

Mortar-Techniken zur Behandlung von Grenzsichtproblemen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

genehmigt durch die Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von Dipl.-Math. Volker Behns

geb. am 13.10.1972 in Magdeburg

Gutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Lutz Tobiska

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dietrich Braess

Prof. Dr. rer. nat. habil. Gert Lube

Eingereicht am: 02. 07. 2001

Verteidigung am: 16. 11. 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Standard Finite-Elemente-Diskretisierungen	9
2.1	Skalare Konvektions-Diffusions-Gleichungen	9
2.2	Zerlegungen T_h von Ω	12
2.3	Konforme P_k - und Q_k -Elemente	14
2.4	Nichtkonforme P_1 - und Q_1^{rot} -Elemente	16
2.5	Diskretes Problem	18
2.6	Interpolationsoperator, Knotenfunktionale und FE-Isomorphismen	19
3	Mortar-Technik	21
3.1	Problemdefinition und Gebietszerlegung	22
3.2	Formulierung der Variationsgleichung als gemischtes Problem	24
3.3	LBB-Bedingung	26
3.4	Eine äquivalente Formulierung	27
3.5	Diskretes Problem	28
3.5.1	Der Fall konformer Teilgebietsdiskretisierungen	28
3.5.2	Der Fall nichtkonformer Teilgebietsdiskretisierungen	30
3.6	Interpolation in V_h	32
3.6.1	Der Fall konformer Teilgebietsdiskretisierungen	32
3.6.2	Der Fall nichtkonformer Teilgebietsdiskretisierungen	37

4	Stromlinien-Diffusions-FEM (SDFEM)	39
4.1	Koerzivität von $a^{SD}(\cdot, \cdot)$	41
4.2	Konsistenzfehler	43
4.3	Interpolationsfehler	45
4.4	Diskrete LBB-Bedingung	49
4.5	Gesamtresultat	50
5	Upwind-Diskretisierung	51
5.1	Upwind-Stabilisierung für konforme Teilgebietsdiskretisierungen	52
5.2	Upwind-Stabilisierung für nichtkonforme Teilgebietsdiskretisierungen	56
5.3	Untersuchung der Koerzivität der Bilinearformen $a^{up}(\cdot, \cdot)$	60
5.4	Fehlerabschätzung	62
6	Konzept zur Verwaltung von Geometriedaten	73
6.1	Anforderungen an ein Geometrie-konzept	73
6.2	Randbeschreibung	74
6.3	Zellen	74
6.4	Verfeinerung einzelner Zellen	76
6.5	Gebietszerlegung	78
6.6	Fugen	80
6.7	Mapper	80
6.8	Gitter	81
6.9	Iteratoren	82
6.10	Bedeutung der Deskriptoren	83
6.11	Integration der Mortar-Technik	83
6.12	Beispiel zur Gittermanipulation	84
7	Numerische Ergebnisse	87
7.1	Lösung der diskreten Probleme	87

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	3
7.2 Testbeispiel mit polynomialer Lösung	89
7.3 Konvektions-Diffusions-Problem mit zwei exponentiellen Grenzschichten . .	96
7.4 DFG-Benchmark-Problem	105
8 Zusammenfassung	113
Literaturverzeichnis	117

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit sollen Methoden untersucht und Verfahren bereitgestellt werden, die die Lösung von partiellen Differentialgleichungen in einem Gebiet mit stark unterschiedlich verfeinerten Teilgebieten ermöglicht.

In der Technik treten heute zunehmend Probleme mit großen Skalenunterschieden auf. Man interessiert sich für Phänomene, die sich in einem relativ kleinen Gebiet, zum Beispiel in sehr dünnen Schichten, abspielen, welche jedoch von ihrer Umgebung beeinflusst werden. Einerseits ist der dabei zu betrachtende Einflußbereich wesentlich größer als das eigentlich zu untersuchende Gebiet, andererseits sind aber die Veränderungen der physikalischen Größen in dem umgebenden Bereich vergleichsweise gering. Zur genauen Beschreibung der Phänomene in dem kleinen Gebiet ist hier eine sehr feine Auflösung notwendig. Um nun die Einflüsse aus der Umgebung mit berücksichtigen zu können, wäre es möglich, auch dieses Gebiet mit der gleichen Feinheit zu vernetzen. Dies erfordert allerdings sehr viele Unbekannte und auch wesentlich mehr als zur adäquaten Beschreibung der physikalischen Vorgänge in diesem Bereich notwendig sind. Somit ist es sinnvoll, hier eine wesentlich gröbere Vernetzung zu wählen. Es resultiert nun jedoch das Problem des Netzübergangs zwischen der groben und der wesentlich feineren Vernetzung. Hierzu werden wir die Mortar-Technik einsetzen.

Ein praxisrelevantes Beispiel ist die Simulation von Filmsiedeprozessen. Dieses Phänomen tritt z. B. bei Abkühlvorgängen von heißen Metallen mittels Flüssigkeiten auf. Aufgrund der hohen Temperatur der zu kühlenden Werkstoffe verdampft das Kühlmittel an der Oberfläche sofort und bildet einen geschlossenen, sehr dünnen Dampffilm. Dieser beeinträchtigt den Abkühlungsprozeß erheblich und muß deshalb genau untersucht werden. Eine detaillierte Beschreibung dieses Problems findet man bei Klepp [21]. Bei dieser Aufgabenstellung würde man innerhalb der Dampfschicht ein sehr feinmaschiges und innerhalb der Flüssigkeitsphase bzw. des Werkstückes ein deutlich gröberes Netz verwenden.

Eine weitere Anwendung ergibt sich aus der Problematik, daß die heutzutage zu lösenden Probleme oft sehr groß sind, so daß sie von einem Computer mit nur einer CPU nicht mehr

in angemessener Zeit bewältigt werden können. Einen Ausweg bietet die Parallelverarbeitung. Bei der Parallelisierung durch Gebietszerlegung entsteht das Problem des Übergangs zwischen Teilgebieten, die verschiedenen Prozessen zugeordnet sind. Auch hier stellt die Mortar-Technik einen möglichen Lösungsansatz dar.

Die Mortar-Element-Methode wurde von Bernardi, Maday und Patera [5] 1989 vorgestellt und zunächst für die Behandlung komplexer Geometrien mit Spektral-Methoden benutzt. Das Prinzip wurde später auch in der Finite-Elemente-Methode verwendet. Wir werden sehen, daß die Mortar-Technik eine gute Möglichkeit bietet, deutlich unterschiedlich verfeinerte Teilgebiete miteinander zu verknüpfen.

Das Verfahren basiert darauf, daß ein Gebiet Ω in mehrere unabhängige Teilgebiete Ω_k zerlegt wird, die unabhängig voneinander diskretisiert werden können, und daß für die sich ergebenden Kontaktkanten zusätzliche Kopplungsbedingungen eingeführt werden.

Wir können sowohl konforme als auch nichtkonforme Finite-Elemente benutzen. Konform bedeutet hier, daß der diskrete Ansatz- und Testraum V_h Teil des stetigen Raums V ($V_h \subset V$) ist (z. B. Lagrangesche P_k -, Q_k -Elemente). Nichtkonforme Elemente ($V_h \not\subset V$) sind in diesem Sinne z. B. das Crouzeix/Raviart-Element oder das Rannacher/Turek-Element (Q_1^{rot} -Element) sowie nichtkonforme Elemente höherer Ordnung. Innerhalb eines Teilgebietes müssen gleichartige Elemente verwendet werden.

Wir werden uns hier insbesondere auch mit konvektionsdominanten Problemen beschäftigen. Bei diesen treten bei grober Vernetzung, d. h., der Diffusionsparameter ε ist deutlich kleiner als der maximale Zelldurchmesser h ($\varepsilon \ll h$), nichtphysikalische Oszillationen auf. Außerdem sind die resultierenden linearen Gleichungssysteme schlecht konditioniert und lassen sich somit sehr schwer lösen. Aus diesen Gründen ist eine zusätzliche Stabilisierung erforderlich.

Wir werden zeigen, daß man mittels weiterer Zusatzterme innerhalb der Stabilisierungen bei Verwendung der Mortar-Technik Fehlerabschätzungen von gleicher Güte wie ohne den Einsatz der Mortar-Technik, d. h. bei der Arbeit auf geometrisch konform verfeinerten Gittern, erzielen kann.

In Kapitel 2 werden wir die benötigten Grundlagen und Notationen der Finite-Elemente-Methode (FEM) für Konvektions-Diffusions-Gleichungen bereitstellen. Danach, in Kapitel 3, wird die Mortar-Methode eingeführt. Es werden dann verschiedene Stabilisierungen wie die Stromlinien-Diffusions-FEM (SDFEM) in Kapitel 4 und die upwind-Technik in Kapitel 5 betrachtet.

Zur rechentechnischen Umsetzung der Verfahren wurde ein objektorientierter Ansatz in der modernen Programmiersprache C++ gewählt. Es wurde das offene und leicht erweiterbare Programmpaket MooNMD entwickelt. Dieses beinhaltet ein flexibles Geometrie-Konzept zur Erzeugung und Verwaltung beliebiger, adaptiv verfeinerbarer Gitter (Gebietsvernetzungen) in 2D bzw. 3D. Ein grundlegendes Element des Konzeptes ist eine geeignete Randbeschreibung des zu vernetzenden Gebietes. Um das Hinzufügen neuer Elemente einfach

zu gestalten sowie um eine platzsparende Speicherung der Objekte zu erreichen, werden datenbankähnliche Verwaltungsstrukturen verwendet. Es können Gitterhierarchien aufgebaut werden, die die Realisierung von Mehrgitteralgorithmen erleichtern. Dieses Konzept ist in Kapitel 6 detailliert beschrieben. Weiterhin enthält MooNMD Bausteine zur Erzeugung von Finite-Elemente-Räumen sowie Löser für die damit aufgebauten algebraischen Gleichungssysteme.

Im abschließenden Kapitel 7 wird zunächst kurz der zur Lösung der Gleichungssysteme eingesetzte Löser beschrieben. Nachfolgend werden numerische Testergebnisse dargestellt. Wir werden einerseits Rechnungen mit eher akademischen Beispielen durchführen und andererseits an Hand eines Benchmark-Problems der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) die Anwendbarkeit der Mortar-Technik auch auf Navier-Stokes-Gleichungen zeigen.

Kapitel 2

Standard Finite-Elemente-Diskretisierungen

2.1 Skalare Konvektions-Diffusions-Gleichungen

Wir betrachten Konvektions-Diffusions-Gleichungen in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \varepsilon \partial_n u &= g_N && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ ($\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$). Dabei bezeichnet Γ_D den Randteil, auf dem eine Dirichlet-Randbedingung gilt, und Γ_N den Randteil, auf dem eine Neumann-Randbedingung gegeben ist. Zur Vereinfachung wählen wir $\partial\Omega$ als polygonal. Die Annahme homogener Randwerte auf Γ_D ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich eine Homogenisierung stets durchführen läßt.

Der erste Summand in (2.1) ist der *Diffusionsterm*, der zweite der *Konvektionsterm* und der dritte wird als *Reaktionsterm* bezeichnet.

Ist $\varepsilon \ll \|b\|_{0,\infty,\Omega}$, dann sprechen wir von singular gestörten bzw. konvektionsdominanten Problemen. In diesem Fall treten i. a. verschiedenartige Grenzschichten auf, welche dadurch entstehen, daß der Lösung in Randnähe eine Randbedingung aufgezwungen wird, die nicht mit der Lösung des reduzierten Problems ($\varepsilon \equiv 0$) auf dem Rand übereinstimmt. In Abhängigkeit vom Winkel zwischen der Konvektionsrichtung b und der äußeren Normalen auf dem Rand gibt es gewöhnliche Randgrenzschichten, parabolische Randgrenzschichten, bei denen die Konvektionsrichtung parallel zum Rand ist, und innere Grenzschichten, die z. B. aus Sprüngen in den Randbedingungen entstehen können. Aufgrund hoher Gradienten der Lösung in den Grenzschichten müssen diese Bereiche geometrisch aufgelöst werden.

Gilt $b \equiv \mathbf{0}$ und $c \equiv 0$, so haben wir als Spezialfall die Poisson-Gleichung.

Für die Koeffizienten in (2.1) setzen wir voraus

$$\begin{aligned} \varepsilon &\in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \\ b &\in (W^{1,\infty}(\Omega))^d, \\ c &\in L^\infty(\Omega), \\ f &\in H^{-1}(\Omega), \\ g_N &\in H^{-1/2}(\Gamma_N). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wir bezeichnen mit $H^{1/2}(\Gamma)$ den Spurraum aller Funktionen aus $H^1(\Omega)$, mit $H^{-1/2}(\Gamma)$ den Dualraum zu $H^{1/2}(\Gamma)$ und mit $H^{-1}(\Omega)$ den Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$.

Mit dem Funktionenraum

$$V_{0,D} := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\} \tag{2.3}$$

ergibt sich als schwache Formulierung des Randwertproblems (2.1)

$$\begin{aligned} \text{finde } u \in V_{0,D} : \\ a(u, v) &= f(v) \quad \forall v \in V_{0,D}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (b \cdot \nabla u, v)_\Omega + (cu, v)_\Omega \\ f(v) &:= \langle f, v \rangle_\Omega + \langle g_N, v \rangle_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $(\cdot, \cdot)_G$ mit $G \subset \Omega$ das Skalarprodukt in $L^2(G)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ mit $G \subset \Omega$ das Dualitätsprodukt zwischen $H^{-1}(G)$ und $H^1(G)$ sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ mit $\Gamma \subset \partial\Omega$ das Dualitätsprodukt zwischen $H^{-1/2}(\Gamma)$ und $H^{1/2}(\Gamma)$.

Unter einer *starken Lösung* verstehen wir eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_N) \cap C(\bar{\Omega})$, die (2.1) im klassischen Sinne erfüllt. Eine Funktion $u \in V_{0,D}(\Omega)$, die (2.4) erfüllt, nennen wir *schwache Lösung* der Konvektions-Diffusions-Gleichung. Eine starke Lösung kann man nur erwarten, falls alle Koeffizientenfunktionen hinreichend glatt sind, das Gebiet Ω einen hinreichend glatten Rand besitzt und die Randbedingungen gewissen Kompatibilitätsbedingungen genügen. Genauere Aussagen findet man z. B. bei Gilbarg und Trudinger [14]. Bei vielen praktischen Anwendungen sind diese Voraussetzungen jedoch nicht erfüllt, so daß hier nur schwache Lösungen betrachtet werden.

Im folgenden sollen einige aus der Literatur bekannte Aussagen über die Lösbarkeit des schwachen Problems dargestellt werden.

Zunächst eine Aussage zum reinen Dirichletproblem.

Satz 2.1 (siehe [14])

Sei $\Gamma_D = \partial\Omega$ und es gelten die Voraussetzungen (2.2). Zusätzlich seien $c \geq 0$ und $f \in H^{-1}(\Omega)$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Problems (2.4). Die Lösung

hängt stetig von den Eingangsdaten ab, und es gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C(\varepsilon)\|f\|_{-1,\Omega} \quad (2.5)$$

mit einer positiven Konstanten C unabhängig von u .

Hierbei bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\Omega}$ in üblicher Weise die Sobolev-Normen im Raum $W^{\alpha,\beta}(\Omega)$ (vgl. [2]). Zur Vereinfachung der Schreibweise ist, falls nur α und Ω angegeben sind, β implizit gleich 2.

Mit der Voraussetzung

$$c(x) - \frac{1}{2}\nabla \cdot b(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (2.6)$$

kann die positive Definitheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ nachgewiesen werden, die zugleich die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des diskreten Problems sichert.

Nun folgt eine Aussage über die Lösbarkeit des gemischten Randwertproblems.

Satz 2.2 (siehe [14])

Gelte (2.6) und sei $b \cdot n \geq 0$ auf Γ_N . Dann ist (2.4) für jedes positive ε eindeutig lösbar.

Beweis:

Zum Beweis wenden wir das Lax-Milgram-Lemma an, d. h., wir müssen die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ und $f(\cdot)$ sowie die Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$ auf $V_{0,D}$ zeigen.

Hierfür benutzen wir die ε -gewichtete Energienorm $\|\cdot\|_\varepsilon$ mit

$$\|u\|_\varepsilon := (\varepsilon|u|_{1,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$. Für alle $u, v \in V_{0,D}$ gilt

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \varepsilon|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \|b\|_{0,\infty,\Omega}|u|_{1,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|c\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|u\|_\varepsilon\|v\|_\varepsilon + \|b\|_{0,\infty,\Omega}\varepsilon^{-1/2}\|u\|_\varepsilon\|v\|_\varepsilon + \|c\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_\varepsilon\|v\|_\varepsilon \\ &\leq C(\varepsilon)\|u\|_\varepsilon\|v\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nun zur Stetigkeit von $f(\cdot)$:

Für alle $v \in V_{0,D}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(v)| &\leq \|f\|_{-1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \|g_N\|_{-1/2,\Gamma_N}\|v\|_{1/2,\Gamma_N} \\ &\leq \|f\|_{-1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + C\|g_N\|_{-1/2,\Gamma_N}\|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C(\varepsilon)\|v\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Der Übergang von $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_N}$ zu $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ folgt aus der Stetigkeit des Spurooperators $\gamma_N : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_N)$.

Und schließlich die Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$:
Für alle $v \in V_{0,D}$ gilt

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + (c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b, v^2)_\Omega + (b \cdot n, v^2)_{\Gamma_N} \\ &\geq \varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + c_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|v\|_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

□

Abschließend formulieren wir ein Resultat zur Abhängigkeit der Stabilitätskonstanten C in (2.5) von ε .

Satz 2.3 (siehe [24])

Seien die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt. Außerdem gelte $u \in H^2(\Omega)$. Dann gibt es eine Konstante C unabhängig von ε , so daß die a priori Abschätzung

$$\varepsilon^{3/2} \|u\|_{2,\Omega} + \varepsilon^{1/2} \|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega} \quad (2.8)$$

gilt.

Besitzt u exponentielle Randgrenzsichten, so ist (2.8) scharf.

2.2 Zerlegungen T_h von Ω

Wir charakterisieren die im folgenden behandelten Zerlegungen T_h von Ω in Dreiecks- und Viereckszellen $K \in T_h$.

Mit N_C bezeichnen wir die Anzahl aller Zellen K , mit N_E die Anzahl aller Kanten E der Zerlegung T_h und mit N_V die Anzahl aller Ecken der Zerlegung. Weiterhin seien mit E_j , $j = 1, \dots, N_E$, die Kanten der Zellen $K \in T_h$ bezeichnet. Abb. 2.1 zeigt eine Zerlegung sowie die entsprechenden Kanten und Ecken.

Nun definieren wir einige Indexmengen, um später besser mit den Ecken der Zerlegung T_h arbeiten zu können. Wir führen globale und lokale Numerierungen ein. Dabei vergeben wir globale, d. h. für die gesamte Zerlegung eindeutige Nummern, sowie lokale, d. h. pro Objekt eindeutige Nummern.

- $I(K)$ sei die Indexmenge der globalen Nummern aller Ecken einer Zelle K .
- Sei $\Gamma \subset \partial\Omega$. Dann bezeichnet $I(\Gamma)$ die Menge der Indizes aller Ecken, die auf dem Randstück Γ liegen. Insbesondere bezeichnet $I(\Gamma_D)$ die Indexmenge aller Ecken auf sämtlichen Dirichlet-Randstücken.
- Es sei $I(\Omega) := \bigcup_{K \in T_h} I(K)$ die Indexmenge aller Ecken der Zerlegung T_h .

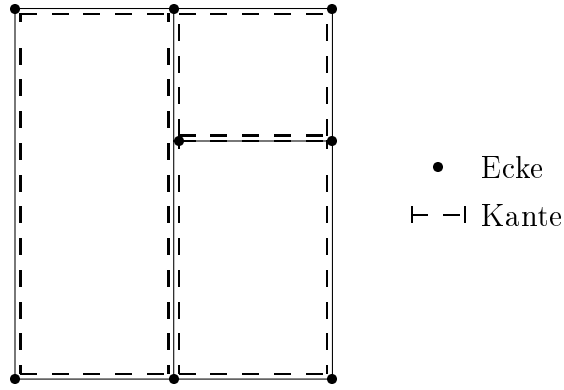


Abbildung 2.1: Zulässige Zerlegung mit Kanten und Ecken

Definition 2.4

Sei T_h eine beliebige Zerlegung von Ω . Dann definiert ∂T_h mit

$$\partial T_h := \{E \mid E \text{ ist Kante von } K, K \in T_h\}$$

die Menge aller Kanten der Zerlegung und

$$\partial T_h^D := \{E \in \partial T_h \mid E \subset \Gamma_D\}$$

die Menge aller Dirichlet-Kanten der Zerlegung T_h . Die Menge ∂T_h^N wird für die Neumann-Kanten analog definiert, d. h.

$$\partial T_h^N := \{E \in \partial T_h \mid E \subset \Gamma_N\}.$$

Die Kanten E werden hier als offene 1D-Objekte angenommen, d. h., die Endpunkte gehören nicht zu E . Die Zellen K werden ebenfalls als offen vorausgesetzt.

Definition 2.5

Sei T_h eine Menge konvexer, offener Dreiecks- oder Viereckszellen K_i , $i = 1, \dots, N_C$, mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \bigcup_{i=1}^{N_C} \overline{K}_i = \overline{\Omega},$$

$$(ii) \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

$$(iii) \quad \bigcup_{E \in \partial T_h^D} \overline{E} \equiv \overline{\Gamma}_D, \quad \bigcup_{E \in \partial T_h^N} \overline{E} \equiv \overline{\Gamma}_N.$$

Dann heißt T_h zulässige Zerlegung von Ω .

Im weiteren setzen wir voraus, daß jede verwendete Zerlegung eine zulässige Zerlegung ist. Dies beinhaltet, daß Ω ein polygonal berandetes Gebiet ist.

Definition 2.6

Sei T_h eine zulässige Zerlegung und gelte außerdem folgende Eigenschaft:

$$(iv) \quad \forall E_i, E_j \in \partial T_h, i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset.$$

Dann heißt T_h konforme Zerlegung von Ω .

Abb. 2.2 zeigt ein Beispiel für eine konforme, zulässige Zerlegung, d. h., hängende Knoten sind nicht erlaubt.

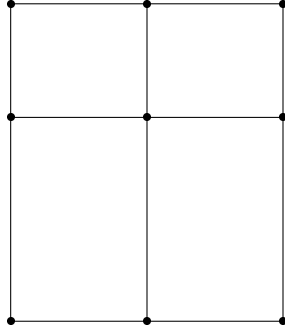


Abbildung 2.2: Beispiel einer konformen Zerlegung

Der Parameter h bezeichnet das Maximum der Zelldurchmesser $h_K = \text{diam}(K)$ aller Zellen $K \in T_h$.

2.3 Konforme P_k - und Q_k -Elemente

In diesem Abschnitt wollen wir konforme Finite-Elemente auf konformen Zerlegungen T_h von Ω betrachten. Zunächst definieren wir die einzelnen Elemente jeweils auf einem Referenzelement. Anschließend werden wir den diskreten Raum $V_h(\Omega)$ stetiger, elementweise definierter Funktionen über Ω einführen.

Als Referenzelement \hat{K} für die Dreieckselemente benutzen wir ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Wir führen eine affine Referenztransformation $\psi_K : \hat{K} \rightarrow K$ ein und definieren den Raum $P_k(K)$ der Polynome vom Grade kleiner gleich k als

$$P_k(K) := \{q = \hat{q} \circ \psi_K^{-1} \mid \hat{q} \in \text{span}\{\hat{x}^\alpha \hat{y}^\beta, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq k\}\}.$$

Für die Viereckselemente benutzen wir das Referenzelement $\hat{K} = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Mit einer affinen Referenztransformation $\psi_K : \hat{K} \rightarrow K$ sind nur Parallelogramme erzeugbar. Um beliebige konvexe Vierecke K als Bild von \hat{K} beschreiben zu können, benutzen wir daher eine i. a. bilineare Referenztransformation ψ_K . Wir definieren nun den Raum $Q_k(K)$ der Kompositionen von ψ_K^{-1} mit Polynomen auf dem Referenzelement, bei denen der Grad in jeder Variablen höchstens k beträgt, als

$$Q_k(K) := \{q = \hat{q} \circ \psi_K^{-1} \mid \hat{q} \in \text{span}\{\hat{x}^\alpha \hat{y}^\beta, 0 \leq \alpha, \beta \leq k\}\}.$$

Mit Hilfe von z. B. Lagrange- oder Legendre-Polynomen lassen sich entsprechende Basisfunktionssätze in $P_k(\hat{K})$ und $Q_k(\hat{K})$ konstruieren.

Kommen wir nun zur Definition des konformen, diskreten Raumes V_h ($V_h \subset V_{0,D}$)

$$V_h(\Omega) := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_K \in P_K \forall K \in T_h, v|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (2.9)$$

mit

$$P_K \hat{=} \begin{cases} P_k(K) & \text{falls } K \text{ ein Dreieck ist} \\ Q_k(K) & \text{falls } K \text{ ein Viereck ist.} \end{cases}$$

Jeder Basisfunktion φ_j in V_h wird ein Freiheitsgrad B_j zugeordnet. Im Fall konformer Diskretisierung mit linearen Elementen korrespondieren die Freiheitsgrade beispielsweise mit Funktionswerten in den Ecken der Zerlegung T_h . Für allgemeinere Elemente können als weitere Möglichkeit auch Funktionswerte in den Seitenmitten sowie Mittelwerte über Kanten bzw. Flächen als Freiheitsgrade eingeführt werden. Dabei bleibt der lokale Raum P_K unbeeinflusst von der Wahl der Freiheitsgrade. Hingegen sind der globale FE-Raum V_h und der Interpolationsoperator I_h von dieser Wahl abhängig. Eine detaillierte Definition findet man z. B. bei Ciarlet/Lions [11].

Analog zur Definition der Indexmengen der Ecken von T_h in Abschnitt 2.2 führen wir nun Indexmengen für die Freiheitsgrade in V_h ein. Dabei vergeben wir wiederum globale Nummern für die gesamte Zerlegung sowie lokale Nummern bzgl. einzelner Objekte.

- $\Lambda(K)$ sei die Indexmenge der globalen Nummern aller Freiheitsgrade in V_h , die zu einem Element K gehören.
- Es sei $\Gamma \subset \partial\Omega$. $\Lambda(\Gamma)$ bezeichnet die Menge der Indizes aller Freiheitsgrade, die auf dem Randstück Γ liegen. Desweiteren ist $\Lambda(\Gamma_D)$ die Indexmenge aller Freiheitsgrade auf sämtlichen Dirichlet-Randstücken.
- Es sei $\Lambda = \Lambda(\Omega) := \bigcup_{K \in T_h} \Lambda(K)$ die Indexmenge aller Freiheitsgrade in V_h .

Die Anzahl aller Freiheitsgrade $N_{DOF} = |\Lambda|$ ergibt sich hier als

$$N_{DOF} = N^I + (k-1)(N_E^I + N_E^N) + N_V^I + N_V^N.$$

Dabei bezeichnet N^I die Anzahl aller innerhalb der Elemente liegenden Freiheitsgrade, $N_E^I + N_E^N$ die Anzahl aller inneren und aller Neumann-Kanten sowie $N_V^I + N_V^N$ die Anzahl aller inneren Ecken bzw. aller Ecken auf einem Neumann-Rand. Ecken sind hierbei als Ecken von Zellen $K \in T_h$ im geometrischen Sinne zu verstehen.

2.4 Nichtkonforme P_1 - und Q_1^{rot} -Elemente

In diesem Abschnitt soll der Raum der nichtkonformen stückweise linearen bzw. bilinearen Finiten-Elemente auf einer konformen Zerlegung eingeführt werden.

Mit B_j bezeichnen wir die Mittelpunkte der Kanten E_j , $j = 1, \dots, N_E$. Die Knoten B_j seien so numeriert, daß die inneren Knoten die Nummern $j = 1, \dots, N_E^I$, die Neumann-Knoten die Nummern $j = N_E^I + 1, \dots, N_E^I + N_E^N$ und die Dirichlet-Knoten die Nummern $j = N_E^I + N_E^N + 1, \dots, N_E^I + N_E^N + N_E^D$ erhalten, wobei $N_E = N_E^I + N_E^N + N_E^D$ ist.

Wir betrachten zunächst die nichtkonformen P_1 -Elemente (vgl. [12]). Das bedeutet, daß T_h hier ausschließlich aus Dreiecken besteht, und wir definieren als Raum V_h der nichtkonformen, stückweise linearen Finiten-Elemente

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} v|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in T_h, \quad v \text{ ist stetig in } B_j, \\ j = 1, \dots, N_E^I, \quad \text{und } v(B_j) = 0, \quad j \in \Lambda(\Gamma_D) \end{array} \right\}. \quad (2.10)$$

Die Funktionen von V_h sind stetig in den Kantenmittelpunkten, können jedoch entlang der Kanten der Dreiecke und am Rand des Gebietes unstetig sein. Somit gilt $V_h \not\subset V_{0,D}$. Wir versehen V_h mit der Standardbasis

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_E - N_E^D} \quad \text{mit} \quad \varphi_i \in V_h \quad \text{und} \quad \varphi_i(B_j) = \delta_{ij}.$$

Eine derartige Basisfunktion ist in Abb. 2.3 zu sehen. Eine Erweiterung der nichtkonformen P_1 -Elemente auf drei Dimensionen ist möglich (vgl. [12]).

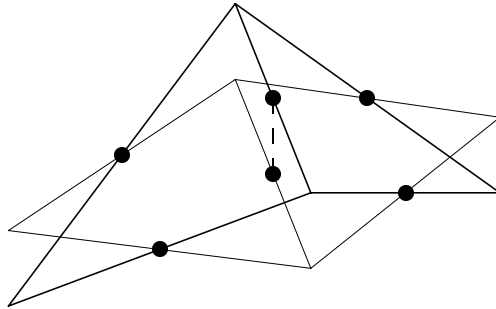


Abbildung 2.3: Basisfunktion bei P_1 -Elementen

Lemma 2.7

Die Basisfunktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_E - N_E^D}$ von V_h sind im 2D-Fall L^2 -orthogonal.

Beweis:

Der Durchschnitt der Träger zweier verschiedener Basisfunktionen besteht aus höchstens einem Dreieck. Sei K_{ij} der gemeinsame Träger von φ_i und φ_j ($i \neq j$). Die Funktion $\varphi_i \varphi_j$

ist auf K_{ij} eine quadratische Funktion. Somit ist das Skalarprodukt $(\varphi_i, \varphi_j)_\Omega = (\varphi_i, \varphi_j)_{K_{ij}}$ mit der Seitenmittelpunktsregel exakt auswertbar. Man sieht unmittelbar $(\varphi_i, \varphi_j)_\Omega = 0$. \square

Kommen wir nun zu den Viereckselementen. Um diese Elemente definieren zu können, verwenden wir das Referenzelement $\hat{K} = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Für jedes Viereck $K \in T_h$ definieren wir die zugehörige bilineare Referenztransformation $\psi_K : \hat{K} \rightarrow K$.

Der Raum $Q_1^{rot}(K)$ ist dann wie folgt gegeben

$$Q_1^{rot}(K) := \{q = \hat{q} \circ \psi_K^{-1} \mid \hat{q} \in \text{span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2\}\}.$$

Wir ordnen jeder inneren Kante $\overline{E}_j = \overline{K}_k \cap \overline{K}_l, k < l$, einen Normaleneinheitsvektor n_j zu, der so gerichtet ist, daß er äußerer Normaleneinheitsvektor zur Zelle K_k ist. Für Randkanten $E_j \subset \partial\Omega$ sei n_j die äußere Normale auf E_j bzgl. Ω . Ferner bezeichnen wir mit n_K den äußeren Normaleneinheitsvektor bzgl. der Zelle K .

Als Sprung von v über E_j bezeichnen wir die Größe

$$[[v]]_{E_j}(x) := \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +0} v(x - tn_j) - \lim_{t \rightarrow +0} v(x + tn_j) & E_j \not\subset \partial\Omega \\ \lim_{t \rightarrow +0} v(x - tn_j) & E_j \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

Entsprechend definieren wir den Mittelwert von v entlang E_j als

$$\langle |v| \rangle_{E_j}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow +0} v(x - tn_j) + \lim_{t \rightarrow +0} v(x + tn_j)) & E_j \not\subset \partial\Omega \\ \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} v(x - tn_j) & E_j \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Obige Definitionen für Randkanten entsprechen dem Fall einer Fortsetzung von v mit Null außerhalb von Ω .

Mit Hilfe des Raumes $Q_1^{rot}(K)$ können wir nun auch hier einen diskreten Raum V_h definieren. Wir unterscheiden die punktwert-orientierten Elemente, d. h.

$$V_h^{(po)} := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} v|_K \in Q_1^{rot}(K), \forall K \in T_h, v \text{ ist stetig in } B_j \\ \forall j = 1, \dots, N_E^I, v(B_j) = 0, \forall j \in \Lambda(\Gamma_D) \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

und die mittelwert-orientierten Elemente, d. h.

$$V_h^{(mo)} := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} v|_K \in Q_1^{rot}(K), \forall K \in T_h, \int_{E_j} [[v]]_{E_j} ds = 0 \\ \forall j = 1, \dots, N_E^I, \int_{E_j} v ds = 0, \forall j \in \Lambda(\Gamma_D) \end{array} \right\}. \quad (2.14)$$

Für das nichtkonforme P_1 -Element fallen die punktwert-orientierte und die mittelwert-orientierte Version zusammen.

Es läßt sich auch für die nichtkonformen Elemente ein Raum V_h zu einer Zerlegung T_h , die aus Dreiecken und Vierecken besteht, konstruieren.

Die Anzahl aller Freiheitsgrade N_{DOF} im Falle einer nichtkonformen Diskretisierung mit P_1 -, Q_1^{rot} -Elementen oder einer gemischten Variante ergibt sich als

$$N_{DOF} = N_E^I + N_E^N = N_E - N_E^D.$$

2.5 Diskretes Problem

Mit dem endlich dimensionalen, konformen bzw. nichtkonformen Raum V_h können wir nun das diskrete Problem

$$\begin{aligned} \text{finde } u_h \in V_h : \\ a_h(u_h, v_h) &= f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (2.15)$$

formulieren. Dabei definieren wir die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $f_h(\cdot) : V_h \rightarrow \mathbb{R}$ elementweise als

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_K + (b \cdot n u, v)_{\Gamma_N} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{1}{2} ((b \cdot \nabla u, v)_K - (b \cdot \nabla v, u)_K) + (c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b, uv)_K \right), \\ f_h(v) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v)_K + (g_N, v)_{\Gamma_N}, \end{aligned}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$.

Dies sind die diskreten Versionen der früher in diesem Kapitel eingeführten Linear- bzw. Bilinearform $f(\cdot)$ und $a(\cdot, \cdot)$. Im konformen Fall läßt sich die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ durch partielle Integration in die Form $a(\cdot, \cdot)$ überführen; dann gilt für die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $f_h(\cdot) : V_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$a_h(u, v) = a(u, v), \quad f_h(v) = f(v) \quad \forall u, v \in V_h.$$

Im konformen Fall liefert das Lax-Milgram-Lemma analog zum Beweis von Satz 2.2 die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Auf dem Raum V_h führen wir nun eine gitterabhängige Halbnorm $|\cdot|_{1,h}$ und gitterabhängige Normen $\|\cdot\|_{0,h}$ und $\|\cdot\|_{1,h}$ durch

$$|v|_{1,h} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

$$\|v\|_{0,h} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

$$\|v\|_{1,h} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

ein.

Zur Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram ist die Koerzivität der Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ erforderlich. Diese läßt sich in der Norm $(\varepsilon|\cdot|_{1,h}^2 + \|\cdot\|_{0,h}^2)^{\frac{1}{2}}$ zeigen.

2.6 Interpolationsoperator, Knotenfunktionale und FE-Isomorphismen

Zu jedem der eingeführten FE-Räume $V_h = \text{span}\{\varphi_j, j \in \Lambda \setminus \Lambda(\Gamma_D)\}$ definieren wir einen *globalen Interpolationsoperator* $i_h : H^2(\Omega) \cap V_{0,D}(\Omega) \rightarrow V_h$ durch die Vorschrift

$$i_h v(x) := \sum_{j \in \Lambda \setminus \Lambda(\Gamma_D)} N_j(v) \varphi_j(x) \quad (2.19)$$

mit den Knotenfunktionalen

$$N_j(v) := \begin{cases} v(B_j) & \text{für punktwert-orientierte Elemente} \\ |E_j|^{-1} \int_{E_j} v \, ds & \text{für mittelwert-orientierte Elemente.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Dabei fassen wir die konformen Elemente als punktwert-orientiert auf.

Man beachte, daß der Interpolationsoperator i_h für mittelwert-orientierte Elemente auf dem Raum $H^1(\Omega)$ definiert ist und damit auch im Fall nichtglatter Funktionen anwendbar ist.

Wir benötigen desweiteren einen Operator, der einen Knotenvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_{DOF}}$ auf eine Funktion aus V_h abbildet. Zu diesem Zweck führen wir den Operator κ wie folgt ein:

$$\kappa : \mathbb{R}^{N_{DOF}} \rightarrow V_h, \quad \text{mit } \kappa(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N_{DOF}} u_i \varphi_i. \quad (2.21)$$

Der Operator κ wird als FE-Isomorphismus bezeichnet.

Kapitel 3

Mortar-Technik

Die Mortar-Element-Methode wurde erstmals 1989 von Bernardi, Maday und Patera [5] vorgestellt und zunächst für die Behandlung komplexer Geometrien mit Spektral-Methoden benutzt. Später wurde sie dann auch auf die FEM erweitert.

Die Grundidee der Mortar-Element-Technik besteht darin, daß man ein Gebiet Ω in mehrere Teilgebiete Ω_k zerlegt, auf denen das Randwertproblem (2.1) unabhängig voneinander diskretisiert werden kann. Für die Kontaktkanten sind dann zusätzliche Kopplungsbedingungen einzuführen, die die Stetigkeitsforderung für konforme Elemente abschwächt.

Braess, Dahmen und Wieners [6] haben, ausgehend von einer Sattelpunktsformulierung für das Poisson-Problem, Konvergenzeigenschaften der Mortar-Element-Methode für lineare bzw. bilineare Elemente analysiert. Ben Belgacem [4] studiert die Erweiterung auf Elemente höherer Ordnung. Marcinkowski [22] betrachtet die Mortar-Technik für das Poisson-Problem bei Verwendung von Crouzeix-Raviart-Elementen.

Hier soll die Mortar-Methode auf Konvektions-Diffusions-Gleichungen erweitert werden. Außerdem wird untersucht, wie Stabilisierungstechniken (Stromlinien-Diffusions-FEM, vgl. Kapitel 4 oder die upwind-Methode, vgl. Kapitel 5) im Rahmen der Mortar-Technik verwendet werden können.

Für die Analyse und Implementierung der Mortar-Element-Methode gibt es zwei äquivalente Zugänge. Dies ist zum einen die Betrachtung als gemischtes Problem und zum anderen als nichtkonforme Methode. Wir werden hier beide Zugänge vorstellen und deren Äquivalenz beweisen. Für die Implementierung benutzen wir das gemischte Problem. Für einige Beweise ist allerdings die nichtkonforme Herangehensweise besser geeignet.

3.1 Problemdefinition und Gebietszerlegung

Ausgangspunkt ist die Konvektions-Diffusions-Gleichung (2.1) aus Abschnitt 2.1 für die skalare Unbekannte u in einem beschränkten, polygonal berandeten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Auf dem Dirichlet-Rand $\Gamma_D \neq \emptyset$ werden homogene Dirichlet-Randbedingungen gewählt, d. h. $u = 0$ auf Γ_D .

Das Gebiet Ω wird nun in mehrere polygonal berandete, offene Teilgebiete $\Omega_k, k = 1, \dots, N_\Omega$, zerlegt, wobei

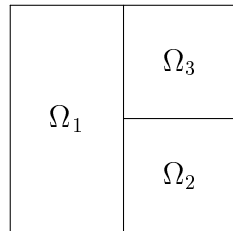
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_\Omega} \bar{\Omega}_k \quad \text{und} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \forall k \neq l.$$

N_Ω ist die Anzahl der Teilgebiete.

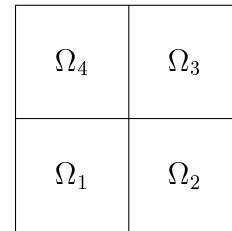
$\Gamma_{kl} = \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l$ mit $\text{meas}(\Gamma_{kl}) \neq 0$ (Γ_{kl} besteht nicht nur aus Punkten) bezeichnet die *Verbindung* zwischen den Gebieten Ω_k und Ω_l . Γ_{kl} wird hier als abgeschlossen definiert. Mit S bezeichnen wir das Skelett aller Verbindungen:

$$S = \bigcup_{k,l} \Gamma_{kl}.$$

Wir wollen uns hier auf konforme Grundzerlegungen von Ω in Teilgebiete $\Omega_k, k = 1, \dots, N_\Omega$, (vgl. Abb. 3.1) beschränken, d. h., daß jedes Γ_m eine vollständige Randkante der beiden anliegenden Gebiete $\Omega_{k(m)}$ und $\Omega_{l(m)}$ sein muß. Eine Erweiterung auf den nichtkonformen Fall ist jedoch möglich (vgl. z. B. [4]).



nichtkonformes Grundgitter



konformes Grundgitter

Abbildung 3.1: Grundgittervernetzungen

Da alle Teilgebiete Ω_k polygonal berandete sind, kann man eine Verbindung Γ_{kl} auch als Vereinigung der Abschlüsse von Teilgebietskanten Γ_m auffassen. Die Γ_m werden als *Mortar-Kanten* (*Mortars*) bezeichnet. Somit erhalten wir eine äquivalente Beschreibung des Skeletts S als

$$S = \bigcup_{m=1}^M \bar{\Gamma}_m.$$

Hierbei ist M die Anzahl der Mortar-Kanten.

Bezüglich einer jeden Mortar-Kante wird unter den hier benachbarten Gebieten eine Mortar- und eine Nicht-Mortar-Seite beliebig gewählt. Mit dieser Wahl definieren wir für jeden Mortar Γ_m eine Abbildung $m \mapsto (k(m), l(m))$, wobei $\Gamma_m \subset \Gamma_{k(m)l(m)}$ und $\Omega_{l(m)}$ die *Mortar-Seite* und $\Omega_{k(m)}$ die *Nicht-Mortar-Seite* von Γ_m repräsentiert.

In Abb. 3.2 ist anhand einer Beispielzerlegung eine mögliche Wahl der Mortar-Seiten dargestellt. (Zwischen Ω_2 und Ω_4 werden keine Mortars benötigt, da angenommen wird, daß die entsprechenden Zerlegungen hier zusammenpassen.) Wir haben drei *Verbindungen*

$$\begin{aligned}\Gamma_{12} = \Gamma_{21} &= \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 \\ \Gamma_{13} = \Gamma_{31} &= \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_3 \\ \Gamma_{34} = \Gamma_{43} &= \overline{\Omega}_3 \cap \overline{\Omega}_4\end{aligned}$$

und wählen die Mortar- bzw. Nicht-Mortar-Seiten so, daß

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &\subset \Gamma_{21} \\ \Gamma_2, \Gamma_3 &\subset \Gamma_{31} \\ \Gamma_4 &\subset \Gamma_{12} \\ \Gamma_5 &\subset \Gamma_{34},\end{aligned}$$

d. h., für Γ_1, Γ_2 und Γ_3 ist die Mortar-Seite immer Ω_1 . Bei Γ_4 hingegen haben wir Ω_2 als Mortar-Seite gewählt.

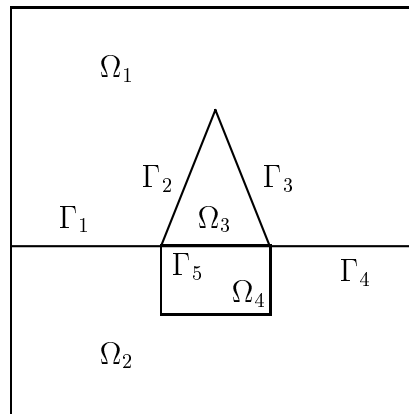


Abbildung 3.2: Zerlegung mit Verbindungen und Mortars

Auf die Bedeutung von Mortar- und Nicht-Mortar-Seite wird später noch genauer eingegangen.

3.2 Formulierung der Variationsgleichung als gemischtes Problem

Ziel dieses Abschnittes ist es, den technischen Apparat für die Kapitel 4 und 5 bereitzustellen. Eine wesentliche Grundlage bildet die Arbeit von Braess, Dahmen und Wieners [6], die sich mit Mortar-Techniken für die Poisson-Gleichung und konformen, linearen Finiten-Elementen auseinandersetzt. Das Konzept wird hier auf Konvektions-Diffusions-Gleichungen erweitert. Außerdem werden hier auch konforme Elemente höherer Ordnung und lineare (bilineare), nichtkonforme Elemente betrachtet.

Wir führen nun den Raum

$$X := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{\Omega_k} \in H^1(\Omega_k), v|_{\partial\Omega_k \cap \Gamma_D} = 0, k = 1, \dots, N_\Omega\} \quad (3.1)$$

mit der Norm

$$\|v\|_{1*} := \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \|v\|_{1,\Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

ein.

Desweiteren benötigen wir zur späteren Beschreibung der Lagrange-Multiplikatoren den Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)$, der sich von $H_0^{1/2}(\Gamma_m)$ unterscheidet. Er wird definiert als

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_m) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma_m) \mid F(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega_{k(m)})\}. \quad (3.3)$$

Hierbei ist $F : H^{1/2}(\Gamma_m) \rightarrow L^2(\partial\Omega_{k(m)})$ mit

$$F(v) := \begin{cases} v(x) & \text{falls } x \in \Gamma_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.4)$$

ein Fortsetzungsoperator, mittels dessen die Funktion v von einer Mortar-Kante Γ_m mit 0 auf den gesamten Rand $\partial\Omega_{k(m)}$ des zugehörigen Gebietes auf der Nicht-Mortar-Seite fortgesetzt wird. Als Norm benutzen wir

$$\|v\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} := \|F(v)\|_{1/2,\partial\Omega_k} = \inf_{z \in H^1(\Omega_k), z|_{\partial\Omega_k} = F(v)} \|z\|_{1,\Omega_k}. \quad (3.5)$$

$H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)$ kann auch als Raum der Spuren aller Funktionen aus $H^1(\Omega_{k(m)})$, die auf dem Randteil $\partial\Omega_k \setminus \Gamma_m$ identisch Null sind, aufgefaßt werden.

Somit können wir nun den Raum

$$X_{00} := \left\{ v \in X \mid [[v]]_{\Gamma_m} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_m) \forall \Gamma_m \subset S \right\} \quad (3.6)$$

mit der Norm

$$\|v\|_X := \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \|v\|_{1,\Omega_k}^2 + \sum_{\Gamma_m \subset S} \|[[v]]_{\Gamma_m}\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_m)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

definieren. Dabei bezeichnet $[[v]]_{\Gamma_m}$ den Sprung über Γ_m (vgl. Abschnitt 2.4).

Der Raum X_{00} , ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_X$, ist ein Banach-Raum. Für die Norm $\|\cdot\|_{1*}$ gilt dies nicht. Einen Beweis findet man in Bemerkung 2.1 in [6].

Auf dem Skelett S führen wir den Raum der Lagrange-Multiplikatoren M

$$M := \prod_{\Gamma_m \subset S} \left(H_0^{1/2}(\Gamma_m) \right)' \quad (3.8)$$

mit der Norm

$$\|\mu\|_M := \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \|\mu\|_{\left(H_0^{1/2}(\Gamma_m) \right)'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

ein. Dabei bezeichnet $\left(H_0^{1/2}(\Gamma_m) \right)'$ den Dualraum zu $H_0^{1/2}(\Gamma_m)$.

Um eine äquivalente Charakterisierung des Lösungsraumes V als $V_{0,D}$ aus (2.3) zu erhalten, führen wir eine zusätzliche Nebenbedingung

$$\langle \mu, [[v]]_{\Gamma_m} \rangle_{\Gamma_m} = 0 \quad \forall \mu \in M \quad (3.10)$$

auf jeder Mortar-Kante Γ_m , $m = 1, \dots, M$, ein.

Somit definieren wir den Lösungsraum $V = V_{0,D} \subset X_{00}$, wobei hier die Nebenbedingungen bereits für alle Elemente erfüllt sind, als

$$V := \{v \in X_{00} \mid \langle \mu, [[v]]_{\Gamma_m} \rangle_{\Gamma_m} = 0 \quad \forall \mu \in M, \forall \Gamma_m \subset S\}. \quad (3.11)$$

Wir erhalten als gemischtes, stetiges Problem:

$$\begin{aligned} \text{finde } (u, \lambda) \in X_{00} \times M : \\ a(u, v) + d(\lambda, v) &= f(v) & \forall v \in X_{00} \\ d(\mu, u) &= 0 & \forall \mu \in M \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit

$$\begin{aligned}
a(u, v) &:= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_{\Omega_k} + (b \cdot n u, v)_{\Gamma_N} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \left(\frac{1}{2} ((b \cdot \nabla u, v)_K - (b \cdot \nabla v, u)_K) + (c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b, uv)_K \right), \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$d(\lambda, v) := \sum_{\Gamma_m \subset S} \langle \lambda, [[v]]_{\Gamma_m} \rangle_{\Gamma_m}, \quad (3.14)$$

$$f(v) := \sum_{k=1}^{N_\Omega} ((f, v)_{\Omega_k} + (g_N, v)_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_k}). \quad (3.15)$$

Wir erweitern hier $a(\cdot, \cdot)$ und $f(\cdot)$ aus Abschnitt 2.1 auf den Raum X_{00} , d. h., die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist teilgebietsweise definiert wie in (2.5) und auch die Definition der Linearform $f(\cdot)$ entspricht auf jedem Teilgebiet Ω_k der in (2.5).

3.3 LBB-Bedingung

Wir wollen hier die Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) behandeln, mit der die Eindeutigkeit der Lösung gesichert werden kann.

Lemma 3.1

Für das Raumpaar $X_{00} \times M$ gilt die LBB-Bedingung

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X_{00}} \frac{d(\mu, v)}{\|\mu\|_M \|v\|_X} \geq \beta > 0. \quad (3.16)$$

Die Gültigkeit dieser Bedingung wurde bereits in [6] nachgewiesen.

Wir führen einen linearen Operator B wie folgt ein:

$$\begin{aligned}
B : X_{00} &\rightarrow M' \\
\langle Bu, \mu \rangle &= d(\mu, u) \quad \forall \mu \in M
\end{aligned} \quad (3.17)$$

mit

$$M' := \prod_{\Gamma_m \subset S} H_{00}^{1/2}(\Gamma_m).$$

Außerdem definieren wir B' als dualen Operator zu B .

Mit

$$\begin{aligned}
\|Bv\|_{M'} &= \sup_{\mu \neq 0} \frac{|\langle Bv, \mu \rangle|}{\|\mu\|_M} \\
&\leq \frac{\left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \|\mu\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_m))'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \| [v]_{\Gamma_m} \|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\|\mu\|_M} \\
&= \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \| [v]_{\Gamma_m} \|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|v\|_X
\end{aligned}$$

folgt die Stetigkeit des linearen Operators B .

3.4 Eine äquivalente Formulierung

Das Problem (3.12) ist zu

$$\begin{aligned}
&\text{finde } u \in V : \\
&a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

äquivalent in folgendem Sinne.

Ist $(u, \lambda) \in X_{00} \times M$ Lösung von (3.12), so ist $u \in V$, und u ist Lösung von (3.18). Ist $u \in V$ Lösung von (3.18), so existiert ein $\lambda \in M$ mit (u, λ) ist Lösung von (3.12).

Nachweis:

$$(3.12) \rightarrow (3.18)$$

Sei (u, λ) eine Lösung von (3.12). Dann gilt wegen $d(\mu, u) = 0 \quad \forall \mu \in M$, daß $u \in V$ ist. Mit $d(\lambda, v) = 0$ folgt somit für alle $v \in V$:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

d. h., u ist Lösung von (3.18).

$$(3.18) \rightarrow (3.12)$$

Die zweite Gleichung von (3.12) ist mit $u \in V$ sofort erfüllt. Die erste Gleichung dient der Bestimmung von λ

$$d(\lambda, v) = f(v) - a(u, v) = \langle f^*, v \rangle_{\Omega}. \tag{3.19}$$

Für den zu B aus (3.17) dualen Operator B' folgt mittels der LBB-Bedingung:

$$\|B'\lambda\|_{(X_{00})'} = \sup_{v \in X_{00}} \frac{d(\lambda, v)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\lambda\|_M.$$

Folglich ist B' injektiv auf dem Bild von M . Damit nun die Gleichung $B'\lambda = f^*$ eine Lösung hat, muß $f^* \in \text{Im}(B')$ sein. Mit dem Satz von Banach (closed range theorem) folgt, daß das Bild von B' gleich der polaren Menge

$$V^0 := \{f \in (X_{00})' \mid \langle f, v \rangle = 0 \forall v \in V\}$$

ist.

Das Funktional auf der rechten Seite von (3.19) ist aus V^0 , denn u ist Lösung von (3.18). Somit existiert genau ein λ als Lösung von (3.19) und schließlich ist (u, λ) Lösung von (3.12).

3.5 Diskretes Problem

3.5.1 Der Fall konformer Teilgebietsdiskretisierungen

Wir führen den endlich dimensionalen Raum $X_h \subset X_{00}$ wie folgt ein:

$$X_h := \{v \in X_{00} \mid v|_K \in P_K \forall K \in T_h^k \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\}\}. \quad (3.20)$$

Hierbei benutzen wir quasi-uniforme Zerlegungen T_h^k der Teilgebiete Ω_k . Die Zerlegungen T_h^k und T_h^l müssen an der Verbindung Γ_{kl} nicht zusammenpassen. Für die Elemente K sind sowohl Dreiecks- als auch Viereckselemente zugelassen. Dementsprechend ergibt sich der Raum P_K als:

$$P_K := \begin{cases} P_{r_k}(K) & \text{falls } K \text{ Dreieck} \\ Q_{r_k}(K) & \text{falls } K \text{ Viereck.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Dabei sind $P_{r_k}(K)$ bzw. $Q_{r_k}(K)$ die Räume aus Abschnitt 2.3. Wir verwenden innerhalb eines Teilgebietes Ω_k nur Elemente der gleichen Ordnung r_k .

Wir führen nun noch die Menge der *Kreuzungspunkte* (*cross-points*) als

$$\mathcal{C} := \{x \in S \mid \exists m, m', 1 \leq m < m' \leq M \text{ mit } x = \bar{\Gamma}_m \cap \bar{\Gamma}_{m'}\} \quad (3.22)$$

und die Indexmenge aller in Kreuzungspunkten liegenden Freiheitsgrade als $\Lambda(\mathcal{C})$ ein. Ein Kreuzungspunkt entsteht auch, wenn sich nur zwei Mortars Γ_m und $\Gamma_{m'}$ berühren.

Die Forderung $v \in X_{00}$ beinhaltet, daß der Sprung entlang einer Mortar-Kante Γ_m in den Endpunkten dieser Kante identisch 0 ist. Da dies gerade die Stetigkeit in den Kreuzungspunkten erzwingt, können wir X_h alternativ als

$$X_h := \left\{ v \in X \mid \begin{array}{l} v|_K \in P_K \forall K \in T_h^k \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\}, \\ v \text{ ist stetig in } B_j, j \in \Lambda(\mathcal{C}) \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

definieren, wobei P_K wie in (3.21) gewählt wird.

An allen Mortar-Kanten muß man jetzt eine Mortar- und eine Nicht-Mortar-Seite festlegen. Die Wahl der Mortar-Seite ist beliebig. Wenn auf beiden Seiten eine uniforme Verfeinerung vorliegt, wählen wir i. a. die feinere Seite als Mortar-Seite. Wie im Abschnitt 3.1 werden wir die Nicht-Mortar-Seite der Mortar-Kante Γ_m mit $k = k(m)$ und die Mortar-Seite mit $l = l(m)$ bezeichnen.

Nun werden Lagrange-Multiplikatoren auf den Nicht-Mortar-Seiten eingeführt.

Seien a und b die Endpunkte von Γ_m und E eine Teilkante von Γ_m ($E \subset \Gamma_m$). Dann definieren wir $M_h \subset M$ als:

$$M_h := \left\{ v \in M \mid v|_{\Gamma_m} \in C^0(\Gamma_m), v|_E \in \begin{cases} P_{r_k-1}(E) & \text{falls } a \text{ oder } b \in \overline{E} \\ P_{r_k}(E) & \text{sonst} \end{cases} \right\}. \quad (3.24)$$

Die Abb. 3.3 zeigt eine Zerlegung und eine Funktion aus M_h für den Fall $r_k = 1$. Man sieht eine stückweise lineare Funktion, wobei diese auf den beiden äußeren Teilkanten konstant ist.

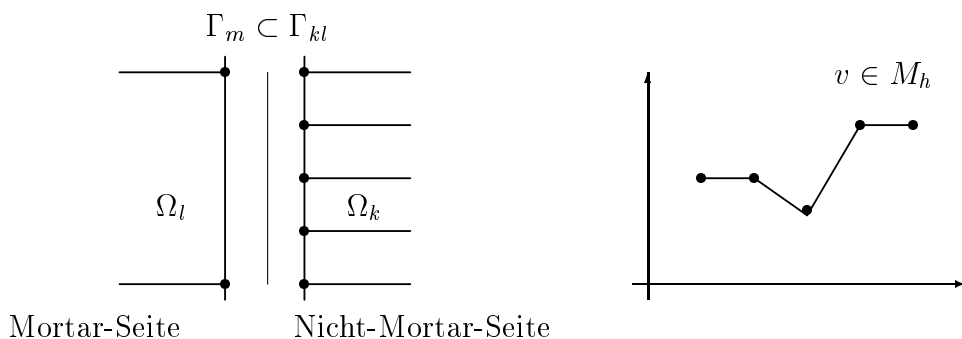


Abbildung 3.3: Beispiel einer Funktion aus M_h

Sei ferner

$$V_h := \left\{ v \in X_h \mid (\mu, [v]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} = 0 \quad \forall \mu \in M_h, \forall \Gamma_m \subset S \right\}. \quad (3.25)$$

Die Bilinearform $d_h(\cdot, \cdot)$ als diskrete Version von (3.14) sichert i. a. nicht, daß $V_h \subset V$. Notwendig dafür ist die Stetigkeit über Mortar-Kanten hinweg, die durch (3.25) nicht gesichert ist.

Insgesamt erhalten wir als gemischtes diskretes Problem:

$$\begin{aligned} \text{finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : \\ a(u_h, v_h) + d(\lambda_h, v_h) &= f(v_h) & \forall v_h \in X_h \\ d(\mu_h, u_h) &= 0 & \forall \mu_h \in M_h. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Könnte man $\|[[v]]_{\Gamma_m}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} \leq C(\|v\|_{1,\Omega_{k(m)}} + \|v\|_{1,\Omega_{l(m)}})$ für $v \in V_h$ abschätzen, so wäre die Elliptizität $a(v, v) \geq \|v\|_X^2$ unmittelbar gezeigt. Es gilt aber

$$\text{i. a. } \exists C : \|[[v]]_{\Gamma_m}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} \leq C(\|v\|_{1,\Omega_{k(m)}} + \|v\|_{1,\Omega_{l(m)}}) \quad \text{für } v \in V_h. \quad (3.27)$$

Somit ist es erforderlich, netzabhängige Normen

$$\|w\|_{1/2,h,\Gamma_m} := h^{-1/2}\|w\|_{0,\Gamma_m} \quad (3.28)$$

$$\|v\|_{1,h}^2 := \|v\|_{1*}^2 + \sum_{\Gamma_m \subset S} \|[[v]]_{\Gamma_m}\|_{1/2,h,\Gamma_m}^2 \quad (3.29)$$

$$\|\mu\|_{-1/2,h}^2 := \sum_{\Gamma_m \subset S} \|\mu\|_{-1/2,h,\Gamma_m}^2 = \sum_{\Gamma_m \subset S} h\|\mu\|_{0,\Gamma_m}^2 \quad (3.30)$$

zu verwenden.

Die Formulierung (3.26) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \text{finde } u_h \in V_h : \\ a(u_h, v_h) &= f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Hierbei benutzen wir die teilgebietsweise definierten Linear- bzw. Bilinearformen aus (3.13) – (3.15).

Der Beweis erfolgt wie im stetigen Fall. Man benötigt hier die Gültigkeit der diskreten LBB-Bedingung. Eine solche wird in [6] mit der gitterabhängigen Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ in der Form

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{d(\mu_h, v_h)}{\|\mu_h\|_{-1/2,h} \|v\|_{1,h}} \geq \beta > 0 \quad (3.32)$$

für $r_k = 1$, $k = 1, \dots, N_\Omega$, nachgewiesen.

In [4] wird die Bedingung auf beliebige r_k verallgemeinert.

3.5.2 Der Fall nichtkonformer Teilgebietsdiskretisierungen

Hier führen wir den endlich dimensionalen, nichtkonformen Raum X_h ein. Weil keine Stetigkeit über Elementgrenzen hinweg vorliegt, ist die Funktion $v_h|_{\Omega_k} \notin H^1(\Omega_k)$. Da außerdem in den Kreuzungspunkten keine Stetigkeit gegeben ist, gilt $X_h \not\subset X_{00}$. Es werden mittelwert-orientierte Elemente benutzt. Somit definieren wir:

$$X_h := \left\{ v \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} v|_K \in P_K \forall K \in T_h^k \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\}, \\ \int_{E_j} [[v]]_{E_j} ds = 0 \forall j \in I(\Omega) \setminus I(\partial\Omega), \int_{E_j} v ds = 0, \forall j \in I(\Gamma_D) \end{array} \right. \right\}. \quad (3.33)$$

Dabei bezeichnen die E_j die Kanten der Elemente (vgl. Abschnitt 2.4). Wir benutzen quasi-uniforme Zerlegungen T_h^k der Teilgebiete Ω_k . Die Zerlegungen T_h^k und T_h^l müssen an der Verbindung Γ_{kl} nicht zusammenpassen. Es sind auch hier Dreiecks- und Viereckselemente zugelassen. Der Raum P_K ist als

$$P_K := \begin{cases} P_1(K) & \text{falls } K \text{ Dreieck} \\ Q_1^{rot}(K) & \text{falls } K \text{ Viereck} \end{cases}$$

definiert. Die Räume $P_1(K)$ und $Q_1^{rot}(K)$ sind im Abschnitt 2.4 eingeführt worden.

An allen Mortar-Kanten muß jetzt, analog zum konformen Fall, eine Mortar- und eine Nicht-Mortar-Seite festgelegt werden. Die Wahl der Mortar-Seite ist beliebig. Die Nicht-Mortar-Seite der Mortar-Kante Γ_m wird wiederum mit $k = k(m)$ und die Mortar-Seite mit $l = l(m)$ bezeichnet.

Jetzt werden Lagrange-Multiplikatoren auf den Nicht-Mortar-Seiten eingeführt.

Sei E eine Teilkante von Γ_m ($E \subset \Gamma_m$). Dann definieren wir den Raum $M_h \subset M$ als:

$$M_h := \{v \in L^2(S) \mid v|_E \in P_0(E) \forall E \subset \Gamma_m \forall \Gamma_m \subset S\}. \quad (3.34)$$

Die Abb. 3.4 zeigt eine Zerlegung und eine Funktion aus M_h . Es handelt sich hierbei um eine i. a. unstetige, stückweise konstante Funktion.

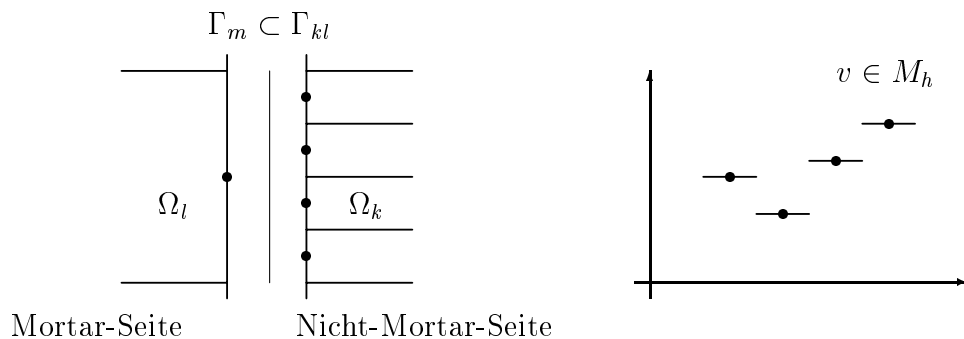


Abbildung 3.4: *Beispiel einer Funktion aus M_h*

Nun können wir auch hier das gemischte diskrete Problem:

$$\begin{aligned} \text{finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : \\ a_h(u_h, v_h) + d(\lambda_h, v_h) &= f(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \\ d(\mu_h, u_h) &= 0 \quad \forall \mu_h \in M_h \end{aligned} \quad (3.35)$$

formulieren. Die Bilinearformen $a_h(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ und die Linearform $f(\cdot)$ werden formal analog zu (3.13) - (3.15) definiert, sind jedoch hier auf den nichtkonformen Raum X_h erweitert,

d. h.

$$a_h(u, v) := \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \left(\varepsilon(\nabla u, \nabla v)_K + \frac{1}{2} ((b \cdot \nabla u, v)_K - (b \cdot \nabla v, u)_K) \right. \\ \left. + (c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b, uv)_K \right) + (b \cdot n, uv)_{\Gamma_N}.$$

3.6 Interpolation in V_h

3.6.1 Der Fall konformer Teilgebietsdiskretisierungen

Hier werden wir einen Interpolationsoperator $I_h : H^2(\Omega) \rightarrow V_h$ definieren, d. h., die Interpolierende erfüllt die Mortar-Bedingung. Wir setzen

$$I_h u := i_h u - k_h u \tag{3.36}$$

mit

$$i_h|_{\Omega_k} := i_h^k \quad \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\} \\ i_h^k u := \sum_{i \in \Lambda(\Omega_k)} N(B_i) \varphi_i \\ k_h u := \sum_{m=1}^M k_h^m u, \quad (k_h^m u)|_{\Omega \setminus \Omega_{k(m)}} = 0,$$

wobei $\Lambda(\Omega_k)$ die Indexmenge aller Freiheitsgrade im Teilgebiet Ω_k darstellt. Die Interpolierende $i_h^k u$ entspricht der Standard-Lagrange-Interpolierenden auf dem Teilgebiet Ω_k . Die Korrektur $k_h u$ sichert das Erfülltsein der Mortar-Bedingung, d. h.

$$d(\mu, I_h u) = d(\mu, i_h u - k_h u) = 0 \quad \forall \mu \in M_h.$$

Konstruktion der Korrektur $k_h u$

Zu jeder Mortar-Kante Γ_m ($m \in \{1, \dots, M\}$) führen wir den Raum \tilde{M}_h^m mit

$$\tilde{M}_h^m := \left\{ v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_m) \mid v = u|_{\Gamma_m}, u \in X_h(\Omega_{k(m)}) \right\}$$

ein, d. h., \tilde{M}_h^m enthält jeweils alle Spuren von Funktionen aus $X_h(\Omega_k)$ auf der jeweiligen Nicht-Mortar-Seite, wobei $v \in \tilde{M}_h^m$ an den Endpunkten von Γ_m gerade gleich 0 ist. Auf dem gesamten Skelett S definieren wir

$$\tilde{M}_h(S) := \prod_{\Gamma_m \subset S} \tilde{M}_h^m.$$

Wir führen nun den Projektionsoperator $\Pi_m : H_{00}^{1/2}(\Gamma_m) \rightarrow \tilde{M}_h^m$ ein, der den Sprung der Lagrange-Interpolierenden entlang der Mortar-Kante Γ_m auf die Nicht-Mortar-Seite projiziert. Für Π_m gelte für alle $w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)$ die Eigenschaft

$$(\Pi_m w, \mu)_{\Gamma_m} = (w, \mu)_{\Gamma_m} \quad \forall \mu \in M_h(\Gamma_m). \quad (3.37)$$

Die Räume M_h und \tilde{M}_h haben die gleiche Dimension. Dies gilt, da Funktionen aus \tilde{M}_h über einer Kante Γ_m in den Endpunkten verschwinden und sich somit die Anzahl der Freiheitsgrade bzgl. einer Mortar-Kante um zwei vermindert. Der Raum M_h wurde durch die Reduzierung des Polynomgrades in den äußeren Teilkanten einer Mortar-Kante um eins gerade so definiert, daß die Anzahl der Freiheitsgrade auch hier bzgl. jeder Mortar-Kante um zwei verringert wird.

Für die Projektion Π_m wurden bei Ben Belgacem [4] folgende Eigenschaften gezeigt.

Lemma 3.2

Sei Π_m ein Projektionsoperator, der die Bedingung (3.37) erfüllt. Dann gilt

$$\|\Pi_m w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} \leq C \|w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} \quad \forall w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_m).$$

Sei weiterhin $w \in H^{r_k+1/2}(\Gamma_m) \cap H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)$. Dann folgt

$$\|w - \Pi_m w\|_{0,\Gamma_m} + h_k^{1/2} \|w - \Pi_m w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)} \leq C h_k^{r_k+1/2} \|w\|_{r_k+1/2,\Gamma_m}. \quad (3.38)$$

Bemerkung 3.3

Die Stetigkeit des Projektionsoperators Π_m in der L^2 -Norm

$$\|\Pi_m w\|_{0,\Gamma_m} \leq C \|w\|_{0,\Gamma_m} \quad \forall w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_m)$$

wird bei Braess/Dahmen/Wieners im 2D-Fall in [6], Lemma 3.1, für lineare Elemente mit der expliziten Konstanten $C = 4/3$ gezeigt. Ben Belgacem [4] weist diese Aussage im Beweis von Lemma 2.2 für beliebige Polynomgrade nach.

Als Projektion $\Pi : \prod_{\Gamma_m \subset S} H_{00}^{1/2}(\Gamma_m) \rightarrow \tilde{M}_h(S)$ auf dem gesamten Skelett S definieren wir jeweils die Projektion Π_m auf der entsprechenden Mortar-Kante Γ_m . Der Sprung der Lagrange-Interpolierenden verschwindet in den Kreuzungspunkten. Deshalb können die einzelnen Projektionen Π_m unabhängig voneinander ausgeführt werden.

Wir führen jetzt einen Fortsetzungsoperator F_k ein, der eine Funktion vom Rand von Ω_k ins Innere fortsetzt. Dazu benötigen wir den Raum

$$N_h^p := \left\{ v \in H^{1/2}(\partial\Omega_p) \mid v|_{\Gamma_m} \in \tilde{M}_h^m \text{ falls } p = k(m) \text{ und } v = 0 \text{ sonst} \right\},$$

d. h., v ist nur dann von 0 verschieden, wenn Γ_m in Ω_p gerade seine Nicht-Mortar-Seite hat.

Wir benutzen für die Definition des Fortsetzungsoperators $F_k : N_h^k \rightarrow X_h(\Omega_k)$ einfach die am Rand befindlichen Basisfunktionen, d. h.

$$F_k v := \sum_{i \in \Lambda(\partial\Omega_k)} N_i(v) \varphi_i, \quad (3.39)$$

wobei $N_i(v)$ das Knotenfunktional zum Freiheitsgrad B_i und φ_i die zu diesem Freiheitsgrad gehörende Basisfunktion ist. Somit klingt v in einem Streifen der Breite eines Elementes entlang des Randes auf Null ab und kann dann im verbleibenden Inneren von Ω_k mit Null fortgesetzt werden.

Als Fortsetzungsoperator $F : \tilde{M}_h \rightarrow X_h(\Omega)$ definieren wir die Summe der teilgebietsweisen Fortsetzungen F_k . Der Operator F erfüllt das folgende Lemma.

Lemma 3.4

Sei $F : \tilde{M}_h(S) \rightarrow X_h(\Omega)$ der oben definierte Fortsetzungsoperator. Dann gilt $\forall v \in \tilde{M}_h$ und $n \in \{0, 1\}$

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |F_k v|_{n, \Omega_k} \leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} h_{k(m)}^{1/2-n} \|v\|_{0, \Gamma_m}.$$

Beweis:

Wir benutzen zunächst die Definition des Fortsetzungsoperators (3.39), d. h.

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |F_k v|_{n, \Omega_k} = \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left| \sum_{i \in \Lambda(\partial\Omega_k)} N_i(v) \varphi_i \right|_{n, \Omega_k}.$$

Wir untersuchen nun alle $\Gamma_m \subset \partial\Omega_k$, die in Ω_k ihre Nicht-Mortar-Seite haben. Eine elementweise Betrachtung ergibt

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |F_k v|_{n, \Omega_k} \leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{\Gamma_m \subset \partial\Omega_k} \sum_{K \in T_h^k, \partial K \cap \Gamma_m \neq \emptyset} \|v\|_{0, \infty, \Gamma_m \cap \partial K} \sum_{i \in \Lambda_{NM}(\Gamma_m) \cap \Lambda(K)} |\varphi_i|_{n, K}.$$

Hierbei ist $\Gamma_m \cap \partial K$ gerade eine vollständige Kante des Elementes K , und $\Lambda_{NM}(\Gamma_m)$ bezeichnet alle Freiheitsgrade auf der Nicht-Mortar-Seite von Γ_m . Verkürzend schreiben wir $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{NM}(\Gamma_m) \cap \Lambda(K)$. Wir können nun eine Transformation von der Kante $\Gamma = \Gamma_m \cap \partial K$ auf ein Referenzelement $\hat{\Gamma} \hat{=} (-1, 1)$ durchführen. Es ergibt sich für das Element K

$$\|v\|_{0, \infty, \Gamma} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} |\varphi_i|_{n, K} = \|\hat{v}\|_{0, \infty, \hat{\Gamma}} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} |\varphi_i|_{n, K}.$$

Die mit $\hat{\cdot}$ gekennzeichneten Größen bezeichnen die jeweiligen Entsprechungen auf dem Referenzelement.

Auf dem Referenzelement $\hat{\Gamma}$ gilt aufgrund der Normäquivalenz in endlichdimensionalen Räumen

$$\|\hat{v}\|_{0,\infty,\hat{\Gamma}} \leq C \|\hat{v}\|_{0,\hat{\Gamma}} \quad \forall v \in \tilde{M}_h(\hat{\Gamma}).$$

Benutzen wir diese Beziehung und führen eine entsprechende Rücktransformation auf das Originalelement durch, so erhalten wir

$$\|v\|_{0,\infty,\Gamma} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} |\varphi_i|_{n,K} \leq C h_k^{-1/2} \|v\|_{0,\Gamma} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} |\varphi_i|_{n,K}.$$

Für $|\varphi_i|_{1,K}$ erhalten wir durch Transformation auf ein Referenzelement die Beziehung

$$|\varphi_i|_{1,K} \leq C h_k^{-1} |\varphi_i|_{0,K}.$$

Außerdem ist die L^2 -Norm einer Basisfunktion stets beschränkt durch

$$|\varphi_i|_{0,K} \leq C h_k.$$

Somit erhalten wir

$$\|v\|_{0,\infty,\Gamma} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} |\varphi_i|_{n,K} \leq C h_k^{-1/2} \|v\|_{0,\Gamma} \sum_{i \in \tilde{\Lambda}} C' h_k^{1-n}.$$

Da die Anzahl der Basisfunktionen je Element fest ist, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} |F_k v|_{n,\Omega_k} &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{\Gamma_m \subset \partial\Omega_k} \sum_{K \in T_h^k, \partial K \cap \Gamma_m \neq \emptyset} C h_k^{1/2-n} \|v\|_{0,\Gamma} \\ &\leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} h_k^{1/2-n} \sum_{K \in T_h^k, \partial K \cap \Gamma_m \neq \emptyset} \|v\|_{0,\Gamma} \\ &\leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} h_k^{1/2-n} \|v\|_{0,\Gamma_m}. \end{aligned}$$

□

Nun können wir die Korrektur $k_h u$ der Interpolierenden bzgl. der exakten Lösung u definieren als

$$k_h u := F\Pi \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} (i_h^{k(m)} u - i_h^{l(m)} u)|_{\Gamma_m} \right) = F\Pi ([|i_h u|]_S). \quad (3.40)$$

Bemerkung 3.5

Man sieht leicht, daß mit dieser Korrektur die Mortar-Bedingung erfüllt ist, denn $\forall \mu \in M_h$ gilt

$$d(\mu, I_h u) = \sum_{\Gamma_m \subset S} (\mu, [|I_h u|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} = \sum_{\Gamma_m \subset S} (\mu, [|i_h u|]_{\Gamma_m} - \Pi_m ([|i_h u|]_{\Gamma_m}))_{\Gamma_m} = 0$$

aufgrund der Projektionsbedingungen (3.37).

Interpolationsfehler

In diesem Abschnitt wird eine Abschätzung des Interpolationsfehlers vorgestellt.

Lemma 3.6

Sei die exakte Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^{r_k+1}(\Omega_k)$. Sei außerdem die Mortar-Seite so gewählt, daß $h_{k(m)}^{-1/2} \leq Ch_{l(m)}^{-1/2}$ erfüllt ist. Dann gilt für den Interpolationsfehler die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |u - I_h u|_{n, \Omega_k} \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1-n} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k},$$

wobei $n \in \{0, 1\}$, h_k der Gitterparameter im Teilgebiet Ω_k und r_k der Polynomgrad im Raum $X_h(\Omega_k)$ ist.

Beweis:

Wir betrachten zunächst eine Mortar-Kante Γ_m und den Fehler auf den angrenzenden Teilgebieten $\Omega_{k(m)}$ und $\Omega_{l(m)}$. Es gilt

$$|u - I_h u|_{n, \Omega_p} = |u - i_h u|_{n, \Omega_p} + |k_h^m u|_{n, \Omega_p} \quad (3.41)$$

mit $p \in \{k(m), l(m)\}$. Für das Teilgebiet $\Omega_{l(m)}$ entfällt der Korrekturterm. Somit kann für den Fehler im Gebiet $\Omega_{l(m)}$ und den ersten Teil von (3.41) für $p = k(m)$ die Standard-Abschätzung angewandt werden. Im Fall $p = k(m)$ setzen wir in den zweiten Term die Definition $k_h^m u = F\Pi((i_h^k u)|_{\Gamma_m} - (i_h^l u)|_{\Gamma_m})$ ein. Nun benutzen wir Lemma 3.4 sowie Bemerkung 3.3 und schieben zusätzlich ein u ein. Somit ergibt sich

$$|k_h^m u|_{n, \Omega_k} \leq Ch_k^{1/2-n} (\|u - i_h^k u\|_{0, \Gamma_m} + \|u - i_h^l u\|_{0, \Gamma_m}).$$

Wir wenden nun ein Skalierungsargument an, d. h.

$$\|u - i_h^p u\|_{0, \Gamma_m} \leq Ch_p^{-1/2} \|u - i_h^p u\|_{0, \Omega_p} + Ch_p^{1/2} |u - i_h^p u|_{1, \Omega_p}.$$

Es folgt mit $h_{k(m)}^{-1/2} \leq Ch_{l(m)}^{-1/2}$

$$|k_h^m u|_{n, \Omega_k} \leq C \sum_{p \in \{k, l\}} h_p^{-n} \|u - i_h^p u\|_{0, \Omega_p} + h_p^{1-n} |u - i_h^p u|_{1, \Omega_p}.$$

Mit der üblichen Interpolationsabschätzung und der Erweiterung auf alle Mortar-Kanten folgt nun die Behauptung. \square

3.6.2 Der Fall nichtkonformer Teilgebietsdiskretisierungen

Wir führen, wie in Abschnitt 3.6.1 für den konformen Fall, einen Interpolationsoperator der Form

$$I_h u := i_h u - k_h u \quad (3.42)$$

ein, der von X_{00} in V_h abbildet, d. h., die Interpolierende erfüllt die Mortar-Bedingung. Dabei ist i_h der Interpolationsoperator für mittelwert-orientierte Elemente (vgl. Abschnitt 2.6).

Konstruktion der Korrektur $k_h u$

Es wird zunächst wiederum der Sprung entlang der Mortar-Kante auf die Nicht-Mortar-Seite projiziert. Hier kann direkt der Raum M_h der Lagrange-Multiplikatoren verwendet werden, d. h., wir erhalten die Projektion $\Pi : L^2(S) \rightarrow M_h$ mit

$$(\Pi w, \mu)_S = (w, \mu)_S \quad \forall \mu \in M_h \quad (3.43)$$

für alle $w \in L^2(S)$ als übliche L^2 -Projektion.

Nun definieren wir ebenfalls einen Fortsetzungsoperator $F : M_h \rightarrow X_h$ als

$$Fv := \sum_{i \in \Lambda_{NM}(S)} N_i(v) \varphi_i, \quad (3.44)$$

wobei $N_i(v)$ gerade das Knotenfunktional zum Freiheitsgrad B_i und φ_i die entsprechende Basisfunktion darstellt. Die Knotenfunktionale sind als

$$N_i(v) := |\Gamma_i|^{-1} \langle v, \mu_i \rangle_{\Gamma_i}$$

definiert, wobei $\Gamma_i \subset \Gamma_m$ eine Teilkante von Γ_m und μ_i die zugehörige Basisfunktion in M_h ist.

Für die Fortsetzung F gilt die folgende Eigenschaft.

Lemma 3.7

Sei $F : M_h \rightarrow X_h$ ein gemäß (3.44) definierter Fortsetzungsoperator und die verwendete Zerlegung shape-regulär. Dann gilt für $v \in M_h$ und $n \in \{0, 1\}$

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |Fv|_{n, \Omega_k} \leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} h_{k(m)}^{1/2-n} \|v\|_{0, \Gamma_m}.$$

Beweis:

Wir wenden zunächst die Definition des Fortsetzungsoperators aus (3.44) an, d. h.

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |Fv|_{n, \Omega_k} = \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left| \sum_{i \in \Lambda_{NM}(S)} N_i(v) \varphi_i \right|_{n, \Omega_k}.$$

Eine elementweise Betrachtung liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_\Omega} |Fv|_{n,\Omega_k} &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_{NM}(S) \cap \Lambda(K)} |\Gamma_i|^{-1} |\langle v, \mu_i \rangle_{\Gamma_i}| |\varphi_i|_{n,\Omega_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_{NM}(S) \cap \Lambda(K)} C |\Gamma_i|^{-1/2} \|v\|_{0,\Gamma_i} |K|^{1/2} h_k^{-n} \\
&\leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} h_{k(m)}^{1/2-n} \|v\|_{0,\Gamma_m}
\end{aligned}$$

wegen der shape-Regularität, woraus $|K|/|\Gamma_i| \leq h_k$ folgt. \square

Als Korrektur definieren wir auch hier

$$k_h u := F\Pi \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} (i_h^{k(m)} u - i_h^{l(m)} u)|_{\Gamma_m} \right) = F\Pi ([|i_h u|]_S). \quad (3.45)$$

Somit können wir nun den Interpolationsfehler für den Interpolationsoperator I_h abschätzen.

Lemma 3.8

Sei die exakte Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^2(\Omega_k)$. Sei außerdem die Mortar-Seite so gewählt, daß $h_{k(m)}^{-1/2} \leq C h_{l(m)}^{-1/2}$ erfüllt ist. Dann gilt für den Interpolationsfehler die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |u - I_h u|_{n,\Omega_k} \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{2-n} \|u\|_{2,\Omega_k},$$

wobei $n \in \{0, 1\}$ und h_k der Gitterparameter im Teilgebiet Ω_k ist.

Der Beweis erfolgt analog zu dem von Lemma 3.6.

Kapitel 4

Stromlinien-Diffusions-FEM (SDFEM)

Die Stromlinien-Diffusions-FEM (SDFEM) wurde 1979 von Hughes und Brooks [15] für konforme Finite-Elemente bei konvektionsdominanten Konvektions-Diffusions-Problemen eingeführt. Sie ist mittlerweile sehr gut untersucht. Einen Überblick gibt die Monographie von Roos, Stynes und Tobiska [24], Kapitel III 3.2.1.

Das Verfahren gestattet es, Diskretisierungen beliebig hoher Ordnung zu konstruieren, die stabiler als die mit der Galerkin-Methode erzielten sind. Mit den upwind-Verfahren (vgl. Kapitel 5) sind ebenfalls stabile Diskretisierungen mit besseren algebraischen Eigenschaften zu erhalten. Allerdings sind dies nur Verfahren niedriger Ordnung.

Die Idee des Stromlinien-Diffusions-Verfahrens besteht darin, eine künstliche Viskosität nur in Stromlinienrichtung zur gegebenen Konvektions-Diffusions-Gleichung zu addieren. Damit wird ein Verschmieren der numerischen Lösung in Crosswind-Richtung, d. h. senkrecht zur Strömungsrichtung, unterdrückt, wie es z. B. bei der Methode der künstlichen Diffusion entsteht. Die Güte der SDFEM hängt stark von der Wahl der sogenannten Stromliniendiffusionsparameter ab.

Wir konzentrieren uns in diesem Kapitel ausschließlich auf den Fall konformer Diskretisierungen innerhalb der Teilgebiete Ω_k . SDFEM für nichtkonforme Diskretisierungen wird z. B. in [20] oder [19] behandelt. Wir werden hier zur Behandlung der Probleme durch die an den Mortarkanten entstehenden Unstetigkeiten ähnliche Sprungterme wie in [19] benutzen. Außerdem betrachten wir nur Probleme mit Dirichlet-Randbedingungen ($\Gamma_D = \partial\Omega$).

Achdou [1] beschäftigt sich bereits mit SDFEM für Konvektions-Diffusions-Probleme in der konservativen Form, d. h. $-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u + \beta u) + \sigma u = f$. Als Testfunktionen werden $v_h + \delta_K \nabla \cdot (\beta v_h)$ verwendet. Wir werden hier eine ähnliche, modifizierte Bilinearform benutzen. Bei Achdou werden nur für das konforme P_1 -Element optimale Fehlerabschätzungen angegeben. Die Beweise sind nur skizzenhaft und die Eigenschaften des Interpolationsope-

rators werden nicht gezeigt.

Wir führen nun die modifizierte Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ und Linearform $f^{SD}(\cdot)$ mit

$$\begin{aligned} a^{SD}(u, v) &:= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left(\varepsilon (\nabla u, \nabla v)_{\Omega_k} + (b \cdot \nabla u, v)_{\Omega_k} + (cu, v)_{\Omega_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u + cu, b \cdot \nabla v)_K \right) \\ &\quad - \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m} [|u|]_{\Gamma_m}, \langle |v| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} + \sum_{\Gamma_m \subset S} (|b \cdot n_{\Gamma_m}| [|u|]_{\Gamma_m}, [|v|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$f^{SD}(v) := \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left((f, v)_{\Omega_k} + \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (f, b \cdot \nabla v)_K \right) \quad (4.2)$$

ein und erhalten als schwache Formulierung des diskreten Problems

$$\begin{aligned} \text{finde } (u_h, \lambda_h) &\in X_h \times M_h : \\ a^{SD}(u_h, v_h) + d(\lambda_h, v_h) &= f^{SD}(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \\ d(\mu_h, u_h) &= 0 \quad \forall \mu_h \in M_h. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Wahl von δ_K wird für Probleme ohne Mortars ausführlich in Kapitel III 3.2.1 von [24] diskutiert. Wir setzen hier die Bedingung

$$0 < \delta_K \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{c_0}{(\max_{x \in K} |c(x)|)^2}, \frac{h_K^2}{\mu^2 \varepsilon} \right\} \quad \forall K \in T_h^k \quad \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\}, \quad (4.4)$$

voraus.

Wir bezeichnen mit $\| \cdot \|$ die *Stromlinien-Diffusions-Norm* auf X_h , die als

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon |v|_{1, \Omega_k}^2 + c_0 \|v\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2 \\ &\quad + \sum_{\Gamma_m \subset S} \| |b \cdot n_{\Gamma_m}| [|v]|_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

definiert wird.

Die obere Schranke von δ_K in (4.4) ermöglicht es uns, mit Hilfe der lokalen inversen Ungleichung

$$\|\Delta v\|_{0, K} \leq \mu h_K^{-1} \|\nabla v\|_{0, K}, \quad (4.6)$$

wobei μ eine positive Konstante ist, den Term

$$\left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v + cv, b \cdot \nabla v)_K \right| \leq \frac{1}{2} \|v\|^2$$

zu majorisieren.

Nachfolgend wird eine Fehlerabschätzung für das gemischte Problem (4.3) bei Verwendung konformer Teilgebietsdiskretisierungen hergeleitet.

4.1 Koerzivität von $a^{SD}(\cdot, \cdot)$

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die Koerzivität der modifizierten Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ untersuchen. Die Koerzivität wird nur auf $V_h \subset X_h$ benötigt, da dies zum Nachweis der Existenz einer eindeutigen Lösung ausreicht. In unserem Fall gilt die Koerzivität sogar auf ganz X_h .

Lemma 4.1

Gele die Beziehung (2.6) und genüge δ_K der Bedingung (4.4). Dann ist $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ koerziv, d. h.

$$a^{SD}(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad \forall v \in X_h.$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} a^{SD}(v, v) &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\varepsilon |v|_{1, \Omega_k} + (b \cdot \nabla v, v)_{\Omega_k} + (cv, v)_{\Omega_k}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (\delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2 + \delta_K (-\varepsilon \Delta v + cv, b \cdot \nabla v)_K) \\ &\quad - \sum_{\Gamma_m \subset S} \frac{1}{2} (b \cdot n_{\Gamma_m} [|v^2|]_{\Gamma_m}, 1)_{\Gamma_m} + \sum_{\Gamma_m \subset S} (|b \cdot n_{\Gamma_m}|, [|v|]_{\Gamma_m}^2)_{\Gamma_m}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Term:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} (b \cdot \nabla v, v)_{\Omega_k} &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (b \cdot \nabla v, v)_K = \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \frac{1}{2} (b \cdot \nabla v^2, 1)_K \\ &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left(-\frac{1}{2} \sum_{K \in T_h^k} (\nabla \cdot b, v^2)_K + \frac{1}{2} \sum_{K \in T_h^k} (b \cdot n_K, v^2)_{\partial K} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (\nabla \cdot b, v^2)_K + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m}, [|v^2|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m}, \end{aligned}$$

da $v|_{\Omega_k} \in C^0(\Omega_k)$ für alle $k = 1, \dots, N_\Omega$, d. h., die Sprünge über Kanten innerhalb der Teilgebiete Ω_k verschwinden, und es verbleiben nur die Sprünge entlang der Mortar-Kanten

Γ_m . Die Normalenvektoren werden hier so gewählt, wie es in Abschnitt 2.4, in Formel (2.11) beschrieben wurde.

Mit der Voraussetzung $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq c_0 > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
a^{SD}(v, v) &\geq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \left(\varepsilon \|v\|_{1, \Omega_k}^2 + c_0 \|v\|_{0, \Omega_k}^2 + \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2 \right) \\
&\quad + \sum_{\Gamma_m \subset S} |b \cdot n_{\Gamma_m}| \| [v]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v + cv, b \cdot \nabla v)_K \\
&\quad + \sum_{\Gamma_m \subset S} \frac{1}{2} (b \cdot n_{\Gamma_m} [v^2]_{\Gamma_m}, 1)_{\Gamma_m} - \sum_{\Gamma_m \subset S} \frac{1}{2} (b \cdot n_{\Gamma_m} [v^2]_{\Gamma_m}, 1)_{\Gamma_m}.
\end{aligned}$$

Mit der Definition der Stromlinien-Diffusions-Norm $\|\cdot\|$ (vgl. (4.5)) folgt

$$a^{SD}(v, v) \geq \|v\|^2 + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v + cv, b \cdot \nabla v)_K.$$

Wir schätzen nun den Term

$$\left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v, b \cdot \nabla v)_K + \delta_K (cv, b \cdot \nabla v)_K \right|$$

nach oben ab.

Mit $|c(x)| \leq c_{max, K}$ für alle $x \in K$ folgt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (cv, b \cdot \nabla v)_K \right| &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \left(\delta_K^{1/2} c_{max, K} \|v\|_{0, K} \delta_K^{1/2} \|b \cdot \nabla v\|_{0, K} \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K c_{max, K}^2 \|v\|_{0, K}^2 + \frac{\delta_K}{4} \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung (4.4), d. h. $2c_{max, K}^2 \delta_K \leq c_0$, folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (cv, b \cdot \nabla v)_K \right| \leq \frac{c_0}{2} \|v\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2.$$

Der Term

$$\left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v, b \cdot \nabla v)_K \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|\Delta v\|_{0,K} \|b \cdot \nabla v\|_{0,K}$$

kann mit der inversen Ungleichung (4.6) und Voraussetzung (4.4), d. h. $\delta_K \leq \frac{h_K^2}{2\mu^2\varepsilon}$, wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (-\varepsilon \Delta v, b \cdot \nabla v)_K \right| &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \left(\frac{\varepsilon^2 \delta_K \mu^2}{h_K^2} |v|_{1,K}^2 + \frac{\delta_K}{4} \|b \cdot \nabla v\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \left(\frac{\varepsilon}{2} |v|_{1,K}^2 + \frac{\delta_K}{4} \|b \cdot \nabla v\|_{0,K}^2 \right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} a^{SD}(v, v) &\geq \|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} |v|_{1,K}^2 - \frac{c_0}{2} \|v\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0,K}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|^2 \quad \forall v \in X_h. \end{aligned}$$

□

Der Beweis basiert im Wesentlichen auf der speziellen Wahl des zusätzlich in die Bilinearform eingefügten Terms

$$- \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m} [|u|]_{\Gamma_m}, \langle |v| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m}$$

und der Beziehung $[|v|]_{\Gamma_m} \langle |v| \rangle_{\Gamma_m} = \frac{1}{2} [|v|^2]_{\Gamma_m}$. Für die modifizierte Bilinearform gelingt nun der Nachweis der Koerzivität.

4.2 Konsistenzfehler

Als einen Teil des gesamten Fehlers wollen wir hier den Konsistenzfehler untersuchen.

Lemma 4.2 Sei $(u, \lambda) \in \left(X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^{r_k+1}(\Omega_k) \right) \times M$ Lösung von (3.12) mit der modifizierten Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ und der modifizierten Linearform $f^{SD}(\cdot)$ sowie $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ Lösung von (4.3) mit $f \in L^2(\Omega)$ und sei $h_{l(m)} \leq ch_{k(m)}$. Dann gilt

$$|a^{SD}(u - u_h, w_h)| = |d(q_h - \lambda, w_h)| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon^{1/2} h_k^{r_k} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k} \|w_h\| \quad \forall w_h \in V_h.$$

Dabei ist q_h die Bestapproximation von λ in M_h .

Beweis:

Da $X_h \subset X_{00}$ und $M_h \subset M$, gilt für $(u, \lambda) \in \left(X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^{r_k+1}(\Omega_k) \right) \times M$ und $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ mit (3.12) und (4.3)

$$a^{SD}(u, w_h) + d(\lambda, w_h) = f^{SD}(w_h) \quad \forall w_h \in X_h \quad (4.7)$$

$$a^{SD}(u_h, w_h) + d(\lambda_h, w_h) = f^{SD}(w_h) \quad \forall w_h \in X_h. \quad (4.8)$$

Als Differenz von (4.7) und (4.8) ergibt sich

$$a^{SD}(u - u_h, w_h) = d(\lambda_h - \lambda, w_h) \quad \forall w_h \in X_h. \quad (4.9)$$

Wir betrachten nun (4.9) nur noch für $w_h \in V_h \subset X_h$. Damit folgt $d(\lambda_h, w_h) = 0$. Wir setzen jetzt für $\lambda = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n_k}$, wobei $u|_{\Omega_k} \in H^{r_k+1}(\Omega_k)$ ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} a^{SD}(u - u_h, w_h) &= \varepsilon d\left(-\frac{\partial u}{\partial n_k}, w_h\right) \\ &= \varepsilon d\left(q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}, w_h\right) \\ &= \varepsilon \sum_{\Gamma_m \subset S} \int_{\Gamma_m} \left(q_h - \frac{\partial u}{\partial n_{k(m)}}\right) [[w_h]]_{\Gamma_m} ds, \end{aligned}$$

nachdem q_h als Bestapproximierende von $\frac{\partial u}{\partial n_k} \in M$ in M_h mit Hilfe der Mortarbedingung eingeschoben wurde.

Wir können jetzt in den Sprung den Projektionsoperator $\Pi_m w_h$, wie in Lemma 3.2 definiert, einfügen, da dieser auf beiden Seiten des Sprunges gleich ist. Somit erhalten wir

$$a^{SD}(u - u_h, w_h) = \varepsilon \sum_{\Gamma_m \subset S} \int_{\Gamma_m} \left(q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}\right) [[w_h - \Pi_m w_h]]_{\Gamma_m} ds.$$

Wir spalten nun den Sprung auf

$$\begin{aligned} a^{SD}(u - u_h, w_h) &= \varepsilon \sum_{\Gamma_m \subset S} \int_{\Gamma_m} \left(q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}\right) (w_h|_{\Omega_k \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h) ds \\ &\quad - \varepsilon \sum_{\Gamma_m \subset S} \int_{\Gamma_m} \left(q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}\right) (w_h|_{\Omega_l \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h) ds. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir den Betrag von $a^{SD}(\cdot, \cdot)$. Mit der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a^{SD}(u - u_h, w_h)| &\leq \varepsilon \sum_{\Gamma_m \subset S} \|q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}\|_{0, \Gamma_m} (\|w_h|_{\Omega_k \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h\|_{0, \Gamma_m} \\ &\quad + \|w_h|_{\Omega_l \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h\|_{0, \Gamma_m}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es gilt $\frac{\partial u}{\partial n_k} \Big|_{\Gamma_m} \in H^{r_k-1/2}(\Gamma_m)$. Mit Theorem 12.3.3 in [8] folgt für jedes Γ_m

$$\|q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k}\|_{0,\Gamma_m} \leq C h_k^{r_k-1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n_k} \right\|_{r_k-1/2,\Gamma_m}.$$

Mit der Stetigkeit des Spurooperators (vgl. Theorem 7.53 in [2]) gilt

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n_k} \Big|_{\Gamma_m} \right\|_{r_k-1/2,\Gamma_m} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial n_k} \Big|_{\partial\Omega_k} \right\|_{r_k-1/2,\partial\Omega_k} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial n_k} \right\|_{r_k,\Omega_k(m)}.$$

In $\Omega_k(m)$ gilt nun

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n_k} \right\|_{r_k,\Omega_k(m)} \leq C \|u\|_{r_k+1,\Omega_k(m)}.$$

Mit der Tatsache, daß Γ_m fest und somit unabhängig von h ist, folgt

$$\left\| q_h - \frac{\partial u}{\partial n_k} \right\|_{0,\Gamma_m} \leq C h_k^{r_k-1/2} \|u\|_{r_k+1,\Omega_k(m)}. \quad (4.11)$$

Wir betrachten nun die Terme mit w_h . Da i. a. nur $w_h \in H^{1/2}(\Gamma_m)$ gilt, ist r_k in Lemma 3.2 gleich 0 zu wählen. Somit gilt nach (3.38)

$$\|w_h|_{\Omega_k \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h\|_{0,\Gamma_m} \leq C h_k^{1/2} \|w_h\|_{1/2,\Gamma_m}.$$

Mit der Stetigkeit des Spurooperators und der Definition (4.5) der Stromlinien-Diffusions-Norm folgt

$$\|w_h|_{\Omega_k \cap \Gamma_m} - \Pi_m w_h\|_{0,\Gamma_m} \leq C \left(\frac{h_k}{\varepsilon} \right)^{1/2} \|w_h\|. \quad (4.12)$$

Für den zweiten w_h -Term gilt die gleiche Abschätzung.

Durch Einsetzen von (4.11) und (4.12) in (4.10) erhalten wir die Behauptung.

□

4.3 Interpolationsfehler

Wir benötigen hier anstelle des Lagrange-Interpolationsoperators i_h den Interpolationsoperator I_h , der bereits in Abschnitt 3.6.1 eingeführt wurde. Nur mit ihm kann garantiert werden, daß die Interpolierende im Raum V_h liegt. Für I_h gelten mit $u \in H^{r_k+1}(\Omega_k)$ die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} |u - I_h u|_{n,\Omega_k} \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1-n} \|u\|_{r_k+1,\Omega_k} \quad \text{für } n \in \{0, 1\}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{\Gamma_m \subset S} \|u - (I_h u)|_{\Omega_k(m)}\|_{0,\Gamma_m} \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1/2} \|u\|_{r_k+1,\Omega_k}. \quad (4.14)$$

Lemma 4.3

Sei $u \in X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^{r_k+1}(\Omega_k)$. Dann ist

$$a^{SD}(I_h u - u, w_h) \leq C \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{2r_k+1} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\| \quad \forall w_h \in V_h.$$

Beweis:

Wir schätzen zunächst den Diffusions-Term in $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ ab

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon (\nabla(I_h u - u), \nabla w_h)_{\Omega_k} &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} C \varepsilon^{1/2} h_k^{r_k} |u|_{r_k+1, \Omega_k} \varepsilon^{1/2} |w_h|_{1, \Omega_k} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C \varepsilon h_k^{2r_k} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon |w_h|_{1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C \varepsilon h_k^{2r_k} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum konvektiven Term:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} (b \cdot \nabla(I_h u - u), w_h)_{\Omega_k} &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (\nabla(I_h u - u), b w_h)_K \\ &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (-(I_h u - u, b \cdot \nabla w_h)_K - (\nabla \cdot b, (I_h u - u) w_h)_K) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (b \cdot n_K (I_h u - u), w_h)_{\partial K}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Der erster Term von (4.15) wird nun in üblicher Weise abgeschätzt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} -(I_h u - u, b \cdot \nabla w_h)_K &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K^{-1/2} \|I_h u - u\|_{0, K} \delta_K^{1/2} \|b \cdot \nabla w_h\|_{0, K} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} C \delta_K h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla w_h\|_{0, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C \delta_K h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|. \end{aligned}$$

Jetzt folgt der zweite Term von (4.15)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} -(\nabla \cdot b, (I_h u - u) w_h)_K &\leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k} \|w_h\|_{0, \Omega_k} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_{0, \Omega} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.
\end{aligned}$$

Den dritten Term von (4.15) schätzen wir zusammen mit dem ersten zusätzlichen Sprungterm der Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ ab. Außerdem benutzen wir an dieser Stelle, daß u und $I_h u$ auf jedem Teilgebiet Ω_k stetig sind. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (b \cdot n_K (I_h u - u), w_h)_{\partial K} - \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m} [|I_h u - u|]_{\Gamma_m}, \langle |w_h| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \\
&= \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m}, [(I_h u - u) w_h]_{\Gamma_m} - [|I_h u - u|]_{\Gamma_m} \langle |w_h| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \\
&= \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m}, [|w_h|]_{\Gamma_m} \langle |I_h u - u| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \\
&\leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} \| \langle |I_h u - u| \rangle_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m} \| |b \cdot n_{\Gamma_m}| [|w_h|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m} \\
&\leq C \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \| \langle |I_h u - u| \rangle_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \| |b \cdot n_{\Gamma_m}| [|w_h|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Jeden einzelnen Term $\| \langle |I_h u - u| \rangle_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2$ können wir mittels (4.14) folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned}
\| \langle |I_h u - u| \rangle_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 &\leq \frac{1}{2} \left(\| (I_h u)|_{\Omega_{k(m)}} - u \|_{0, \Gamma_m}^2 + \| (I_h u)|_{\Omega_{l(m)}} - u \|_{0, \Gamma_m}^2 \right) \\
&\leq C \left(h_k^{2r_k+1} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k}^2 + h_l^{2r_l+1} \|u\|_{r_l+1, \Omega_l}^2 \right).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} (b \cdot n_K (I_h u - u), w_h)_{\partial K} - \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m} [|I_h u - u|]_{\Gamma_m}, \langle |w_h| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \\
&\leq C \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{2r_k+1} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Sprungterm ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_{\Gamma_m \subset S} \left((|b \cdot n_K| [|I_h u - u|]_{\Gamma_m}, [|w_h|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \right) \\
& \leq C \sum_{\Gamma_m \subset S} \| [|I_h u - u|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m} \| |b \cdot n_K| [|w_h|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m} \\
& \leq C \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} \| [|I_h u - u|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\Gamma_m \subset S} |b \cdot n_K| \| [|w_h|]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit (4.14) folgt wiederum

$$\sum_{\Gamma_m \subset S} (|b \cdot n_K| [|I_h u - u|]_{\Gamma_m}, [|w_h|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} \leq C \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{2r_k+1} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.$$

Schließlich betrachten wir noch den Reaktionsterm

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_\Omega} (c(I_h u - u), w_h)_{\Omega_k} & \leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{r_k+1} |u|_{r_k+1, \Omega_k} \|w_h\|_{0, \Omega_k} \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_{0, \Omega} \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.
\end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $\varepsilon \delta_K \leq h_K^2$ (vgl. Nachweis der Koerzivität) folgt für die Stabilisierungsterme wie im Fall ohne Mortars

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \varepsilon \delta_K (\Delta(I_h u - u), b \cdot \nabla w_h)_K & \leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \varepsilon \delta_K^{1/2} |u|_{r_k+1, K} \delta_K^{1/2} \|b \cdot \nabla w_h\|_{0, K} \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \varepsilon^2 \delta_K |u|_{r_k+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\| \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon h_k^{2r_k} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \delta_K (b \cdot \nabla(I_h u - u), b \cdot \nabla w_h)_K & \leq \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} C \delta_K^{1/2} h_k^{r_k} |u|_{r_k+1, K} \delta_K^{1/2} \|b \cdot \nabla w_h\|_{0, K} \\
& \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C \delta_K h_k^{2r_k} |u|_{r_k+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.
\end{aligned}$$

Abschließend nutzen wir noch

$$\sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \delta_K \left(c(I_h u - u), b \cdot \nabla w_h \right)_K \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} C \delta^2 h_k^{2r_k+2} |u|_{r_k+1, \Omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$a^{SD}(I_h u - u, w_h) \leq C \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{2r_k+1} |u|_{r_k+1, \Omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|.$$

□

4.4 Diskrete LBB-Bedingung

Wir führen nun die diskrete LBB-Bedingung in der Form

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{d(\mu_h, v_h)}{\|\mu_h\|_{-1/2, h} \|v_h\|} \geq \beta' > 0 \quad (4.16)$$

ein. Diese werden wir bei der Anwendung der Existenztheorie für gemischte Finite-Elemente-Formulierungen benutzen.

In Abschnitt 3.5.1 haben wir bereits eine LBB-Bedingung mit der gitterabhängigen Norm

$$\|v\|_{1, h}^2 := \|v\|_{1*}^2 + \sum_{\Gamma_m \subset S} \| [v]_{\Gamma_m} \|_{1/2, h, \Gamma_m}^2$$

(vgl. (3.29)) betrachtet.

Wegen $b \in (W^{1, \infty}(\Omega))^2$ ist $|b \cdot n_{\Gamma_m}| \leq \|b\|_{1, \infty}$ und für hinreichend kleines h gilt die Beziehung $|b \cdot n_{\Gamma_m}|^2 \leq h^{-1}$.

Nun folgt mit der Definition der modifizierten Stromlinien-Diffusions-Norm

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon |v|_{1, \Omega_k}^2 + c_0 \|v\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \delta_K \|b \cdot \nabla v\|_{0, K}^2 \\ &\quad + \sum_{\Gamma_m \subset S} |b \cdot n_{\Gamma_m}| \| [v]_{\Gamma_m} \|_{0, \Gamma_m}^2 \end{aligned}$$

(vgl. (4.5)), daß eine von h unabhängige Konstante C existiert mit

$$\|v\|_{1, h} \geq C \|v\| \quad \forall v \in X_h.$$

Daraus folgt mit $\beta' := C^{-1}\beta$ die Aussage (4.16) direkt aus der diskreten LBB-Bedingung mit der Norm $\|\cdot\|_{1, h}$ (vgl. (3.32)).

4.5 Gesamtresultat

In diesem Abschnitt soll die Fehlerabschätzung für $\|u - u_h\|$ unter Verwendung der bereitgestellten Resultate durchgeführt werden.

Satz 4.4

Sei $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq c_0 > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ und δ_k genüge (4.4). Dann ist das Problem (4.3) eindeutig lösbar.

Sei weiterhin $u \in X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^{r_k+1}(\Omega_k)$ Lösung von (3.18) mit der modifizierten Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ und der modifizierten Linearform $f^{SD}(\cdot)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1/2} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k}.$$

Beweis:

Mit der Stetigkeit von $a^{SD}(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ und $f^{SD}(\cdot)$, der Koerzivität von $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ auf V_h und der diskreten LBB-Bedingung (4.16) folgt nach [9] die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (4.3).

Sei $w_h = I_h u - u_h \in V_h$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \|w_h\|^2 \leq a^{SD}(I_h u - u, w_h) + a^{SD}(u - u_h, w_h).$$

Nun wenden wir für den Interpolationsfehler Lemma 4.3 und für den Konsistenzfehler Lemma 4.2 an und erhalten

$$\|w_h\|^2 \leq C \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1/2} |u|_{r_k+1, \Omega_k} + \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1/2} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k} \right) \|w_h\|.$$

Nach Division mit $\|w_h\|$ ergibt sich mit der Dreiecksungleichung die Behauptung. \square

Wir erhalten hier eine globale Fehlerabschätzung für die modifizierte SDFEM von gleicher Güte wie für die Standard-FEM ohne Verwendung von Mortars. Allerdings sind auch hier die höheren Ableitungen der exakten Lösung im Falle des Auftretens von Grenzschichten nicht gleichmäßig bzgl. ε beschränkt.

Für Modellprobleme können unter Nutzung von speziellen Struktureigenschaften der exakten Lösung und geeigneter Gitter, wie etwa Shishkin- oder exponentiell angepaßter Gitter, auch bzgl. ε gleichmäßig gültige Fehlerabschätzungen hergeleitet werden (vgl. Stynes/Tobiska [31]). Für eine Übertragung dieser Ansätze auf die Mortar-Technik wären weitere Untersuchungen nötig, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Kapitel 5

Upwind-Diskretisierung

Im konvektionsdominanten Fall treten bei der Verwendung von Standard-Galerkin-Diskretisierungen unphysikalische Oszillationen auf, falls nicht ein lokal sehr feines Gitter ($h = \mathcal{O}(\varepsilon)$) verwendet wird. Um die Stabilität der Diskretisierung auf allgemeinen Gittern zu erhalten, kann neben der Stromlinien-Diffusions-FEM (vgl. Kapitel 4) auch die upwind-Methode verwendet werden. Die SDFEM stabilisiert zwar, sichert aber keine Monotonieeigenschaften, d. h., die Matrix bei SDFEM ist i. a. keine M-Matrix.

Einen Überblick über die Stabilisierung vom upwind-Typ gibt [24]. Die upwind-Methode wurde 1984 von Ohmori/Ushijima [23] auch auf nichtkonforme Elemente erweitert und von Schieweck/Tobiska insbesondere für die Navier-Stokes-Gleichungen ([29], [30]) weiterentwickelt. [13] zeigt, daß sich diese Elemente auch in numerischen Experimenten bewährt haben. Für nichtkonforme Viereckselemente bei Navier-Stokes-Gleichungen gibt [28] einen sehr guten Überblick. Wir beschränken uns hier auf konforme und nichtkonforme Elemente erster Ordnung, da die vorgestellten upwind-Techniken i. a. auch nur erster Ordnung sind. Upwind-Verfahren von formal höherer Ordnung wurden z. B. von Bristeau/Glowinski [10] oder Tabata [32] (dritter Ordnung) vorgeschlagen. Ein Nachweis der höheren Ordnung steht allerdings noch aus.

Upwind-Verfahren zeichnen sich durch sehr gute algebraische Eigenschaften der entstehenden linearen Gleichungssysteme aus. So erhalten wir z. B. bei der Verwendung von konformen P_1 -Elementen auf einer Dreieckszerlegung vom schwach-spitzen Typ, wenn $c = 0$, bzw. wenn die numerische Integration des Reaktionsterms mittels der Eckpunktregel durchgeführt wird, eine M-Matrix (siehe [24]).

Wir verwenden in diesem Abschnitt die ε -gewichtete Energienorm $\|\cdot\|_{\varepsilon^*}$

$$\|v\|_{\varepsilon^*} := \left(\sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon |v|_{1,\Omega_k}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

Im Unterschied zu (2.7) wird hier die H^1 -Seminorm auf jedem Teilgebiet betrachtet.

5.1 Upwind-Stabilisierung für konforme Teilgebietsdiskretisierungen

Wir führen eine neue/duale Zerlegung von Ω ein. Hierzu wird das Gebiet Ω in sogenannte *duale Gebiete* R_i^k zerlegt, wobei ein R_i^k stets vollständig zum Teilgebiet Ω_k gehört, d. h.

$$R_i^k \cap \Omega_l \in \{R_i^k, \emptyset\}$$

für alle Teilgebiete Ω_l . Jedes duale Gebiet R_i^k korrespondiert mit genau einem Freiheitsgrad im Raum X_h . Die Umkehrung gilt nicht für Freiheitsgrade, die in Kreuzungspunkten ($i \in \Lambda(\mathcal{C})$) liegen. Deshalb benötigen wir für den Fall $i \in \Lambda(\mathcal{C})$ den zusätzlichen Index k , um die Eindeutigkeit der dualen Gebiete zu gewährleisten. Dabei korrespondiert k mit dem Teilgebiet Ω_k . Um die Bezeichnung der dualen Gebiete zu vereinfachen, konstruieren wir die Indexmenge Λ_d so, daß wir den Index k einsparen können. Für alle Freiheitsgrade, die nicht in Kreuzungspunkten liegen, bezeichnet i weiterhin direkt den Index des Freiheitsgrades. Für die Kreuzungspunkte $i \in \Lambda(\mathcal{C})$ benutzen wir die Abbildung $j = N_{DOF} + i \cdot N_\Omega + k$, wobei N_{DOF} die Anzahl aller Freiheitsgrade und N_Ω die Anzahl aller Teilgebiete bezeichnet. Dadurch wird jedem dualen Gebiet an einem Kreuzungspunkt ein eindeutig bestimmter Index außerhalb des Bereiches der Freiheitsgrad-Indizes zugeordnet. Λ_d enthält nur die Indizes j , für die ein duales Gebiet existiert. Wir setzen also

$$\Lambda_d = \Lambda \setminus \Lambda(\mathcal{C}) \cup \{N_{DOF} + i \cdot N_\Omega + k \mid i \in \Lambda(\mathcal{C}), k \in \{1, \dots, N_\Omega\}, R_i^k \neq \emptyset\}. \quad (5.2)$$

Aus dem Index $j \in \Lambda_d$ kann mittels der Abbildung α stets der zugehörige Freiheitsgrad B_j bestimmt werden:

$$\alpha(j) = \begin{cases} j & \text{falls } j \leq N_{DOF} \\ \frac{j - k - N_{DOF}}{N_\Omega} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Somit benutzen wir jetzt zum Bezeichnen der dualen Gebiete nur noch R_i , wobei i nun die Indexmenge Λ_d durchläuft.

Es gilt also

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in \Lambda_d} \bar{R}_i \quad \text{und} \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Wir definieren γ_{ij} als offene Verbindungskante zwischen zwei dualen Gebieten, $\bar{\gamma}_{ij} = \bar{R}_i \cap \bar{R}_j$ ($\gamma_{ij} \neq \emptyset$).

Die Methode basiert nun auf einer angepaßten Diskretisierung des Konvektionsterms und einer numerischen Integration des Reaktionsterms und der rechten Seite.

Im Fall konformer Diskretisierung mit Elementen erster Ordnung innerhalb der Teilgebiete Ω_k entsteht ein duales Gebiet R_i durch die Verbindung der Elementschwerpunkte mit den Seitenmitten der in dem Knoten i inzidierenden Kanten. Wenn man an eine Mortar-Kante stößt, so bildet diese den Rand des dualen Gebietes.

Der Term $(b \cdot \nabla u, v)_\Omega$ wird nun wie folgt zerlegt

$$\begin{aligned} (b \cdot \nabla u, v)_\Omega &= \sum_{i \in \Lambda_d} (b \cdot \nabla u, v)_{R_i} \\ &= \sum_{i \in \Lambda_d} (\nabla \cdot (bu), v)_{R_i} - (\nabla \cdot b, uv)_{R_i}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Mit $\Lambda_d(K)$ wird die entsprechende Indexmenge der dualen Gebiete bezeichnet, die mit dem Element K einen nicht leeren Durchschnitt haben.

Wir führen nun einen sogenannten *Lumping-Operator* $L_h : X_h \rightarrow L^2(\Omega)$ mit

$$L_h v(x) := v^i = v(B_i) \quad \forall x \in R_j, \quad (5.5)$$

wobei B_i der mit R_j korrespondierende Freiheitsgrad ist ($i = \alpha(j)$), ein und wenden ihn jeweils auf den zweiten Teil der Skalarprodukte in (5.4) an. Dies ermöglicht uns, diese Terme als Konstanten vor die Skalarprodukte zu ziehen. Somit erhalten wir

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_d(K)} \left(v^i (\nabla \cdot (bu), 1)_{R_i^K} - u^i v^i (\nabla \cdot b, 1)_{R_i^K} \right).$$

Hier ist $R_i^K = R_i \cap K$ (vgl. Abb. 5.1). Da die Implementierung elementweise erfolgt, verwenden wir auch hier eine elementweise Betrachtung der Anteile R_i^K der dualen Gebiete. Für $i \in \Lambda_d$ schreiben wir von nun an stets verkürzend nur u^i statt $u^{\alpha(i)}$.

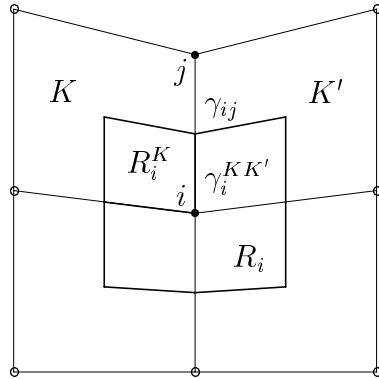


Abbildung 5.1: Duales Gebiet R_i um einen inneren Freiheitsgrad i bei Q_1 -Elementen

Mit der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} (b \cdot \nabla u, v)_\Omega &\approx \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_d(K)} \left(v^i (b \cdot n_{R_i^K} u, 1)_{\partial R_i^K} - u^i v^i (b \cdot n_{R_i^K}, 1)_{\partial R_i^K} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_d(K)} v^i (b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_{\partial R_i^K}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hierbei ist $n_{R_i^K}$ der äußere Normaleneinheitsvektor bzgl. R_i^K .

Wir betrachten nun verschiedene Situationen für eine Kante $\gamma \subset \partial R_i^K$. Aufgrund der elementweisen Betrachtung der dualen Gebiete kann γ auch innere Kante des dualen Gebietes R_i sein, d. h. $\gamma = \gamma_i^{KK'} \subset \partial R_i^K \cap \partial K$ und $K \cup K' \subset \Omega_k$. Somit geht u an $\gamma_i^{KK'}$ stetig über und wir erhalten

$$\begin{aligned} v^i(b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_\gamma + v^i(b \cdot n_{R_i^{K'}}, u - u^i)_\gamma &= v^i(b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_\gamma - v^i(b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_\gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Fälle, bei denen γ Anteil des äußeren Randes $\partial\Omega$ ist. Falls $\gamma \subset \Gamma_D$, also Teil des Dirichlet-Randes ist, dann gilt $v^i = 0$, und der Term entfällt auf ganz R_i . Wenn $\gamma \subset \Gamma_N$, also Teil des Neumann-Randes ist, dann wählen wir $u = u^{up} = u^i$, und somit entfällt auch hier der entsprechende Anteil.

Wir kommen nun zu den Fällen, bei denen γ der Übergang zwischen zwei dualen Gebieten ist. Sei $\gamma \subset \gamma_{ij}$ und $\gamma \not\subset S$. Hier wählen wir $u = u^{up} = \lambda_{ij}u^i + (1 - \lambda_{ij})u^j$ mit

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (b \cdot n_{R_i}, 1)_{\gamma_{ij}} > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Dabei ist n_{R_i} der äußere Normaleneinheitsvektor bzgl. R_i entlang γ_{ij} . Diese Wahl von λ_{ij} wird als scharfes upwind bezeichnet.

Sei nun $\gamma \subset S$. Abb. 5.2 zeigt die dualen Gebiete R_i und R_j für konforme Dreieckselemente.

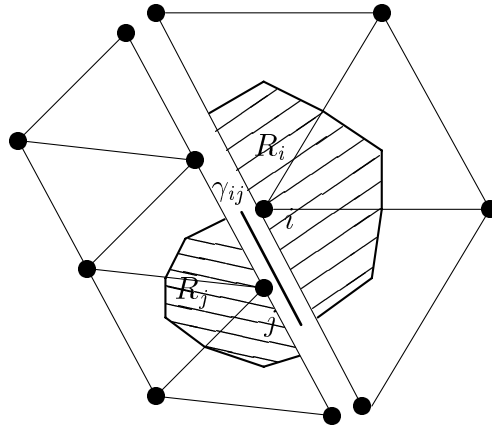


Abbildung 5.2: Duale Gebiete bei P_1 -Elementen an einer Mortar-Kante

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Wahl von u in (5.6) entlang der Kante $\gamma_{ij} \subset \Gamma_m$. Die erste Variante wäre eine stückweise konstante Approximation $u|_{\gamma_{ij}} = u^i$, d. h., wir verwenden den auf R_i kondensierten Wert. Setzen wir dies in (5.6) ein, so entfällt der Anteil für γ_{ij} . Bei dieser Wahl ergeben sich keine Verknüpfungen zwischen dualen Gebieten auf

verschiedenen Seiten der Mortar-Kante. Der Vorteil einer solchen Wahl besteht darin, daß die der Bilinearform $a^{up}(\cdot, \cdot)$ entsprechende Matrix bis auf die Kreuzungspunkte blockdiagonal wird, wobei jeweils einem Block die Diskretisierung auf dem Teilgebiet Ω_k entspricht. Die Kopplung der Blöcke wird hier über die Bilinearform $d(\cdot, \cdot)$ erreicht.

Die in Abschnitt 5.3 gegebene Analysis zeigt aber, daß für diese Variante die Koerzivität von $a^{up}(\cdot, \cdot)$ auf X_h i. a. nicht gesichert werden kann. Durch Verwendung eines Zusatzterms der Form

$$-\frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda(S)} \int_{\gamma_i} b \cdot n_i u^i v^i ds \quad (5.8)$$

gelingt dies jedoch. Hierbei ist $\gamma_i = \partial R_i \cap \Gamma_m$ und n_i der äußere Normalenvektor auf γ_i bezüglich des dualen Gebietes R_i . $\Lambda(S)$ ist die Indexmenge aller Freiheitsgrade auf dem Skelett S . Die so entstehende Diskretisierung bezeichnen wir als *Variante A*

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega \approx b_h^A(u, v) := \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i^k} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(u^j - u^i)v^i - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda(S)} \int_{\gamma_i} b \cdot n_i u^i v^i ds. \quad (5.9)$$

Mit Λ_i^k bezeichnen wir die Indexmenge der dualen Gebiete R_j in Umgebung von R_i , d. h.

$$\Lambda_i^k := \{j \mid \gamma_{ij} \neq \emptyset, R_i, R_j \subset \Omega_k\}. \quad (5.10)$$

In der Variante A werden nur Nachbarn innerhalb eines Teilgebietes Ω_k betrachtet.

In der *Variante B* wenden wir die upwind-Idee auch auf Knoten i an, die auf Mortar-Kanten liegen, d. h., wir ermitteln den Fluß über die Mortar-Kante und bestimmen damit gemäß der angegebenen Regeln auch an Mortar-Kanten, welche Werte (welche Seite) zur Diskretisierung benutzt werden sollen. Somit sei

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega \approx b_h^B(u, v) := \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(u^j - u^i)v^i. \quad (5.11)$$

Hier ist Λ_i wiederum die Indexmenge der dualen Gebiete R_j in Umgebung von R_i . Nur werden hier auch die dualen Gebiete in anderen Teilgebieten als benachbart betrachtet, d. h.

$$\Lambda_i := \{j \mid \gamma_{ij} \neq \emptyset\}. \quad (5.12)$$

Diese Variante führt allerdings zu einer Kopplung zwischen den Freiheitsgraden innerhalb verschiedener, benachbarter Teilgebiete, was bei einer Parallelisierung dieses Verfahrens zusätzliche Kommunikation erfordern würde.

Bei der upwind-Methode werden auch der reaktive Term und die rechte Seite durch Anwendung des Lumpingoperators L_h kondensiert, d. h.

$$(cu, v)_\Omega \approx c_h^{up}(u, v) = \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_d(K)} (c^i u^i, v^i)_{R_i}, \quad (5.13)$$

$$(f, v)_\Omega \approx f^{up}(v) = \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda_d(K)} (f^i, v^i)_{R_i}. \quad (5.14)$$

Somit erhalten wir insgesamt das gemischte diskrete Problem:

$$\begin{aligned} \text{finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : \\ a^{up, A/B}(u_h, v_h) + d(\lambda_h, v_h) &= f^{up}(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \\ d(\mu_h, u_h) &= 0 \quad \forall \mu_h \in M_h, \end{aligned} \quad (5.15)$$

wobei

$$a^{up, A/B}(u_h, v_h) := \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon (\nabla u_h, \nabla v_h)_{\Omega_k} + b_h^{A/B}(u_h, v_h) + c^{up}(u_h, v_h)$$

gesetzt wird.

Die Abschätzung des Konsistenzfehlers kann hier analog zu Lemma 4.2 gezeigt werden, somit gilt

Lemma 5.1
Sei $(u, \lambda) \in \left(X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^2(\Omega_k) \right) \times M$ Lösung von (3.12) mit der modifizierten Bilinearform $a^{up}(\cdot, \cdot)$ und der modifizierten Linearform $f^{up}(\cdot)$ sowie $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ Lösung von (5.15) mit $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt

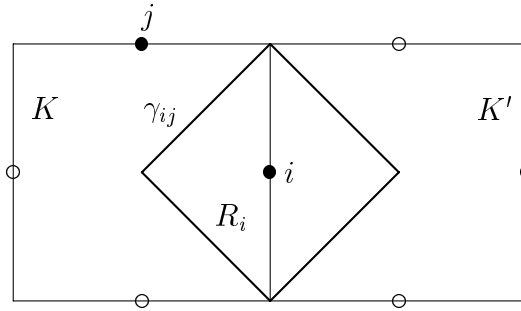
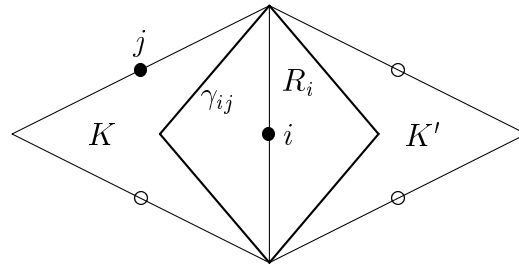
$$|a^{up}(u - u_h, w_h)| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon^{1/2} h_k |u|_{2, \Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon^*} \quad \forall w_h \in V_h.$$

5.2 Upwind-Stabilisierung für nichtkonforme Teilgebietsdiskretisierungen

Wir führen wiederum eine Zerlegung in duale Gebiete R_i ein.

Die Freiheitsgrade korrespondieren bei den nichtkonformen linearen bzw. bilinearen Elementen mit den Seiten der Elemente. Sei E nun eine Kante mit dem Freiheitsgrad B_i , die zum Element K gehört. Dann wird der elementweise Anteil des dualen Gebietes R_i durch Verbinden des Schwerpunktes von K mit den Endpunkten von E gebildet. Ist E eine innere Kante mit den angrenzenden Elementen K und K' ($K \cup K' \subset \Omega_k$), dann ist R_i vollständig in $K \cup K'$ enthalten. Liegt E auf einer Randkante von $\partial\Omega_k$, so ist E Teil des Randes von R_i und R_i liegt vollständig in K .

Abb. 5.3 zeigt ein Beispiel für die Q_1^{rot} -Elemente und Abb. 5.4 für nichtkonforme P_1 -Elemente (Crouzeix/Raviart-Elemente).

Abbildung 5.3: Duales Gebiet um einen Freiheitsgrad i bei Q_1^{rot} -ElementenAbbildung 5.4: Duales Gebiet um einen Freiheitsgrad i bei Crouzeix/Raviart-Elementen

Die Herleitung der Diskretisierung geschieht nun analog der im konformen Fall. Hier gilt aber $\Lambda_d = \Lambda$, da sich in den Kreuzungspunkten keine Freiheitsgrade befinden. Dies ist ein Vorteil, da wir somit auch die Abbildung α nicht mehr benötigen.

Wir zerlegen den Term $(b \cdot \nabla u, v)_\Omega$ wiederum als (vgl. (5.4))

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega = \sum_{i \in \Lambda} \left((\nabla \cdot (bu), v)_{R_i} - (\nabla \cdot b, uv)_{R_i} \right).$$

Wir wenden nun den Lumping-Operator L_h aus (5.5) jeweils auf den zweiten Teil der Skalarprodukte an. Somit können wir diese Terme als Konstanten vor die Skalarprodukte ziehen. Benutzen wir dann noch den Gaußschen Integralsatz, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (b \cdot \nabla u, v)_\Omega &\approx \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda(K)} \left(v^i (b \cdot n_{R_i^K} u, 1)_{\partial R_i^K} - u^i v^i (b \cdot n_{R_i^K}, 1)_{\partial R_i^K} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\Omega} \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i \in \Lambda(K)} v^i (b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_{\partial R_i^K}. \end{aligned}$$

Hier ist $R_i^K = R_i \cap K$ und $n_{R_i^K}$ der äußere Normaleneinheitsvektor bzgl. R_i^K .

In Analogie zur Implementierung betrachten wir die dualen Gebiete bzgl. eines jeden Elementes K . Wir untersuchen nun für eine Kante $\gamma \subset \partial R_i^K$ verschiedene Fälle. Sei $\gamma = \gamma_i^{KK'} \subset \partial R_i^K \cap \partial K$ und $K \cup K' \subset \Omega_k$, d. h., beide betrachteten Zellen liegen im gleichen Teilgebiet Ω_k . In diesem Fall ist γ innere Kante des dualen Gebietes R_i . Es ergibt sich

$$v^i(b \cdot n_{R_i^K}, u - u^i)_\gamma + v^i(b \cdot n_{R_i^{K'}}, u - u^i)_\gamma = v^i(b \cdot n_{R_i^K}, [|u - u^i|]_\gamma)_\gamma. \quad (5.16)$$

Bei Verwendung von mittelwert-orientierten Viereckselementen (ggf. gemischt mit Dreieckselementen) gilt

$$\int_\gamma [|u - u^i|]_\gamma ds = 0.$$

Hierbei ist u^i als mittelwert-orientierter Wert und nicht als Punktwert zu interpretieren. Somit ist (5.16) für stückweise konstantes b gleich Null. Im Fall glatter Funktionen b zeigt die Analysis in Abschnitt 5.4, daß der hierdurch verursachte Fehler in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers liegt.

Wir betrachten jetzt Anteile γ auf dem Rand $\partial\Omega$. Sei $\gamma \subset \Gamma_D$, also Teil des Dirichlet-Randes, dann ist $v^i = 0$ und der Term entfällt auf R_i . Sei $\gamma \subset \Gamma_N$, also Teil des Neumann-Randes. Wir wählen hier $u = u^{up} = u^i$, und somit entfällt der entsprechende Anteil.

Wir untersuchen nun die Fälle, daß γ zwischen zwei dualen Gebieten liegt. Falls $\gamma = \gamma_{ij}$ und $\gamma \not\subset S$, wählen wir $u = u^{up} = \lambda_{ij}u^i + (1 - \lambda_{ij})u^j$ mit λ_{ij} aus (5.7).

Schließlich betrachten wir den Fall $\gamma = \gamma_{ij} \subset S$, d. h., γ liegt auf einer Mortar-Kante. Es ergibt sich auch hier der Gegensatz zwischen der einfachen Implementierung mit deutlichen Vorteilen in Hinblick auf die Parallelisierung und dem optimalen Informationsfluß durch konsequente Umsetzung des upwind-Gedankens auch an Mortar-Kanten. Die Ermittlung der upwind-Parameter an den Mortar-Kanten zieht jedoch eine deutlich kompliziertere Implementierung nach sich.

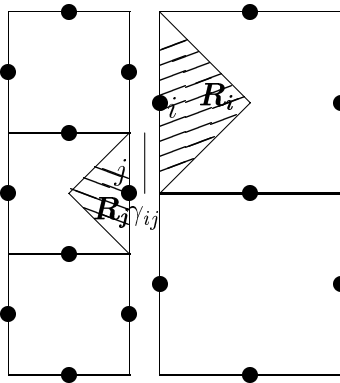
Die Abb. 5.5 zeigt beispielhaft zwei duale Gebiete, die an einer Mortar-Kante zusammenstoßen.

Wir stellen nun die *Variante C* vor, bei der in jedem dualen Gebiet R_i für $u|_{\gamma_{ij}} = u^i$ gesetzt wird, d. h., wir benutzen den kondensierten Wert. Es ist erforderlich, einen zusätzlichen Term der Form

$$-\frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda(S)} \int_{\gamma_i} b \cdot n_i u^i v^i ds \quad (5.17)$$

zur Gewährung der Koerzivität hinzuzufügen. $\Lambda(S)$ bezeichnet wiederum die Freiheitsgrade auf dem Skelett S . Wir erhalten damit, analog zu (5.9),

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega \approx b_h^C(u, v) := b_h^A(u, v). \quad (5.18)$$

Abbildung 5.5: Duale Gebiete bei Q_1^{rot} -Elementen an einer Mortar-Kante

Die Knoten auf beiden Seiten der Mortar-Kante erhalten durch die upwind-Diskretisierung keine zusätzlichen Kopplungen, d. h., die durch die Bilinearform $a^{up}(\cdot, \cdot)$ erzeugte Matrix ist blockdiagonal, wobei jeder Block mit einem Teilgebiet Ω_k korrespondiert. Dies ist für eine Parallelisierung von Vorteil, da sich kein zusätzlicher Kommunikationsbedarf ergibt. Die einzige Kopplung erfolgt über die Lagrange-Multiplikatoren.

In der Variante *D* wird auch an Mortar-Kanten der Fluß über die Grenzen der dualen Gebiete ermittelt und ein λ_{ij} gemäß (5.7) berechnet. Somit erhalten wir hier eine Diskretisierung wie in Variante B (vgl. (5.11)), d. h.

$$(b \cdot \nabla u, v)_\Omega \approx b_h^D(u, v) := b_h^B(u, v). \quad (5.19)$$

Auch hier wird der Reaktionsterm (vgl. (5.13)) und die rechte Seite (vgl. (5.14)) mit Hilfe des Lumping-Operators kondensiert.

Es ergibt sich als gemischtes diskretes Problem:

$$\begin{aligned} \text{finde } (u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h : \\ a^{up, C/D}(u_h, v_h) + d(\lambda_h, v_h) &= f^{up}(v_h) & \forall v_h \in X_h \\ d(\mu_h, u_h) &= 0 & \forall \mu_h \in M_h, \end{aligned} \quad (5.20)$$

wobei

$$a^{up, C/D}(u_h, v_h) := \sum_{k=1}^{N_\Omega} \varepsilon (\nabla u_h, \nabla v_h)_{\Omega_k} + b_h^{C/D}(u_h, v_h) + c^{up}(u_h, v_h)$$

gesetzt wird.

5.3 Untersuchung der Koerzivität der Bilinearformen $a^{up}(\cdot, \cdot)$

In diesem Abschnitt soll die Koerzivität der Bilinearform $a^{up}(\cdot, \cdot)$ untersucht werden.

Es werden zunächst die beiden Varianten $b_h^A(\cdot, \cdot)$ und $b_h^B(\cdot, \cdot)$ als Teil von $a^{up}(\cdot, \cdot)$ betrachtet. Wir beginnen mit der Form $b_h^B(\cdot, \cdot)$

$$b_h^B(u, v) = \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(u^j - u^i)v^i.$$

Nun untersuchen wir $b_h^B(v, v)$

$$\begin{aligned} b_h^B(v, v) &= \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(v^j - v^i)v^i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(v^j - v^i)v^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ji}} b \cdot n_{ji} ds (1 - \lambda_{ji})(v^i - v^j)v^j. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, $\lambda_{ij} = 1 - \lambda_{ji}$ und $n_{ij} = -n_{ji}$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} b_h^B(v, v) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds ((1 - \lambda_{ij})(v^j - v^i)v^i - \lambda_{ij}(v^i - v^j)v^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^j - v^i)((1 - \lambda_{ij})v^i + \lambda_{ij}v^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} ((\lambda_{ij} - \frac{1}{2})(v^j - v^i)^2 + \frac{1}{2}((v^j)^2 - (v^i)^2)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (\lambda_{ij} - \frac{1}{2})(v^j - v^i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^j)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^i)^2. \end{aligned}$$

Hierbei wird abkürzend $\beta_{ij} = \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds$ verwendet. Nun benutzen wir im vorletzten Term die Eigenschaft $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ und verändern die Summationsreihenfolge. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} b_h^B(v, v) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (\lambda_{ij} - \frac{1}{2})(v^j - v^i)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^i)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (\lambda_{ij} - \frac{1}{2})(v^j - v^i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij} (v^i)^2. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Der erste Term in (5.21) ist aufgrund der Wahl von λ_{ij} (vgl. (5.7)) stets nichtnegativ.

Für Λ_i gilt

$$\partial R_i = \bigcup_{j \in \Lambda_i} \bar{\gamma}_{ij}.$$

Somit folgt mit

$$\sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds = \int_{R_i} \nabla \cdot b dx$$

die Ungleichung

$$b_h^B(v, v) \geq -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \int_{R_i} \nabla \cdot b (v^i)^2 dx \quad \forall v \in X_h. \quad (5.22)$$

Für die Variante A mit Λ_i^k wird nicht der gesamte Rand von R_i betrachtet, d. h., es fehlt

$$\bigcup_{j \in \Lambda_i \setminus \Lambda_i^k} \gamma_{ij}.$$

Man sieht, daß

$$\bigcup_{i \in \Lambda} \Lambda_i \setminus \Lambda_i^k = \Lambda(S)$$

ist. Somit ergibt sich

$$b_h^B(v, v) = b_h^A(v, v) = b_h^{up}(v, v) - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda(S)} \int_{\gamma_i} b \cdot n_i (v^i)^2 ds. \quad (5.23)$$

Hierbei ist der Zusatzterm wieder in die Anteile auf den beiden Seiten einer Mortar-Kante zerlegt. Der Randanteil des dualen Gebietes R_i auf dem Skelett S ist γ_i und $b_h^{up}(\cdot, \cdot)$ bezeichnet die Bilinearform der Variante A ohne Stabilisierungsterm.

Mit (5.23) gilt die Aussage (5.22) auch für $b_h^A(\cdot, \cdot)$.

Für den allgemeinen Fall kann man $b_h^{A/B}(\cdot, \cdot)$ und $c_h^{up}(\cdot, \cdot)$ gemeinsam betrachten und erhält:

Satz 5.2

Sei $c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \geq c_0 > 0$. Dann ist die Bilinearform $a^{up}(u, v) := \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_h + b_h^{A/B}(u, v) + c_h^{up}(u, v)$ koerziv in der ε -gewichteten Energienorm $\|\cdot\|_{\varepsilon^*}$ (siehe (5.1)), d. h.

$$a^{up}(v, v) \geq C \|v\|_{\varepsilon^*}^2 \quad \forall v \in X_h.$$

Beweis:

Wir betrachten die einzelnen Terme der Bilinearform $a^{up}(v, v)$ und benutzen dabei (5.22)

und (5.13). Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} a^{up}(v, v) &= \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\nabla v, \nabla v)_{\Omega_k} + b_h^{A/B}(v, v) + c_h^{up}(v, v) \\ &\geq \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} |v|_{1, \Omega_k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} (\nabla \cdot b v^i, v^i)_{R_i} + \sum_{i \in \Lambda} (c^i v^i, v^i)_{R_i}. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \geq c_0$ folgt

$$a^{up}(v, v) \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} |v|_{1, \Omega_k}^2 + \sum_{i \in \Lambda} (c_0 v^i, v^i)_{R_i}.$$

Mit der Äquivalenz der diskreten Norm $\sum_{i \in \Lambda} c_0 (v^i)^2 \text{meas}(R_i)$ zur stetigen L^2 -Norm folgt die Behauptung. \square

5.4 Fehlerabschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir die Fehleranalyse für das Crouzeix/Raviart-Element für die Variante D darstellen. Zur Vereinfachung wählen wir hier im Reaktionsterm $c \equiv 0$. Die Erweiterung auf $c \neq 0$ ist prinzipiell möglich. In den bisherigen Arbeiten [23] und [30] zu diesem Problem wurden die Abschätzungen nicht gleichmäßig in ε betrachtet. Auch wir werden uns hier auf ein festes ε beschränken.

Wir führen nun q_h als das größte Verhältnis der Gitterweiten zweier an einer Mortar-Kante angrenzenden Teilgebietszerlegungen einer Zerlegung T_h ein, wobei jeweils der Quotient aus der größeren und der kleineren Gitterweite betrachtet wird. Es gilt somit

$$q_h = \max_{m=1, \dots, M} \{h_k(m)/h_l(m), h_l(m)/h_k(m)\}.$$

Sind die Teilgebiete von T_h quasiuniform, dann hat eine Zelle an einer Mortar-Kante höchstens $\mathcal{O}(q_h)$ benachbarte Zellen auf der anderen Seite der Mortar-Kante.

Lemma 5.3

Sei T_h eine Zerlegung mit den folgenden Eigenschaften:

- T_h ist quasiuniform in jedem Teilgebiet Ω_k , d. h.

$$c_1^k h_k \leq \text{diam}(K) \leq c_2^k h_k \quad \forall K \in T_h^k, \quad \forall k \in \{1, \dots, N_\Omega\}.$$

- T_h ist shape-regulär, d. h.

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c_3 \quad \forall K \in T_h,$$

wobei ρ_K der Inkreisradius des Elementes K ist.

Dann gilt an einer Mortar-Kante Γ_m für einen Freiheitsgrad $w^k \in K_k \in T_h^k$ auf der Nicht-Mortar-Seite und einen Freiheitsgrad $w^l \in K_l \in T_h^l$ auf der Mortar-Seite

$$|w^k - w^l| \leq C q_h^{1/2} |w|_{1,\Omega^{\gamma_k}}.$$

Beweis:

Wir definieren zunächst

$$\overline{\gamma_k} := \overline{K_k} \cap \overline{\Gamma_m},$$

d. h., γ_k ist die offene Kante des Elementes K_k an der Mortar-Kante Γ_m . Weiterhin sei

$$\overline{\Omega^{\gamma_k}} := \bigcup \overline{K} \text{ mit } K \in T_h^l \text{ und } \overline{K} \cap \overline{\gamma_k} \neq \emptyset$$

das Teilgebiet aller Elemente $K \in T_h^l$, die mindestens einen Punkt mit γ_k gemeinsam haben. Das heißt insbesondere, daß auch Elemente, die nur mit einer Ecke an dieser Mortar-Kante liegen, mit berücksichtigt werden müssen.

Außerdem seien B_k und B_l die Freiheitsgrade der Elemente K_k und K_l , die an der Mortar-Kante Γ_m liegen. Es seien

$$w^k = \frac{1}{|\gamma_k|} \int_{\gamma_k} w|_{K_k} ds \quad \text{und} \quad w^l = \frac{1}{|\gamma_l|} \int_{\gamma_l} w|_{K_l} ds$$

die Integralmittel entlang der Kanten γ_k bzw. γ_l .

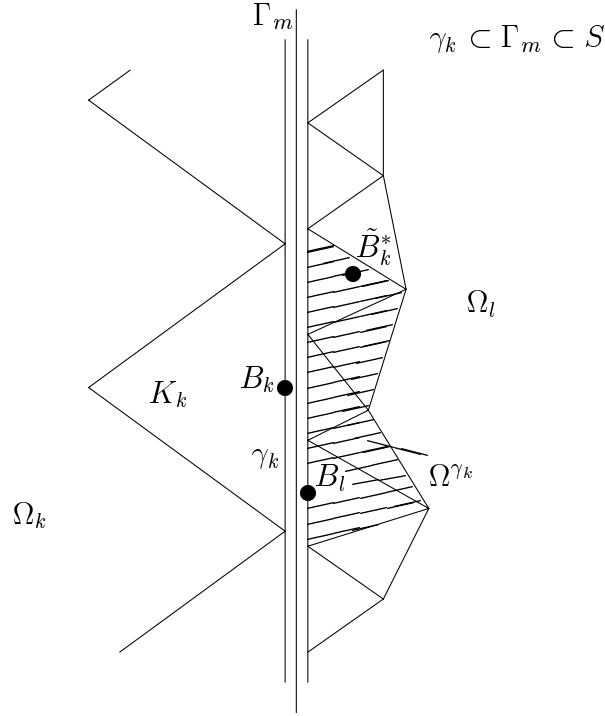
Abb. 5.6 zeigt die in diesem Beweis verwendeten Bezeichnungen an der Kante γ_k .

Wir wollen nun zeigen, daß man die Mortar-Bedingung, die entlang einer gesamten Mortar-Kante Γ_m definiert ist, auf ein einzelnes Element K_k auf der Nicht-Mortar-Seite reduzieren kann. Die Mortar-Bedingung (3.14) gilt für alle $\lambda \in M_h$ und somit auch für $\tilde{\lambda} \in M_h$ mit

$$\tilde{\lambda}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \gamma_k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $\tilde{\lambda}$ in (3.14) ein, so erhalten wir

$$\int_S \tilde{\lambda} [|w|]_S ds = \int_{\gamma_k} [|w|]_{\gamma_k} ds. \quad (5.24)$$

Abbildung 5.6: Umgebung der Kante γ_k

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sichert die Existenz eines Punktes $B_k^* \in \overline{K_k}$ mit

$$w|_{K_k}(B_k^*) = |\gamma_k|^{-1} \int_{\gamma_k} w|_{K_k} ds = w^k.$$

Wir suchen nun einen Punkt $\tilde{B}_k^* \in \overline{\Omega^{\gamma_k}}$ mit

$$w|_{\Omega^{\gamma_k}}(\tilde{B}_k^*) = |\gamma_k|^{-1} \int_{\gamma_k} w|_{\Omega^{\gamma_k}} ds = w^l.$$

Grundlage hierfür ist die angepaßte Mortar-Bedingung (5.24) und der Mittelwertsatz der Integralrechnung. Die Funktion $w|_{\Omega^{\gamma_k}}$ ist allerdings entlang der Kante γ_k nur stückweise linear und enthält i. a. Sprünge. Es existiert jedoch innerhalb von Ω^{γ_k} je eine Folge von Stetigkeitspunkten über benachbarte Elemente, entlang der alle Zwischenpunkte des durch die Unstetigkeit entstandenen Sprungs angenommen werden. Damit kann \tilde{B}_k^* auch im Inneren des Gebietes $\overline{\Omega^{\gamma_k}}$ liegen. Wir haben also mit \tilde{B}_k^* einen Punkt auf der Mortar-Seite Ω_l gefunden, in dem der gleiche Funktionswert wie im Punkt B_k^* angenommen wird. Wir können somit die Abschätzung auf nur einer Seite vornehmen.

Um nun $|w^k - w^l|$ abschätzen zu können, konstruieren wir eine Kette von Stetigkeitspunkten $\{z_i\}_{i=1}^N$ innerhalb von $\overline{\Omega^{\gamma_k}}$, so daß wir eine stetige Verbindung zwischen \tilde{B}_k^* und B_l erhalten.

In Abb. 5.7 ist eine mögliche Stetigkeitskette in Draufsicht und im Schnitt entlang der Stetigkeitskette dargestellt.

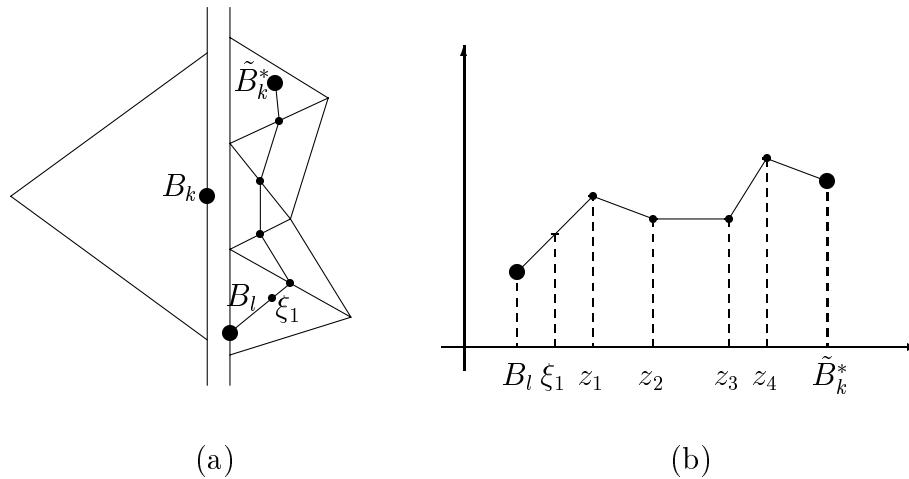


Abbildung 5.7: Kette von Stetigkeitspunkten (a) in der Draufsicht und (b) im Schnitt

Wir wollen nun den Fehler für jedes Teilstück der Folge von Stetigkeitspunkten untersuchen. Dazu benutzen wir jeweils den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Damit existiert im ersten Teilintervall ein Zwischenpunkt ξ_1 , so daß

$$w^l - w|_{\Omega^{\gamma_k}}(z_1) = w'(\xi_1)(z_1 - B_l)$$

gilt. Diese Abschätzung kann nun für alle Teilstücke entlang der Kette von Stetigkeitspunkten durchgeführt werden.

Die Anzahl N^{γ_k} der Elemente in Ω^{γ_k} ist durch

$$N^{\gamma_k} \leq C q_h$$

beschränkt. Da das arithmetische Mittel einer endlichen Zahlenfolge stets kleiner oder gleich dem quadratischen Mittel dieser Zahlenfolge ist, gilt

$$|w^k - w^l| \leq C q_h^{1/2} |w|_{1, \Omega^{\gamma_k}}.$$

□

Lemma 5.4

Sei $u \in X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^2(\Omega_k)$. Dann existiert für die Bilinearformen $b^{up}(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ eine Konstante C , so daß

$$|b^{up}(I_h u, w_h) - b(I_h u, w_h)| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2, \Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon^*} \quad \forall w_h \in X_h$$

gilt.

Beweis:

Der Beweis basiert im wesentlichen auf Theorem 2 von Ohmori/Ushijima in [23]. Hier müssen jedoch die Teilkanten der dualen Gebiete, die an Mortar-Kanten liegen, gesondert behandelt werden.

Wir spalten zunächst $b(\cdot, \cdot)$ in $b(\cdot, \cdot) = b_1(\cdot, \cdot) + b_2(\cdot, \cdot)$ durch

$$(b \cdot \nabla(I_h u), w_h)_{R_i} = (\nabla \cdot (b I_h u), w_h)_{R_i} - (\nabla \cdot b, I_h u w_h)_{R_i}$$

und $b^{up}(\cdot, \cdot)$ aus (5.11) in $b^{up}(\cdot, \cdot) = b_1^{up}(\cdot, \cdot) + b_2^{up}(\cdot, \cdot)$ durch

$$\begin{aligned} b_1^{up}(I_h u, w_h) &:= \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (\lambda_{ij} u^i + (1 - \lambda_{ij}) u^j) w^i \\ b_2^{up}(I_h u, w_h) &:= - \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds u^i w^i \end{aligned}$$

auf.

Durch Nullergänzung mit $b_1(I_h u, L_h w_h)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |b^{up}(I_h u, w_h) - b(I_h u, w_h)| &= |b_1(I_h u, w_h) - b_1(I_h u, L_h w_h) + b_1(I_h u, L_h w_h) - b_1^{up}(I_h u, w_h) \\ &\quad + b_2(I_h u, w_h) - b_2^{up}(I_h u, w_h)|. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Differenz

$$\begin{aligned} |b_1(I_h u, w_h) - b_1(I_h u, L_h w_h)| &= \left| \sum_{i \in \Lambda_d} \int_{R_i} \nabla \cdot (b I_h u) (w_h - w^i) dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{i \in \Lambda_d} \left(\int_{R_i} (\nabla \cdot (b I_h u))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R_i} (w_h - w^i)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2, \Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon^*}. \end{aligned}$$

Als zweites untersuchen wir

$$|b_2(I_h u, w_h) - b_2^{up}(I_h u, w_h)| = \left| \sum_{i \in \Lambda_d} \int_{R_i} \nabla \cdot b I_h u w_h dx + b_2^{up}(I_h u, w_h) \right|.$$

Mittels partieller Integration folgt auch hier

$$|b_2(I_h u, w_h) - b_2^{up}(I_h u, w_h)| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2, \Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon^*}.$$

Schließlich betrachten wir

$$\begin{aligned}
|b_1(I_h u, L_h w_h) - b_1^{up}(I_h u, w_h)| &= \left| \sum_{i \in \Lambda_d} \int_{R_i} \nabla \cdot (b I_h u) dx w^i \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (\lambda_{ij} u^i + (1 - \lambda_{ij}) u^j) w^i \right| \\
&= |I_1 + I_2|.
\end{aligned}$$

Für I_1 folgt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$I_1 = \sum_{i \in \Lambda_d} \int_{\partial R_i} b \cdot n_i I_h u ds w^i.$$

Wir führen eine Projektion von b auf \hat{b} ein, wobei \hat{b} auf jeder Kante γ_{ij} konstant ist und für $x \in \gamma_{ij}$ den Wert

$$\hat{b}(x) := \frac{1}{|\gamma_{ij}|} \int_{\gamma_{ij}} b ds$$

annimmt. Wir betrachten I_1 nun für alle $\gamma_{ij} \subset \partial R_i$ einzeln und erhalten für $I_1 + I_2$

$$I_1 + I_2 = \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} (I_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) ds w^i.$$

Hier schieben wir nun \hat{b} ein und spalten wiederum die Terme \hat{I}_1 und \hat{I}_2 ab

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} (b - \hat{b} + \hat{b}) \cdot n_{ij} (I_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) ds w^i \\
&= \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} (b - \hat{b}) \cdot n_{ij} (I_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) ds w^i \\
&\quad + \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} I_h u|_{R_i} ds w^i \\
&\quad - \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} ds (\lambda_{ij} u^i + (1 - \lambda_{ij}) u^j) w^i \\
&= I_3 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2.
\end{aligned}$$

Wir definieren den Projektionsoperator $Q : L_2(S) \rightarrow \hat{M}_h$ mit

$$\hat{M}_h = \prod_{\Gamma_m \subset S} \hat{M}_h^m \quad \text{und} \quad \hat{M}_h^m := \{v \in L_2(\Gamma_m) \mid v|_e \in P_0(e) \text{ mit } e \in \partial \hat{T}_h^m\}.$$

Dabei enthält $\partial\hat{T}_h^m$ alle Kanten, die durch die Vereinigung der Gitter der Mortar- und Nicht-Mortar-Seite entlang eines Mortars Γ_m entstehen. Der Operator Q wird nun definiert durch

$$\int_e Qu \, ds = \int_e u \, ds \quad \forall e \in \prod_{\Gamma_m \subset S} \partial\hat{T}_h^m.$$

Sei E eine Kante auf der Nicht-Mortar-Seite ($E \in \partial T_h(\Omega_k), E \subset \Gamma_m$). Da $I_h u$ die Mortar-Bedingung erfüllt, gilt

$$\int_E QI_h u|_{\Omega_k} \, ds = \int_E I_h u|_{\Omega_k} \, ds \stackrel{\text{Mortar-Bed.}}{=} \int_E I_h u|_{\Omega_l} \, ds = \int_E QI_h u|_{\Omega_l} \, ds.$$

Wir benutzen die Indexmenge $\Lambda(S)$, die alle Freiheitsgrade enthält, die auf beiden Seiten von Mortar-Kanten liegen. Wir spalten nun von \hat{I}_1 alle $\gamma_{ij} \subset S$ ab

$$\hat{I}_1 = \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \not\subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} I_h u \, ds w^i + \sum_{i \in \Lambda(S)} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} I_h u \, ds w^i = I_4 + I_5.$$

In I_5 schieben wir jetzt die Projektion $QI_h u$ ein und erhalten

$$I_5 = \sum_{i \in \Lambda(S)} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} (I_h u|_{R_i} - QI_h u|_{R_i}) \, ds w^i + \sum_{i \in \Lambda(S)} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} QI_h u|_{R_i} \, ds w^i.$$

Da \hat{b} auf jedem γ_{ij} konstant ist, entfällt der erste Term von I_5 aufgrund der Definition von Q .

Für $\hat{I}_1 + \hat{I}_2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 + \hat{I}_2 &= \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \not\subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} (I_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) \, ds w^i \\ &\quad + \sum_{i \in \Lambda(S)} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} (QI_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) \, ds w^i \\ &= I_6 + I_7. \end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt $I_6 = \frac{1}{2}I_6 + \frac{1}{2}I_6$, wobei wir im zweiten Term die Indizes i und j vertauschen. Mit den Eigenschaften

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad n_{ij} = -n_{ji} \quad \text{und} \quad \lambda_{ij} = 1 - \lambda_{ji} \tag{5.25}$$

folgt

$$I_6 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i, \gamma_{ij} \not\subset S} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} (\lambda_{ij} (I_h u - u^i) + (1 - \lambda_{ij}) (I_h u - u^j)) \, ds (w^i - w^j).$$

Mit der üblichen Technik folgt

$$I_6 \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2,\Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon^*}.$$

Wir spalten nun $\Lambda(S)$ in die Freiheitsgrade $\Lambda^M(S)$ auf den Motar-Seiten und $\Lambda^{NM}(S)$ auf den Nicht-Mortar-Seiten auf. Zu jedem $i \in \Lambda^{NM}(S)$ korrespondiert genau ein $E_i \subset \partial R_i \cap S$ mit

$$E_i = \bigcup_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} \gamma_{ij} = \bigcup_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} \gamma_{ji}.$$

Da jede Kante γ_{ij} als γ_{ij} und γ_{ji} durchlaufen wird, können wir I_7 schreiben als

$$\begin{aligned} I_7 &= \sum_{i \in \Lambda^{NM}(S)} \sum_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} \left(\int_{\gamma_{ij}} \hat{b} \cdot n_{ij} (QI_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j) ds w^i \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_{ji}} \hat{b} \cdot n_{ji} (QI_h u|_{R_j} - \lambda_{ji} u^j - (1 - \lambda_{ji}) u^i) ds w^j \right). \end{aligned}$$

Da \hat{b} wiederum auf jedem γ_{ij} und w^i auf ganz E_i konstant ist, gilt für jedes E_i

$$\sum_{\gamma_{ij} \subset E_i} \int_{\gamma_{ij}} QI_h u|_{R_i} ds w^i = \int_{E_i} QI_h u|_{R_i} ds w^i = \int_{E_i} QI_h u|_{\Omega_i} ds w^i = \sum_{\gamma_{ij} \subset E_i} \int_{\gamma_{ij}} QI_h u|_{R_j} ds w^i.$$

Wir können nun wieder die Eigenschaften aus (5.25) anwenden und erhalten

$$I_7 = \sum_{i \in \Lambda^{NM}(S)} \sum_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} \int_{\gamma_{ij}} \hat{b} n_{ij} (\lambda_{ij} (QI_h u|_{R_j} - u^i) + (1 - \lambda_{ij}) (QI_h u|_{R_j} - u^j)) ds (w^i - w^j).$$

Aufgrund der Eigenschaften des Operators Q , kann $QI_h u$ durch $I_h u$ ersetzt werden. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Einschieben der exakten Lösung u folgt

$$\begin{aligned} I_7 &\leq C \sum_{i \in \Lambda^{NM}(S)} \sum_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} \left(\int_{\gamma_{ij}} (\lambda_{ij} (I_h u|_{R_j} - u^i) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda_{ij}) (I_h u|_{R_j} - u^j))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{ij}|^{1/2} |w^i - w^j| \\ &\leq C \sum_{i \in \Lambda^{NM}(S)} \sum_{j \in \Lambda_i \cap \Lambda^M(S)} (\|I_h u|_{R_j} - u\|_{0,\gamma_{ij}} + \|u - u^i\|_{0,\gamma_{ij}} + \|u - u^j\|_{0,\gamma_{ij}}) h^{1/2} |w^i - w^j|. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.8 gilt

$$\|I_h u|_{R_j} - u\|_{0,\gamma_{ij}} \leq C h^{-1/2} \|I_h u|_{R_j} - u\|_{0,R_j} \leq C h^{3/2} \|u\|_{2,R_j}.$$

Außerdem erhalten wir mit einem Skalierungsargument, dem Spursatz auf dem Referenzelement und dem Bramble-Hilbert-Lemma

$$\|u - u^i\|_{0,\gamma_{ij}} \leq C h^{1/2} \|u\|_{2,R_i}.$$

Mit Lemma 5.3 folgt dann

$$I_7 \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2,\Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon*}.$$

Es verbleibt der Term I_3 . Da $\|(b - \hat{b}) \cdot n_{ij}\|_{0,\infty,\gamma_{ij}} \leq C h$ gilt, folgt hier mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$I_3 \leq \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} C h \left(\int_{\gamma_{ij}} (I_h u|_{R_i} - \lambda_{ij} u^i - (1 - \lambda_{ij}) u^j)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{ij}|^{1/2} |w^i|.$$

Auch hier schieben wir die exakte Lösung u ein und benutzen die gleichen Abschätzungen wie bei I_7 . Für $|w^i|$ gilt durch Transformation auf ein Referenzelement

$$|w^i| \leq \|w_h\|_{0,\infty,\gamma_{ij}} \leq C h^{-1} |w_h|_{1,\Omega_k} \leq C h^{-1} \|w_h\|_{\varepsilon*}.$$

Wir erhalten damit

$$I_3 \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2,\Omega_k} \|w_h\|_{\varepsilon*}.$$

□

Insgesamt können wir nun den nachfolgenden Satz formulieren.

Satz 5.5

Sei $(u, \lambda) \in \left(X_{00} \cap \prod_{k=1}^{N_\Omega} H^2(\Omega_k) \right) \times M$ Lösung von (3.12) mit der modifizierten Bilinearform $a^{up}(\cdot, \cdot)$ und der modifizierten Linearform $f^{up}(\cdot)$ sowie $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ Lösung von (5.20) mit $f \in L^2(\Omega)$ und es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.3. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon*} \leq C(q_h) \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2,\Omega_k}.$$

Beweisskizze

Basis des Beweises ist die Arbeit von Ohmori/Ushijima [23] bzw. die Erweiterung auf Navier-Stokes-Gleichungen von Schieweck/Tobiska [30] sowie die zusätzlich bereitgestellten Lemmata 5.3 und 5.4.

Ausgehend von der Koerzivität von $a^{up}(\cdot, \cdot)$ gilt für $w_h = I_h u - u_h$

$$\begin{aligned} C \|w_h\|_{\varepsilon^*}^2 &\leq a^{up}(w_h, w_h) = a^{up}(I_h u - u_h, w_h) \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\nabla(I_h u - u_h), \nabla w_h)_{\Omega_k} + b^{up}(I_h u - u_h, w_h). \end{aligned}$$

Wir schieben nun im ersten Term die exakte Lösung u ein und zerlegen die Bilinearform. Wir erhalten

$$\begin{aligned} C \|w_h\|_{\varepsilon^*}^2 &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\nabla(I_h u - u), \nabla w_h)_{\Omega_k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\nabla u, \nabla w_h)_{\Omega_k} - \varepsilon \sum_{k=1}^{N_\Omega} (\nabla u_h, \nabla w_h)_{\Omega_k} \\ &\quad + b^{up}(I_h u - u_h, w_h) \\ &\leq Err_{\text{Int}} - b(I_h u - u, w_h) + (f, w_h) - b(u, w_h) + Err_{\text{Kons}} - (f, w_h) \\ &\quad + b^{up}(u_h, w_h) + b^{up}(I_h u - u_h, w_h), \end{aligned}$$

wobei Err_{Int} den Interpolationsfehler und Err_{Kons} den Konsistenzfehler bezeichnet. Man sieht, daß die Terme $\pm(f, w_h)$, $\pm b^{up}(u_h, w_h)$ sowie $\pm b(u, w_h)$ sich gegenseitig aufheben. Somit verbleibt

$$C \|w_h\|_{\varepsilon^*}^2 \leq Err_{\text{Int}} + Err_{\text{Kons}} + |b^{up}(I_h u, w_h) - b(I_h u, w_h)|.$$

Mit Lemma 5.4 folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung 5.6

Wenn q_h für die gesamte Gitterfolge durch $q_h \leq C$ beschränkt ist, so gilt die Behauptung von Satz 5.5 mit einer Konstanten unabhängig von allen Gitterweiten h_k . Andererseits muß bei der Verwendung adaptiver Verfeinerungstechniken die Abhängigkeit der Konstanten von q_h berücksichtigt werden.

Kapitel 6

Konzept zur Verwaltung von Geometriedaten

In diesem Kapitel soll ein Konzept zur Erzeugung und Verwaltung beliebiger zwei- und dreidimensionaler Gitter beschrieben werden (vgl. [3]), das im Programmpaket *MooNMD* implementiert wurde. MooNMD gestattet das Lösen von Konvektions-Diffusions- und Navier-Stokes-Gleichungen mit Finiten-Elementen bei Verwendung komplexer Geometrien. Das Konzept soll flexibel und platzsparend, aber auch offen und leicht erweiterbar sein. Ein wesentliches Element des Konzeptes ist eine geeignete Randbeschreibung des zu vernetzenen Gebietes Ω . Desweiteren werden Zellen definiert und diese zu Gittern zusammengefaßt, welche als Zerlegung von Ω dienen. Durch den Einsatz von Datenbanken und abstrakten Beschreibungen ist es möglich, auf einfache Weise neue Zelltypen und Verfeinerungsvorschriften hinzuzufügen. Das Konzept wurde in C++ implementiert und ist Bestandteil der Programme, die zur Ermittlung der in dieser Arbeit angeführten numerischen Ergebnisse benutzt wurden.

6.1 Anforderungen an ein Geometrie-konzept

Es soll ein offenes, flexibles und erweiterbares System geschaffen werden, das eine abstrakte mathematische Grundlage zur Beschreibung nachfolgender Algorithmen (wie z. B. lokale Mehrgitterverfahren) liefert.

Das Geometrie-konzept soll sich ausschließlich mit geometrischen Daten und Zusammenhängen befassen und somit klar von den FE-Daten getrennt sein, d. h., man hat auf der einen Seite die Geometrie der Zerlegung und kann dann beispielsweise einen Finite-Elemente-Raum linearer oder auch kubischer Funktionen aufbauen oder, wenn nötig, auch beide.

Die Implementierung soll in einer modernen objekt-orientierten Programmiersprache mög-

lich sein. Um eine leichte Erweiterbarkeit zu erreichen, sollten Datenbanken bzw. datenbankähnliche Strukturen verwendet werden.

Es sollen Gitterhierarchien erzeugt werden können, die z. B. die Realisierung von Mehrgitteralgorithmen ermöglichen. Sowohl eine Vergrößerung als auch eine Verfeinerung eines bestehenden Gitters soll schnell und einfach realisierbar sein. Hierbei muß der ggf. nicht polygonale Rand des Gebietes beachtet werden. Mortar-Kanten oder auch hängende Knoten müssen berücksichtigt werden. Im Gebietsinneren befindliche bewegliche Phasengrenzen sollen möglich sein, d. h., daß Gitterpunkte auf vorgegebenen Kurven verschoben werden können.

6.2 Randbeschreibung

Wir beschränken uns bei der Randbeschreibung zunächst auf den zweidimensionalen Fall.

Der Rand kann aus mehreren geschlossenen Randteilen bestehen. Jeder Randteil besteht nun wiederum aus verschiedenen Randkomponenten. Hier sind Strecken, Kreisbögen und kubische Splines möglich. Durch die Parametrisierung sind die Randteile so orientiert, daß das Gebiet Ω stets links vom Rand liegt. Zusätzlich können im Inneren des Gebietes Ω sogenannte Interfaces als offene oder geschlossene Randteile definiert werden. Diese dienen dazu, Ecken der Zerlegung auf eine vorgegebene Kurve zu zwingen.

Im dreidimensionalen Fall gibt es mehrere Möglichkeiten der Randbeschreibung. Eine naheliegende Variante wäre, Polyeder mit Hilfe von Dreiecken zu beschreiben. Konvexe Polyeder können auch als Durchschnitt von durch Hyperebenen definierte Halbräume beschrieben werden. Bisher ist nur diese Variante in MoonMD implementiert. Die Möglichkeiten der Randbeschreibung können im 3D-Fall jedoch noch deutlich erweitert werden, z. B. durch Splines, parametrisierte Flächen oder Oberflächen von Körpern, die durch Vereinigung oder Differenz von Basiskörpern (Kugel, Quader, Zylinder,...) entstehen.

6.3 Zellen

Eine Zelle K wird durch ihre Form sowie durch die Koordinaten ihrer Eckpunkte beschrieben. Die Form einer Zelle wird mit Hilfe einer Form-Beschreibung (*shape descriptor*) angegeben. In dieser Form-Beschreibung werden die topologischen Zusammenhänge auf einem entsprechenden Referenzelement dieses Zelltypes dargestellt. Hierzu benötigen wir eine lokale Numerierung aller geometrischer Objekte (Ecken, Kanten und Flächen).

Im mathematischen Kontext wird die Zelle K auch als Teil des Gebietes Ω aufgefaßt ($K \subset \Omega$).

Wir führen nun Bezeichnungen für die jeweilige Anzahl der verschiedenen geometrischen

Objekte der Zelle K ein. Seien $N_V(K)$ die Anzahl der lokalen Ecken, $N_E(K)$ die Anzahl der lokalen Kanten und $N_F(K)$ die Anzahl der lokalen Flächen.

Definition 6.1

Eine *Form-Beschreibung* S (shape descriptor) ist eine Zusammenfassung topologischer Zusammenhänge auf einem Referenzelement.

Die Menge \mathcal{S} umfaßt alle verfügbaren Form-Beschreibungen S .

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden in MoonMD folgende Formbeschreibungen realisiert $\mathcal{S} := \{\text{Dreieck}, \text{Viereck}, \text{Tetraeder}, \text{Hexaeder}\}$.

Der Aufbau der Feldbezeichner innerhalb der Deskriptoren erfolgt nach folgendem Muster:

$$\langle \text{Name1} \rangle \langle \text{Name2} \rangle = \{\text{Mengen vom Objekttyp } \text{Name2}\}.$$

Name1 bezeichnet den zu beschreibenden Objekttyp und Name2 bezeichnet den Objekttyp, der als Informationsbasis dient, d. h., jedem Objekt O vom Typ Name1 wird die Menge aller Objekte vom Typ Name2 zugeordnet, die mit dem Objekt O verknüpft sind.

Als Beispiel erläutern wir die Form-Beschreibung eines Vierecks (2D).

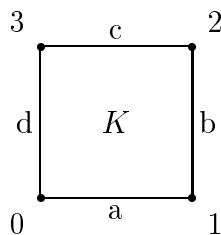


Abbildung 6.1: Grundelement eines Vierecks

Die Form-Beschreibung der Zelle in Abb. 6.1 enthält nun folgende Felder:

$$\text{EdgeVertex} = ((0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0))$$

$$\text{VertexEdge} = ((d, a), (a, b), (b, c), (c, d))$$

Hier beschreibt beispielsweise EdgeVertex , welche Ecken zu welcher Kante gehören und VertexEdge , welche Kanten an der jeweiligen Ecke liegen.

Hinweis: Im Programmkontext werden allerdings alle Objekte mit Zahlen bezeichnet. Die Bezeichnung der Kanten mit Buchstaben dient hier nur zur besseren Lesbarkeit.

6.4 Verfeinerung einzelner Zellen

Definition 6.2

Eine Abbildung R einer Zelle K auf eine endliche Menge $\sigma(K)$ neuer Zellen

$$R : K \mapsto \sigma(K), \quad \sigma(K) := \{K_i\}_{i=0}^{N_R-1} \quad \text{mit}$$

$$(i) \quad \bigcup_{i=0}^{N_R-1} \overline{K}_i = \overline{K}$$

$$(ii) \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

heißt Verfeinerung der Zelle K . Die Zellen $K_i, i = 0, \dots, N_R - 1$, heißen Kindszellen der Elternzelle K und N_R bezeichnet die Anzahl der entstehenden Kindszellen.

Eine Verfeinerung wird durch eine Verfeinerungs-Beschreibung (*refinement descriptor*) dargestellt. Darin werden wiederum alle topologischen Zusammenhänge zwischen der alten und den neu entstehenden Zellen bereitgestellt. Hierzu werden alle Ecken, Kanten und Flächen in $\sigma(K)$ neu numeriert. Somit können beispielsweise folgende Zusammenhänge beschrieben werden:

- Aus welchen Kanten besteht eine Kindszelle K_i ?
- Welcher Form-Beschreibung genügt die Kindszelle K_i ?
- Welche neue Kante fällt mit einer alten Kante zusammen?

Definition 6.3

Sei R eine Verfeinerung mit $R : K_j \mapsto \sigma(K_j) = \{K_i\}_{i=1}^{N_R-1}$. Dann heißt $L_i := \{i, j\}$, $i = 0, \dots, N_R - 1$, *Generationslinie (generation line)* und $\mathcal{L}(R)$ ist die Menge aller *Generationslinien der Verfeinerung R* .

Die Generationslinien stellen den Zusammenhang zwischen Elternzelle und den neu entstehenden Kindszellen her.

Anhand eines Beispiels für die Bisektion einer Viereckszelle (2D) wollen wir nun einige Felder einer Verfeinerungsbeschreibung vorstellen.

Die Verfeinerungs-Beschreibung zu der in Abb. 6.2 dargestellten Situation enthält folgende Felder:

`ChildType = (Viereck, Viereck)`

`ChildVertex = ((0, 1, 2, 3), (1, 4, 5, 2))`

`VertexChild = ((I), (I, II), (I, II), (I), (II), (II))`

`OldEdgeNewVertex = ((0, 1, 4), (4, 5), (2, 3, 5), (3, 0))`

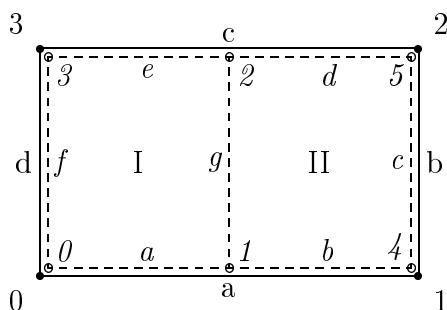


Abbildung 6.2: Bisektion eines Viereckselementes

OldEdgeNewEdge = ((a, b), (c), (d, e), (f))

NewEdgeEqOldEdge = (c, f)

InteriorEdgeOfCell = (g).

Die Menge \mathcal{R} umfaßt alle verfügbaren Verfeinerungs-Beschreibungen. Im Programmpaket MooNMD sind die folgenden Verfeinerungen realisiert:

<i>NoRef</i>	keine Verfeinerung – entspricht $R : K \mapsto K$
<i>LineReg</i>	reguläre Verfeinerung einer Linie (1D)
<i>TriReg</i>	reguläre Verfeinerung eines Dreiecks in vier neue Dreiecke
<i>TriBis</i>	Bisektion eines Dreiecks in zwei Dreiecke
<i>QuadReg</i>	reguläre Verfeinerung eines Vierecks
<i>QuadBis</i>	Bisektion eines Vierecks in zwei Vierecke
<i>Quad1Conf</i>	konformer Abschluß bei einem hängenden Knoten
<i>Quad2Conf</i>	konformer Abschluß bei zwei benachbarten hängenden Knoten
<i>QuadToTri</i>	Verfeinerung eines Quadrates in zwei Dreiecke
<i>Mortar</i>	$1 \times n$ Zerlegung eines Vierecks
<i>TetraReg</i>	reguläre Verfeinerung eines 3D-Tetraeders in acht neue Tetraeder
<i>HexaReg</i>	reguläre Verfeinerung eines 3D-Hexaeders.

Als Umkehrung der Verfeinerung R führen wir nun einen Vergrößerungsoperator F ein.

Definition 6.4

Sei R ein Verfeinerungsoperator mit $R : K \mapsto \sigma(K) = \{K_i\}$. Dann bezeichnet die Abbildung F mit

$$F : K_i \mapsto K, \forall K_i \in \sigma(K)$$

die Vergrößerung auf K .

Bemerkung:

Sei $\sigma' = \bigcup_i \sigma(K_i)$.

Eine Vergrößerung ist nur zulässig, wenn alle Kinder K_i von K ($K_i \in \sigma(K)$) entfernt werden sollen und $\sigma' = \emptyset$ oder wenn ein Verfeinerungsoperator $R' : K \mapsto \sigma'$ existiert.

6.5 Gebietszerlegung

Wir führen nun eine Zerlegung T_h des Grundgebietes Ω in Zellen $K \in T_h$ ein.

Dazu bezeichnen wir mit:

N_V	globale Anzahl der Ecken
N_E	globale Anzahl der Kanten
N_F	globale Anzahl der Flächen
N_C	globale Anzahl der Zellen
$I_V(K)$	Indexmenge der Ecken der Zelle K
$I_E(K)$	Indexmenge der Kanten der Zelle K
$I_F(K)$	Indexmenge der Flächen der Zelle K
I_V	globale Indexmenge der Ecken
I_E	globale Indexmenge der Kanten
I_F	globale Indexmenge der Flächen
I_C	globale Indexmenge der Zellen.

Außerdem seien Γ_j , $j \in I_E$, die Kanten der Zellen $K \in T_h$.

Definition 6.5

Sei T_h eine beliebige Zerlegung von Ω . Dann definiert ∂T_h mit

$$\partial T_h := \{ \Gamma \mid \exists K \in T_h \text{ mit } \Gamma \subset \partial K \}$$

die Menge aller Kanten (bzw. Flächen) der Zerlegung.

Wir erinnern an die Definitionen 2.5 und 2.6 zur konformen Zerlegung von Ω .

Definition 6.6

Sei T_h eine Menge konvexer, offener Zellen K_i , $i \in I_C$, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\bigcup_{i=0}^{N_C-1} \overline{K_i} = \overline{\Omega}$
- (ii) $K_i \cap K_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$
- (iii) $\forall i, j \in I_E : \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_i \equiv \Gamma_j$.

Dann heißt T_h 0-reguläre oder konforme Zerlegung von Ω .

Der Parameter h bezeichnet das Maximum der Zelldurchmesser $h_K = \text{diam}(K)$ aller Zellen $K \in T_h$.

Nun können wir die Verfeinerung \overline{R} einer Zerlegung T_l einführen.

Definition 6.7

Seien $R_i : K_i \mapsto \sigma(K_i)$, $i = 0, \dots, N_C^l - 1$, mit $K_i \in T_l$ die Verfeinerungsoperatoren aller einzelnen Zellen der Zerlegung T_l . Dann heißt die Abbildung

$$\bar{R} : T_l \rightarrow T_{l+1}$$

Verfeinerung der Zerlegung T_l zu einer feineren Zerlegung T_{l+1} und entsteht durch die Hintereinanderausführung aller R_i .

Bemerkung:

- (i) Ein Verfeinerungsoperator kann auch vom Typ *NoRef* sein, d. h., die Zelle bleibt auch in der Bildzerlegung unverändert erhalten.
- (ii) Da alle einzelnen Verfeinerungen einen disjunkten Träger haben, kann die Hintereinanderausführung in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden.

Definition 6.8

Sei $\{T_l\}_{l=0}^N$ eine Zerlegungsfolge und $\{\bar{R}_l\}_{l=0}^{N-1}$ die zugehörige Folge von Verfeinerungen. Dann heißt $GL(K) = n$ Geometrie-Level von $K \in T_l$, wenn K durch n echte Verfeinerungen aus der Grundzerlegung T_0 entstanden ist. *Echt* bedeutet hier, daß $\sigma(K) \neq \{K\}$ ist.

Definition 6.9

Sei T_h eine Menge konvexer, offener K_i , $i \in I_C$, mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 6.6 und

- (iii) $\forall i, j \in I_C$ mit $\text{int}(\partial K_i \cap \partial K_j) \neq \emptyset : |GL(K_i) - GL(K_j)| \leq 1$.

Dann heißt T_h 1-reguläre Zerlegung von Ω .

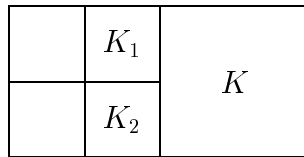


Abbildung 6.3: Beispiel einer 1-regulären Zerlegung

Bemerkung:

Wenn alle verwendeten Verfeinerungen regulär sind, dann entspricht eine 1-reguläre Zerlegung in direkter Weise einer Zerlegung mit hängenden Knoten (vgl. Abb. 6.3).

Im 2D-Fall gilt die allgemeinere Definition der 1-Regularität ohne Verwendung von Gitterleveln:

- (iii) $\forall K \forall i \in I_E(K) \forall j = 0, \dots, N_E - 1 : \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset \wedge \Gamma_i \neq \Gamma_j \Rightarrow \exists! k : \bar{\Gamma}_i \cup \bar{\Gamma}_k \equiv \bar{\Gamma}_j \vee \bar{\Gamma}_i \equiv \bar{\Gamma}_j \cup \bar{\Gamma}_k$.

Dies bedeutet, wenn der Durchschnitt zweier verschiedener Kanten nicht leer ist, dann existiert genau eine weitere Kante, so daß die Vereinigung der Abschlüsse von zwei dieser drei Kanten gerade den Abschluß der dritten ergibt.

6.6 Fugen

Fugen (joints) dienen zur Beschreibung von Nachbarschaftsbeziehungen.

Definition 6.10

Sei $K_i, K_j \in T_h$, ($i \neq j$) mit $\text{int}(\partial K_i \cap \partial K_j) \neq \emptyset$. Dann heißt die Indexmenge $J(K_i, K_j) := \{i, j\}$ Fuge zwischen den Zellen K_i und K_j .

Diese Nachbarschaften sind wichtig, um z. B. die Stetigkeit einer Funktion durch die Verknüpfung der benachbarten Freiheitsgrade zu realisieren oder um beispielsweise bei Fehlerschätzern Sprungterme berechnen zu können.

6.7 Mapper

Mapper dienen der Abbildung von Seitenflächen von Zellen und von einer Verfeinerungsstufe dieser Seitenflächen auf entsprechende Seitenflächen benachbarter Zellen.

Im zweidimensionalen Fall werden bei benachbarten Zellen nur zwei Strecken mit eventuellen Zwischenpunkten miteinander verbunden. Hierbei ist es nicht erforderlich, zusätzliche Informationen über die Abbildung der Zwischenpunkte zu halten, da einzig die Laufrichtung des Parameters entlang der Strecken umgekehrt ist.

Im dreidimensionalen Fall wird als Mapper die Abbildung aller geometrischer Objekte einer 2D-Verfeinerungsbeschreibung auf eine zweite, passende 2D-Verfeinerungsbeschreibung definiert.

Definition 6.11

Sei $M = (M_V^1, M_V^2, M_E^1, M_E^2, M_F^1, M_F^2)$ eine Abbildung mit

$$\begin{aligned} M_V^1 &: I_V(R_1) \rightarrow I_V(R_2) \cup \{-1\} \\ M_V^2 &: I_V(R_2) \rightarrow I_V(R_1) \cup \{-1\} \\ M_E^1 &: I_E(R_1) \rightarrow I_E(R_2) \cup \{-1\} \\ M_E^2 &: I_E(R_2) \rightarrow I_E(R_1) \cup \{-1\} \\ M_F^1 &: I_F(R_1) \rightarrow I_F(R_2) \cup \{-1\} \\ M_F^2 &: I_F(R_2) \rightarrow I_F(R_1) \cup \{-1\}, \end{aligned}$$

wobei R_1, R_2 Verfeinerungen von zweidimensionalen Zellen beschreiben. Dann heißt M Mapper.

Die Menge \mathcal{M} umfaßt alle verfügbaren Mapper M .

Die Abbildung auf -1 wird benutzt, wenn kein zugeordnetes Objekt existiert.

Mapper sind notwendig, um beim Übergang von einer Zelle zu einer benachbarten Zelle die zusammengehörenden Objekte in den jeweiligen lokalen Numerierungen zu finden. Dies ist z. B. bei der Verfeinerung einer 3D-Zerlegung erforderlich.

Der Übergang von einer Zelle zu einer benachbarten dreidimensionalen Zelle erfolgt dann dadurch, daß zunächst die Objekte einer Seitenfläche auf die Struktur einer korrespondierenden 2D-Verfeinerungsbeschreibung abgebildet werden. Dies passiert innerhalb der 3D-Verfeinerungsbeschreibung der ersten Zelle. Nun kommt der Mapper zum Einsatz und dann werden die Objekte mittels der hier korrespondierenden 2D-Verfeinerungsbeschreibung auf die Objekte der entsprechenden Seitenfläche der zweiten 3D-Zelle abgebildet.

6.8 Gitter

Zu einer Zerlegungsfolge $\{T_l\}_{l=0}^N$ wird der Gittergraph G als ungerichteter Graph $G := (V, E)$ mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E definiert. (Hier wird der Begriff Kante im graphentheoretischen Sinne benutzt und hat nichts mit den Kanten einer Zelle zu tun.)

Wir definieren $U(\Gamma)$ als Umgebung der Kante Γ durch

$$U(\Gamma) := \{K \in T \mid \overline{K} \cap \Gamma \neq \emptyset\}.$$

Hierbei sei T die Vereinigung aller Zellen der Zerlegungsfolge $\{T_l\}_{l=0}^N$.

Dann definieren wir G als

$$\begin{aligned} G &:= (V, E) \quad \text{mit} \\ V &:= \{K \mid K \in T_l, \forall l\} \\ E_1 &:= \left\{ J(K_i, K_j) \mid \begin{array}{l} K_i, K_j \in U(\Gamma) \text{ mit } K_i \cup K_j \text{ ist 0-regulär und} \\ K_i, K_j \in T_l \text{ mit } l \text{ ist minimal } \forall \Gamma \in \partial T \end{array} \right\} \\ E_2 &:= \{L \mid L \in \mathcal{L}(R_K) \forall K \in T_l, \forall l\} \\ E &:= E_1 \cup E_2. \end{aligned}$$

Die Kantenmenge E_1 umfaßt alle Fugen innerhalb der verschiedenen Zerlegungen und E_2 die Generationslinien zwischen den Zerlegungen.

Definition 6.12

Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}(T_0(\Omega))$ die Menge aller Gitter, die aus der Grundzerlegung $T_0(\Omega)$ durch wiederholtes Anwenden von Verfeinerungsoperatoren \overline{R} entstehen.

Die Gitterschicht (grid level) $G_l \subset G$ mit $G_l := (V_l, E_l)$, $V_l \subset V$, $E_l \subset E_1$, entspricht der Zerlegung auf der Stufe (level) l .

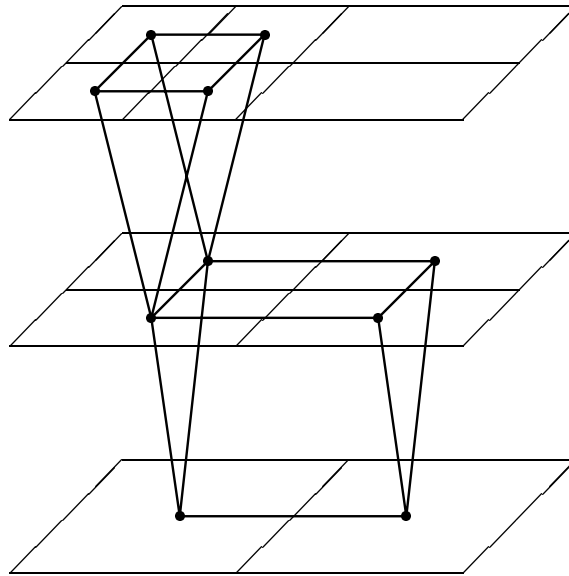


Abbildung 6.4: Gitter mit Fugen und Generationenlinien

6.9 Iteratoren

Iteratoren werden benötigt, um Zellen mit einer bestimmten Eigenschaft nacheinander bearbeiten zu können. Mit ihnen ist es beispielsweise möglich, die verschiedenen Level eines Mehrgitteralgorithmus oder alle Randzellen einer Zerlegung abzulaufen.

Ein Iterator erzeugt einen Teilgraph eines Gittergraphen G . Dies dient dazu, alle Zellen K eines Gittergraphen G mit einer bestimmten Eigenschaft abzuarbeiten.

Wir führen eine Abbildung \mathcal{I} eines Bereiches A der natürlichen Zahlen in die Knotenmenge V des Gittergraphen G

$$\mathcal{I} : A \subset \mathbb{N} \rightarrow B \subset V$$

ein. Es sind die folgenden Iteratoren implementiert:

$\mathcal{I}_{EQ}^{(l)}$ Menge aller Zellen, die genau zur Gitterschicht l gehören

$\mathcal{I}_{LE}^{(l)}$ Menge aller Zellen, die zur Gitterschicht l gehören bzw. die, die zur höchsten Gitterschicht l' an einer Stelle mit $l' < l$ gehören (somit gilt: $\bigcup_{K \in B} \overline{K} = \overline{\Omega}$)

\mathcal{I}_{Fin} Menge aller Zellen die jeweils zur feinsten Gitterschicht (örtlich gesehen) gehören

\mathcal{I}_{Coll} hier wird die Menge B fest vorgegeben (coll = collection).

6.10 Bedeutung der Deskriptoren

Der entscheidende Vorteil der Deskriptoren liegt darin, daß sie nur einmal im Speicher abgelegt werden und dann von beliebig vielen Objekten benutzt werden können. Somit ist es möglich, auch selten genutzte Informationen im Deskriptor bereitzustellen. Im Deskriptor können Informationen enthalten sein, die sonst, aufgrund der Notwendigkeit Speicherplatz zu sparen, nur auf Umwegen (zusätzliche Feldabfragen oder Suchoperationen) ermittelt werden können. Dies führt zu einer deutlichen Programmbeschleunigung bei gleichzeitigem sparsamem Umgang mit Speicherressourcen.

6.11 Integration der Mortar-Technik

In diesem Abschnitt sollen die Besonderheiten bei der geometrischen Verwaltung der Mortar-Kanten und der Grundgitter bei Einsatz der Mortar-Technik vorgestellt werden.

Als Grundzerlegung T_0 wird eine 0-reguläre bzw. konforme Zerlegung verwendet. An den Stellen innerhalb der Grundzerlegung, an denen Mortar-Kanten realisiert werden sollen, werden statt der üblichen Fugen sogenannte Mortar-Fugen eingesetzt. Es gibt zwei Arten von Mortar-Fugen. Eine befindet sich innerhalb der Grundzerlegung, diese wird als *MortarBaseJoint* bezeichnet und kennt die beiden anliegenden Zellen. Auf den höheren Leveln wird dann nur noch der sogenannte *MortarJoint* verwendet. Dieser kennzeichnet lediglich, daß sich an dieser Stelle eine Mortar-Kante befindet, kennt aber keine Zelle auf der gegenüberliegenden Seite. Um nun zu Zellen auf der gegenüberliegenden Seite zu gelangen, ist es erforderlich, sich zunächst entlang der Generationenlinien zur entsprechenden Elternzelle innerhalb der Grundzerlegung zu bewegen, dort mit Hilfe des *MortarBaseJoint*s auf die andere Seite der Mortar-Kante zu wechseln und dann wiederum mit Hilfe der Generationenlinien und entsprechender Auswahl der benötigten Kindszelle bis auf das gewünschte Level zu steigen.

Mit einem *MortarBaseJoint* wird jeweils eine vollständige Mortar-Kante gekennzeichnet, d. h., auch eine zusammenhängende Verbindung zwischen zwei Teilgebieten, die sich über mehrere Zellen erstreckt, muß durch mehrere Mortar-Kanten realisiert werden. Eine solche Situation wird in Abb. 6.5 dargestellt. Man sieht, daß aufgrund der gewählten Grundzerlegung aus je vier Zellen pro Teilgebiet in der Implementierung zwei Mortar-Kanten eingeführt werden müssen.

Um nun auf einfache Weise deutlich feinere Ausgangszerlegungen in einzelnen Teilgebieten zu erreichen, wurde die Mortar-Verfeinerung eingeführt. Hierbei wird eine Viereckszelle in n nebeneinander liegende Viereckszellen zerlegt. Fügt man nun in der Grundzerlegung eine oder mehrere schmale, anisotrope Zellen ein und benutzt dann als initialen Verfeinerungsschritt die Mortar-Verfeinerung, so kann man mit nur einem Verfeinerungsschritt eine gleichmäßige, aber deutlich feinere Zerlegung erhalten.

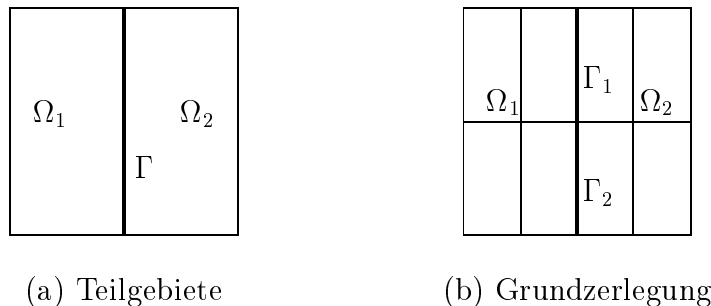


Abbildung 6.5: Beispiel für MortarBaseJoint

Als weitere Besonderheit werden Mortar-Iteratoren definiert. Sie dienen dazu, alle an derselben Mortar-Kante anstoßenden Zellen auf einem bestimmten Level auf der Mortar- bzw. auf der Nicht-Mortar-Seite nacheinander abzulaufen.

Zur Darstellung der Lagrange-Multiplikatoren werden keine zusätzlichen Zerlegungen gehalten. Die Realisierung dieser Objekte geschieht erst durch die Erzeugung eines eindimensionalen FE-Raumes. Hierzu wird lediglich eine *Collection* aller Zellen auf der jeweiligen Nicht-Mortar-Seite jeder Mortar-Kante benötigt. Eine solche Collection kann mit Hilfe eines der oben beschriebenen Mortar-Iteratoren erzeugt werden.

6.12 Beispiel zur Gittermanipulation

Den Ausgangspunkt bildet ein Einheitsquadrat, welches adaptiv verfeinert werden soll. Als Markierungskurve für die Verfeinerung wird eine Kardioide benutzt. Als Nebenbedingung wird gefordert, daß das Gitter 1-regulär bleiben soll. Die Abb. 6.6(a) zeigt das Gitter nach einigen Verfeinerungsschritten.

Nun wird eine neue, kleinere Kardioide als Markierungskurve benutzt. Es werden dann weitere adaptive Verfeinerungs-/Vergrößerungsschritte durchgeführt, wobei bei einer Vergrößerung jeweils nur eine Zellschicht abgetragen wird. Auch hier muß ständig die 1-Regularität gewährleistet sein. Die Abb. 6.6(b) und 6.6(c) zeigen Zwischenstufen der Gitterentwicklung. In Abb. 6.6(d) erkennt man, daß nur noch im Bereich der neuen Markierungskurve stark verfeinerte Zellen vorliegen.

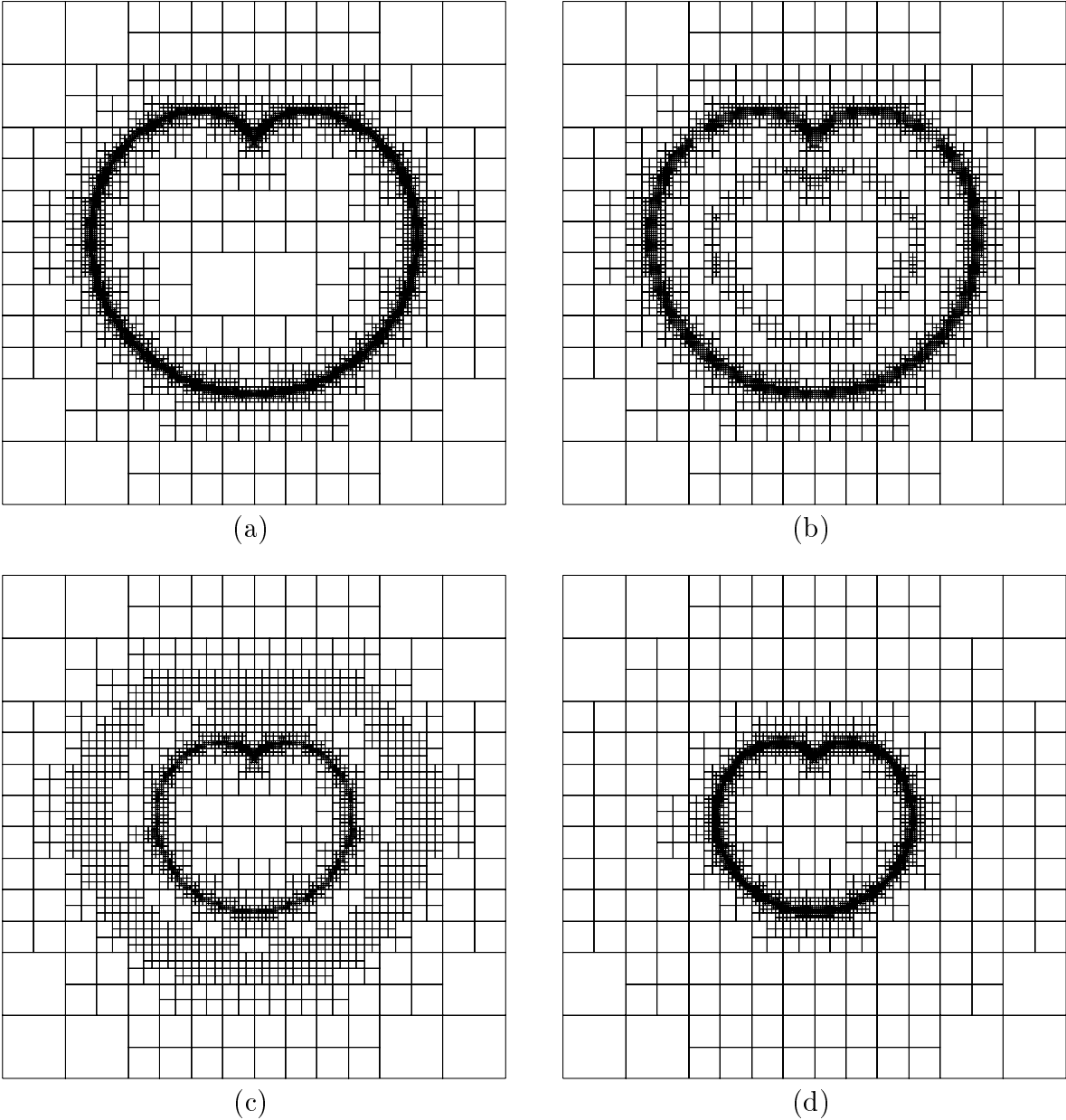


Abbildung 6.6: Adaptive Gitterverfeinerung und -vergröberung

Kapitel 7

Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel soll zunächst gezeigt werden, daß die Mortar-Methode für polynomiale Testfälle die optimalen Konvergenzordnungen für den H^1 -, L^2 - und SDFEM-Fehler liefert. Danach wird die Anwendung auf eine Konvektions-Diffusions-Gleichung mit exponentiellen Grenzschichten betrachtet. Abschließend stellen wir an Hand des bekannten stationären DFG-Benchmark-Problems die Anwendbarkeit der Mortar-Technik auf Navier-Stokes-Probleme dar.

Wir werden in den nachfolgenden Tabellen folgende Bezeichnung für die Testrechnungen benutzen:

[*Form*]-[*Methode*]

Dabei nimmt *Form* einen der folgenden Werte an

- Q - Vierecke
- T - Dreiecke

und *Methode* einen der Werte

- GAL-C - konforme Galerkin-Methode
- UP-N - nichtkonformes upwind-Verfahren
- UP-C - konformes upwind-Verfahren
- SD-O1 - Stromlinien-Diffusion für Elemente 1. Ordnung (P_1 / Q_1)
- SD-O2 - Stromlinien-Diffusion für Elemente 2. Ordnung (P_2 / Q_2)
- SD-O3 - Stromlinien-Diffusion für Elemente 3. Ordnung (P_3 / Q_3).

7.1 Lösung der diskreten Probleme

In diesem Abschnitt soll der verwendete Löser beschrieben werden, der für die nachfolgenden Rechnungen benutzt wurde. Eine detaillierte Untersuchung der Konvergenzeigenschaften des Löserters ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, deshalb soll hier nur kurz seine

Arbeitsweise beschrieben werden.

Die Mortar-Diskretisierung (3.26) sowie deren Stabilisierungen (upwind und SDFEM) führen auf große, schwach besetzte lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{pmatrix} A & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Somit empfiehlt es sich, iterative Löser, wie z. B. Krylov-Unterraum-Methoden oder Mehrgitter-Methoden, zu verwenden. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt in entscheidendem Maße von den Eigenschaften eines Vorkonditionierers (Glätters) ab. Aufgrund des in der Koeffizientenmatrix rechts unten stehenden Nullblockes bestehen besondere Schwierigkeiten bei der Konstruktion eines geeigneten Vorkonditionierers, und Standardverfahren wie Jacobi, SOR oder ILU können nicht angewendet werden.

Bei Konvektions-Diffusions-Gleichungen ist die Matrix A i. a. nicht symmetrisch und auch keine M-Matrix.

Wir verwenden ein *vorkonditioniertes, flexibles GMRES* (generalized minimal residual) ([26], [25]).

Als Vorkonditionierer benutzen wir

$$\begin{pmatrix} C & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Hier wird C so gewählt, daß es leicht zu berechnen ist und

$$C^{-1} \approx A^{-1}$$

erfüllt ist.

Wir benutzen $C^{-1} = AMG(A)$, d. h., wir nutzen einige Iterationen eines algebraischen Mehrgitteralgorithmus zur Approximation von A^{-1} .

In jedem Schritt des GMRES-Verfahrens ist ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} C & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ s \end{pmatrix}$$

zu lösen. Hierzu wird die *Schur-Komplement-Methode* verwandt. Zunächst lösen wir approximativ

$$D^T C^{-1} D \lambda = D^T C^{-1} \mathbf{r} - s \quad (7.2)$$

und dann

$$u = C^{-1}(\mathbf{r} - D\lambda).$$

Da auch $D^T C^{-1} D$ i. a. eine nichtsymmetrische Matrix ist, erfolgt die Lösung von (7.2) mittels einiger GMRES-Iterationen.

Die vorgestellte Lösungsstrategie zeichnet sich dadurch aus, daß keine Geometrieinformationen benötigt werden, d. h., sie arbeitet rein algebraisch. Somit läßt sich der Löser als Black-Box benutzen.

Eine effiziente Lösung des Schur-Komplement-Systems (7.2) ist jedoch noch offen. Die Systemmatrix $D^T C^{-1} D$ ist nur implizit gegeben. Somit sind nur iterative Verfahren zur Lösung von (7.2) anwendbar.

Die Rechenzeiten für das Verfahren sind für eine geringe Zeilenanzahl von D^T akzeptabel. Bei steigender Zeilenanzahl wird das Verfahren ineffizienter. Dies erkennt man auch bei der Anwendung der Strategie auf die Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. [18]).

Eine weitere Löserstrategie wäre der Einsatz geometrischer Mehrgitteralgorithmen, welche gute Konvergenzeigenschaften versprechen (vgl. z. B. [7]). Diese konnten im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht mehr betrachtet werden.

7.2 Testbeispiel mit polynomialer Lösung

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \nabla u + 2u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma_D = \partial\Omega \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten.

Wir wählen die rechte Seite f so, daß wir als exakte Lösung

$$u = 100(1-x)^2 x^2 y(1-2y)(1-y)$$

erhalten.

Abb. 7.1 zeigt die für diese Rechnungen verwendeten Grundgitter. Alle weiteren Gitter (Level) entstehen hieraus durch reguläre Verfeinerung. Die entstehenden linearen, algebraischen Gleichungssysteme werden mit dem in Abschnitt 7.1 vorgestellten Algorithmus aufgelöst.

Zunächst betrachten wir Testrechnungen für Viereckselemente. Tabelle 7.1 zeigt die Anzahl der Unbekannten bei den verschiedenen Methoden auf dem jeweiligen Level.

In den Tabellen 7.2 und 7.3 sind die Ergebnisse für das konforme und nichtkonforme upwind-Verfahren und für die Galerkin-Methode dargestellt. Bei diesen Rechnungen wurde $\varepsilon = 1$ verwendet, um zunächst den diffusionsdominanten Fall zu untersuchen. Bei der upwind-Methode wurde jeweils die in Kapitel 5 vorgestellte Variante A mit der zusätzlichen Stabilisierung verwendet, d.h die Teilgebietsdiskretisierungen sind weitgehend unabhängig.

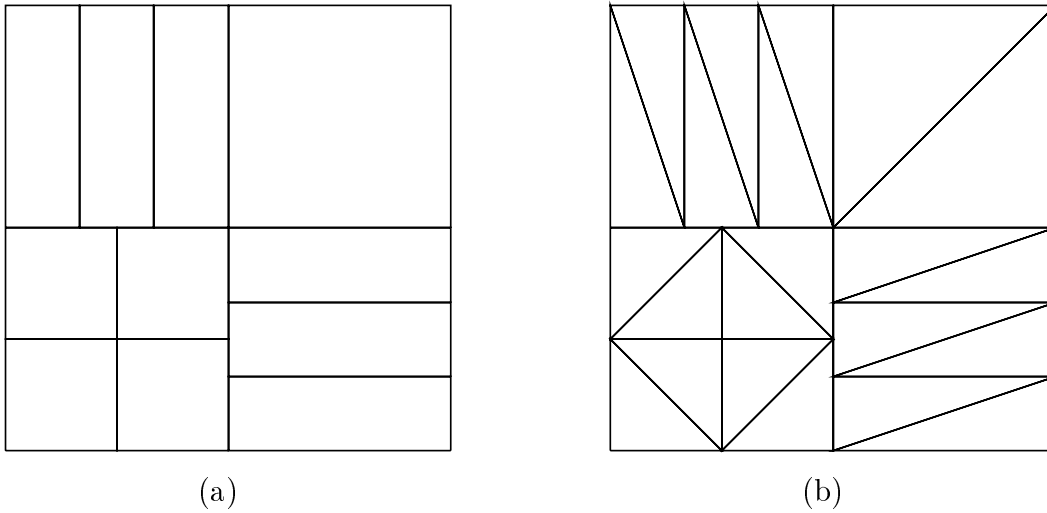


Abbildung 7.1: Grobgitter bei der Verwendung von (a) Vierecks- und (b) Dreieckselementen

Level	Q_UP-N	Q_SD-O1/Q_UP-C	Q_SD-O2	Q_SD-O3
1	38	24	73	144
2	120	73	237	489
3	416	237	829	1773
4	1536	829	3069	6717
5	5888	3069	11773	26109
6	23040	11773	46077	102909
7	91136	46077	182269	408573

Tabelle 7.1: Anzahl der Unbekannten bei Verwendung von Viereckselementen

Level	Q_UP-N		Q_UP-C		Q_GAL-C	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.13747		0.27492		0.15951	
2	0.06464	1.088	0.09426	1.544	0.04408	1.855
3	0.02958	1.127	0.03521	1.420	0.01091	2.013
4	0.01452	1.026	0.01495	1.234	0.00271	2.006
5	0.00727	0.997	0.00686	1.123	0.00067	2.001
6	0.00365	0.993	0.00329	1.061	1.69e-4	2.000
7	0.00183	0.995	0.00161	1.030	4.23e-5	2.000

Tabelle 7.2: Vergleich der L^2 -Fehler und Konvergenzordnungen

Man kann die Entwicklung der Fehlerordnungen in Richtung der Asymptotik sowohl für den L^2 - als auch für den H^1 -Fehler beobachten, d. h., für die Ordnung des L^2 -Fehlers der

Level	Q_UP-N		Q_UP-C		Q_GAL-C	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.49106		2.02027		1.51866	
2	0.88140	0.758	0.92934	1.120	0.82351	0.882
3	0.47083	0.904	0.46290	1.005	0.41744	0.980
4	0.24402	0.948	0.23098	1.002	0.20936	0.995
5	0.12475	0.967	0.11554	0.999	0.10475	0.998
6	0.06349	0.974	0.05779	0.999	0.05238	0.999
7	0.03243	0.969	0.02890	0.999	0.02619	0.999

Tabelle 7.3: Vergleich der H^1 -Fehler und Konvergenzordnungen

Galerkin-Methode erwartet man 2 und für alle anderen Ordnungen 1. Diese Werte werden gut erreicht. Insbesondere kann man die Suboptimalität der L^2 -Norm für die upwind-Methode, die hier nur von erster Ordnung ist, erkennen. Man vergleiche hierzu auch das 1D-Testbeispiel von Tobiska [33].

In den Tabellen 7.4, 7.5 und 7.6 werden die Testergebnisse für die Stromlinien-Diffusions-FEM dargestellt. Als Stromlinien-Diffusions-Parameter wird

$$\delta_K := \begin{cases} 0.3h_K & \text{falls } h_K > \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet. Um nicht wiederum das Galerkin-Verfahren zu erhalten, wählen wir hier $\varepsilon = 10^{-6}$.

Level	Q_SD-O1		Q_SD-O2		Q_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.15866		0.03027		0.00266	
2	0.04363	1.862	0.00436	2.792	0.00015	4.075
3	0.00909	2.261	0.00055	2.970	9.77e-6	4.014
4	0.00179	2.337	7.08e-5	2.975	6.50e-7	3.909
5	0.00036	2.305	8.94e-6	2.985	9.69e-8	2.746
6	7.78e-5	2.146	1.12e-6	2.991		
7	1.75e-5	2.086	1.42e-7	2.979		

Tabelle 7.4: Fehler in der L^2 -Norm und Konvergenzordnungen

Die Tabellen zeigen im wesentlichen sehr gut die erwarteten, optimalen Fehlerordnungen. Bei den Q_3 -Elementen ab Level 4 wird die optimale Ordnung allerdings nicht mehr erreicht. Ein Grund hierfür ist, daß die algebraischen Gleichungssysteme nicht mit ausreichend hoher Genauigkeit gelöst werden konnten. Daß bei den Q_3 -Elementen die letzten beiden Level

Level	Q_SD-O1		Q_SD-O2		Q_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.54275		0.48669		0.05240	
2	0.83954	0.877	0.12416	1.970	0.00631	3.053
3	0.42442	0.984	0.03085	2.008	0.00080	2.967
4	0.21162	1.004	0.00773	1.996	1.08e-4	2.893
5	0.10540	1.005	0.00193	1.995	1.87e-5	2.535
6	0.05256	1.003	0.00048	1.996		
7	0.02624	1.002	0.00012	1.994		

Tabelle 7.5: Fehler in der H^1 -Norm und Konvergenzordnungen

Level	Q_SD-O1		Q_SD-O2		Q_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.18286		0.27379		0.03458	
2	0.46172	1.357	0.05177	2.402	0.00310	3.475
3	0.17063	1.436	0.00945	2.452	0.00027	3.486
4	0.06067	1.491	0.00169	2.482	2.48e-5	3.480
5	0.02140	1.503	0.00030	2.493	2.70e-6	3.199
6	0.00754	1.503	5.32e-5	2.497		
7	0.00266	1.502	9.44e-6	2.495		

Tabelle 7.6: Fehler in der SD-Norm und Konvergenzordnungen

fehlen, liegt daran, daß der zur Verfügung stehende Löser nicht robust gegenüber höheren Polynomgraden ist und deshalb diese Systeme gar nicht mehr adäquat auflösen konnte.

Nun folgen die gleichen Testrechnungen für die Dreieckselemente. Tabelle 7.7 zeigt die hierbei verwendete Zahl von Unbekannten.

Level	T_UP-N	T_SD-O1/T_UP-C	T_SD-O2	T_SD-O3
1	49	24	73	144
2	164	73	237	489
3	592	237	829	1773
4	2240	829	3069	6717
5	8704	3069	11773	26109
6	34304	11773	46077	102909
7	136192	46077	182269	

Tabelle 7.7: Anzahl der Unbekannten bei Verwendung von Dreieckselementen

Die Tabellen 7.8 und 7.9 zeigen die Fehler für die upwind-Methode und die Galerkin-

Level	T_UP-N		T_UP-C		T_GAL-C	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.05693		0.27345		0.21967	
2	0.03141	0.857	0.09374	1.544	0.07895	1.476
3	0.01709	0.877	0.04329	1.114	0.02200	1.843
4	0.00924	0.886	0.02099	1.044	0.00566	1.957
5	0.00487	0.923	0.01040	1.012	0.00142	1.988
6	0.00251	0.955	0.00519	1.002	0.00035	1.997
7	0.00127	0.976	0.00259	1.000	8.94e-5	1.999

Tabelle 7.8: Vergleich der L^2 -Fehler und Konvergenzordnungen

Level	T_UP-N		T_UP-C		T_GAL-C	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.52869		2.02728		1.74319	
2	0.91827	0.735	1.05407	0.943	1.04989	0.731
3	0.50172	0.872	0.58609	0.846	0.55261	0.925
4	0.26236	0.935	0.30975	0.919	0.28008	0.980
5	0.13426	0.966	0.15939	0.958	0.14053	0.994
6	0.06807	0.979	0.08087	0.978	0.07032	0.998
7	0.03445	0.982	0.04074	0.989	0.03517	0.999

Tabelle 7.9: Vergleich der H^1 -Fehler und Konvergenzordnungen

Methode bei der Verwendung von konformen bzw. nichtkonformen P_1 -Dreieckselementen. Wir benutzen hier wiederum $\varepsilon = 1$ und die Variante A der upwind-Diskretisierung. Auch hier werden die erwarteten Fehlerordnungen gut erreicht.

Es folgen Testrechnungen für die konforme SDFEM bei Dreieckselementen.

Level	T_SD-O1		T_SD-O2		T_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.21804		0.03989		0.00706	
2	0.07204	1.597	0.00744	2.421	0.00109	2.686
3	0.01730	2.057	0.00099	2.908	6.23e-5	4.137
4	0.00384	2.171	1.27e-4	2.956	3.56e-6	4.128
5	0.00088	2.119	1.63e-5	2.962	3.04e-7	3.547
6	2.11e-4	2.061	2.09e-6	2.970		
7	5.18e-5	2.029	2.69e-7	2.953		

Tabelle 7.10: Fehler in der L^2 -Norm und Konvergenzordnungen

Level	T_SD-O1		T_SD-O2		T_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.80956		1.05587		0.17511	
2	1.09990	0.718	0.32558	1.697	0.02832	2.628
3	0.57722	0.930	0.08771	1.892	0.00347	3.025
4	0.28745	1.005	0.02256	1.958	4.25e-4	3.031
5	0.14243	1.013	0.00570	1.982	5.71e-5	2.896
6	0.07080	1.008	0.00143	1.992		
7	0.03529	1.004	0.00036	1.994		

Tabelle 7.11: Fehler in der H^1 -Norm und Konvergenzordnungen

Level	T_SD-O1		T_SD-O2		T_SD-O3	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.99934		0.56732		0.10635	
2	0.44198	1.176	0.13188	2.104	0.01273	3.061
3	0.16932	1.384	0.02550	2.370	0.00118	3.431
4	0.06005	1.495	0.00466	2.451	1.03e-4	3.505
5	0.02106	1.511	0.00083	2.481	9.54e-6	3.444
6	0.00740	1.507	1.48e-4	2.493		
7	0.00261	1.504	2.62e-5	2.495		

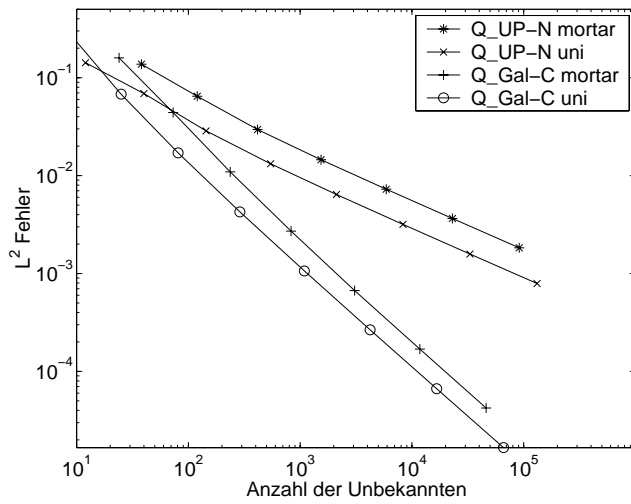
Tabelle 7.12: Fehler in der SD-Norm und Konvergenzordnungen

In den Tabellen 7.10, 7.11 und 7.12 sind die Ergebnisse der Testrechnungen für die konforme Stromlinien-Diffusions-FEM bei der Verwendung von Dreieckselementen dargestellt. Die berechneten Werte liegen nahe an den erwarteten Fehlerordnungen. Auch hier sind die fehlenden Ergebnisse darauf zurückzuführen, daß die zugehörigen algebraischen Gleichungssysteme nicht mit der notwendigen Genauigkeit aufgelöst werden konnten. Dies begründet sich mit der nicht vorhandenen Robustheit des derzeitig verwendeten Lösers gegenüber höherer Polynomgrade.

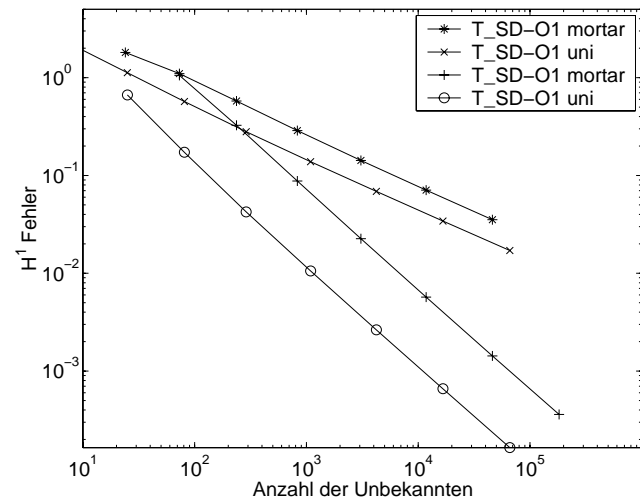
In den beiden Diagrammen in Abb. 7.2 wird beispielhaft ein Vergleich zwischen den hier vorgestellten Ergebnissen von Testrechnungen mit Mortar zu Rechnungen ohne Mortar durchgeführt. Als Rechengitter wird bei den Rechnungen ohne Mortar ein in mehreren Schritten regulär verfeinertes Einheitsquadrat benutzt. Man erkennt sehr gut den Gleichlauf der Fehlerentwicklung. Bei der Bewertung dieses Vergleichs ist zu berücksichtigen, daß im Diagramm die Gesamtanzahl der Unbekannten angegeben wurde, d. h., daß bei der Rechnung mit Mortar die Freiheitsgrade für u und für die Lagrange-Multiplikatoren gezählt wurden. Bei den Rechnungen ohne Mortar sind nur Freiheitsgrade für u erforderlich.

Es werden beispielhaft im Diagramm (a) in Abb. 7.2 der L^2 -Fehler für das upwind-Verfahren

und die Galerkin-Methode mit Vierecks-Elementen dargestellt. Im Diagramm (b) sieht man den H^1 -Fehler der SDFEM-Verfahren bei Verwendung von Dreiecks-Elementen. Die übrigen Kombinationen liefern prinzipiell gleiche Ergebnisse.



(a)



(b)

Abbildung 7.2: Vergleich des (a) L^2 - (b) H^1 - Fehlers zwischen Rechnungen mit und ohne Mortar-Methode

7.3 Konvektions-Diffusions-Problem mit zwei exponentiellen Grenzschichten

Wir wollen nun Testrechnungen für ein Konvektions-Diffusions-Problem mit zwei exponentiellen Grenzschichten durchführen. Wir betrachten das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ und wählen die exakte Lösung

$$u(x, y, \varepsilon) = xy^2 - y^2 \exp\left(\frac{2(x-1)}{\varepsilon}\right) - x \exp\left(\frac{3(y-1)}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{2(x-1) + 3(y-1)}{\varepsilon}\right)$$

für das Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \nabla u + u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g_D && \text{auf } \Gamma_D = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die rechte Seite f ist entsprechend zu setzen. Bei der Wahl dieser exakten Lösung erhalten wir annähernd homogene Dirichlet-Randdaten ($g_D \approx 0$). Der Parameter ε wird als $\varepsilon = 10^{-6}$ gewählt.

In Abb. 7.3 ist die exakte Lösung dargestellt. Es ergeben sich Grenzschichten bei $x = 1$ und $y = 1$.

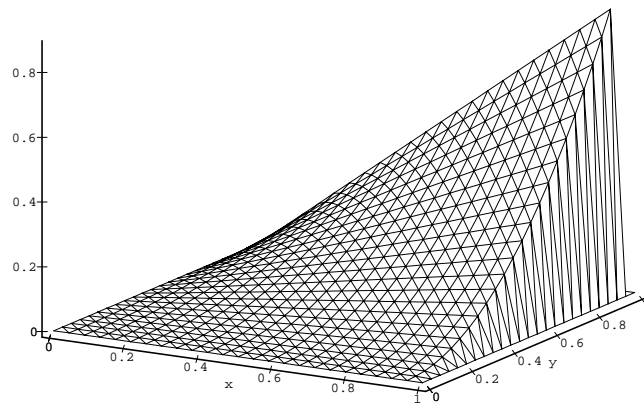


Abbildung 7.3: Darstellung der exakten Lösung

Zunächst betrachten wir die Lösung auf uniformen Vierecksgittern, die aus der regulären Verfeinerung des Einheitsquadrates entstehen. Die Tabellen 7.13 und 7.14 zeigen die Feh-

lerentwicklung für den L^2 - und H^1 -Fehler für die nichtkonforme upwind- und die SDFEM-Stabilisierung für Elemente erster und zweiter Ordnung. Bei der upwind-Methode wurde Variante A verwendet. Die Breite der Grenzschicht ist für alle Verfeinerungen kleiner als die Gitterweite h . Deshalb ist aufgrund des Interpolationsfehlers höchstens eine Konvergenzordnung von $1/2$ in der L^2 -Norm auf dem Gebiet Ω zu erwarten. Man erkennt, daß der H^1 -Fehler zunächst wächst. Weitere Untersuchungen zeigen, daß zunächst die Grenzschichten geometrisch aufgelöst werden müssen und erst dann eine Konvergenz des H^1 -Fehlers erwartet werden kann. Aus theoretischen Betrachtungen (vgl. [24]) ist bekannt, daß die Grenzschicht etwa eine Breite von ε hat. Somit benötigen wir in diesem Bereich Zellen, die schmaler als die Grenzschicht sind. Bei gleichmäßiger Verfeinerung hieße dies, daß man mindestens 20 Verfeinerungslevel benötigt, bis der Bereich geometrisch ausreichend aufgelöst ist und man eine Konvergenz erwarten kann. Da sich dadurch eine mit derzeitigen Rechenhilfsmitteln nicht beherrschbare Anzahl von Unbekannten ergibt, sind andere Herangehensweisen notwendig.

Level	Q_UP-N		Q_SD-O1		Q_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.21777		0.24453		0.22413	
2	0.15799	0.462	0.18951	0.367	0.16158	0.472
3	0.11189	0.497	0.13804	0.457	0.11431	0.499
4	0.07911	0.500	0.09894	0.480	0.08076	0.501
5	0.05595	0.499	0.07045	0.489	0.05707	0.500
6	0.03957	0.499	0.04999	0.494	0.04034	0.500
7	0.02799	0.499	0.03542	0.497	0.02852	0.500

Tabelle 7.13: Vergleich der L^2 -Fehler und Konvergenzordnungen bei uniformem Gitter

Level	Q_UP-N		Q_SD-O1		Q_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord
1	1.30073		0.85624		0.91179	
2	1.98901	-0.612	1.31776	-0.622	1.40678	-0.625
3	2.91799	-0.552	2.11980	-0.685	2.18667	-0.636
4	4.19968	-0.525	3.21817	-0.602	3.26439	-0.578
5	5.99066	-0.512	4.71631	-0.551	4.74850	-0.540
6	8.50831	-0.506	6.78953	-0.525	6.81221	-0.520
7	12.05770	-0.503	9.68718	-0.512	9.70347	-0.510

Tabelle 7.14: Vergleich der H^1 -Fehler und Konvergenzordnungen bei uniformem Gitter

Wir verwenden nun als Grobgitter ähnliche Gitter wie im vorhergehenden Abschnitt. Wir benutzen zunächst das Gitter aus Abb. 7.1(a). Hierbei werden an den Seiten, an denen sich die Grenzschichten befinden, schmale, längliche Zellen eingesetzt (siehe Abb. 7.4). Diese

Abbildung ist allerdings nur schematisch, da die Streifen, die zur Überdeckung der Grenzschichten benutzt werden, nur eine Breite von 10^{-5} haben. Dieser Wert wurde gewählt, um einerseits sicherzustellen, daß die gesamte Grenzschicht überdeckt wird, sie andererseits aber bereits nach wenigen Verfeinerungsschritten adäquat aufgelöst ist.

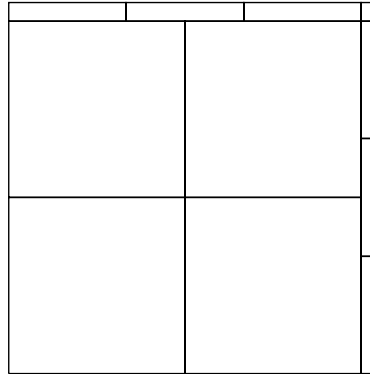


Abbildung 7.4: Grobgitter mit schmalen Zellen im Grenzschichtbereich

Als Löser wird wiederum der in Abschnitt 7.1 beschriebene Algorithmus verwendet. Die Konstruktion eines robusten Löser für anisotrope Zellen stellt eine nichttriviale Aufgabe dar.

Level	Q_UP-N		Q_UP-C		Q_SD-O1		Q_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.07267		0.25819		0.17333		0.13754	
2	0.04211	0.786	0.04018	2.683	0.09976	0.796	0.02733	2.331
3	0.02307	0.868	0.02229	0.849	0.01233	3.016	2.25e-4*	6.920
4	0.01219	0.920	0.01178	0.920	0.00028	5.430	4.03e-5	2.482
5	0.00628	0.955	0.00606	0.957	7.46e-5*	1.936	7.63e-6	2.412
6	0.00319	0.976	0.00308	0.977	1.87e-5	1.996	1.13e-6	2.753
7	0.00161	0.987	0.00155	0.988	4.78e-6	1.969	1.61e-7	2.812

Tabelle 7.15: Vergleich der L^2 -Fehler und Konvergenzordnungen (Grenzschichtbsp.)

Tabelle 7.15 zeigt die L^2 -Fehlerentwicklung für das konforme und nichtkonforme upwind-Verfahren (Variante A) sowie die Stromlinien-Diffusions-Methode für Elemente erster und zweiter Ordnung. Hierbei wurden Viereckselemente verwandt.

Bei allen durchgeführten Rechnungen wird als Abbruchkriterium des Gleichungssystemlösers entweder das Unterschreiten einer vorgegebenen Residuen-Schranke bzw. das Erreichen einer vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten verwendet. Innerhalb der Level 3 bis 6 hat der Löser besondere Schwierigkeiten beim Auflösen der Gleichungssysteme. Ein Grund

Level	Q_UP-N		Q_UP-C		Q_SD-O1		Q_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
1	307.82		147.96		340.89		512.36	
2	514.89	-0.742	204.18	-0.464	625.12	-0.874	628.34	-0.294
3	512.88	0.005	367.07	-0.846	661.50	-0.081	472.58*	0.410
4	364.20	0.493	474.45	-0.370	547.54	0.272	235.76	1.003
5	215.08	0.759	393.10	0.271	362.02*	0.596	82.08	1.522
6	116.64	0.882	253.15	0.665	199.98	0.856	23.03	1.833
7	61.22	0.929	144.03	0.812	102.83	0.959	5.94	1.952

Tabelle 7.16: Vergleich der H^1 -Fehler und Konvergenzordnungen (Grenzschichtbsp.)

hierfür ist, daß hier erstmals die geometrische Auflösung der Grenzschichten erfolgt. Ein weiterer Grund ist in der fehlenden Robustheit des Lösers gegenüber anisotropen Zellen zu sehen. Die Verbesserung des Lösers war nicht Gegenstand dieser Arbeit. Es besteht hier jedoch noch erheblicher Forschungsbedarf. Bei denen mit * gekennzeichneten Werten war das bei Erreichen der vorgegebenen Iterationsanzahl erzielte Residuum noch wesentlich größer als die erwartete Schranke.

Die Tabelle 7.16 vergleicht den H^1 -Fehler und die Konvergenzordnungen für die konforme und nichtkonforme upwind-Methode und für die SDFEM für Elemente erster und zweiter Ordnung bei Viereckselementen. Man sieht sehr schön, wie der Fehler zunächst noch anwächst und dann, nachdem die Grenzschicht geometrisch aufgelöst ist, wieder kleiner wird. In den höheren Leveln ist gut die Tendenz zu den erwarteten Konvergenzordnungen zu erkennen. Feinere Rechnungen würden diesen Trend bestätigen, konnten aber aufgrund der hohen Rechneranforderungen nicht für alle Verfahren durchgeführt werden.

Level	T_UP-N		T_UP-C		T_SD-O1		T_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
1	0.08813		0.08328		0.20577		0.09624	
2	0.04746	0.892	0.04957	0.748	0.07151	1.524	0.02046	2.233
3	0.02462	0.946	0.02813	0.817	0.00877	3.026	0.01976*	0.050
4	0.01254	0.973	0.01505	0.901	0.00077*	3.505	6.75e-5	8.193
5	0.00634	0.983	0.00781	0.946	0.00017	2.149	1.48e-5	2.184
6	0.00319	0.989	0.00399	0.968	4.37e-5	1.992	3.30e-6	2.168
7			0.00202	0.981	1.09e-5	1.993	7.89e-7	2.066

Tabelle 7.17: Vergleich der L^2 -Fehler und Konvergenzordnungen (Grenzschichtbsp.)

In Tabelle 7.17 sind die Rechenergebnisse für die gleichen Verfahren bei Verwendung von Dreieckselementen dargestellt. Daß beim nichtkonformen upwind-Verfahren die letzte Zeile fehlt und bei der SDFEM für Elemente zweiter Ordnung die gewünschten Fehlerordnungen

nicht erreicht werden, ist wiederum auf die ungenügende Robustheit des Löasers gegenüber anisotropen Zellen und dem Polynomgrad zurückzuführen.

Level	T_UP-N		T_UP-C		T_SD-O1		T_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
1	2324.42		2404.29		2323.73		1872.32	
2	1589.32	0.548	1679.83	0.517	1664.02	0.481	1211.77	0.627
3	1042.02	0.609	1136.59	0.563	1191.96	0.481	965.20*	0.328
4	632.13	0.721	723.86	0.650	749.80*	0.668	320.98	1.588
5	358.37	0.818	440.55	0.716	406.01	0.885	111.35	1.527
6	198.62	0.851	260.13	0.760	205.64	0.981	31.41	1.825
7			145.57	0.837	102.99	0.997	8.13	1.949

Tabelle 7.18: Vergleich der H^1 -Fehler und Konvergenzordnungen (Grenzschichtbsp.)

Analog zu den vorherigen Tabellen, wird in Tabelle 7.18 der H^1 -Fehler bei Dreieckselementen verglichen. Man erkennt für hohe Level eine klare Tendenz zu den erwarteten Fehlerordnungen.

Level	Q_SD-O1		Q_SD-O2		T_SD-O1		T_SD-O2	
	err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
1	168.17		256.58		1196.35		940.31	
2	222.83	-0.406	226.03	0.182	605.33	0.982	439.26	1.098
3	167.89	0.408	123.17*	0.875	306.97	0.979	248.96*	0.819
4	99.57	0.753	44.19	1.478	137.71*	1.156	59.92	2.054
5	47.14*	1.078	10.96	2.010	52.93	1.379	14.82	2.014
6	18.50	1.351	2.18	2.329	18.97	1.480	2.96	2.321
7	6.73	1.457	0.39	2.452	6.71	1.497	0.54	2.448

Tabelle 7.19: Fehler in der SD-Norm und Konvergenzordnungen (Grenzschichtbsp.)

Schließlich stellt Tabelle 7.19 den Vergleich der Stromlinien-Diffusions-Fehler zwischen Dreiecks- und Viereckselementen erster und zweiter Ordnung bei SDFEM dar. Man sieht gut die Tendenz in Richtung der erwarteten Werte.

In der Abb. 7.5 sind die Rechenergebnisse aus den Tabellen 7.15 und 7.17 noch einmal graphisch dargestellt. Das Diagramm (a) vergleicht alle Berechnungen für Viereckselemente, (b) die für Dreieckselemente. Außerdem werden die L^2 -Fehler jeweils bei der Verwendung von Dreiecks- bzw. Viereckselementen für die upwind- (in (c)) und SDFEM-Verfahren (in (d)) verglichen.

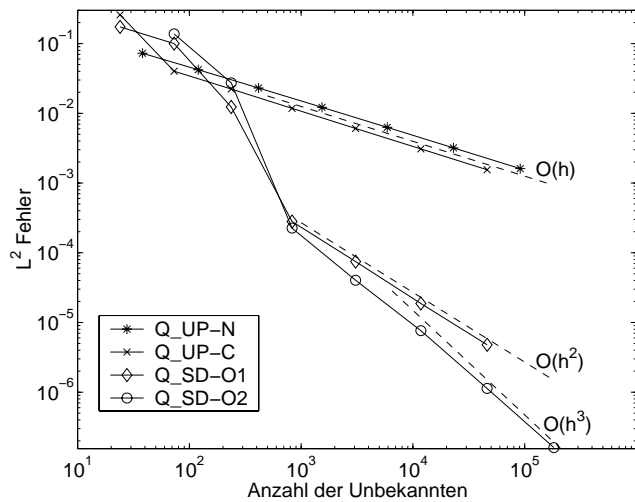
Man sieht, daß SDFEM-Verfahren bei Elementen zweiter Ordnung für die gleiche Anzahl von Unbekannten die besten Ergebnisse liefert. Allerdings sind die bei diesem Verfahren entstehenden Gleichungssysteme schwerer lösbar. Wir konnten mit dem derzeitigen

Löser deshalb nicht jedes Level in der gewünschten Genauigkeit auflösen. Bei den upwind-Verfahren kann man erkennen, daß sie sich sehr ähnlich entwickeln, jedoch das nichtkonforme upwind-Verfahren leicht im Vorteil ist.

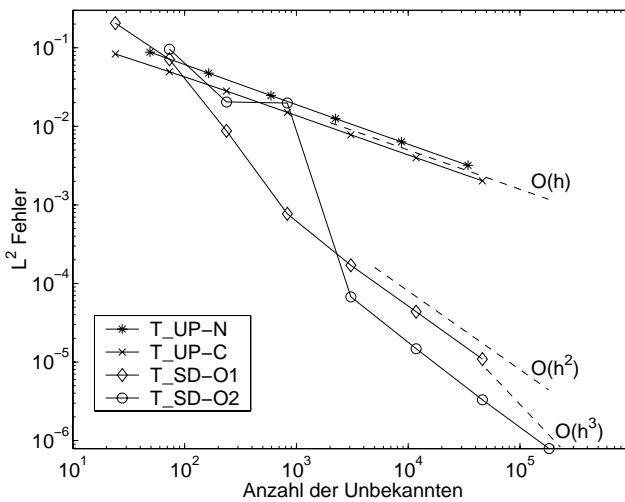
Die Abb. 7.6 zeigt die Diagramme der Daten aus den Tabellen 7.16 und 7.18. Analog zur Abb. 7.5 sind im Diagramm (a) die H^1 -Fehler bei der Verwendung von Viereckselementen, im Diagramm (b) die Fehler bei Einsatz von Dreieckselementen sowie in (c) ein Vergleich der upwind-Verfahren und in (d) der Vergleich der SDFEM-Verfahren für die verschiedenen Elemente dargestellt.

Bei der Rechnung für Viereckselemente sieht man sehr schön den Prozeß des Auflöserns der Grenzschichten. Das heißt, daß der Fehler anwächst, solange die Grenzschicht nicht ausreichend geometrisch aufgelöst ist. Erst dann sinkt der Fehler und bewegt sich in Richtung der erwarteten Fehlerordnung.

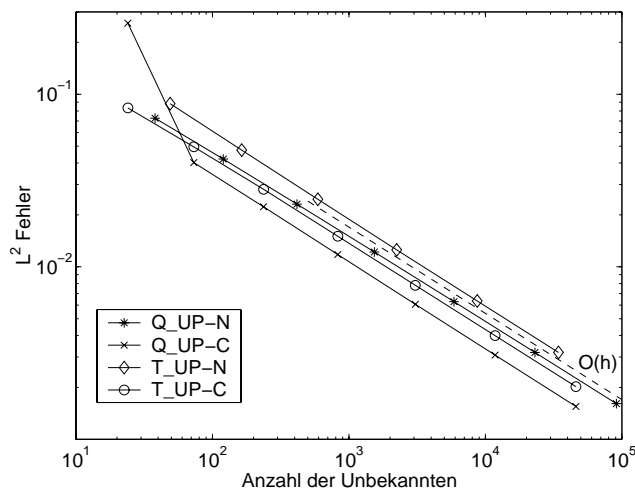
Abbildung 7.7 zeigt das Diagramm des SDFEM-Fehlers bezüglich der Tabelle 7.19. Für steigende Anzahl von Unbekannten sieht man sehr schön den Parallellauf der Verfahren für Elemente erster Ordnung einerseits und Elemente zweiter Ordnung andererseits. Für diesen Bereich sind die berechneten Werte auch sehr nahe an den erwarteten Optimalwerten.



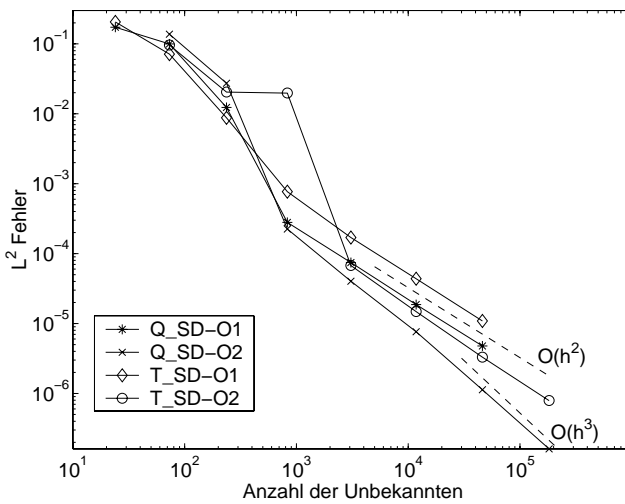
(a)



(b)

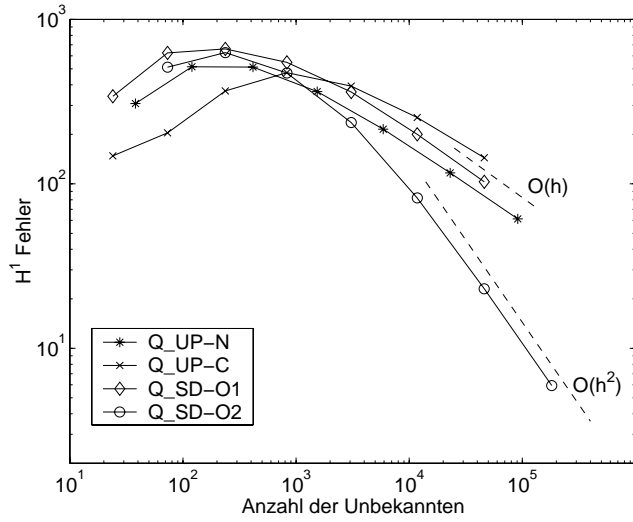


(c)

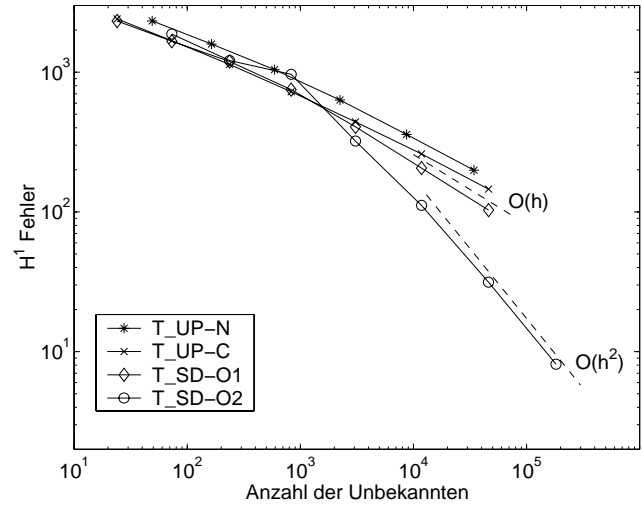


(d)

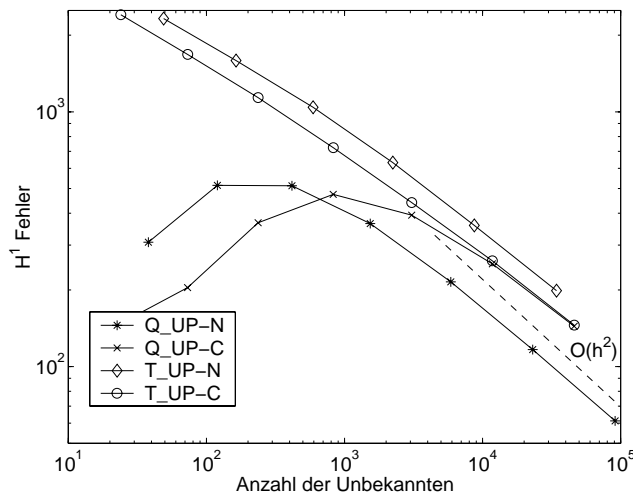
Abbildung 7.5: Vergleich des L^2 -Fehlers



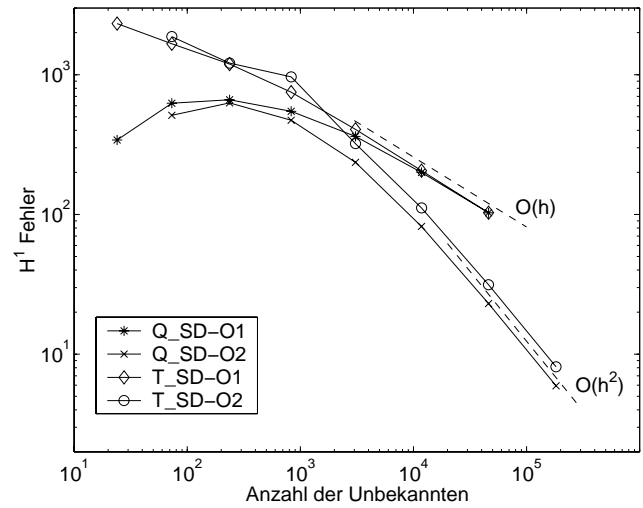
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 7.6: Vergleich des H^1 -Fehlers

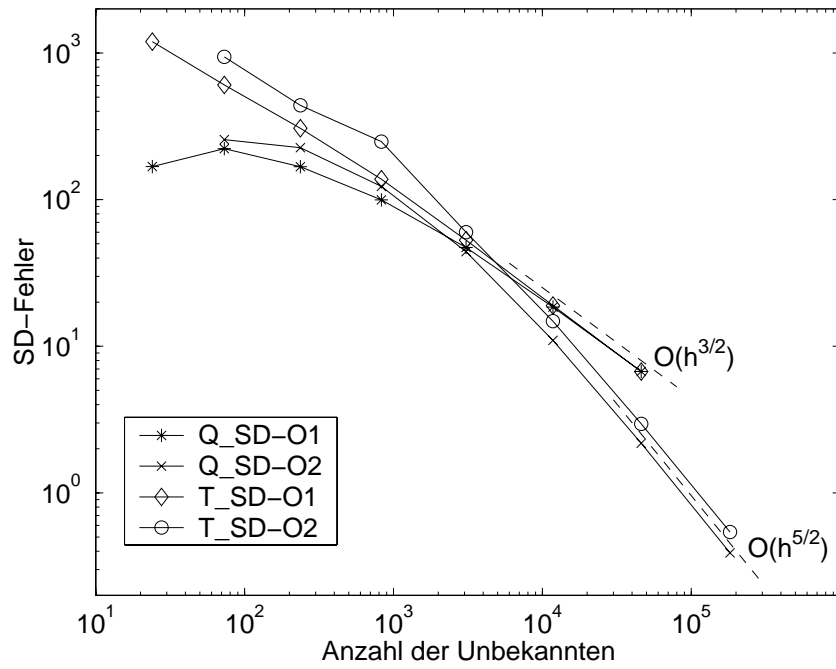


Abbildung 7.7: Vergleich des SD-Fehlers

7.4 DFG-Benchmark-Problem

In diesem Abschnitt soll ein stationäres Benchmark-Problem aus dem DFG-Schwerpunktprogramm „Strömungssimulation mit Hochleistungsrechnern“ betrachtet werden [27]. Hierbei handelt es sich um ein Navier-Stokes-Problem, das die Durchströmung eines Kanals mit asymmetrisch angeordnetem, kreisförmigem Hindernis beschreibt. Als Einströmprofil wird eine Parabel angenommen. In Abb. 7.8 ist die Geometrie des Testfalls dargestellt.

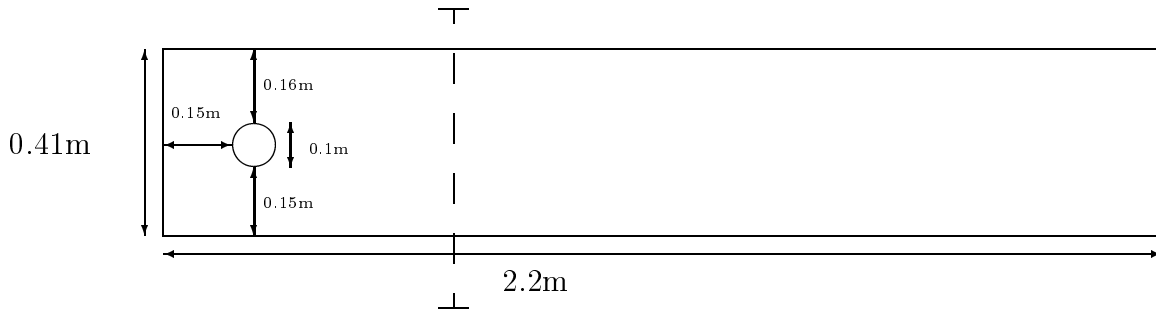


Abbildung 7.8: Geometrie des Benchmark-Beispiels

Problembeschreibung

Wir betrachten das Navier-Stokes-Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma_D = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dabei sind die Randdaten durch

Einfluß:

$$\begin{aligned} u_1(0, y) &= 4u_m y \frac{H-y}{H^2}, & u_m &= 0.3 \text{ m/s} \\ u_2(0, y) &= 0 \end{aligned}$$

Ausfluß:

Die Ausflußbedingungen sind analog zu den Einflußbedingungen an der Stelle $x = 2.2$

beschrieben.

Die Reynoldszahl ist definiert als

$$Re := \frac{\bar{U} \cdot D}{V},$$

wobei \bar{U} die charakteristische Geschwindigkeit von 0.2 m/s , D die charakteristische Länge von 0.1 m und V die kinetische Viskosität ist. Im betrachteten Fall beträgt die Reynoldszahl $Re = 20$, was für die numerische Reynoldszahl $Re_{num} = 1/\varepsilon = 1000$ bedeutet.

Kenngrößen

In diesem Abschnitt wollen wir als Kenngrößen den Widerstandsbeiwert c_w , den Auftriebsbeiwert c_a und die Druckdifferenz Δp einführen.

Die Widerstandskraft F_w ist definiert als

$$F_w = \int_{S_K} (\rho \nu \partial_n v^t n_y - p n_x) ds,$$

wobei S_K die Kontur des Hindernisses und n den Normaleneinheitsvektor ($n = (n_x, n_y)^T$) zu S_K bezeichnet. Weiterhin ist v^t die Tangentialgeschwindigkeit an S_K mit dem Tangentenvektor $t = (n_y, -n_x)^T$.

Desweiteren führen wir die Auftriebskraft F_a ein als

$$F_a = - \int_{S_K} (\rho \nu \partial_n v^t n_x + p n_y) ds.$$

Hieraus ergeben sich der Widerstandsbeiwert c_w und der Auftriebsbeiwert c_a in folgender Weise:

$$c_w = \frac{2F_w}{\rho \bar{u}^2 \bar{D}}, \quad c_a = \frac{2F_a}{\rho \bar{u}^2 \bar{D}}.$$

Die Kennwerte werden nicht durch direkte Auswertung der Kurvenintegrale, sondern mittels der John/Tabata/Tobiska-Technik (vgl. [16]) bestimmt. Hierbei werden die Kurvenintegrale auf Flächenintegrale umgerechnet und dann in einer einelementigen Schicht um das Hindernis ausgewertet.

Außerdem definieren wir noch die Druckdifferenz Δp als

$$\Delta p = p(x^a, y^a) - p(x^e, y^e),$$

wobei $(x^a, y^a) = (0.15, 0.2)$ der „Anfangspunkt“ und $(x^e, y^e) = (0.25, 0.2)$ der „Endpunkt“ des Hindernisses ist.

Ergebnisse und Vergleichswerte

Berechnet werden sollen die Kenngrößen c_w, c_a und Δp .

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Intervalle und die Referenzwerte (entnommen aus [17]) der Kenngrößen.

Kenngröße	Intervall-Beginn	Intervall-Ende	Referenzwert
c_w	5.57	5.59	5.57953523384
c_a	0.0104	0.011	0.01061893771
Δp	0.1172	0.1176	0.11752016697

Zur Implementierung der Mortar-Technik für Navier-Stokes-Gleichungen wird zusätzlich an jeder Mortar-Kante je ein Lagrange-Multiplikator pro Geschwindigkeitskomponente eingeführt. Für den Druck werden keine Lagrange-Multiplikatoren benötigt, da wir nur die Elementpaarungen P_1^{nc}/P_0 bzw. Q_1^{rot}/P_0 und Q_2/P_1^{unst} verwenden. P_1^{unst} bezeichnet hierbei im allgemeinen unstetige Funktionen, die elementweise zu P_1 gehören. Wir verwenden also nur unstetige Druckapproximationen.

Als Löser verwenden wir ein flexibles GMRES-Verfahren mit einem gekoppelten Vorkonditionierer. Für diesen führen wir einige Iterationen eines algebraischen Mehrgitters durch.

Zur Verifizierung der Implementation wurden Testrechnungen für den nichtkonformen und konformen Fall durchgeführt. Für ersteren Fall wurde das nichtkonforme upwind-Verfahren benutzt. Aus anderen Rechnungen (vgl. [17]) ist bekannt, daß mit der Stromlinien-Diffusions-FEM für Elemente zweiter Ordnung sehr gute Ergebnisse erzielt werden können. Aus diesem Grund haben wir dieses Verfahren für unsere Testrechnungen für den konformen Fall gewählt. Da die einzelnen Rechnungen sehr zeitaufwendig waren, haben wir uns im konformen Fall auf diese Methode beschränkt.

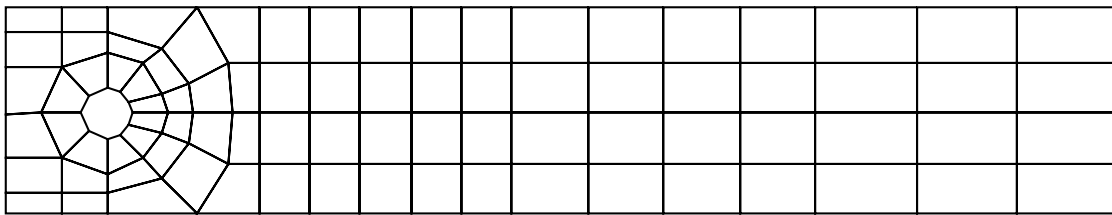
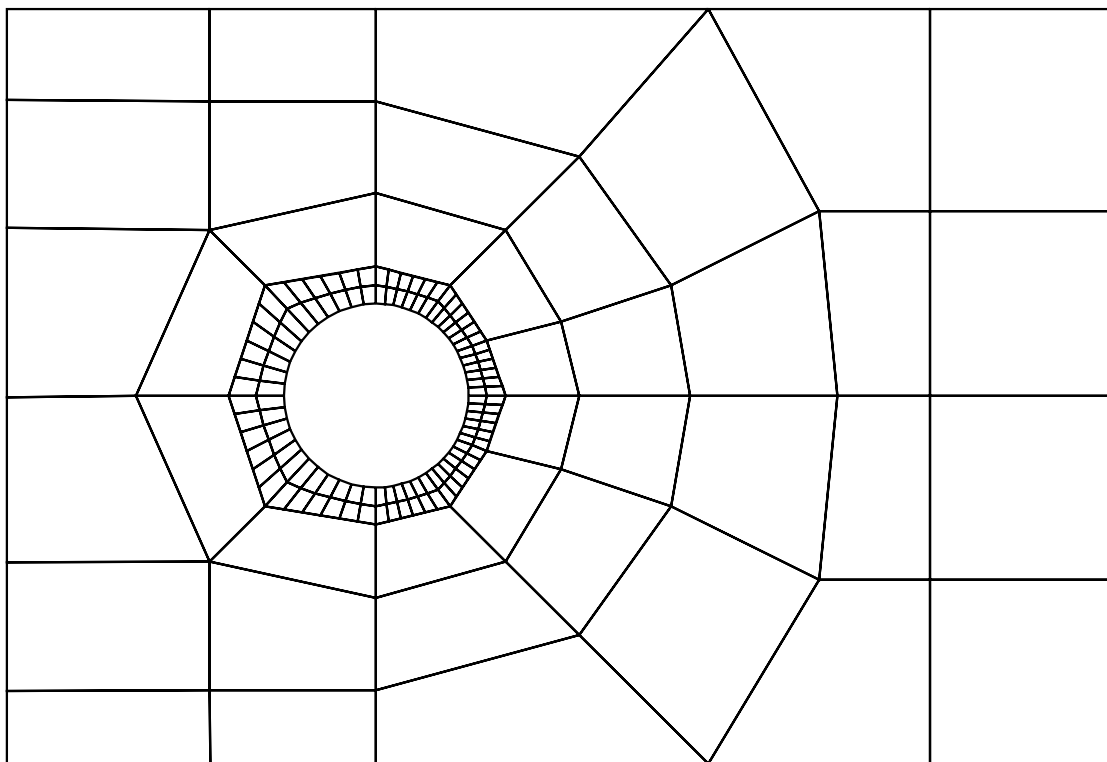


Abbildung 7.9: Grundgitter für Benchmark-Testrechnungen

Abb. 7.9 zeigt das verwendete Grundgitter, das in zwei Teilgebiete unterteilt wurde. Das erste Teilgebiet besteht aus einem Ring um das Hindernis, der überall ein Element breit ist. Das zweite Teilgebiet enthält den Rest des betrachteten Gebietes. Zwischen den beiden Teilgebieten werden entsprechende Mortar-Kanten eingeführt.

In der ersten Testrechnung wird das nichtkonforme upwind-Verfahren verwendet. Hierbei verfeinern wir in den Teilgebieten so, daß die Gitter an den Mortar-Kanten zusammenpassen. Bei der zweiten Testrechnung verwenden wir die Stromlinien-Diffusions-FEM für Elemente zweiter Ordnung und verfeinern ebenfalls beide Teilgebiete gleichmäßig. In einer dritten Testrechnung wird auch die SDFEM für Elemente zweiter Ordnung verwendet, jedoch werden hier abwechselnd je einmal beide Teilgebiete und im nächsten Schritt nur das erste, direkt am Hindernis liegende, Teilgebiet verfeinert. Abb. 7.10 zeigt einen Ausschnitt des Gitters, wobei im ersten Teilgebiet eine reguläre Verfeinerung mehr als im restlichen Berechnungsgebiet durchgeführt wurde.

Mit den ersten beiden Testrechnungen soll zunächst gezeigt werden, daß die Mortar-Technik auch auf Navier-Stokes-Probleme anwendbar ist, d. h., daß auch bei zusammenpassenden

Abbildung 7.10: *Ungleichmäßig verfeinerte Teilgebiete*

Gittern die Dopplung der Freiheitsgrade an den Mortar-Kanten und die Auswertung der Mortar-Bedingung einwandfrei funktionieren. Der dritte Testfall soll dann versuchen, die Vorteile der Mortar-Technik durch Verwendung eines feineren Gitters in direkter Umgebung des Hindernisses zu zeigen, d. h., daß mit insgesamt weniger Unbekannten die gleiche Güte der Parameterbestimmung erzielt werden kann.

Level	Q_UP-N	Q_SD-O2, I	Q_SD-O2, II
1	512	976	976
2	1864	3414	3414
3	7088	12926	4674
4	27616	50094	17606
5	108992	197006	35606
6	433024		138654
7	1726208		

Tabelle 7.20: *Anzahl der Unbekannten für Benchmark-Testrechnungen*

In Tabelle 7.20 wird die Anzahl der Unbekannten für die durchgeführten Verfahren dargestellt. Aufgrund der sehr hohen Rechenzeiten und des enormen Hauptspeicherplatzbedarfs

konnten weitere Rechnungen nicht durchgeführt werden.

Level	c_w	c_a	Δp
2	6.6936	1.4580e-02	0.10502
3	6.5120	3.7476e-02	0.11466
4	6.1716	3.8670e-02	0.11570
5	5.9379	3.0651e-02	0.11617
6	5.7826	2.2753e-02	0.11667
7	5.6882	1.7226e-02	0.11705
ref	5.5795	1.0618e-02	0.11752

Tabelle 7.21: Kenngrößen für Testrechnung nichtkonformes upwind-Verfahren

Tabelle 7.21 zeigt die Kenngrößen für das nichtkonforme upwind-Verfahren. Dabei wurde Variante C benutzt. Auch bei Einsatz von Mortar-Technik ist also bei den Kennwerten eine gute Tendenz zu den Referenzwerten zu erkennen.

Level	c_w	c_a	Δp
2	5.4930	2.1971e-02	0.12124
3	5.5775	1.1945e-02	0.11736
4	5.5802	1.0671e-02	0.11691
5	5.5798	1.0588e-02	0.11729
ref	5.5795	1.0618e-02	0.11752

Tabelle 7.22: Kenngrößen für Testrechnung SDFEM-Verfahren bei gleichmäßiger Verfeinerung

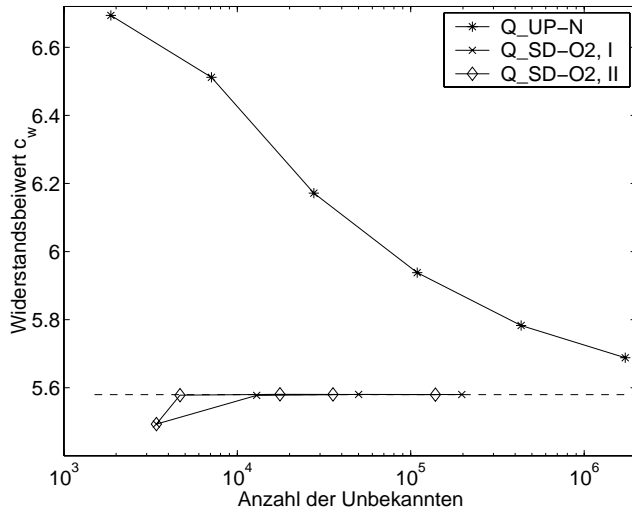
In Tabelle 7.22 sind die Kenngrößen für das SDFEM-Verfahren bei gleichmäßiger Verfeinerung beider Teilgebiete zu sehen. Hier liegen bereits alle Parameter innerhalb der vorgegebenen Intervalle.

Level	c_w	c_a	Δp
2	5.4930	2.1971e-02	0.12124
3	5.5781	1.2349e-02	0.11744
4	5.5804	1.0673e-02	0.11690
5	5.5801	1.0624e-02	0.11728
6	5.5796	1.0614e-02	0.11745
ref	5.5795	1.0618e-02	0.11752

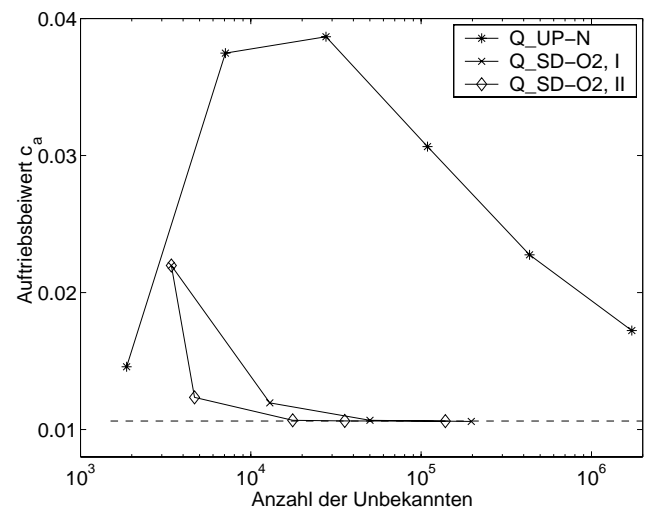
Tabelle 7.23: Kenngrößen für Testrechnung SDFEM-Verfahren bei ungleichmäßiger Verfeinerung

Tabelle 7.23 zeigt schließlich die Kennwerte für das SDFEM-Verfahren bei ungleichmäßiger Verfeinerung der Teilgebiete, d. h., daß zwischen Level 2 und 3 sowie zwischen Level 4

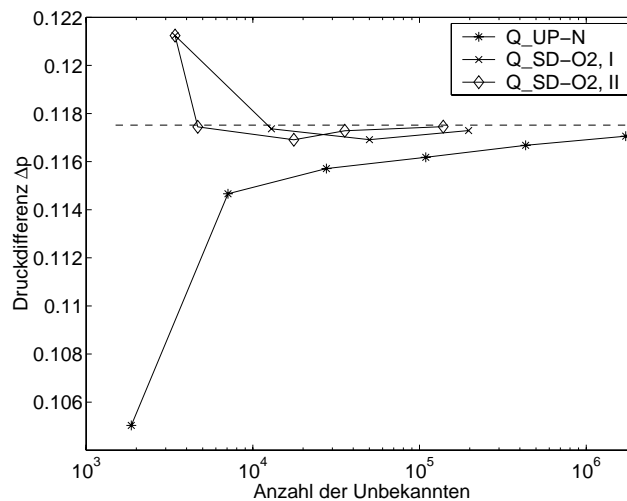
und 5 nur das Teilgebiet direkt um das Hindernis verfeinert wurde. Man sieht, daß die Parameter bei entsprechend gleicher Anzahl von Unbekannten besser approximiert werden. Da eine solche Rechnung sehr zeitaufwendig ist, war es nicht mehr möglich, detailliertere Untersuchungen anzustellen bzgl. der Wahl der verschiedenen Teilgebiete bzw. des Grades der unterschiedlichen Verfeinerungen der Teilgebiete. Eine Verbesserung der Robustheit des Löser würde es ermöglichen, eine größere Zahl von Testrechnungen anzustellen.



a)



b)



c)

Abbildung 7.11: Vergleich der Benchmark-Kennwerte

In Abb. 7.11 werden die Benchmark-Kennwerte in Diagrammform verglichen. In a) werden die Widerstandsbeiwerte, in b) die Auftriebsbeiwerte und in c) die Druckdifferenzen dargestellt. Man sieht, daß das nichtkonforme upwind-Verfahren zwar die richtige Tendenz aufweist, aber die Ergebnisse noch relativ weit von den Referenzwerten entfernt liegen. Die Rechnungen für die Stromlinien-Diffusions-FEM weisen sehr gute Ergebnisse auf. Die berechneten Kennwerte liegen bereits bei niedrigem Level innerhalb der vorgegebenen Intervalle. Darüber hinaus kann man erkennen, daß durch die unterschiedliche Verfeinerung der Teilgebiete die Kennwerte bereits für eine geringere Anzahl von Unbekannten sehr gut approximiert werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit konnte dargestellt werden, daß die Mortar-Technik einen guten Lösungsansatz zur Kopplung zweier Diskretisierungen auf deutlich unterschiedlich verfeinerten, benachbarten Gebieten darstellt. Es wurde die Einsetzbarkeit der Mortar-Technik für Teilgebietsdiskretisierungen mit konformen Elementen (Lagrange-Elemente) und nicht-konformen Elementen (Crouzeix-Raviart- und Rannacher-Turek-Elemente) gezeigt.

Weiterhin wurde ein Interpolationsoperator I_h konstruiert, der auf dem Standard-Lagrange-Interpolationsoperator basiert und eine zusätzliche Korrektur enthält, die die Gültigkeit der Mortar-Bedingung garantiert. Gleichzeitig erfüllt er die üblichen Interpolationsabschätzungen.

Durch Hinzunahme der Terme

$$- \sum_{\Gamma_m \subset S} (b \cdot n_{\Gamma_m} [[u]]_{\Gamma_m}, \langle |v| \rangle_{\Gamma_m})_{\Gamma_m} + \sum_{\Gamma_m \subset S} (|b \cdot n_{\Gamma_m}| [[u]]_{\Gamma_m}, [|v|]_{\Gamma_m})_{\Gamma_m}$$

konnte in der modifizierten Stromlinien-Diffusionsnorm $\|\cdot\|$ die Koerzivität der Bilinearform $a^{SD}(\cdot, \cdot)$ sowie eine Fehlerabschätzung für den Konsistenz- und den Interpolationsfehler gezeigt werden. Insgesamt gilt für Diskretisierungen mittels Stromlinien-Diffusions-FEM die Abschätzung

$$\|u - u_h\| \leq C \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k^{r_k+1/2} \|u\|_{r_k+1, \Omega_k}.$$

Es wurde das scharfe upwind-Verfahren für konforme und nicht-konforme Teilgebietsdiskretisierungen untersucht. Für die beschriebenen Varianten A bzw. C ohne Kopplungen über Mortar-Kanten hinweg mit dem modifizierten konvektivem Term der Form

$$b_h^A(u, v) = \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i^k} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(u^j - u^i)v^i - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda(S)} \int_{\gamma_i} b \cdot n_i u^i v^i ds$$

sowie die Varianten B bzw. D der Form

$$b_h^B(u, v) = \sum_{i \in \Lambda_d} \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\gamma_{ij}} b \cdot n_{ij} ds (1 - \lambda_{ij})(u^j - u^i)v^i$$

wurde die Koerzivität der entsprechenden Bilinearformen gezeigt.

Bei Verwendung der Variante D und $c = 0$ wurde für das Crouzeix-Raviart-Element die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon^*} \leq C \left(\frac{H}{h} \right) \sum_{k=1}^{N_\Omega} h_k \|u\|_{2, \Omega_k}$$

gezeigt. Als Einschränkung ergibt sich hier die Abhängigkeit der Fehlerkonstanten vom Verhältnis der Gitterweiten der an einer Mortar-Kante zusammenstoßenden Teilgebiete.

Außerdem wurde ein Geometrie-Konzept unter Verwendung von Zellen, Fugen, Verfeinerungen sowie ganzen Zerlegungen mit datenbankähnlichen Strukturen vorgestellt. Durch dieses Vorgehen wurde ein offenes und flexibles System geschaffen sowie leichte Erweiterbarkeit und sehr gute Implementierbarkeit erreicht.

Die numerischen Testrechnungen zeigen, daß die Mortar-Technik für eine breite Problemklasse einsetzbar ist und die optimalen Fehlerordnungen erreicht werden. Mit dem abschließenden Beispiel des Benchmark-Problems der Deutschen Forschungsgemeinschaft wird die praktische Anwendbarkeit der Mortar-Technik auch für Navier-Stokes-Gleichungen gezeigt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die das Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Prof. Dr. Lutz Tobiska, der mich schon als jungen Studenten an die Problematik der FEM in Verbindung mit moderner Hochleistungsrechentechne heranführte, mich jahrelang unterstützte und schließlich das Thema der vorliegenden Arbeit stellte. Er betreute mich während der gesamten Promotionsphase sehr engagiert, insbesondere auch nach der Aufnahme meiner Berufstätigkeit. Ohne dich, Lutz, wäre diese Arbeit nicht fertig geworden.

In Zusammenarbeit mit meinen Kollegen Volker John, Gunar Matthies und Friedhelm Schieweck entstand das Programmpaket MooNMD. Ihnen danke ich auch für zahlreiche anregende und hilfreiche Diskussionen und insbesondere Gunar für das gewissenhafte Korrekturlesen.

Mein Dank gilt weiterhin dem Graduiertenkolleg für „Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme“ für die finanzielle Unterstützung sowie dem Institut für Analysis und Numerik für die hervorragenden Arbeitsbedingungen und die angenehme Atmosphäre.

Darüber hinaus danke ich meinen Eltern, die mich stets bereitwillig in meinen Vorhaben unterstützten. Außerdem möchte ich Christiane Czech für die liebevolle Unterstützung danken.

Literaturverzeichnis

- [1] Y. Achdou. The mortar element method for convection diffusion problems. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(1):117–123, 1995.
- [2] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [3] V. Behns. Moderne Konzepte zur Erzeugung und Verwaltung beliebiger zwei- und dreidimensionaler Gitter. In *Preprint MBI-98-1*, pages 145 – 150. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, 1998.
- [4] F. Ben Belgacem. The Mortar Finite Element Method with Lagrange Multipliers. *Numer. Math.*, 84(2):173 – 197, 1999.
- [5] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991)*, pages 13–51. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [6] D. Braess, W. Dahmen, and C. Wieners. A multigrid algorithm for the mortar finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(1):48 – 69, 1999.
- [7] D. Braess, P. Deuffhard, and K. Lipnikov. A Subspace Cascadic Multigrid Method for Mortar Elements. Preprint, 2000.
- [8] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [9] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] M. O. Bristeau, O. Pironneau, R. Glowinski, J. Periaux, and P. Perrier. On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 17/18(3):619–657, 1979.
- [11] P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, editors. *Handbook of numerical analysis. Vol. II*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991. Finite element methods. Part 1.

- [12] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 7:33–76, 1973.
- [13] O. Dorok, V. John, U. Risch, F. Schieweck, and L. Tobiska. Parallel finite element methods for the incompressible Navier–Stokes equations. In E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 20 – 33. Vieweg, 1996.
- [14] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1983.
- [15] T. J. R. Hughes and A. N. Brooks. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In T. J. R. Hughes, editor, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD vol.34*. ASME, New York, 1979.
- [16] V. John. *Parallele Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen auf adaptiv verfeinerten Gittern*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Dissertation, 1997.
- [17] V. John and G. Matthies. Higher Order Finite Element Discretization in a Benchmark Problem for Incompressible Flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 37:885–903, 2001.
- [18] V. John, G. Matthies, T. I. Mitkova, L. Tobiska, and P. S. Vassilevski. A Comparison of Some Solvers for the Navier-Stokes Equations. In *Large-Scale scientific computations of engineering and environmental problems, II (Sozopol,1999)*, volume 73 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 215–222, Braunschweig, 2000. Vieweg.
- [19] V. John, G. Matthies, F. Schieweck, and L. Tobiska. A streamline-diffusion method for nonconforming finite element approximations applied to convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166(1-2):85–97, 1998.
- [20] V. John, J. M. Maubach, and L. Tobiska. Nonconforming streamline–diffusion–finite–element–methods for convection–diffusion problems. *Numer. Math.*, 78(2):165 – 188, 1997.
- [21] G. H. Klepp. *Filmsieden unter Intensivkühlbedingungen*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 1999.
- [22] L. Marcinkowski. The mortar element method with locally nonconforming elements. *BIT*, 39(4):716–739, 1999.
- [23] K. Ohmori and T. Ushijima. A technique of upstream type applied to a linear nonconforming finite element approximation of convective diffusion equations. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 18(3):309–332, 1984.

- [24] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [25] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [26] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856 – 869, 1986.
- [27] M. Schäfer and S. Turek. The benchmark problem "Flow around a cylinder". In E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547 – 566. Vieweg, 1996.
- [28] F. Schieweck. *Parallele Lösung der stationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Habilitation, 1997.
- [29] F. Schieweck and L. Tobiska. A nonconforming finite element method of upstream type applied to stationary Navier-Stokes equations. *M²AN*, 23:627–647, 1989.
- [30] F. Schieweck and L. Tobiska. An optimal order error estimate for an upwind discretization of the Navier-Stokes equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 12(4):407–421, 1996.
- [31] M. Stynes and L. Tobiska. Analysis of the streamline-diffusion finite element method on a piecewise uniform mesh for a convection-diffusion problem with exponential layers. *East-West J. Numer. Math.*, 9(7-8):1089–1101, 2001.
- [32] M. Tabata and S. Fujima. An upwind finite element scheme for high-Reynolds-number flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 12(4):305–322, 1991.
- [33] L. Tobiska. Full and weighted upwind finite element methods. In J.W. Schmidt and H. Späth, editors, *Splines in Numerical Analysis*, volume 52 of *Mathematical Research*, pages 181–188. Akademie-Verlag Berlin, 1989.
- [34] B. I. Wohlmuth. A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. *Numer. Math.*, 84(1):143 – 171, 1999.

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich diese Dissertation selbständig verfaßt und keine außer den angegebenen Hilfsmitteln verwendet habe.

Desweiteren erkläre ich, daß ich die Arbeit in der vorliegenden Form nicht schon als Dissertation, Diplom- oder ähnliche Prüfungsarbeit verwendet habe.

Magdeburg, den 2. 7. 2001

Volker Behns