Die mit dem Faktor  $k_v$  induzierte Spannung kann bei kleinen Luftspaltgeschwindigkeiten, wie sie im Allgemeinen bei Magnetschwebesystemen auftreten, vernachlässigt werden. Bei Stromsteuerung kann aufgrund der Stromeinprägung der Faktor  $k_v$  innerhalb der Spannungsüberhöhung bzw. Spannungsreserve ebenfalls vernachlässigt werden.

### 3.9.4.2 Kraftanstieg

Wie die Gleichung für die Kraft eines Hybridmagneten (3.85) zeigt, ist die Kraft proportional zum Quadrat des Stromes auf der elektromechanischen Seite:  $F \sim i_A^2$  bei  $\delta_A = \text{konst.}$  Damit wird der Kraftanstieg durch den Stromanstieg bestimmt. Der Stromanstieg wird jedoch durch die Induktivität auf der elektrischen Seite begrenzt, Spannungsgleichung (3.108).

Bereits in der Gleichung für die Induktivität (3.107) kann man den wichtigen Zusammenhang zur Windungszahl erkennen:

$$L \sim w^2. \quad (3.109)$$

Dies bedeutet aber auch, dass ein großer magnetischer Luftspalt die Induktivität verringert. Der Permanentmagnet besitzt eine Permeabilität, ähnlich groß wie der von Luft.

Der Kraftanstieg wird nun wie folgt erweitert:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{d\Theta_{Ges}} \frac{d\Theta_{Ges}}{dt}, \quad (3.110)$$

d. h. mit  $\frac{d}{dt}\Theta_{Ges} = i_A w$  gilt:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{d\Theta_{Ges}} \frac{di_A}{dt} w. \quad (3.111)$$

Den Stromanstieg erhält man aus der Spannungsgleichung (3.108), wobei unter der Annahme geringer Gegenspannungsinduktion bzw. Stromeinprägung gilt:

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{1}{L} (u_{Kl}(t) - Ri_A(t)). \quad (3.112)$$

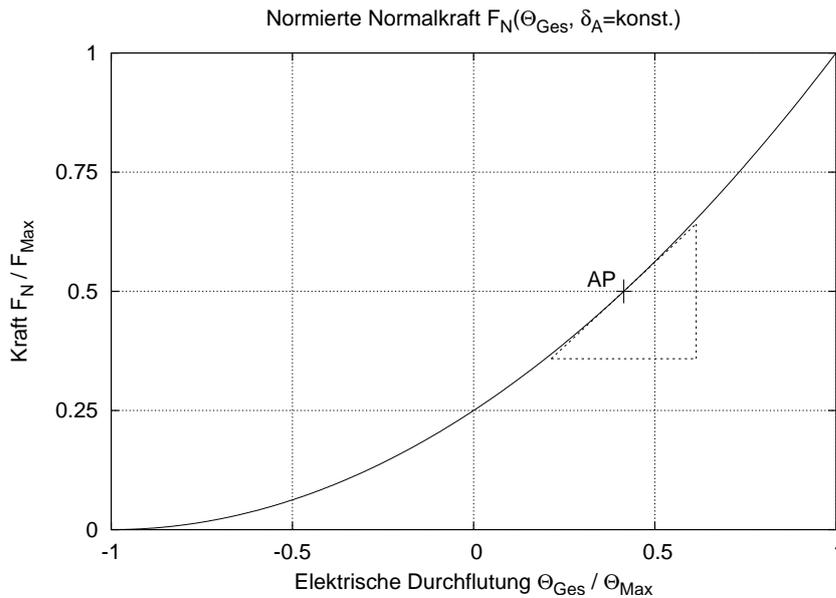
Bei Betrachtung der Kennlinie des Zusammenhangs zwischen Kraft und Durchflutung eines Hybridmagneten (Abbildung 3.18) ist erkennbar, dass der Kraftanstieg vom jeweiligen Arbeitspunkt  $\frac{dF}{d\Theta_{Ges}}$  abhängt. Folglich werden die Zeitabhängigkeiten von Gleichung (3.111) und (3.112) durch die Größen im Arbeitspunkt ersetzt:

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{AP} = \frac{dF}{d\Theta_{Ges}} w \frac{u_{Kl} - Ri_0}{L_0} \quad (3.113)$$

und man erhält den Kraftanstieg in Abhängigkeit von der Gleichstrominduktivität im elektrischen System.

Setzt man darin die Induktivität (3.107) des eingesetzten Hybridmagneten ein:

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{AP} = \frac{dF}{d\Theta_{Ges}} \frac{(u_{Kl} - Ri_0)}{w \mu_0 A_{Fe}} \left( \delta_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}} \frac{l_{Pm}}{\mu_{Pm}} \right) \right), \quad (3.114)$$



**Abbildung 3.18:**  
Normierte  $\frac{dF}{d\Theta}$  Kennlinie eines Hybridmagneten

erhält man den wichtigen Zusammenhang, dass der dynamische Kraftanstieg  $\frac{dF}{dt}$  zum einen vom jeweiligen Arbeitspunkt abhängig und zum anderen umgekehrt proportional zur Windungszahl ist:

$$\frac{dF}{dt} \sim \frac{1}{w}, \quad (3.115)$$

welches den dynamischen Parameter eines Magneten mit beschreibt.

Entsprechend kann aus Gleichung (3.114) die notwendige Windungszahl für einen Arbeitspunkt berechnet werden:

$$w = \frac{\frac{dF}{d\Theta_{Ges}} (u_{Kl} - Ri_0)}{\frac{dF}{dt} \mu_0 A_{Fe}} \left( \delta_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + \frac{A_{Fe} l_{Pm}}{A_{Pm} \mu_{Pm}} \right) \right). \quad (3.116)$$

Weiterhin sind aus Gleichung (3.114) auch die konstruktiven Möglichkeiten für einen Aktor, bestehend aus einem Hybridmagneten und Stromsteller, für eine hohe Dynamik erkennbar. Hier existieren größere Möglichkeiten in der Berechnung bzw. bei dem Design im Vergleich zu einem Elektromagneten. Dies kann durch das Flächenverhältnis  $\frac{A_{Fe}}{A_{Pm}}$  oder noch einfacher durch die Dicke des Permanentmagneten  $l_{Pm}$  geschehen. Diese Parameter beeinflussen direkt die Induktivität (3.107). Praktisch werden diese Designparameter zum einen durch Vorgaben hinsichtlich der Baugröße begrenzt. In der Regel werden kompakte Magnete gewünscht, womit die Wahl des Flächenverhältnisses  $\frac{A_{Fe}}{A_{Pm}}$  bei ca. 1 liegen wird. Zum anderen sind sie beschränkt durch die begrenzte Klemmspannung  $U_{Kl}$  der Stromsteller zur Einprägung des Stromes.

Aber auch hinsichtlich der statischen Auslegung existieren Grenzen, da die elektrische Durchflutung  $\Theta_{El}$  die Luftspaltinduktion von  $0 \dots B_{max}$  modulieren muss. Es gilt  $\Theta_{El} = \Theta_{Pm}$

bzw.  $i_A w = \Theta_{Pm}$ , d.h. eine geringe Windungszahl benötigt größere Ströme bei gleicher Durchflutung.

Damit begrenzen die Stromsteller in zweifacher Hinsicht die Statik und Dynamik der Magnetaktoren - durch die Klemmspannung  $U_{KI}$  und den Maximalstrom  $i_{Max}$ .

Ein Ausweg aus der Begrenzung des Maximalstroms  $i_{Max}$  ist eine unvollständige Kompensation der Durchflutung  $\Theta_{Pm}$ , hervorgerufen durch den Permanentmagneten, d.h.  $\Theta_{EI} < \Theta_{Pm}$  bzw.  $i_A w < \Theta_{Pm}$ . Dies bedeutet, dass die Kraft des Aktors nur in einem Bereich ausgenutzt werden kann:  $F(i_{Min}) \dots F(i_{Max})$ . Dies wurde für den magnetgelagerten Rundtisch vorgenommen.

Praktisch bedingt dies eine Differentialanordnung der Aktoren und kommt einer mechanischen Vorspannung gleich, die zusätzlich durch die Strukturmechanik aufgenommen werden muss und diese somit statisch belastet.

Da aufgrund Abbildung 3.11 negativ gerichtete Kräfte auftreten und somit eine Differentialanordnung bedingen und weiterhin aus dynamischen Gründen generell Differentialanordnungen gewählt werden [STB93], stellt dies keine Einschränkung dar.

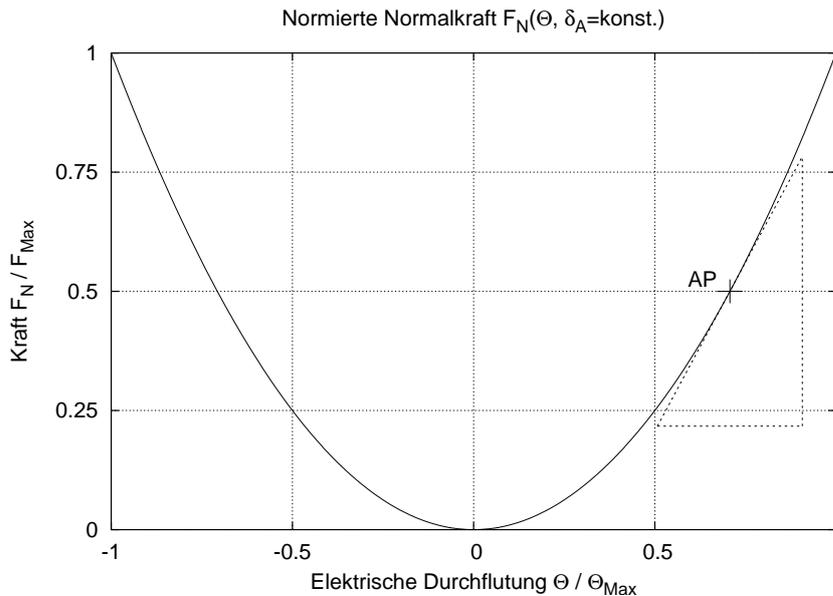
Unter der Annahme, dass die Werkzeugmaschine mit dem magnetisch gelagerten Rundtisch aus wirtschaftlichen Gründen in ihrem Grenzbereich betrieben wird, kann ein möglicher Arbeitspunkt für die dynamische Auslegung ausgewählt werden. Als Kriterium dafür kann z.B. das Häufigkeitsmaxima herangezogen werden, Abbildung 3.11. Gestützt wird dieses durch die weitere Annahme, dass große Bearbeitungskräfte bei geringeren Toleranzanforderungen nur beim Schruppen, die kleineren und hochgenauen Toleranzen beim Schlichten auftreten. Im letzteren Bereich wirkt sich vor allem die Massenträgheit positiv aus. Daher kann der maximale Kraft-Strom-Anstieg in den Punkt mit der statistisch häufigsten Anzahl der Kräfte liegen. Dies vereinfacht die dynamische Auslegung, da der Anstieg vom Arbeitspunkt abhängig ist. Dieses statistische Maxima wurde für das vorliegende Magnetlager als stationärer Arbeitspunkt für die Betriebsparameter gewählt. Aus diesem festgelegten statischen Arbeitspunkt muss die dynamische Fräskraft nach Abbildung 3.8 aufgebracht werden, um die Kräfte des Einzahnfräskopfes aufnehmen zu können.

#### 3.9.5 Elektro- vs. Hybridmagnet

Für einen Vergleich zwischen dem Elektro- und dem Hybridmagneten wird der gleiche magnetische Kreis angenommen, d.h.  $A_{Fe}$  sei für beide Magnettypen gleich und dies soll näherungsweise auch für  $l_{Fe}$  gelten. Bei gleicher Windungszahl stellt für die weitere Annahme, dass die Permeabilität des Permanentmagneten der von Luft entspricht  $\mu_{Pm} = 1$ , das Verhältnis beider Induktivitäten wie folgt dar:

$$\frac{L_{EMag}}{L_{HMag}} = 1 + \frac{l_{Pm}}{2 \delta_0} \frac{A_{Fe}}{A_{Pm}}. \quad (3.117)$$

Folglich ist die Induktivität eines Hybridmagneten wie erwartet um das Flächenverhältnis  $\frac{A_{Fe}}{A_{Pm}}$  und der Stärke des Permanentmagneten  $l_{Pm}$  proportional besser.



**Abbildung 3.19:**  
Normierte  $\frac{dF}{d\Theta}$  Kennlinie eines Elektromagneten

Bei Betrachtung der Kraftanstiege eines Hybrid-Magneten und eines Elektromagneten ist der Anstieg der Kraft-Durchflutung  $\frac{dF}{d\Theta_{Ges}}$  eines Elektromagneten größer, Abbildung 3.18 bzw. 3.19. Aus Sicht der Regelungstechnik ist der Kraftanstieg jedoch ein Proportionalfaktor, der dynamisch keinerlei Auswirkungen hat. Somit wirkt sich die Verringerung der Induktivität positiv aus.

Die eben genannten Abbildungen der Kraftanstiege verdeutlichen aber auch, dass der Hybridmagnet hinsichtlich der Linearität seiner Kennlinie der Linearisierung näher kommt als ein Elektromagnet. Dies ist vorteilhaft für das lineare Modell der Regelstrecke.

Es gibt aber auch energetische Betrachtungen hinsichtlich der Verlustleistungen zwischen dem Konzept des Hybrid- und Elektromagneten.

Bei Elektromagneten werden üblicherweise ebenfalls 2 Aktoren gegeneinander wirkend betrieben. Bei der so genannten *Differenzansteuerung* wird der eine Elektromagnet mit der Summe von Vormagnetisierungsstrom  $i_0$  und Steuerstrom  $i_A$ , der andere mit der Differenz  $i_0 - i_A$  angesteuert. Hierbei legt der Vormagnetisierungsstrom  $i_0$  den Arbeitspunkt fest. Entsprechend werden auch 2 Stromsteller zur Ansteuerung benötigt.

Weiterhin ist eine *Differenzwicklung* zur Aktoransteuerung bei Elektromagneten möglich, indem jedes Polpaar mit einer Vormagnetisierungs- und Steuerwicklung versehen wird. Hierbei ist die Vormagnetisierungswicklung aller Polpaare in Reihe geschaltet und wird mit dem konstanten Vormagnetisierungsstrom  $i_0$  betrieben. Die Steuerwicklung ist so verschaltet, dass sich die von der Vormagnetisierungs- und Steuerwicklung erzeugten Durchflutungen in einem Polpaar addieren und in dem anderen subtrahieren. Bei dieser Art der Ansteuerung werden ebenfalls zwei Stromquellen benötigt, wobei eine preiswertere Konstantstromquelle eingesetzt werden kann. Als nachteilig erweisen sich jedoch die Kupferverluste. Dies wird besonders augenscheinlich bei der Vollaussteuerung. In einem Elektromagneten addieren sich die Durchflutungen auf den Maximalbetrag, während sie

### *3 Konzept und Modellbildung*

sich im anderen aufheben ohne Kraft zu erzeugen. Zudem fließen bei letzterem Elektromagneten jeweils maximale Ströme durch Vormagnetisierungs- und Steuerwicklung mit den entsprechenden Kupferverlusten, [STB93].

Bei den Hybridmagneten wird dagegen die Vormagnetisierung leistungslos bereitgestellt und es wird nur ein Stromsteller je Aktorpaar benötigt.

# 4 Mehrgrößenregelung des Runtisches

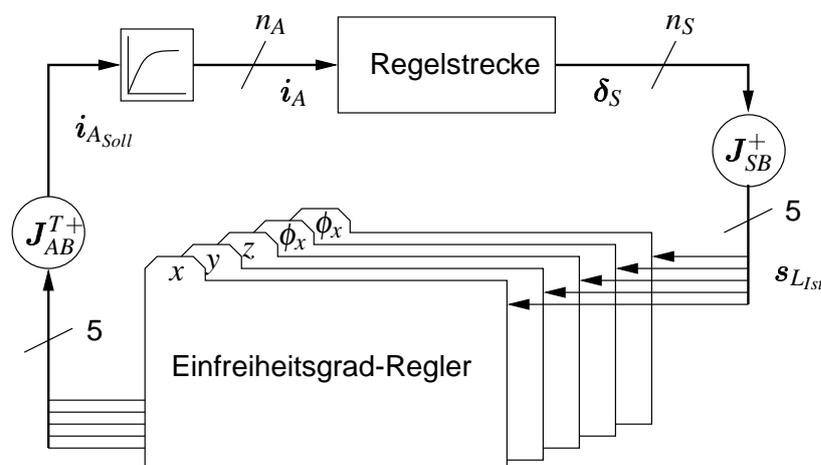
Wie im vorhergehenden Kapitel erläutert wurde, beruht das Konzept der Freiheitsgradregelung auf einer vollständigen Entkoppelung der Gleichungen der mechanischen Struktur als auch der der Aktoren. Das Prinzip besteht somit in der Reduzierung der Überbestimmtheit der Sensoren und Aktoren, so dass die Regelung des magnetisch gelagerten Runtisches in den  $f$  Freiheitsgraden durch jeweils einen Eingrößenregler erfolgen kann. Damit wird jeder Freiheitsgrad in seinen Eigenschaften getrennt einstell- und regelbar.

Abbildung 4.1 stellt das Prinzip anschaulich dar.  $f = 5$  Einfeldfreiheitsgradregler regeln das überbestimmte System Runtisch bestehend aus  $n_S = 6$  Sensoren und  $n_A = 10$  Aktoren, welche über  $n_A$  Stromsteller angesteuert werden. Die JACOBI-Matrizen  $J_{AB}^{T+}$  und  $J_{SB}^+$  entkoppeln das System, so dass aus dem überbestimmten System ein bestimmtes wird.

## 4.1 Prinzip der entkoppelten Zustandsregelung

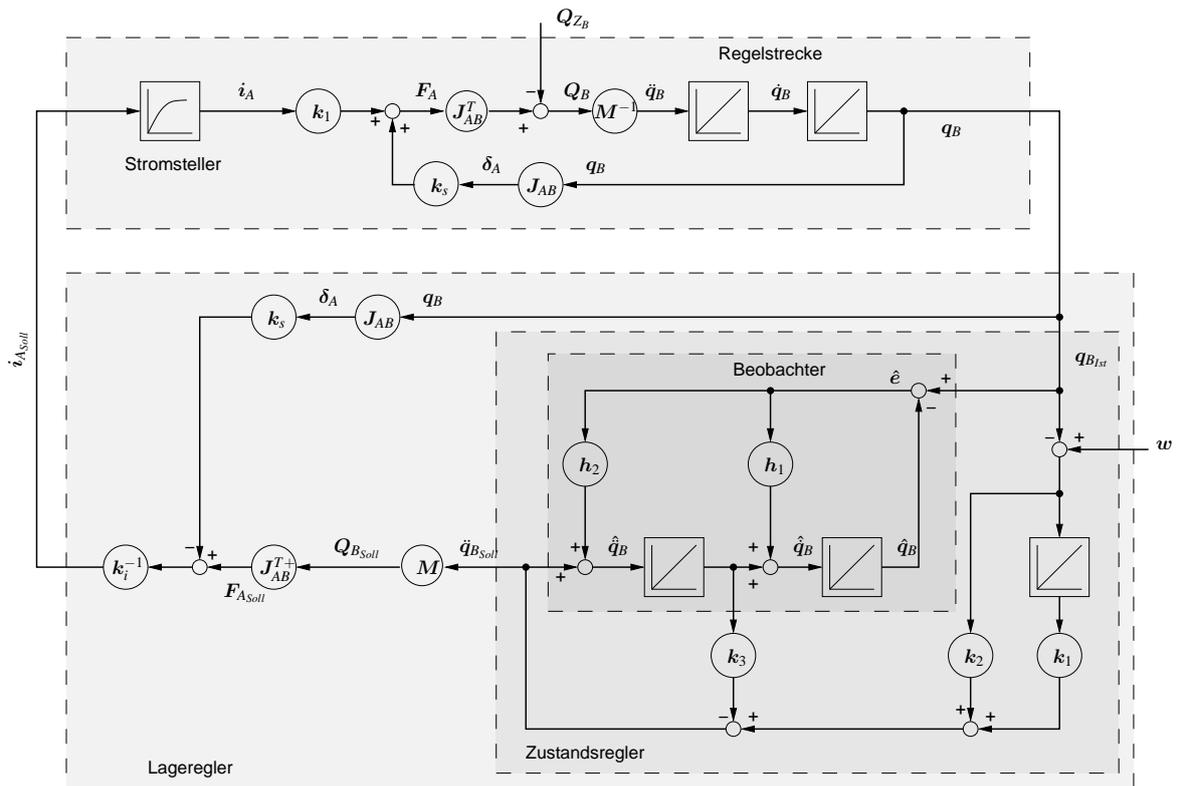
Der Freiheitsgradregler selbst ist im unteren Teil von Abbildung 4.2 dargestellt und besteht aus  $f = 5$  einzelnen, normierten Reglern mit Beobachtern und einer inversen Darstellung der Regelstrecke.

Die normierten Einfeldfreiheitsgradregler bestimmen jeweils aus der Sensorlage mit Hilfe der Sensormatrix  $J_{SB}$  (3.12) die Ist-Lage für den entsprechend zu regelnden Freiheitsgrad.



**Abbildung 4.1:** Prinzip der Freiheitsgradregelung durch Separation der einzelnen Freiheitsgrade

#### 4 Mehrgrößenregelung des Rundtisches



**Abbildung 4.2:** Lageregelung eines nicht rotierenden Mehrfreiheitsgrad-Magnetlagers

Aufgrund der Modellierung des mechanischen Teilsystems der Regelstrecke in den  $f$  Freiheitsgraden wird die Transformation des Sensorvektors  $\delta_S$  in den generalisierten Lagevektor  $q_B$  nicht dargestellt.

Der für den jeweiligen Freiheitsgrad zuständige Regler bildet den Vektor für die Stellgröße  $\dot{q}_{B, Soll}$ . Mit Hilfe der in Abschnitt B.5.5 hergeleiteten Massenmatrix  $M_B$  (B.102) kann die Sollkraft  $Q_B$  in den verallgemeinerten Koordinaten berechnet werden. Infolge der Aktoranordnung können nur 5 der in Gleichung (B.102) angegebenen Freiheitsgrade beeinflusst werden, so dass der durch den Direktantrieb gesteuerte Freiheitsgrad  $\phi_z$  entfällt und aus der  $(6 \times 6)$  die  $(5 \times 5)$  Massenmatrix wird:

$${}^0M_B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ m & 0 & 0 & 0 & m r_{BC_z} & \\ 0 & m & 0 & -m r_{BC_z} & 0 & \\ 0 & 0 & m & m r_{BC_y} & -m r_{BC_x} & \\ 0 & -m r_{BC_z} & m r_{BC_y} & J_{xx} & J_{xy} & \\ m r_{BC_z} & 0 & -m r_{BC_x} & J_{xy} & J_{yy} & \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Die Elemente der Massenmatrix sind mit und ohne Werkstückaufspannplatte in Tabelle A.1 dargestellt, jeweils ohne Werkstück. Man erkennt, dass keine Deviationsmomente vorhan-

den sind und somit der Rotor als symmetrisch angenommen wird. Zu den Parametern des Rotors muss das Sekundärteil des Direktantriebes mit hinzugerechnet werden.

Zur Berechnung der Sollwerte für die einzelnen  $n_A$  Aktorkräfte  $F_{A_i}$  aus dem Sollwert der verallgemeinerten Kräfte und Momente  $Q_B$  im Bezugspunkt müssen die Kräfte und Momente aufgrund des Prinzips der virtuellen Verschiebung zwischen dem Bezugspunkt B und den Aktoren mit Hilfe einer JACOBI-Matrix transformiert werden, wie in Abschnitt 3.3.2 dargestellt. Konkret handelt es sich dabei um die bereits aufgestellte JACOBI-Matrix aus Abschnitt 3.4.2:

$$\mathbf{q}_B \stackrel{(3.25)}{=} \mathbf{J}_{AB}^+ \delta_A. \quad (4.2)$$

Für die Energiebilanz aus Gleichung (3.3) bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{A_{Soll}}^T \Delta \delta_A &= \mathbf{Q}_{B_{Soll}}^T (\mathbf{J}_{AB}^+ \Delta \delta_A) \\ \mathbf{F}_{A_{Soll}} &= (\mathbf{Q}_{B_{Soll}}^T \mathbf{J}_{AB}^+)^T \\ \mathbf{F}_{A_{Soll}} &= \mathbf{J}_{AB}^{T+} \mathbf{Q}_{B_{Soll}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mit der für jeden einzelnen Aktor berechneten Sollkraft  $F_{A_{Soll}}$  können die entsprechenden Sollströme  $i_{A_{Soll}}$  mit der in Abschnitt 3.9.3.2 linearisierten Magnetkraft berechnet werden. Für den einzelnen Magneten bedeutet dies:

$$i_{A_{Soll}} = \frac{1}{k_i} (F_{A_{Soll}} - k_s s_L). \quad (4.4)$$

Der Luftspalt  $s_L$  des Aktors muss dabei aus den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}_{B_{Ist}}$  mit Hilfe der in Abschnitt 3.4.2 aufgestellten JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_{AB}$  (3.22) berechnet werden:

$$i_{A_{Soll}} = \mathbf{k}_i^{-1} (\mathbf{F}_{A_{Soll}} - \mathbf{k}_s \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B). \quad (4.5)$$

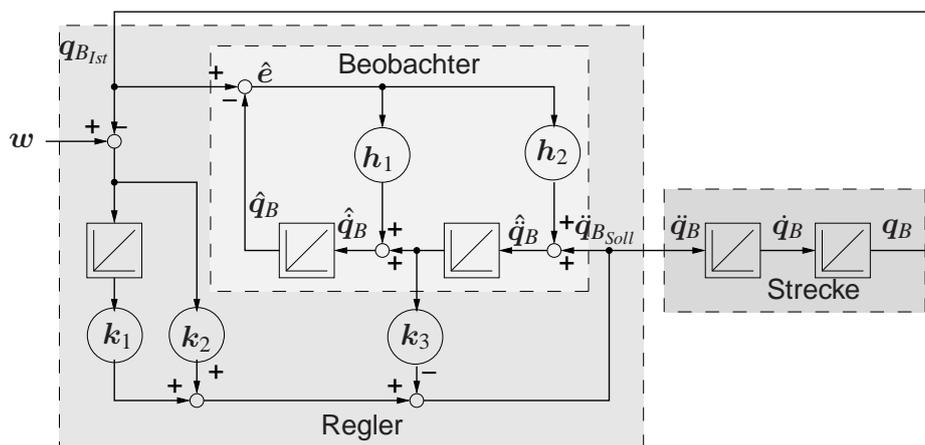
Die Sollströme werden auf die Stromsteller gegeben, welche mit ihrer internen Stromregelung wiederum die magnetischen Aktoren ansteuern.

Durch Ersetzung von  $\mathbf{F}_{A_{Soll}}$  durch Gleichung (4.3) und  $\mathbf{Q}_B$  als Produkt aus der Stellgröße Sollwert-Beschleunigung und Massenmatrix  $\mathbf{M}_B$  (4.1) in Folge, erhält man:

$$\mathbf{i}_A = \mathbf{k}_i^{-1} (\mathbf{J}_{AB}^{T+} \mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_{B_{Soll}} - \mathbf{k}_s \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B). \quad (4.6)$$

Setzt man die Gleichung für das inverse Modell des Reglers (4.6) in die Modell-Gleichung für die Regelstrecke (3.34) ein, so ist erkennbar, dass die Bewegungsgleichung diagonalisiert wird:

$$\ddot{\mathbf{q}}_B = \underbrace{\mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{J}_{AB}^T (\mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^{-1} \mathbf{J}_{AB}^{T+} \mathbf{M}_B)}_I \ddot{\mathbf{q}}_{B_{Soll}} - \underbrace{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^{-1} \mathbf{k}_s \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B + \mathbf{k}_s \mathbf{J}_{AB} \mathbf{q}_B}_0. \quad (4.7)$$



**Abbildung 4.3:** Zeitkontinuierlicher und normierter Zustandsregler mit Beobachter zur Freiheitsgradregelung mit Darstellung der Strecke

Der erste Term ergibt die Einheitsmatrix, während sich die beiden letzten Terme zu einer Nullmatrix subtrahieren, so dass letztlich:

$$\ddot{q}_B = \ddot{q}_{B_{Soll}} \quad (4.8)$$

gilt, welches anschaulich in Abbildung 4.3 dargestellt wird.

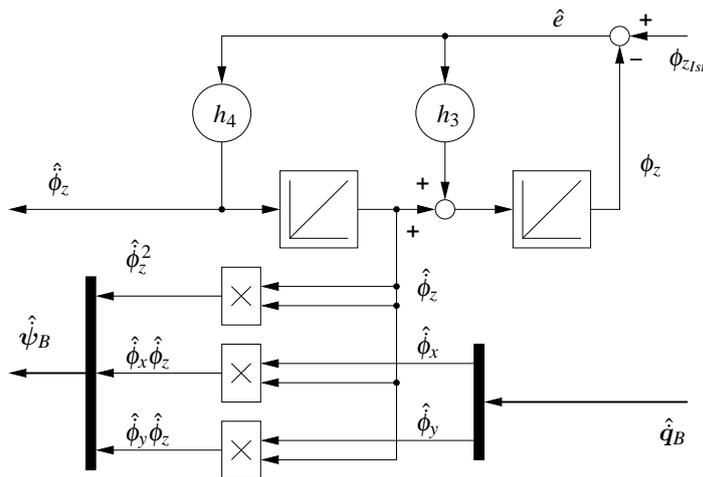
Wie bereits erwähnt, ist die Gültigkeit beschränkt durch die Annahme, dass die Aktoren keine relevanten Zeitkonstanten besitzen, d. h.  $i_A = i_{A_{Soll}}$  gilt.

Folglich sind auch die 5 Freiheitsgrade und damit die Bewegungsgleichung unabhängig voneinander einstell- und regelbar. In der Lageregelung werden die Sollströme  $i_A$  durch Berechnung der inversen Beziehung aus dem Wegvektor  $q_B$  und der Sollbeschleunigung  $\ddot{q}_{B_{Soll}}$  gemäß Gleichung (4.6) berechnet. Dies ist jedoch nur insoweit zutreffend, als dass die Aktoren als hinreichend schnell angenommen werden.

Durch die Verwendung eines körperfesten Bezugspunktes des Rotors ist die JACOBI-Matrix konstant. Aufgrund des linearisierten Modells im Regler müssen die Vektoren  $k_i$  und  $k_s$  für den jeweiligen Arbeitspunkt bekannt sein. Der Einfluss einer zusätzlichen Masse wirkt sich hauptsächlich in der Veränderung der Massenmatrix  $M_B$  Gleichung (4.1) aus.

## 4.2 Störgrößenbeobachter

Wie bereits erwähnt, kann das Magnetlager nur 5 der 6 Freiheitsgrade beeinflussen. Der 6. Freiheitsgrad bringt aufgrund der gyroskopischen Kräfte gemäß Abschnitt 3.6 Kräfte und Momente in die von dem Magnetlager kontrollierten Freiheitseingrade ein. Diese äußeren Einwirkungen lassen sich mit Hilfe eines Störgrößenbeobachters bestimmen. Dazu ist die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung der Hauptachse  $\dot{\phi}_z$



**Abbildung 4.4:**  
Zeitkontinuierlicher Störgrößenbeobachter für die Rotation

bzw.  $\ddot{\phi}_z$  notwendig, da mit deren Hilfe die Kräfte und Momente in allen Freiheitsgraden bestimmt werden können, Gleichung (3.39). Mit dieser Erweiterung des Modells sind bessere Aussagen über das kinetische Verhalten des Rundtisches möglich.

Während die Geschwindigkeiten der Nebenachsen  $\dot{\phi}_x$  bzw.  $\dot{\phi}_y$  bereits direkt am Beobachter des Lagereglers zur Verfügung stehen, muss die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Hauptachse über eine Erweiterung des Modells bestimmt werden. Dazu wird der Störgrößenbeobachter zur Berechnung der Geschwindigkeit der Hauptachse  $\dot{\phi}_z$  bzw. Beschleunigung  $\ddot{\phi}_z$  eingeführt, wie in Abbildung 4.4 zu sehen ist. Der Störgrößenbeobachter bestimmt durch den Drehgeber des Rundtisches zum einen die Beschleunigung  $\ddot{\phi}_z$  und zum anderen den Vektor der fiktiven Geschwindigkeiten:

$$\hat{\psi}_B = \left( \hat{\phi}_z^2 \quad \hat{\phi}_y \hat{\phi}_z \quad \hat{\phi}_x \hat{\phi}_z \right)^T. \quad (4.9)$$

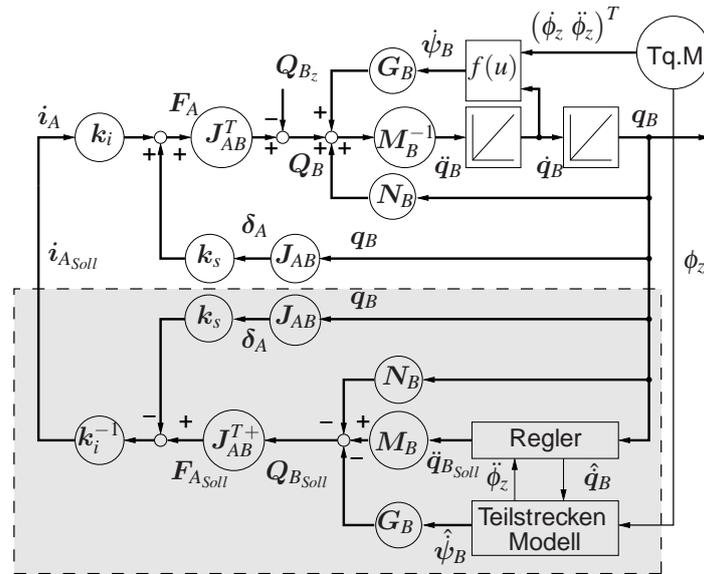
Der bereits vorhandene Beschleunigungsvektor des Beobachters (3.38) wird um die beobachtete Winkelbeschleunigung  $\ddot{\phi}_z$  erweitert. Entsprechend lautet der Beschleunigungsvektor in den generalisierten Koordinaten:

$$\ddot{\mathbf{q}}_B = \left( \ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z} \quad \ddot{\phi}_x \quad \ddot{\phi}_y \quad \ddot{\phi}_z \right)^T. \quad (4.10)$$

Abbildung 4.5 zeigt das erweiterte Konzept mit Regelstrecke und entkoppelter Zustandsregelung mit dem Störgrößenbeobachter. Der Rückführvektor  $\mathbf{h} = (h_3 \ h_4)^T$  des Störgrößenbeobachters ist so dimensioniert, dass der Schätz- bzw. Beobachterfehler  $\hat{e} = \phi_z - \hat{\phi}_z$  nach endlicher Zeit abklingt, d. h. dass der Zustand des Modells dem der Strecke angepasst wird und somit unterschiedliche Anfangszustände gegebenenfalls ausgeglichen werden.

Die Bewegungsgleichung für Rotation um die  $z$ -Achse mit den beobachteten Größen lautet

#### 4 Mehrgrößenregelung des Rundtisches

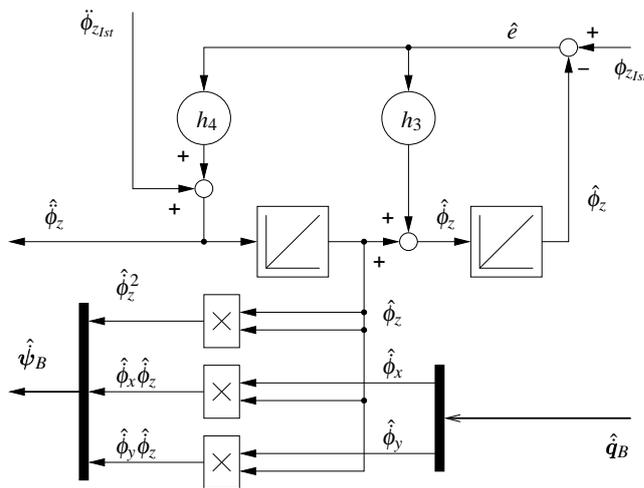


**Abbildung 4.5:** Mehrgrößenregelung des Rundtisches mit Berücksichtigung des Einflusses der Kreiseltermine durch einen Störgrößenbeobachter

somit:

$$\begin{aligned}
 {}^0Q_B &= {}^0M_B {}^0\ddot{q}_B + {}^0G_B {}^0\hat{\psi}_B \\
 \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mr_{BC_z} & -mr_{BC_y} \\ 0 & m & 0 & -mr_{BC_z} & 0 & mr_{BC_x} \\ 0 & 0 & m & mr_{BC_y} & -mr_{BC_x} & 0 \\ 0 & -mr_{BC_z} & mr_{BC_y} & J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ mr_{BC_z} & 0 & -mr_{BC_x} & J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \hat{\phi}_x \\ \hat{\phi}_y \\ \hat{\phi}_z \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -mr_{BC_x} & 0 & mr_{BC_z} \\ -mr_{BC_y} & mr_{BC_z} & 0 \\ 0 & mr_{BC_y} & mr_{BC_x} \\ -J_{yz} & J_{zz} - J_{yy} & -J_{yx} \\ J_{xz} & J_{xy} & J_{xx} - J_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_z^2 \\ \hat{\phi}_y \hat{\phi}_z \\ \hat{\phi}_x \hat{\phi}_z \end{pmatrix}. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass Gleichung (4.11) in dem System  $\mathcal{K}_0$  des Stators dargestellt ist. Da der Schwerpunktvektor  $r_{BC}$  und der Trägheitstensor  $J_B$  jedoch in den Koordinaten des Rotors  $\mathcal{K}_1$  bekannt sind, müssen diese zuvor in die Ständerkoordinaten  $\mathcal{K}_0$  transformiert



**Abbildung 4.6:** Zeitkontinuierlicher Störgrößenbeobachter für die Rotation mit Beschleunigungsmessung

werden. Den Schwerpunktvektor erhält man durch einfache Koordinatentransformation:

$${}^0\mathbf{r}_{BC} = {}^0\mathbf{T}^1\mathbf{r}_{BC} \quad (4.12)$$

und den Trägheitstensor gemäß Gleichung (B.84):

$${}^0\mathbf{J}_B(\phi_z) = {}^0\mathbf{T}^1\mathbf{J}_B{}^0\mathbf{T}^T \quad (4.13)$$

jeweils in den Ständerkoordinaten  $\mathcal{K}_0$ .

Indirekt bedeutet diese Transformation, dass die Massenmatrix  $\mathbf{M}_B$  und die Kreiselmatrix  $\mathbf{G}_B$  zeitvariant sind. Das Problem wird jedoch auf eine Matrizenmultiplikation einer konstanten Massenmatrix mit der zeitvarianten Transformationsmatrix zur Koordinatentransformation reduziert.

### 4.3 Störgrößenbeobachter mit Messvektor

Das bisherige Konzept mit dem Beobachter für die Zustandsgrößen und dem Störgrößenbeobachter wird um einen Sensorvektor der gemessenen Beschleunigungen erweitert.

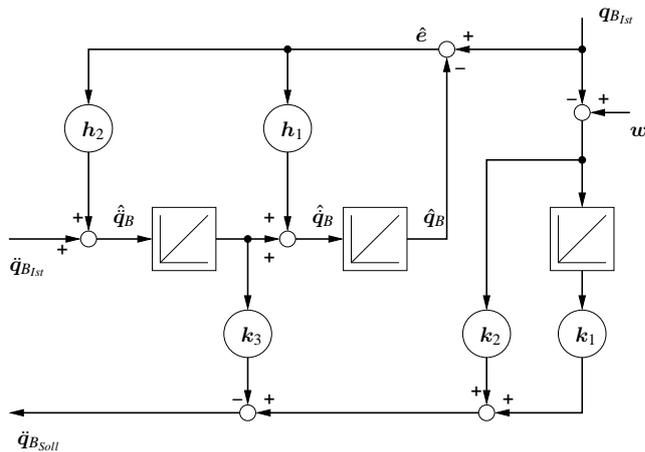
In dem Störgrößenbeobachter wird hierbei die gemessene Winkelbeschleunigung  $\ddot{\phi}_{BIst}$  ausgewertet. Der für dieses erweiterte Konzept notwendige Störgrößenbeobachter ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Darin ist ebenfalls die Generierung des fiktiven beobachteten Geschwindigkeitsvektors  $\hat{\psi}_B$  für die Gyroskopische Matrix  $\mathbf{G}$  zu erkennen.

Der Beobachter des Zustandsreglers für die Freiheitsgradregelung wird durch einen vollständig gemessenen bzw. in den Bezugspunkt  $B$  transformierten Beschleunigungsvektor:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{BIst} = \left( \ddot{x}_{Ist} \quad \ddot{y}_{Ist} \quad \ddot{z}_{Ist} \quad \ddot{\phi}_{xIst} \quad \ddot{\phi}_{yIst} \quad \ddot{\phi}_{zIst} \right)^T \quad (4.14)$$

unterstützt und ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

#### 4 Mehrgrößenregelung des Rundtisches



**Abbildung 4.7:** Zeitkontinuierlicher Zustandsregler zur Freiheitsgradregelung mit Beschleunigungsmessung

Mit diesen Erweiterungen werden der Störgrößenbeobachter und der Beobachter des Zustandsreglers dynamischer als dies bei dem bisher vorgestellten Konzept der Fall ist. Es stehen aus dem Bearbeitungsprozess sofort die Beschleunigungen zur Verfügung, mit denen die internen Zustände der Beobachter abgeglichen bzw. die Beobachterfehler zu Null reduziert werden.

Die Bestimmung des Beschleunigungsvektors  $\ddot{q}_{B,ist}$  geschieht in praktischer Weise durch 3 axiale und 2 radiale Beschleunigungssensoren, welche ortsfest am Rotor angebracht werden und den Messvektor um die Beschleunigung  $\ddot{\delta}_S$  erweitern. Anhand von Simulationen kann man erkennen, dass der Effekt von Beschleunigungssensoren größer ist als bei Verwendung von Geschwindigkeitsaufnehmern, da die Integration des Beschleunigungssignals eine Tiefpassfilterung des Sensorrauschens bewirkt. Weiterhin gehören Beschleunigungssensoren bei moderaten Preisen zum Industriestandard und sind weiter verbreitet als Geschwindigkeitsaufnehmer.

Die erforderliche Telemetrie zur Übertragung des Messvektors der Rotorbeschleunigung  $\ddot{\delta}_S$  ist Stand der Technik, z. B. in [CAE04]. Entsprechend wird eine weitere JACOBI-Matrix zum transformieren der Rotor-Koordinaten  $\mathcal{K}_1$  in die Koordinaten des Stators  $\mathcal{K}_0$  benötigt.

Als problematisch kann sich jedoch der Ausfall eines oder mehrerer Geschwindigkeitsaufnehmer herausstellen. In [SZK93] wird daher ein Beobachter zur Detektion eines Sensorausfalls beschrieben. Er misst sowohl den Luftspalt als auch dessen Beschleunigung. Der Beschleunigungssensor wird mit einem LUENBERG-Beobachter überwacht. Im Fall einer Störung soll dann ein redundanter Beschleunigungssensor die Funktion des defekten übernehmen.

### 4.4 Auslegung des Zustandsreglers

Wie in der Modellbildung in Abschnitt 3.5 bereits erläutert, wird durch die inverse Nachbildung der Proportionalfaktoren der Strecke das Übertragungsverhalten zu Eins gesetzt. Die Regelstrecke reduziert sich somit zu einem  $\dot{I}^2$ -System mit zwei Integratoren und

der Lageregler besteht aus dem Beobachter und einem normierten Zustandsregler, Gleichung (4.8). Durch den Störgrößenbeobachter und der Störgrößenaufschaltung werden auch die nichtlinearen Geschwindigkeitsterme aus dem Impuls- bzw. Drallsatz kompensiert. Somit reduziert sich die Struktur, wie in Abbildung 4.3 dargestellt. Anhand dieser Struktur können der normierte Zustandsregler und der Beobachter entworfen werden.

Da wie eingangs erwähnt, nicht alle Zustandsgrößen gemessen werden können bzw. gemessen werden, sollen aus Gründen des Aufwandes diese aus den messbaren Ein- und Ausgangsgrößen rekonstruiert werden. Hierin begründet sich die Notwendigkeit des Beobachters, welcher bessere Ergebnisse erzielt als die Bestimmung durch Differentiation des Lagevektors.

Beim Magnetlager des Runtisches wird die Lage des Rotors bezüglich des Bezugspunktes B gemessen. Aus diesem Sensorvektor  $\delta_S$  wird der generalisierte Koordinatenvektor  $q_B$  berechnet, aus dem mit Hilfe des Beobachters der generalisierte Geschwindigkeitsvektor  $\dot{q}_B$  gebildet wird. Anstelle der tatsächlichen Geschwindigkeit wird der ermittelte Schätzwert  $\hat{q}_B$  benutzt.

Beim Beobachter wird ausgenutzt, dass der Verlauf einer kontinuierlichen Größe  $y(t)$  aus seiner Ableitungen  $\dot{y}(t)$  und  $\ddot{y}(t)$  bestimmt werden kann. Somit kann die Kenntnis des Verlaufs von  $y(t)$  mit der Kenntnis aller Ableitungen gleichgesetzt werden.

Beim Entwurf des Beobachters greift das Separationsprinzip: Die Pole des Beobachters und des Reglers sind unabhängig voneinander und können somit frei gewählt werden. Somit kann der Beobachter getrennt vom Regler entworfen werden, [Föl94].

Bedingung ist jedoch die Beobachtbarkeit der Strecke, deren Nachweis in Abschnitt 3.5 positiv ausfiel. Im einfachsten Fall wird der Beobachter durch Polzuweisung ausgelegt. Dabei hat es sich als günstig erwiesen, eine Polkonfiguration mit hoher Dämpfung zu wählen, um ein schnelles Abklingen des Beobachterfehlers zu erreichen. Weiterhin muss der Beobachter schneller als der Regler arbeiten.

Die Auslegung des Zustandsreglers und des Beobachters kann im einfachsten Fall, wie am Runtisch erfolgt, durch Polzuweisung geschehen. Eine Alternative sind der Riccati- oder der  $H_\infty$ -Entwurf sowie das KALMAN-Filter für den Beobachter.

Allgemein soll das System ein gutes Führungsverhalten besitzen, d. h. Systemstörungen sollen keinen Einfluss auf das Verhalten des Systems haben. Dabei darf das Messrauschen möglichst keinen Einfluss auf das Systemverhalten ausüben. Weiterhin ist die Stellgröße praktisch beschränkt hinsichtlich ihrer Amplitude. Praktisch besitzen alle realen Systeme einen Tiefpasscharakter. Infolgedessen kann ein gutes Führungsverhalten nur für tiefe Frequenzen erreicht werden. Umgekehrt ist jedoch das Mess- und Quantisierungsrauschen etc. in der Regel hochfrequent. Folglich muss das Führungsverhalten für hohe Frequenzen kleine Werte annehmen.

Der  $H_\infty$ -Entwurf gestattet die Vorgabe von oberen Schranken für die Frequenzgänge der Stör-, Stellgrößen- und Führungsübertragungsfunktion. Dabei wird der Regelkreis um eine Gewichtsfunktion erweitert, mit deren die Forderungen nach Robustheit formuliert werden kann, [Mat03].

#### 4 Mehrgrößenregelung des Rundtisches

Der RICCATI-Regler basiert auf der Minimierung des quadratischen Gütefunktional bzw. Gütemaßes:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{S} \mathbf{u}(t)) dt. \quad (4.15)$$

Hierin bezeichnen  $\mathbf{Q}$  die Gewichtung der Zustandsgrößen und  $\mathbf{S}$  die Steuerenergie. Die Berechnung der Rückführungsmatrix des Reglers  $\mathbf{K}$  führt auf die numerische Lösung der RICCATI-Gleichung, für deren Lösung auf [Föl94] verwiesen wird. Die so berechnete Matrix  $\mathbf{K}$  bestimmt durch die Gewichtung der einzelnen Elemente der Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{S}$  das Einschwingverhalten des Reglers sowie die dafür notwendige Steuerenergie.

Das KALMAN-Filter basiert auf einem Modell der Regelstrecke und besitzt dieselbe Struktur wie der LUENBERG-Beobachter, [Föl94].

Bei der Modellierung realer Systeme treten nicht deterministisch beschreibbare, regellose Störungen auf, z. B. durch Modellungenauigkeiten. Bereits die Linearisierung der Magnetaktoren führt zu solchen Systemfehlern und somit zu dem so genannten "Systemrauschen". Zusätzlich besitzt jeder Sensor ein "Messrauschen", welches nicht deterministisch ist.

Während der LUENBERG-Beobachter einen deterministischen Zustandsvektor rekonstruiert, kann das KALMAN-Filter sowohl Messfehler als auch Modellfehler berücksichtigen. Dazu wird das Systemrauschen und Messrauschen als Zufallsgröße modelliert und der quadratische Mittelwert des Schätzfehlers minimiert. Da es nicht möglich ist, einen exakten Schätzwert für ein gestörtes System anzugeben, ist neben dem Schätzwert auch dessen Genauigkeit, die Kovarianz, anzugeben. Das KALMAN-Filter ist folglich in diesem Sinne ein optimaler Zustandsgrößenbeobachter, bei dem die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers minimiert wird, [Gee94].

Aufgrund dieses Ansatzes ist das KALMAN-Filter der Polvorgabe vorzuziehen, was in der Literatur über Magnetlager bestätigt wird.

# 5 Realisierung und experimentelle Verifikation

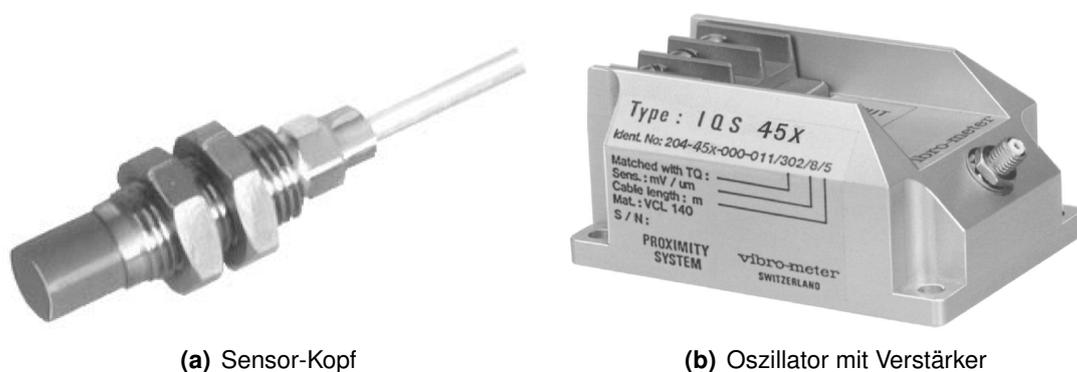
## 5.1 Komponenten des Rundtisches

### 5.1.1 Wirbelstromsensoren

Zur Bestimmung der Lager des Rotors im Koordinatensystem des Stators sind Abstandssensoren notwendig. Eingesetzt wurden Wirbelstromsensoren, welche eine hohe Empfindlichkeit und Genauigkeit haben bei einer besseren Unempfindlichkeit gegenüber Schmutz wie z.B. kapazitive Sensoren. Zudem sind sie in der Industrie weit verbreitet und gelten als sehr robust. Konkret wurden Wirbelstromsensoren der Firma vibro-meter eingesetzt, Abbildung 5.1. Dieser Typ wird hauptsächlich für Schwingungsmessungen an rotierenden Maschinen und kleineren Magnetlagern eingesetzt.

Ein Wirbelstromsensor ist ein induktiver Näherungssensor, welcher auch als induktiver Wegaufnehmer, induktiver Näherungsinitiator bzw. im angelsächsischen Raum als inductive proximity sensors bezeichnet wird.

Die Mehrzahl der induktiven Wirbelstromsensoren sind als einfache Näherungsschalter konzipiert, die beim Unterschreiten eines definierten Schaltabstandes den logischen Zustand des Ausgangssignals ändern. Daneben existieren Systeme, welche beim Annähern des Zielmaterials ein analoges Ausgangssignal (Spannung, Strom) bereitstellen, das proportional zum Messabstand ist. Wird als Messobjekt anstatt einfachem Stahl ein anderes Metall mit hoher elektrischer Leitfähigkeit eingesetzt, so kann sich der Nennabstand bis



**Abbildung 5.1:** Wirbelstromsensorsystem der Firma vibro-meter



**Abbildung 5.2:** RON 886

auf 20% verkleinern. Die Sensorhersteller geben dazu so genannte Korrekturfaktoren bzw. Kennlinien für den Abstand für unterschiedliche Metalle an.

Als Kompromiss hinsichtlich der Sensorauflösung bzw. -genauigkeit und zum Schutz vor Zerstörung durch mechanischen Kontakt mit dem Rotor wurde ein Messbereich von 2 mm gewählt, [vib03a]. Als Zielmaterial wird VCL 140 (DIN 42CrMo4) angegeben. Aufgrund des Prototypencharakters wurde jedoch keine gesonderte Messfläche am Rotor angebracht, d. h. als Messfläche dient der St37 des Rotors. Bereits bei dieser Entscheidung ist abzusehen, dass bedingt durch den geschmiedeten Rohkörper des Rotors, Inhomogenitäten im Gefüge des St37 auftreten werden und somit die Annahme einer isotropen Messfläche aus Abschnitt 3.4.1 verletzt wird. Die Empfindlichkeit des Sensors liegt bei besagtem Referenzmaterial bei  $8 \text{ mV}/\mu\text{m}$  und die Auflösung beträgt unter 200 nm laut Nachfrage beim Hersteller. In Verbindung mit einer 16-Bit ADU-Karte und aufgrund des Signal-Spannungsbereichs des Signalaufbereiters [vib03b] von 20 V wäre somit eine theoretische Auflösung von ca. 40 nm möglich. Die Auflösung der Wirbelstromsensoren liegt somit oberhalb der Quantisierung der eingesetzten 16-Bit ADU-Karte.

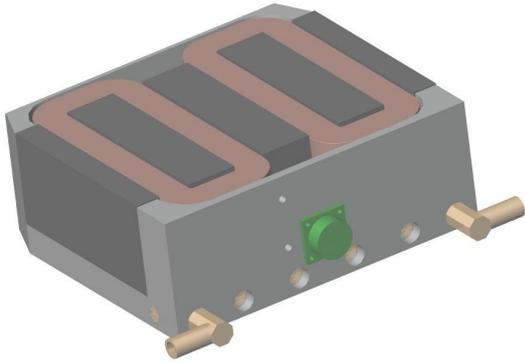
Konstruktiv sind die Sensoren wie in Abbildung 3.2 dargestellt im Rundtisch angeordnet. Diese Anordnung garantiert die Erfassung aller für das Magnetlager relevanten Freiheitsgrade.

### 5.1.2 Winkelmesssystem

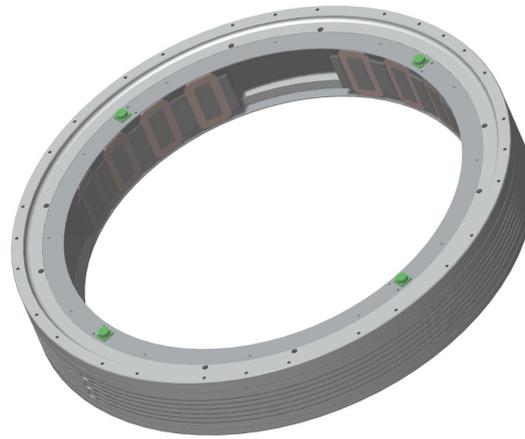
Wie in Abschnitt 3.4.1 bereits erwähnt, ist für die Bestimmung der Lage der Hauptachse ein weiteres Messsystem notwendig.

Als Marktführer für Inkrementalgeber und aufgrund des künftigen Einsatzes im Werkzeugmaschinenbau bieten sich Systeme von HEIDENHAIN an. Daher wurde als Drehgeber der RON 886 gewählt, Abbildung 5.2. Es handelt sich hierbei um einen inkrementalen Drehgeber mit integrierter Statorkupplung und einer Systemgenauigkeit von  $\pm 1''$ . Seine maximal zulässige Drehzahl beträgt  $1000 \text{ min}^{-1}$  und erfüllt somit die Anforderungen aus Abschnitt 1.1, [Hei03].

Als Schnittstelle zur Steuerung bzw. Regelung stellt der RON 886 zwei Signale zur Verfügung. Die annähernd sinusförmige Inkrementalsignale A und B sind um  $90^\circ$  phasenverschoben und haben eine Signalgröße von typ.  $1 V_{SS}$ . Dieses Signal dient in erster Hinsicht dem Regelkreis des Direktantriebes. Um das Signal der Regelung des Magnetlagers zur Verfügung zu stellen, wird eine Weiche eingesetzt.



**Abbildung 5.3:** Axialer Magnetaktor



**Abbildung 5.4:** Radialer Magnetaktor

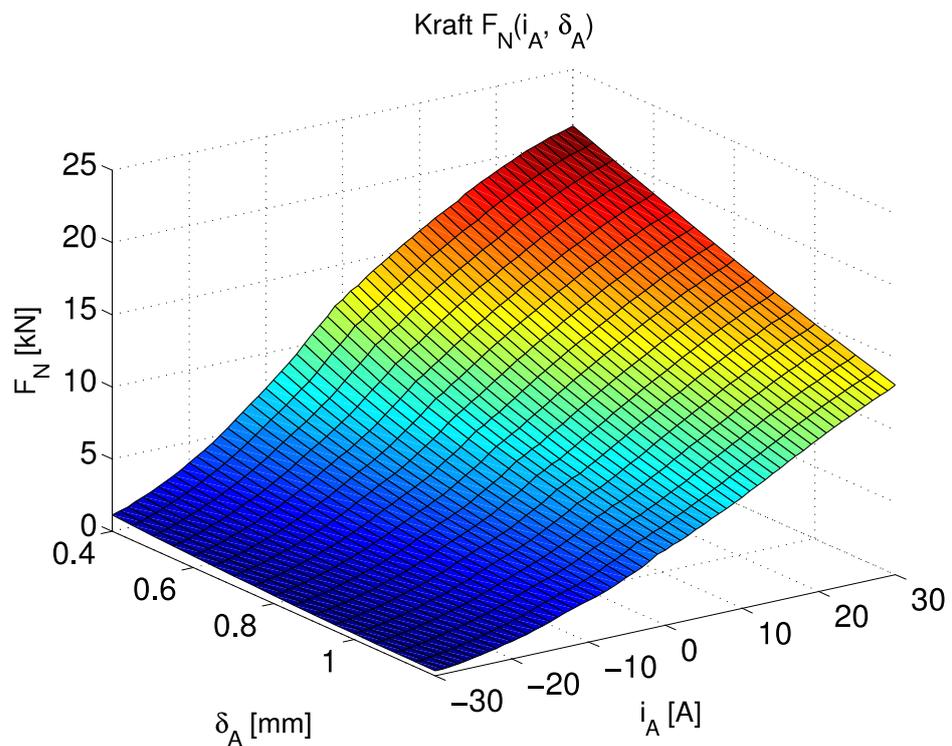
Konstruktiv befindet sich der RON 886 in der Mitte des Rundtisches auf dem fest mit der Grundplatte verbundenen Dom. Mit Hilfe einer Mitnehmerscheibe wird die Rotation des Rotors übertragen und gemessen.

### 5.1.3 Magnetaktoren

Der realisierte axiale Aktor ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Der Doppel-EI-Kern und die zwei Spulen sind deutlich zu erkennen. Ebenfalls ist die Wanne ersichtlich, die zum einen den Kernen mit den Spulen in Verbindung mit der Vergussmasse Halt gibt. Zum anderen gewährleistet die Wanne die Kühlung mit den dafür notwendigen Kühlan schlüssen. Ebenfalls erkennbar ist der elektrische Anschluss, welcher als Stecker ausgeführt ist.

Abbildung 5.4 zeigt den realisierten radialen Aktor. Dieser besteht im Gegensatz zu den axialen aus einer einzigen Baugruppe. Um eine einfache Montage ohne aufwendige Nacharbeiten hinsichtlich der Genauigkeiten zu erreichen, wurden die radialen Aktoren in einem Montagering zu einem "Zentriermagneten" zusammengefasst. Dadurch konnte der Rundlauf und die Konzentrität wesentlich einfacher gewährleistet werden als bei Verwendung mehrerer Einzelner. Weiterhin ist der Montagering des Zentriermagneten erkennbar, welcher sämtliche Kerne und Spulen trägt und gleichzeitig die Kühlung realisiert. Dazu sind am Umfang Rillen eingedreht, welche der Verteilung des Kühlmittelflusses auf der Außenfläche dienen. Bei diesem Prinzip der Kühlung wird die Abdichtung des Kühlsystems erst im Einbauzustand erreicht. Weiterhin sind die 4 als Steckkontakte ausgeführten elektrischen Anschlüsse zu erkennen. Die 4 Spulen in den jeweiligen Segmenten sind in Reihe geschaltet und mit ihren EI-Kernen ebenfalls ersichtlich.

Prinzipiell unterscheidet sich der magnetische Kreis der axialen und radialen Aktoren nicht wesentlich, d. h. es wurde auf gleiche Flächen und Flächenverhältnisse geachtet. Entsprechend wurden die gleichen Spulen und Permanentmagnete für axiale und radiale Aktoren eingesetzt, um den Kostenfaktor über die Stückzahlen zu senken. Dazu wurden die Parameter Kraft und Dynamik der axialen und radialen Aktoren variiert, um diesen Anforderungen gerecht zu werden, ohne dabei die Mindestanforderungen zu verletzen.



**Abbildung 5.5:**  
Gemessene und gemittelte Kennlinie eines Hybridmagneten des Rundtisches

Die so ausgelegten Magnete wurden mit Hilfe eines gestellten Messstandes hinsichtlich ihrer statischen Kräfte vermessen.

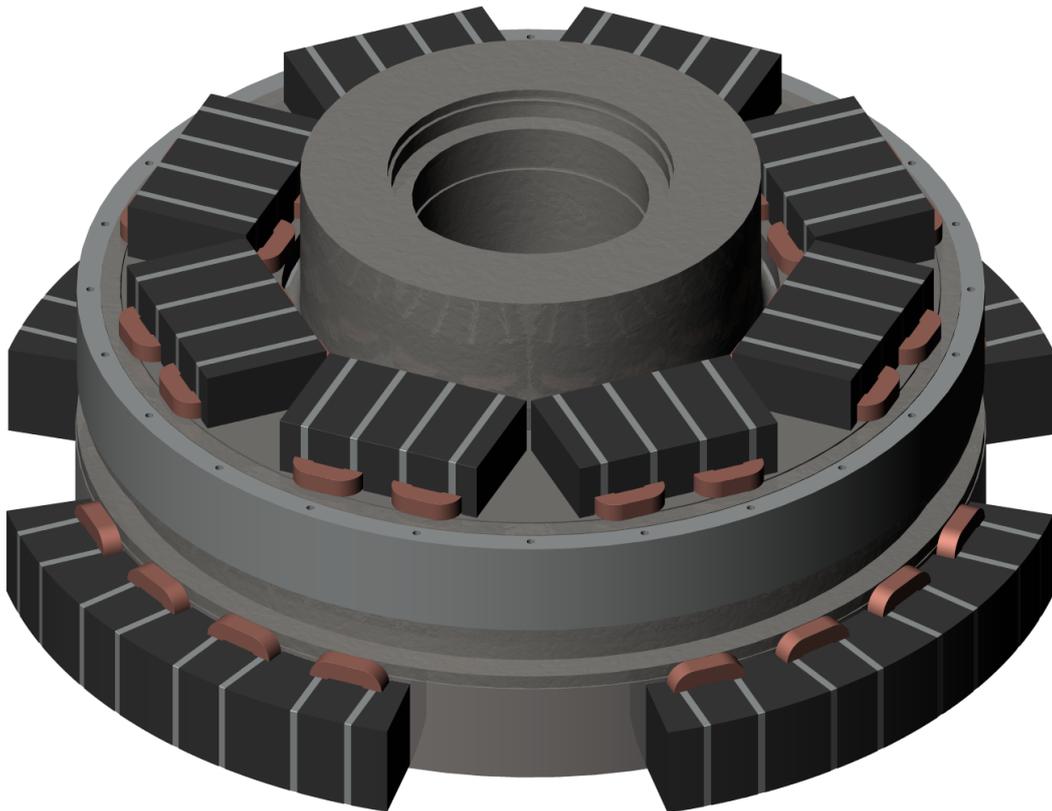
Die gemessenen Kräfte der axialen Aktoren sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Sie zeigen die über 16 Messungen gemittelte Kraft in Abhängigkeit von Luftspalt  $\delta_A$  und Aktor-Strom  $i_A$ . Erkennbar ist die Abflachung der Kraft insbesondere bei kleinen Luftspalten und großen Strömen, wo sich die Sättigung der Eisenkerne negativ bemerkbar macht.

Die Ermittlung der Magnetkennlinien des Zentriermagneten konnte aufgrund der fehlenden mechanischen Steifigkeit des zur Verfügung gestellten Messstandes nicht vollständig durchgeführt werden. Sie war für die realisierbaren Kräfte des Zentriermagneten unzureichend. Daher konnten keine sinnvollen Kennlinien für größere Ströme als ca. 5...10 A aufgenommen werden.

Die Angaben aus Tabelle 3.1 beziehen sich auf Kräfte in den Magnetkoordinaten. Aufgrund der Anordnung der radialen Aktoren im Kreis bzw. in der Segmentanordnung ist die resultierende Normalkraft wesentlich größer. Sie setzt sich aus der Kraft in Richtung der Hauptkoordinate entsprechend der Tabelle und einer mit dem Winkel steigenden "Tangentialkraft" zusammen. So beträgt die effektive Normalkraft eines Segmentes 27 kN.

Aufgrund der gleichartigen Berechnung und Konstruktion von axialen und radialen Magnetaktoren wird davon ausgegangen, dass die Linearisierung der radialen Aktoren ähnlich der axialen ist. Folglich werden zur Inbetriebnahme gleiche Faktoren angenommen.

Das CAD-Modell (Abbildung 5.6) zeigt den prinzipiellen Aufbau des Rundtisches hinsichtlich seines Magnetlagercharakters. Zu erkennen sind die axialen und radialen Aktoren aus Abbildung 5.3 bzw. 5.4. Sie sind zur besseren Übersichtlichkeit ohne Gehäuse, Anschlüsse etc. dargestellt. Die Eisenkerne (Doppel EI-Kern) mit den Permanentmagneten



**Abbildung 5.6:** CAD-Modell des Rundtisches mit Magnetaktoren ohne den Direktantrieb

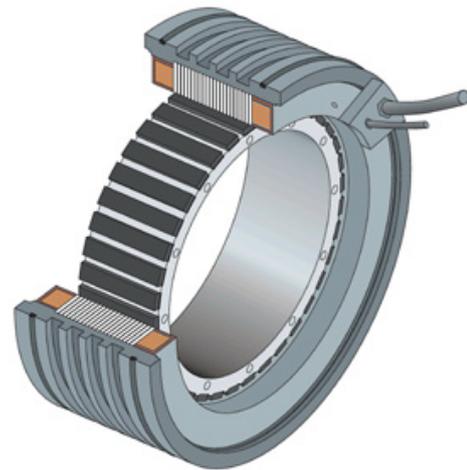
sowie den Spulen sind ebenfalls erkennbar. Zudem wurde zur besseren Übersicht im CAD-Modell der Direktantrieb nicht komplett dargestellt, lediglich das Sekundärteil des Torque-Motors ist abgebildet.

Um den Einfluss von Wirbelströmen zu vermeiden, wurden die Sekundärteile für alle Magnete geblecht ausgeführt. Aufgrund des kreisförmigen Charakters wurde die axiale Blechung jedoch nicht radial bzw. sternförmig sondern als ein Blechwickel ausgeführt. Die Sekundärteile der radialen Zentriermagnete werden als einfache Segmente ausgeführt, welche versetzt am Umfang angeordnet werden. Dabei ist die Blechrichtung senkrecht auf dem Umfang ausgeführt. Aufgrund dieser Vereinfachung kann ein Bandwickel für die axialen Sekundärteile sowie für die radialen Sekundärteile Segmente verwendet werden. Dieses senkt in der Fertigung die Kosten und Zeit. Allerdings handelt es sich bei dem Rundtisch folglich um kein Homopolarlager.

#### 5.1.4 Direktantrieb

Aufgrund der Anforderungen aus Abbildung E.1 wurde ein Direktantrieb der Firma *ETEL* ausgewählt, Abbildung 5.7.

Der gewählte TMA 0990-100 besitzt einen Außendurchmesser von 1030 mm und ist mit seinen  $2p = 176$  Polen ein typischer Vertreter der Direktantriebe mit einem hohen Moment



**Abbildung 5.7:** CAD-Modell mit Partial-Schnitt eines Torque-Motors der Firma *ETEL*

bei kleinen Umdrehungen. Die maximale Drehzahl beträgt  $68 \text{ min}^{-1}$ . Dabei erzeugt er ein Dauermoment von  $3,082 \text{ kNm}$  bzw.  $7,025 \text{ kNm}$  mit Wasserkühlung und ein Spitzenmoment von  $10,684 \text{ kNm}$ . Dabei beträgt die maximale Dauerverlustleistung bei Wasserkühlung  $13,946 \text{ kW}$ , [ETE01].

Die radialen Kräfte zwischen Stator und Rotor entsprechen einer Verspannung bei radialer Verschiebung in einer instabilen Einbausituation. Die Kräfte werden vom Hersteller vorgegeben und können auf andere Baugrößen umgerechnet werden, [ETE01].

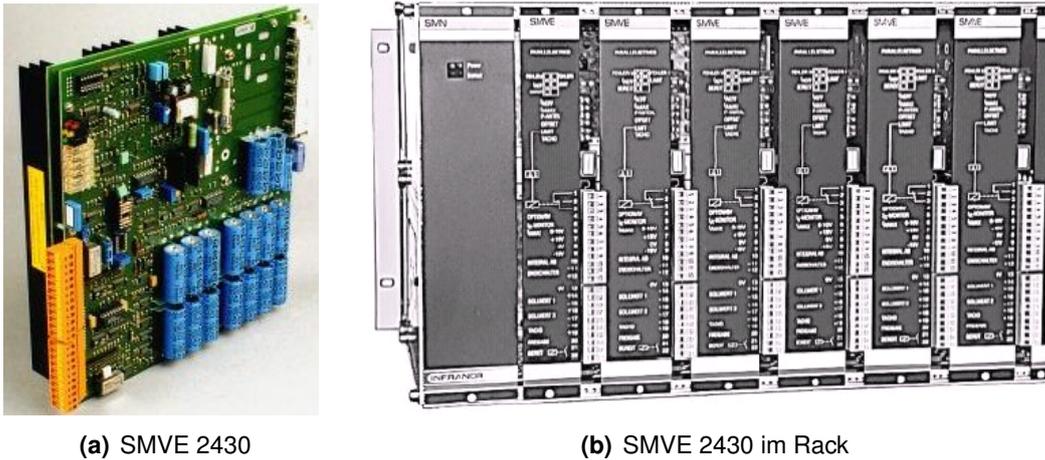
Die axialen Kräfte zwischen Stator und Rotor entsprechen einer Einzugskraft des Rotors in den Stator und werden ebenfalls vom Hersteller angegeben, siehe Tabelle A.3. Aufgrund der verhältnismäßig großen magnetischen Luftspalte können diese Normalkräfte als nahezu linear angesehen werden, wie vom Hersteller bestätigt wurde.

Angesteuert wird der Direktantrieb durch einen externen Servo-Umrichter der Firma Bosch Rexroth/Indramat. Für die Modellierung wurde die Antriebsregelung als dynamisch transparent betrachtet, d.h. der Servo-Umrichter stellt mit dem Drehgeber zur Lagerbestimmung der Hauptachse einen separaten Regelkreis dar. Aufgrund der Entkoppelung der Freiheitsgrade kann diese Annahme getroffen werden. Lediglich die statischen axialen und radialen Kräfte der Permanentmagnete des Synchronmotors werden in der Regelung des Magnetlagers als Störgrößen beachtet, wie in 4.1 beschrieben.

### 5.1.5 Leistungsverstärker

Die Stromsteller setzen die Regelsignale des Reglers in Steuerströme in den Wicklungen der magnetischen Aktoren um. Sollen mit den Aktoren große statische und dynamische Kräfte erzeugt werden, müssen diese große Ausgangsströme bei hohen Ausgangsspannungen liefern können, da aus dynamischen Gründen mit Spannungsüberhöhung gearbeitet wird.

Die mit einem Magneten bei voller Amplitude erreichbare Frequenz ist proportional zur Verstärkerleistung, [Tra85]. Durch entsprechende Auslegung kann die Windungszahl an



(a) SMVE 2430

(b) SMVE 2430 im Rack

**Abbildung 5.8:** Stromsteller der Firma INDRAMAT

den Stromsteller angepasst werden. Allgemein haben sich aufgrund der geringeren Verluste Schaltverstärker gegenüber analogen Verstärkern durchgesetzt.

Schaltverstärker arbeiten mit einem festen Takt in der Regel im Bereich von 8 kHz, wobei abwechselnd die Ventile geschaltet werden, [STB93]. Hierbei glättet die Induktivität des Magnetaktors den Strom, so dass ein kontinuierlicher Strom mit einem Rippel entsteht. Je nach Einschaltdauer und welche Stromventile geschaltet werden, ergibt sich ein positiver bzw. negativer Mittelwert der Spannung über den Magneten. Damit steigt oder sinkt der Strom im Aktor über mehrere Umschaltungen. Schaltverstärker haben den Nachteil gegenüber Analogverstärkern, dass der erzeugte Stromrippel in den Magnetaktoren zusätzliche Ummagnetisierungsverluste verursachen. Als Vorteil steht die geringere Verlustleistung gegenüber, welche für den Einsatz ausschlaggebend war.

Die Stromsteller des eingesetzten Typs SMVE2430 von INDRAMAT besitzen eine Zwischenkreisspannung  $U_{KI} = 240 \text{ V}$  und können bis zu 30 A dauerhaft bzw. bis zu 60 A kurzzeitig in allen 4 Quadranten bereitstellen, Abbildung 5.8. Sie sind eine Modifikation der Standardgeräte, welche allgemein zur Regelung von Gleichstrommotoren eingesetzt werden. Die Stromregelung des Gerätes ist in Analogtechnik ausgeführt, wobei die Strommessung standardmäßig über einen Shunt erfolgt. Die Sollwerte für die einzelnen Stromsteller werden durch den Lageregler aus Abschnitt 4.1 vorgegeben, welche werkseitig mit einem Tiefpass mit ca.  $f_o \approx 1,5 \text{ kHz}$  gefiltert werden.

Hinsichtlich des Preis-Leistung-Verhältnisses bez. der Anzahl der notwendigen Stromsteller wurde ein Kompromiss gefunden. Die axialen Magnete werden in der Differentialanordnung in Reihe geschaltet, da deren Induktivität gering ist. Die Ansteuerung der einzelnen radialen Magnete erfolgt jeweils durch einen Stromsteller. Die große erforderliche Fläche der radialen Magnete und der daraus resultierenden großen Induktivität machte dies erforderlich. Folglich muss jeweils einer der radialen Stromsteller mit vertauschter Polarität des Sollwertsignals angesteuert werden. Da es sich um ein Lager mit 8 axial und 4 radial angeordneten Magnetaktoren handelt, sind so lediglich 12 Stromsteller anstelle von 24 notwendig.

### 5.1.6 Implementation der Zustandsregelung

Als Hardware wird eine x86-Plattform eingesetzt. Die Ein- und Ausgabe erfolgt über PCI-Karten der Firma Meilhaus und ADLink. Damit ist die Verfügbarkeit bei geringen Kosten gewährleistet. Weiterhin steigt die Rechenleistung pro Euro ständig, so dass bei noch komplexeren Regelungsstrukturen genug Rechenleistung bereitgestellt werden kann.

Die Steuerung selbst hat die Aufgabe, den Funktionsablauf des Magnetlagers zu koordinieren und zu überwachen, Messdaten zu visualisieren und zu protokollieren, interne Abläufe und Fehlfunktionen anzuzeigen sowie die Schnittstelle zum Bediener zu realisieren. Weiterhin soll eine vom Anwender frei wählbare Konfiguration der Steuerung und Einflussnahme auf die Reglerparameter möglich sein.

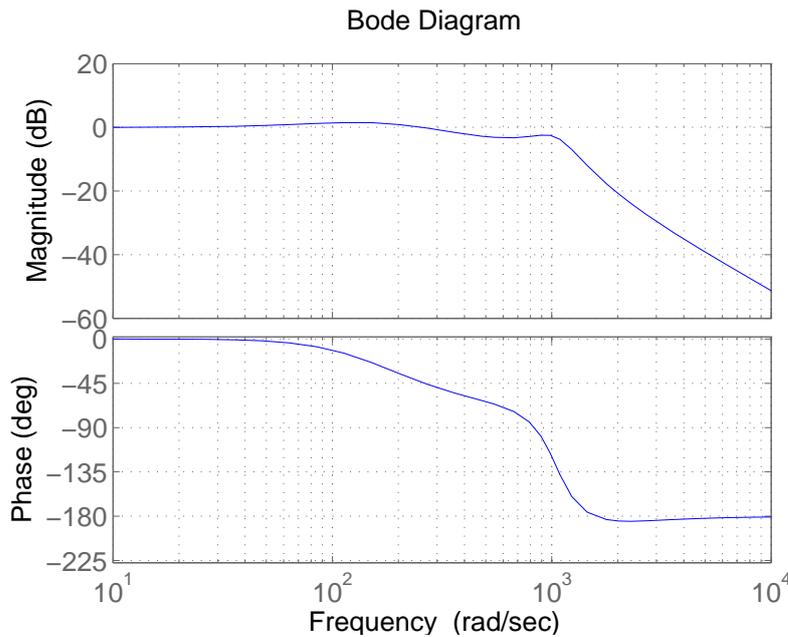
Realisiert wurde die Steuerung und Regelung in der Programmiersprache C und C++. Als Echtzeit-Betriebssystem kam Linux zum Einsatz, welches durch RTAI [GMRS04] echtzeitfähig gemacht wurde. Verschiedene Magnetlager wurden damit bereits erfolgreich [HHA99, Ard99, Wur99, BDGM99] realisiert. Das **Real Time Application Interface** für Linux wurde auch auf andere Plattformen wie PowerPC portiert, so dass künftig eine breite Palette leistungsfähiger Hardware neben der x86 zur Verfügung steht.

Die Kommunikation zwischen der Steuerung und der Regelung erfolgt über Shared-Memory und ist folglich gebunden an den Host, auf dem sie läuft. Dies schließt die Kommunikation über Befehle als auch die Bereitstellung der internen Daten des Reglers mit ein. Die Bedienoberfläche selbst wurde in C++ programmiert und für X11 mit Qt erstellt.

Für die notwendigen Matrizenoperationen wurde speziell die Bibliothek *tvmet* [Pet04] in C++ entwickelt, welche für Matrix- und Vektoroperation kleiner Dimensionen Vorteile gegenüber dem üblichen schleifenbasierten Ansatz bietet. Dazu werden die Ausdrücke, z. B. für eine Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor, bereits zur Kompilierungszeit durch den Compiler in ausmultiplizierter Form in Maschinencode übersetzt, d. h. die Elemente des Matrizenproduktes werden gleich in die Form  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$  transformiert. Dadurch kann bei einem generierten Maschinencode, welcher handoptimiertem Assembler sehr nahe kommt, die Lesbarkeit des Quelltextes gewährleistet werden. Die Technik basiert auf so genannten Meta- und Expression-Templates, [Velb, Vela].

Daneben wurde ein objektorientierter Ansatz gefunden, um die verschiedenen Konfigurationen von Magnetlagern und auch -führungen hinsichtlich ihrer Anzahl von Sensoren und Aktoren mit den Einsatz von so genannten "Traits" [Str00] zu vereinheitlichen. Hierbei enthalten die Traits alle notwendigen Angaben und applikationsspezifische Rechenoperationen bzw. Matrizen wie die Sensor- und Aktormatrix  $J_{SB}^+$  (3.14) und  $J_{AB}^+$  (3.25). Hierbei macht sich der verwendete Regelungsansatz positiv bemerkbar, da eine klare Trennung zwischen dem veränderlichen applikativen Teil und der konstanten Implementierung der Regelung besteht. Weiterhin kommen Softwaremuster [GHJV96, Vli99, BMRS00] zum Einsatz, indem immer wiederkehrende Entwurfsprobleme der objektorientierten Softwareentwicklung zu Idiomen und Mustern zusammengefasst werden.

Der Direktantrieb des Rundtisches wird von einem Servo-Umrichter der Firma Bosch-Rexroth/Indramat geregelt und übernimmt somit die Lage- bzw. Drehzahlregelung der



**Abbildung 5.9:**  
Bode Diagramm des  
geschlossenen Re-  
gelkreises

Hauptachse. Dabei ist das Magnetlager für den Servo-Umrichter transparent, d. h. er wird als ein konventionelles Lager betrachtet.

Zur Erfassung der Lage der Hauptachse wird das Signal des Drehgebers für das Magnetlager per Hardware vom Servo-Umrichter abgezweigt, so dass mit einer weiteren PCI Karte im Host die Lagerinformation der Regelung ebenfalls zur Verfügung gestellt werden kann.

Infolge der Entkoppelung und gleicher Parameter im Zustandsregler beträgt 3 dB Bandbreite 163 Hz für jeden einzelnen Freiheitsgrad, Abbildung 5.9. Sie wurde für die eingestellten Pole der Regler und Beobachter für 300 bzw. 1800 bestimmt. Der ungerade Amplituden- bzw. Phasenverlauf ist durch den Beobachter bedingt.

Auf Grund äußerer Gegebenheiten konnte das Signal des Drehgebers nicht mehr in die Regelung integriert werden. Daher kann die Verbesserung des Konzeptes durch eine Erweiterung der Reglerstruktur um die Gyroskopische Matrix  $G_B$  nach Abschnitt 4.2 bzw. der Beschleunigungsmessung nach Abschnitt 4.3 lediglich durch Simulationen bestätigt werden.

Tabelle 5.1 gibt Auskunft über die erreichbaren Verbesserungen der Steifigkeit für verschiedene Konfigurationen des Störgrößenbeobachters gegenüber der Variante aus Abschnitt 4.1, welche mit 100% angesetzt wurde. Die Werte sind aus einer nichtlinearen Simulation hervorgegangen, wobei in der Hauptachse  $\phi_z$  ein Lastsprung gegeben und die Steifigkeiten in den einzelnen Achsen bestimmt wurde.

Mit einem Störgrößenbeobachter und Beobachtung der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\phi}_z$  gemäß Abschnitt 4.2 beträgt die Verbesserung im Mittel 52% und bis zu 83% bez. der  $z$ -Achse. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da die Störgrößenbeobachtung von  $\ddot{\phi}_z$  deren Einfluss erst korrigierbar macht. Hierbei werden keine weiteren Sensoren eingesetzt.

Zustandsgröße	Verbesserungen durch verschiedene Störgrößenbeobachter			
	ohne zusätzliche Sensoren	mit einem $\ddot{\phi}_z$ -Sensor	mit zusätzlichem Sensorvektor für $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\phi}_x, \ddot{\phi}_y, \ddot{\phi}_z)^T$	
x	max.	61%	64%	81%
	min.	51%	53%	75%
y	max.	52%	54%	76%
	min.	60%	63%	80%
z	max.	83%	83%	94%
	min.	0%	5%	71%
$\phi_x$	max.	50%	52%	75%
	min.	62%	64%	81%
$\phi_y$	max.	52%	54%	76%
	min.	60%	63%	80%
Min.	0%	5%	71%	
Mittel	52%	56%	79%	
Max.	83%	83%	94%	

**Tabelle 5.1:** Verbesserung der Steifigkeit durch Einsatz verschiedener Konzepte des Störgrößenbeobachters bei Lastsprung in der Hauptachse  $\phi_z$

Interessant jedoch ist die Aussage von Tabelle 5.1, dass ein zusätzlicher Sensor zur Erfassung der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\phi}_z$  der Hauptachse keine signifikante Verbesserung gegenüber dem Ansatz mit einem Störgrößenbeobachter bewirkt. Gerade in Hinblick auf die durch die Rotation notwendige Telemetrie ist dieses Konzeptes nicht wirtschaftlich.

Erst die vollständige Bestimmung des Beschleunigungsvektors des Rotors  $\ddot{\mathbf{q}}_{B_{Ist}}$  gemäß Abschnitt 4.3 kann eine deutliche Verbesserung in allen magnetisch gelagerten Freiheitsgraden erwirken. Die Bestimmung selbst wird durch entsprechend am Rotor angebrachte Sensoren realisiert. Die Verbesserung beträgt im Minimum 71% und kann bis zu 94% betragen. In Hinblick auf eine geforderte hohe dynamische Steifigkeit, insbesondere in der Metall verarbeitenden Industrie, ist eine solche Lösung anzustreben, auch wenn dies einen erhöhten technologischen und wirtschaftlichen Aufwand bedeutet.

### 5.1.7 Der Rundtisch

Die mechanischen Teile des Gehäuses wurden zur Verfügung gestellt und durch ein externes Konstruktionsbüro entworfen. Allerdings wurden im Konstruktionsprozess keine stati-

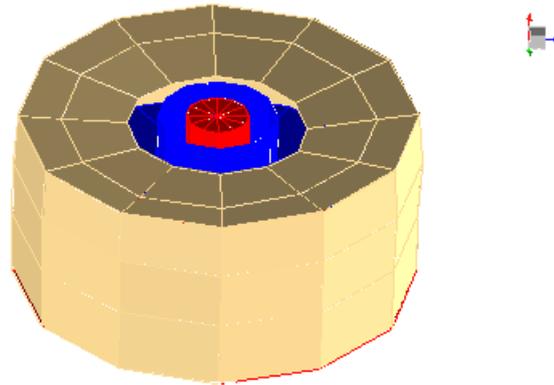


**Abbildung 5.10:** Realisierter Rundtisch

schen und dynamischen Analysen der mechanischen Struktur durchgeführt. Im Wesentlichen besteht er aus verschraubten Drehteilen mit kleineren eingefügten Schweißteilen. Daher wurde eine Modalanalyse des Rundtischgehäuses und des Rotors mit LMS Instruments Scadas III durchgeführt. Die Ergebnisse des Gehäuses sind in Abbildung 5.11, A.2 und A.3 dargestellt. Die ersten drei Eigenfrequenzen bei  $f_1 = 736,92$  Hz,  $f_2 = 957,95$  Hz und  $f_3 = 1138,99$  Hz für das Gehäuse und bei  $f_1 = 1754,42$  Hz,  $f_2 = 1962,72$  Hz sowie  $f_3 = 2472,23$  Hz für den Rotor. Dieser ist massiv aus einem geschmiedeten Zylinder gefertigt und entsprechend stabil.

Abbildung 5.10 zeigt den Rundtisch im Vordergrund und den Schaltschrank im Hintergrund. Der Schaltschrank enthält die Stromsteller, den Servo-Umrichter und die restliche Hardware des Magnetlagers.

In Tabelle A.4 sind die notwendigen geometrischen Parameter zur numerischen Ermittlung der JACOBI-Matrix für die Aktoren  $J_{AB}$  angegeben.



**Abbildung 5.11:** Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 1 bei 736,92 Hz

## 5.2 Ergebnis der statischen und dynamischen Messungen

### 5.2.1 Allgemeiner Betrieb

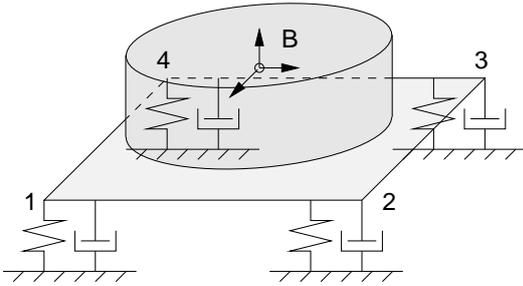
RTAI/Linux konnte seine prinzipielle Eignung unter Beweis stellen. Es konnten Abstrakten von 6 kHz bzw. Zykluszeiten bis zu  $166 \mu\text{s}$  realisiert werden. Als hinderlich stellte sich jedoch der enorme Aufwand für die Softwareentwicklung und -wartung heraus. Des Weiteren wurde die Frage des Determinismus und dem daraus folgenden Jitter infolge der PC-Plattform nicht untersucht.

Im praktischen Betrieb schwebt das System ruhig und verträgt auch größere Masse- und Schwerpunktänderungen bis zu ca. 40% bez. der im Regler eingestellten Parameter.

Im Betrieb treten jedoch gelegentlich leichte Vibrationen auf, welche am Gehäuse gemessen werden können, während der Rotor ruhig schwebt. Jede Störung, wie z. B. eine Netzstörung, wird in die Regelstrecke eingebracht. Hier macht sich die Eigenschaft des Magnetlagers als elektrodynamischer Energiewandler negativ bemerkbar.

Als kritisch haben sich auch die Stromsteller herausgestellt. Zur Strommessung wurden serienmäßig im Gerät Shunts eingesetzt, deren Temperaturgang sich nachteilig auf die Langzeitstabilität auswirkte. Auch kam es bei der Regelung der Sollströme um die 0 A zu Sprüngen bei den Istströmen. Nach Austausch gegen LEM-Module zur Strommessung konnte das Verhalten wesentlich verbessert werden.

Bei manueller Bewegung des Rotors machen sich große Bremskräfte bemerkbar, deren Ursache aus der bisherigen Modellierung nicht ohne weiteres erkennbar ist. Eine mechanische Reibung infolge eines unzureichenden Luftspaltes ist ausgeschlossen, da der Rotor in allen Freiheitsgraden innerhalb der Vorgaben ( $\pm 600 \mu\text{m}$ ) frei positionierbar ist. Folglich müssen die nichtkonservativen Kräfte der Magnetaktoren genauer untersucht werden. Mögliche Kräfte durch Wirbelstromverluste sind aufgrund der Blechung der Primär- und Sekundärteile der Magnetaktoren vernachlässigbar. Luftreibungsverluste sind aufgrund



**Abbildung 5.12:** Lagerung des Rundtisches

Freiheitsgrad [Hz]					
$x$	$y$	$z$	$\phi_x$	$\phi_y$	$\phi_z$
8,9	8,9	19,8	22	22	11,8

**Abbildung 5.13:** Starrkörperschwingung des Rundtisches

der niedrigen Umdrehungszahlen ebenfalls vernachlässigbar. Als mögliche Ursache verbleiben Hystereseverluste. In Abschnitt 5.1.3 wurde die Anordnung der Aktoren beschrieben bzw. in Abbildung 5.6 dargestellt. Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass bei Rotation um die Hauptachse das Sekundärteil ständig ummagnetisiert wird. Ein axialer Magnetaktor besteht aus einem Doppel-EI-Kern und besitzt somit 4 Polpaare. Bei insgesamt 8 Aktoren in Differentialanordnung sind dies bereits 64 Polpaare. Der radiale Magnetaktor besteht aus 4 Segmenten mit jeweils 4 Doppel-EI-Kernen und somit insgesamt 32 Polpaaren. In der Summe sind dies 96 Polpaare. Aufgrund der permanentmagnetischen Vormagnetisierung der Magnetaktoren auf  $\frac{1}{2} B_{max}$  beträgt der Hub der Ummagnetisierung  $B_{max}$ , welche entsprechende Hystereseverluste und somit Bremskräfte erzeugt.

Bei höheren Umdrehungen ( $\geq 20 \text{ min}^{-1}$ ) macht sich ein Poltern bemerkbar, das sich durch die Inhomogenitäten der Sensorflächen erklären lässt. Dieses war zu erwarten, da eine spezielle Messspur wegen des Prototypencharakters nicht vorgesehen wurde, Abschnitt 5.1.1

## 5.2.2 Analyse der Messbedingungen

Aus versicherungstechnischen Gründen musste eine Beschädigung des Hallenbodens vermieden werden. Somit erfolgte die Montage des Rundtisches auf eine ca. 5 cm starke Stahlplatte, welche mit Dämpfungselementen aus Gummi eine Entkoppelung mit dem Hallenboden bewirkt, Abbildung 5.12.

Idealerweise hätte ein Maschinenfundament oder allgemein ein schwingungsfreies Fundament entsprechender Masse benutzt werden müssen, welche auf Grund der Gegebenheiten allerdings nicht möglich war. Daraus resultiert eine Starrkörperschwingung, welche sich vorwiegend aus der Gesamtmasse und der Feder-/Dämpfungskonstanten der Dämpfungselemente ergibt.

In Tabelle 5.13 sind die Ergebnisse der Messung dargestellt. Die Frequenzen für die translatorischen Freiheitsgrade  $x$  und  $y$  bzw. rotativen Freiheitsgrade  $\phi_x$  und  $\phi_y$  sind aufgrund der Symmetrie des Rundtisches gleich. Die Messung der Schwingungen erfolgte mittels Piezokeramischer Aufnehmer an den Stellen 1 bis 4 (Abbildung 5.12) und die Anregung

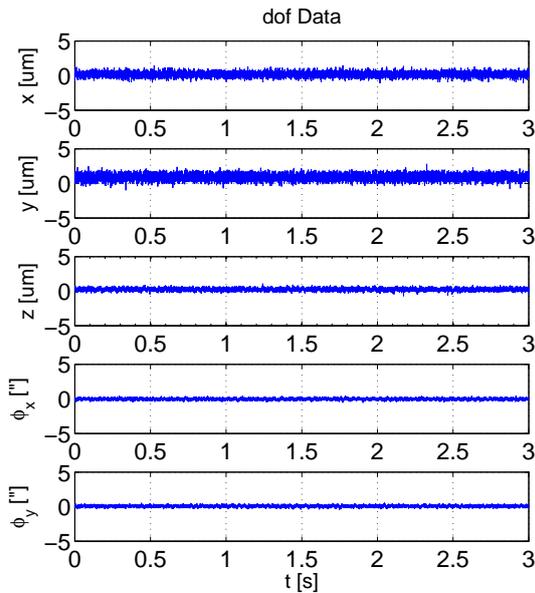


Abbildung 5.14: Sensorrauschen

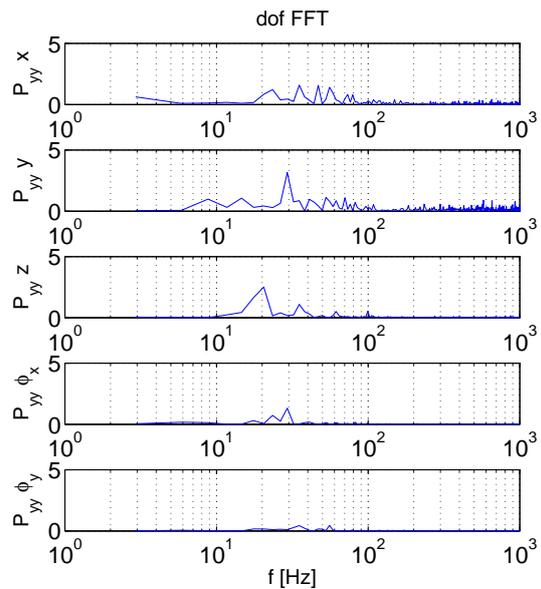


Abbildung 5.15: FFT des Sensorrauschens

durch einen entsprechend schweren Hammer, wobei darauf geachtet wurde, nur die tiefen Frequenzen anzuregen. Die Auswertung erfolgte mit einer speziellen Software von LMS.

Unter rein praktischen Gesichtspunkten stellt ein Maschinenfundament bzw. schwingungsfreies Fundament ebenfalls ein schwingungsfähiges Gebilde dar, wobei unter realen Aspekten die Eigenmasse des Fundamentes wesentlich stärker dämpfend wirkt, womit die geschilderte Erscheinung bei künftigen Rundtischen nicht zu erwarten ist.

### 5.2.3 Schwebe in Ruhe

Der Rotor des Rundtisches schwebt ruhig und leise mit einem ganz leichten, jedoch hörbaren Rauschen, welches sich jedoch innerhalb einer Werkhalle nicht bemerkbar macht. Messungen belegen, dass sich das Rauschen der Sensoren, die Quantisierung des diskreten Reglers und der A/D bzw. D/A Umsetzer, sich mit weniger als  $1 \mu\text{m}$  bzw.  $1''$  auf die Messwerte niederschlägt, Abbildung 5.14. In Anbetracht der absoluten Genauigkeit von  $2 \mu\text{m}$  der Sensoren bzw. Auflösung von ca.  $200 \text{ nm}$  [vib03a] sind dies hervorragende Werte. Aufgrund der großen Abmessungen des Rundtisches ist die schallabstrahlende Fläche jedoch verhältnismäßig groß, so dass trotz dieser geringen Auslenkungen ein leises Rauschen vernehmbar ist.

Die Starrkörperschwingungen des Rundtisches aus Abschnitt 5.2.2 sind auch mittels der Sensoren in der Messung des Sensorrauschens nachweisbar und wirken sich jedoch hinsichtlich der Stabilität bzw. Genauigkeit nicht auf die Rotorlage aus, Abbildung 5.15. Aufgrund der hohen Abtastfrequenz des Lagereglers und der geringen Anzahl von Stützstellen der Fast Fourier Transformation (FFT) von  $N = 2048$ , können die einzelnen Starrkör-

perschwingungen in den Achsen nicht einzeln identifiziert werden und man erkennt nur eine einzige bei ca. 20 Hz. Hinzu kommt, dass die Sensoren des Rundtisches ein anderes Messprinzip haben. Zudem sind die Sensoren des Rundtisches an anderen Stellen angebracht und messen die Relativbewegung zwischen Stator und Gehäuse. Nicht zu erkennen sind jedoch eventuelle Strukturschwingungen des Gehäuses oder Rotors, Kapitel 5.1.7.

Ebenfalls mittels FFT nachweisbar sind Störungen von 50 Hz durch das Stromversorgungsnetz, u. a. eingekoppelt über die vorhandenen Messeinrichtungen, Abbildung 5.15. Aufgrund des geringen Einflusses auf die Messergebnisse wird dieses im Weiteren nicht weiter berücksichtigt.

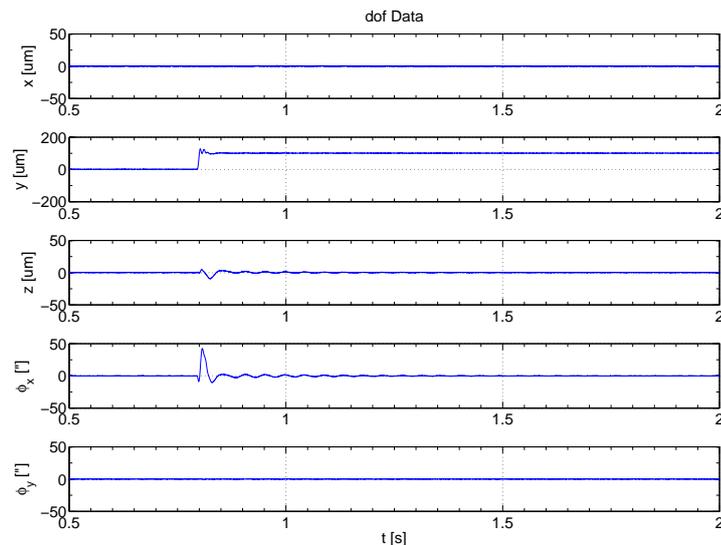
### 5.2.4 Führungsverhalten

Das Führungsverhalten des magnetisch gelagerten Rundtisches kann durch die Sprungantwort in den einzelnen Freiheitsgraden beschrieben werden, Abbildung A.9 bis A.13. Typisch für alle Freiheitsgrade ist die schnelle Ausregelung des Sprunges, als auch eine niederfrequente, asymptotisch abklingende Schwingung sowie ein Übersprechen auf die anderen Freiheitsgrade.

Das Übersprechen in die anderen Freiheitsgrade ist zum einen auf die modellhafte Vereinfachung des physischen Objekts wie z. B. Symmetrie zurückzuführen, zum anderen auf die weiche Koppelung des Rundtisches mit dem Fundament. Das mathematische Modell des Rundtisches beruht auf der kinematischen Betrachtungsweise wie in Kapitel 3 dargestellt. Zu den Annahmen gehört, dass alle Luftspalte gleich sind, d. h. dass sich der Rotor zentrisch im Stator befindet. Zudem wird das Starrkörpermodell vorausgesetzt. Praktisch ist eine Kalibrierung der Rotorlage mit den Sensoren im eingebauten Zustand extrem schwierig. Dies ist zum einen bedingt durch den geschlossenen Aufbau des Rundtisches, zum anderen durch die Begrenztheit der Messmittel. Praktisch ergeben sich daraus Unsicherheiten hinsichtlich des magnetischen Aktors, dessen Kraft luftspaltabhängig ist.

Abbildung 5.16 zeigt die Antwort bei einem Sollwertsprung der  $y$ -Achse. Hierin ist das Übersprechen und die Ausregelzeit von ca. 30 msec zu erkennen. In der  $x$  und  $\phi_y$ -Achse ist kein Übersprechen zu sehen, da beide Freiheitsgrade orthogonal zueinander sind. Da der Schwerpunkt des Rotors jedoch nicht exakt mit dem Bezugspunkt B übereinstimmt und der Kraftvektor der Magneten ebenfalls nicht im Schwerpunkt angreift, entsteht ein Kippmoment mit dem Freiheitsgrad  $f_x$ , welches die Regelung ausgleichen muss. Weiterhin kommt es aufgrund der Kraftvektorzerlegung des resultierenden Momentes auch zu einer Einkoppelung in die  $z$ -Achse, welche der Regler ebenfalls ausgleichen muss.

In der  $y$ -Achse sind die Ergebnisse mit einer Auslenkung von maximal 5  $\mu\text{m}$  etwas schlechter als in der  $x$ -Achse bez. der Sprungantwort, Abbildung A.11. Diese Verkoppelung der Achsen ist auf die Einschränkungen des Modells hinsichtlich seiner Randbedingungen zurückzuführen, vornehmlich der getroffenen Annahmen bez. der Linearität und Symmetrie.



**Abbildung 5.16:**  
Sollwertsprung um  
100  $\mu\text{m}$  der  $y$ -Achse

Äquivalente Überlegungen lassen sich auch für die anderen Freiheitsgrade anstellen. Praktisch bestätigen diese Messungen, dass die einzelnen Freiheitsgrade verhältnismäßig gut entkoppelt sind bzw. werden können.

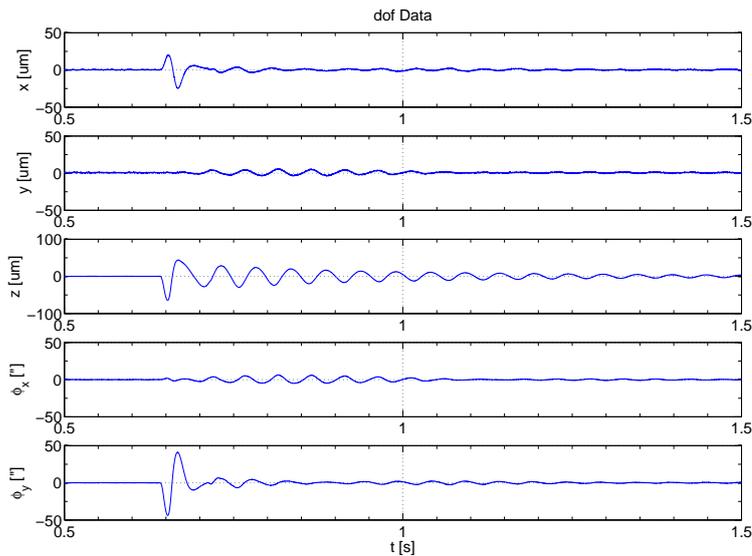
Das asymptotische Nachschwingen ist das Ergebnis der Erregung der Starrkörperschwingung und ist im Durchschnitt nach 500 ms abgeklungen. Hier kommt der bereits erwähnte unzureichende Versuchsaufbau nachteilig zum Ausdruck. Diese These wird durch den Umstand bekräftigt, dass die Starrkörperbewegung in den nicht erregten Freiheitsgraden ebenfalls zu sehen ist.

Reduziert man die Antwort auf den Sprung selbst, so wird dieser innerhalb von ca. 50 ms ausgeregelt. Durch die Wichtung der Koeffizienten der Zustandsrückführung kann das Antwortverhalten z. B. schneller eingestellt oder auch stärker gedämpft werden. Hinsichtlich der Starrkörperschwingung des Systems Rundtisch ändert dieses jedoch kaum etwas, da der Stabilitätsbereich der Regelung begrenzt ist. Eine FFT der Sprungantworten der Führungsgrößen zeigt ein durchweg niederfrequente Schwingen, insbesondere die Starrkörperschwingungen.

### 5.2.5 Störverhalten

Neben dem Führungsverhalten ist auch das Antwortverhalten auf äußere Störkräfte von Interesse. Hierbei wurde mit Hilfe einer geführten Fallmasse von 10 kg aus 1 m ein Impuls auf den Rotor eingebracht.

Wie zu erwarten, kommt es durch Anregung mit einer äußeren Kraft, z. B. in der Achse  $\phi_y$ , zu einer Auslenkung in dem entsprechend erregten Freiheitsgrad und zu einem Übersprechen auf die anderen Freiheitsgrade als auch zu einer niederfrequenten, asymptotisch abklingenden Schwingung, Abbildung 5.17. Die Störgröße wird in ca. 50 ms ausgeregelt,



**Abbildung 5.17:**  
Stör-Sprungantwort  
der  $\phi_y$ -Achse

man erkennt aber auch das Nachschwingen aufgrund der Starrkörperschwingung. Weiterhin ist die mechanische Koppelung des physischen Rundtisches innerhalb der Freiheitsgrade aufgrund der weichen Lagerung gegenüber dem Hallenfundament zu erkennen. Es kommt zu einem mechanisch bedingten Übersprechen innerhalb der Freiheitsgrade, wodurch es infolge von Asymmetrien zu Starrkörperschwingung in weiteren Achsen kommt. Aus praktischen Gründen wurden lediglich die Freiheitsgrade  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  und  $z$  untersucht, Abbildung A.19 bis A.21.

Interessant ist auch die stärkere Koppelung der einzelnen Freiheitsgrade als es die Ergebnisse aus der Sollwert-Sprungantwort aus Abschnitt 5.2.4 vermuten lassen, Abschnitt 5.2.4. Hier kommt zum Tragen, dass die Störkräfte innerhalb des Messaufbaus nicht orthogonal zu den Freiheitsgraden des Rundtisches eingebracht werden konnten und folglich die anderen Freiheitsgrade ebenfalls leicht angesprochen wurden. Weiterhin fließen die bereits erwähnten, nicht weiter modellierten Asymmetrien und Ungenauigkeiten mit in das Ergebnis ein. Eine weitere, nicht modellierte Asymmetrie ist der Zentriermagnet, welcher aufgrund seines Aufbaus auch Kraftkomponenten einbringt, die nicht mit seiner Vorzugsrichtung übereinstimmen.

Eine FFT-Analyse der Sensordaten zeigt die Starrkörperschwingung des Rundtisches mit seinen ca. 20 Hz, Abbildung A.22 bis A.24. Bemerkenswert am Spektrum ist, dass sich die Frequenzspitzen unterhalb von 100 Hz befinden und oberhalb in (rosa) Rauschen übergehen. Hieraus kann man schlussfolgern, dass die Aufspannplatte durch Rauschen in ihren Resonanzfrequenzen erregt wird, da (ideales) Rauschen alle Frequenzanteile enthält und das mechanische System einen natürlichen Tiefpass darstellt.

Die Quellen für das Rauschen können verschiedene Ursachen haben wie z. B. numerische Ungenauigkeiten, am wahrscheinlichsten sind:

- Im Zuge der Umsetzung der analogen Sensorsignale in digitale Signale entsteht Quantisierungsrauschen. Bei dem hier verwendeten 16-Bit ADU entspricht das

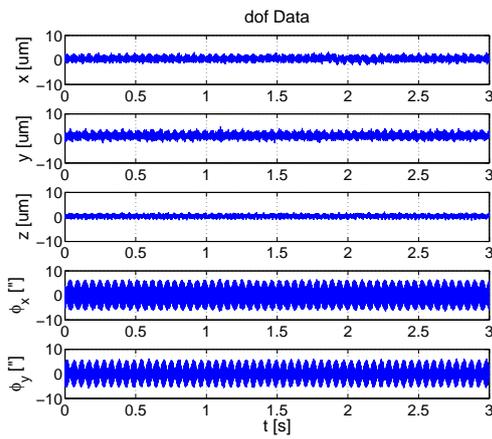
Quantisierungsrauschen ca. 40 nm und liegt somit unterhalb der Auflösung der verwendeten Wirbelstromsensoren, [vib03a]. Mehr als 16-Bit sind schaltungstechnisch schwer zu realisieren, so dass mit dieser Genauigkeit bzw. Auflösung die Möglichkeiten ausgereizt sind.

- Die Konvertierung der Stellsignale des diskreten Reglers in analoge mittels eines 12-Bit DAU. Eine 16-Bit Auflösung z. B. bedingt ein Quantisierungsrauschen äquivalent einer Stromänderung von ca. 1,5 mA - bereits bei einem 8-Bit DAU sind dies ca. 310 mA. Unter dem Aspekt des Soll-/Istwert Vergleiches der Lageregelung können die Quantisierungsstufen aktorseitig relativ grob sein, unter dem Aspekt des Rauschens jedoch bedeutet dies ein sprunghafter Stellfehler mit der Zykluszeit des Reglers. Aufgrund des Tiefpasscharakters ( $f_o \approx 1,5$  kHz) der Stromregelung wird die Bandbreite des Rauschens begrenzt, was u. a. die fehlenden Frequenzanteile oberhalb von 1,5 kHz erklärt. Weit mehr relevanter ist jedoch, dass diese Stromänderung eine vom Arbeitspunkt abhängige Kraftänderung der Aktoren liefert. Bei einem  $k_i = 950 \text{ N/A}$  eines axialen Magnetpaares bedeutet dieses Quantisierungsrauschen bereits eine Kraftänderung von ca. 290 N bei einem 8-Bit DAU und bei einem 16-Bit immerhin noch 2 N, welche jedoch 8-fach axial verstärkt wird. Im vorliegenden Rundtisch ist der  $k_i$ -Faktor der radialen Magnete um den Faktor 2,5 größer als der der axialen, wodurch die Auswirkungen des Quantisierungsrauschens noch stärker ausgeprägt sind.
- Elektromagnetische Störungen, die vorwiegend durch die Stromsteller in das System eingebracht werden. Entsprechend dem Quantisierungsrauschen der Stellgrößen sind die induzierten Spannungen gemäß:

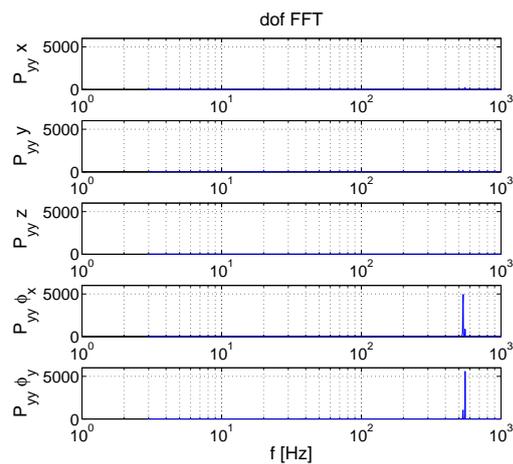
$$U_{ind} = L \frac{di}{dt} \quad (5.1)$$

u. U. recht hoch, bei einer Induktivität von  $L_{Mag} = 16$  mH eines Magnetaktors und einem 8-Bit DAU ca. 6 kV, bei einem 16-Bit ADU immerhin ca. 200 V. Hierbei ist  $dt$  die Zykluszeit des Reglers. Bei längerem Versorgungskabel kommen die parasitären Kapazitäten zwischen Ader und Schirm hinzu. Diese Störspannungen und -ströme fließen u. a. über den Schirm der Zuleitung ab und streuen in die Umgebung. Ein sternförmiges Erdungskonzept ist hier zwingende Voraussetzung zur Verminderung dieser Störungen. Dieses Erdungskonzept wird dadurch erschwert, dass im Allgemeinen die Gehäuse aller elektromagnetischen Aktoren ebenfalls geerdet werden. Indirekt heißt dieses, dass die Verbindung zwischen Stromsteller und Aktor möglichst kurz geführt werden muss. Praktisch lässt sich dieses nur schwer realisieren, da aufgrund der Anzahl und Abmessungen der Stromsteller diese in einen externen Schaltschrank eingebaut werden müssen, wie es im realisierten Rundtisch geschehen ist.

Gleichung (5.1) impliziert, dass höhere Abtastzeiten eine höhere Spannungsinduktion zur Folge haben. Somit müssen höhere Abtastraten mit einer höheren Bitbreite des Stellsignals einhergehen, um die Störungen gering zu halten.



**Abbildung 5.18:** Freiheitsgrade mit Schwingungen in der Aufspannplatte



**Abbildung 5.19:** FFT der Freiheitsgrade

### 5.2.6 Aufspannplatte

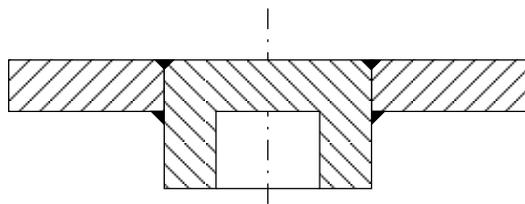
Als extrem problematisch hat sich die mechanische Steifigkeit der Konstruktionselemente herausgestellt - dies gilt insbesondere für die Aufspannplatte.

Die ersten drei Eigenfrequenzen wurden bei der Modalanalyse für die frei schwingende Aufspannplatte zu  $f_1 = 496,57$  Hz,  $f_2 = 789,1$  Hz und  $f_3 = 883,53$  Hz bestimmt. Durch die Verspannung mit dem Rotor ändern sich die Moden und eine weitere Modalanalyse ergab für die ersten drei Moden  $f_1 = 582,31$  Hz,  $f_2 = 625,46$  Hz und  $f_3 = 905,72$  Hz, Abbildung A.6 bis A.8.

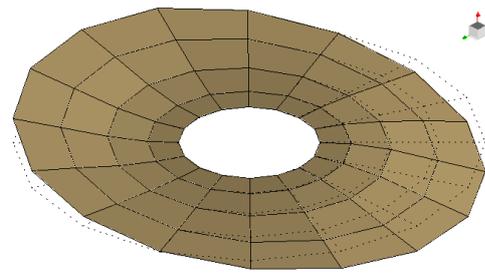
Unabhängig von der entsprechenden Anpassung des Schwerpunktes  $r_{BC}$  und des Trägheitsmomentes  $J$  im Regler kommt es bei Verspannung der Aufspannplatte mit dem magnetisch gelagerten Rotor zur Anregung der Eigenformen und diese beginnt zu schwingen. Das macht sich lautstark bemerkbar und ist in den Sensordaten bzw. dem daraus resultierenden Freiheitsgradvektor  $q_B$  sowie dessen FFT ebenfalls erkennbar, Abbildung 5.18 bzw. 5.19.

Wie zu erwarten war, zeigt die FFT der Sensordaten des Magnetlagers Ausprägungen in den Frequenzen, welche bereits durch die Modalanalyse der Aufspannplatte bestimmt wurde. Allerdings konnte im Spektrum lediglich der 1. Mode mit  $f_1 \approx 580$  Hz nachgewiesen werden. Alle weiteren bzw. höheren Moden wurden nicht angeregt. Interessanterweise liegen die Schwingungen der Aufspannplatte oberhalb der -3 dB Bandbreite des Reglers von 163 Hz, Abbildung 5.9. Dies lässt die Vermutung zu, dass die Aufspannplatte auf einer harmonischen Oberwelle schwingt. Da die Stromsteller mit einer PWM Frequenz von 8 kHz arbeiten und die Sollwertfilter einen Tiefpasscharakter mit einer Eckfrequenz von 1,5 kHz besitzen, kann diese Ursache ausgeschlossen werden.

Weiterhin ist auffällig, dass die Amplituden in den beiden rotativen Freiheitsgraden des Magnetlagers  $\phi_x$  und  $\phi_y$  wesentlich größer sind als in den translatorischen Freiheitsgraden  $x$ ,  $y$  - wobei die  $z$ -Achse am stabilsten ist. Dies ist in der Eigenform begründet, Abbildung 5.21.



**Abbildung 5.20:** Prinzip der Realisierung der Aufspannplatte



**Abbildung 5.21:** 1. Eigenform der verspannten Aufspannplatte (f=582,31 kHz)

Da die Eigenform in diesem Mode Kippschwingungen sind, werden die Freiheitsgrade  $\phi_x$  und  $\phi_y$  am stärksten,  $x$  und  $y$  weniger und  $z$  am wenigsten beeinflusst. Innerhalb der rotativen und translatorischen Freiheitsgrade ist diese Verteilung annähernd gleich, was auch die Symmetrie hinsichtlich der Mechanik, Modellparameter und Reglereinstellung widerspiegelt.

Bei genauer Untersuchung der Aufspannplatte fällt auf, dass diese entgegen der Konstruktionszeichnung nicht durchgängig aus einer Platte gefertigt wurde, sondern aus einer an einem Zylinder angeschweißten Scheibe besteht, Abbildung 5.20. Die mechanisch weichste Stelle ist somit die Schweißstelle zwischen Zylinder und Scheibe. Eine Verstärkung mittels eingeschweißter Knotenbleche zwischen Zylinder und Scheibe brachte hinsichtlich der mechanischen Steifigkeit nur begrenzt Erfolg, zumal die Bleche eingepasst werden müssen, was bei der Fertigung ebenfalls nicht berücksichtigt wurde, Abbildung A.4 und A.5.

### 5.2.7 Identifikation der Massenmatrix

Bei der Identifikation wurde zur Erzeugung des Signalvektors (3.45) ein PRBS-Signal der Länge  $2^5 - 1 = 31$  mit einem Haltefaktor von  $\lambda = 50$  und einer Amplitude von  $20 \mu\text{m}$  bzw.  $20 \mu\text{rad}$  gewählt. Die Messung wurde bei einer Abtastrate des Reglers von  $f_S = 5 \text{ kHz}$  und über 3 Perioden ermittelt, dabei war die Aufspannplatte nicht befestigt. Der Identifikationsvorgang ist innerhalb von 2 s abgeschlossen und berechnet aus den Messdaten die geschätzte Massenmatrix:

$$\check{M}_B = \begin{bmatrix} 847,37 & 0,22564 & -2,1495 & 0,52704 & 48,723 \\ 0,45964 & 847,12 & -1,9605 & -50,594 & 1,9572 \\ -1,4785 & -8,4768 & 1691,7 & -17,168 & -8,2469 \\ -0,05539 & -36,550 & -1,2781 & 76,705 & -1,3863 \\ 36,598 & 0,0025158 & 1,4280 & -1,1723 & 76,686 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

	Masse	Schwerpunktvektor			Trägheitstensor		
	$m$	$r_{BC}$			Trägheitsmomente		Deviationsmoment
	[kg]	$r_{BC_x}$	$r_{BC_y}$	$r_{BC_z}$	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{xy}$
		[mm]	[mm]	[mm]	[kg m <sup>2</sup> ]	[kg m <sup>2</sup> ]	[kg m <sup>2</sup> ]
Ident.	1.128,7	4,28	8,17	38,21	76,705	76,686	1,2793
CAD	1.258	0,0	0,0	47,31	85,01	85,01	0,0

**Tabelle 5.2:** Geschätzte Parameter der Massenmatrix ohne Aufspannplatte und nach Angaben des CAD Systems gemäß Tabelle A.1

in welcher Elemente besetzt sind, welche nominell nicht vorhanden sein sollten. Zur besseren Übersicht wurden die Elemente, welche die Parameter Masse, Schwerpunktvektor und Trägheitstensor enthalten, grau hinterlegt. Weiterhin ist die Matrix nicht wie erwartet symmetrisch. Die Kondition der Messvektoren lag bei  $\text{cond}(\tilde{Q}_B) = 21,9$  bzw.  $\text{cond}(\tilde{q}_B) = 25,3$ . Gegebenenfalls macht sich hier eine Vorkonditionierung positiv auf das Ergebnis bemerkbar, [Mei99].

Durch Kenntnis der Struktur der Massenmatrix  $M_B$  (B.102) können jedoch die Parameter aus der geschätzten Matrix  $\tilde{M}_B$  extrahiert werden, wie z. B. durch Mittelung mehrfach auftretender Elemente. Bei Kenntnis des Aufbaus des Trägheitstensors können aus  $m$  und  $r_{BC}$  die Werte hinsichtlich Trägheits- und Deviationsmomente aus der Identifikation weiter verbessert werden, was hier aber nicht durchgeführt wurde. Aus der geschätzten Massenmatrix lassen sich so die Parameter aus Tabelle 5.2 extrahieren.

Grund für die Abweichungen der identifizierten Parameter sind u. a. in der ungenauen Magnetkraft-Charakteristik zu suchen, da der Einbauzustand am Rundtisch nicht die Bedingungen der Magnetkraftmessung wiedergibt. Dies ist vorrangig durch die gemessenen Luftspalte bedingt, da aufgrund von Fertigungstoleranzen am Rundtisch und der Kalibrierung der Sensoren im Rundtisch die gemessenen Luftspalte nicht unbedingt den realen Luftspalten entsprechen. Auch wird das Ergebnis durch die niederfrequente Starrkörperschwingung des Rundtisches verfälscht. Ein weiterer Grund liegt in den Nichtlinearitäten, welche aufgrund der Amplituden des Testsignals außerhalb des Arbeitspunktes auftreten, daher sind möglichst kleine Amplituden anzustreben. In Simulationen mit linearisierten Aktoren liegt der Fehler der Identifikation weit unter 1%. In diesen Gründen liegt auch die Ursache für die schlechte Konditionierung der Matrizen  $\tilde{Q}_B$  bzw.  $\tilde{q}_B$ .

In der geschätzten Massenmatrix (5.2) fällt der extreme Unterschied der an sich redundanten Informationen der Rotormasse auf, die jeweils für die  $x$ ,  $y$  und der  $z$ -Achse bestimmt wurden. Während in der  $z$ -Achse 8 axiale Aktoren Informationen liefern, ist es infolge der Differenzschaltung der radialen Zentriermagnete nur jeweils ein Aktor für die  $x$  bzw.  $y$ -Achse. Weiterhin können sich die Fehler bei mehr Informationen addieren, wobei die  $z$ -Achse besonders anfällig für die Starrkörperschwingung ist. Daneben setzt die aus dem CAD ermittelte Masse voraus, dass die Aktor-Luftspalte gleich sind. Infolge einer solchen

Asymmetrie in den einzelnen Luftspalten kann eine Abweichung in den erwarteten Parametern auftreten.

Bei Verwendung der identifizierten Massenmatrix in der Mehrgrößenregelung werden Parameterfehler der linearisierten Magnetcharakteristik sowie kleinere Modellierungsfehler ausgeglichen. Die Begründung liegt in der Verwendung des inversen Streckenmodells. Bei dem Identifikationsvorgang skalieren die Fehler der Magnetparameter die identifizierte Massenmatrix und werden so in Verbindung mit der realen Regelstrecke kompensiert.

Ein wichtiges Kriterium für die Identifikation ist die Berücksichtigung der Reglerdynamik. Der Regler sollte keine hohe Verstärkung besitzen, da ansonsten das Reglerverhalten bzw. dessen Einstellungen mit in die geschätzte Matrix eingehen. Dies impliziert die Unmöglichkeit der Identifikation im Betrieb bzw. während der Bearbeitung.

Auch ist der Identifizierungsvorgang sehr speicher- und rechenzeitintensiv. Da man bestrebt ist, eine hohe Abtastzeit des Regelalgorithmus zu realisieren, fallen in der eigentlichen Identifikationszeit viele Daten an. Letztlich muss zur Berechnung der Massenmatrix  $\check{M}_B$  ein  $(n_N \times n_N)$  großes Matrizenprodukt  $(\check{q}_B \check{Q}_B^T)$  invertiert werden. Ein Ausweg stellt ein Downsampling dar, [Lat95, Lun97, Unb93].

Eine weitere Verbesserung des Identifizierungsvorgangs besteht in der zusätzlichen Erregung des verbleibenden 6. Freiheitsgrades der Rotation um die Hauptachse. Somit stehen mehr Informationen zur Verfügung, welche die Genauigkeit der identifizierten Massenmatrix verbessern können. Prinzipiell könnte man auch die Kreiselmatrix  $G_B$  mit dem gleichen Prinzip bestimmen und hätte somit noch weitere, redundante Informationen zur Verfügung. Voraussetzung ist dann allerdings eine Unterstützung durch den Servo-Umrichter des Direktantriebes.

Eine generelle Voraussetzung zur Identifizierung ist jedoch ein stabiler Regler, d.h. bei Masse- und Schwerpunktsänderungen darf der Regler den Stabilitätsbereich nicht verlassen. Im realisierten Rundtisch beträgt dieser Bereich > 40%, Abschnitt 5.2.1.

Ein Weg, die Stabilität des Reglers über den gesamten Arbeitsbereich zu gewährleisten, stellt der robuste Regler bzw.  $H_\infty$ -Entwurf dar. Auf diesen muss zur Identifikation gegebenenfalls umgeschaltet werden.

### 5.3 Auswertung

Das Magnetlager ist genau genommen ein elektrodynamischer Wandler mit einer hohen Bandbreite. Dies resultiert bereits aus den dynamischen Anforderungen. Ist das Gehäuse nicht steif genug konstruiert, kann es sich verformen, da die aufgenommenen Kräfte über das Gehäuse in das Maschinenfundament geleitet werden. Es kann zudem die mechanische Struktur durch das breitbandige Sensor- und Quantisierungsrauschen des Reglers zum Schwingen angeregt werden. Schwingungen und mechanische Verformungen konnten am Rundtisch selbst nicht nachgewiesen werden. Insofern ist die Modellierung als MKS-Modell unter der Annahme von starren Körpern zulässig. Die elastische Lagerung

des Rundtisches am Boden stellt aufgrund der Testbedingungen eine bewusste Einschränkung dieser Annahme dar. In Hinsicht auf die Aufspannplatte ist die Annahme von starren Körpern nicht mehr zulässig. Gerade in Hinblick auf eine hohe Steifigkeit, Robustheit und Genauigkeit ist eine Erweiterung des Modells um diese Einflussfaktoren unerlässlich. In Verbindung mit dem Werkzeugmaschinen-system muss die kinematische Kette: Maschinenfundament - Magnetlager - Werkstück - Werkzeug - Portal/Ständer - Maschinenfundament, geschlossen werden. Dies geschieht durch die Bestimmung der Dämpfungsmatrix  $D$  und der Fesselungs- bzw. Steifigkeitsmatrix  $F$  sowie deren Einbezug in die Bewegungsgleichung (B.6). Damit steigt allerdings die Komplexität des verwendeten Modells.

Aufgrund der Zielvorgabe eines einfachen Modells, wurden Wirbelstrom-Bremseffekte und Hystereseverluste im magnetischen Kreis vernachlässigt. Sie bestimmen den Teil der nichtkonservativen Lagerkräfte, welche typisch für Magnetlager sind, da keinerlei mechanische Reibung auftritt. Diese Kräfte werden durch die Matrix der nichtkonservativen Lagerkräfte  $N$  berücksichtigt und erweitern ebenfalls die Bewegungsgleichung (B.6) und somit die Komplexität des verwendeten Modells.

Folglich lassen sich durch die Erweiterung der bisherigen MKS-Bewegungsgleichung zu ihrer vollständigen Form:

$$M_B \ddot{q}_B + (D_B + G_B) \dot{q}_B + (F_B + N_B) q_B \stackrel{(B.6)}{=} Q \quad (5.3)$$

viele Störgrößen modellieren und z. B. durch Störgrößenkompensation ausgleichen.

Die Magnetaktoren bzw. Hybridmagnete sind als trägheitslose und lineare Stellglieder modelliert und haben während des Betriebes keine Instabilitäten im Regelverhalten bei Laständerungen unter 40% hervorgerufen. Dennoch kann es bei großen Änderungen erforderlich sein, den nichtlinearen Zusammenhang zu berücksichtigen. Für eine optimale Ausnutzung der Regelreserven wird allerdings eine Berücksichtigung erforderlich, da aufgrund der Testumgebung nicht die Grenzen des realisierten Systems getestet werden konnten.

Die Annahme der Kräfte der Aktoren als Punktkräfte, welche im Flächenschwerpunkt der kraftaufbringenden Magnetfläche ihren Ursprung haben, ist bei diesem Konzept tragfähig. In [Wah02] mussten diese als flächig wirkende magnetische Aktoren modelliert werden. Bei diesem Magnetlager sind die Relationen zwischen mechanischen Abmessungen und Magnetflächen groß genug, um diese Annahme beibehalten zu können.

Der Direktantrieb wurde in der Modellierung quasistatisch betrachtet. Die Normalkräfte wirken infolge des exzentrischen Verschiebens des Rotors gegenüber des Stators des Torque-Motors und wurden daher als Kraft-Weg-Faktor modelliert. Genau genommen ändert jede Stromänderung in der Statorwicklung zur Erzeugung des Momentes zusätzlich die Normalkraft. Dieses Verhalten konnte weder bestätigt noch widerlegt werden, da eine Separation der Störeinflüsse durch den Motor innerhalb der Testumgebung nicht möglich war.

Die Einkoppelungen aufgrund schlechter EMV wirken sich hinsichtlich der Stabilität der Regelung bzw. des Systemverhaltens negativ aus. Hier hilft nur ein EMV-sicheres Konzept, z. B. durch Potentialtrennung und eine konsequent durchgeführte sternförmige Er-

## *5 Realisierung und experimentelle Verifikation*

dung. Mit dessen Hilfe konnte während der Zeit der Inbetriebnahme des Rundtisches der Störungspegel deutlich gesenkt werden.

# 6 Zusammenfassung und Ausblick

Der hier vorgestellte Rundtisch stellt ein typisches mechatronisches Produkt dar mit Komponenten aus verschiedenen ingenieurtechnischen Bereichen wie Elektrotechnik, Mechanik und Informatik. Entgegen dem konventionellen Vorgehen besteht bei mechatronischen Systemen die Besonderheit in der Verknüpfung von Systemen und Komponenten gänzlich ingenieurtechnisch unterschiedlicher Bereiche. Von großer Bedeutung für die Funktionalität des Gesamtsystems ist die Wechselwirkung von mechanischen und elektrischen sowie elektronischen Komponenten im Zusammenspiel mit der Informatik. Aus diesem Grund besteht untereinander eine enge Bindung in der Konzeptions- und Realisierungsphase. Hierbei spielen sowohl *funktionsorientierte* als auch *gestaltorientierte* Überlegungen eine wichtige Rolle. Während funktionsorientierte Modelle kinematische, kinetische und mechatronische Funktionen zur Beschreibung enthalten, bilden gestaltorientierte Modelle die fertigungstechnische Grundlage für den konstruktiven Entwurf und den Nachweis der strukturellen Eigenschaften sowie statisches und dynamisches Verhalten.

Der Entwurfsvorgang selbst ist ein iterativer Prozess unter Verwendung geeigneter Tools für Modellierung und Simulation wie Solidworks, Nastran und Cosar, FEMM, Maple und Matlab/Simulink und dessen Überprüfung in der Praxis. Da bei allen Entwicklungen sowohl Funktion, Gestalt und Preis von Bedeutung sind, kann nur bei ausgewogener Betrachtung des Systems Rundtisch ein optimales Ergebnis erreicht werden.

## 6.1 Zusammenfassung

Das hier vorgestellte Regelkonzept des magnetisch gelagerten Rundtisches basiert auf der Entkoppelung der einzelnen Freiheitsgrade und setzt ein Starrkörpermodell voraus. Durch das hergeleitete Modell wird die Komplexität verringert und die einzelnen Freiheitsgrade können getrennt voneinander eingestellt und geregelt werden. Dabei zerfällt das Problem in einen konstruktiv abhängigen Teil und einen Teil, der nur von der jeweiligen Zuladung bzw. dem Werkstück abhängig ist. Dabei ist dieses Modell universell genug, um Translation und insbesondere die hier vorliegende Rotation des Rotors kinetisch beschreiben zu können und einzubeziehen. Darüber hinaus erlaubt dieses Konzept den variablen Massenanteil mit seinem Trägheitstensor zu identifizieren und das Modell entsprechend anzupassen, ohne dabei anschließend die Reglerparameter verändern zu müssen.

Aufgrund der Notwendigkeit der Linearisierung der magnetischen Aktoren muss ein Arbeitspunkt angegeben werden. Da herkömmliche Magnetlager vorwiegend für statische Anwendungen ausgelegt sind, ist der Arbeitspunkt einfach zu bestimmen. Aufgrund der

Universalität des Rundtisches bez. seiner Anwendungsgebiete und Zuladungen ist dessen Arbeitspunkt in der Praxis nicht statisch. Dieses ist durch die jeweiligen resultierenden Kräfte begründet. Durch einen statistischen Ansatz bzw. ein darauf aufbauendes Anforderungsmodell, konnte der für die Aktorauslegung notwendige Arbeitspunkt für das Magnetlager bestimmt werden. Darüber hinaus wurden weitere Modelle aufgezeigt, die auch bei den im Werkzeugmaschinenbereich auftretenden dynamischen Kräften sinnvolle Hinweise auf die dynamischen Anforderungen der Aktoren liefern.

Aus energetischen und dynamischen Gründen wurden Hybridmagnete anstelle der sonst üblichen Elektromagnete mit Vormagnetisierung eingesetzt. Damit besteht die Möglichkeit, kompakte Hochleistungsmagnete mit geringer Verlustleistung, großer Dynamik und vergleichsweise besserer Linearität bez. Strom-/Luftspaltabhängigkeit in das Konzept mit einzubeziehen. Insbesondere bei großen Magnetlagern, wie dem mit über 1 m Durchmesser vorliegenden Rundtisch, sind die Fertigungstoleranzen kritisch. Hier spielt der Hybridmagnet aufgrund seiner gestauchten Kraft-Strom-Weg-Kennlinie seine Vorteile gegenüber Elektromagneten aus. Zur Berechnung der Hybridmagneten wurde ein analytisches Modell entwickelt und erfolgreich mittels FEM und Messungen verifiziert.

Wegen der Größe des Rundtisches und der hohen Anzahl von Aktoren mit kleinen Magnetflächen können die Magnetkräfte im vorliegenden regelungstechnischen Modell als punktförmig angenommen werden. Dieses vereinfacht die Modellbildung ungemein, da keine weiteren flächenabhängigen Korrekturfaktoren eingeführt werden müssen.

Die Anwendbarkeit der angesprochenen Modelle konnten in der Praxis nachgewiesen werden und haben sich bewährt. Allerdings haben sich dabei auch kritische Situationen ergeben, deren Ursachen weniger in dem Konzept als vielmehr in der Einfachheit des verwendeten Modells zu finden sind. Eine Erweiterung des Modells um diese Einflussfaktoren ist für künftige Entwicklungen unabdingbar.

So wurden entsprechend den Anforderungen an den Rundtisch bzw. aus wirtschaftlichen Gründen für die Stromsteller Seriengeräte eingesetzt. Deren Einsatz ist jedoch u. U. kritisch, da die Rahmenbedingungen für den Betrieb andere sind. Die eingesetzten Stromsteller wurden für Gleichstrommotore konzipiert. So musste der Shunt zur Strommessung durch ein Sensormodul von LEM ausgetauscht werden, da es um den Nullpunkt zu Stromsprüngen kam. Gleichzeitig hat sich damit auch das Temperaturverhalten verbessert.

Ebenfalls aus wirtschaftlichen Gründen wurden für die axialen und radialen Aktoren der gleiche Magnetentwurf zu Grunde gelegt, welches sich bewährt hat. Aus konstruktiven Erfordernissen wurden die radialen Magnete in einen Montagering eingebracht, dessen resultierende Kräfte um ein vielfaches größer waren als die der radialen Magneten. Als Folge konnten die Messungen der Kraft-Strom-Weg-Beziehung nicht vollständig durchgeführt werden, da der eingesetzte Magnetmessstand für derartige Kräfte nicht ausgelegt war und sich entsprechend verzog. Aufgrund des gleichartigen Magnetkreises konnten die fehlenden Daten der radialen Aktoren jedoch durch die der axialen interpoliert werden. Die Ringform bringt daneben aber auch unnötige Probleme in der Modellierung mit sich, da eine winkelabhängige Tangentialkraft bei einer exzentrischen Lage von Primär- und Sekundärteil zueinander neben der erwünschten Normalkraft entsteht. Das Konzept eines

Zentriermagneten in Ringform hat sich folglich nicht bewährt und für künftige Entwicklungen werden einzelne, radiale Aktoren empfohlen.

Ein weiterer wirtschaftlicher Grund war die Entscheidung, die Sekundärteile der axialen Magnete als Wickel auszuführen. Ein solcher Wickel aus einem Elektroblechstreifen kann einfach gefertigt und verarbeitet werden. Jedoch ist mit dieser Konfiguration kein Homopolarlager technisch machbar. Dieses spiegelt sich in einem zwar reibungslos rotierenden Rotor, jedoch in einer schwer gängiger Rotation von Hand auf Grund von Hystereseverlusten wider. Somit wurde technologisch gesehen eine Lösung bez. der Anforderungen an die Kosten gefunden. In Hinsicht auf die technischen Parameter wurde jedoch das Optimum verfehlt. Es handelt sich letztlich um den Konflikt zwischen Herstellungskosten und erreichbaren qualitativen Ergebnissen. Unabhängig von einer möglichen Modellierung der Bremskräfte in der Bewegungsgleichung und somit der Berücksichtigung in der Regelung durch Störgrößenkompensation wird letztlich die Antriebsleistung zur Bearbeitung verringert. Deshalb ist künftig einem Homopolarlager Vorzug gegenüber einer Ausführung als Unipolarlager zu geben, sofern das zu realisierende Magnetlager ähnliche Abmessungen wie der Rundtisch besitzt.

In dem vorgestellten Konzept wurde eine unterlagerte, externe Stromregelung eingesetzt. Damit können die Zeitkonstanten der Aktoren in Grenzen vernachlässigt werden. Indirekt hat dies aber zur Folge, dass die Stromregler mit Spannungsüberhöhung arbeiten müssen und jede kleine Störung sofort auf die Regelstrecke übertragen wird. Als Störquellen kommen neben elektrischen Störungen aufgrund unzureichender EMV auch Quantisierungsrauschen hinzu. Insbesondere die DAU für die Stromsollwerte kommen in Frage, welche bei der hohen Anzahl von Aktoren dieses zudem multiplizieren. Sind die Störungen bzw. das Rauschen ähnlich weißem Rauschen, so sind alle Frequenzanteile enthalten, die die mechanische Struktur in ihren Moden anregen. Dieses ist recht eindrucksvoll bei der Aufspannplatte geschehen, welche zudem noch fertigungstechnische Mängel aufwies. Das Problem jedoch ist genereller Natur.

Ein möglicher Ausweg bez. der Störungen ist eine Spannungsregelung, bei der aufgrund des Konzeptes indirekt der verkettete Fluss geregelt wird, welcher keine sprunghaften Änderungen zulässt. Man kann alternativ den Regler zwar so auslegen, dass eine bestimmte bzw. ggf. auch mehrere Frequenzen unterdrückt werden können, allerdings ist diese Lösung für einen Rundtisch im Werkzeugmaschinenbau nicht praktikabel. Der Grund liegt in der Integration in den Produktionsprozessen, in denen verschiedene Werkstücke aufgespannt und folglich verschieden befestigt werden. Hierdurch sind die Schwingungsmoden zeitvariabel. Auf Grund der statischen Einstellungen der Zustandsregelung fehlt die Möglichkeit der Einstellung auf die resultierenden Moden. Einen Ausweg würde eine Online-Auslegung bieten. Allerdings wäre eine Adaption der Zustandsregelung kontraproduktiv, da damit das hier vorgestellte Prinzip ad absurdum geführt werden würde. Eine weitere Möglichkeit wäre eine aktive Schwingungsdämpfung z. B. mit Piezo-Aktoren. Dies würde jedoch ein weiteres adaptives, mindestens ebenso komplexes Modell der Strukturmechanik bedingen, welches ein eigenes Sensorsystem besitzt. Statische Annahmen über die Moden sind wegen des Werkstückwechsels nicht möglich. Eine andere Möglichkeit wäre die Verwendung von Dehnmessstreifen, welche an kritischen Stellen des Rundtisches angebracht, Informationen über die statische Durchbiegung sowie dynamische Amplituden

liefern könnten. Eine statische Kompensation der Strukturmechanik lässt sich mit Hilfe des Magnetlagers bzw. der Aktoren verhältnismäßig einfach realisieren, eine dynamische ist jedoch aufgrund der Leistungsbandbreite begrenzt. Immerhin lassen sich so verhältnismäßig einfach Informationen aus dem Bearbeitungsprozess und deren Einfluss auf die Strukturmechanik gewinnen und verarbeiten.

Grundlegend muss jedoch die Konstruktion garantieren, dass die Moden der Baugruppen im oberen Frequenzbereich liegen. Störungen durch EMV oder Quantisierungs- o.ä. Rauschen lassen sich nicht vollständig vermeiden, nur in Grenzen und bei entsprechendem Aufwand minimieren. Einen möglichen Weg stellen neue Werkstoffe dar, wie z. B. Faserverbund oder andere Kompositwerkstoffe.

Die Echtzeiterweiterung für Linux gibt einem die Möglichkeiten in die Hand, die volle Kontrolle über die Implementation zu haben. Demgegenüber steht jedoch der enorme softwaretechnische und somit auch zeitliche Aufwand bei der Programmierung. Zur schnellen Überprüfung von Hypothesen und neuen Ansätzen ist dieses System folglich nicht geeignet und es sollten künftig etablierte Systeme wie DSPACE o.ä. zum Einsatz kommen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die hier vorgestellten sowie nachgewiesenen Konzepte und Modelle universell und an sich tragfähig sind, jedoch zwangsläufig an die zugehörigen Annahmen gebunden sind. Neue Methoden zur Auslegung des Reglers selbst können diese Annahmen etwas aufweichen, lösen aber die Probleme an sich jedoch nicht. Einen größeren Erfolg dürften Wege versprechen, die die Annahmen einzuhalten helfen. Hierzu wären die nachfolgend aufgeführten, weiterführenden Arbeiten hilfreich.

## 6.2 Weiterführende Arbeiten

Neben den bereits angesprochenen Verbesserungen sind folgende, weiterführende Arbeiten sinnvoll:

- Zur genaueren Bestimmung dynamischer Kräfte im Zerspanungsprozess bzw. Anpassung an eine konkrete Aufgabe ist es notwendig, eine Normierung der dynamischen Störkräfte durch die Bearbeitung durchzuführen. Der Ansatz aus Abbildung 3.8 bzw. Abschnitt 3.8.1 kann nur einen ersten Anhaltspunkt geben.
- Es ist sinnvoll, eine Koppelung der Regelung des Magnetlagers und des Antriebs zu realisieren. Bei der Beschreibung des Magnetlagers als MKS werden auch Informationen über den Freiheitsgrad  $\phi_z$  berechnet, welcher nicht über das Magnetlager beeinflussbar ist. Diese Informationen über Kräfte und Momente können im Antriebsregler genutzt werden. Ebenso ist der umgekehrte Weg möglich, um z. B. eine Vorregelung bei Drehzahl- oder Momentenänderung durchführen zu können.
- Durch Kenntnis des Aufbaus des Trägheitstensors können aus der Identifikation der Masse  $m$  und des Schwerpunktvektors  $r_{BC}$  die Parameter der Massenmatrix hinsichtlich Trägheits- und Deviationsmomente verbessert werden. Somit sind auch Plausibilitätskontrollen möglich, insbesondere wenn der Hauptantrieb in die Identifikation mit einbezogen wird.

- Ein Subsampling während der Identifikation kann die Menge an zu verarbeitenden Daten reduzieren, ohne die Reglerfrequenz unnötig verringern zu müssen.
- Die ortsabhängige Kalibrierung der axialen und radialen Sensoren als Funktion der Rotation der Hauptachse  $f(\phi_z)$  wird die Gesamtgenauigkeit des Systems erhöhen, da der Einfachheit halber angenommen wurde, dass die Messfläche homogen ist.
- Die Aufnahme des Temperaturgradienten bzw. der Temperaturverteilung der mechanischen Struktur des Rundtisches kann helfen, thermische Verzüge zu bestimmen und auszugleichen.
- In Hinblick auf die weitere Verfeinerung des Modells müssen auch die Nichtlinearitäten stärker berücksichtigt werden. Dies schließt insbesondere die Nichtlinearität des magnetischen Kreises wegen  $B(H) = \mu(H)H$  aber auch die Hysterese mit ein. Eine Möglichkeit stellt die Verwendung eines Kompensators zur inversen Nachbildung der nichtlinearen Magnetcharakteristik dar, [HM98, HCSW00].
- Eine Erweiterung einer möglichen Spannungsregelung stellt die Flussregelung dar. Hierbei wird direkt der magnetische Fluss im Luftspalt des Magneten gemessen und geregelt. Dies hat den Vorteil, dass die Kraft innerhalb seiner Grenzen unabhängig vom Luftspalt ist. Dieses vereinfacht das Modell der Lageregelung wesentlich, verlagert aber einen Teil der Komplexität in den Magnetflussregler, welcher idealerweise wieder autonom realisiert wird.
- Die Verwendung herkömmlicher Technik für den Stromsteller stößt aufgrund der benötigten Anzahl von Stromstellern schnell an ihre Grenzen. Es ist ein aufwendiger Schaltschrank notwendig und es müssen lange, geschirmte Kabel zu den Aktoren geführt werden. Eine Integration der Stellertechnik in den Magneten und die gleichzeitige Kühlung der Magnetspule und Elektronik würde den technologischen Aufbau wesentlich vereinfachen.
- Die Untersuchung des Regelverhaltens speziell im Frequenzbereich ist zur gezielten Unterdrückung ein oder mehrerer Frequenzen notwendig. Damit ist ein Ansatz zur frequenzabhängigen Kompensation von Störgrößen möglich.
- Der Einbezug der stromabhängigen Normalkraft des Torquemotors ermöglicht die Erweiterung des Modells. Aufgrund der begrenzten "Offenheit" heutiger Servo-Umrichter können dessen interne Parameter zur Erweiterung des Modells nur begrenzt herangezogen werden. Sofern jedoch z. B. die Phasenströme des Antriebs abgegriffen werden können, kann das Modell um die stromabhängige Normalkraft erweitert und zur Störgrößenaufschaltung benutzt werden.



# A Rundtisch

## A.1 Parameter

	Masse $m$ [kg]	Schwerpunktvektor			Trägheitstensor					
		$r_{BC}$			Trägheitsmomente			Deviationsmomente		
		$r_{BC_x}$	$r_{BC_y}$	$r_{BC_z}$	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{zz}$	$J_{xy}$	$J_{xz}$	$J_{yz}$
		[mm]	[mm]	[mm]	[kg m <sup>2</sup> ]					
a	1.864	0,0	0,0	157,17	221,48	221,48	223,27	0	0	0
b	1.258	0,0	0,0	47,31	85,01	85,01	130,95	0	0	0

**Tabelle A.1:** Parameter der Massenmatrix nach Angaben des CAD Systems: (a) mit Aufspannplatte, (b) ohne Aufspannplatte

Masse $m$ [kg]	Trägheitstensor					
	Trägheitsmomente			Deviationsmomente		
	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{zz}$	$J_{xy}$	$J_{xz}$	$J_{yz}$
	[kg m <sup>2</sup> ]					
166	< 2	< 2	10	0	0	0

**Tabelle A.2:** Parameter Sekundärteil Torquemotor

Torque-Motor	Kräfte zwischen Stator und Rotor	
	Axial $c_{sA}$	Radial $c_{sR}$
TMA 0990-100	1,76 kN/mm	17,769 kN/mm

**Tabelle A.3:** Auszug über Axial- und Radialkraft des Torque-Motors, [ETE01]

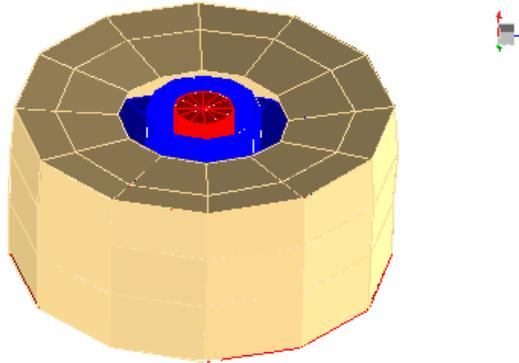
$h_{Zm}$	$h_{TqM}$	$r_{Tm}$	$r_S$
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
-93	100,5	322	422

**Tabelle A.4:** Geometrische Parameter des Rundtisches

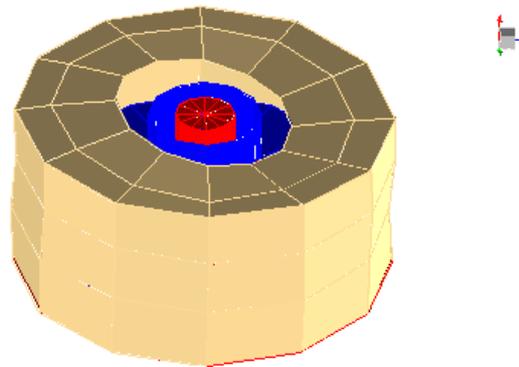
Pole	
Regler	Beobachter
300	1800

**Tabelle A.5:** Parameter des Reglers

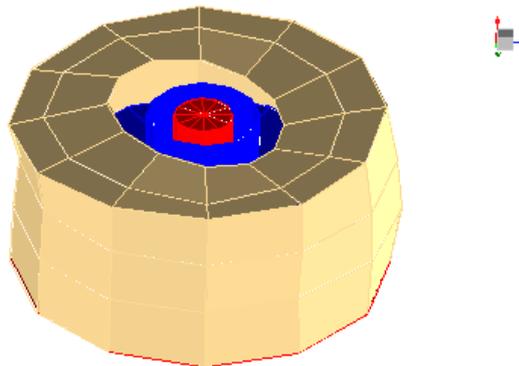
## A.2 Gehäuse



**Abbildung A.1:** Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 1 bei 736,92 Hz



**Abbildung A.2:** Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 2 bei 957,95 Hz



**Abbildung A.3:** Ergebnis Modalanalyse Gehäuse, Eigenform im Mode 3 bei 1138,99 Hz

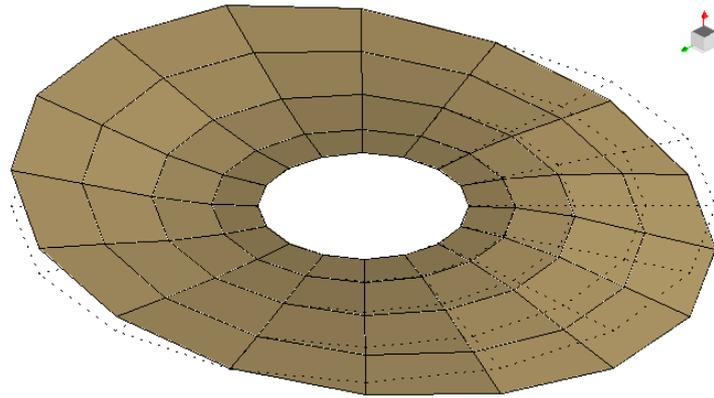
### A.3 Aufspannplatte



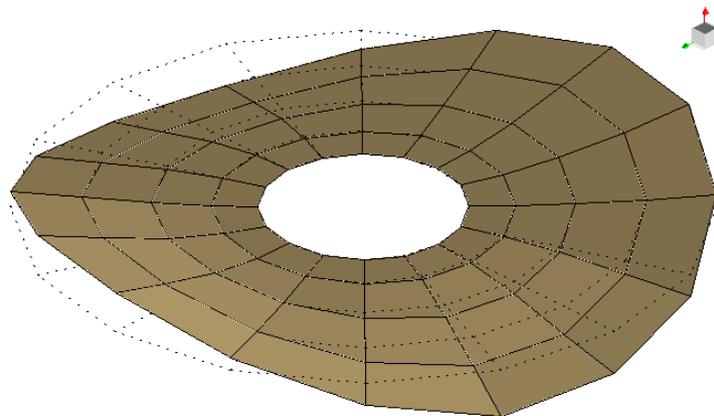
**Abbildung A.4:** Aufspannplatte des Rundtisches



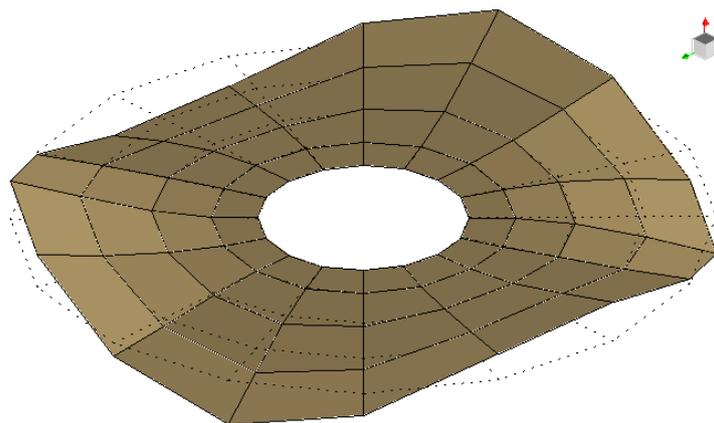
**Abbildung A.5:** Detail der Knotenbleche an der Aufspannplatte



**Abbildung A.6:** Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 1 bei 582,31 Hz



**Abbildung A.7:** Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 2 bei 625,46 Hz



**Abbildung A.8:** Ergebnis Modalanalyse verspannte Aufspannplatte, Eigenform im Mode 3 bei 905,72 Hz

## A.4 Führungsverhalten

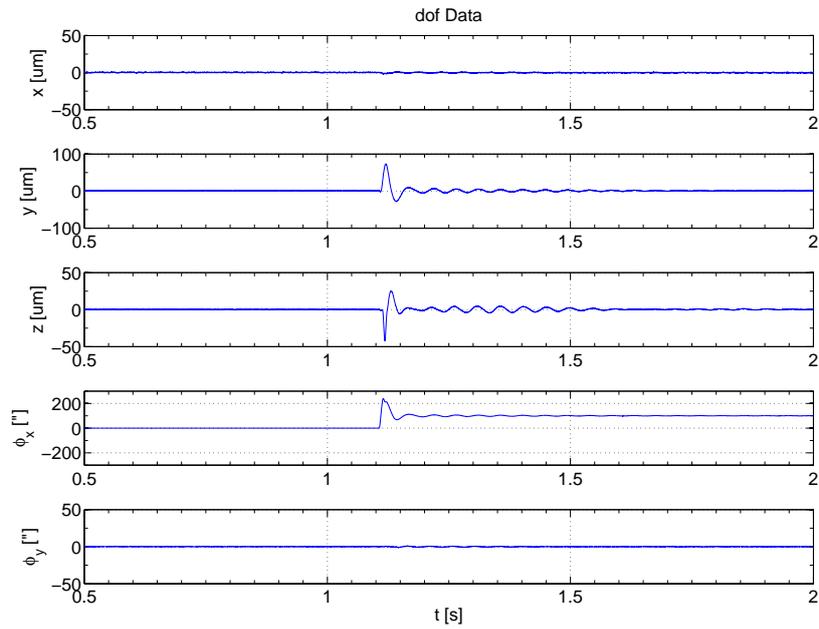


Abbildung A.9: Sollwertsprung um 100" um die  $\phi_x$ -Achse

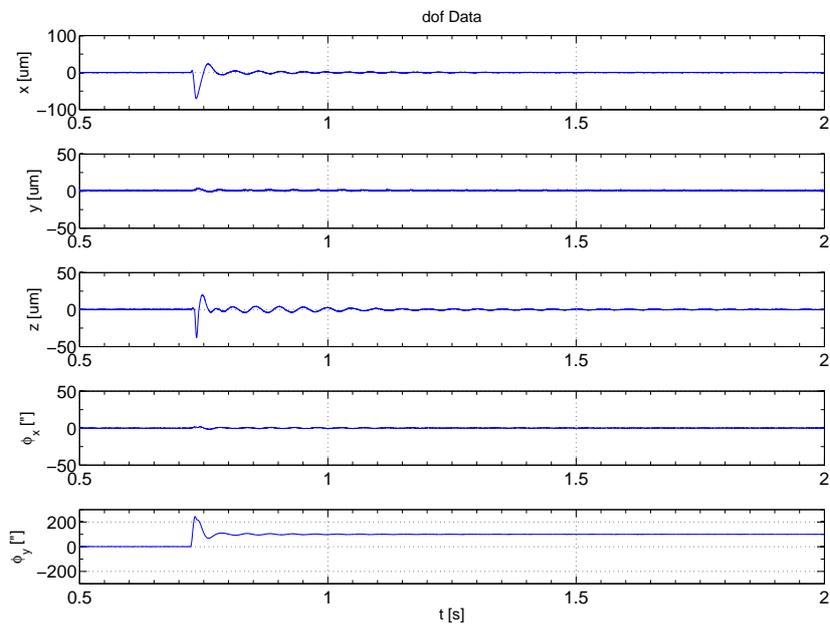
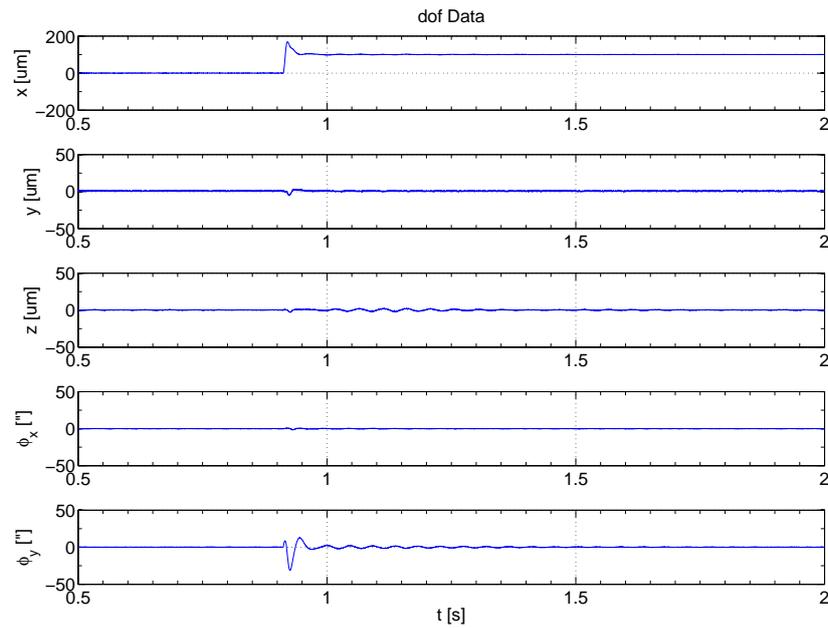
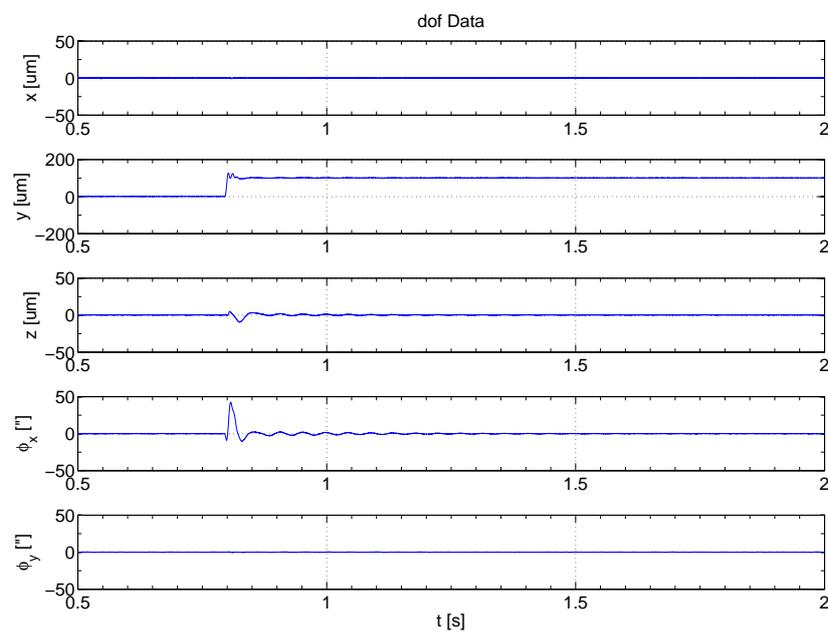


Abbildung A.10: Sollwertsprung um 100" um die  $\phi_y$ -Achse



**Abbildung A.11:** Sollwertsprung um 100 µm der  $x$ -Achse



**Abbildung A.12:** Sollwertsprung um 100 µm der  $y$ -Achse

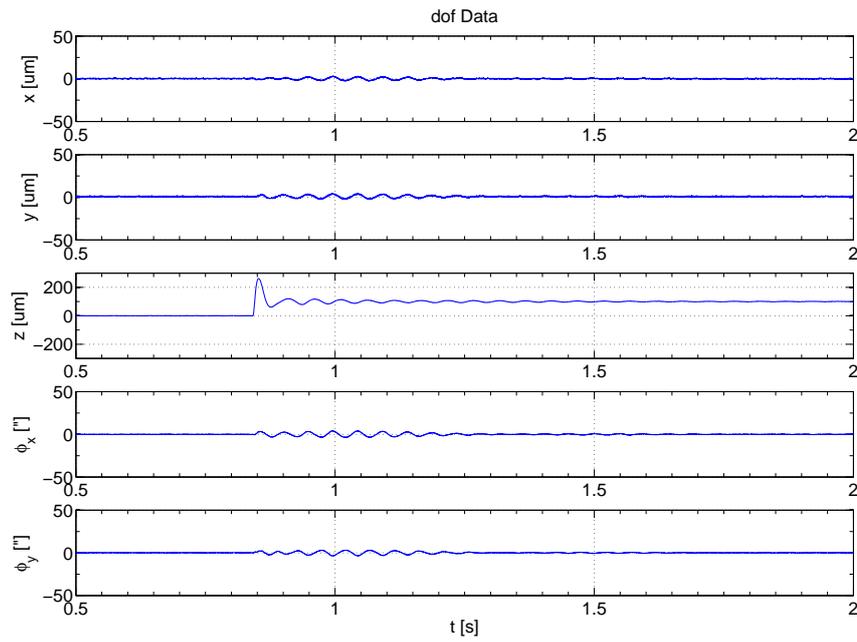


Abbildung A.13: Sollwertsprung um 100  $\mu\text{m}$  der  $z$ -Achse

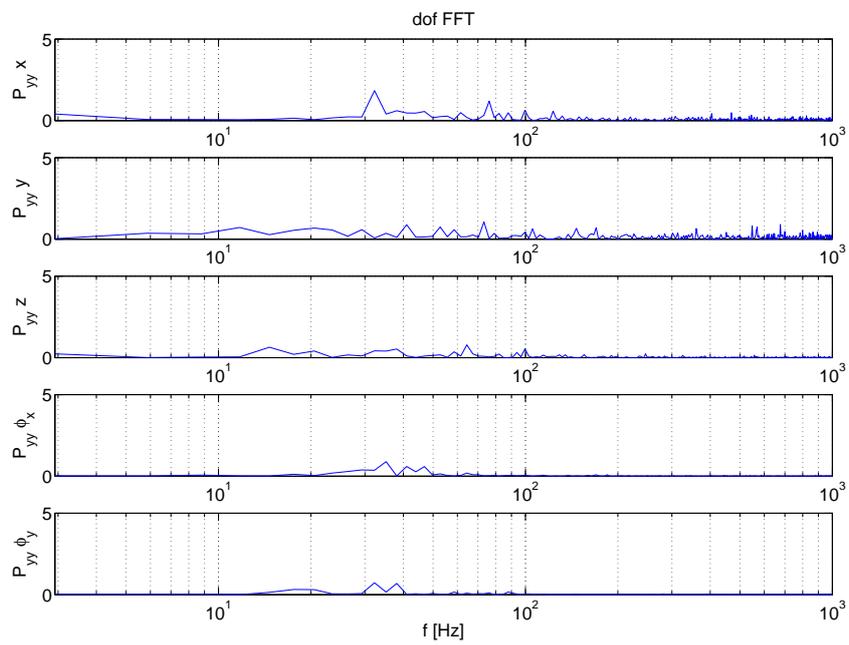
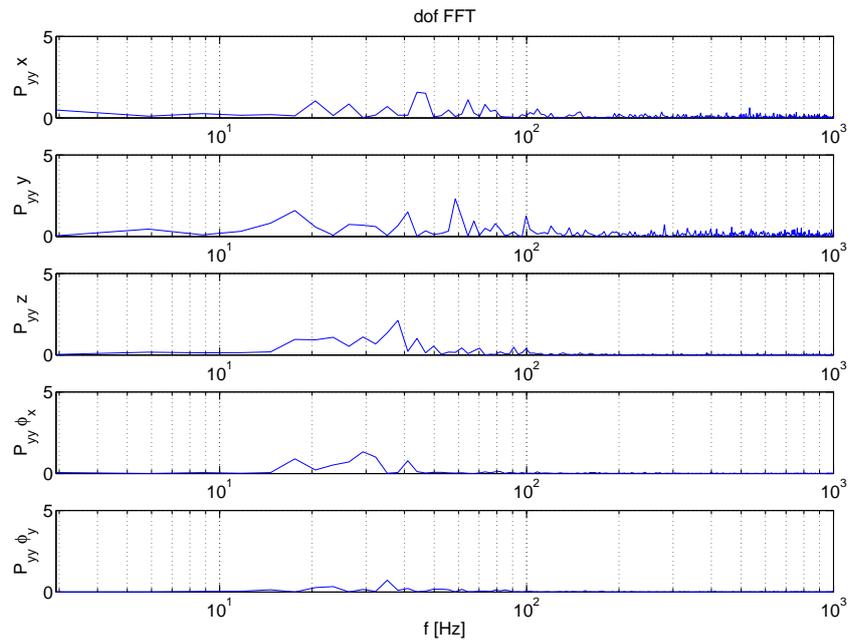
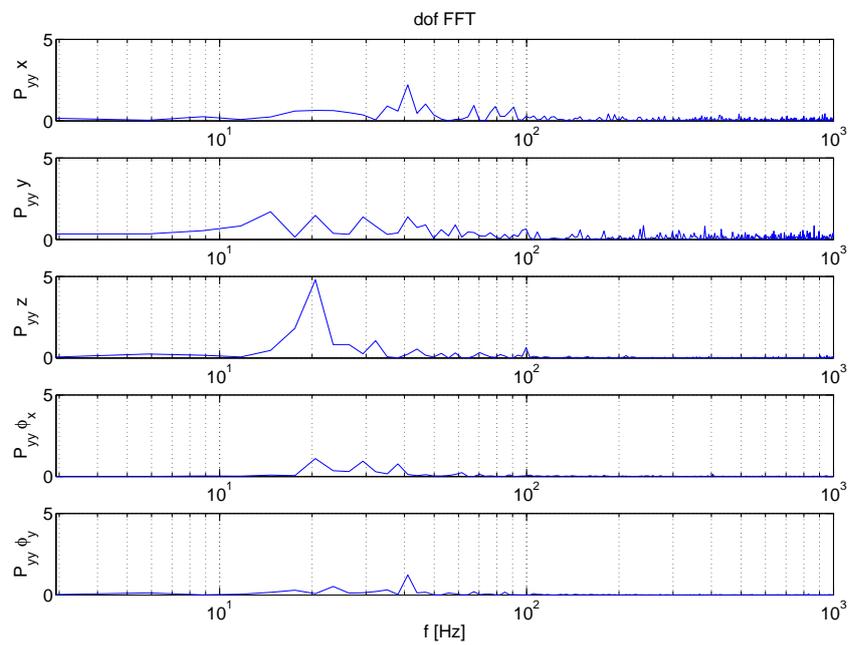


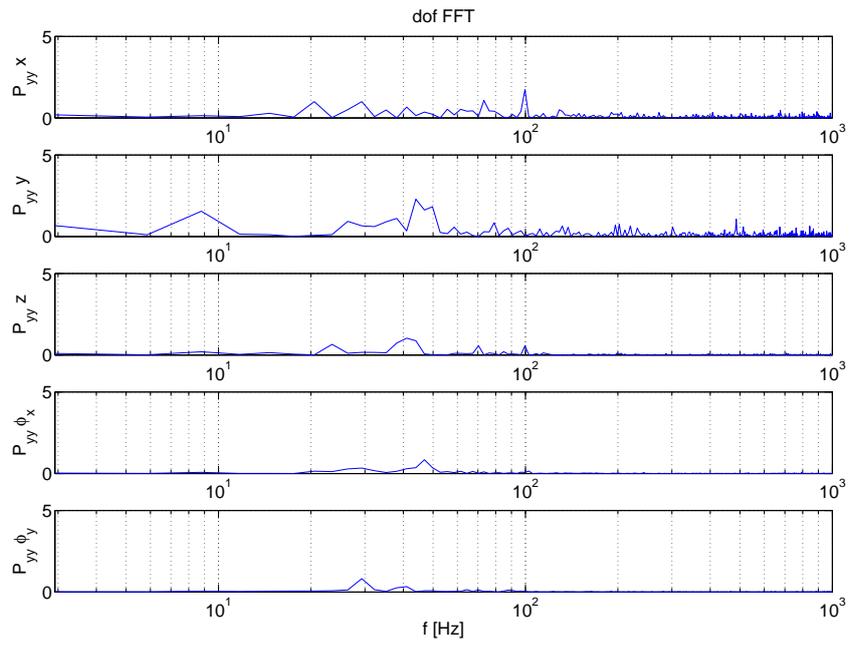
Abbildung A.14: FFT Sollwertsprung Abbildung A.9 ( $\phi_x$ -Achse)



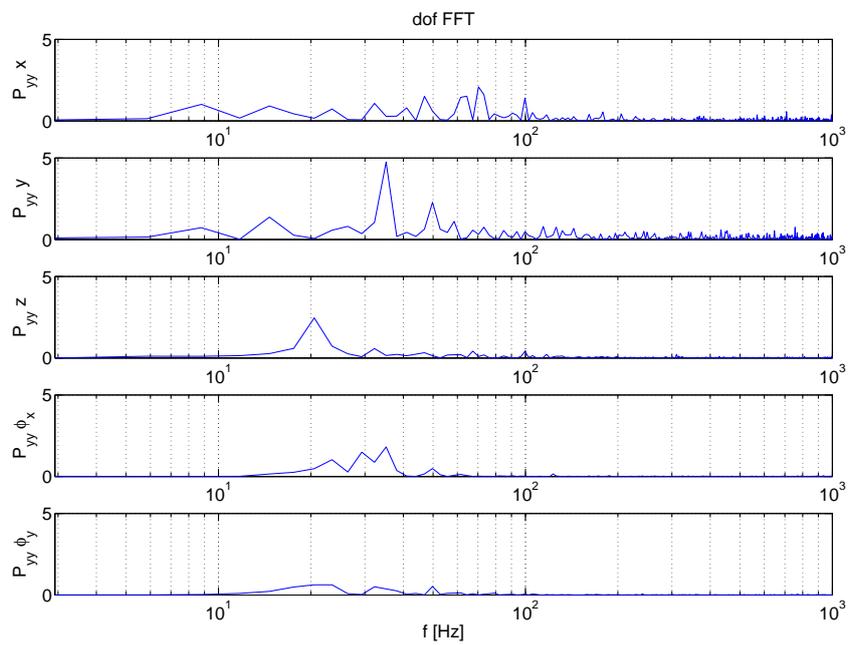
**Abbildung A.15:** FFT Sollwertsprung Abbildung A.10 ( $\phi_y$ -Achse)



**Abbildung A.16:** FFT Sollwertsprung Abbildung A.11 ( $x$ -Achse)

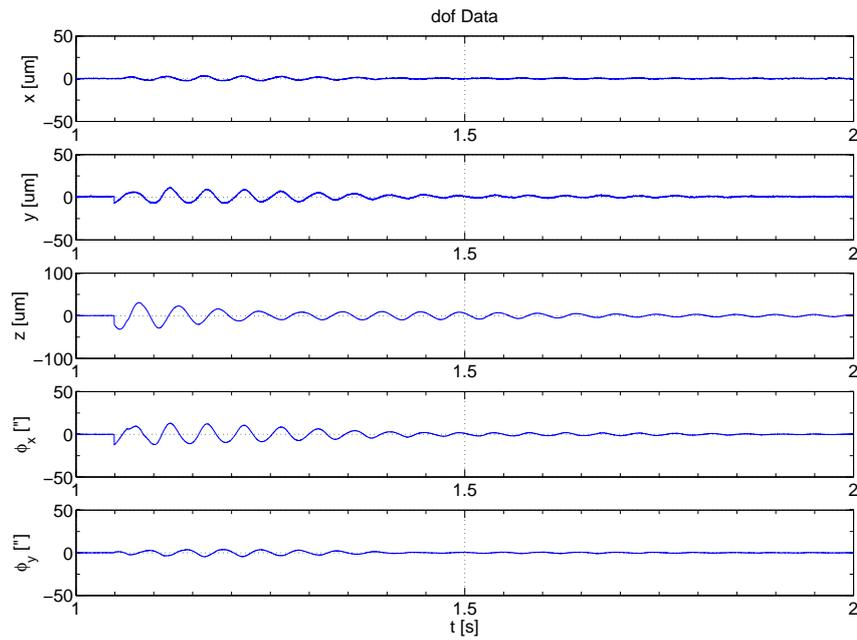


**Abbildung A.17:** FFT Sollwertsprung Abbildung A.12 (y-Achse)

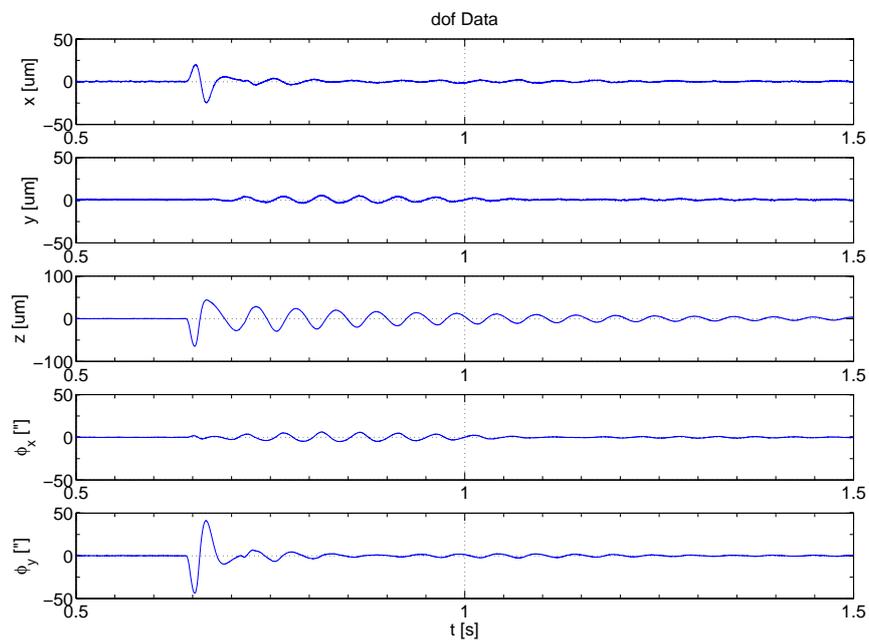


**Abbildung A.18:** FFT Sollwertsprung Abbildung A.13 (z-Achse)

## A.5 Störverhalten



**Abbildung A.19:** Störgrößensprungantwort der  $\phi_x$ -Achse



**Abbildung A.20:** Störgrößensprungantwort der  $\phi_y$ -Achse

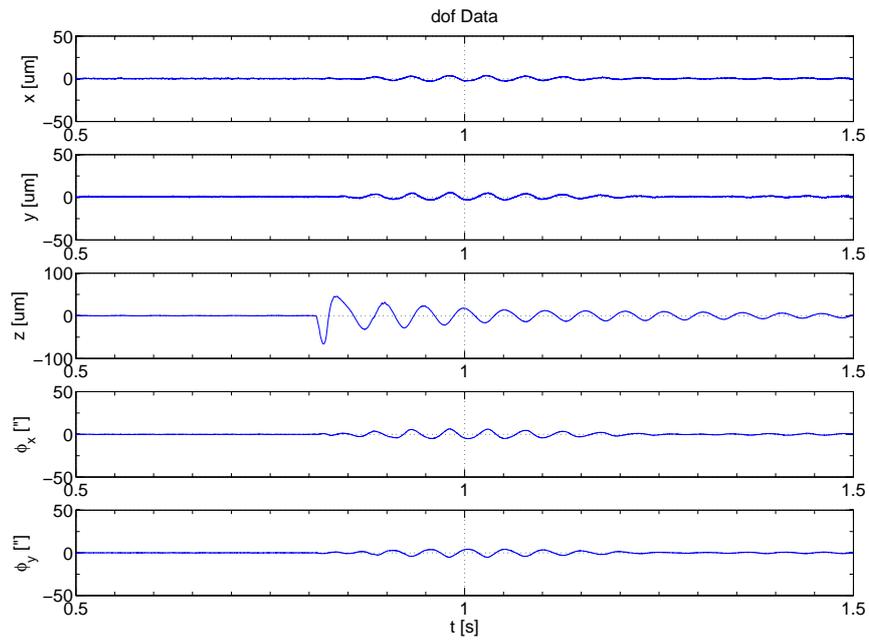


Abbildung A.21: Störgrößenprungantwort der  $z$ -Achse

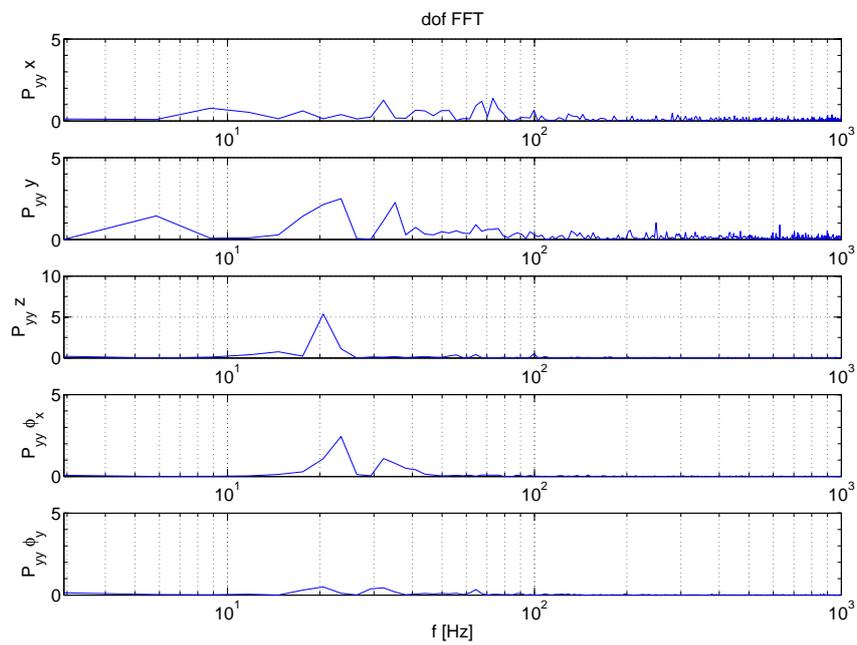


Abbildung A.22: FFT der Störgrößenprungantwort Abbildung A.19 ( $\phi_x$ -Achse)

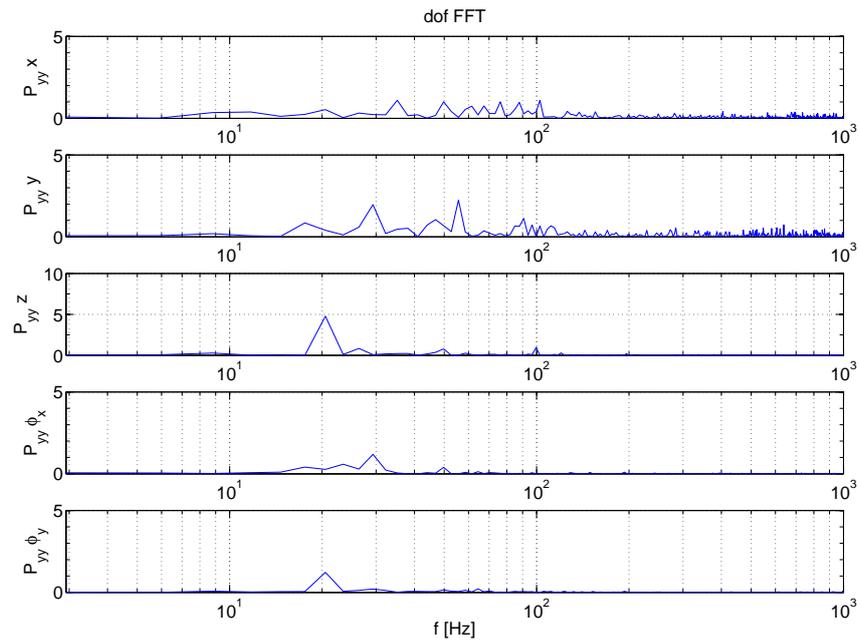


Abbildung A.23: FFT der Störgrößenprungantwort Abbildung A.20 ( $\phi_y$ -Achse)

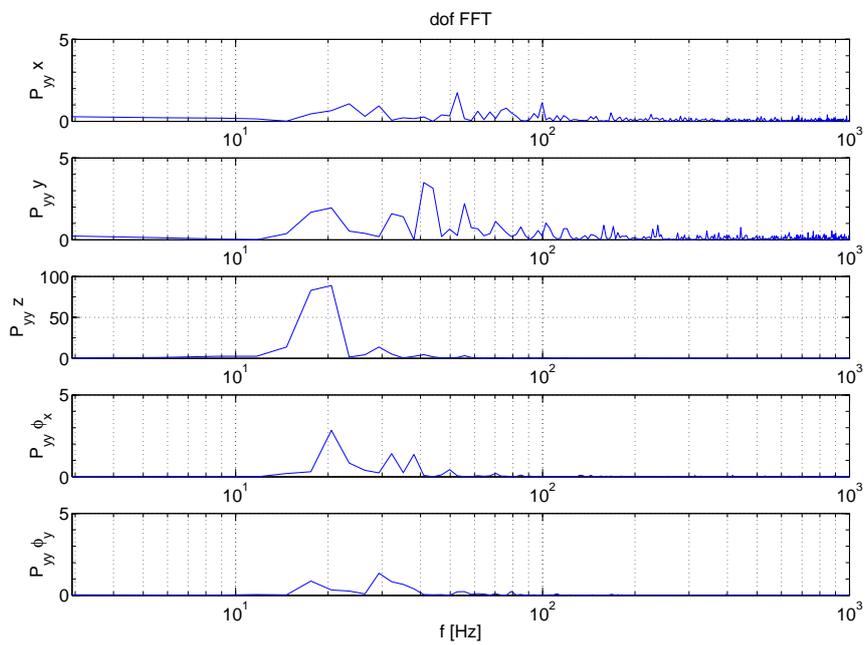


Abbildung A.24: FFT der Störgrößenprungantwort Abbildung A.21 ( $z$ -Achse)



# B Mehrkörpersystem

## B.1 Einleitung

Als mechanisches Modell für das hier vorgestellte Konzept des Magnetlagers eignet sich die Beschreibung als Mehrkörpersystem (MKS) besonders, da es eine einfache Beschreibung für verschiedene und komplizierte Geometrien ermöglicht und dabei ein System einfacher Differentialgleichungen für jeden Freiheitsgrad liefert.

Ein Mehrkörpersystem ist ein typisch funktionsorientiertes Modell der Mechatronik. Es ist ein mechanisches Ersatzsystem und besteht im Allgemeinen aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Die einzelnen Körper sind durch passive oder aktive, wie z.B. elektromechanische Aktoren, verbunden. Zugleich treten kinematische Bindungen auf, welche die Bewegungsfreiheit des MKS einschränken und als Zwangsbedingungen formuliert werden. Dabei können auf die Körper äußere Kräfte bzw. Momente einwirken, [Rod97, DD94, GH91].

Das MKS eines magnetisch gelagerten Rundtisches besteht dabei in erster Näherung aus 3 einzelnen Systemen: dem fest mit dem Fundament verbundenen Gehäuse, dem durch die magnetischen Aktoren in Schwebelage gehaltenen Rotor und dem fest mit ihm verbundenen Werkstück, welche jeweils als Starrkörper modelliert werden. Dabei ist aufgrund des regelungstechnischen Konzepts lediglich der Rotor in Abhängigkeit vom jeweiligen Werkstück zeitvariant hinsichtlich seiner Masse, Schwerpunktlage und Trägheits- bzw. Deviationsmomenten.

In den folgenden Abschnitten werden die Grundlagen dargestellt, so weit sie für die Modellierung des Magnetlagers als MKS notwendig sind. Dazu werden die Bewegungsgleichung sowie die Kinetik/Kinematik starrer Körper erläutert. Ziel ist die Bestimmung der Massenmatrix und der gyroskopischen Matrix.

## B.2 Bewegungsgleichung eines starren Körpers

Die Bewegungsgleichung für  $f$  Freiheitsgrade in Minimalkoordinaten für ein MKS lautet allgemein:

$$M(q,t)\ddot{q} + k(q,\dot{q},t) = Q(q,\dot{q},t) \quad (\text{B.1})$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{B.2})$$

und der symmetrischen, positiv definiten ( $f \times f$ )-Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ , dem  $f$ -Vektor der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte  $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  und dem  $f$ -Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte und Momente  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Die Bewegungsgleichung (B.1) ist im Allgemeinen ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung in den Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}$ . Ihre Lösung  $\mathbf{q}$ , welche die Bewegung des Systems beschreibt, kann daher in den meisten Fällen nur mit Hilfe von numerischen Integrationsverfahren ermittelt werden. Es kann in der Zustandsform:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

mit den Zustandsgrößen:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

transformiert werden.

Wie bei Magnetlagern üblich und häufig in der technischen Dynamik anzutreffen, ist jedoch die Bewegung  $\mathbf{q}$  nur auf die Umgebung einer bekannten "Referenzbewegung"  $\mathbf{q}_R$  beschränkt. Der einfachste Fall einer Referenzbewegung ist die Ruhe- bzw. Gleichgewichtslage des Systems, die durch  $\mathbf{q}_R = \text{konst.}$  und folglich durch  $\dot{\mathbf{q}}_R = \ddot{\mathbf{q}}_R = 0$  gekennzeichnet ist. Die Bewegung lässt sich dann durch vereinfachte, lineare Bewegungsgleichungen näherungsweise beschreiben. Diese Linearisierung erfolgt durch eine TAYLOR-Reihenentwicklung der nichtlinearen Funktionen (B.1) bis zu Termen erster Ordnung in den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und ihren zeitlichen Ableitungen.

Werden die Abweichungen der Bewegung  $\mathbf{q}$  von der Referenzbewegung  $\mathbf{q}_R$  mit  $\Delta \mathbf{q}$  bezeichnet, so gilt:

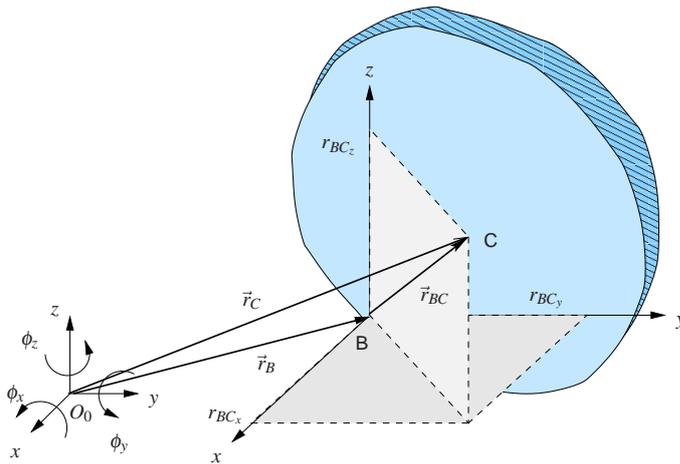
$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_R + \Delta \mathbf{q} \quad (\text{B.5a})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_R + \Delta \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.5b})$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_R + \Delta \ddot{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.5c})$$

Bei der Reihenentwicklung der nichtlinearen Terme von Gleichung (B.1) um die Referenzbewegung werden die Terme höherer Ordnung in den Abweichungen  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}$  vernachlässigt und um die Gleichgewichtslage  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  linearisiert. Anschließend erfolgt eine Aufspaltung der Matrizen in symmetrische und schiefsymmetrische Anteile, so dass die verallgemeinerte Bewegungsgleichung vereinfacht geschrieben werden kann als:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{F} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (\text{B.6})$$



**Abbildung B.1:** Bezugssystem mit körperfester Referenz am Rotor des Rundtisches

Die Matrizen haben nach ihrer physikalischen Bedeutung folgende Bezeichnungen:

$M$  ( $f \times f$ )-Massenmatrix (positiv definit),

$D$  ( $f \times f$ )-Dämpfungsmatrix,

$G$  ( $f \times f$ )-Matrix der gyroskopischen Kräfte (Kreisel- und Corioliskräfte),

$F$  ( $f \times f$ )-Fesselungs- bzw. Steifigkeitsmatrix,

$N$  ( $f \times f$ )-Matrix der nichtkonservativen Lagerkräfte (z.B. Wirbelstrom-Bremseffekte, Reibung etc.),

$Q$   $f$ -Vektor der äußeren Kräfte und Momente.

Die Bezeichnung eines Systems erfolgt zweckmäßig nach den darin auftretenden Matrizen, also z. B. MF- oder MDF-System.

Ist keine äußere Erregung  $Q$  vorhanden, so führt das System freie Bewegungen (Schwingungen) aus. Für  $Q \neq 0$  führt das System erzwungene Bewegungen aus, was bei einem Magnetlager die Aufgabe ist.

## B.3 Kinematik des starren Körpers

Der Gegenstand der Kinematik ist die Ermittlung von Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der einzelnen Körper eines MKS. Die Lage eines Körpers wird durch seine Position und seine Orientierung erfasst.

Für die Beschreibung der räumlichen Bewegung eines Körpers wird ein Referenzkoordinatensystem  $\mathcal{K}_0$  benötigt. Dieses Referenzsystem  $\mathcal{K}_0$  ist ein Inertialsystem, d.h. ein ruhendes bzw. beschleunigungsfreies Koordinatensystem. Weiterhin wird ein körperfestes Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$  zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen Raum relativ zu  $\mathcal{K}_0$  eingeführt, Abbildung B.1.

Die räumliche Bewegung des Körpers, bzw. des damit fest verbundenen Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$  relativ zum System  $\mathcal{K}_0$ , lässt sich durch die Bahnbewegung des Körperpunkts

B (für "Base Point") sowie der Drehbewegung des Körpers um B gemäß des Satzes von Euler darstellen:

- Die *Bahnbewegung* des Punktes B wird durch den zeitlich veränderlichen Koordinatenvektor  ${}^0\mathbf{r}_B(t)$  des Vektors  $\mathbf{r}_B(t)$  von  $O_0$  nach B im System  $\mathcal{K}_0$  beschrieben.
- Die *Drehbewegung* des Systems  $\mathcal{K}_1$  um den Punkt B wird durch die zeitlich veränderliche Transformationsmatrix  ${}^{01}\mathbf{T}(t)$  vom System  $\mathcal{K}_1$  in das System  $\mathcal{K}_0$  beschrieben.

Betrachtet wird nun ein weiteres körperfestes Koordinatensystem  $\mathcal{K}_2$ . Die Lage von  $\mathcal{K}_2$  gegenüber dem körperfesten System  $\mathcal{K}_1$  wird durch den zeitlich konstanten Koordinatenvektor:

$${}^1\mathbf{r}_{BC} = {}^1 (r_{BC_x} \ r_{BC_y} \ r_{BC_z})^T \quad (\text{B.7})$$

des körperfesten Vektors  $\mathbf{r}_{BC}$  von B nach C (für "Center of Mass" als Bezeichner für den Schwerpunkt) im System  $\mathcal{K}_1$  beschrieben. Folglich bezeichnet der Vektor  ${}^1\mathbf{r}_{BC}$  den Schwerpunktvektor  ${}^1\mathbf{r}_{BC}$  im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$ . Die Orientierung des Systems  $\mathcal{K}_2$  gegenüber  $\mathcal{K}_1$  wird durch eine zeitlich konstante Transformationsmatrix  ${}^{12}\mathbf{T}$  beschrieben.

Im Folgenden werden die Lage, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes C sowie die Orientierung des Systems  $\mathcal{K}_2$  gegenüber dem System  $\mathcal{K}_0$  ermittelt, wobei die Zeitabhängigkeiten der Übersicht wegen nicht explizit notiert werden.

### B.3.1 Lage

Unter Verwendung des körperfesten Schwerpunktvektors  $\mathbf{r}_{BC}$  von B nach C gilt für den zeitlich veränderlichen Vektor  $\mathbf{r}_C$  von  $O_0$  nach C:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{BC} \quad (\text{B.8})$$

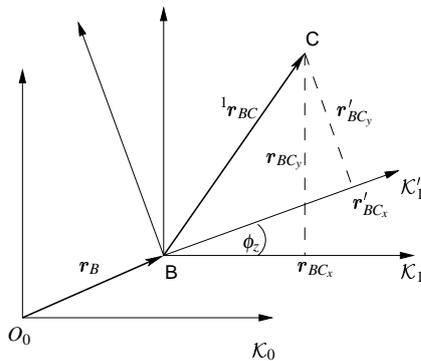
welcher sich aus einfacher Vektoraddition nach Abbildung B.1 ergibt. Dabei ist der körperfeste Vektor  $\mathbf{r}_{BC}$  ebenfalls zeitlich veränderlich, da er während der Drehung des Körpers zwar seinen Betrag beibehält, aber im Allgemeinen seine Richtung im Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  ändert.

Im System  $\mathcal{K}_0$  lautet diese Gleichung:

$${}^0\mathbf{r}_C = {}^0\mathbf{r}_B + {}^0\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.9})$$

Der zeitlich veränderliche Koordinatenvektor  ${}^0\mathbf{r}_{BC}$  lässt sich aus dem ortsfesten, zeitlich konstanten Koordinatenvektor  ${}^1\mathbf{r}_{BC}$  (B.7) mit Hilfe der zeitlich veränderlichen Transformationsmatrix  ${}^{01}\mathbf{T}$  vom System  $\mathcal{K}_1$  nach  $\mathcal{K}_0$  ermitteln:

$${}^0\mathbf{r}_{BC} = {}^{01}\mathbf{T} \ {}^1\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.10})$$



**Abbildung B.2:** Drehung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems

Damit gilt entsprechend Gleichung (B.9) und (B.10):

$${}^0\mathbf{r}_C = {}^0\mathbf{r}_B + {}^{01}\mathbf{T} \cdot {}^1\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.11})$$

In ausgeschriebener Form lautet diese Gleichung:

$$\begin{pmatrix} r_{C_x} \\ r_{C_y} \\ r_{C_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{B_x} \\ r_{B_y} \\ r_{B_z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{BC_x} \\ r_{BC_y} \\ r_{BC_z} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Nun kann das körperfeste System  $\mathcal{K}_1$  gegenüber dem raumfesten System  $\mathcal{K}_0$  um alle drei Achsen gedreht werden. Für jede dieser Einzel- bzw. Elementardrehung gibt es eine Elementar-Transformationsmatrix. Hierbei ist zu beachten, dass sich je nach Wahl der Reihenfolge der Drehung eine andere Lage des resultierenden Vektors ergibt. Erfolgt die Reihenfolge der Elementardrehungen um die x-y-z-Achsen, so bezeichnet man die Winkel als KARDAN-Winkel. Wählt man eine Reihenfolge um die z-x-y-Achsen, so spricht man von EULER-Winkeln. Diese werden bei Robotern üblicherweise eingesetzt.

Aufgrund des Einsatzes in einem Magnetlager sind die Lageänderung um die x- und y-Achse gering - die Hauptbewegung ist die um die z-Achse. Folglich handelt es sich bei der Transformationsmatrix  ${}^{01}\mathbf{T}$  um eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z(\phi_z)$ . Zur Bestimmung der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z(\phi_z)$  kann ohne Einschränkung  $r_B = 0$  gesetzt werden und die Bewegung in der x,y-Ebene betrachtet werden, Abbildung B.2. Da der Vektor  ${}^1\mathbf{r}_{BC}$  ortsfest mit dem sich um die z-Achse drehenden Systems  $\mathcal{K}'_1$  verbunden ist, muss eine Transformation des Systems  $\mathcal{K}'_1$  in das von  $\mathcal{K}_1$  durchgeführt werden. Folglich sind die Koordinaten im alten System  $\mathcal{K}_1$  gesucht:

$$r_{BC_x}(\phi_z) = r'_{BC_x} \cos(\phi_z) - r'_{BC_y} \sin(\phi_z) \quad (\text{B.13a})$$

$$r_{BC_y}(\phi_z) = r'_{BC_y} \sin(\phi_z) + r'_{BC_x} \cos(\phi_z) \quad (\text{B.13b})$$

$$r_{BC_z}(\phi_z) = r'_{BC_z}. \quad (\text{B.13c})$$

Man erhält somit die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z(\phi_z)$  bzw. Transformationsmatrix:

$${}^{01}\mathbf{T} = \mathbf{R}_z(\phi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Diese Transformationsmatrix besitzt aufgrund ihrer Orthogonalität, wie die anderen Rotationsmatrizen für kartesische Koordinatensysteme, einige wichtige Eigenschaften:

- Die Transformationsmatrix ist stets regulär, d. h. die Determinante besitzt den Betrag von 1. Weiterhin ist die Inverse  $\mathbf{T}^{-1}$  identisch mit der Transponierten  $\mathbf{T}^T$ .
- Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wiederum eine orthogonale Matrix.

Bei einer Linearführung wird diese Transformation nicht benötigt, da keine Drehbewegung auftritt. Hier vereinfacht sich die Transformationsmatrix zur Einheitsmatrix.

Für die Kinematik spielt die Kenntnis der Lage von C keine Rolle. Jedoch kann diese für Orbit-Plots benutzt werden, um z. B. den Orbit des Schwerpunktes oder eines beliebig auf der Aufspannplatte des Rundtisches aufgebrauchten Punktes darzustellen.

### B.3.2 Geschwindigkeit

Die zeitliche Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{r}_C$  des Punktes C aus Gleichung (B.8) liefert den Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{r}}_C$  von C:

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{BC}. \quad (\text{B.15})$$

Die zeitliche Änderung des körperfesten Vektors  $\mathbf{r}_{BC}$  kann mit Hilfe des Vektors der Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\phi}_B = (\dot{\phi}_{B_x} \ \dot{\phi}_{B_y} \ \dot{\phi}_{B_z})^T \quad (\text{B.16})$$

des mit dem Körper verbundenen Systems  $\mathcal{K}_1$  gegenüber dem System  $\mathcal{K}_0$  ausgedrückt werden:

$$\dot{\mathbf{r}}_{BC} = \dot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC} \quad (\text{B.17})$$

und beschreibt die Bahngeschwindigkeit des Punktes C infolge Rotation um B. Eingesetzt in Gleichung (B.15) ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.18})$$

Dies ist der Satz von Euler für die Geschwindigkeiten der Körperpunkte B und C.

Gleichung (B.18) kann mit Hilfe der Koordinatendarstellung des Vektorproduktes [ZF84] ebenfalls in der Matrixform beschrieben werden.

Hierzu muss Gleichung (B.9) differenziert werden:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_C = {}^0\dot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC} \quad (\text{B.19})$$

bzw. die Transformationsvorschrift gemäß Gleichung (B.10):

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC} = {}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^1\mathbf{r}_{BC} + \underbrace{{}^{01}\mathbf{T} {}^1\dot{\mathbf{r}}_{BC}}_0. \quad (\text{B.20})$$

Der zweite Summand der Ableitung entfällt, da bei einem starren Körper die Geschwindigkeit des Punktes im körpereigenen System gleich Null ist, d. h. es wird die Annahme getroffen, dass der Schwerpunkt zeitlich konstant sei.

Setzt man nun die nach  ${}^1\mathbf{r}_{BC}$  umgestellte Transformationsvorschrift nach Gleichung (B.10):

$${}^1\mathbf{r}_{BC} = {}^{01}\mathbf{T}^T {}^0\mathbf{r}_{BC} \quad (\text{B.21})$$

in (B.20) ein, so erhält man:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC} = {}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^{01}\mathbf{T}^T {}^0\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.22})$$

Das Matrizenprodukt  ${}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^{01}\mathbf{T}^T$  wird üblicherweise durch den Tildeoperator ausgedrückt:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC} = {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.23})$$

Fasst man die Ergebnisse zusammen, ergibt sich aus Gleichung (B.19) und (B.23) die wichtige Beziehung:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_C = {}^0\dot{\mathbf{r}}_B + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.24})$$

Danach setzt sich die Geschwindigkeit eines Körperpunktes aus zwei additiven Anteilen zusammen:

- Durch  ${}^0\dot{\mathbf{r}}_B$  wird die Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$  erfasst.
- Das Produkt  ${}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC}$  beschreibt den Geschwindigkeitsanteil aus der Rotation.

Bei infinitesimal kleinen, zusammengesetzten Drehungen spielt die Reihenfolge der Rotationen keine Rolle, d. h. infinitesimal kleine Drehungen besitzen Vektorcharakter. Dies gilt auch für daraus abgeleitete Größen wie die Winkelgeschwindigkeiten, [HGP01].

Wie eingangs erwähnt, ist der Vektor  $r_{BC}$  im Allgemeinen im System  $\mathcal{K}_1$  bekannt. Mit Hilfe der Transformationsvorschrift (B.10) kann obige Gleichung (B.24) für einen im System  $\mathcal{K}_1$  bekannten  ${}^1r_{BC}$  geschrieben werden:

$${}^0\dot{r}_C = {}^0\dot{r}_B + {}^0\tilde{\omega}_B {}^{01}\mathbf{T}^1 r_{BC}. \quad (\text{B.25})$$

Die zeitliche Ableitung der Matrix  ${}^{01}\mathbf{T}$  erhält man durch partielle Differentiation:

$$\begin{aligned} {}^{01}\dot{\mathbf{T}}(\phi_z) &= \frac{\partial {}^{01}\mathbf{T}(\phi_z)}{\partial \phi_z} \dot{\phi}_z \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\phi_z) & -\cos(\phi_z) & 0 \\ \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_z. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Somit gilt für das Produkt:

$$\begin{aligned} {}^0\tilde{\omega}_B &= {}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^{01}\mathbf{T}^T \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\phi_z) & -\cos(\phi_z) & 0 \\ \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & \sin(\phi_z) & 0 \\ -\sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_z. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Der Koeffizientenvergleich von Gleichung (B.27) mit der Matrizendarstellung des Tildeoperators ergibt für:

$${}^0\omega_B = {}^0(0 \ 0 \ \dot{\phi}_z)^T \quad (\text{B.28})$$

und beschreibt die Winkelgeschwindigkeit von  $\mathcal{K}_1$  gegenüber  $\mathcal{K}_0$ , dargestellt im System  $\mathcal{K}_0$ . Die Komponenten der Matrix  ${}^0\tilde{\omega}_B$  sind die Projektionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit der bewegten Achsen des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$  im Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$ . Wie zu erwarten, besitzt  ${}^0\omega_B$  nur eine Komponente für die Winkelgeschwindigkeit um die  $z$ -Achse  $\dot{\phi}_z$ .

Die Bahngeschwindigkeit des Punktes C im System  $\mathcal{K}_0$  infolge der Rotation um C erhält man aus Gleichung (B.23):

$$\begin{aligned} {}^0\dot{r}_{BC} &\stackrel{(\text{B.23})}{=} {}^0\tilde{\omega}_B {}^0r_{BC} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}_z & 0 \\ \dot{\phi}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{BC_x} \\ r_{BC_y} \\ r_{BC_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_z r_{BC_x} \\ \dot{\phi}_z r_{BC_y} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Aufgrund der Rotation um die  $z$ -Achse rotiert der Vektor in der  $x, y$ -Ebene und besitzt aufgrund fehlender Rotationen um die  $x, y$ -Achse keine Komponente in  $z$ .

### B.3.3 Beschleunigung

Die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\mathbf{r}}_C$  (B.18) des Punktes C liefert den Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{r}}_C$  von C:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{BC}. \quad (\text{B.30})$$

Zum Erhalt der Beschleunigung von  $\ddot{\mathbf{r}}_{BC}$  muss Gleichung (B.17) unter Beachtung der Produktregel zeitlich abgeleitet werden:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{BC} = \ddot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC} + \dot{\phi}_B \times \dot{\mathbf{r}}_{BC}. \quad (\text{B.31})$$

Der zweite Summand aus Gleichung (B.31) enthält die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}_{BC}$  aus Gleichung (B.17) und kann somit entsprechend substituiert werden:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{BC} = \ddot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC} + \dot{\phi}_B \times (\dot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC}). \quad (\text{B.32})$$

Hierin ist  $\ddot{\phi}_B$  der Vektor der Winkelbeschleunigung des mit dem Körper verbundenen Systems  $\mathcal{K}_1$  gegenüber dem System  $\mathcal{K}_0$ .

Für den Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{r}}_C$  von C gilt folglich:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC} + \dot{\phi}_B \times (\dot{\phi}_B \times \mathbf{r}_{BC}). \quad (\text{B.33})$$

Dies ist der Satz von Euler für die Beschleunigungen der betrachteten Körperpunkte B und C. Der erste Summand beschreibt die translatorische Beschleunigung, der zweite die Tangential- und der dritte die Normalbeschleunigung.

In der Matrizendarstellung muss Gleichung (B.24) ebenfalls unter Anwendung der Kettenregel differenziert werden:

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_C = {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\omega}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\omega}_B {}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC}. \quad (\text{B.34})$$

Der Geschwindigkeitsvektor  ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{BC}$  des dritten Summanden von Gleichung (B.34) kann durch die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors  ${}^1\dot{\mathbf{r}}_{BC}$  im Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$  (B.20) ersetzt:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_C = {}^0\dot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\omega}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\omega}_B {}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^1\mathbf{r}_{BC} \quad (\text{B.35})$$

und anschließend durch  ${}^0\mathbf{r}_{BC}$  gemäß Gleichung (B.21) zurück substituiert werden:

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_C = {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\omega}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\omega}_B {}^{01}\dot{\mathbf{T}} {}^{01}\mathbf{T}^T {}^0\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.36})$$

Man erhält in den Koordinaten von  $\mathcal{K}_0$  die Beschleunigung des Punktes C:

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{r}}_C &= {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} \\ &= {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^2 {}^0\mathbf{r}_{BC}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Wie in der Vektordarstellung beschreibt der erste Summand die Translation, der zweite die Bahn- bzw. Tangential-, und der dritte Summand die Normalbeschleunigung. Weiterhin beschreibt der Koordinatenvektor  ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$  die Winkelbeschleunigung von  $\mathcal{K}_1$  gegenüber  $\mathcal{K}_0$ , dargestellt im System  $\mathcal{K}_0$ :

$${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = {}^0\ddot{\boldsymbol{\phi}}_B = (\ddot{\phi}_{B_x} \ \ddot{\phi}_{B_y} \ \ddot{\phi}_{B_z})^T \quad (\text{B.38})$$

und wird auch als Tildeoperator der Winkelbeschleunigung bezeichnet.

Das Matrizenprodukt:

$${}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \begin{bmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

stellt das doppelte Kreuzprodukt zweier Vektoren dar und ist symmetrisch.

In der Komponentenschreibweise in den Koordinaten  $\mathcal{K}_0$  lautet Gleichung (B.37):

$$\begin{aligned} {}^0\begin{pmatrix} \ddot{r}_{C_x} \\ \ddot{r}_{C_y} \\ \ddot{r}_{C_z} \end{pmatrix} &= {}^0\begin{pmatrix} \ddot{r}_{B_x} \\ \ddot{r}_{B_y} \\ \ddot{r}_{B_z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\phi}_{B_z} & \ddot{\phi}_{B_y} \\ \ddot{\phi}_{B_z} & 0 & -\ddot{\phi}_{B_x} \\ -\ddot{\phi}_{B_y} & \ddot{\phi}_{B_x} & 0 \end{bmatrix} {}^0\begin{pmatrix} r_{BC_x} \\ r_{BC_y} \\ r_{BC_z} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -(\dot{\phi}_{B_y}^2 + \dot{\phi}_{B_z}^2) & \dot{\phi}_{B_x} \dot{\phi}_{B_y} & \dot{\phi}_{B_x} \dot{\phi}_{B_z} \\ \dot{\phi}_{B_x} \dot{\phi}_{B_y} & -(\dot{\phi}_{B_x}^2 + \dot{\phi}_{B_z}^2) & \dot{\phi}_{B_y} \dot{\phi}_{B_z} \\ \dot{\phi}_{B_x} \dot{\phi}_{B_z} & \dot{\phi}_{B_y} \dot{\phi}_{B_z} & -(\dot{\phi}_{B_x}^2 + \dot{\phi}_{B_y}^2) \end{bmatrix} {}^0\begin{pmatrix} r_{BC_x} \\ r_{BC_y} \\ r_{BC_z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Wie bereits in Abschnitt B.3.2 für die Geschwindigkeit des Ortsvektors  $\mathbf{r}_C$  gezeigt, kann mit Hilfe der Transformationsvorschrift (B.10) in Gleichung (B.37) der körperfeste Schwerpunktvektor  ${}^0\mathbf{r}_{BC}$  im System  $\mathcal{K}_0$  auch in dem System  $\mathcal{K}_1$  ausgedrückt werden und man erhält:

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_C = {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\mathbf{T}^1 {}^1\mathbf{r}_{BC} + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^2 {}^0\mathbf{T}^1 {}^1\mathbf{r}_{BC}. \quad (\text{B.41})$$

## B.4 Kinetik des starren Körpers

Während die Kinematik die Bewegungsabläufe ohne Frage nach Ihren Ursachen (Kräfte und Momente) untersucht, wird in der Kinetik der Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen (Weg, Zeit, Geschwindigkeit) und den Kräften bzw. Momenten behandelt. Die Kinetik ist folglich die Lehre von der Bewegung massebehafteter Körper unter Einwirkung von Kräften und Momenten.

Die Beschreibung des Bewegungsverhaltens führt auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, den *Bewegungsgleichungen*, die das *dynamische Modell* bilden. Für ein Starrkörpersystem mit  $f$  Freiheitsgraden führt dies zu einem Satz von  $f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Zur Aufstellung des dynamischen Modells können zwei unterschiedliche Methoden eingesetzt werden:

- **NEWTON-EULER-Methode:** Ausgangspunkt sind Freikörperbilder, die durch Freischneiden der Teilkörper eines MKS und Einfügen von entsprechenden Schnittgrößen (Kräfte bzw. Momente) entstehen. Durch die Anwendung des Impuls- sowie Drallsatzes auf jeden einzelnen Körper erhält man ein System von  $6f$  Gleichungen. Durch Elimination der Schnittgrößen findet man die Bewegungsgleichung.
- **LAGRANGESCHE-Methode:** Ausgangspunkt ist ein Extremalprinzip bzw. die aus diesem Prinzip abgeleiteten Variationsgleichungen. Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen dienen Energie- bzw. Arbeitsbilanzen.

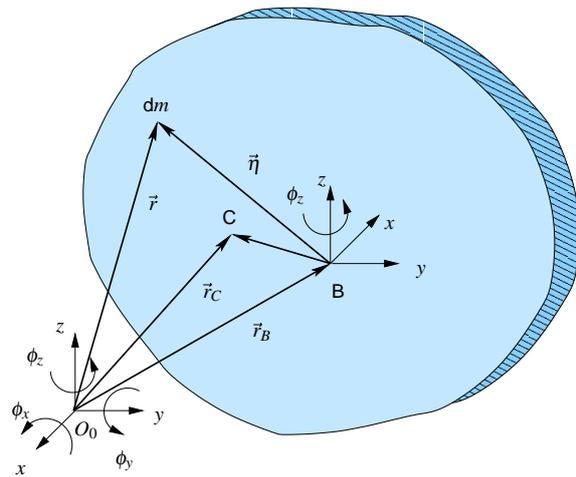
In [Pfe89] werden beide Methoden miteinander verglichen und es wird gezeigt, dass bereits bei einem System mit nur 3 Freiheitsgraden die NEWTON-EULER-Methode deutliche Vorteile bez. des Aufwandes bietet. Daher wurde in der vorliegenden Arbeit das dynamische Modell mit Hilfe dieser Methode bestimmt.

## B.5 Kinetik nach der NEWTON-EULER-Methode

In diesem Kapitel werden die Grundbeziehungen für die Wechselwirkungen zwischen Bewegungen und Kräften an einem einzelnen starren Körper im Raum betrachtet. Unter Verwendung der kinematischen Starrkörpergleichungen aus Abschnitt B.3 werden der Impulssatz (Schwerpunktsatz, Kräftesatz) und der Drallsatz (Momentensatz) hergeleitet. Weiterhin wird die kinetische Energie eines starren Körpers angegeben.

Betrachtet wird im Folgenden die räumliche Bewegung eines starren, massebehafteten Körpers. Jedem Körperpunkt kann ein infinitesimales Massenelement  $dm$  zugeordnet werden. Auf die Massenelemente wirken äußere Krafterelemente  $dF$ , die auf Volumenkräfte (räumlich in einem Körper verteilte Kräfte), Oberflächenkräfte (flächenhaft verteilte Kräfte) oder Einzelkräfte zurückgehen können.

Für die Starrkörperbewegung relativ zum raumfesten Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  wird entsprechend Abschnitt B.3 ein körperfestes Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$  definiert, dessen Ursprung B im



**Abbildung B.3:** Bezugsvektor, Schwerpunktsvektor und Vektor zu einem Massenelement

Allgemeinen nicht mit dem Massenmittelpunkt C zusammenfällt, Abbildung B.3. Für die Bewegung eines beliebigen Körperpunkts mit dem Massenelement  $dm$  relativ zum Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  gilt:

- Lage von  $dm$ : 
$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{r}_B + {}^0\boldsymbol{\eta} \quad (\text{B.42})$$

- Geschwindigkeit von  $dm$ : 
$${}^0\dot{\mathbf{r}} = {}^0\dot{\mathbf{r}}_B + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\boldsymbol{\eta} \quad (\text{B.43})$$

- Beschleunigung von  $dm$ : 
$${}^0\ddot{\mathbf{r}} = {}^0\ddot{\mathbf{r}}_B + {}^0\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_B {}^0\boldsymbol{\eta} + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B {}^0\boldsymbol{\eta}. \quad (\text{B.44})$$

Hierin bezeichnet  ${}^0\mathbf{r}$  den Vektor zu einem Massenelement  $dm$ ,  ${}^0\mathbf{r}_B$  den Vektor zum Bezugspunkt B sowie  ${}^0\boldsymbol{\eta}$  den Vektor vom Bezugspunkt B zum Massenelement  $dm$  im Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$ .

### B.5.1 Impulssatz bzw. Schwerpunktsatz

Der *Impuls*  $\mathbf{p}$  eines starren Körpers ist definiert durch das Integral der Impulse seiner Massenelemente:

$$\mathbf{p} = \int_m \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{r} dm = m \dot{\mathbf{r}}_C. \quad (\text{B.45})$$

Hierin ist  $m$  die Masse des Körpers und  $\dot{\mathbf{r}}_C$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktsvektors im System  $\mathcal{K}_0$  und bezeichnet dessen Massenmittelpunkt. Die Bedeutung des Impulses liegt in seiner Eigenschaft als "Erhaltungsgröße", da er für alle Teilchen eines abgeschlossenen Systems stets konstant bleibt, ebenso wie die Energie eine Erhaltungsgröße ist.

Mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}_C$  des Punktes C nach Gleichung (B.24) lautet der Impuls in den Koordinaten des Systems  $\mathcal{K}_0$ :

$${}^0\mathbf{p} = \frac{d}{dt} \int_m ({}^0\dot{\mathbf{r}}_B + {}^0\tilde{\omega}_B {}^0\mathbf{r}_{BC}) dm. \quad (\text{B.46})$$

Die Masse  $m$  eines Körpers mit der ortsabhängigen Dichte  $\rho(\mathbf{r})$  wird durch Integration über das Volumen  $V$  berechnet:

$$m = \int_V dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (\text{B.47})$$

Unter der Annahme eines homogenen Körpers ist die Dichte  $\rho$  ortsunabhängig bzw. konstant, d. h. es gilt:

$$m = \rho \int_V dV = \rho V. \quad (\text{B.48})$$

Der Vektor  $\mathbf{r}_C$  von  $O_0$  zum *Massenmittelpunkt* C berechnet sich gemäß:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{m} \underbrace{\int_m \mathbf{r} dm}_{m\mathbf{r}_C}. \quad (\text{B.49})$$

Im homogenen Schwerfeld (ortsunabhängige Schwerebeschleunigung  $g$ ) der Erde stimmt der Massenmittelpunkt C mit dem Schwerpunkt C', also dem Angriffspunkt der resultierenden Gravitationskraft, überein. Dies erlaubt die Betrachtung als Punktmassen und wird im Folgenden ausschließlich betrachtet. Im Schwerpunkt fällt somit  ${}^0\boldsymbol{\eta}$  mit  ${}^0\mathbf{r}_{BC}$  zusammen. In Gleichung (B.49) bezeichnet das Integral  $\int \mathbf{r} dm$  das *statische Moment* bez. des Schwerpunktes. Es ist Null, wenn der Bezugspunkt für den Schwerpunktvektor mit diesem zusammenfällt.

Der *Impulssatz* bzw. *Schwerpunktsatz* für einen Körper besagt nun, dass die zeitliche Änderung des Impulses bezüglich des Inertialsystems gleich der resultierenden Kraft  $\mathbf{F}$  aller am freigeschnittenen Körper wirkenden äußeren Kräfte ist, also:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (\text{B.50})$$

Die Resultierende  $\mathbf{F}$  der äußeren Kräfte kann sich dabei aus Volumen-, Oberflächen- und Einzelkräften zusammensetzen. Die inneren Schnittkräfte zwischen den einzelnen Massenelementen heben sich gegenseitig auf (Gegenwirkungsprinzip) und müssen folglich nicht berücksichtigt werden.

Somit lautet der Impulssatz in Koordinatendarstellung:

$${}^0\mathbf{F} = m {}^0\ddot{\mathbf{r}}_C. \quad (\text{B.51})$$

Mit Gleichung (B.37) für die Beschleunigung  ${}^0\ddot{\mathbf{r}}_C$  des Schwerpunktes C lautet der Impulssatz (B.51) in Skalarform in den Koordinaten von  $\mathcal{K}_0$  (Koordinatenindex weggelassen):

$$F_x = m \left( \ddot{r}_{B_x} + \ddot{\phi}_{B_y} r_{BC_z} - \ddot{\phi}_{B_z} r_{BC_y} - \left( \dot{\phi}_{B_y}^2 + \dot{\phi}_{B_z}^2 \right) r_{BC_x} + \dot{\phi}_{B_x} \left( \dot{\phi}_{B_y} r_{BC_y} + \dot{\phi}_{B_z} r_{BC_z} \right) \right) \quad (\text{B.52a})$$

$$F_y = m \left( \ddot{r}_{B_y} + \ddot{\phi}_{B_z} r_{BC_x} - \ddot{\phi}_{B_x} r_{BC_z} - \left( \dot{\phi}_{B_z}^2 + \dot{\phi}_{B_x}^2 \right) r_{BC_y} + \dot{\phi}_{B_y} \left( \dot{\phi}_{B_z} r_{BC_z} + \dot{\phi}_{B_x} r_{BC_x} \right) \right) \quad (\text{B.52b})$$

$$F_z = m \left( \ddot{r}_{B_z} + \ddot{\phi}_{B_x} r_{BC_y} - \ddot{\phi}_{B_y} r_{BC_x} - \left( \dot{\phi}_{B_x}^2 + \dot{\phi}_{B_y}^2 \right) r_{BC_z} + \dot{\phi}_{B_z} \left( \dot{\phi}_{B_x} r_{BC_x} + \dot{\phi}_{B_y} r_{BC_y} \right) \right). \quad (\text{B.52c})$$

Gleichung (B.52) beschreibt die vollständige Koppelung zwischen den Beschleunigungen, den Geschwindigkeiten und den resultierenden Kräften.

## B.5.2 Drall- bzw. Drehimpuls

Der *Drehimpuls* bzw. *Drall* ist allgemein definiert als das resultierende Moment aller differentiellen Impulse der Massenelemente  $dm$  und dementsprechend vom gewählten Bezugspunkt abhängig:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (\text{B.53})$$

Günstig ist häufig die Koordinatendarstellung des Drallvektors  $\mathbf{L}_1$  im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$ , da dort der Trägheitstensor konstante Koordinaten hat. Daher wird im Folgenden der körperfeste Punkt B als Bezug für den Drall gewählt.

Weiterhin wird in Gleichung (B.53) der Impuls in der integralen Form nach (B.45) ausgedrückt und auf die Matrixdarstellung übergegangen. Der Drall eines Massenelements  $dm$  bez. des körperfesten Punktes B lautet somit:

$$\mathbf{L}_1 = \int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (\text{B.54})$$

Mit der Geschwindigkeit  $\dot{r}$  des Punktes  $dm$  nach (B.43) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}}(\dot{\mathbf{r}}_B + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \boldsymbol{\eta}) dm \\ &= \underbrace{\int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \dot{\mathbf{r}}_B dm}_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_C \dot{\mathbf{r}}_{Bm}} + \underbrace{\int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \boldsymbol{\eta} dm}_{\mathbf{J}_B \boldsymbol{\omega}_B}. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Dem zweiten Summanden aus Gleichung (B.55) kommt eine besondere Bedeutung zu, denn er kann unter Verwendung der Definition des Trägheitstensors (B.60) gemäß Abschnitt B.5.3 auch als  $\mathbf{J}_B \boldsymbol{\omega}_B$  geschrieben werden.

Entsprechend lautet der Drehimpuls nach (B.55):

$$\mathbf{L}_1 = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_C \dot{\mathbf{r}}_{Bm} + \mathbf{J}_B \boldsymbol{\omega}_B. \quad (\text{B.56})$$

Der erste Term  $m \tilde{\boldsymbol{\eta}}_C \dot{\mathbf{r}}_B$  verschwindet in den folgenden Fällen:

- Der Bezugspunkt B liegt im Schwerpunkt C, d. h.  $\boldsymbol{\eta}_C = \mathbf{0}$ .
- Der Bezugspunkt B ist in Ruhe, d. h.  $\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0}$ .

Der Drall bezüglich des Körperpunktes B lautet dann:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_B \boldsymbol{\omega}_B \quad \text{für } B = C \text{ bzw. } \dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{0}. \quad (\text{B.57})$$

### B.5.3 Trägheitstensor

Die Berechnung des Dralls bezüglich des körperfesten Punktes B führt auf das Integral  $\int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \boldsymbol{\eta} dm$  hin, gemäß Gleichung (B.55). Aufgrund des Anti-Kommutativgesetzes [Pap96]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\omega}_B &= -\boldsymbol{\omega}_B \times \boldsymbol{\eta} \quad \text{bzw.} \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega}_B &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

kann im zweiten Summanden aus Gleichung (B.55) die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_B$  als Faktor nach rechts herausgelöst werden:

$$\int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \boldsymbol{\eta}}_{-\tilde{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega}_B} dm = - \int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\boldsymbol{\eta}} dm \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B. \quad (\text{B.59})$$

Der Ausdruck:

$$\mathbf{J}_B = - \int_m \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\boldsymbol{\eta}} dm \quad (\text{B.60})$$

wird als Trägheitstensor bezeichnet und ist noch an kein Koordinatensystem gebunden. Häufig ist die Darstellung mit den zeitlich konstanten Koordinaten:

$${}^1\boldsymbol{\eta} = ({}^1\eta_x \ {}^1\eta_y \ {}^1\eta_z)^T \quad (\text{B.61})$$

des Vektors im körperfesten System  $\mathcal{K}_1$  günstig. Der Vorteil liegt in den zeitlich konstanten Koordinaten des Trägheitstensors in diesem System, also:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{J}_B &= - \int_m {}^1\tilde{\boldsymbol{\eta}} {}^1\tilde{\boldsymbol{\eta}} dm \\ &= - \int_m \begin{bmatrix} 0 & -\eta_z & \eta_y \\ \eta_z & 0 & -\eta_x \\ -\eta_y & \eta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\eta_z & \eta_y \\ \eta_z & 0 & -\eta_x \\ -\eta_y & \eta_x & 0 \end{bmatrix} dm \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

bzw.:

$$\begin{bmatrix} J_{B_{xx}} & J_{B_{xy}} & J_{B_{xz}} \\ J_{B_{xy}} & J_{B_{yy}} & J_{B_{yz}} \\ J_{B_{xz}} & J_{B_{yz}} & J_{B_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (\eta_y^2 + \eta_z^2) dm & - \int \eta_x \eta_y dm & - \int \eta_x \eta_z dm \\ - \int \eta_x \eta_y dm & \int (\eta_x^2 + \eta_z^2) dm & - \int \eta_y \eta_z dm \\ - \int \eta_x \eta_z dm & - \int \eta_y \eta_z dm & \int (\eta_x^2 + \eta_y^2) dm \end{bmatrix}. \quad (\text{B.63})$$

Für andere Systeme muss folglich eine Transformation der Tensorkoordinaten bzw. bei Wechsel des Bezugspunktes der Satz von Steiner angewendet werden.

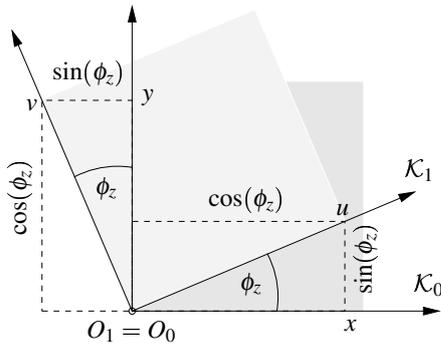
Der Trägheitstensor selbst ist symmetrisch, folglich gilt:

$$\mathbf{J}_B = \mathbf{J}_B^T. \quad (\text{B.64})$$

Er ist jedoch nicht orthogonal wie die Transformationsmatrizen aus Abschnitt B.3.1. Die Elemente der Hauptdiagonalen  $J_{B_{xx}}, J_{B_{yy}}, J_{B_{zz}}$  werden als *Massenträgheitsmomente* (Drehmassen) bezeichnet, während die Nebenelemente  $J_{B_{xy}}, J_{B_{xz}}, J_{B_{yz}}$  als *Deviationsmomente* (Kippmassen) bezeichnet werden. Es gelten die Dreiecksungleichungen:

$$J_{B_{xx}} + J_{B_{yy}} \geq J_{B_{zz}}, \quad J_{B_{yy}} + J_{B_{zz}} \geq J_{B_{xx}}, \quad J_{B_{zz}} + J_{B_{xx}} \geq J_{B_{yy}}. \quad (\text{B.65})$$

Die Bedeutung der Ungleichungen liegt in der Möglichkeit der plausiblen Überprüfung von berechneten bzw. nach Abschnitt 3.7 identifizierten Trägheitsmomenten.



**Abbildung B.4:** Transformation durch Drehung des Koordinatensystems

**Transformation des Trägheitstensors bei Rotation:** Der Trägheitstensor lässt sich generell durch eine Koordinatentransformation in beliebigen Bezugssystemen darstellen. Die Transformation bei Rotation selbst kann auf zweierlei Wegen geschehen.

Der erste und offensichtliche Weg geht über die Definition der Trägheits- und Deviationsmomente von Gleichung (B.63) im körperfesten System  $\mathcal{K}_1$  des Rotors:

$$\begin{bmatrix} J_{uu} & J_{uv} & J_{uw} \\ J_{uv} & J_{vv} & J_{vw} \\ J_{uw} & J_{vw} & J_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (v^2 + w^2) dm & - \int uv dm & - \int uw dm \\ - \int uv dm & \int (u^2 + w^2) dm & - \int vw dm \\ - \int uw dm & - \int vw dm & \int (u^2 + v^2) dm \end{bmatrix} \quad (\text{B.66})$$

und seinen Koordinaten  $u, v, w$ . Gesucht sind seine Koordinaten im Hauptachsensystem  $\mathcal{K}_0$  des Stators in seinen Koordinaten  $x, y, z$ . Dieser Weg ist äquivalent der Transformation der Flächenträgheitsmomente aus [GH91, S.149].

Genau genommen handelt es sich dabei um eine Drehung des Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$  des Rotors um  $\phi_z$  gegenüber dem Ausgangssystem des Stators  $\mathcal{K}_0$ , Abbildung B.4. Hierbei sind die Rotationsachsen  $z$  und  $w$  gleich. Dies bedeutet eine Verdrehung der Bezugssysteme, d.h. eine Änderung der Orientierung und *keine* Änderung des Koordinatenursprungs ( $B=O_0$ ). Das System  $\mathcal{K}_1$  des Rotors wird durch:

$$x = u \cos(\phi) - v \sin(\phi) \quad (\text{B.67a})$$

$$y = u \sin(\phi) + v \cos(\phi) \quad (\text{B.67b})$$

$$z = w \quad (\text{B.67c})$$

in das Hauptachsensystem  $\mathcal{K}_0$  des Stators überführt. Die transformierten Koordinaten (B.67) werden in den Trägheitstensor (B.66) eingesetzt und aufgelöst:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \\ &= \int ((u \cos(\phi) - v \sin(\phi))^2 + w^2) dm \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Der zweite Weg geht über die Ähnlichkeitstransformation orthogonaler Matrizen, [ZF84, DD94]. Er ist für die *on-line*-Berechnung der Transformation geeignet, da keine Integrale gelöst werden müssen, auch liegt meist der Trägheitstensor bereits in seiner integrierten Fassung vor.

Allgemein ist der Trägheitstensor  $J$  ein Tensor 2. Stufe  $D$  und kann als ein Operator angesehen werden, der einen Vektor  $r$  in einen anderen Vektor  $s$  linear abbildet:

$$s = D r . \quad (\text{B.69})$$

Es wird angenommen, dass der Tensor  $D$  symmetrisch ist. Die Elemente des Tensors  ${}^0D$  im System  $\mathcal{K}_0$  können mit Hilfe der Transformationsmatrix  ${}^{01}T$  in die Elemente  ${}^1D$  in ein zweites System  $\mathcal{K}_1$  transformiert werden. Für die Herleitung der Transformationsbeziehung wird von der in  $\mathcal{K}_0$  dargestellten Vektorabbildung:

$${}^0s = {}^0D {}^0r \quad (\text{B.70})$$

ausgegangen. Im System  $\mathcal{K}_1$  gilt weiterhin:

$${}^1s = {}^1D {}^1r \quad (\text{B.71})$$

bzw.:

$${}^1r = {}^1D^T {}^1s \quad (\text{B.72})$$

mit dem bereits bekannten Tensor  ${}^1D$ , dessen Koordinaten in dem Systems  $\mathcal{K}_0$  gesucht sind.

Mit den beiden Transformationen der Vektoren  $s$  und  $r$  aus dem System  $\mathcal{K}_1$  in das System  $\mathcal{K}_0$ :

$${}^0s = {}^{01}T {}^1s \quad (\text{B.73})$$

$${}^0r = {}^{01}T {}^1r \quad (\text{B.74})$$

lautet Gleichung (B.70) nun:

$$\begin{aligned} {}^{01}T {}^1s &= {}^0D {}^{01}T {}^1r \\ {}^0D^T {}^{01}T {}^1s &= {}^{01}T {}^1r, \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

wobei aus der Symmetrie des Tensors  $D = D^T$  folgt:

$$\begin{aligned} {}^0D {}^{01}T {}^1s &= {}^{01}T {}^1r \\ {}^{01}T^T {}^0D {}^{01}T {}^1s &= {}^1r. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen Gleichung (B.76) und (B.72) ergibt:

$${}^{01}\mathbf{T}^T {}^0\mathbf{D} {}^{01}\mathbf{T} = {}^1\mathbf{D}^T. \quad (\text{B.77})$$

Nach den Regeln für das Transponieren von Matrixprodukten gilt nach [ZF84]:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \dots \mathbf{N})^T = \mathbf{N}^T \dots \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (\text{B.78})$$

womit (B.77) nun geschrieben werden kann als:

$${}^{01}\mathbf{T} {}^0\mathbf{D}^T {}^{01}\mathbf{T}^T = {}^1\mathbf{D}. \quad (\text{B.79})$$

Aufgrund der Symmetrie des Tensors  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  lautet die vollständige Transformationsvorschrift für einen Tensor 2. Stufe:

$${}^{01}\mathbf{T} {}^0\mathbf{D} {}^{01}\mathbf{T}^T = {}^1\mathbf{D}. \quad (\text{B.80})$$

Es handelt sich um eine Ähnlichkeitstransformation, ausgedrückt in zwei verschiedenen Koordinatensystemen. Folglich besitzen ähnliche Matrizen gleiche Determinanten:

$$\det \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^T = \det \mathbf{D}. \quad (\text{B.81})$$

Durch Zusammenfassen der Gleichungen aus (B.67) erhält man die Transformationsmatrix:

$${}^{01}\mathbf{T} \stackrel{(\text{B.14})}{=} \mathbf{R}_z(\phi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.82})$$

Diese ist identisch mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z(\phi_z)$  (B.14) aus Abschnitt B.3.1. Dies ist bedingt durch dieselbe Drehung, die der Vektor aus Abschnitt B.3.1 und das Koordinatensystem aus diesem Abschnitt erfährt - es handelt sich also lediglich um zwei Betrachtungsweisen derselben Drehbewegung.

Mit dem Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_1$  des Rotors:

$${}^1\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} J_{uu} & J_{uv} & J_{uw} \\ J_{uv} & J_{vv} & J_{vw} \\ J_{uw} & J_{vw} & J_{ww} \end{bmatrix} \quad (\text{B.83})$$

kann die Transformation des Trägheitstensors in das Koordinatensystem des Stators  $\mathcal{K}_0$

gemäß (B.80) durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{J}_B(\phi_z) &= {}^{01}\mathbf{T}^1 \mathbf{J}_B {}^{01}\mathbf{T}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{uu} & J_{uv} & J_{uw} \\ J_{uv} & J_{vv} & J_{vw} \\ J_{uw} & J_{vw} & J_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & \sin(\phi_z) & 0 \\ -\sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.84})
 \end{aligned}$$

Unter Einbezug der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen erhält man die Trägheits-:

$$J_{xx} = \cos(\phi_z)^2 J_{uu} + \sin(\phi_z)^2 J_{vv} - \sin(2\phi_z) J_{uv} \quad (\text{B.85a})$$

$$J_{yy} = \sin(\phi_z)^2 J_{uu} + \cos(\phi_z)^2 J_{vv} + \sin(2\phi_z) J_{uv} \quad (\text{B.85b})$$

$$J_{zz} = J_{ww} \quad (\text{B.85c})$$

und Deviationsmomente:

$$J_{xy} = \frac{1}{2} \sin(2\phi_z) (J_{uu} - J_{vv}) + \cos(2\phi_z) J_{uv} \quad (\text{B.86a})$$

$$J_{xz} = \cos(\phi_z) J_{uw} - \sin(\phi_z) J_{vw} \quad (\text{B.86b})$$

$$J_{yz} = \sin(\phi_z) J_{uw} + \cos(\phi_z) J_{vw} \quad (\text{B.86c})$$

im Koordinatensystem  $\mathcal{K}_0$  des Stators.

### B.5.4 Drallsatz bzw. Momentensatz

Der Drallsatz bzw. Momentensatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Drallvektors bezüglich des Inertialsystems  $\mathcal{K}_0$  gleich dem resultierenden Moment  $\mathbf{M}_1$  der am freigeschnittenen Körper wirkenden äußeren Kräfte und Einzelmomente ist. Die Bezugspunkte für den Drall und das resultierende Moment, also B, müssen hierbei übereinstimmen. Für den gewählten körperfesten Bezugspunkt B gilt damit:

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \mathbf{M}_1. \quad (\text{B.87})$$

Das resultierende Moment der äußeren Kräfte  $\mathbf{M}_1$  bez. B setzt sich aus Momenten der Volumen-, der Oberflächen- und der Einzelkräfte sowie aus freien Einzelmomenten (Kräftepaaren) zusammen.

Die Auswertung des Drallsatzes (B.87) erfolgt nun für den Fall, dass für den Schwerpunktvektor  $\boldsymbol{\eta}_C \neq \mathbf{0}$  gilt und sich der Bezugspunkt in Bewegung befindet  $\dot{\mathbf{r}}_B \neq \mathbf{0}$ . Hierbei wird die

zeitliche Änderung des Drallvektors  $L_1$  relativ zum Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  gebildet. Dazu wird von der Integralform des Drallvektors (B.55) ausgegangen.

Die zeitliche Änderung von  $L_1$  relativ zum Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  wird hier unter Anwendung der Produktregel ausgewertet:

$$\begin{aligned}
 \frac{{}_0dL_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \int_m \tilde{\eta} dm + \int_m \tilde{\eta} \tilde{\omega}_B \eta dm \right) \\
 &= \underbrace{\int_m \dot{\tilde{\eta}} \dot{r}_B dm}_0 + \underbrace{\int_m \tilde{\eta} \ddot{r}_B dm}_{\tilde{\eta} m \ddot{r}_B} + \int_m \underbrace{{}_0d\tilde{\eta}}_0 \tilde{\omega}_B \eta dm \\
 &\quad + \int_m \tilde{\eta} \underbrace{{}_0d\tilde{\omega}_B}_0 \eta dm + \int_m \tilde{\eta} \tilde{\omega}_B \underbrace{{}_0d\tilde{\eta}}_0 dm.
 \end{aligned} \tag{B.88}$$

Der erste Summand aus Gleichung (B.88) entfällt unter der Annahme, dass der Schwerpunktvektor  $\tilde{\eta} = r_{BC}$  zeitlich konstant ist, während der zweite das Moment, hervorgerufen durch die Kraft  $m\ddot{r}_B$  mit dem Hebel  $r_{BC}$ , in bekannter Weise beschreibt. Der dritte Summand entfällt ebenfalls: Der Ausdruck  $\tilde{\omega} \eta$  bzw.  $\omega \times \eta$  entspricht der zeitlichen Änderung  ${}_0\dot{\eta}$ ; da die beiden Vektoren  ${}_0\dot{\eta}$  und  $\frac{{}_0d\tilde{\eta}}{dt}$  parallel sind, ist dieser Ausdruck aufgrund der Eigenschaften des Vektorproduktes gleich dem Nullvektor  $\mathbf{0}$ . Der vierte Summand kann aufgrund der Anti-Kommutativität auch als:

$$\int_m \tilde{\eta} \frac{{}_0d\tilde{\omega}_B}{dt} \eta dm = - \underbrace{\int_m \tilde{\eta} \dot{\tilde{\eta}} dm}_{J_B} \frac{{}_0d\tilde{\omega}_B}{dt} \tag{B.89}$$

geschrieben werden. Hierbei entspricht der Term  $-\int \tilde{\eta} \dot{\tilde{\eta}} dm$  der Definition des Trägheitstensors gemäß Gleichung (B.60). Bei der Umformung des fünften Summanden aus Gleichung (B.88) muss zuvor der Entwicklungssatz für dreifache Vektorprodukte<sup>1</sup> näher betrachtet werden. Entsprechend diesem kann der fünfte Summand als Skalarprodukt in Matrixschreibweise wie folgt geschrieben werden:

$$\tilde{\eta} \tilde{\omega} \frac{{}_0d\eta}{dt} = \omega \underbrace{\left( \eta^T \frac{{}_0d\eta}{dt} \right)}_0 - \frac{{}_0d\eta}{dt} (\omega^T \eta) \tag{B.90a}$$

<sup>1</sup> Der Entwicklungssatz für dreifache Vektorprodukte lautet:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  in der Vektorform bzw.  $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b})$  in der Matrixform.

bzw.:

$$\tilde{\omega} \tilde{\eta} \frac{{}_0d\eta}{dt} = \eta \left( \omega^T \frac{{}_0d\eta}{dt} \right) - \frac{{}_0d\eta}{dt} (\eta^T \omega) \quad (\text{B.90b})$$

wobei aufgrund der Distributivität gilt:

$$= \underbrace{\eta \left( \omega^T \frac{{}_0d\eta}{dt} \right)}_0 - \frac{{}_0d\eta}{dt} (\omega^T \eta) . \quad (\text{B.90c})$$

Hierin entfallen die beiden Minuenden. Der Minuend aus Gleichung (B.90a) kann auch geschrieben werden als  $\omega(\eta^T \omega \eta)$ . Unter Anwendung der Distributivität gilt  $-\omega(\eta^T \eta \omega)$ , wobei die beiden Vektoren  $\eta$  parallel sind und das Skalarprodukt folglich 0 ist. Gleiches gilt für den Minuenden aus Gleichung (B.90b), für die Geschwindigkeit  $\frac{{}_0d\eta}{dt}$  wird  $\tilde{\omega} \eta$  eingesetzt, wodurch auf Grund der Parallelität der beiden Winkelgeschwindigkeiten das Skalarprodukt wiederum 0 ist. Folglich gilt:

$$\tilde{\eta} \tilde{\omega} \frac{{}_0d\eta}{dt} = \tilde{\omega} \tilde{\eta} \frac{{}_0d\eta}{dt} . \quad (\text{B.91})$$

Für den fünften Summanden aus Gleichung (B.88) bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \int_m \tilde{\eta} \tilde{\omega}_B \frac{{}_0d\tilde{\eta}}{dt} dm &= \int_m \tilde{\omega}_B \tilde{\eta} \underbrace{\frac{{}_0d\tilde{\eta}}{dt}}_{\tilde{\omega}_B \tilde{\eta}} dm \\ &= \tilde{\omega}_B \int_m \tilde{\eta} \tilde{\omega}_B \tilde{\eta} dm \\ &= \tilde{\omega}_B \underbrace{\left( - \int_m \tilde{\eta} \tilde{\eta} dm \right)}_{J_B \tilde{\omega}_B} \tilde{\omega}_B . \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

Somit lautet der Momenten- bzw. Drallsatz:

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{r}}_{BC} m \ddot{\mathbf{r}}_B + \mathbf{J}_B \tilde{\omega}_B + \tilde{\omega}_B \mathbf{J}_B \tilde{\omega}_B \quad (\text{B.93})$$

bzw. in Vektorform:

$$= \mathbf{r}_{BC} \times m \ddot{\mathbf{r}}_B + \mathbf{J}_B \tilde{\omega}_B + \omega_B \times \mathbf{J}_B \omega_B \quad (\text{B.94})$$

und Skalarform:

$$M_x = r_{BC_y} m \ddot{z} - r_{BC_z} m \ddot{y} + J_{xx} \ddot{\phi}_x + J_{xy} \ddot{\phi}_y + J_{xz} \ddot{\phi}_z + J_{zy} \dot{\phi}_y^2 - J_{yz} \dot{\phi}_z^2 + J_{zx} \dot{\phi}_y \dot{\phi}_x + J_{zz} \dot{\phi}_y \dot{\phi}_z - J_{yx} \dot{\phi}_z \dot{\phi}_x - J_{yy} \dot{\phi}_z \dot{\phi}_y \quad (\text{B.95a})$$

$$M_y = r_{BC_z} m \ddot{x} - r_{BC_x} m \ddot{z} + J_{yx} \ddot{\phi}_x + J_{yy} \ddot{\phi}_y + J_{yz} \ddot{\phi}_z + J_{xz} \dot{\phi}_z^2 - J_{zx} \dot{\phi}_x^2 + J_{xx} \dot{\phi}_z \dot{\phi}_x + J_{xy} \dot{\phi}_z \dot{\phi}_y - J_{zy} \dot{\phi}_x \dot{\phi}_y - J_{zz} \dot{\phi}_x \dot{\phi}_z \quad (\text{B.95b})$$

$$M_z = r_{BC_x} m \ddot{y} - r_{BC_y} m \ddot{x} + J_{zx} \ddot{\phi}_x + J_{zy} \ddot{\phi}_y + J_{zz} \ddot{\phi}_z + J_{yx} \dot{\phi}_x^2 - J_{xy} \dot{\phi}_y^2 + J_{yy} \dot{\phi}_x \dot{\phi}_y + J_{yz} \dot{\phi}_x \dot{\phi}_z - J_{xx} \dot{\phi}_y \dot{\phi}_x - J_{xz} \dot{\phi}_y \dot{\phi}_z \quad (\text{B.95c})$$

in den Koordinaten von  $\mathcal{K}_0$  (Koordinatenindex weggelassen). Dieses Gleichungssystem beschreibt die vollständige Koppelung zwischen den Beschleunigungen, den Geschwindigkeiten und den resultierenden Momenten.

### B.5.5 Massenmatrix

In den vorhergehenden Sektionen wurde der Bezugspunkt B eingeführt, welcher durch seine Lage:

$$\mathbf{r}_B = (x_B \ y_B \ z_B)^T \quad (\text{B.96})$$

und Orientierung:

$$\boldsymbol{\phi}_B = (\phi_x \ \phi_y \ \phi_z)^T \quad (\text{B.97})$$

im Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$  definiert wird.

Werden die Koordinaten nach Gleichung (B.96) und (B.97) zu einem verallgemeinerten Lagevektor  $\mathbf{q}_B$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_B &= (\mathbf{r}_B \ \boldsymbol{\phi}_B)^T \\ &= (x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z)^T \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

und die Masse  $m$ , der Schwerpunktvektor  $\mathbf{r}_{BC}$  und das Massenträgheitsmoment  $\mathbf{J}_B$  zur Massenmatrix  $\mathbf{M}_B$  sowie der Kraft- und Momentenvektor  $(F_x \ F_y \ F_z)^T$  bzw.  $(M_x \ M_y \ M_z)^T$  zu einem verallgemeinerten Kraft- und Momentenvektor  $\mathbf{Q}_B$ :

$$\mathbf{Q}_B = (F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z)^T \quad (\text{B.99})$$

zusammengefasst, kann die Bewegungsgleichung durch:

$$\mathbf{Q}_B = \mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_B \quad (\text{B.100})$$

beschrieben werden. Hierbei beschreibt die Massenmatrix  $\mathbf{M}_B$  die Koppelung zwischen den Beschleunigungen in den generalisierten Koordinaten und deren Kräfte und Momente im Bezugspunkt B. Für die verallgemeinerten Koordinaten wird hier, wie in der Mechanik üblich, der Vektor  $\mathbf{q}_B$  verwendet. Gleiches gilt auch für den generalisierten Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{q}}_B$  bzw. den generalisierten Kraft- und Momentenvektor  $\mathbf{Q}_B$ . Diese Notation vereinfacht die Unterscheidung zu den Koordinaten bzw. der in der Regelungstechnik gebräuchlichen Bezeichnung für den Zustandsvektor.

Die Gleichungssysteme für den Impulssatz (B.52) und Drallsatz (B.95) sind nur bezüglich seiner Beschleunigungsterme linear. Die Geschwindigkeitsterme der Rotation gehen nichtlinear ein.

Lediglich der linear abhängige Teil des Impulssatzes (B.52) und Drallsatzes (B.95) lässt sich mit Hilfe des Beschleunigungsvektors:

$$\ddot{\mathbf{q}}_B = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_B \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} & \ddot{\phi}_x & \ddot{\phi}_y & \ddot{\phi}_z \end{pmatrix}^T \quad (\text{B.101})$$

der generalisierten Koordinaten in eine Matrix-Notation bringen:

$${}^0\mathbf{Q}_B = {}^0\mathbf{M}_B {}^0\mathbf{q}_B$$

$${}^0\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & m r_{BC_z} & -m r_{BC_y} \\ 0 & m & 0 & -m r_{BC_z} & 0 & m r_{BC_x} \\ 0 & 0 & m & m r_{BC_y} & -m r_{BC_x} & 0 \\ 0 & -m r_{BC_z} & m r_{BC_y} & J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ m r_{BC_z} & 0 & -m r_{BC_x} & J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ -m r_{BC_y} & m r_{BC_x} & 0 & J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} {}^0\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_B \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_B \end{pmatrix}. \quad (\text{B.102})$$

Es handelt sich um eine symmetrische ( $6 \times 6$ ) Massenmatrix. Diese Massenmatrix  $\mathbf{M}_B$  ist prinzipiell unabhängig davon, ob es sich um einen Rundtisch oder um eine Linearführung handelt, da es sich um Kräfte und Momente handelt, welche an ein Koordinatensystem gebunden sind, d.h. ungebunden von konstruktiven Gegebenheiten. Somit beschreibt (B.102) die Kinetik eines nicht rotierenden Körpers, wie es z. B. bei Linearführungen der Fall ist.

### B.5.6 Gyroskopische Matrix

Im Impuls- und (B.52) und Drallsatz (B.95) sind neben den Beschleunigungstermen auch nichtlineare Geschwindigkeitsterme enthalten, d. h. die Geschwindigkeiten sind miteinander verknüpft. Für rotierende Systeme, wie den Rundtisch, müssen diese Kreiselsterme mit erfasst werden, d. h. die Bewegungsgleichung (B.100) muss folglich um die Kreiselmatrix  $G$  erweitert werden:

$$Q_B = M_B \ddot{q}_B + G_B \dot{q}_B \quad (\text{B.103})$$

welche jedoch eine linearisierte Beschreibung darstellt und starre Körper voraussetzt.

Durch den Ansatz der Einführung eines Vektors der verknüpften Geschwindigkeiten:

$$\dot{\psi}_B = \left( \dot{\phi}_{B_x}^2, \dot{\phi}_{B_y}^2, \dot{\phi}_{B_z}^2, \dot{\phi}_{B_y} \dot{\phi}_{B_z}, \dot{\phi}_{B_z} \dot{\phi}_{B_x}, \dot{\phi}_{B_x} \dot{\phi}_{B_y} \right)^T \quad (\text{B.104})$$

kann der Impuls- und Drallsatz jedoch linearisiert dargestellt werden. Der eingeführte Vektor  $\dot{\psi}_B$  übernimmt die Funktion des generalisierten Geschwindigkeitsvektors  $\dot{q}_B$  aus Gleichung (B.103).

Mit Hilfe des definierten Geschwindigkeitsvektors (B.104) kann der Impuls- (B.52) und Drallsatz (B.95) zur  $(6 \times 6)$  Kreiselmatrix  $G$  zusammengefasst werden:

$${}^0Q_B = {}^0G_B {}^0\dot{\psi}_B$$

$${}^0 \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -mr_{BC_x} & -mr_{BC_x} & 0 & mr_{BC_z} & mr_{BC_y} \\ -mr_{BC_y} & 0 & -mr_{BC_y} & mr_{BC_z} & 0 & mr_{BC_x} \\ -mr_{BC_z} & -mr_{BC_z} & 0 & mr_{BC_y} & mr_{BC_x} & 0 \\ 0 & J_{zy} & -J_{yz} & J_{zz} - J_{yy} & -J_{yx} & J_{zx} \\ -J_{zx} & 0 & J_{xz} & J_{xy} & J_{xx} - J_{zz} & -J_{zy} \\ J_{yx} & -J_{xy} & 0 & -J_{xz} & J_{yz} & J_{yy} - J_{xx} \end{bmatrix} {}^0\dot{\psi}_B \quad (\text{B.105})$$

und die Bewegungsgleichung (B.103) lautet entsprechend:

$$Q_B = M_B \ddot{q}_B + G_B \dot{\psi}_B. \quad (\text{B.106})$$



# C MOORE-PENROSE-Inverse

## C.1 Definition der MOORE-PENROSE Inverse

1920 veröffentlichte E.H. Moore in einer kurzen Zusammenfassung erstmalig die Definition einer für jede reelle Matrix existierenden und eindeutig bestimmten verallgemeinerten Inversen, welche er *general reciprocal* nannte [Moo20]. Sie blieb jedoch lange Zeit unbeachtet, ebenso wie seine ausführliche Darstellung seiner Ergebnisse, die 1935 nach seinem Tod veröffentlicht wurden, [Moo35]. Erst zwei Arbeiten von Penrose aus den Jahren 1955 und 1956 leiteten die Wiederentdeckung und rasche Weiterentwicklung der Theorie der verallgemeinerten Inversen ein, [Pen55, Pen56]. In den 60er und 70er Jahren erschien eine Vielzahl von Veröffentlichungen zur Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Inversen, so u. a. [RM71, BI03].

Die bekannteste Definition der MOORE-PENROSE Inverse beruht auf den so genannten *Penrose-Gleichungen*, [Pen55]:

**Definition C.1.1** Die eindeutige, reelle,  $(m \times n)$  große Matrix  $X \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$  ist die Lösung von:

$$AXA = A \tag{C.1}$$

$$XAX = X \tag{C.2}$$

$$(AX)^T = AX \tag{C.3}$$

$$(XA)^T = XA \tag{C.4}$$

für eine beliebige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$  und wird die MOORE-PENROSE-Inverse von  $A$  genannt und mit  $A^+$  bezeichnet.

Aus einer Reihe von äquivalenter Definition der MOORE-PENROSE Inverse seien hier nur die Definition von Moore und eine weitere Definition von Penrose aufgeführt:

**Satz C.1.1**  $X$  heißt gemäß [Moo20] MOORE-PENROSE Inverse von  $A$  genau dann, wenn

- $AXA = A$  ist,
- die Zeilen von  $X$  Linearkombinationen der Zeilen von  $A^T$  und
- die Spalten von  $X$  Linearkombinationen der Spalten von  $A^T$  sind.

und:

**Satz C.1.2** in [Pen56]:  $x = A^+ b$  ist die Kleinste-Quadrate-Lösung von  $Ax = b$  mit minimaler euklidischer Norm (bestapproximierte Lösung).

MOORE-PENROSE Inverse komplexer Matrizen lassen sich analog erklären, ebenso Matrizen, welche nur einen Teil obiger Definition erfüllen und eigene Klassen von verallgemeinerten Inversen bilden, [Pen55, RM71].

## C.2 Eigenschaften der MOORE-PENROSE Inverse

Einige Eigenschaften herkömmlicher Inversen regulärer Matrizen gelten auch für die MOORE-PENROSE Inversen und lassen sich aus der Definition erhalten. So gilt:

$$(A^+)^+ = A \quad (\text{C.5})$$

$$(A^T)^+ = (A^+)^T \quad (\text{C.6})$$

$$(AA^T)^+ = A^{+T} A^+ \quad (\text{C.7})$$

$$(A^T A)^+ = A^+ A^{+T} \quad (\text{C.8})$$

$$A^+ = A^T (AA^T)^+ = (A^T A)^+ A^T. \quad (\text{C.9})$$

So ist z.B. die Transposition und Pseudo-Inversion nach Gleichung (C.7) vertauschbar und die MOORE-PENROSE Inverse verhält sich wie eine gewöhnliche Inverse nach Gleichung (C.8).

Bezeichnet man den Rang einer reellen Matrix  $A$  mit  $\text{rg}(A)$ , so gilt weiterhin:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^+) = \text{rg}(AA^+) = \text{rg}(A^+ A). \quad (\text{C.10})$$

Andere Eigenschaften herkömmlicher Inversen gelten für die MOORE-PENROSE Inverse dagegen nicht, beispielsweise gibt es die Matrizen  $A$  und  $B$  mit:

$$(AB)^+ \neq B^+ A^+ \quad (\text{C.11})$$

$$AA^+ \neq A^+ A. \quad (\text{C.12})$$

## C.3 MOORE-PENROSE Inverse einiger spezieller Matrizen

In vielen Fällen benötigt man jedoch nicht die allgemeine MOORE-PENROSE Inverse, sondern zwei Spezialfälle von ihr.

Der ein Fall besteht darin, dass die  $(m \times n)$  Matrix  $\mathbf{A}$  *spaltenregulär* ist, d. h. die Spaltenzahl  $n$  ist höchstens gleich der Zeilenzahl  $n \leq m$  und man somit eine "stehende Matrix" vor sich hat. Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat dabei den Höchststrang  $n$ . Dann ist:

$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m \times n)} \text{ und } \text{rg}(\mathbf{A}) = n) \Rightarrow \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (\text{C.13})$$

und es gilt:

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (\text{C.14})$$

weshalb Gleichung (C.13) auch als Links-Inverse bezeichnet wird. Im Allgemeinen folgt jedoch nicht  $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \neq \mathbf{I}$ .

Der andere häufig benötigte Fall der MOORE-PENROSE Inversen besteht darin, dass die  $(m \times n)$  Matrix  $\mathbf{A}$  *zeilenregulär* ist, d. h. die Zeilen  $m$  sind höchstens gleich der Spalten  $m \leq n$  und man somit eine "liegende Matrix" vor sich hat. Dann ist:

$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m \times n)} \text{ und } \text{rg}(\mathbf{A}) = m) \Rightarrow \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (\text{C.15})$$

und es gilt:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{I} \quad (\text{C.16})$$

und wird entsprechend als Rechts-Inverse bezeichnet.

Ist die Matrix  $\mathbf{A}$  spalten- als auch zeilenregulär, d. h. es gilt  $m = n$ , dann geht die MOORE-PENROSE Inverse in die übliche Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  über:

$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n \times n)} \text{ und } \text{rg}(\mathbf{A}) = n) \Rightarrow \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{C.17})$$

d. h. die Inverse einer quadratischen  $(n \times n)$  Matrix ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Inversen.

## C.4 Berechnung der MOORE-PENROSE Inverse

Aus der Literatur sind eine Vielzahl von Verfahren zur Berechnung bekannt. Auch vergleichende Untersuchungen wurden bereits veröffentlicht, [SST72a, SST72b, Zie77, Zie83].

Ein möglicher Ansatz für direkte Verfahren besteht darin, die Matrix  $\mathbf{A}$  in einfachere Form zu transformieren und anschließend die MOORE-PENROSE Inverse zu bestimmen. Als Transformationsmatrizen sind hierbei elementare, orthogonale oder Permutationsmatrizen denkbar. In [Zie77] sind 10 derartige Standardformen und die zugehörige Darstellung der MOORE-PENROSE Inverse angegeben. Die Verfahren, die auf der Vollrangzerlegung beruhen, gehen auf derartige Transformationen zurück. Bekannte Vollrangzerlegungen sind

## C MOORE-PENROSE-Inverse

die  $LU$ -,  $QR$ - und Singulärwertzerlegung (SVD). Einen guten Überblick über die Verfahren speziell zur Berechnung der MOORE-PENROSE Inverse sind in [Opi95, Bjö96, LH95] zu finden.

## D Das Pseudo-Rausch-Binär-Signal

Ein binäres stochastisches Signal, im Folgenden wegen der im Englischen üblichen Abkürzung RBS<sup>1</sup> als Rausch-Binär-Signal bezeichnet, ist dadurch gekennzeichnet, dass es zwei Zustände von  $x(t)$  bei  $+a$  und  $-a$  gibt und der Wechsel von einem zum anderen Zustand zu regellosen Zeiten stattfindet. Praktische Bedeutung jedoch hat das diskrete Rausch-Binär-Signal DRBS<sup>2</sup>. Hier findet der Wechsel des Vorzeichens zu diskreten Zeitpunkten  $kT$  statt.

Die zeitdiskrete Autokorrelationsfunktion (AKF) eines DRB-Signals besitzt die für den nachfolgend beschriebenen Identifikationsvorgang wichtige Eigenschaft, dass für  $|\tau| > 0$  sowohl positive wie auch negative Produkte der Signalwerte gleichhäufig auftreten:

$$\Phi_{xx}(\tau) = \begin{cases} a^2 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{für } |\tau| > 0. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Die Leistungsdichte erfolgt durch FOURIER-Transformation der AKF:

$$S_{xx}(\omega) = a^2 \quad \text{für } 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T}. \quad (\text{D.2})$$

Damit besitzt das diskrete Rausch-Binär-Signal dieselbe Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichte wie diskretes Rauschen mit beliebiger Amplitudenverteilung, [Ise92a].

Gleichung (D.1) und (D.2) gelten jedoch nur für unendlich große Messzeiten. Daher werden periodische binäre Signalfolgen, so genannte Pseudo-Rausch-Binär-Signale PRBS<sup>3</sup> eingesetzt. Sie sind deterministisch und besitzen fast dieselbe Autokorrelationsfunktion, [Sch60, Sch87]. Pseudo-Rausch-Binär-Signale werden in vielen Bereichen der Digitaltechnik eingesetzt, z. B. Kryptologie, CDMA Code Generation u. a.

Ein einfacher Weg um PRBS Signale zu erzeugen, ist die Verwendung eines rückgekoppelten Schieberegisters<sup>4</sup>, [Sch60]. Abbildung D.1 zeigt ein rückgekoppeltes, 5-stufiges Schieberegister. Die Rückkoppelung wird über eine Antivalenz Verknüpfung der Registerausgänge erreicht. Der Vorteil der Darstellung als Schieberegister ist, dass sie sich leicht in Software implementieren lässt.

---

<sup>1</sup>random binary signal

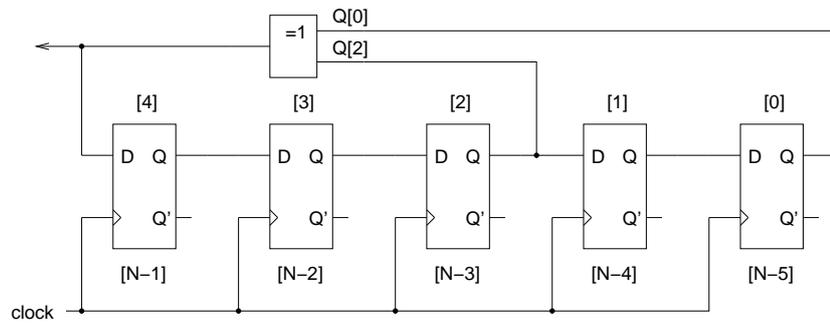
<sup>2</sup>discrete random binary signal

<sup>3</sup>pseudo random binary signal

<sup>4</sup>LFSR: linear feedback shift register

## D Das Pseudo-Rausch-Binär-Signal

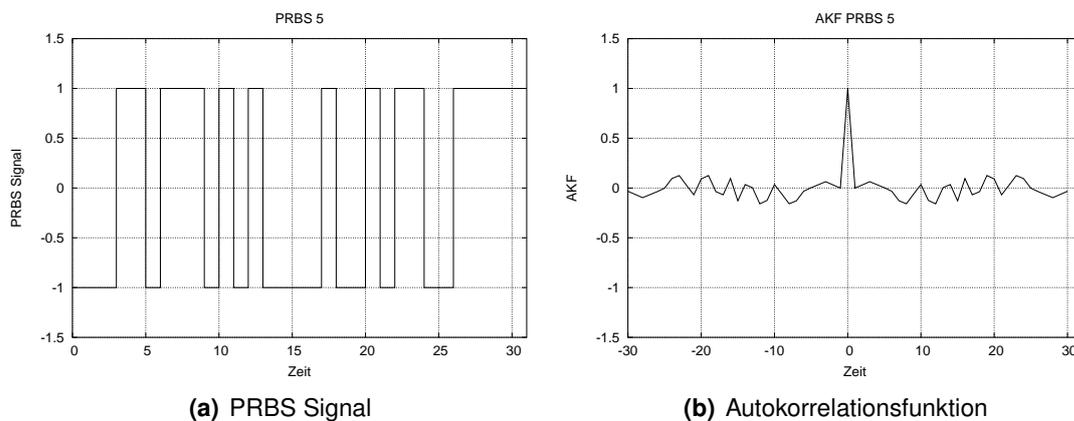
**Abbildung D.1:** 5-Bit rückgekoppeltes Schieberegister zur Erzeugung eines PRBS Signals



Bei korrekter Auswahl der rückgekoppelten Ausgänge der Schieberegister beträgt die erzeugte Länge des Signals  $(2^{n_{LFSB}} - 1)$  ohne Wiederholung, wobei  $n_{LFSB}$  die Anzahl der Schieberegister bezeichnet. Eine solche Sequenz wird auch als *maximal-length sequence* bezeichnet.

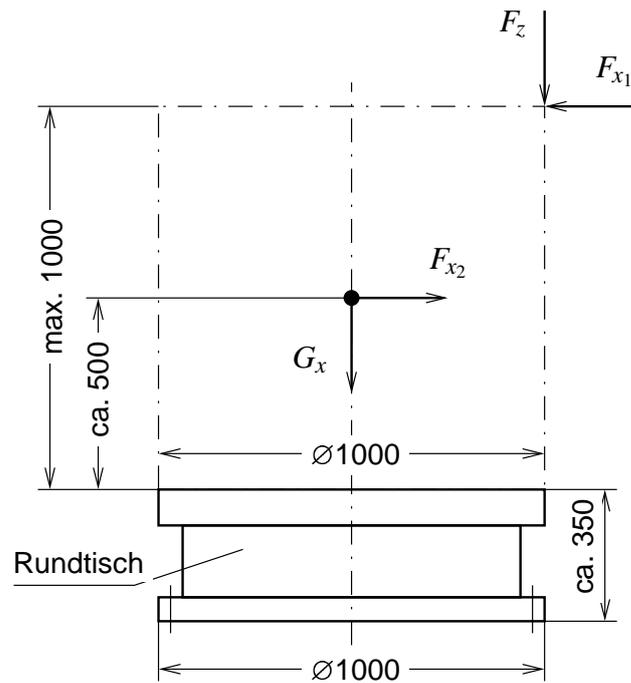
Die Kombination der verknüpften Register Ausgänge erfolgt u. a. nach Polynom-Modulo-Operationen. Sie sind als Tabellen angegeben [Xil96, Xil01], mit bis zu  $n_{LFSB} = 168$  Schieberegistern, was einer Sequenz mit einer Länge von  $3.741441^{50}$  entspricht.

Abbildung D.2(a) zeigt exemplarisch das generierte PRBS Signal eines 5-stufigen Schieberegisters und D.2(b) dessen AKF.



**Abbildung D.2:** PRBS Signal und AKF eines 5-stufigen Schieberegisters

# **E Industrie-Anforderung**



max. Werkstückbelastung zentrisch	$G_x$ [kg]	6000
Drehzahlbereich	[ $\text{min}^{-1}$ ]	0–400
radiale Fliehkraft (Schwerpunkt außer Mitte)	$F_{x_2}$ [kN]	10
max. senkrechte Bearbeitungskräfte (z. B. Bohren)	$F_z$ [kN]	20
max. seitliche Bearbeitungskraft (z. B. Fräsen/Bohren)	$F_{x_1}$ [kN]	12,5
max. Drehmoment für die Bearbeitung	[N m]	6000
max. Trägheitsmoment des Werkstückes	[ $\text{kg m}^2$ ]	700
<u>Genauigkeiten:</u>		
am Tisch: Rundlauf	[ $\mu\text{m}$ ]	2
Planschlag	[ $\mu\text{m}$ ]	2
am Werkstück: Rundlauf	[ $\mu\text{m}$ ]	2
Zylindrizität	[ $\mu\text{m}$ ]	2
<u>Lagersteife:</u>		
bei vertikaler Belastung	[ $\text{kN}/\mu\text{m}$ ]	20
bei radialer Belastung	[ $\text{kN}/\mu\text{m}$ ]	10
Positioniergenauigkeit	[ $''$ ]	$\pm 0,5$

**Abbildung E.1:** Anfrage eines Industrieunternehmens zu einem magnetisch gelagerten Rundtisch

# Literaturverzeichnis

- [Air] AIREX CORPORATION. USA, <http://www.airex.com/>.
- [Ard99] ARDUINI, DANIELE: *Real-Time Linux in Robotics and Control Systems Research: A Practical Experience*, 1999.
- [Arn95] ARNOLD, WALTER: *Beitrag zu Entwicklung und Einsatz aktiv magnetgelagerter Hochgeschwindigkeits-Frässpindeln*. Doktorarbeit, TH Darmstadt, 1995.
- [BDGM99] BIANCHI, E., L. DOZIO, G. L. GHIRINGHELLI und P. MANTEGAZZA: *Complex Control System, Applications of DIAPM-RTAI at DIAPM*. In: *Realtime Linux Workshop*, Vienna, 1999.
- [BF92] BODEN, K. und JOHAN K. FREMEREY: *Industrial Realization of the "SYSTEM KFA-JÜLICH" Permanent Magnet Bearing Lines*. In: *Magnetic Bearings, Magnetic Drives and Dry Gas Seals Conference MAG'92*. Forschungszentrum Jülich, July 29 – 31 1992.
- [BI03] BEN-ISRAEL, ADI: *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Springer Verlag, New York, 2. Auflage, June 2003.
- [Bjö96] BJÖRCK, ÅKE: *Numerical Methods For Least Squares Problems*. SIAM, University City Science Center, Philadelphia, 1996.
- [BMRS00] BUSCHMANN, FRANK, REGINE MEUNIER, HANS ROHNERT und PETER SOMMERLAD: *Pattern-orientierte Softwarearchitektur*. Addison-Wesley, 2000.
- [Bor94] BORNEMANN, H.J.: *Schwungradspeicher mit passiven supraleitenden magnetischen Lagern*. In: *KfK-Nachrichten*, Nummer 26 in 3, Seiten 209–214, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 1994.
- [Bor95] BORNEMANN, H.J.: *Ultralow Friction in a Superconducting Magnetic Bearing*. In: *3rd International Symposium on Magnetic Suspension Technology*, NASA Langley Research Center, Tallahassee, Florida, U.S.A., 1995.
- [Bor96] BORNEMANN, H.J.: *Verlustarmer Schwungradspeicher mit supraleitenden Magnetlagern*. In: *Tagungsband Symposium "Wirtschaftlichkeit elektrischer Energiespeicher"*, Hannover, 1996.
- [Bra39] BRAUNBEK, W.: *Frei schwebende Körper im magnetischen und elektrischen Feld*. Z. Physik, 112:753 – 763, 1939.
- [CAE04] CAETEL TELEMETRIESYSTEME: *E8 8-Kanal Telemetrie*, 2004. <http://www.caetel.de>.
- [Cal] CALNETIX. USA, <http://www.calnetix.com/>.
- [CFHH94] CISSOW, GÜNTER, REINHARD FRIEDRICH, HUBERT HOCHBRUCK und GERHARD HOLZINGER: *Der Linearmotor und seine Energieversorgung*, 1994.
- [DD94] DANKERT, HELGA und JÜRGEN DANKERT: *Technische Mechanik*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1994. ISBN 3-519-06523-1.
- [Deu] DEUTSCHES MUSEUM BONN. <http://www.deutsches-museum-bonn.de/exponate/beruehrungslose-lager/exponat.html>.
- [DPKR03] DENKENA, BEREND, KARL POPP, FRANK KALLAGE und MARTIN RUSKOWSKI: *Maschinenkonzept für die hochdynamische Fräsbearbeitung*. VDI-Z, 145:80 – 81, 2003.

## Literaturverzeichnis

- [dSp] DSPACE INC. <http://www.dspaceinc.com>.
- [EAA] EAAT. Deutschland, <http://www.eaat.de>.
- [Ear42] EARNSHAW, SAMUEL: *On the nature of the molecular forces with regulate the constitution of the lumiferous ether*. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Band 7, Seiten 97 – 112, 1842.
- [ETE01] ETEL: *Direct Drives & Systems*. ETEL SA, Motiers (Switzerland), 2001.
- [Fos] FOSTER MILLER TECHNOLOGIES. USA, <http://www.foster-miller.com/fmt.htm>.
- [FR99] FREMEREY, JOHAN K. und J. RÄBIGER: *Magnetlager- und Antriebstechnik für implantierbare Blutpumpen*. Jahresbericht Forschungszentrum Jülich, 1999. [http://www.kfa-juelich.de/isg/isg3/jb1999/jb1999%F5\\_3.htm](http://www.kfa-juelich.de/isg/isg3/jb1999/jb1999%F5_3.htm).
- [Fre00] FREMEREY, JOHAN K.: *Permanentmagnetische Lager*. In: *Erstausgabe im Rahmen des Lehrgangs "Luftlagerungen" an der Technischen Akademie Esslingen*. Forschungszentrum Jülich, Februar 2000.
- [Fri97] FRIEDRICH, THOMAS: *Sensorlose magnetische Lagerung für ein Förderfahrzeug*. Doktorarbeit, RWTHA Aachen, 1997.
- [Föl94] FÖLLINGER, OTTO: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig Verlag, Heidelberg, 8., überarbeitete Auflage, 1994.
- [Gee94] GEERING, HANS P.: *Regelungstechnik: Mathematische Grundlagen, Entwurfsmethoden, Beispiele*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [GH91] GÖLDNER, H. und F. HOLZWEISSIG: *Leitfaden der Technischen Mechanik*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 11., verbesserte Auflage, 1991.
- [GHJV96] GAMMA, ERICH, RICHARD HELM, RALPH JOHNSON und JOHN VLISSIDES: *Entwurfsmuster*. Addison-Wesley, 1996.
- [GMRS04] GERUM, PHILIPPE, PAOLO MANTEGAZZA, BRUNO ROUCOUSE und ROBERT SCHWEBEL: *The RTAI 3.0 Reference Guide*, 2004. [www.rtai.org](http://www.rtai.org).
- [GP75] GASCH, G. und H. PFÜTZNER: *Rotordynamik: Eine Einführung*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1975.
- [Had00] HADLER, ANDREAS: *RTOS-UH, Ein Überblick*. Technischer Bericht, IEP GmbH, 2000.
- [HCSW00] HAMPPEL, CHAKER, STEGEMANN und WORLITZ: *High Speed Matrix Controller*. In: *Jahresbericht*. Hochschule Zittau/Görlitz, 2000.
- [Hei03] HEIDENHAIN: *Winkelmesssysteme*. Deutschland, 2003. <http://www.heidenhain.de>.
- [HGP01] HEINMANN, BODO, WILFRIED GERTH und KARL POPP: *Mechatronik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2. Auflage, 2001.
- [HHA99] HUMPHREY, MARTEY, EDGAR HILTON und PAUL ALLLAIRE: *Experiences Using RT-Linux to Implement a Controller for a High Speed Magnetic Bearing System*. In: *Proceedings of 5th IEEE Real-Time Technology and Applications Symposium*, Vancouver (Canada), June 1999. Department of Computer Science.
- [Hil92] HILDEBRAND, D.: *An Architectural Overview of QNX*. In: *USENIX Workshop on Micro-kernels and Other Kernel Architectures*, Seiten 113–126. USENIX Association, 1992.
- [HM97a] HOFFMANN, KARL-JOSEF und RICHARD MARKERT: *Integrationsaspekte bei aktiven Magnetlagern*. In: *Wissenschaftlicher Berichte der Hochschule Zittau*, Nummer 1609 – 1619 in *Nummer 51: Magnetlagertechnik*, Seiten 55 – 60, 1997.

- [HM97b] HOFFMANN, KARL-JOSEF und RICHARD MARKERT: *Linearisierung von magnetischen Lagerungen für elastische Rotoren per Software*. In: *VDI-Berichte*, Band 1315, Seiten 407 – 418, Düsseldorf, 1997.
- [HM97c] HOFFMANN, KARL-JOSEF und RICHARD MARKERT: *Non-Linear Control of Magnetically Supported Rotors*. In: *Industrial Conference on Magnetic Bearings MAG'97*, Seiten 271 – 280, 1997.
- [HM98] HOFFMANN, KARL-JOSEF und RICHARD MARKERT: *Linearisierung von Magnetlagerkräften per Software*. In: *ZAMM*, Band 78, Seiten 489 – 490, 1998.
- [HMRG98] HOFFMANN, KARL-JOSEF, RICHARD MARKERT, FRANK-MICHAEL RENNER und MANFRED GLESNERE: *Integrated Adaptive Magnetic Bearings*. In: *6th International Symposium on Magnetic Bearings ISMB-6*, Seiten 256 – 265, 1998.
- [Hof99] HOFFMANN, KARL-JOSEF: *Integrierte aktive Magnetlager*. Doktorarbeit, Technische Universität Darmstadt, Deutschland, 1999.
- [Hup95] HUPE, HELLMUT: *Stabile magnetische Fahrzeugstützung mit permanentmagnetischer Erregung*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, Deutschland, 1995.
- [Hör92] HÖRSEMAN, WINFRIED: *Hochgeschwindigkeitsschleifen mit aktiv magnetgelagerten Spindeln*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, Deutschland, 1992.
- [INA02a] INA-SCHAEFFLER KG, Deutschland: *Axial-Radiallager YRT*, 2002.
- [INA02b] INA-SCHAEFFLER KG, Deutschland: *Axial-Radiallager YRTS*, 2002.
- [INA04] INA-SCHAEFFLER KG, Deutschland: *Axial-Radiallager mit integrierten Meßsystem Baureihe YRTM/MEKO*, 2004.
- [Ise92a] ISERMANN, ROLF: *Identifikation dynamischer Systeme*, Band 1. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 1992.
- [Ise92b] ISERMANN, ROLF: *Identifikation dynamischer Systeme*, Band 2. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 1992.
- [Jun88] JUNG, VOLKHARD: *Magnetisches Schweben*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [Kem34] KEMPER, HERMANN: *Schwebbahn mit Räderlosen Fahrzeugen, die an eisernen Fahrschienen mittels magnetischer Felder entlang schwebend geführt werden*. Deutsches Reichspatent Nr. 643316, 1934.
- [KEQ94] KALLENBACH, EBERHARD, RÜDIGER EICK und PEER QUENDT: *Elektromagnete*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1994.
- [KKS88] KALLENBACH, EBERHARD, HARALD KUBE, EUGEN SAFFERT und ANDREW HOFMANN: *Electromagnetic linear drive with integrated magnetic bearing using thin magnetic layers*. In: *4th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC*. ETH Zürich, August 25-28 1988.
- [KKS81] KNOBLOCH, A., M. KOTTMAIR, W. SCHLÜTER und G. VAU: *Large Flywheel Power Supply for Fusion Experiments in the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, Germany*. In: *Mechanical, Thermal, and Chemical Storage of Energy*, Seiten 305–319, University of California, Hutchinson Ross Publishing Company, Stroudsburg, P.A, U.S.A., 1981.
- [KP03] KASPER, ROLAND und ROSTYSLAV PASICHNYK: *Modellierung eines magnetgelagerten Rundtisches*. In: *6. Magdeburger Maschinenbautage*, Seiten 49–56, Magdeburg, September 2003.
- [KSN99] KLESEN, C., U. SCHÖNHOF und RAINER NORDMANN: *Design of an minimum current magnetic bearing*. In: *5th International Symposium on Magnetic Suspension Technology*, December 1999.

## Literaturverzeichnis

- [KSNS97] KALLENBACH, EBERHARD, S.KOVALEV, J. NIKITENKO und CH. SCHÄFFEL: *Magnetische Führung für Flächenmotoren*. In: *Vortrag, 42. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium der TU Ilmenau*. Technische Universität Ilmenau, 23. September 1997.
- [Lai99] LAIER, DIRK: *Nichtlinearitäten magnetgelagerter Rotorsysteme*. Doktorarbeit, Technische Universität Darmstadt, Deutschland, 1999.
- [Lat95] LATZEL, WOLFGANG: *Einführung in die Digitale Regelung*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [LEVa] LEVITEC GMBH. Deutschland, <http://www.levitec.com>.
- [Levb] LEVITRONIX MAGNETIC BEARING SYSTEMS. Switzerland, <http://www.levitronix.com/>.
- [LH95] LAWSON, CHARLES L. und RICJARD J. HANSON: *Solving Least Squares Problems*. In: *Classics in Applied Mathematics*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995. SIAM, Prentice-Hall.
- [LM95a] LAIER, DIRK und RICHARD MARKERT: *Nichtlineare Einflüsse auf die Dynamik magnetgelagerter Rotoren*. In: *ZAMM*, Band 75, Seiten 57 – 58, 1995.
- [LM95b] LAIER, DIRK und RICHARD MARKERT: *Nichtlinearitäten von magnetgelagerten Rotoren*. In: *Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. Siekmann*, Seiten 339 – 352. Universität Essen, 1995.
- [LM95c] LAIER, DIRK und RICHARD MARKERT: *Simulation of Nonlinear Effects on Magnetically Suspended Rotors*. In: *International Conference on Eng. Computation and Computer Simulation ECCS-1*, Band 1, Seiten 473 – 482. ECCS, 1995.
- [LM98] LAIER, DIRK und RICHARD MARKERT: *Ein Beitrag zu sensorlosen Magnetlagern*. In: *ZAMM*, Band 78, Seiten 577 – 578, 1998.
- [Lun97] LUNZE, JAN: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [Lyn] LYNXWORKS INC. <http://www.lynx.com>.
- [Mat03] MATHWORKS: *Robust Control Toolbox*. The Mathworks Inc., Natick, 2003.
- [MEC] MECOS TRAXLER AG. Switzerland, <http://www.mecos.ch>.
- [Mei99] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Publ-Viewg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.
- [Moo20] MOORE, E.H.: *On the reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract)*. Bulletin of the American Mathematical Society, 26:394 – 395, 1920.
- [Moo35] MOORE, E.H.: *General Analysis. Part I*. Memoirs American Philosophical Society, 1935.
- [MR96] MEINS, JÜRGEN und WERNER RUOSS: *Das Trag- und Führsystem*, 1996.
- [MVP89] MVP VERSUCHS UND PLANUNGSGESELLSCHAFT FÜR MAGNETBAHNSYSTEME M.B.H: *Magnetbahn Transrapid. Die neue Dimension des Reisens*. Hestra Verlag, Deutschland, 1989.
- [Mös97] MÖSINGER: *Meßprotokoll Kraft-Zeit-Diagramm Einzahnfräser*. Technischer Bericht, Technische Universität Coburg, Deutschland, 1997.
- [Mül92] MÜLLER, MATTHIAS: *Roboter mit Tastsinn*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, Deutschland, 1992.
- [Nor98] NORDMANN, RAINER: *New Identification Techniques in Rotordynamics using Motion and Force Control*, 1998.
- [Opi95] OPITZ, PETRA: *Numerische Einschließung der Moore-Penrose-Inversen von Matrizen*. Doktorarbeit, TH Leipzig, 1995.

- [OS89] OPPENHEIM, A.V. und R.W. SCHAFER: *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [Pap96] PAPULA, LOTHAR: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 1 – 3. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1996. ISBN 3-528-64236-X.
- [Pen55] PENROSE, R: *A Generalized Inverse for Matrices*. In: *Cambridge Philosophical Society*, Band 51, Seiten 406 – 413, 1955.
- [Pen56] PENROSE, R.: *On best approximation solutions of linear matrix equations*. In: *Cambridge Philosophical Society*, Band 52, Seiten 17 – 19, 1956.
- [Pet04] PETZOLD, OLAF: *tvmet*, 2004. <http://tvmet.sourceforge.net>.
- [Pfe89] PFEIFFER, FRIEDRICH: *Einführung in die Dynamik*. Publ-Tbnr, 1989.
- [QNX] QNX SOFTWARE SYSTEMS LTD. <http://www.qnx.com>.
- [Reu96] REUBER, CHRISTIAN: *Berührungsloses Transportsystem mit Synchron-Linearantrieb*. Doktorarbeit, RWTHA Aachen, Deutschland, Januar 1996.
- [Rev] REVOLVE MAGNETIC BEARING INC. (SKF): *Magnetic Bearings*. Canada. <http://www.revolve.com/>.
- [RM71] RAO, C.R. und S.K. MITRA: *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*. Wiley, New York, 1971.
- [Rob81] ROBINSON, A.A.: *Magnetic Bearings - The Ultimate Means of Support for Moving parts in Space*. Technischer Bericht 26, ESA, 1981.
- [Rob82] ROBINSON, A.A.: *A Lightweight, Low-Cost, Magnetic-Bearing Reaction Wheel for Satellite Attitude Control Applications*. ESA Journal, 6, 1982.
- [Rod97] RODDECK, WERNER: *Einführung in die Mechatronik*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1997.
- [RP98a] RUSKOWSKI, MARTIN und KARL POPP: *Adaptive Levitation Control of a Linear Maglev Guide for Machine Tools*. In: *2nd International Symposium on Linear Drives in Industry Applications LDIA'98*, Tokyo, 1998.
- [RP98b] RUSKOWSKI, MARTIN und KARL POPP: *A Contactless Axis for High Speed Cutting Machines*. In: *4th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC-4*, Seiten 1095 – 1099, Zürich, 1998.
- [RP00] RUSKOWSKI, M. und K. POPP: *Nonlinear Modeling of a Magnetically Guided Machine Tool Axis*. In: *7th International Symposium on Magnetic Bearings ISMB-7*, Seiten 413 – 418, Zürich, 2000.
- [RP02] RUSKOWSKI, MARTIN und KARL POPP: *Improved Position Control of a Magnetic Guide using Acceleration Measurement and Laser Position Reference*. In: *8th International Symposium on Magnetic Bearings ISMB-8*, Mito, 2002.
- [RPTL99] RUSKOWSKI, MARTIN, KARL POPP, H.K. TÖNSHOFF und C. LAPP: *Auslegung einer Werkzeugmaschine mit kontaktloser Achse*. In: *4. Magdeburger Maschinenbautage*, Seiten 105 – 112, Magdeburg, 1999.
- [RRP02] RUSKOWSKI, MARTIN, LARS REICKE und KARL POPP: *Enhanced Steady State Stiffness for a Magnetic Guide using Smart Disturbance Compensation*. In: *6th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC*, Saitama, 2002.
- [Röd94] RÖDDER, DIETER: *Berechnung und Auslegung der berührungslosen Lagerung eines Förderfahrzeuges mit Hybridmagneten*. Doktorarbeit, RWTHA Aachen, Deutschland, Mai 1994.

## Literaturverzeichnis

- [Sal88] SALM, JÜRGEN: *Eine aktive magnetische Lagerung eines elastischen Rotors als Beispiel ordnungsreduzierter Regelung grosser elastischer Systeme*. Doktorarbeit, ETH Zürich, Schweiz, 1988.
- [Sch60] SCHOLEFIELD, P.H.R.: *Shift Registers Generating Maximum- Length Sequences*. *Electronic Technology*, 10:389 – 394, 1960.
- [Sch87] SCHWEIZER, JÜRGEN: *Ein Beitrag zur Identifikation nichtlinearer Regelstrecken mittels Korrelationsanalyse*. Doktorarbeit, Universität Kaiserslautern, 1987.
- [Sch97] SCHLANGEN, GÜNTER: *Theoretische und experimentelle Untersuchung an aktiven magnetischen Lagern für Industrie-Antriebe*. Doktorarbeit, Technische Universität Berlin, Deutschland, 1997.
- [Sch03] SCHALLSCHMIDT, THOMAS: *Regelungstechnische Optimierung eines Magnetlagers*. Diplomarbeit, Universität Magdeburg, Deutschland, 2003.
- [See98] SEELINGER, STEFAN: *Lineare und nichtlineare Stabilitätsberechnung in der Rotordynamik*. Doktorarbeit, Universität Kaiserslautern, Deutschland, 1998.
- [SL] SCHÖB, REDO und HOWARD M. LOREE: *Artificial Hearts And Cardiac Assist Devices*.
- [Soc02] SOCIÉTÉ DE MÉCANIQUE MAGNÉTIQUE (S2M): *Verwendung aktiver Magnetlager auf rotierende Maschinen industrieller Anwendung*. Vernon, Frankreich, 2002. <http://www.s2m.fr>.
- [SPP03] SCHALLSCHMIDT, THOMAS, FRANK PALIS und OLAF PETZOLD: *Elektrische Aktorik eines magnetisch gelagerten Werkzeugmaschinenrundtisches*. In: *6. Magdeburger Maschinenbautage*, Seiten 215–222, Magdeburg, September 2003.
- [SST72a] SHINOZAKI, N., M. SIBUYA und K. TANABE: *Numerical Algorithms for the Moore-Penrose Inverse of a Matrix: Direct Methods*. *Ann. Inst. Statist. Math*, 24:193 – 203, 1972.
- [SST72b] SHINOZAKI, N., M. SIBUYA und K. TANABE: *Numerical Algorithms for the Moore-Penrose Inverse of a Matrix: Iterative Methods*. *Ann. Inst. Statist. Math*, 24:621 – 629, 1972.
- [STB93] SCHWEITZER, GERHARD, ALFONS TRAXLER und HANNES BLEULER: *Magnetlager: Grundlagen, Eigenschaften und Anwendungen berührungsfreier, elektromagnetischer Lager*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [Ste87] STEINER, G.: *Schwungradspeicher*. In: *Tagung Energiespeicherung zur Leistungssteigerung*, VDI Berichte 652, Seiten 69–87, Düsseldorf, 1987.
- [Ste95] STEER, THOMAS: *Zur Verwendbarkeit eines axialen Magnetlagers bei der Ermittlung aerodynamischer Dämpfungskoeffizienten*. Doktorarbeit, Technische Universität München, Deutschland, 1995.
- [Ste96] STEINGRÖVER, ANDREAS: *Stützung und Antrieb eines Nahverkehrsfahrzeuges mit permanentmagnetischer Erregung*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, Deutschland, 1996.
- [Str00] STROUSTRUP, BJARNE: *Die C++ Programmiersprache*. Addison-Wesley, 4., aktualisierte Auflage, 2000.
- [Stu72] STUDER, A.: *Magnetic Bearings for Instruments in the Space Environment*. Technischer Bericht TMX-66111, NASA, January 1972.
- [Stu78] STUDER, A.: *Magnetic Bearings for Spacecraft*. In: *NASA Technical Memorandum*, Band 78046, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 1978.
- [SWP98] SPUR, G., M. WECK und G. PRITSCHOW (Herausgeber): *Technologien für die Hochgeschwindigkeitsbearbeitung*, Kapitel Magnetführung für Hochgeschwindigkeitsmaschinen mit linearen Direktantrieb, Seiten 319 – 339. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998.

- [SZK93] SINHA, P. K., F. B. ZHOU und R. S. KUTIYAL: *Fault Detection in Electromagnetic Suspension Systems with State Estimation Methods*. IEEE Transactions on Magnetics, 29(6):2950 – 2952, November 1993.
- [Thy97] THYSSEN: *Magnetschnellbahn Transrapid - Technik und System*. Thyssen Transrapid System GmbH, München, 1997.
- [Tie97] TIESTE, KARL-DIETER: *Mehrgrößenregelung und Parameteridentifikation einer Linear-Magnetführung*. Doktorarbeit, Technische Universität Hannover, Deutschland, Juli 1997.
- [TP93] TIESTE, KARL-DIETER und KARL POPP: *Magnetlager für den Einsatz bei schnellen Translationsbewegungen*. In: *Schwingungen in rotierenden Maschinen*, Band 2. Wien, 1993.
- [TP97] TIESTE, KARL-DIETER und KARL POPP: *A Linear Maglev Guide for Machine Tools*. In: *Industrial Conference and Exhibition on Magnetic Bearings MAG '97*, Seiten 37 – 46, Alexandria (USA), 1997.
- [Tra85] TRAXLER, ALFONS: *Eigenschaften und Auslegung von berührungsfreien elektromagnetischen Lagern*. Doktorarbeit, ETH Zürich, Schweiz, 1985.
- [Unb93] UNBEHAUEN, HEINZ: *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 6., durchgesehene Auflage, 1993.
- [Vela] VELDHUIZEN, TODD: *Expression Templates*. <http://osl.iu.edu/~tveldhui/papers/Expression-Templates/exptrmpl.htm>.
- [Velb] VELDHUIZEN, TODD: *Template Metaprograms*. <http://extreme.indiana.edu/~tveldhui/papers/Template-Metaprograms/meta-art.html>.
- [vib03a] VIBRO-METER: *Wegaufnehmer Typ TQ402/412*. Schweiz, 2003. <http://www.vibro-meter.com>.
- [vib03b] VIBRO-METER: *Wegmesssystem Signalaufbereiter Typ IQS 451, 452, 453*. Schweiz, 2003. <http://www.vibro-meter.com>.
- [Vli99] VLISSIDES, JOHN: *Entwurfsmuster anwenden*. Addison-Wesley, 1999.
- [Wah02] WAHNER, U.: *Lineare Magnetführung für direktangetriebene Vorschubachsen*. Doktorarbeit, RWTH Aachen, Deutschland, Mai 2002.
- [Wau] WAUKESHA MAGNETIC BEARINGS. USA, <http://magnetic.waukbearing.com/>.
- [Weh95a] WEH, H.: *Die Integration der Funktion magnetischen Schweben und elektrischer Vortrieb*. ETZ, 96(3), 1995.
- [Weh95b] WEH, H.: *Synchroner Langstatorantrieb mit geregelten, anziehend wirkenden Nomalkräften*. ETZ, 96(6), 1995.
- [WG03] WUCHATSCH, J. und U. GABBERT: *Simulation eines Magnetrundtisches unter Nutzung elastischer Mehrkörpermodelle*. In: *6. Magdeburger Maschinenbautage*, Seiten 133–138, Magdeburg, September 2003.
- [Win] WIND RIVER SYSTEMS, INC. <http://www.wrs.com>.
- [WKW97] WECK, MANFRED, P. KRÜGER und ULRICH WAHNER (Herausgeber): *Components of the HSC-Machine*, 1997.
- [Wur97] WURMSDOBLER, PETER: *A State Space Adaptive Control for Rigid Rotor Suspended in Active Magnetic Bearing*. Doktorarbeit, Technische Universität Wien, Österreich, January 1997.
- [Wur99] WURMSDOBLER, PETER: *A simple control application with Real Time Linux*. In: *1st Real-Time Linux Workshop*, Vienna, 1999.

## Literaturverzeichnis

- [WW97] WAHNER, ULRICH und M. WECK: *Mechanisch-Elektrische Antriebstechnik*, Kapitel Elektromagnetisches Trag- und Führsystem für Vorschubantriebe mit linearem Direktantrieb, Seiten 319 – 339. VDI Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [WW98] WAHNER, ULRICH und MANFRED WECK: *Linear Magnetic Bearing and Levitation System for Machine Tools*. Annals of the CIRP, 47(1):Seite 311 – 314, 1998.
- [WW99] WAHNER, U. und M. WECK (Herausgeber): *Lineare Direktantriebe für schnelle Maschinen*, Seminar. ADITEC Aachen, 1999.
- [WYWH98] WAHNER, U., KHALED BEN YAHIA, MANFRED WECK und GERHARD HENNEBERGER: *Optimization of a Linear Magnetic Bearing for Machine Tools*. In: *6th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC-6*, Seiten 1047 – 1052, ETH Zürich, 1998.
- [WYWH99] WAHNER, ULRICH, KHALED BEN YAHIA, MANFRED WECK und GERHARD HENNEBERGER: *Linear Magnetic Bearing for High Speed Machine Tools*. Electromotion, 6:Seite 37 – 42, 1999.
- [Xia94] XIAO, WEIRONG M. SC.: *Beitrag zur Entwicklung von Magnetlager- und Fuzzy-Systemen*. Doktorarbeit, Universität Kassel, Deutschland, 1994.
- [Xil96] XILINX, INC., USA: *Efficient Shift Registers, LFSR Counters, and Long Pseudo- Random Sequence Generators*, 1.1 Auflage, July 7 1996. Application Note.
- [Xil01] XILINX, INC., USA: *Linear Feedback Shift Register V2.0*, 1.1 Auflage, October 4 2001. Application Note.
- [Yah00] YAHIA, KHALED BEN: *Entwicklung von Magnetlagern am Beispiel einer linearen Magnetführung und einer lagerlosen Asynchronmaschine*. Doktorarbeit, RWTHA Aachen, Deutschland, 2000.
- [YH99] YAHIA, KHALED BEN und GERHARD HENNEBERGER: *Linear Magnetic Bearing for High Speed Machine Tools*. In: *Intelligent Motion*, Seiten 155 – 160, Nürnberg, 1999.
- [ZF84] ZURMÜHL, RUDOLF und SIGURD FALK: *Matrizen und ihre Anwendung*, Band 1: Grundlagen. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 5. Auflage, 1984.
- [Zie77] ZIELKE, G.: *Beiträge zur Theorie und Berechnung von verallgemeinerten inversen Matrizen*. Doktorarbeit, Universität Halle – Wittenberg, 1977.
- [Zie83] ZIELKE, G.: *Verallgemeinerte inverse Matrizen*. In: *Jahrbuch 1983 Überblicke Mathematik*, Seiten 95 – 116. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1983.