

**Robuste Regelung flexibler mechanischer Strukturen mittels Quantitative  
Feedback Theory unter Nutzung konvexer und nicht-konvexer  
Optimierung**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Marc Enzmann

geb. am 22. Juli 1968 in Stuttgart.

Genehmigt durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. habil. Chr. Döschner

Prof. Dr.-Ing. R. Lammering

Promotionskolloquium am 18. August. 2004.

## VORWORT

Die vorliegende Dissertation entstand größtenteils während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter des Innovationskollegs ADAMES am Institut für Automatisierungstechnik der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg. Das Innovationskolleg ADAMES wurde von 1996 bis 2001 aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanziert.

Eine Arbeit wie die Vorliegende kann man nicht ohne positive Einflüsse aus dem Arbeitsumfeld und der privaten Umgebung erstellen. Für diese Unterstützung möchte ich mich hier bedanken. Meinem Betreuer Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Döschner danke ich für die Möglichkeit, an seinem Lehrstuhl arbeiten und forschen zu können, für die zahlreichen engagierten fachlichen Diskussionen, für das gute Arbeitsklima am Lehrstuhl und für seine Bereitschaft, die Arbeit auch nach seiner Emeritierung zu betreuen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering danke ich nicht nur für die Übernahme des Korreferats. Durch ihn habe ich, während meiner Zeit am Institut für Strukturmechanik des DLR, einen ersten Einblick in das Arbeitsgebiet Adaptronik bekommen. Auch dafür meinen herzlichen Dank.

Dank gilt auch den ehemaligen Kollegen am Institut für Automatisierungstechnik und im Innovationskolleg ADAMES, für die mir entgegengebrachte Kollegialität und Freundschaft. Ganz besonders hervorheben möchte ich an dieser Stelle Prof. Dr.-Ing. Markus Krabbes und Dr.-Ing. Steffen Sommer. Sie haben mir mit ihren wertvollen Hinweisen sehr weitergeholfen, und zur Klarheit und Verständlichkeit der Arbeit beigetragen.

Abschliessend möchte ich mich noch bei meiner Familie bedanken. Bei meinem Vater Rudolf, der mir vieles in meinem Leben ermöglicht hat, und bei meiner Frau Sybille, die mir an den schlechteren Tagen den Rücken gestärkt, und sich über gute Tage mit mir gefreut hat. Ohne Euch wäre diese Arbeit nicht entstanden.

# INHALTSVERZEICHNIS

1. <i>Einleitung</i> . . . . .	13
1.1 Motivation der Arbeit . . . . .	13
1.1.1 Hintergrund . . . . .	13
1.1.2 Regelungsprobleme intelligenter Struktursysteme . . . . .	14
1.1.3 Aktive Schwingungsdämpfung in Industrieanwendungen . . . . .	15
1.1.4 Akzeptanz von Methoden zur Reglersynthese . . . . .	16
1.1.5 Ableitung von Forderungen an das Reglersyntheseverfahren . . . . .	17
1.1.6 Anwendung der Quantitative Feedback Theory . . . . .	18
1.2 Aufgabenstellung . . . . .	20
1.2.1 Zielstellung . . . . .	20
1.2.2 Einzelaufgaben . . . . .	20
1.2.3 Eingrenzung der Zielstellung . . . . .	21
1.2.4 Übersicht über den vorgeschlagenen Lösungsweg und die Gliederung der Arbeit . . . . .	22
2. <i>Einführung in die Quantitative Feedback Theory</i> . . . . .	25
2.1 Der Designprozess von Regelungssystemen . . . . .	25
2.2 Allgemeine Informationen zur QFT . . . . .	27
2.2.1 Entwicklung der Methode . . . . .	27
2.2.2 Zur Motivation der Quantitative Feedback Theory . . . . .	28
2.2.3 Möglichkeiten und Grenzen der QFT . . . . .	30
2.3 Beschreibung der Methodik . . . . .	30
2.3.1 Untersuchte Struktur . . . . .	31
2.3.2 Gesamtvorgehensweise . . . . .	32
2.3.3 Beschreibung parametrischer Unsicherheiten . . . . .	33
2.3.4 Berechnung der Abweichungen vom nominalen Wert: Templates . . . . .	35
2.3.5 Forderungen an den geschlossenen Regelkreis . . . . .	37
2.3.6 Forderungen an den nominalen offenen Regelkreis . . . . .	40
2.3.7 Reglerentwurf . . . . .	46
2.4 Mehrgrößenregelungen mit QFT . . . . .	48
2.4.1 Grundlagen . . . . .	50
2.4.2 Unterdrückung von Störungen am Ausgang . . . . .	51
2.5 Zusammenfassung . . . . .	55

3. <i>Modellbildung flexibler mechanischer Strukturen</i> . . . . .	56
3.1 Einleitung . . . . .	56
3.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise . . . . .	56
3.1.2 Besonderheiten und Probleme im Zusammenhang mit flexiblen mechanischen Strukturen . . . . .	57
3.1.3 Zu lösende Aufgaben . . . . .	57
3.1.4 Gliederung . . . . .	58
3.2 Physikalisch motivierte Beschreibung flexibler mechanischer Strukturen . . . . .	58
3.2.1 Übersicht . . . . .	58
3.2.2 Bewegungsgleichungen . . . . .	59
3.2.3 Beschreibung der Aktuatorik und Sensorik . . . . .	59
3.2.4 Modale Darstellung . . . . .	60
3.2.5 Zustandsraummodelle und Übertragungsfunktionen . . . . .	61
3.2.6 Einfluss von Aktuatorik, Sensorik und elektronischen Komponenten . . . . .	62
3.2.7 Weitere Aufgaben bei der Modellbildung . . . . .	64
3.3 Experimentelle Modellbildung . . . . .	65
3.3.1 Zustandsraummodell . . . . .	65
3.3.2 Experimentelle Modalanalyse . . . . .	65
3.3.3 Übertragungsfunktionen . . . . .	66
3.3.4 FE-Modelle nach Model-Updating . . . . .	66
3.3.5 Zusammenhang zwischen experimentell und theoretisch hergeleiteten Modellen . . . . .	66
3.4 Zusammenfassung . . . . .	66
4. <i>Templateberechnung für flexible mechanische Strukturen</i> . . . . .	68
4.1 Einleitung . . . . .	68
4.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise . . . . .	68
4.1.2 Zu lösende Aufgaben . . . . .	69
4.1.3 Gliederung . . . . .	69
4.1.4 Templateberechnung im Entwurf von Regelungssystemen . . . . .	70
4.2 Vereinfachte Berechnung von Templates . . . . .	70
4.2.1 Grundlagen . . . . .	70
4.2.2 Vereinfachte Templateberechnung nach Bartlett . . . . .	71
4.2.3 Parametrisierte Templatedarstellung nach Fu . . . . .	71
4.2.4 Zur Nutzung der vereinfachten Templateberechnung für FMS . . . . .	72
4.3 Templateberechnung durch Addition von Wertemengen . . . . .	72
4.3.1 Berechnung modaler Templates . . . . .	73
4.3.2 Addition von Wertemengen in der komplexen Ebene . . . . .	73
4.3.3 Anwendung auf die Addition modaler Teiltemplates . . . . .	75

4.3.4	Zulässigkeit der Addition von modalen Templates . . . . .	75
4.3.5	Vereinfachung der Templateberechnung durch den Plane-Sweep- Algorithmus . . . . .	77
4.3.6	Algorithmische Darstellung der Templateberechnung . . . . .	79
4.3.7	Zur Nutzbarkeit der Templateberechnung mittels Addition modaler Templates	79
4.4	Templateberechnung durch Kombination von Gridding mit der Addition von Wertemengen . . . . .	80
4.4.1	Grundlegende Vorgehensweise . . . . .	80
4.4.2	Erfassung des Einflusses globaler Parameter auf die modalen Übertragungsfunktionen . . . . .	82
4.5	Zusammenfassung . . . . .	83
5.	<i>Erstellung von Spezifikationen für den geschlossenen Regelkreis . . . . .</i>	<i>84</i>
5.1	Einleitung . . . . .	84
5.1.1	Problembeschreibung . . . . .	84
5.1.2	Zu lösende Aufgaben . . . . .	85
5.1.3	Gliederung . . . . .	85
5.2	$t$ - $\Omega$ -Übertragung . . . . .	85
5.2.1	Festlegung von Vorgaben nach Horowitz . . . . .	86
5.2.2	Bestimmung von Spezifikationen mittels beobachterbasierter Regler . . . . .	87
5.2.3	Vereinfachung der modifizierten Methode . . . . .	91
5.3	Weitergehende Nutzung der vorgestellten Rechenschritte . . . . .	93
5.3.1	Überprüfung der Einhaltung gegebener Grenzen . . . . .	93
5.3.2	Modifikation gegebener Grenzen und vollständige Definition von Grenzen	93
5.4	Zusammenfassung . . . . .	93
6.	<i>Einhaltung von Spezifikationen als Optimierungsproblem . . . . .</i>	<i>95</i>
6.1	Einleitung . . . . .	95
6.1.1	Problemstellung . . . . .	95
6.1.2	Zu lösende Aufgaben . . . . .	96
6.1.3	Gliederung . . . . .	96
6.1.4	Optimierung im Entwurf von Regelungssystemen . . . . .	96
6.2	Grundlagen . . . . .	97
6.2.1	Darstellung von Spezifikationen der Regelgüte in der komplexen Ebene . . . . .	97
6.2.2	Zugehörigkeitsfunktionen . . . . .	98
6.3	Definition des nicht-konvexen Optimierungsproblems . . . . .	99
6.3.1	Regelungstechnische Aufgabenstellung . . . . .	99
6.3.2	Parametrierung des Reglers für die Optimierung . . . . .	100
6.3.3	Definition des Optimierungsproblems für Teilaufgaben . . . . .	100

6.3.4	Kombination der Optimierungsprobleme für Teilaufgaben zum Gesamtproblem . . . . .	103
6.3.5	Auswahl der Parameterkombinationen für die Definition des Optimierungsproblems . . . . .	104
6.3.6	Erforderliche Ergänzungen des nicht-konvexen Optimierungsproblems . . . . .	105
6.3.7	Auswertung des Gütefunktional bei nicht ausreichender Güte . . . . .	106
6.4	Definition des konvexen Optimierungsproblems . . . . .	106
6.4.1	Transformation der Problemstellung durch Youla-Parametrierung . . . . .	107
6.4.2	Approximation von Übertragungsfunktionen durch Linearkombination orthonormaler Basisfunktionen . . . . .	111
6.4.3	Definition des konvexen Optimierungsproblems . . . . .	112
6.4.4	Erforderliche Ergänzungen des konvexen Optimierungsproblems . . . . .	113
6.5	Zusammenfassung . . . . .	113
7.	<i>Anwendungsbeispiel</i> . . . . .	115
7.1	Einleitung . . . . .	115
7.1.1	Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise . . . . .	115
7.1.2	Zu lösende Aufgaben . . . . .	115
7.1.3	Gliederung . . . . .	116
7.2	Benchmarksystem . . . . .	116
7.2.1	Mechanische Grundstruktur . . . . .	116
7.2.2	Aktuatorik, Sensorik und elektronische Komponenten . . . . .	116
7.2.3	Spezifikationen für das Entwurfsproblem . . . . .	117
7.3	Modellanalyse und Unsicherheitsbetrachtung . . . . .	118
7.3.1	Modelldaten . . . . .	118
7.3.2	Analyse der Modellparameter . . . . .	119
7.3.3	Templates . . . . .	120
7.4	Berechnung der Betragsgrenzen aus den Spezifikationen . . . . .	124
7.4.1	Berechnung der Betragsgrenzen für das Führungsverhalten . . . . .	124
7.4.2	Berechnung der Betragsobergrenzen für das Störverhalten . . . . .	127
7.5	Reglersynthese durch Optimierung . . . . .	130
7.5.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	130
7.5.2	Ergebnisse im ersten Durchlauf . . . . .	132
7.5.3	Analyse der erzielten Ergebnisse . . . . .	133
7.5.4	Modifikation der Spezifikationen . . . . .	137
7.5.5	Reglerentwurf zur Einhaltung der modifizierten Anforderungen . . . . .	137
7.5.6	Nutzung der konvexen Optimierung . . . . .	140
7.6	Zusammenfassung . . . . .	142

8. Zusammenfassung, Bewertung und Ausblick . . . . .	143
8.1 Zusammenfassung . . . . .	143
8.2 Kritische Bewertung und Ausblick . . . . .	145
Anhang . . . . .	147
A. Funktionentheorie . . . . .	148
A.1 Komplexe Zahlen . . . . .	148
A.1.1 Grundlagen . . . . .	148
A.1.2 Kurven, Bereiche und Gebiete in der Gauß'schen Ebene . . . . .	149
A.2 Komplexe Funktionen . . . . .	150
A.2.1 Grundlagen . . . . .	150
A.2.2 Holomorphe Funktionen . . . . .	152
A.3 Konforme Abbildungen . . . . .	153
A.3.1 Grundlagen . . . . .	153
A.3.2 Elementare konforme Abbildungen . . . . .	153
B. Konvexe Optimierung . . . . .	157
B.1 Konvexe Mengen . . . . .	157
B.1.1 Grundlagen . . . . .	157
B.1.2 Beispiele für konvexe Mengen . . . . .	158
B.1.3 Konvexitätserhaltende Operationen . . . . .	159
B.1.4 Trennende und stützende Hyperebenen . . . . .	160
B.2 Konvexe Funktionen . . . . .	161
B.2.1 Grundlagen . . . . .	161
B.2.2 Konvexitätserhaltende Operationen . . . . .	161
B.3 Konvexe Optimierungsprobleme . . . . .	163
B.3.1 Konvexität von Optimierungsproblemen . . . . .	164
B.3.2 Eigenschaften konvexer Optimierungsprobleme . . . . .	165
C. Verwendete Software . . . . .	166
C.1 Strukturierung der erstellten Programme zur Bearbeitung der Benchmark-Aufgabe	166

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1.1.1	Regelungsaufgaben für flexible mechanische Strukturen im Regelkreis . . . . .	14
1.1.2	Entwurfsprozess für Regelungssysteme . . . . .	16
1.2.1	Ablauf der Reglersynthese mit QFT . . . . .	22
2.2.1	Standardregelkreis . . . . .	28
2.3.1	Skizze der Faserverbundstruktur . . . . .	31
2.3.2	Templates der betrachteten mechanischen Struktur . . . . .	37
2.3.3	Systemantwort und zulässige Grenze im Zeitbereich . . . . .	41
2.3.4	Systemantwort und zulässige Grenze im Frequenzbereich . . . . .	41
2.3.5	Zur Herleitung der Bounds . . . . .	44
2.3.6	Bounds am unregelmässigen System . . . . .	47
2.3.7	Bounds am geregelten System . . . . .	47
2.3.8	Systemantwort im Vergleich zur Vorgabe (Frequenzbereich) . . . . .	49
2.3.9	Systemantwort im Vergleich zur Vorgabe (Zeitbereich) . . . . .	49
2.4.1	Mehrgrößensystem mit Störung am Ausgang . . . . .	51
2.4.2	Eingrößensystem mit Störung am Eingang (1. Schritt) . . . . .	53
2.4.3	Eingrößensystem mit Störung am Eingang (2. Schritt) . . . . .	54
3.2.1	Darstellung des Gesamtmodells . . . . .	63
4.3.1	Modales Template (Gridding / Methode von Fu) . . . . .	74
4.3.2	Addition von Templates . . . . .	76
4.3.3	Vergleich: Gridding und vereinfachte Berechnung . . . . .	77
4.3.4	Veranschaulichung des Plane-Sweep-Algorithmus . . . . .	78
4.3.5	Aktivitätsdiagramm . . . . .	80
4.3.6	Vergleich der Templates: Addition / modifizierte Addition . . . . .	81
4.4.1	Ober- und Untergrenzen für die Approximation . . . . .	82
5.2.1	Festlegung von Vorgaben an die Sensitivitätsfunktion nach Horowitz . . . . .	87
5.2.2	Störübertragung auf dem Sekundärpfad . . . . .	88
5.2.3	Ablaufdiagramm für $t-\Omega$ -Übertragung . . . . .	90
5.2.4	Anwendung der modifizierten $t-\Omega$ -Übertragung . . . . .	91
5.2.5	$t-\Omega$ -Übertragung mit verringerter Modellanzahl . . . . .	92

6.3.1	Standardregelkreis: Def. d. nicht-konvexen Problems . . . . .	99
6.4.1	Youla-Parametrierung aller stabilisierenden Regler . . . . .	107
6.4.2	Approximation nicht-konvexer zulässiger Mengen . . . . .	110
7.2.1	Flexibler Riementrieb . . . . .	117
7.3.1	Templates unterhalb der ersten Resonanz . . . . .	121
7.3.2	Templates im Bereich der ersten Resonanz . . . . .	122
7.3.3	Templates zwischen erster und zweiter Resonanz . . . . .	123
7.3.4	Templates im Bereich der zweiten Resonanz . . . . .	124
7.3.5	Templates oberhalb der zweiten Resonanz . . . . .	125
7.4.1	Vorgaben an das Führungsverhalten im Zeitbereich . . . . .	126
7.4.2	Vorgaben an das Führungsverhalten im Frequenzbereich . . . . .	126
7.4.3	Vorgaben an das Führungsverhalten: Modellreferenz . . . . .	127
7.4.4	Sprungantworten: $t-\Omega$ -Übertragung der Störunterdrückung . . . . .	129
7.4.5	Amplitudengang: $t-\Omega$ -Übertragung der Störunterdrückung . . . . .	130
7.5.1	Nichols-Diagramm - unregelt - 0 bis 10 Rad/s . . . . .	134
7.5.2	Nichols-Diagramm - geregelt - 0 bis 10 Rad/s . . . . .	135
7.5.3	Simulationsergebnisse: Störverhalten (Musterlösung) . . . . .	136
7.5.4	Simulationsergebnisse: Führungsverhalten (Musterlösung) . . . . .	136
7.5.5	Sprungantwort des unregulierten Systems . . . . .	137
7.5.6	Boundaries für die Störübertragung . . . . .	138
7.5.7	Simulation der Sprungantwort (Störverhalten) . . . . .	139
7.5.8	Sprungantwort der Führungsübertragungsfunktion . . . . .	140
7.5.9	Störverhalten im Zeitbereich: Regler aus konvexer Optimierung . . . . .	141
A.1.1	Betragsungleichung komplexer Zahlen . . . . .	149
A.1.2	Einfach und dreifach zusammenhängendes Gebiet . . . . .	150
B.1.1	Konvexe und Nicht-konvexe Mengen . . . . .	157
C.1.1	Data-Flow-Diagram: Lösung des Benchmark-Problems . . . . .	167

## VERWENDETE ABKÜRZUNGEN

EMA	<b>Experimental Modal Analysis</b>
ETFE	<b>Experimental Transfer Function Estimate</b>
FEM	<b>Finite Elements Method</b>
FMS	<b>Flexible Mechanische Strukturen</b>
GRK	<b>Geschlossener Regelkreis</b>
IMC	<b>Internal Model Control</b>
IMSC	<b>Independent Modal Space Control</b>
LS	<b>Least Squares</b>
LTI	<b>Linear Time Invariant</b>
LTV	<b>Linear Time Variant</b>
MIMO	<b>Multiple Input-Multiple Output</b>
MISO	<b>Multiple Input-Single Output</b>
ORK	<b>Offener Regelkreis</b>
PDG	<b>Partielle Differentialgleichung</b>
PPF	<b>Positive Position Feedback</b>
QFT	<b>Quantitative Feedback Theory</b>
SISO	<b>Single Input-Single Output</b>

## VERWENDETE FORMELZEICHEN

$c_v, c_w$	Parameter des Zählerpolynoms für modale Übertragungsfunktionen
$s$	Laplace-Variable
$t$	Zeit
$z$	Variable der z-Transformation
$z_R, z_I$	Real- und Imaginärteil eines Punktes in der komplexen Ebene
$G(s)$	Übertragungsfunktion der Regelstrecke
$G(s, \vec{p})$	Übertragungsfunktion der parameterabhängigen Regelstrecke
$G_0(s)$	nominale Übertragungsfunktion des ORK
$\hat{G}(s)$	modale Übertragungsfunktion der Regelstrecke
$G_E(s)$	Übertragungsfunktion der Kombination erweiterter Aktuator- und Sensordynamik
$H(s)$	Übertragungsfunktion des Reglers
$Q(s)$	Übertragungsfunktion des Youla-Parameters
$\tilde{T}(s)$	generische Übertragungsfunktion (des GRK)
$\delta_k$	Abklingkonstante des k-ten Modes
$\omega_k$	Kennkreisfrequenz des k-ten Modes
$\Delta_{G_k}$	Abweichung des Frequenzganges der Übertragungsfunktion $G(s, \vec{p}_k)$ von dem des nominalen Modells
$\Omega$	Erregerfrequenz des komplexen Frequenzganges $s = j\Omega$
$\vec{d}$	auf die Knotenfreiheitsgrade einwirkende Störkräfte und -momente
$\vec{f}$	auf die Knotenfreiheitsgrade einwirkende kontrollierbaren Kräfte und Momente
$\vec{p}$	Vektor der unsicheren Streckenparameter
$\vec{p}_{Opt}$	Vektor der Optimierungsparameter
$\vec{t}_k$	Eigenvektor des k-ten Modes
$\vec{u}$	Stellgrößen
$\vec{u}^{**}$	stationäre Stellgrößen
$\vec{v}$	Knotenfreiheitsgrade eines diskretisierten Modells
$\vec{x}$	Zustandsvektor
$\vec{y}$	Messgrößen
$\vec{y}^{**}$	Messgrößen vor Sensordynamik
$\vec{z}$	Punkt in der komplexen Ebene
<b>A</b>	Systemmatrix (Zustandsraummodell)

<b>B</b>	Steuermatrix (Zustandsraummodell)
<b>C</b>	Messmatrix (Zustandsraummodell)
<b>C<sub>SW</sub></b>	Einflussmatrix der Auslenkung von Knotenfreiheitsgraden auf die Messgrößen
<b>C<sub>SV</sub></b>	Einflussmatrix der Geschwindigkeiten von Knotenfreiheitsgraden auf die Messgrößen
<b>D</b>	Dämpfungsmatrix (FEM-Modell)
<b>E</b>	Einheitsmatrix
<b>E<sub>A</sub></b>	Dynamisches Modell der Leistungselektronik am Aktuator
<b>E<sub>S</sub></b>	Dynamisches Modell der Leistungselektronik am Sensor
<b>F<sub>A</sub></b>	Einflussmatrix von den stationären Stellgrößen auf die Kräfte / Momente an den Knotenfreiheitsgraden
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix (FEM-Modell)
<b>M</b>	Massenmatrix (FEM-Modell)
<b>T</b>	Modalmatrix
<b>W<sub>A</sub></b>	Dynamisches Modell der Energiewandlung am Aktuator
<b>W<sub>S</sub></b>	Dynamisches Modell der Energiewandlung am Sensor
<b>D<sub>M</sub></b>	modale Dämpfungsmatrix
<b>K<sub>M</sub></b>	modale Massenmatrix
<b>L<sub>klm</sub></b>	zulässige Menge des offenen Regelkreises für ein Teiloptimierungsproblem
<b>P</b>	Hyperrechteck der zulässigen Parameter
<b>Q<sub>klm</sub></b>	zulässige Menge des Youla-Parameters für Teiloptimierungsproblem
<b>T</b>	Template
<b><math>\tilde{T}_Z</math></b>	zulässige Wertemenge für die Übertragungsfunktion $\tilde{T}$ des GRK

# 1. EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Anwendung der Quantitative Feedback Theory (QFT) zur Synthese von Reglern für flexible mechanische Strukturen (FMS). Inhalt dieses einleitenden Kapitels ist die Darstellung von Motivation, Ziel- und Aufgabenstellung sowie der Gliederung der Arbeit.

## 1.1 *Motivation der Arbeit*

### 1.1.1 *Hintergrund*

Der wirtschaftliche Zwang nach neuen, kostengünstigeren und vor allem hochwertigeren technischen Systemen ist in Hochtechnologiebranchen wie der Luft- und Raumfahrt, dem Automobilbau oder der Automatisierungstechnik ausgeprägt.

Die Qualität strukturmechanischer Komponenten wird über Kriterien wie Lebensdauer und maximal aufnehmbare Last definiert. Daneben spielt aber, insbesondere in der Luft- und Raumfahrt und im Automobilbau, das Gewicht einer Struktur eine entscheidende Rolle. Die Absenkung des Gewichts einer Struktur, bei gleichbleibender oder, wenn möglich, steigender Festigkeit, ist Ziel vieler Verbesserungsansätze.

Eine weitere zu beobachtende Tendenz, ist die Skalierung bestehender Systeme hin zu größeren Dimensionen (z.B. Airbus A-380 in der Luftfahrt, International Space Station in der Raumfahrt). Die Qualitätsverbesserung besteht in diesen Fällen darin, dass das Gesamtsystem Dimensionen aufweist, die bislang als technisch nicht realisierbar oder als unwirtschaftlich galten. Um diese Verbesserungen zu ermöglichen, ist der Einsatz neuer und verbesserter Materialien unumgänglich. Neben metallischen Hochleistungslegierungen stehen dabei Faserverbundwerkstoffe im Vordergrund. Diese bieten eine höhere spezifische Festigkeit und lassen sich sehr zielgerichtet dimensionieren und fertigen. Typischerweise werden moderne Komponenten, ermöglicht durch Fortschritte in der Fertigungstechnik, in der sogenannten Integralbauweise gefertigt. Statt eine Komponente aus vielen Einzelteilen durch Füge- und Verbindungstechniken zusammensetzen, werden die Komponenten am Stück hergestellt.

Mit der Methode der finiten Elemente (FEM) können Systeme am Rechner besser dimensioniert werden. Die zur Konstruktion erstellten CAD- (Computer-Aided-Design) Daten werden unmittelbar als Grundlage für Festigkeitsberechnungen verwendet, die Resultate dieser Berechnungen fließen dann wieder in die Konstruktion ein. Insbesondere bei Verwendung von Faserverbunden werden Überdimensionierungen vermieden, was sich in weitere Gewichtsersparnis umsetzen lässt.

Die durch die Kombination von CAD und FEM verbesserte Dimensionierung führt zur Verschlankeung der Strukturen. Gleichzeitig wird durch die reduzierte Anzahl von Fügstellen weniger

Energie in einer Struktur dissipiert. Faserverbundmaterialien weisen zudem eine geringe Materialdämpfung auf. In der Kombination neigen solche Systeme stärker zu Schwingungen als konventionelle Strukturen.

Durch die Schwingungen werden unter anderem vorzeitige Materialermüdung und Lärmabstrahlung bedingt. In einigen Fällen können zu Schwingungen neigende Systeme ihre Aufgaben nur noch eingeschränkt ausführen, z.B. ein Roboter zur Feinpositionierung, der beim Anfahren einer Position lange Zeit nachschwingt.

Neben konstruktiven Maßnahmen zur Dämpfungserhöhung und / oder Schwingungstilgung ist die „aktive Schwingungsdämpfung“ eine Methode, mit der die Schwingungsproblematik gelöst werden kann. Die Schwingungen werden hierbei mit Sensoren gemessen. Ein Regler generiert aus den Messungen Stellsignale, mit denen Stellglieder beaufschlagt werden. Die von den Stellgliedern aufgebrachtten Kräfte und Momente bedämpfen die Schwingung.

Durch die Integration von Sensoren, Aktoren und Regelung in die mechanische Struktur können, „intelligente Strukturen“ geschaffen werden, die sich, über die aktive Schwingungsdämpfung hinaus, selbstständig an variierende Umweltbedingungen anpassen. Beispiele für derartige „adaptive Systeme“ finden sich insbesondere in der Luft- und Raumfahrttechnik.

### 1.1.2 Regelungsprobleme intelligenter Struktursysteme

Aus Sicht der Regelungstechnik ist die aktive Schwingungsdämpfung als Störunterdrückung auf dem Sekundärpfad zu betrachten, also als Unterdrückung von Störungen, mit einem eigenen Signalpfad von der Störgröße  $D_2$  auf die Regelgröße  $Y$  (vgl. Abbildung 1.1.1). Die Formregelung hat zum Ziel, einzelnen Messpunkten auf der Struktur vorgegebene Auslenkungen aufzuprägen. Sie definiert das Führungsverhalten zwischen der Führungsgröße  $R(s)$  und der Regelgröße. Weitere Aufgaben ergeben sich aus der Unterdrückung des Einflusses von Störungen am Ausgang  $X(s)$  und Störungen am Eingang  $D_1(s)$ .

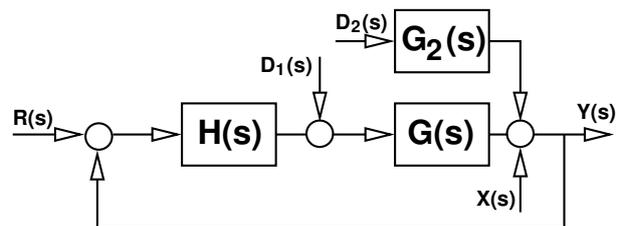


Abb. 1.1.1: Regelungsaufgaben für flexible mechanische Strukturen im Regelkreis

Störunterdrückung und Führungsverhalten sind vermeintlich Standardprobleme. Eine Reihe von Eigenschaften mechanischer Strukturen macht deren Lösung allerdings zu einer nichttrivialen Aufgabe. Die wesentlichen Schwierigkeiten lassen sich darauf zurückführen, dass flexible mechanische Strukturen verteilte Strukturen sind. Die systemdynamisch relevanten Eigenschaften sind nicht lokalisiert, sondern über die gesamte Struktur räumlich verteilt. Daraus resultieren folgende Charakteristika:

1. Die Positionierung von Sensoren und Aktoren hat einen erheblichen Einfluss auf die Beobachtbarkeit bzw. Steuerbarkeit der resonanten Moden und damit auf die Regelbarkeit der Struktur [35, 102, 85, 103].
2. Eine Lösung der beschreibenden partiellen Differentialgleichung (PDG) ist nur näherungsweise möglich. Die Gesamtlösung ist immer, selbst in den wenigen Fällen, in denen ein

analytischer Ansatz gefunden werden kann, eine unendliche Reihe [38, 28, 34]. Modelle für FMS sind daher immer fehlerbehaftet.

3. Auf Grund unzureichend bekannter Modellparameter entsteht ein fehlerbehaftetes Modell, da die Lösungen der PDGs empfindlich in Bezug auf die zur Lösung verwendeten Randbedingungen, die Geometrie und die Materialparameter sind [30, 110, 109, 2].
4. In den meisten Fällen muss eine numerische Lösung, z.B. mit der Methode der finiten Elemente (FEM) berechnet werden [34].

Die aus der Lösung der PDG resultierenden strukturdynamischen Modelle

- haben eine hohe Ordnung [66, 34], aus der sich
  - die große Anzahl von Modellparametern,
  - die schlechte numerische Kondition der Modelleergeben;
- sind häufig nur für niedere Frequenzen hinreichend exakt [30, 66];
- liegen nicht als regelungstechnisches Wirkmodell vor, beschreiben also nicht den für die Reglerauslegung wichtigen Signalpfad von der Ansteuerung des Aktuators bis zum Ausgang des Sensors [3, 110, 32, 21].

### 1.1.3 Aktive Schwingungsdämpfung in Industrieanwendungen

In Grundsatzuntersuchungen und für Technologiedemonstratoren genügt es häufig, durch den Einsatz der aktiven Schwingungsdämpfung das dynamische Verhalten einer intelligenten Struktur zu verbessern. Wenn die aktive Schwingungsdämpfung jedoch Akzeptanz für die Integration in Massenprodukte erzielen soll, muss es möglich sein, die Methoden zur Reglersynthese in Konstruktions- und Entwurfsprozesse einzubinden, wie sie z.B. in den VDI Richtlinien 2221 und 2222 [97, 98] beschrieben werden. Die Berücksichtigung von in Anforderungslisten definierten Forderungen ist demnach ein Teil des Systementwurfs, zu dem die Reglersynthese beitragen muss.

Aus den Forderungen an das Gesamtsystem werden Anforderungen an das Regelungssystem abgeleitet. Diese Anforderungen definieren die Regelungsziele, an denen erzielte Verbesserungen der Dynamik gemessen werden müssen. Die Reglersynthese muss demnach zwingend die Einhaltung von Regelungszielen inhärent berücksichtigen.

Während die Modellbildung nur unsichere und ungenaue Ergebnisse liefert, werden die Forderungen an den geschlossenen Regelkreis (GRK), die aus den Systemanforderungen abgeleitet werden, meist sehr präzise definiert. Die für die Reglersynthese verwendeten Modelle der mechanischen Struktur, inklusive der Beschreibungen der Einflüsse von Zeitvarianz, Nichtlinearitäten und Parameterstreuungen, können in fortgeschrittenem Entwurfsstadium durch Modellidentifikation an Prototypen oder der fertigen Struktur gewonnen werden. Während der Entwurfsphase hingegen, ist man auf Simulationen angewiesen, die in der Regel auf einer fehlerbehafteten Modellbildung beruhen, so dass Validierung und Verifikation der Forderungen in diesem Stadium nur näherungsweise möglich sind.

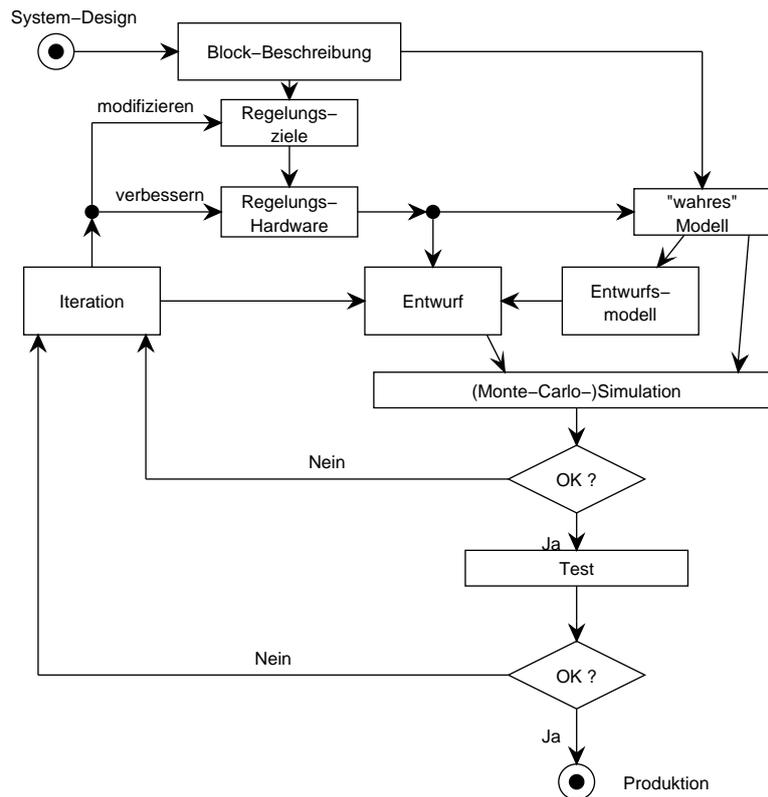


Abb. 1.1.2: Entwurfsprozess für Regelungssysteme

Um unter diesen Umständen erfolgreich das Gesamtsystem entwerfen zu können, sind iterative Vorgehensweisen unumgänglich. Yaniv [104] hat den Entwurfsprozess von Regelungssystemen für generische Regelstrecken in einem Diagramm zusammengefasst (Abbildung 1.1.2). Dieses zeigt die möglichen Rückwirkungen von der Verifikation mittels Simulation bzw. Test auf die Regelungsziele (falls diese sich im Entwurf als nicht einhaltbar erweisen) bzw. auf die Regelungshardware oder die Blockbeschreibung, also auf das System. Da die Ergebnisse der Reglersynthese unmittelbar Auswirkungen auf den Gesamtentwurf haben, muss außer einer guten Unterstützung durch rechentechnische Werkzeuge eine enge Integration aller am Entwurf beteiligten Spezialisten gegeben sein. Es ist also erforderlich, die Synthese des Regelungssystems in den Entwurf des Gesamtsystems einzubinden [54]. Ziel ist es, mit möglichst wenigen Iterationen auszukommen, und jeden Iterationsschritt mit möglichst wenig Aufwand zu durchlaufen.

#### 1.1.4 Akzeptanz von Methoden zur Reglersynthese

Der Entwurf von Reglern für flexible mechanische Strukturen ist eine interdisziplinäre Aufgabe, an der Spezialisten aus mehreren Fachgebieten mitarbeiten. Deren Kommunikation miteinander ist essentiell, ihre Herangehensweisen an die Reglersynthese für adaptive Strukturen kann jedoch sehr unterschiedlich sein, wie ein Blick auf die Literatur zeigt.

Aus regelungstechnischer Sicht ist die Nutzung der robusten Entwurfsverfahren, wie zum Beispiel der  $H_\infty$ - oder der  $\mu$ -Synthese nahe liegend. Die Leistungsfähigkeit dieser Verfahren ist in einer Reihe von Veröffentlichungen beschrieben (siehe z.B. [35]). Ohne dass der Versuch einer

vollständigen Auswertung der Literatur zum Thema „Regelung flexibler mechanischer Strukturen“ unternommen wurde, ergibt sich beim Literaturstudium dennoch der Eindruck, dass diese Verfahren in Fachbüchern oder -zeitschriften zur Strukturmechanik keine wesentliche Rolle im Hinblick auf die Regelung von adaptiven Strukturen spielen (siehe z.B. [56, 32, 21]).

Statt dessen wird in vielen Veröffentlichungen die Nutzung von Entwurfsmethoden wie der Independent Modal Space Control (IMSC) (siehe u. A. [94]) oder der Positive Position Feedback (PPF) (siehe u.A. [7, 6]) und ihrer jeweiligen Derivate beschrieben. Diese Methoden basieren auf den in der Strukturmechanik verankerten modalen Beschreibungsformen und haben unmittelbar die Erhöhung der Dämpfung einzelner Moden zum Ziel. Sie entsprechen in ihrer Herangehensweise ganz der strukturmechanischen Sicht. Durch Anwendung dieser Verfahren können zwar sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Aus Sicht der Regelungstechnik weisen diese Verfahren jedoch in verschiedenen Belangen Nachteile auf (keine Robustheit im Entwurf, kein Entwurf auf Führungsverhalten, großer Hardwareaufwand) .

Reglersyntheseverfahren können nur dann erfolgreich angewendet werden, wenn die Eigenschaften der zu regelnden Systeme bekannt und verstanden sind. Ohne die Systemkenntnis, die sich aus der Anwendung strukturmechanischer Analysemethoden ableiten lässt, wird der Reglerentwurf für FMS zumindest schwierig. Um das notwendige Expertenwissen für die Reglersynthese nutzbar zu machen, ist es erforderlich, die Vorgehensweise und Ziele der Reglersynthese so transparent zu machen, dass die Kommunikation zwischen Regelungsspezialisten und Mechanikspezialisten erleichtert wird.

Folgt man aus der Betrachtung der Literatur, dass die Akzeptanz von Verfahren wie der  $H_\infty$ -Methode auf Seite der Systemfachleute, deswegen gering ist, weil eben diese Transparenz von Vorgehensweise und Zielen nicht gegeben ist, dann bleibt als Schluss nur die Wahl eines transparenteren, weniger komplexen Entwurfsverfahrens, das, auch zur Erleichterung der regelungstechnischen Systemanalyse, die in der Strukturmechanik verankerten modalen Systembeschreibungen nutzt.

#### 1.1.5 Ableitung von Forderungen an das Reglersyntheseverfahren

Aus den Darstellungen der Abschnitte 1.1.2 bis 1.1.4 ergeben sich Forderungen an ein Verfahren zur Reglersynthese.

Aus Abschnitt 1.1.2 wird abgeleitet:

- Das Verfahren soll die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten in Bezug auf Modellordnung und Modellparameter, von Nichtlinearitäten und gegebenenfalls von Zeitvarianz im Entwurf ermöglichen.
- Das Verfahren muss den Entwurf für Modelle großer Ordnung, mit allen dadurch resultierenden Konsequenzen (große Anzahl Modellparameter, numerische Konditionierung, etc.) erlauben und unterstützen.

Um die in Abschnitt 1.1.3 geforderte Integration der Reglersynthese in die Systementwicklung zu ermöglichen, müssen die folgenden Forderungen erfüllt sein:

- Das Verfahren soll den Entwurf auf Einhaltung der Regelungsziele ermöglichen.

- Das Verfahren soll möglichst früh im Entwurf Aufschluss darüber geben, ob Spezifikationen unvollständig und / oder widersprüchlich sind, und ob in einer bestimmten Aktor- / Sensor-Konfiguration die Spezifikationen eingehalten werden können.
- Aus den Ergebnissen der Verifikation und den im Verlauf des Entwurfs entstandenen Daten sollen Rückschlüsse auf geeignete Modifikationen von Hardware und Regelungszielen möglich sein.

Die in Abschnitt 1.1.4 diskutierte Akzeptanz eines Syntheseverfahrens im interdisziplinären Entwicklungsumfeld erfordert die folgenden Eigenschaften:

- Hohe Transparenz der Zusammenhänge zwischen Entwurfsparametern und Regelungszielen.
- Nutzung strukturmechanischer Beschreibungsformen und Analyseverfahren in der Reglersynthese.

#### 1.1.6 Anwendung der Quantitative Feedback Theory

In der vorliegenden Arbeit wird die Nutzung der Quantitative Feedback Theory vorgeschlagen. Die grundsätzliche Eignung der QFT zur Synthese von Reglern für flexible mechanische Strukturen ist in einer Reihe von Arbeiten nachgewiesen worden:

Von Horowitz und Yaniv [77] stammt eine Veröffentlichung zur Eingrößenregelung einer sehr einfachen Struktur. Von Chait und Park [17] wurde eine Übersichtsdarstellung zum QFT- Mehrgrößenentwurf für FMS veröffentlicht, Piedmonte et. al. [80] untersuchen die Anwendung einer besonderen QFT-MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output) Reglerstruktur zur Regelung eines in Biegung und Torsion schwingenden Balkens. Choi et. al. stellen den Reglerentwurf auf Führungsverhalten für einen mit piezokeramischen Aktuatoren ausgestatteten Balken vor [84]. Von Jayasuriyya und Mitarbeitern sind eine Reihe von Arbeiten zum QFT-Entwurf für flexible Manipulatoren erschienen (z.B. [18, 57]) . Untersuchungen zur Schwingungsregelung für den flexiblen Suchkopf eines CD-Spielers sind von Chait und Mitarbeitern veröffentlicht worden (z.B. [15]).

Die in den genannten Arbeiten dargestellten Begründungen für die Nutzung der QFT als Entwurfsmethode, decken viele der in den vorangegangenen Abschnitten aufgestellten Forderungen an das Syntheseverfahren ab. Insbesondere die aus Abschnitt 1.1.3 abgeleiteten Forderungen werden von der QFT erfüllt:

- Durch Berücksichtigung von Modellunsicherheiten wird die Robustheit des Entwurfs mit QFT sichergestellt (z.B. [77, 84, 15, 20]) .
- Die robuste Einhaltung von Forderungen an den geschlossenen Regelkreis steht im Mittelpunkt des Entwurfs mit QFT [77, 84].
- Die Robustheit der Stabilität des GRK ist inhärent im Entwurf enthalten [104].
- Im Zuge der Anwendung wird früh deutlich, ob Spezifikationen nicht eingehalten werden können, unvollständig oder widersprüchlich sind [20].

- Bei Modifikationen des Streckenmodells oder der Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis können Teile des Entwurfs wiederverwendet und angepasst werden [20].

Die QFT weist jedoch auch eine Reihe von Defiziten auf, die die Reglersynthese im Allgemeinen, und für intelligente Struktursysteme im Besonderen, erschweren. Diese Defizite werden im Folgenden kurz beschrieben:

**Berücksichtigung von Modellunsicherheiten:** Der Aufwand zur Berechnung der Auswirkungen von Modellunsicherheiten steigt exponentiell mit der Anzahl unsicherer Parameter (siehe z.B. [5, 19, 91, 8]). Die Berücksichtigung der Modellunsicherheiten konjugiert komplexer Pol- oder Nullstellenpaare, deren Realteil einen kleinen Betrag aufweist, erhöht den Rechenaufwand zusätzlich. Die Nutzung vereinfachter Berechnungsmethoden (z.B. [5, 31, 60]) ist, auf Grund der Modellstrukturen von FMS, nicht möglich, oder mit dem Risiko großer Konservativität verbunden (vgl. Kapitel 3). Daher kann die QFT nur dann ohne Modifikation zur Synthese von Reglern für FMS herangezogen werden, wenn die Anzahl der Moden klein ist.

**Forderungen / Spezifikationen:** Die Synthese von Reglern mittels QFT setzt die Vorgabe von Regelungszielen voraus, und ist auf die Gewinnung von Reglern ausgerichtet, die trotz erheblicher Variationen der Streckenparameter diese Regelungsziele einhalten. Zur Gewinnung geeigneter Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis, und zur Übertragung dieser Vorgaben in den Frequenzbereich, finden sich in der Literatur zur QFT (z.B. [50, 104]) aber nur Methoden, die für adaptive Strukturen nicht immer nutzbar sind. In den vorliegenden Arbeiten werden diese Probleme dadurch umgangen, dass die klassischen Regelungsziele wie z.B. Einschwingdauer und Überschwingweite genutzt werden, die jedoch nur Teil der in der QFT üblichen Vorgaben sind. Die QFT-typische Vorgehensweise der Bestimmung eines zulässigen Signalverlaufs im Zeitbereich (vgl. Kapitel 2) wird dort nicht durchgeführt.

**Bestimmung von Reglerstruktur und -parametern:** Die QFT bietet nur wenig Unterstützung bei der Festlegung der Reglerstruktur und -parameter. Der Entwurf mit der QFT erfordert daher solide Kenntnisse klassischer Entwurfsverfahren und große Erfahrung in der Anwendung dieser Verfahren, wenn er problemlos durchgeführt werden soll. Dies gilt insbesondere für die hier untersuchten komplexen Systeme [50, 77].

Um die Anwendung der QFT zu vereinfachen, wird die „automatische“ Bestimmung von Reglern zunächst von Horowitz und Gera [37] beschrieben. Unter Nutzung des Bode'schen Sensitivitätsintegrals, wird der Frequenzgang für den nominalen offenen Regelkreis iterativ bestimmt. Weiterführende Arbeiten vereinfachen die iterative Vorgehensweise [95] und nutzen nichtlineare Optimierungsverfahren zur Bestimmung der Reglerparameter [92]. Ein anderer Ansatz zur Nutzung nichtlinearer Regelungsverfahren wurde von Gräser et. al. veröffentlicht [39, 40]. Lineare Optimierungsansätze sind von Bryant und Halikias [14] und -als Fortsetzung und Verbesserung dieser Arbeit- von Chait et. al. [16] vorgestellt worden.

Nichtlineare Optimierungsansätze finden häufig nur die lokalen Minima des zugehörigen Optimierungsproblems. Die nichtlinearen Ansätze [37, 95, 92, 39, 40] können daher die Konvergenz des Entwurfs nicht sicherstellen (vgl. [16]). Durch die linearen Optimierungsansätze in [14, 16]

werden diese Probleme zwar gelöst, jedoch auf Kosten erhöhter Konservativität, da die QFT-Bounds, also die „erlaubten Wertemengen“, durch konvexe Wertemengen approximiert werden müssen.

Da die mathematische Optimierung auf der Minimierung eines skalaren Gütefunktionalen beruht, sind Analysen des Konvergenzverhaltens im Regelfall schwierig. Kann ein Optimierungsproblem nicht zufriedenstellend gelöst werden, ist es aber erforderlich, den Ursachen auf den Grund zu gehen.

Um die QFT zur Synthese von Reglern für intelligente Struktursysteme sinnvoll nutzen zu können, sind Modifikationen an der Methode erforderlich. Diese Modifikationen gehen in die Aufgabenstellung, die der vorliegenden Arbeit zu Grunde liegen, ein.

## 1.2 Aufgabenstellung

### 1.2.1 Zielstellung

Die Zielstellung der vorliegenden Arbeit ist die Nutzung der Quantitative Feedback Theory zur Synthese von robusten Reglern für flexible mechanische Strukturen im Rahmen des in Abbildung 1.1.2 vorgestellten Entwurfsprozesses für Regelungssysteme.

Um der Zielstellung gerecht zu werden, müssen teilweise recht unterschiedliche Aufgabenstellungen bearbeitet und gelöst werden. Die eigenständig erarbeiteten Anteile der Arbeit erscheinen daher vielleicht nicht zusammenhängend, sind aber gezielte punktuelle Lösungen, die ein vollständiges, in sich geschlossenes Konzept ermöglichen.

### 1.2.2 Einzelaufgaben

Aus der Zielstellung in Abschnitt 1.2.1 und den Darstellungen der Abschnitte 1.1.2 bis 1.1.6 lassen sich für die vorliegende Arbeit die Einzelaufgaben ableiten, die zur Modifikation und Ergänzung der QFT notwendig sind, um die Reglersynthese für flexible mechanische Strukturen zu erleichtern, bzw. zu ermöglichen.

**Modellbildung:** Ausgehend von den aus der Methode der finiten Elemente stammenden Bewegungsgleichungen, sind regelungstechnische Wirkmodelle zu erstellen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Die Parameter der Modelle sollen physikalisch interpretierbar sein, um einer Grundforderung des robusten Reglerentwurfes zu genügen.
- Der Zusammenhang zwischen den auf analytischem Wege gewonnenen Modellen und Modellen aus der experimentellen Modellidentifikation muss erkennbar sein. Im Idealfall sind die Modellstrukturen aus der theoretischen Modellbildung und der Modellidentifikation identisch. Eine einheitliche Modellstruktur stellt sicher, dass der Entwurf beim Übergang von simulativen zu experimentellen Untersuchungen durchgängig ist, so dass die aus simulativen Untersuchungen gewonnenen Erkenntnisse für die experimentelle Verifikation genutzt werden können.

**Modellunsicherheiten:** Zur Darstellung der Auswirkungen von parametrischen Modellunsicherheiten in der komplexen Ebene ist, unter Nutzung der gewonnenen regelungstechnischen Modelle, eine effiziente und wenig rechenintensive Methode zur Templateberechnung zu entwickeln. Die resultierenden Templates sollen die Auswirkungen der Unsicherheiten möglichst exakt in die komplexe Ebene abbilden. Wenn bei der Berechnung Konservativität nicht zu vermeiden ist, müssen Möglichkeiten aufgezeigt werden, diese, gegebenenfalls auch auf Kosten der Recheneffizienz, zu vermindern.

**Umrechnung von Anforderungen:** Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis werden meist im Zeitbereich formuliert. Für die Reglersynthese werden sie in den Frequenzbereich übertragen. Da die in der QFT üblichen Methoden zwar sehr anschaulich sind, für FMS aber nicht immer genutzt werden können, ist die Entwicklung einer geeigneten Methode erforderlich. Zusätzlich sind die in Abschnitt 1.1.6 eingeforderten Ansätze zur Erstellung und Validierung von Forderungen im Zeitbereich, zu erarbeiten. Dabei ist zu beachten, dass der erforderliche rechen-technische und zeitliche Aufwand bei der Anwendung in einem vertretbaren Rahmen gehalten wird.

**Gewinnung von Reglerstruktur und -parametern:** Die Grundlagen eines an die QFT angepassten Verfahrens zur Reglersynthese sind zu definieren und zu nutzen. Das Verfahren soll auf den Grundlagen der QFT aufbauen, und in den Entwurfsprozess integrierbar sein. Bei Nutzung von Optimierungsverfahren muss die inhärente Konservativität der Optimierungsverfahren erkennbar, und im Entwurf beeinflussbar sein.

### 1.2.3 Eingrenzung der Zielstellung

Die Regelung bietet nicht notwendigerweise immer den besten Ansatz zur Behebung von Schwingungsproblemen. Häufig sind passive Methoden zur Schwingungsdämpfung oder adaptive Störgrößenaufschaltungen [32] besser geeignet.

Die Auswahl eines geeigneten Verfahrens zur Lösung eines bestimmten Problems, kann an den in der Rechtswissenschaft definierten Begriff der Verhältnismäßigkeit angelehnt erfolgen. Es ist das jeweils „mildeste“ geeignete Mittel zu wählen, also das Mittel, das bei vergleichbarer Wirkung und Zuverlässigkeit den geringsten Aufwand erfordert, um zum Ziel zu führen.

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Verfahren ist besonders geeignet, wenn Probleme der Formregelung / Formstabilisierung oder der aktiven Schwingungsregelung betrachtet werden und die Eigenmoden mit den niedrigsten Eigenfrequenzen bedämpft werden sollen. Typische in der Literatur behandelte Aufgabenstellungen, für die das hier vorgestellte Verfahren genutzt werden kann, sind z.B. die Bedämpfung von Schwingungen großer Weltraumstrukturen, die Verminderung der Schwingungsneigung von Gebäuden oder die Formstabilisierung für Manipulatoren in der Robotik.

Schwierigkeiten in der Anwendung werden sich ergeben, wenn die zu bedämpfenden Strukturen eine hohe modale Dichte aufweisen und / oder sich die Randbedingungen des betrachteten Systems ändern. Zwar kann es möglich sein, in diesen Fällen unter Nutzung der QFT erfolgreich einen Regler auszulegen, es ist aber (wie auch bei Nutzung anderer Verfahren) zumindest schwierig.

## 1.2.4 Übersicht über den vorgeschlagenen Lösungsweg und die Gliederung der Arbeit

### Schematische Darstellung des Lösungsweges

Die zur Synthese von Reglern für flexible mechanische Strukturen mit der QFT erforderlichen Arbeitsschritte sind schematisch in Abbildung 1.2.1 dargestellt.

Unbenommen davon, ob die regelungstechnischen Aspekte -wie beschrieben- im Gesamtentwurf berücksichtigt werden oder nicht, benötigt die Reglersynthese mit der QFT, wie sie in dieser Arbeit beschrieben wird, Zuarbeiten. Neben den Vorgaben aus Pflichten- und / oder Lastenheft sind dies Angaben zur Modellerstellung bzw. Ergebnisse aus der Modellidentifikation.

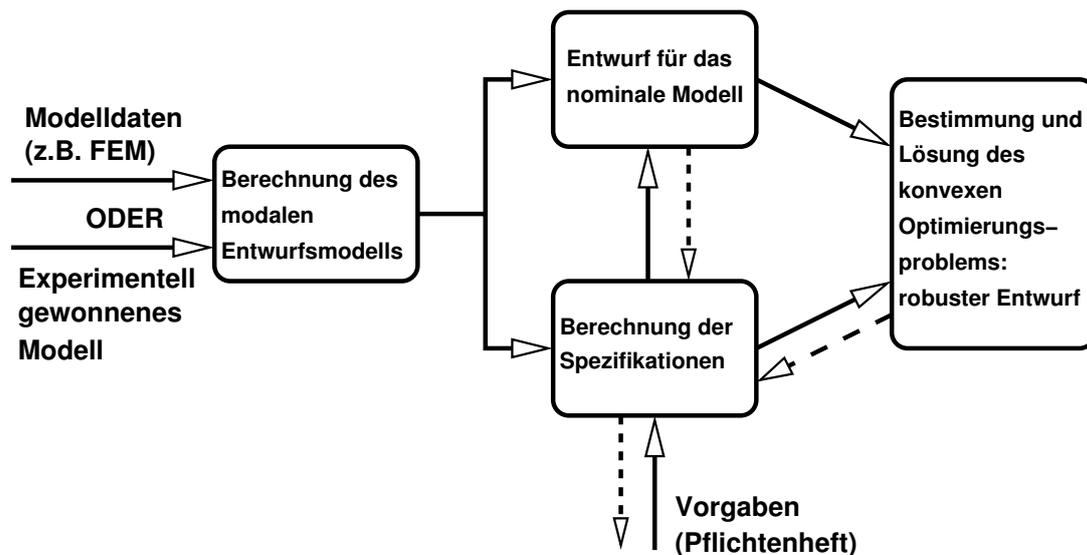


Abb. 1.2.1: Ablauf der Reglersynthese mit QFT

**Schritt 1.)** Aus den Modelldaten wird ein modales Modell berechnet. Dieses beinhaltet neben dem nominalen Modell für jeden der modalen Streckenparameter eine Beschreibung der parametrischen Unsicherheit.

**Schritt 2.)** Mit den Modelldaten und den Anforderungen aus Pflichten- bzw. Lastenheft werden in einem zweiten Schritt die Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis im Zeitbereich formuliert, falls Pflichten- bzw. Lastenheft diese Vorgabe nicht konkret definieren.

**Schritt 3.)** Im Zeitbereich gegebene Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis werden in Betragsgrenzen für die komplexen Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises umgerechnet.

**Schritt 4.)** Im letzten Schritt wird mit den Modelldaten und den Betragsgrenzen das Optimierungsproblem definiert. Durch dessen Lösung ergibt sich dann der Regler.

Wie schon in Abschnitt 1.1.3 diskutiert wurde, ist die Reglersynthese im Normalfall ein iterativer Prozess. Die potentiellen Rückwirkungen sind in Abbildung 1.2.1 durch gestrichelte Pfeile angedeutet.

## *Gliederung*

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in die nachfolgend beschriebenen fünf Kapitel, ergänzt durch die in diesem Kapitel gegebene Einleitung, eine abschließende Zusammenfassung und den Anhang.

**Einführung in die Quantitative Feedback Theory** An Hand eines im Frühjahr 2001, im Rahmen des Innovationskollegs ADAMES der Otto-von-Guericke-Universität durchgeführten, Experimentes wird in Kapitel 2 eine kurze Einführung in die Quantitative Feedback Theory gegeben. Die Zusammenhänge zwischen parametrischen Modellunsicherheiten, Forderungen an den Regelkreis und Vorgaben für den offenen Regelkreis werden erläutert. Es wird demonstriert, wie aus der Einhaltung der abgeleiteten Vorgaben an den offenen Regelkreis auf die Erzielung robuster Regelgüte geschlossen werden kann. Das Kapitel wird mit einer kurzen Einführung in die QFT-Mehrgrößenregelung abgeschlossen. Im Verlauf dieses Kapitels soll die grundsätzliche Eignung der QFT zur Synthese von Reglern für FMS herausgestellt werden. Gleichzeitig werden die Beschränkungen der Methode verdeutlicht, so dass in diesem Kapitel die Motivation für die vorliegende Arbeit noch einmal herausgestellt wird.

**Modellbildung flexibler mechanischer Strukturen** Kapitel 3 enthält die Herleitung eines regelungstechnischen Wirkmodells aus FE-Modellen, inklusive der erforderlichen Schritte zur Integration von Beschreibungen der Sensorik, Aktuatorik und elektronischer Komponenten in das systemdynamische Gesamtmodell. Die Zusammenhänge zwischen diesem Wirkmodell und Modellen, die aus einer Reihe von Identifikationsverfahren gewonnen werden, werden diskutiert.

**Templateberechnung für flexible mechanische Strukturen** Kapitel 4 stellt die Templateberechnung für flexible mechanische Strukturen dar. Es wird eine Methode vorgestellt, die besonders vorteilhaft genutzt werden kann, wenn die Unsicherheiten der einzelnen Moden voneinander unabhängig sind. Eine Modifikation dieser Methode kann angewendet werden, wenn die modalen Unsicherheiten auch von globalen, auf alle Moden wirkenden, Parametern beeinflusst werden.

**Erstellung von Spezifikationen für den geschlossenen Regelkreis** Kapitel 5 beschreibt die Übertragung von im Zeitbereich gegebenen Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis in Betragsgrenzen für die komplexen Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises. Die hierzu vorgeschlagene Methodik kann als Grundlage für die in Abschnitt 1.1.6 geforderten Ansätze zur Erstellung bzw. Validierung von Anforderungen im Zeitbereich genutzt werden.

**Einhaltung von Spezifikationen als Optimierungsproblem** Kapitel 6 beinhaltet die Herleitung und Lösung von nicht-konvexen und konvexen Optimierungsproblemen zur Berechnung von Reglern aus den Betragsgrenzen und Templates. Die Lösung dieser Optimierungsprobleme stellt sicher, dass der geschlossene Regelkreis für alle zulässigen Modellunsicherheiten sämtliche gestellten Forderungen einhält.

**Anwendungsbeispiel** Kapitel 7 stellt die Anwendung der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Vorgehensweise an Hand eines Benchmarkbeispiels dar. Dabei sind Modelle und Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis vorgegeben. Auf Basis dieser Vorgaben werden die Modellanalyse, die Templateberechnung, die Übertragung von Anforderungen in Spezifikationen und die Synthese bis zur Verifikation durchgeführt.

## 2. EINFÜHRUNG IN DIE QUANTITATIVE FEEDBACK THEORY

Die Quantitative Feedback Theory (QFT) ist eine praxisorientierte Methodik zur Auslegung von linearen zeitinvarianten Reglern für linear-zeitinvariante, linear-zeitvariante und nichtlineare Regelstrecken. Die Methode basiert auf den „klassischen“ Verfahren zur Synthese im Frequenzbereich. Das Ziel der Nutzung der Quantitative Feedback Theory ist, die Einhaltung von Vorgaben an Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises, trotz erheblicher Modellunsicherheiten, zu erzwingen.

Die QFT bildet die Grundlage des in dieser Arbeit vorgeschlagenen Entwurfsverfahrens. Daher wird die Methode in diesem Kapitel, im Rahmen des Gesamtentwurfs von Regelungssystemen, vorgestellt.

### 2.1 *Der Designprozess von Regelungssystemen*

Die QFT ist als Methode aus der Praxis heraus entstanden. Dementsprechend fügt sie sich fast nahtlos in den von Yaniv [104] vorgestellten Entwurfsprozess ein. An Hand von Abbildung 1.1.2 wird der Entwurfsprozess hier ausführlicher diskutiert. Die Einordnung der Arbeitsschritte zum Entwurf eines Regelungssystems mit QFT in diesen Zusammenhang wird, unter Verweis auf die in diesem Kapitel enthaltenen ausführlichen Beschreibungen, kurz erläutert.

Grundlage des Entwurfs in einem industriellen Entwurfsprozess sind immer Vorgaben aus dem Pflichten- bzw. Lastenheft. Der Entwurf beginnt daher bei der Analyse dieser Vorgaben. Im Diagramm 1.1.2 ist der Beginn des Entwurfs durch den schwarzen Kreis in der Ecke links oben dargestellt.

*Schritt 1.) Block-Beschreibung:* Aus der Analyse der Vorgaben entsteht ein erster Entwurf, in dem die zur Erfüllung der Vorgaben erforderlichen Systemkomponenten festgelegt werden. Für die Reglersynthese folgt im ersten Schritt die Erstellung einer Blockbeschreibung dieser Teilsysteme und ihrer Zusammenarbeit im Gesamtsystem.

Zur Gewinnung der Blockbeschreibung gehört in der Regel die Erstellung systemdynamischer Modelle der Teilsysteme. Einige, für das Regelungssystem relevante Komponenten, wie z.B. Aktuatorik und Sensorik, sind zu diesem Zeitpunkt noch nicht endgültig ausgewählt. Ihre Beschreibung wird im vierten Entwurfschritt in das Systemmodell integriert. Es ist jedoch an dieser Stelle sinnvoll, „generische“ Aktuator und Sensormodelle zu erstellen und im dritten Schritt als Grundlage für die konkrete Auswahl zu verwenden.

*Schritt 2.) Regelungsziele:* Aus der im Pflichtenheft enthaltenen Beschreibung der Forderungen an den geschlossenen Regelkreis werden Regelungsziele abgeleitet. Zu spezifizieren sind die qualitativen (z.B. Auslegung auf Führungsverhalten, Störverhalten bei Störungen am Ausgang, etc.) und die zugehörigen quantitativen Vorgaben (z.B. Überschwingweite, Anregelzeit, Ausregelzeit, etc.). Die Berücksichtigung der Regelungsziele ist ein Kernstück der QFT, das in diesem

Kapitel in Abschnitt 2.3.5 dargestellt wird.

*Schritt 3.) Regelungshardware:* Der dritte Schritt des Entwurfsprozesses beinhaltet die Festlegung der zur Regelung erforderlichen Hardware, insbesondere der Sensoren, Aktuatoren, und der Hardware zur Signalverarbeitung. Der Entwurf intelligenter Strukturen erfordert neben der Auswahl von Aktuatoren und Sensoren auch die Festlegung der Platzierung.

*Schritt 4.) Wahres Modell und Entwurfsmodell:* Die Modellbildung umfasst die Erstellung eines „wahren Modells“ aus den Blockbeschreibungen. Das wahre Modell beinhaltet alle nichtlinearen und zeitvarianten Modellanteile, Rauschspektra und Driften.

Aus dem wahren Modell wird ein nominales Modell als Entwurfsmodell abgeleitet. Dieses wird als linear und zeitinvariant (LTI: linear-time-invariant) angenommen. Wichtig ist, dass die Modellstruktur des Entwurfsmodells geeignet ist, alle relevanten dynamischen Effekte zu beschreiben, ohne dass das Modell auf Grund hoher Komplexität den Entwurf unmöglich macht. Aus der „Differenz“ zwischen wahren Modell und Entwurfsmodell (QFT: „nominales Modell“) werden die Modellunsicherheiten berechnet. Bei Nutzung der QFT erfolgt dies üblicherweise in Form parametrischer Unsicherheiten (vgl. Abschnitt 2.3.3). Die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten im QFT-Entwurf erfolgt durch die Umrechnung der parametrischen Unsicherheiten in „Templates“, wie in Abschnitt 2.3.4 dargestellt, und durch die damit verbundene Berechnung der Bounds, die in Abschnitt 2.3.6 vorgestellt wird.

*Schritt 5.) Entwurf:* Im fünften Schritt erfolgt die Reglersynthese, zu der die folgenden Aspekte gehören:

- Reglerstruktur (ein oder zwei Freiheitsgrade, Kaskadierung, etc.),
- Festlegung der Reglerordnung und Parameter,
- ggf. Festlegung digitaler Komponenten.

*Schritt 6.) Simulative Verifikation* sowie *Schritt 7.) Experimentelle Verifikation:* In der sechsten Phase wird der erfolgte Entwurf schließlich überprüft. Dabei können zunächst rein numerische Simulationen verwendet werden (z.B. Monte-Carlo-Simulation). Bewährt sich das entworfene Regelungssystem hier, werden im siebten Schritt Echtzeitsimulationen (HIL: Hardware-in-the-Loop) und experimentelle Überprüfungen durchgeführt. Erst wenn die Regelung diese Tests besteht, wird das entworfene System in Serie produziert.

Treten in der Testphase Defizite des Entwurfs zu Tage, wird ein Iterationsschritt in den Entwurf eingefügt. Stellt sich dabei heraus, dass Anforderungen nicht erfüllt werden können, müssen entweder die Spezifikationen der Regelungsziele überarbeitet, oder die Regelungshardware um erforderliche Komponenten erweitert werden.

Durch die Anwendung der Methode wird schon früh im Entwurfsstadium deutlich, ob eine Spezifikation erfüllt werden kann [20]. Die Reglersynthese erfolgt zwar ebenfalls iterativ, die Anzahl der durchzuführenden numerischen Simulationen, Hardware-In-The-Loop (HIL)-Tests und Systemtests wird durch diese Analysemöglichkeiten verringert.

Anzumerken ist, dass die Synthese von Regelungssystemen nach wie vor sehr häufig am Ende des Entwurfs technischer Systeme steht, und auf die Bestimmung der Reglerstruktur und Reglerparameter reduziert wird. Dies ist im Sinne des eben beschriebenen iterativen Vorgehens ein unbefriedigender Zustand, da durch frühzeitiges Einbeziehen regelungstechnischer Belange die gewünschte Regelgüte mit geringerem Aufwand erzielt, oder bei gleichem Aufwand eine

höhere Regelgüte erzielt werden könnte [54]. Vom Standpunkt des Systemingenieurs aus, der den Gesamtentwurf im Kontext der Erfüllung von Anforderungen aus Pflichten- bzw. Lastenheft sehen muss, ist die Einbeziehung regelungstechnischer Aspekte im Gesamtentwurf schon bei der Analyse der Anforderungen notwendig.

## 2.2 Allgemeine Informationen zur QFT

### 2.2.1 Entwicklung der Methode

Die Quantitative Feedback Theory ist durch die Erweiterung der klassischen Entwurfsverfahren im Frequenzbereich entstanden. Die Grundlagen wurden in den späten fünfziger Jahren von Horowitz, unter anderem, aus den Arbeiten von Bode [9] abgeleitet. Eine erste umfangreiche Darstellung findet man in [49].

Obwohl die Methode für praxisrelevante Problemstellungen entwickelt wurde, und experimentell gute Ergebnisse erzielt werden konnten, fand sie wenig Akzeptanz. Einer der Hauptgründe dürfte sein, dass der Synthesevorgang auf grafischen Darstellungen der Regelgüte und der Modellunsicherheiten beruht. Es war ursprünglich erforderlich, die Modellunsicherheiten auf Transparentpapier im Nichols-Diagramm anzutragen, und die erforderlichen Korrekturen von Betrag und Phasenlage des offenen Regelkreises aus dem Diagramm abzulesen [49]. Anschließend musste der Regler mit „Versuch und Irrtum“ bestimmt werden. Diese Vorgehensweise wurde, aus heutiger Sicht sicherlich berechtigt, als umständlich angesehen.

Bis Ende der siebziger Jahre wurde die QFT für minimalphasige und nichtminimalphasige, lineare und nichtlineare Eingrößensysteme weiterentwickelt (z.B. [45, 46, 47]). In den achtziger Jahren entstanden Erweiterungen zur Mehrgrößenregelung [48, 105].

In den achtziger und neunziger Jahren wurden Programmpakete zur Nutzung der grafischen Datenverarbeitung entwickelt, die die Anwendung der QFT vereinfachen, z.B. die Matlab-QFT-Toolbox [10] oder das „MIMO-QFT-CAD-Package“ des Air Force Institute of Technology der US-Luftwaffe.

Obwohl eine Reihe experimenteller Untersuchungen die Leistungsfähigkeit der Methodik bewies (siehe z.B. Kapitel References in [50]) und durch Anwendung der QFT in Benchmarks gute Ergebnisse erzielt werden konnten [59, 18, 51], wird die Methode in der akademischen Welt noch immer nicht voll anerkannt. Einer der Gründe hierfür liegt möglicherweise in der Tatsache, dass die Bestimmung des Reglers, trotz aller Fortschritte in der Rechentechnik, vom Verfahren nicht unterstützt wird. Sie erfolgt „manuell“, durch Versuch und Irrtum, und fordert dem Entwerfenden großes Wissen und große Erfahrung in der Synthese von Regelungssystemen ab.

Viel kritischer werden in der Literatur aber der scheinbare Verzicht auf mathematische Präzision und die vermeintlichen Beschränkungen der Methode betrachtet [25]. Während die zweite Behauptung in einer Übersichtsdarstellung widerlegt werden [106], wurde in den neunziger Jahren am ersten Kritikpunkt sehr intensiv gearbeitet. Es entstanden Arbeiten zur Existenz von Reglern (siehe z.B. [74, 111]), und zu den mathematischen Hintergründen der Theorie (siehe z.B. [73]).

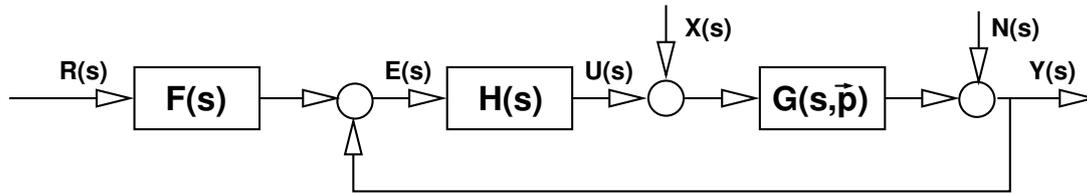


Abb. 2.2.1: Standardregelkreis

## 2.2.2 Zur Motivation der Quantitative Feedback Theory

### Erforderlichkeit von Regelungen

Ziel eines steuer- oder regelungstechnischen Eingriffs in ein dynamisches System ist immer, dem System ein bestimmtes Verhalten aufzuprägen. Dieses Verhalten ist a-priori festgelegt und kann vom System nicht von selbst erzielt werden.

Kann ein System exakte modelliert werden, z.B. durch die Übertragungsfunktion  $G(s)$ , und wirken auf das System keine Störungen, dann kann ein gewünschtes Systemverhalten  $\hat{T}(s)$  in den meisten Fällen durch eine Reihenschaltung mit der Steuerung  $H(s) = \hat{T}(s)/G(s)$  erreicht werden. Eine Regelung ist erst dann *erforderlich*, wenn auf Grund von Modellunsicherheiten oder von Störungen das gewünschte Systemverhalten nicht mehr mit einer Steuerung erzielt werden kann.

### Vorteile geschlossener Regelkreise

Im Folgenden wird ein linear-zeitinvarianter Standardregelkreis betrachtet, in den die von den Parametern  $\vec{p}$  abhängige Regelstrecke  $G(s, \vec{p})$  eingebettet ist (siehe Abbildung 2.2.1). Die Regelgröße  $Y(s)$  aus Abbildung 2.2.1 setzt sich im Bildbereich wie folgt zusammen:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1+G(s, \vec{p})H(s)}}_{S(s)} N(s) + \underbrace{\frac{G(s, \vec{p})}{1+G(s, \vec{p})H(s)}}_{T_D(s)} X(s) + \underbrace{\frac{G(s, \vec{p})H(s)F(s)}{1+G(s, \vec{p})H(s)}}_T R(s) . \quad (2.2.1)$$

Für die folgende Darlegung wird vorausgesetzt, dass der Regelkreis für alle auftretenden Variationen der Parameter  $\vec{p}$  des Streckenmodells  $G(s, \vec{p})$  stabil ist.

Ist  $|H(s)|$  für eine komplexe Frequenz  $s = j\Omega$  groß, dann wird der Betrag des gemeinsamen Nenners der Übertragungsfunktionen in Gleichung 2.2.1 ebenfalls groß. Es gilt also

$$|1 + G(s, \vec{p})H(s)| \gg 1 .$$

Unabhängig von den Parametern  $\vec{p}$  gilt dann für die Führungsübertragungsfunktion:

$$T(j\Omega) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(j\Omega, \vec{p})H(j\Omega)F(j\Omega)}{1 + G(j\Omega, \vec{p})H(j\Omega)} \approx F(j\Omega) .$$

Für  $F(j\Omega) \approx 1$  folgt also die Regelgröße  $Y(s)$  der Sollgröße  $R(s)$ . Gleichzeitig werden die Störungen am Ein- und Ausgang unterdrückt, da

$$T_D(j\Omega) = \frac{G(j\Omega, \vec{p})}{1 + G(j\Omega, \vec{p})H(j\Omega)} \ll 1 \quad \text{und} \quad S(j\Omega) = \frac{1}{1 + G(j\Omega, \vec{p})H(j\Omega)} \ll 1$$

gilt. Das System nimmt also, trotz eventueller Parametervariationen, ein erwünschtes Verhalten  $F(s)$  an und vermindert die Auswirkungen von Störungen.

### *„Kosten der Regelung“*

Den beschriebenen Vorteilen einer Regelung stehen eine Reihe von Nachteilen gegenüber. Der Größte ist sicherlich, dass durch die Rückführung auch Systeme instabil werden können, die bei offenem Regelkreis stabil sind. Weitere, nicht zu vernachlässigende Nachteile sind als Folgen des Bodeschen Sensitivitätsintegrals zu beschreiben:

Das Integral des Betrags der Sensitivität über die Frequenz ist konstant:

$$\int_0^{\infty} \log(|S(j\Omega)|) d\Omega = const . \quad (2.2.2)$$

Daher führt eine Verminderung der Sensitivität in einem Frequenzbereich zu einer Erhöhung in einem anderen Frequenzbereich. Selbst bei stabilem geschlossenen Regelkreis existieren Frequenzbereiche, in denen Störungen verstärkt werden. Enthält das Spektrum der Störgröße Frequenzanteile in diesem Frequenzband, dann ist das Störverhalten unter Umständen schlechter, als bei einem unregulierten System (siehe [64, 11]).

Dies ist insbesondere im hohen Frequenzbereich kritisch, da hier durch eine Regelung kaum noch Vorteile zu erzielen sind, andererseits aber die Verstärkung von Messrauschen Energie kostet. Im schlimmsten Fall führt die Verstärkung von Messrauschen zur Sättigung der Aktuatoren, durch die der gesamte Regelkreis nutzlos wird [50, 104]. Von Horowitz werden die aus dem Bodeschen Sensitivitätsintegral ableitbaren Nachteile einer Regelung als „Kosten der Regelung“ (cost of feedback) bezeichnet.

### *Zielstellung der Quantitative Feedback Theory*

Mit der Darstellung der Motivation der QFT können nun die der Methode zu Grunde liegenden Ideen in wenigen Sätzen ausgedrückt werden:

1. Eine Regelung ist dann, und nur dann, erforderlich, wenn auf Grund von Modellunsicherheiten und / oder Störungen das erwünschte Verhalten eines dynamischen Systems nicht durch eine Steuerung erzielt werden kann.
2. Die Rückführverstärkung ist genau so groß zu wählen, dass die Regelungsziele (Stabilität des geschlossenen Kreises, Einhaltung der geforderten Regelgüte) trotz der zu erwartenden bzw. vorhandenen Modellunsicherheiten eingehalten werden.
3. Die „Kosten der Regelung“ sind zu berücksichtigen. Insbesondere im hohen Frequenzbereich ist die Verstärkung so niedrig wie möglich zu wählen, um die aus dem Bodeschen Sensitivitätsintegral erwachsenden Folgen möglichst unbedeutend zu halten.

### 2.2.3 Möglichkeiten und Grenzen der QFT

Die grundlegende Methodik der QFT (z.B. [49, 50]) wurde auf lineare und zeitinvariante Systeme (LTI: Linear-Time-Invariant), lineare und zeitvariante Systeme (LTV: Linear-Time-Variant) sowie auf nichtlineare Systeme erweitert. In allen Fällen können sowohl Ein- als auch Mehrgrößenregler entworfen werden.

Nach Houpis sind die wesentlichen Vorteile der QFT die Folgenden [20]:

- Es erfolgt nur ein Entwurf über alle zulässigen Variationen der Parameter. Es ist daher nicht nötig, den Entwurf an Hand von Parameterkombinationen im Inneren des Parameterraumes zu wiederholen.
- Das Resultat des Entwurfs mit QFT ist robust gegen alle im Entwurf als zulässig betrachteten Parametervariationen.
- Es wird zu Beginn des Entwurfs deutlich, welche Regelungsziele erreichbar sind, und welche Entwurfsbeschränkungen existieren.
- Änderungen im Entwurf, auf Grund von Modifikationen der Anforderungen, sind schnell und einfach durchführbar.

Weiterhin werden in [20], auf Grund der Erfahrungen mit der Methode, die folgenden Eigenschaften der QFT postuliert:

- Im Vergleich zu anderen MIMO Entwurfsverfahren wird weniger Zeit zur Reglersynthese für alle zulässigen Parametervariationen benötigt.
- Die Struktur des Reglers bzw. Kompensators wird von vorneherein festgelegt.

Insbesondere über den vorletzten Punkt kann man streiten, da die QFT nur dann schnell und problemlos angewendet werden kann, wenn der Entwerfende ausreichend Erfahrung in der Anwendung klassischer Frequenzbereichsmethoden besitzt.

Die QFT leidet, wie alle Entwurfsverfahren, unter Einschränkungen der erzielbaren Regelgüte, die durch nichtminimalphasiges Systemverhalten oder Instabilität der Regelstrecke hervorgerufen wird (siehe z.B. [64, 29]). Wie aber schon in der Auflistung der Vorteile hervorgehoben wird, werden diese Beschränkungen durch korrekte Anwendung der Methode offensichtlich. Dies erlaubt dem Entwerfenden, seine Möglichkeiten realistisch einzuschätzen, und gegebenenfalls die Anforderungen an die Regelung sinnvoll zu modifizieren.

## 2.3 Beschreibung der Methodik

Die Vorgehensweise bei Anwendung der QFT kann besonders anschaulich an einem Beispiel erläutert werden. Die theoretischen Grundlagen sind aus Erweiterungen der klassischen Frequenzbereichsmethoden abgeleitet. Ihr Komplexitätsgrad ist nicht sehr hoch, so dass ihre Darstellung in die Beschreibung der Vorgehensweise integriert werden kann.

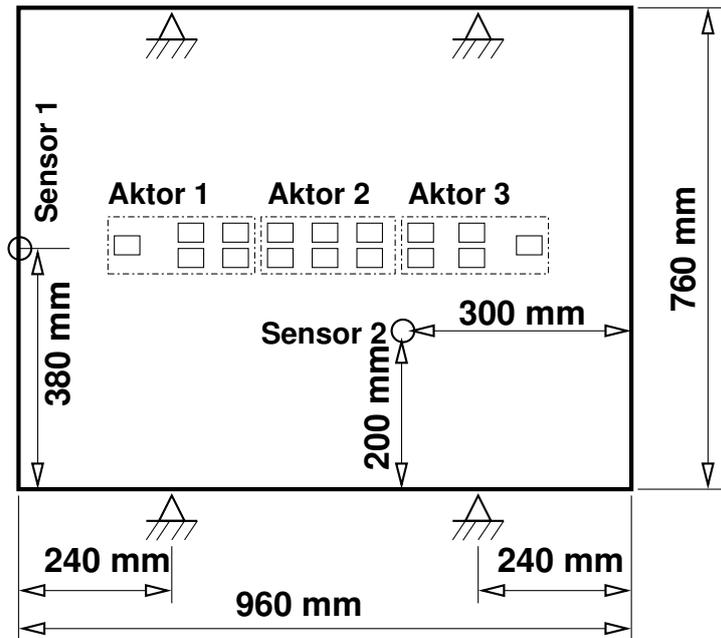


Abb. 2.3.1: Skizze der Faserverbundstruktur

In diesem Abschnitt wird der Entwurf eines Reglers zur Schwingungsunterdrückung mittels QFT exemplarisch durchgeführt. Dabei wird die in der QFT übliche Beschreibung parametrischer Unsicherheiten eingeführt, die gewünschte Regelgüte wird spezifiziert und in Vorgaben an den komplexen Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises übertragen. Der Abschnitt schließt mit der Reglerauslegung und der Verifikation der Einhaltung der Spezifikationen durch den geschlossenen Regelkreis.

Sämtliche hier dargestellten Ergebnisse sind in einer experimentellen Untersuchung im Rahmen des Innovationskollegs ADAMES der Otto-von-Guericke Universität Magdeburg erzielt worden. Die Beschreibung der genutzten Regelstrecke ist im Folgenden zu finden.

### 2.3.1 Untersuchte Struktur

#### *Mechanische Grundstruktur*

Die mechanische Grundstruktur ist eine CFK-Platte mit 960 mm Breite, 760 mm Höhe und einer Dicke von rund 2 mm. Die Laminatschichten sind in -45 / 0 / 45 Grad Richtung angeordnet.

Die Platte wurde an vier Punkten, auf 8 mm hohe Gumminoppen aufgelegt. Die Position der Gumminoppen ist in Abbildung 2.3.1 verdeutlicht.

Durch Auflegen und Fixieren von Stahlgewichten (bis zu 16 Stück, ca. 20 Gramm / Stück) auf der Plattenoberseite können die mechanischen Eigenschaften des Systems erheblich modifiziert werden. Für die durchgeführten Untersuchungen wurden Variationen der Kennkreisfrequenz des ersten Modes von rund 5 Radiant pro Sekunde (34 bis 39 rps) beobachtet.

### *Aktuatorik*

Auf die Platte wurden 16 Piezopatches (42mm x 27.5 mm x 0.2 mm) aufgeklebt, und so miteinander verschaltet, dass je zwei Gruppen zu fünf Patches und eine Gruppe zu sechs Patches angesteuert werden können. Für die durchgeführten Versuche wurde die Sechsergruppe als Sekundärpfad zur Einbringung von Störungen genutzt, während die Fünfergruppen als Aktuatoren auf dem Primärpfad verwendet wurden. Die Anordnung der Patches ist in Abbildung 2.3.1 skizziert.

Zur Ansteuerung der Patches wurden drei E-503 Leistungsverstärker der Firma Physik-Instrumente benutzt. Diese Verstärker weisen eine mittlere Leistung von 6 W und eine Maximalleistung von 14 Watt auf. Die Eingangsspannung kann von -2 bis 12 Volt variiert werden, die Ausgangsspannung liegt um einen Faktor 10 höher. Für die Anwendung wurde eine mittlere Spannung von 50 V am Ausgang eingestellt, so dass der Regler einen maximalen Hub von  $\pm 50$  V nutzen konnte.

### *Sensorik*

Als Sensoren wurden zwei optische Wegmesssysteme optoNCDT 1605 der Firma  $\mu\epsilon$  verwendet. Diese Sensoren erfassen einen maximalen Weg von  $\pm 1$  mm, und geben diesen mit einer Verstärkung von  $10V/mm$  als Spannung aus. Die Frequenzgrenze (3 dB Signalabschwächung) der Sensoren kann, je nach erforderlicher Messgenauigkeit, eingestellt werden. Für die vorliegenden Untersuchungen wurde 5 kHz eingestellt. Aus dieser Einstellung resultiert ein stationäres Rauschen von  $5 \mu$ . Die Positionierung der Sensorik kann aus Abbildung 2.3.1 entnommen werden.

### *Prozessor und Software*

Für die an der Platte durchgeführten Experimente wurden Hardware der Firma dSpace genutzt. Zur Signalverarbeitung und Regelung wurde ein DS1003 Prozessorboard mit einem Texas Instruments TMS320C40 Prozessor eingesetzt. Die Signalerfassung erfolgte auf einer DS2003 A/D-Wandlerkarte, die Signalausgabe mit einer DS2103 D/A-Wandlerkarte. Beide Karten weisen eine Auflösung von 16 bit auf.

Zur Reglersynthese und zur Auswertung der Experimente wurde Matlab genutzt, die Echtzeitimplementierung erfolgte unter Nutzung von Simulink und dem Matlab-Real-Time Workshop. Die Datenerfassung und -speicherung wurde mittels der dSpace-Control-Desk Software durchgeführt.

#### *2.3.2 Gesamtvorgehensweise*

Zur Reglersynthese mit QFT müssen

- die Modellbeschreibung, bestehend aus dem nominalen Modell und der Beschreibung der parametrischen Modellunsicherheit (vgl. Abschnitt 2.3.3), und
- die Vorgabe des gewünschten Systemverhaltens (Abschnitt 2.3.5)

vorliegen. Die parametrischen Modellunsicherheiten werden in Form von *Templates* in den Frequenzbereich übertragen. Templates beschreiben die, durch die Modellunsicherheiten verursachten, möglichen Abweichungen des komplexen Frequenzganges des *wahren* ORK vom komplexen Frequenzgang des *nominalen* ORK.

Aus den Vorgaben des gewünschten Systemverhaltens werden Ober-, und gegebenenfalls Untergrenzen für den Betrag des zur Vorgabe gehörenden Frequenzganges des GRK berechnet. Diese werden in Grenzen für den Frequenzgang des *offenen Regelkreises* umgerechnet (vgl. Abschnitt 2.3.6). Die resultierenden *Boundaries* teilen die komplexe Ebene in Bereiche, in denen die komplexen Frequenzgänge der jeweils von den Modellunsicherheiten beeinflussten offenen Regelkreise für die jeweilige Frequenz liegen dürfen, und in „verbotene“ Bereiche (siehe Abschnitt 2.3.6).

Die Boundaries entsprechen den „M-Kreisen“ bzw. „Linien konstanter Verstärkung“ aus der klassischen Frequenzbereichsmethodik“ [89, 26]. Sie werden unmittelbar aus dem Zusammenhang zwischen dem komplexen Frequenzgang des offenen Regelkreises  $L(j\Omega)$  und dem Betrag des komplexen Frequenzganges einer Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises berechnet (siehe z.B. Gleichung 2.3.3). Die Boundaries sind für alle zulässigen Modelle des offenen Regelkreises gültig. Liegen für die zu einer Boundary gehörenden Frequenz sowohl der offene Regelkreis als auch alle Punkte des zugehörigen Templates in der durch die Boundary begrenzten zulässigen Menge, dann hält der geschlossene Regelkreis die Vorgabe im Frequenzbereich ein. Werden die Boundaries für alle Frequenzen eingehalten, erfüllt der geschlossene Regelkreis alle Anforderungen an das gewünschte Systemverhalten.

Da der Entwurf mit QFT grafisch, meistens in der logarithmisch-komplexen Ebene an Hand des Nichols-Diagramms, erfolgt, wird die Darstellung der Templates zur Überprüfung der Einhaltung der Boundaries unübersichtlich. Deshalb werden Templates und Boundaries zu den sogenannten *Bounds* verrechnet (siehe Abschnitt 2.3.6). Bounds definieren zulässige Mengen für den komplexen Frequenzgang des *nominalen* offenen Regelkreises. Liegt dieser für eine untersuchte Frequenz innerhalb der, durch die Bound begrenzten, zulässigen Menge, werden die Vorgaben für diese Frequenz eingehalten. Werden die Bounds vom nominalen Frequenzgang für alle Frequenzen eingehalten, dann erfüllt der geschlossene Regelkreis sämtliche Anforderungen.

Erfolgt die Berechnung von Templates, Boundaries und Bounds mittels eines Software-Tools, wie z.B. der QFT-Toolbox für Matlab, werden vom Entwerfenden drei Arbeitsschritte erwartet:

- Festlegung des nominalen Modells und der zulässigen Parametervariationen.
- Definition der Forderungen an den geschlossenen Regelkreis.
- Bestimmung des Reglers so, dass der komplexe Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises innerhalb der durch die Bounds begrenzten zulässigen Wertemengen liegt.

### 2.3.3 Beschreibung parametrischer Unsicherheiten

Systembeschreibungen in der QFT sind im Eingrößenfall in Form von Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{z_r s^r + z_{r-1} s^{r-1} + \dots + z_2 s^2 + z_1 s + z_0}{s^q + n_{q-1} s^{q-1} + \dots + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}$$

( mit  $r \leq q$  - properes System) gegeben.

In allgemeinen Darstellungen werden die reellen unsicheren Parameter in einem Vektor

$$\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_r]^T$$

zusammengefasst. Es wird vorausgesetzt, dass die Parameter in dieser Darstellung voneinander unabhängig sind. Der Vektor  $\vec{p}$  spannt einen  $r$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^r$  auf.

**Definition 2.3.1** Gegeben sind die voneinander unabhängigen reellen Parameterintervalle

$$p_k \in \mathbb{P}_k = [p_k^{MIN}, p_k^{MAX}]$$

mit  $k = 1, 2, \dots, r$ . Die Menge aller zulässigen Parameterkombinationen ergibt sich als Skalarprodukt der  $r$ -Intervalle

$$\mathbb{P}_{zP} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \dots \times \mathbb{P}_r.$$

Sie wird als **Hyperrechteck (der zulässigen Parameter)** bezeichnet. □

Parametrische Unsicherheiten wirken sich auf die Koeffizienten von Zähler- bzw. Nennerpolynom aus. In vielen technisch relevanten Problemen hängen die Koeffizienten auf eine bestimmte Art und Weise von den Parametern ab, für die die Templateberechnung vereinfacht werden kann (siehe z.B. [91, 8, 4]).

**Intervallsysteme:** Im einfachsten Fall ist jeder der Koeffizienten der Polynome ein eigener Parameter. Zähler- und Nennerpolynom heißen dann Intervallpolynome. Systeme, deren Zähler- und Nennerpolynom Intervallpolynome sind, werden als *Intervallsysteme* bezeichnet.

**Affin parameterabhängige Systeme** Eine Verallgemeinerung der Intervallpolynome ergibt sich, wenn die Koeffizienten des Polynoms als Linearkombination von Parametern berechnet werden, wenn also

$$p(s) = \sum_{k=1}^K a_k \cdot s^k = \sum_{k=1}^K \underbrace{\left( \sum_{m=1}^M \lambda_{km} \cdot p_m \right)}_{a_k} s^k \quad (2.3.1)$$

gilt. Ein solches Polynom heißt linear oder affin parameterabhängig. Ein System dessen Zähler- und Nennerpolynom affin parameterabhängig sind, heißt *affin parameterabhängiges System*.

**Multiaffin parameterabhängige Systeme** Gehen in die Polynomkoeffizienten Linearkombinationen von Produkten der Parameter ein, dann heißt das zugehörige Polynom multiaffin. Betrachtet man nur den Parameter  $p_l$  eines multiaffinen Polynoms als variabel und alle weiteren Parameter  $p_m$ ,  $m \neq l$  als fix, dann entsteht für jedes  $l = 1, 2, \dots, m$  jeweils ein affines Polynom.

Ein Beispiel für multiaffine Polynome ist

$$p(s) = p_0 + p_1 \cdot s + p_2 \cdot p_3 \cdot s^2.$$

Mit  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 2$  und  $p_2 = 3$  ergibt sich das affine Polynom  $p(s) = 1 + 2s + 3p_3^2$ , für  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 2$  und  $p_3 = 3$  resultiert das affine Polynom  $p(s) = 1 + 2s + 3p_2^2$ . Setzt man diese Vorgehensweise analog fort, zeigt sich, dass das obige Polynom tatsächlich multiaffin ist [91].

Durch eine relativ einfache Manipulation der Parameter kann aus einem multiaffin parameterabhängigen Polynom ein affin parameterabhängiges Polynom erzeugt werden. Man ersetzt alle Produkte von Parametern durch jeweils einen „künstlichen“ Parameter, dessen zulässiges Wertintervall vom Produkt der minimal zulässigen Parameterwerte nach unten und vom Produkt der maximal zulässigen Parameterwerte nach oben begrenzt wird. Für das obige Beispiel wird also der Term  $p_2 \cdot p_3 \cdot s^2$  durch  $q_2 \cdot s^2$  ersetzt, mit  $q_2 \in [p_2^{MIN} \cdot p_3^{MIN}, p_2^{MAX} \cdot p_3^{MAX}]$ .

### Anwendung auf die Beispielstrecke

Das hier betrachtete Entwurfsbeispiel (vgl. Abschnitt 2.3.1) ist durch ein Intervallsystem beschrieben:

$$G(s) = V \cdot \frac{s^2 + 2\mu s + \chi^2}{s^2 + 2\delta s + \omega^2}$$

mit  $V \in [0.00503, 0.00543]$ ,  $\mu \in [-0.077248, -0.019462]$ ,  $\chi \in [52.6, 56.8]$ , sowie  $\delta \in [0.003078, 0.04257]$  und  $\omega \in [34.2, 38.7]$ .

#### 2.3.4 Berechnung der Abweichungen vom nominalen Wert: Templates

Die Anwendung der QFT erfordert zur Reglersynthese die Darstellung des offenen Regelkreises im Frequenzbereich. Die parametrischen Unsicherheiten müssen daher auf die komplexe Ebene (Nyquist-Diagramm), bzw. die logarithmisch komplexe Ebene (Nichols-Diagramm) abgebildet werden. Diese Abbildung ist in vielen Fällen mit hohem Rechenaufwand verbunden, Möglichkeiten zur Vereinfachung werden daher immer wieder in Veröffentlichungen diskutiert (z.B. [91, 19, 5, 31, 42]).

**Definition 2.3.2** Gegeben ist die parameterabhängige Übertragungsfunktion  $G(s, \vec{p})$ , deren zulässige Parameter durch die Menge  $\mathbb{P}_{zP}$  gegeben sind:

$$\vec{p} \in \mathbb{P}_{zP} .$$

Für eine komplexe Frequenz  $s = j\Omega_k$  heißt die aus der Abbildung der Menge  $\mathbb{P}_{zP}$  auf die komplexe Ebene entstehende Menge

$$\mathbb{T}(G(j\Omega_k, \mathbb{P}_{zP})) = \{t \mid t = G(j\Omega, \vec{p}), \vec{p} \in \mathbb{P}_{zP}\}$$

ein **Template**. □

#### Templateberechnung durch Anwendung der Standardmethode: Gridding

Die Intervalle der zulässigen Parameter enthalten jeweils unendlich viele Elemente. Für die Berechnung mit einem Computer ist jedoch eine endlich abzählbare Menge erforderlich, so dass Approximationen notwendig werden. Die einfachste Art der Approximation von Templates ist das sogenannte „Gridding“. Die Intervalle der zulässigen Parameterwerte werden dabei jeweils durch eine Anzahl Stützstellen im Intervallinneren und auf den Intervallrändern repräsentiert:

$$\mathbb{P}_k = [p_k^{MIN}, p_k^{MAX}] \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}_k = \{p_{k1} = p_k^{MIN}, p_{k2}, p_{k3}, \dots, p_{kq-1}, p_{kq} = p_k^{MAX}\} .$$

Das Hyperrechteck der unsicheren Parameter wird damit wie folgt angenähert:

$$\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \dots \times \mathbb{P}_s\} \longrightarrow \hat{\mathbb{P}} = \{\hat{\mathbb{P}}_1 \times \hat{\mathbb{P}}_2 \times \dots \times \hat{\mathbb{P}}_s\} .$$

Für jeden Punkt der Approximation  $\hat{\mathbb{P}}$  resultiert eine Übertragungsfunktion. Berechnet man für eine Frequenz  $\Omega$  den Wert der komplexen Frequenzgänge aller so erhaltenen Übertragungsfunktionen, erhält man eine abzählbar endliche Punktmenge

$$\mathbb{T}(G(j\Omega, \hat{\mathbb{P}}))$$

in der komplexen Ebene, die das zur Frequenz  $\Omega$  gehörende Template  $\mathbb{T}(G(j\Omega, \mathbb{P}))$  approximiert.

Die Anzahl der für ein Parameterintervall erforderlichen Stützstellen hängt ganz wesentlich davon ab, wie genau die Templateapproximation, bzw. die anschließenden, darauf basierenden Berechnungen sein müssen. In der praktischen Anwendung genügen oft grobe Approximationen. Die Festlegung der Anzahl verwendeter Stützstellen bleibt eine Aufgabe, für die der Entwerfende ein Gespür entwickeln muss.

Ein wesentlicher Vorteil des Gridding ist, dass die Methode für alle denkbaren Zusammenhänge zwischen physikalischen Parametern und den Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom anwendbar ist. Der Hauptnachteil liegt im hohen numerischen Aufwand, der schon für wenige Parameter nicht mehr tragbar ist. Sollen z.B. die fünf Intervalle der hier betrachteten mechanischen Struktur mit 10 Stützstellen approximiert werden, muss für jede Frequenz der komplexe Frequenzgang 100.000 Mal ausgewertet werden, bei 50 Stützstellen sind 312.500.000 Auswertungen erforderlich. Für flexible mechanische Strukturen, die in der Regel eine große Anzahl Modellparameter aufweisen, ist Gridding daher keine sinnvolle Lösung.

#### *Andere Ansätze zur Berechnung*

Für Intervallsysteme und affin parameterabhängige Systeme können die Berechnungen der Templates wesentlich vereinfacht werden [5, 31] (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Vereinfachungen für multiaffine Systeme werden meist durch Überabschätzung [60, 91] erzielt. Von Gutman et.al. [42] stammt der Ansatz, Templates faktorisierter Darstellungen der Übertragungsfunktionen aufzusummieren.

In Abschnitt 4.2.4 werden die Anwendung dieser Ansätze auf flexible mechanische Strukturen und die dabei auftretenden Schwierigkeiten diskutiert. Ausgehend von den in der Strukturmechanik gebräuchlichen modalen Systembeschreibungen werden in Kapitel 4, unter Nutzung von vereinfachenden Berechnungen, geeignete Methoden zur Templateberechnung für FMS hergeleitet.

#### *Anwendung auf die Beispielstrecke:*

Mit Hilfe der *Matlab* QFT-Toolbox wurden aus den gegebenen Unsicherheitsdaten Templates für die Erregerfrequenzen 1; 3; 5; 10; 34,2; 38,7; 50 und 100 Radiant pro Sekunde berechnet. Dazu wurden für die Verstärkung  $V$  zwei Stützstellen, für  $\chi$  5, für  $\mu$  3, für  $\delta$  3 und für  $\omega$  10 Stützstellen verwendet. Für jede Frequenz wurden also 900 Auswertungen des komplexen Frequenzganges erforderlich. Das Ergebnis der Berechnungen ist in Abbildung 2.3.2 zu sehen. Von Interesse sind die Templates rund um die Resonanzfrequenz (34.2 rps bis 38.7 rps), da in diesem Frequenzbereich schon geringe Variationen der Kennkreisfrequenz des Modells zu großen Änderungen der zugehörigen Phasenlage führen. Die Anzahl der Stützstellen im Intervall muss daher ausreichend groß gewählt werden, wenn die Templates als einfach zusammenhängende Mengen erkennbar sein sollen. In Abbildung 2.3.2 ist eben dies nicht der Fall. Für die im Rest des Kapitels beschriebenen weiteren Rechengänge sind diese Templates als Grundlage nicht geeignet. Sie wurden für die weiteren Berechnungen durch Templates ersetzt, die mit einer deutlich größeren Anzahl Stützstellen berechnet worden sind.

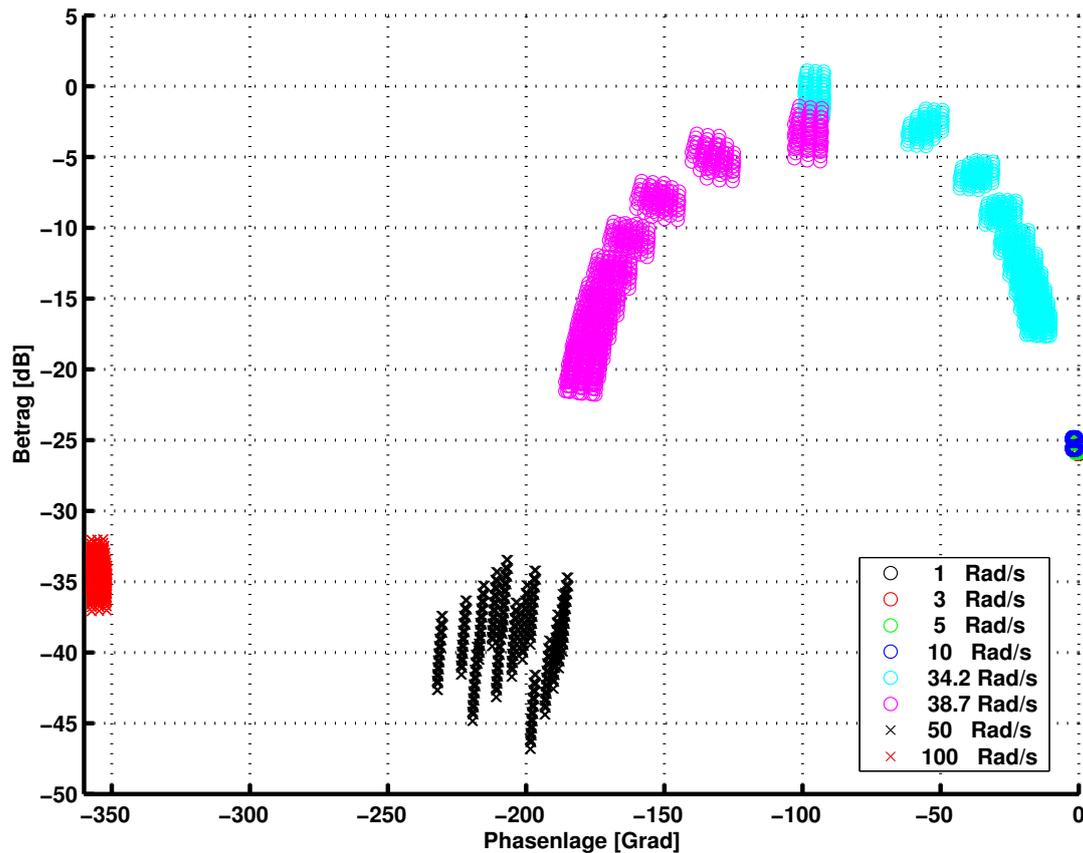


Abb. 2.3.2: Templates der betrachteten mechanischen Struktur

### 2.3.5 Forderungen an den geschlossenen Regelkreis

Neben der Stabilität werden weitere Forderungen an das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises gestellt.

Die folgenden Definitionen sollen eine eindeutige Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Ebenen der Darstellung von Forderungen an den GRK ermöglichen:

- Im Zeitbereich beschriebene Forderungen an das Verhalten eines Signalpfades werden als *Vorgaben* (an den GRK) bezeichnet.
- Vorgaben an einen Signalpfad des Systems (eine Übertragungsfunktion), die im Frequenzbereich beschrieben sind, werden als *Spezifikation* bezeichnet.
- Für eine einzelne Frequenz ergibt sich aus den Spezifikationen und Vorgaben eine Beschränkung des maximalen Betrags (ggf. auch minimalen Betrags), den der komplexe Frequenzgang nicht überschreiten (bzw. unterschreiten) darf. Eine solche Beschränkung heißt *Betragsgrenze*.
- Die Menge aller Anforderungen und Spezifikationen eines Systems heißt *Regelungsziel*.
- Der Begriff *Forderung* wird für allgemeine Beschreibungen, z.B. im Pflichtenheft, genutzt.

Üblicherweise werden aus den Forderungen an das System Vorgaben und Spezifikationen abgeleitet, die anschließend in Betragsgrenzen umgerechnet werden.

### *Vorgaben im Zeitbereich*

Vorgaben an die Regelgüte werden in der QFT im Zeitbereich durch Beschränkungen der Systemantwort auf bestimmte Eingangssignale definiert. Die betrachtete Systemantwort ist dabei zumeist identisch mit der Messgröße  $y(t)$ , Eingangssignale sind die Führungsgröße  $r(t)$  (Führungsverhalten) oder Störgrößen  $x(t)$  (Störverhalten).

Vorgaben an das Störverhalten benötigen lediglich eine Obergrenze, für ein bestimmtes Anregungssignal  $x(t)$ , z.B. einen Sprung, genügt daher die Definition:

$$|y(t)| \leq b(t) .$$

Vorgaben bezüglich des Führungsverhaltens werden hingegen, ebenfalls bezogen auf ein definiertes Anregungssignal  $r(t)$ , mit Ober- und Untergrenze definiert [50, 104]:

$$a(t) \leq |y(t)| \leq b(t) .$$

Das zu erzielende Führungsverhalten kann auch durch Modellvorgabe [104]

$$|y(t) - y_M(t)| \leq b_M(t)$$

beschrieben werden, worin  $y_M$  die Systemantwort eines Referenzmodells ist, dessen Verhalten durch den geschlossenen Regelkreis näherungsweise eingehalten werden soll. Die maximal zulässige Abweichung vom Modellverhalten ist dann durch  $b_M$  definiert.

Da die Beschreibung der real im Betrieb zu erwartenden Störgrößen  $x(t)$  a-priori schwierig, wenn nicht unmöglich ist, werden Approximationen in Form von Testsignalen gewählt. Üblich sind stochastische (z.B. pseudo-binäres Rauschen) und / oder transiente Signale (z.B. Dirac-Impuls, Rechteck).

Anregungssignale für die Spezifikation der Führungsübertragung sind besser darstellbar, da sie im Entwurf des Gesamtsystems vorgegeben werden. In den meisten Fällen werden die Antworten auf Sprünge oder Rampen definiert.

### *Übertragung der Anforderungen in den Frequenzbereich*

**Modellbasierte Übertragung:** Die am häufigsten verwendeten und beschriebenen Methoden zur  $t-\Omega$ -Übertragung, also zur Berechnung von Betragsgrenzen aus Forderungen, sind die modellbasierten Methoden. Eine auf Störübertragungen anwendbare modellbasierte  $t-\Omega$ -Übertragung wird in Kapitel 5 dargestellt. Für das hier vorgestellte Anwendungsbeispiel wurde die modellbasierte Übertragung nicht genutzt. Eine ausführliche Diskussion der Methoden ist daher an dieser Stelle nicht erforderlich.

Es bleibt anzumerken, dass die modellbasierte Übertragung für Modelle höherer Ordnung nicht ohne Schwierigkeiten angewendet werden kann. Daher muss eine praktikable Vorgehensweise für FMS gefunden werden. Diese ist ebenfalls in Kapitel 5 beschrieben.

**Anwendung von Integraltransformationen:** Im Zuge der in diesem Kapitel beschriebenen Untersuchungen wird die Nutzung der Fast-Fourier-Transformation zur  $t - \Omega$ -Übertragung angewandt. Diese Methode ist zwar sehr einfach anzuwenden, weist aber für komplexere Systeme Nachteile auf und wurde daher nur für die in diesem Kapitel beschriebenen Untersuchungen genutzt. Sie wird der Vollständigkeit halber in diesem Abschnitt beschrieben.

Da sich Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis  $|y(t)| \leq \hat{y}(t)$  auf jeweils ein bestimmtes Anregungssignal  $u(t)$  beziehen, können das Anregungssignal und die Obergrenze durch die diskrete Fouriertransformation in eine Schätzung für die maximale Verstärkung der zugehörigen Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises umgerechnet werden.

Im einfachsten Fall wird die Schätzung des komplexen Frequenzganges durch die folgende Formel gewonnen [52]

$$\hat{G}(j\Omega) = \frac{\hat{Y}(j\Omega) \cdot \hat{U}^*(j\Omega)}{\hat{U}(j\Omega) \cdot \hat{U}^*(j\Omega)},$$

worin  $\hat{U}$  und  $\hat{Y}$  die durch diskrete Fouriertransformation aus  $u(t)$  bzw.  $y(t)$  hervorgegangenen Frequenzgangsschätzungen darstellen. Durch den hochgestellten Stern wird die konjugiert Komplexe gekennzeichnet.

Die dargestellte Berechnung kann durch andere Methoden zur Schätzung von Frequenzgängen, wie z.B. der von Ljung [61] beschriebenen ETFE (experimental transfer-function estimate) ersetzt werden.

Der zulässige Betrag entspricht für jede Frequenz dem Betrag der Schätzung  $\hat{G}$  des komplexen Frequenzganges.

### *Forderungen an die Stabilität des Regelkreises*

Die Stabilität eines LTI-Systems wird von der Lage der Pole bestimmt, also von der Lage der Nullstellen des Nennerpolynoms. Für parameterabhängige Systeme existiert mit dem Nullausschlussprinzip (Zero-exclusion principle) eine grafische Methode, mit der aus der Lage der Nullstellen des Nennerpolynoms die Stabilität bestimmt werden kann [1, 91].

Angewandt auf die QFT besagt das Nullausschlussprinzip: Der geschlossene Regelkreis ist robust stabil, wenn der nominale Regelkreis stabil ist, und die Templates des offenen Regelkreises für keine Frequenz den Punkt  $(-1, 0)$  der komplexen Ebene enthalten [50]:

$$1 + \frac{Z_L(\vec{p}, s)}{N_L(\vec{p}, s)} = 1 + L(\vec{p}, s) \neq 0 \quad \forall \Omega \geq 0, \vec{p} \in \mathbb{P}, \quad (2.3.2)$$

Abgeleitet von diesem grafischen Verfahren werden in der QFT zur Sicherstellung der Stabilität hauptsächlich Obergrenzen der Störübertragungsfunktion definiert:

Ist Gleichung 2.3.2 erfüllt, dann folgt daraus, dass der Betrag der Inversen  $1/(1+L)$  immer nach oben beschränkt ist, dass also eine Zahl  $k$  existiert, für die

$$\left| \frac{1}{1 + L(\vec{p}, s)} \right| \leq k \quad \forall \Omega \geq 0, \vec{p} \in \mathbb{P}$$

gilt. Die Definition einer Obergrenze für den Betrag der Sensitivitätsfunktion definiert daher eine Forderung nach Stabilität des Systems.

Die für die Unterdrückung von Störungen an FMS relevanten Signalpfade des GRK sind immer als Reihenschaltung einer Übertragungsfunktion des ORK mit der Sensitivitätsfunktion darstellbar. Für stabilen ORK ist eine Forderung an die Beschränktheit der Störübertragungsfunktion dann immer auch eine Forderung an die Beschränktheit der Sensitivitätsfunktion, so dass die Forderung nach Stabilität des GRK implizit enthalten ist. Gelingt der Reglerentwurf so, dass alle Forderungen an die Störunterdrückung eingehalten werden, und ist der nominale geschlossene Regelkreis stabil, ist der GRK robust stabil.

### Anwendung auf die Beispielstrecke

Als Störgröße wird eine Rechteckschwingung

$$d(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & 4 \leq t \leq 6 \\ -1 & 6 \leq t \leq 8 \end{cases},$$

die sich nach acht Sekunden wiederholt, auf die mittlere der drei Aktuatorgruppen gegeben. Das System antwortet mit einer Überlagerung aus einem der Anregung proportionalen Signal mit den Sprungantworten der Eigenmoden. Durch die Variation der Masse werden die Sprunghöhe und die Kennkreisfrequenzen verändert.

Ziel der Regelung ist die Bedämpfung der Schwingungen und die Unterdrückung der quasi-stationären Auslenkung. Die Spezifikation des gewünschten Verhaltens erfolgt in Form abschnittsweise linearer Obergrenzen für das Zeitverhalten. Im Zeitbereich zwischen Null und Acht Sekunden wird

$$|y_{max}(t)| = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0.17 & 2 \leq t \leq 2.3 \\ 0.17 - (t - 2.3) \cdot 0.466 & 2.3 \leq t \leq 2.6 \\ 0.03 - (t - 2.6) \cdot 0.075 & 2.6 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

als Vorgabe definiert, die Vorgabe wiederholt sich nach Ablauf von acht Sekunden. Die grafische Darstellung dieser Vorgaben ist, zusammen mit der Darstellung von vier exemplarischen Systemantworten, in Abbildung 2.3.3 zu finden.

Die Vorgabe für das Zeitverhalten wurde dabei unter Nutzung der *ETFE*-Routine aus der Matlab-Identification Toolbox in die Spezifikation für die Störübertragung umgerechnet, wie dies in Abschnitt 2.3.5 beschrieben ist. Abbildung 2.3.4 zeigt das Ergebnis dieser Berechnung zusammen mit den Frequenzgängen der vier exemplarischen Regelstrecken.

### 2.3.6 Forderungen an den nominalen offenen Regelkreis

Grundlage der Reglersynthese mit der QFT ist die Beeinflussung des offenen Regelkreises. Die aus den Vorgaben berechneten Spezifikationen müssen daher in Beschränkungen der Lage des komplexen Frequenzganges des ORK übertragen werden. Die Übertragung erfolgt durch Erweiterung der z.B. in [26] beschriebenen M-Kreise, die Ortskurven konstanter Verstärkung in der komplexen Ebene darstellen.

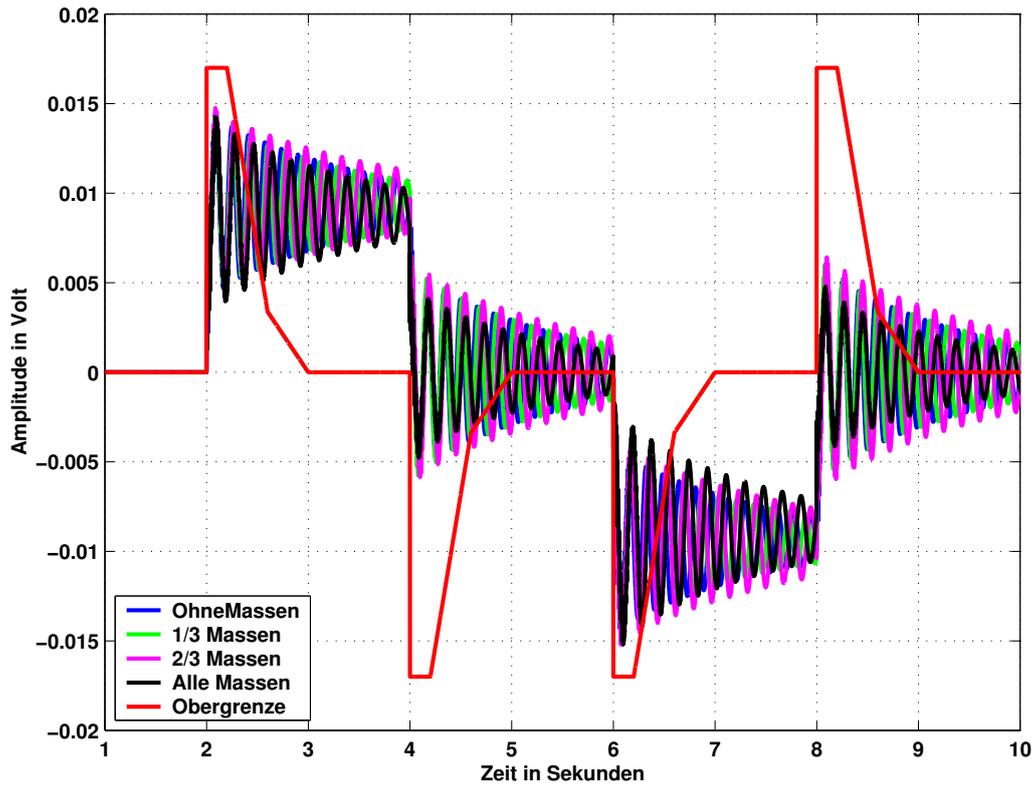


Abb. 2.3.3: Systemantwort und zulässige Grenze im Zeitbereich

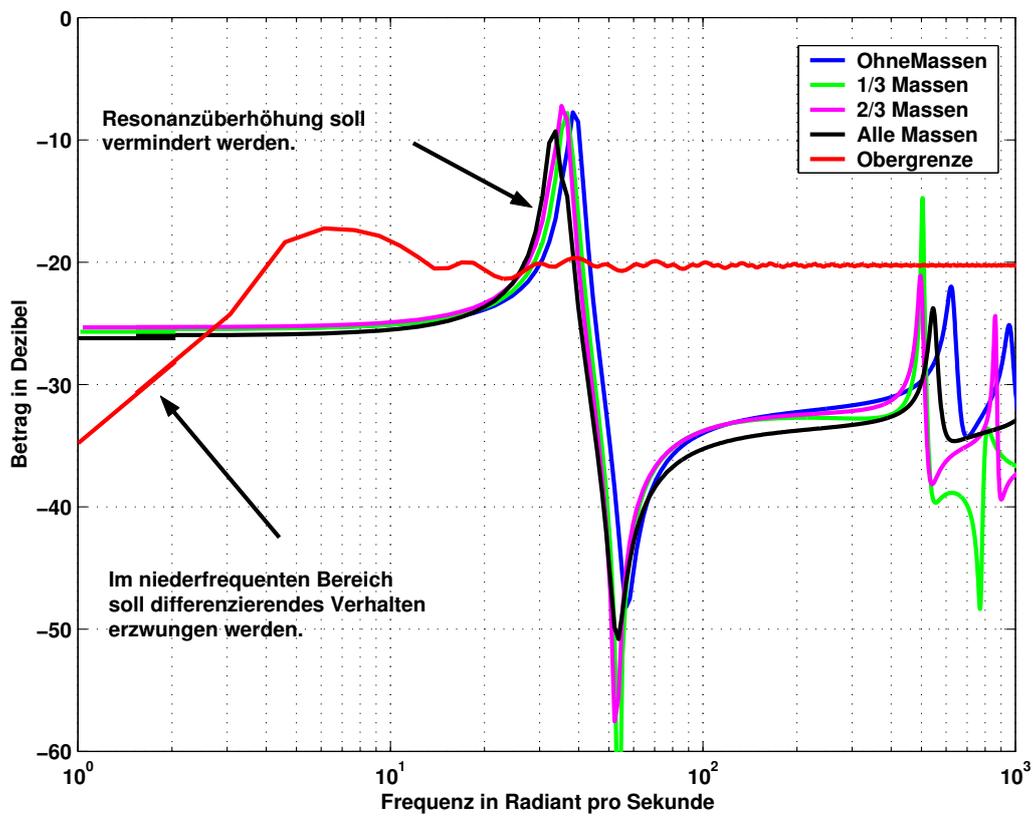


Abb. 2.3.4: Systemantwort und zulässige Grenze im Frequenzbereich

### Ortskurven konstanter Verstärkung: M-Kreise oder Boundaries

Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die Definition der Sensitivitätsfunktion (vgl. Gleichung 2.2.1, Abbildung 2.2.1):

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Ist der komplexe Frequenzgang des ORK durch  $L = \hat{l}e^{j\alpha}$  gegeben, dann ist der komplexe Frequenzgang

$$S = \frac{1}{(1 + \hat{l}e^{j\alpha})} \quad \text{mit dem Betrag} \quad |S| = \sqrt{\frac{1}{(1 + \hat{l}e^{j\alpha})(1 + \hat{l}e^{-j\alpha})}}.$$

Die Ortskurve aller Punkte, für die  $|S| = M = \text{const}$  gilt, ist durch

$$|1 + L| = \left(\frac{1}{M}\right) \quad (2.3.3)$$

beschrieben, was einem Kreis mit Mittelpunkt  $(-1, 0)$  und Radius  $1/M$  entspricht.

Liegt der Frequenzgang  $L(\vec{p}_p, j\Omega)$  innerhalb des in Gleichung 2.3.3 als Berandung dargestellten Kreises, folgt daraus, dass der Betrag der Sensitivitätsfunktion größer als  $M$  wird. Der Kreis stellt also eine „verbotene Menge“ für den Frequenzgang  $L(\vec{p}_p, j\Omega)$  dar (vgl. Abbildung 2.3.5: blau dargestellter Kreis stellt die verbotene Menge dar). Der Frequenzgang muss für die betrachtete Frequenz außerhalb dieses Kreises liegen, wenn die zu Grunde liegende Spezifikation eingehalten werden soll.

In der QFT ist die Darstellung in der logarithmisch komplexen Ebene üblicher, also die Darstellung der Amplitude in Dezibel über der Phasenlage  $\phi$  in Grad. Jeder Punkt, der die Definitionsgleichung der Ortskurve erfüllt, kann in diese Darstellungsform überführt werden:

$$L_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad \phi = \frac{180}{\Pi} \arctan \left( \frac{y}{x} \right).$$

Durch die Umrechnung der Kurven von der komplexen Ebene des Nyquist-Diagramms in die logarithmisch komplexe Ebene des Black-Diagramms werden die Ortskurven verzerrt. Statt Kreisen um den kritischen Punkt entstehen Ellipsen und wellenförmige offene Kurven (ähnlich den Kurven aus den Abbildungen 2.3.6 und 2.3.7) [50, 104].

Die hier vorgestellte Herleitung ist an die Sensitivitätsfunktion gebunden, analoge Vorgehensweisen sind jedoch auch für andere Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises durchführbar. Allgemein kann die folgende Definition getroffen werden:

**Definition 2.3.3** Gegeben sind die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises  $G_{GRK}(s)$  und die Übertragungsfunktion  $L(s)$  des offenen Regelkreises. Zwischen den beiden Übertragungsfunktionen besteht ein eindeutiger Zusammenhang  $G_{GRK}(s) = G_{GRK}(L(s))$ . Für die Übertragungsfunktion des GRK besteht eine Beschränkung des Betrags, die durch die Ungleichung

$$|G_{GRK}(j\Omega)| \leq k_a$$

oder durch die Ungleichungen

$$k_a \leq |G_{GRK}(j\Omega)| \leq k_b$$

ausgedrückt wird.

Die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{j\Omega}$ , für die die jeweilige Ungleichung erfüllt ist, heißt in der QFT „Boundary“. □

Um an Hand der Boundaries zu überprüfen, ob ein Regler für ein gegebenes System die der Boundary zu Grunde liegenden Anforderungen erfüllt, müssten alle, durch Variation der Modellparameter innerhalb ihrer jeweils zulässigen Intervalle entstehenden Frequenzgänge überprüft werden. Alternativ dazu könnte überprüft werden, ob für eine Frequenz  $\Omega_k$  der komplexe Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises und das zugehörige Template vollständig außerhalb der, zu  $\Omega_k$  gehörenden, verbotenen Bereiche der komplexen Ebene liegen. Bei einer großen Anzahl betrachteter Frequenzen werden die resultierenden Diagramme unübersichtlich, wenn alle oder auch nur mehrere Frequenzen gleichzeitig dargestellt werden. Stellt man hingegen nur eine Frequenz pro Diagramm dar, verliert man die Übersicht über Auswirkungen der Regelung. Beide Vorgehensweisen sind daher für die Synthese unpraktisch, auch wenn sie bei der Analyse einer gegebenen Regelung in Einzelfällen noch sinnvoll und praktikabel sein können. Für die Reglersynthese werden daher, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird, aus den Boundaries und den Templates die sogenannten Bounds berechnet.

#### *Berechnung von zulässigen Wertemengen für den nominalen ORK: Bounds*

Die in Abschnitt 2.3.6 dargestellte Herleitung der Ortskurve für konstante Verstärkungen der Sensitivitätsfunktion, wird zur Berücksichtigung von Modellunsicherheiten erweitert. Zunächst werden zwei Punkte auf dem Template untersucht, danach sukzessive weitere Punkte.

Einer der Punkte entsteht aus der Abbildung des nominalen Modells, der andere Punkt entsteht aus der Abbildung einer beliebigen zulässigen Parameterkombination  $\vec{p}_1$  auf die komplexe Ebene, ist also durch den zu  $\vec{p}_1$  gehörenden Punkt des Templates repräsentiert.

Für die Frequenz  $\Omega$  sind die komplexen Frequenzgänge in Zylinderdarstellung

$$g_0 = g_{0B} \cdot e^{j\phi_0} \quad g_1 = g_{1B} \cdot e^{j\phi_1} = \underbrace{f_1 e^{j\Delta\phi_1}}_{\pi_1} \cdot g_{0B} \cdot e^{j\phi_0} = \pi_1 \cdot g_0 ,$$

der Index 0 kennzeichnet dabei den nominalen Wert.

Mit dem komplexen Frequenzgang des Reglers  $h = h_b \exp(j\psi)$  können die komplexen Frequenzgänge des offenen Kreises beschrieben werden:

$$l_0 = \underbrace{g_{0B} h_B \cdot e^{j\phi_0 + \psi}}_{L_0 \cdot \exp(j\alpha_0)} \quad l_1 = \underbrace{g_{1B} h_B \cdot e^{j\phi_1 + \psi}}_{L_1 \cdot \exp(j\alpha_1)} = \underbrace{f_1 e^{j\Delta\phi_1}}_{\pi_1} \cdot l_0 \cdot e^{j\alpha_0} = \pi_1 \cdot l_0 . \quad (2.3.4)$$

Wenn das nominale Modell für die betrachtete Frequenz  $\Omega$  die Bedingung  $\|S\| \leq M$  einhalten soll, muss der Frequenzgang  $l_0$  für diese Frequenz außerhalb des in Gleichung 2.3.3 beschriebenen Kreises mit Mittelpunkt  $(-1 + j0)$  und Radius  $1/M$  liegen. Da der komplexe Frequenzgang  $l_1 = g_1 h$  dieselbe Boundary einhalten muss, gilt die Ungleichung:

$$\left| \frac{1}{S_1} \right| = |1 + l_1| = |1 + \pi_1 l_0| \geq \frac{1}{M} .$$

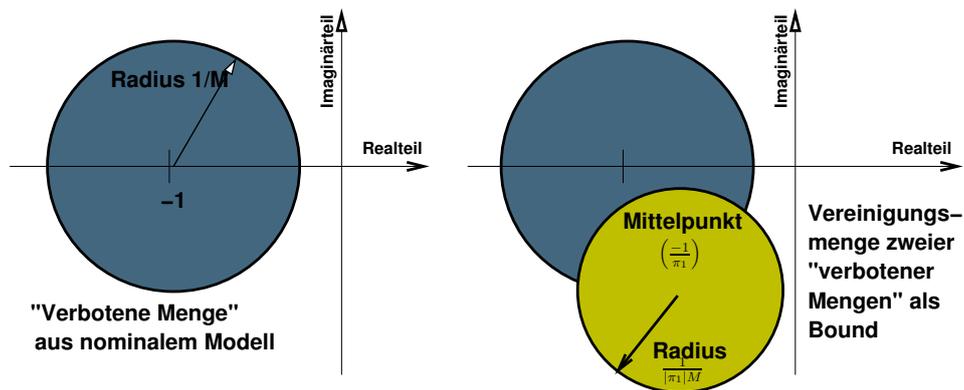


Abb. 2.3.5: Zur Herleitung der Bounds

Diese ist erfüllt, wenn der Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises außerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $-1/\pi_1$  und dem Radius  $1/(|\pi_1|M)$  liegt.

Die beiden Kreise stellen für den komplexen Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises jeweils eine „verbotene Menge“  $\mathbb{K}_0$  bzw.  $\mathbb{K}_1$  dar. Um für beide Frequenzgänge  $g_0$  und  $g_1$  die Bedingung  $|S| \leq M$  einzuhalten, muss  $l_0$  außerhalb der Vereinigungsmenge der beiden verbotenen Mengen liegen. Eine bildliche Darstellung ist in Abbildung 2.3.5 gegeben. Zu dem blau unterlegten, aus dem nominalen Modell resultierenden, Kreis, kommt der rot unterlegte Kreis hinzu. Dieser Kreis stellt die aus der Umrechnung der Boundary für  $l_1$  resultierende verbotene Menge dar. Wichtig für die weitere Berechnung ist, dass die Werte  $g_0$  und  $g_1$  Punkte im für  $\Omega_k$  berechneten Template des zugehörigen Streckenmodells sind. Die Vorgehensweise kann damit verallgemeinert werden:

Für jeden Punkt  $t_l \in \mathbb{T}_k$  des für die Frequenz  $\Omega_k$  berechneten Templates  $\mathbb{T}_k$  kann, analog zum Obenstehenden, eine Menge  $\mathbb{K}_{kl}$  berechnet werden, in der der komplexe Frequenzgang des nominalen ORK nicht liegen darf. Um für alle zulässigen Variationen der Parameter die Einhaltung der gegebenen Bedingung sicherstellen zu können, muss der nominale komplexe Frequenzgang des offenen Regelkreises *gleichzeitig* außerhalb *aller* verbotenen Mengen liegen, also außerhalb der Vereinigungsmenge:

$$\mathbb{K}_g = \mathbb{K}_{k1} \cup \mathbb{K}_{k2} \cup \mathbb{K}_{k3} \cup \dots \cup \mathbb{K}_{kn} .$$

Die zu  $\mathbb{K}_g$  komplementäre Menge spielt in der QFT eine wichtige Rolle:

**Definition 2.3.4** Gegeben sind eine Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises  $G_{GRK}(s)$ , die parameterabhängige Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(\vec{p}, s)$ , sowie die aus der nominalen Übertragungsfunktion der Strecke  $G_{NOM}(s)$  abgeleitete Übertragungsfunktion des nominalen offenen Regelkreises.

Die Forderung an den geschlossenen Regelkreis wird durch die Ungleichung

$$|G_{GRK}(j\Omega)| \leq k_a$$

bzw. die Ungleichung

$$k_b \leq |G_{GRK}(j\Omega)| \leq k_a$$

beschrieben.

Die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{NOM}$ , die die jeweilige Ungleichung für alle zulässigen Variationen der Parameter erfüllt, wird in der QFT als „Bound“ bezeichnet.  $\square$

*Zur Interpretation der Bounds:* Bounds kennzeichnen die Wertemengen, in denen der ,zunächst noch unbekannte, komplexe Frequenzgang des *nominalen offenen Regelkreises*

$$L_{Nom}(j\Omega_k) = G(j\Omega_k, \vec{p}_0)H(j\Omega_k)$$

liegen muss, damit für die Frequenz  $\Omega_k$  und alle zulässigen Variationen der Parameter  $\vec{p} \in \mathbb{P}_{zP}$  die dem Bound zu Grunde liegende Forderung an den geschlossenen Regelkreis erfüllt wird.

Bounds sind für eine vorgegebene Menge zulässiger Parametervariationen gültig. Wird diese Menge im Verlauf des Entwurfs modifiziert, dann müssen auch die Bounds neu berechnet werden.

Der Nutzen der Bounds liegt darin, dass sie bereits alle möglichen, durch die Parameterunsicherheiten verursachten, Variationen des komplexen Frequenzganges enthalten, und dadurch den Reglerentwurf auf einen Entwurf am NOMINALEN Modell zurückführen.

#### *Anwendung auf die Beispielstrecke*

Aus den auf Seite 35 definierten Modellunsicherheiten, und den aus Abbildung 2.3.4 ablesbaren Spezifikationen für den geschlossenen Regelkreis, wurden mit Hilfe der Matlab QFT-Toolbox die Bounds für eine Reihe vorgegebener Frequenzen berechnet. Einige der Bounds sind, repräsentiert durch ihre Berandungen, in Abbildung 2.3.6 dargestellt. Der komplexe Frequenzgang des nominalen Streckenmodells ist, als in der Frequenz  $\Omega$  parametrisierte Kurve, zusammen mit den Bounds im Nichols-Diagramm eingezeichnet. Die am komplexen Frequenzgang angetragenen Kreise stellen jeweils eine der untersuchten Frequenzen dar, die zugehörigen Werte für  $\Omega$  stehen unmittelbar neben den Kreisen (kursive Schrift). Der niederfrequente Anteil des Frequenzganges, bei Null Grad Phasenlage und Null Dezibel Verstärkung, ist durch den Text „1 bis 10 rps“ gekennzeichnet, da hier die Frequenzmarkierungen sehr nahe beieinander liegen.

Aus dem Diagramm können eine Reihe von Rückschlüssen auf die erforderlichen Modifikationen des Frequenzganges für den nominalen offenen Kreis gezogen werden. Davon sollen im Folgenden einige beispielhaft erläutert werden.

**Anheben der Verstärkung für  $\Omega = 1 \text{ Rad/s}$ :** Die schwarze Wellenlinie, die auf der linken Seite des Diagramms mit „-35 dB @ 1rps“ gekennzeichnet ist, stellt die Berandung des Bounds für die Frequenz 1 Rad/s dar. Der zugehörige Punkt auf dem komplexen Frequenzgang liegt unterhalb dieser Wellenlinie, und damit in der verbotenen Menge. Um für die Frequenz 1 Rad/s die Anforderung  $|G_D| \leq -35\text{dB}$  zu erfüllen, muss daher für diese Frequenz der Betrag des offenen Regelkreises angehoben werden, wie dies durch den blauen Pfeil angedeutet ist.

**Anheben der Phasenlage für  $\Omega = 38.7 \text{ Rad/s}$ :** Um die für  $\Omega = 38.7 \text{ Rad/s}$  geforderte Obergrenze von -20 Dezibel (in Magenta eingezeichnete Wellenlinie) einhalten zu können, muss die Phasenlage für diese Frequenz angehoben werden, wie durch den blauen Pfeil gekennzeichnet.

**Stabilität des geschlossenen Regelkreises:** Die Stabilität des nominalen geschlossenen Regelkreises lässt sich an Hand des Nichols-Diagramms durch Anwendung des Nyquist-Kriteriums feststellen [88]: Für stabile offene Regelkreise darf der komplexe Frequenzgang den kritischen Punkt  $(-1/0)$  nicht umrunden, wenn das System stabil sein soll. Der Betrag muss also kleiner als Eins sein, wenn die Phasenlage  $-180$  Grad beträgt.

Im Nichols-Diagramm heißt dies, dass der Frequenzgang unter dem kritischen Punkt „durchtauchen“ muss. Der Durchgang durch die Phasenlage  $-180$  Grad muss also unterhalb von Null Dezibel erfolgen.

Gleichzeitig müssen die Sensitivitätsfunktion bzw. die anderen Störübertragungsfunktionen in ihrem Betrag nach oben beschränkt sein, (vgl. Abschnitt 2.3.5), um die robuste Stabilität des GRK sicherzustellen.

### 2.3.7 Reglerentwurf

#### *Anwendung der klassischen Methode*

Ein Schwachpunkt der QFT ist, dass sie im Vergleich zu den „modernen“ Methoden wie z.B.  $H_2/H_\infty$  Entwurf nur wenig Unterstützung bei der Gewinnung der Reglerstruktur und -parameter bietet. Der Entwerfende bleibt auf seine Intuition und Erfahrung angewiesen.

Die in der QFT üblicherweise zur Reglersynthese verwendete Methode besteht darin, einfache Kompensationsglieder auszuwählen, und ihre Parameter so an die Problemstellung anzupassen, dass alle Anforderungen erfüllt werden.

Sehr häufig verwendete Kompensationsglieder sind Integratoren,  $PT_1$ - und  $PT_2$ - Glieder, phasenhebende und -absenkende Kompensatoren oder Kerbfilter. In einigen Anwendungen wird eine Reihenschaltung mehrerer solcher Kompensationsglieder erforderlich. Da alle Kompensationsglieder den Frequenzgang breitbandig verändern, ist die Wirkung eines Kompensationsgliedes im Frequenzgang nicht zu lokalisieren. Eine sukzessive Auslegung des Reglers, z.B. um nacheinander die niederfrequentesten Moden separat zu bedämpfen, ist zwar prinzipiell möglich, erfordert jedoch Erfahrung und zieht viele Iterationsschritte nach sich.

#### *Anwendung auf die Beispielstrecke*

Im Rahmen der in diesem Kapitel vorgestellten Untersuchung wird die Nutzung von beobachterbasierten Reglern zur Vereinfachung der Synthese betrachtet. Durch Variation der gewählten Pollagen werden dazu die Frequenzgänge des nominalen offenen Kreises so verändert, dass die Vorgaben eingehalten werden. Diese Vorgehensweise bringt jedoch nicht die erhofften Erleichterungen für den Entwurf, und wird daher in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Zur Berechnung des Reglers wird das System in der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}\vec{x} + Du$$

beschrieben. Die Matrix  $\mathbf{F}$  der vollständigen Zustandsrückführung, und die Filtermatrix  $\mathbf{L}$  werden durch Polplatzierungsalgorithmen so bestimmt, dass die Lösungen von

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) = 0 \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T + \mathbf{L}^T\mathbf{C}^T) = 0$$

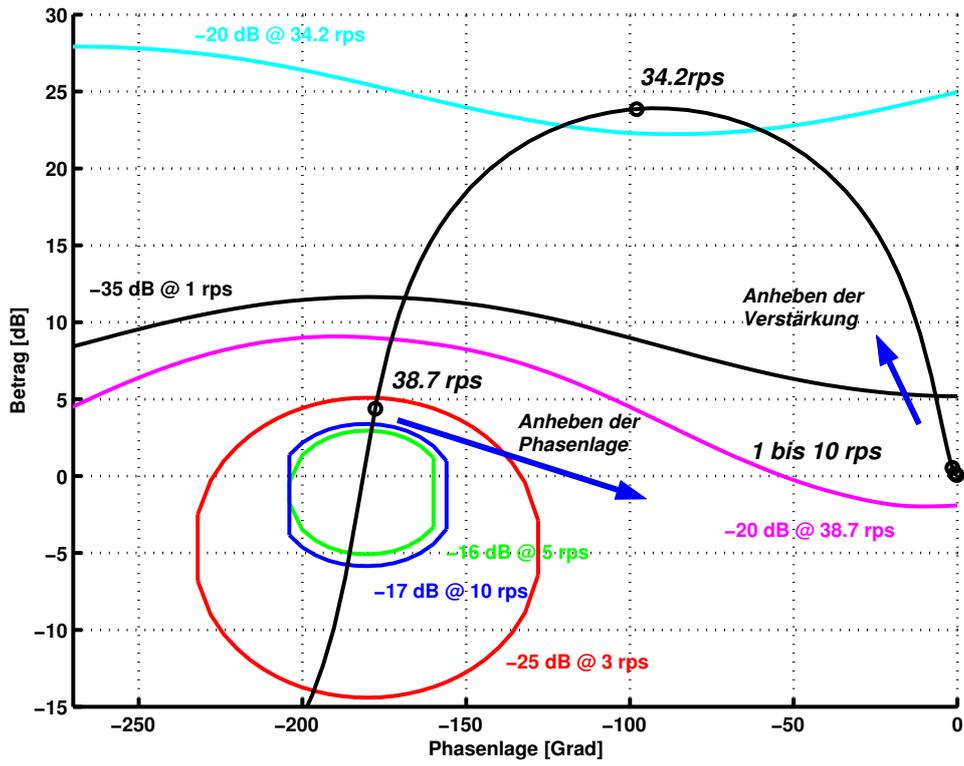


Abb. 2.3.6: Bounds am unregelten System

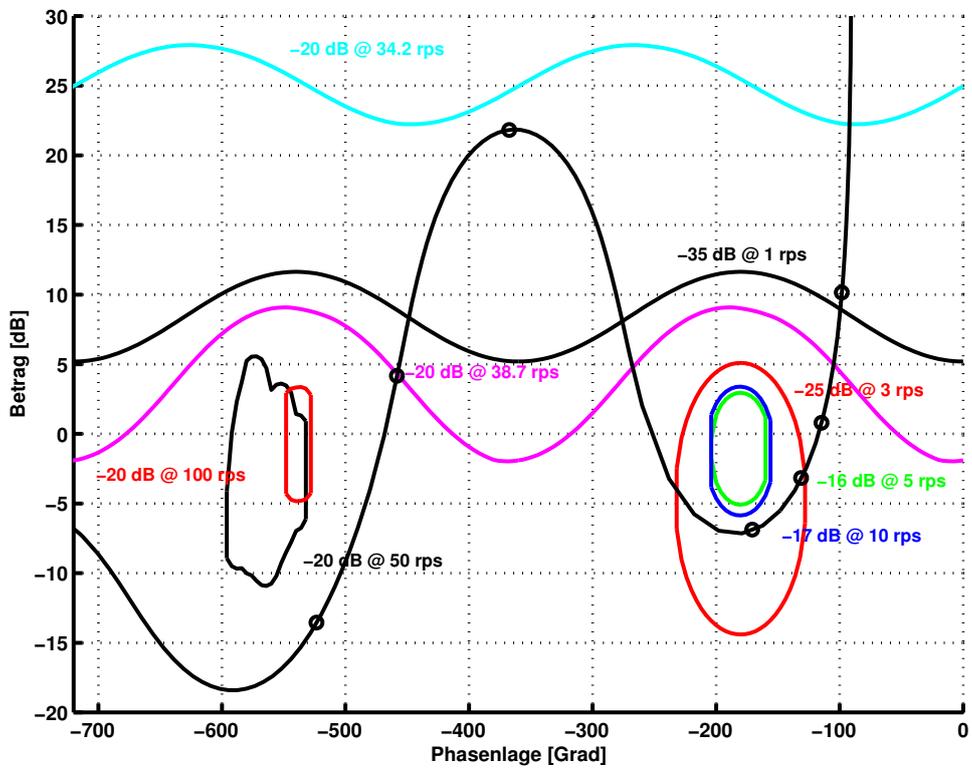


Abb. 2.3.7: Bounds am geregelten System

den vorgegebenen Polen entsprechen. Der Regler ergibt sich dann aus

$$H(s) = \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BF} + \mathbf{LC})^{-1} \mathbf{L}.$$

Die Pole von Zustandsrückführung und Beobachter wurden für das betrachtete Beispiel, wie in der folgenden Tabelle dargestellt, gewählt:

Beobachterpole:	Reeller Pol	$s = -12$
	Komplexes Polpaar	$s = -15 \pm j48$
Pole der Zustandsrückführung:	Reeller Pol	$s = -12$
	Komplexes Polpaar	$s = -15 \pm j48$

Tab. 2.1: Wahl der Pole für Beobachter und Zustandsrückführung

Die identische Wahl der Pole für die vollständige Zustandsrückführung und den Beobachter vermindert die Anzahl der zu beeinflussenden Parameter bei der Reglersynthese. Dies stellt zwar grundsätzlich eine Beschränkung der Entwurfsfreiheiten dar, erlaubt jedoch bei der Synthese eine bessere Einschätzung der Auswirkung von Änderungen eines Parameters, da weniger Parameter zu beachten sind.

Abbildung 2.3.7 stellt die berechneten Bounds und den komplexen Frequenzgang des kompensierten offenen Regelkreises dar. Wie die Abbildung zeigt, werden, mit Ausnahme des Bounds für die Resonanzfrequenz, alle Bounds vom Frequenzgang eingehalten. Bei Untersuchung der Bounds für die Resonanzfrequenz zeigt sich, dass statt der geforderten -20 Dezibel der Betrag bei -19,5 Dezibel liegt. Da die Verletzung dieser Grenze als vernachlässigbar betrachtet wird, erfolgt keine weitere Modifikation des Entwurfs.

Die Einhaltung der vorgegebenen Grenzen wird in den Abbildungen 2.3.8 für die in den Frequenzbereich übertragenen Vorgaben und 2.3.9 für die ursprünglichen, im Zeitbereich beschriebenen Vorgaben verdeutlicht. Die Verletzung der Bounds für die Resonanzfrequenz hat tatsächlich keine nennenswerten Auswirkungen auf die erzielte Regelgüte.

## 2.4 Mehrgrößenregelungen mit QFT

Obwohl in dieser Arbeit keine Untersuchungen zu Mehrgrößenregelungen beschrieben sind, können sowohl die QFT insgesamt als auch die in dieser Arbeit vorgestellte Methode grundsätzlich zur MIMO-Synthese genutzt werden. Daher soll hier eine kurze Übersicht über die Erweiterung der QFT zur Synthese von MIMO-Reglern gegeben werden. Die Darstellung soll lediglich einen Eindruck vermitteln, wie und unter welchen Voraussetzungen mit QFT die MIMO-Synthese durchgeführt werden kann. Ausführlichere Darstellungen sind in [50, 104] gegeben.

Erweiterungen der QFT auf Mehrgrößenprobleme wurden zunächst von Horowitz [48] für stabile, minimalphasige Regelstrecken entwickelt. Mitte der achtziger Jahre entwickelten Horowitz und Yaniv eine zweite, weniger konservative Methode [105]. Diese wurde so weiterentwickelt, dass auch für instabile und nichtminimalphasige Strecken Regler entworfen werden können [104]. Neuere Arbeiten zur dezentralen Regelung stammen von Nwokah und Kollegen [75, 79, 107], von Zhao und Jayasuryia stammen Untersuchungen nicht-sequentieller Methoden [112]. Inversionsfreie Methoden zur QFT MIMO Reglersynthese wurden von Chait et. al. [15] untersucht. Im folgenden Abschnitt wird die Methode von Horowitz und Yaniv vorgestellt.

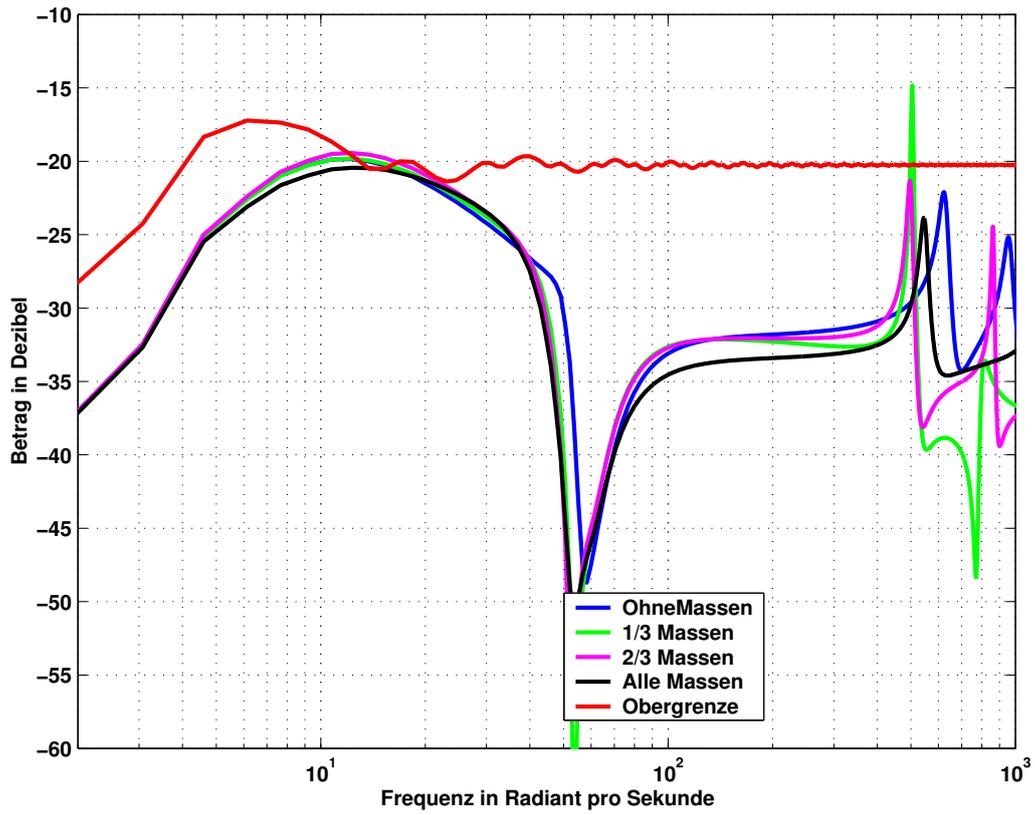


Abb. 2.3.8: Systemantwort im Vergleich zur Vorgabe (Frequenzbereich)

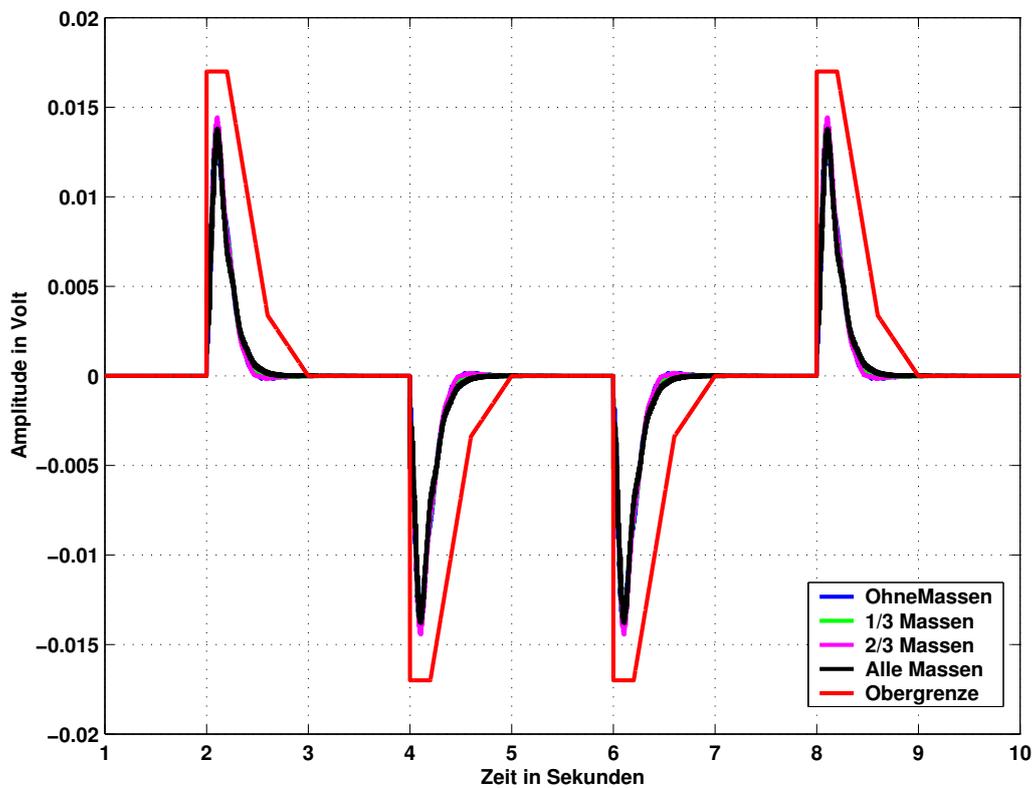


Abb. 2.3.9: Systemantwort im Vergleich zur Vorgabe (Zeitbereich)

### 2.4.1 Grundlagen

Betrachtet werden Regelstrecken mit mehreren Ein- und Ausgängen, in der Form

$$\vec{y}(s) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \cdot \vec{u}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \dots & g_{mn}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Das hier beschriebene Entwurfsverfahren setzt voraus, dass die Regelstrecke die folgenden Eigenschaften aufweist:

- Die Elemente von Strecke  $\mathbf{G}(s)$  und Regler  $\mathbf{H}(s)$  sind streng proper (echt gebrochen rationale Übertragungsfunktionen).
- Die Strecke  $\mathbf{G}(s)$  hat den vollen Rang, d.h. wenn die Strecke quadratisch ist, existiert die Inverse  $\mathbf{G}(s)^{-1}$ , wenn die Strecke nicht quadratisch ist, existiert eine Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}(s)$ , so dass  $(\mathbf{GW})^{-1}$  existiert.
- Wird als Teil des Gesamtentwurfs ein SISO-Regler für die Menge von Übertragungsfunktionen  $\{G\}$  entworfen, dann tritt für kein Element der Menge  $\{G\}$  die Kompensation eines instabilen Poles durch den Regler auf.

Diese Forderungen werden von realen technischen Systemen fast immer erfüllt. Sie stellen also keine wesentliche Einschränkung dar [104].

Wie schon der SISO-Entwurf zielt auch die MIMO-Synthese mittels QFT darauf ab, einem dynamischen System ein bestimmtes, vorgegebenes Verhalten aufzuprägen, auch wenn die Parameter des unregulierten Systems nur ungenau bekannt sind.

Vorgaben an den geschlossenen Kreis werden im Frequenzbereich für jedes Element der Übertragungsmatrix formuliert. Meistens werden Forderungen an die Führungsübertragungs- und Störübertragungsmatrizen gestellt. Weiterhin ist es möglich, Vorgaben an Amplituden bzw. Phasenrand und den Regelungsaufwand zu beschreiben. Analog zum Eingrößenfall werden Spezifikationen der Elemente der Führungsübertragungsmatrix durch Ober- und Untergrenze, Forderungen an Störübertragungsmatrizen lediglich durch Obergrenzen ausgedrückt.

Die Streckenmodelle, der zu regelnden Systeme, können sowohl stabil als auch instabil und gleichzeitig minimalphasig oder nichtminimalphasig sein.

Die grundlegende Idee des im Folgenden vorgestellten MIMO-Entwurfes ist, das ursprüngliche MIMO-Problem in eine Reihe von SISO- bzw. MISO-Problemen herunterzubrechen. Die Lösung dieser Einzelprobleme ergibt dann zusammengefasst die Lösung des ursprünglichen Problems. Anforderungen an die Führungsübertragung lassen sich in eine Spezifikation zur Approximation eines Referenzmodells umschreiben. Die resultierende Aufgabenstellung ist der bei der Unterdrückung von Störungen am Ausgang zu behandelnden Aufgabe mathematisch äquivalent. Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Vorgehensweise an Hand der Synthese eines Reglers für ein 2 x 2 System zur Störunterdrückung demonstriert. Eine Beschreibung der Methode für andere Problemstellungen und komplexere Systeme wird bei Yaniv [104] dargestellt.

## 2.4.2 Unterdrückung von Störungen am Ausgang

### Aufgabenstellung

Der betrachtete Regelkreis ist in Abbildung 2.4.1 schematisch dargestellt. Die Aufgabenstellung besteht darin, den Regler  $\mathbf{H}(s)$  so zu wählen, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist, und für alle Störgrößen  $\vec{d}$  mit

$$|d_k(j\Omega)| \leq d_{kMAX} \quad \forall \Omega \leq \Omega_h \quad (2.4.1)$$

der Betrag der Elemente des Vektors der Ausgangsgrößen jeweils eine frequenzabhängige Obergrenze nicht überschreitet, dass also

$$|y_k(j\Omega)| \leq y_{kMAX} \quad \forall \Omega \leq \Omega_h \quad (2.4.2)$$

gilt.

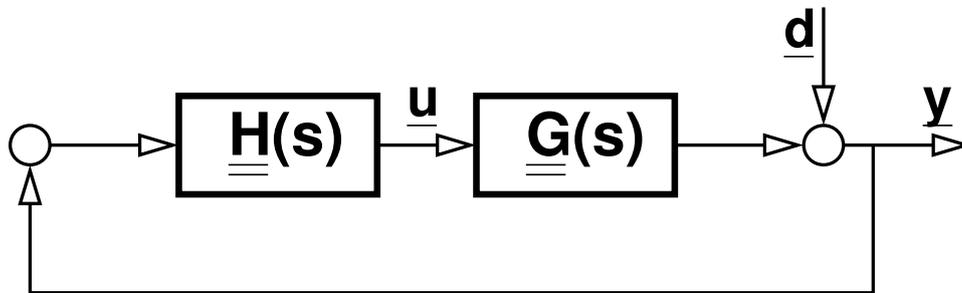


Abb. 2.4.1: Mehrgrößensystem mit Störung am Ausgang

### Herleitung des Entwurfsansatzes nach Yaniv

Aus Abbildung 2.4.1 kann der Zusammenhang

$$\vec{y} = (\mathbf{I} + \mathbf{GH})^{-1} \vec{d}$$

hergeleitet werden. Dies kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \text{Vormultiplizieren mit } (\mathbf{I} + \mathbf{GH}) \text{ ergibt:} & \quad (\mathbf{I} + \mathbf{GH})\vec{y} = \vec{d} \\ \text{Vormultiplizieren mit } \mathbf{G}^{-1} & \quad (\mathbf{G}^{-1} + \mathbf{H}) = \mathbf{G}^{-1}\vec{d}. \end{aligned}$$

Mit den Darstellungen der Inversen der Regelstrecke

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

und des Diagonalreglers  $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, h_2)$  kann dies für den 2 x 2 Fall ausgeschrieben dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} q_{11} + h_1 & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} + h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.$$

Der erste Arbeitsschritt des Gauß'schen Eliminationsverfahrens besteht jetzt darin, die Matrix auf der linken Seite durch Vormultiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix in eine obere Dreiecksmatrix umzuwandeln [90]. Die dazu erforderliche Matrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{q_{21}}{q_{11}+h_1} & 1 \end{bmatrix},$$

die umgeformte Gleichung stellt sich dann wie folgt dar:

$$\begin{bmatrix} q_{11}+h_1 & q_{12} \\ 0 & q_{22}^2+h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad (2.4.3)$$

worin die Ersetzungen

$$q_{21}^2 = q_{21} - \frac{q_{21}q_{11}}{q_{11}+h_1} \quad \text{und} \quad q_{22}^2 = q_{22} - \frac{q_{21}q_{12}}{q_{11}+h_1}$$

vorgenommen werden.

Löst man die Gleichung 2.4.3 nach den Elementen  $y_k$  des Vektors der Regelgrößen auf, ergibt sich:

$$y_1 = \frac{q_{11}d_1 + q_{12}d_2 - q_{12}y_2}{q_{11}+h_1} \quad (2.4.4)$$

$$y_2 = \frac{q_{21}^2d_1 + q_{22}^2d_2}{q_{22}^2+h_2}. \quad (2.4.5)$$

### Erster Entwurfsschritt

Ausgehend von den Gleichungen 2.4.4 und 2.4.5 wird nun die Regelungsaufgabe neu formuliert. Für das Element  $h_1$  des Reglers ergibt sich die folgende Aufgabe:

Der SISO-Regler  $g_1(s)$  soll so ausgelegt werden, dass

$$|y_1| = \left| \frac{q_{11}d_1 + q_{12}d_2 - q_{12}y_2}{q_{11}+h_1} \right| \leq y_{1MAX}(\Omega) \quad \forall \vec{d} \in \{\mathbf{d}\}, \mathbf{G} \in \{\mathbf{G}\}, \Omega \leq \Omega_h \quad (2.4.6)$$

gilt.

Nun hängt  $y_1$  von  $y_2$  ab, dieses ist aber a-priori noch nicht bekannt. Der Regler  $\mathbf{H}$  wird mit dem Ziel ausgelegt, den Betrag von  $y_2$  kleiner als die Schranke  $y_{2MAX}$  werden zu lassen. Setzt man voraus, dass dies erreichbar ist, dann kann  $y_2$  durch  $y_{2MAX}$  ersetzt werden. Damit wird das Regelungsproblem

$$|y_1| \leq \frac{|q_{11}d_1 + q_{12}d_2| + |q_{12}|y_{2MAX}}{|q_{11}+h_1|} \leq y_{1MAX}(\Omega) \quad \forall \vec{d} \in \{\mathbf{d}\}, \mathbf{G} \in \{\mathbf{G}\}, \Omega \leq \Omega_h \quad (2.4.7)$$

beschrieben, das zwar eine Überabschätzung des ursprünglichen Problems darstellt und so Konservativität in den Entwurf bringt, dafür aber lösbar ist.

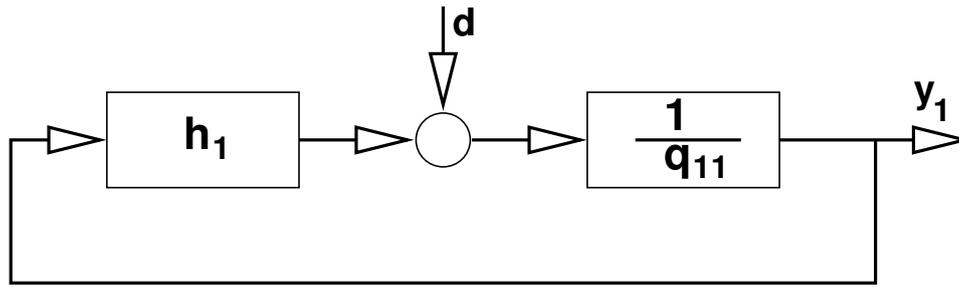


Abb. 2.4.2: Eingrößensystem mit Störung am Eingang (1.Schritt)

Fasst man den Zähler in Gleichung 2.4.7 durch

$$|d| = |q_{11}d_1 + q_{12}d_2| + |q_{12}|y_{2_{MAX}}$$

zusammen, dann ist damit ein Regelungsproblem definiert, wie es in Abbildung 2.4.2 dargestellt ist.

Dies entspricht einem Entwurfsproblem, in dem  $1/q_{11}$  eine SISO-Strecke ist. Die Forderung an den Regler ist für alle  $\mathbf{P} \in \{\mathbf{P}\}$  wie folgt beschrieben:

- das System zu stabilisieren, und
- für alle  $\mathbf{d} \in \{\mathbf{d}\}$  sicherzustellen, dass der Betrag der Messgröße  $y_1$  für alle  $\Omega \leq \Omega_k$  durch  $|y_1(j\Omega)| \leq y_{1_{MAX}}(\Omega)$  beschränkt ist, wobei

$$|d| \leq |q_{11}d_1 + q_{12}d_2| + |q_{12}|y_{2_{MAX}}$$

gesetzt wird.

### Zweiter Entwurfsschritt

Zur Synthese des zweiten Reglers wird die Forderung an den Regelkreis

$$|y_2| \leq y_{1_{MAX}}(\Omega) \quad \forall \vec{d} \in \{\mathbf{d}\}, \mathbf{G} \in \{\mathbf{G}\}, \Omega \leq \Omega_h \quad (2.4.8)$$

in Verbindung mit Gleichung 2.4.5

$$y_2 = \frac{q_{21}^2 d_1 + q_{22}^2 d_2}{q_{22}^2 + h_2}$$

als Dimensionierungsgrundlage herangezogen. Ersetzt man hier

$$|d| = |q_{21}^2 d_1 + q_{22}^2 d_2|,$$

so ergibt sich wiederum ein SISO Entwurfsproblem dar, wie es in Abbildung 2.4.3 dargestellt ist.

Die Übertragungsfunktion  $1/q_{22}^2$  stellt eine SISO-Strecke dar. Der Eingrößenregler  $h_2$  muss nun so entworfen werden, dass für alle  $\mathbf{P} \in \{\mathbf{P}\}$

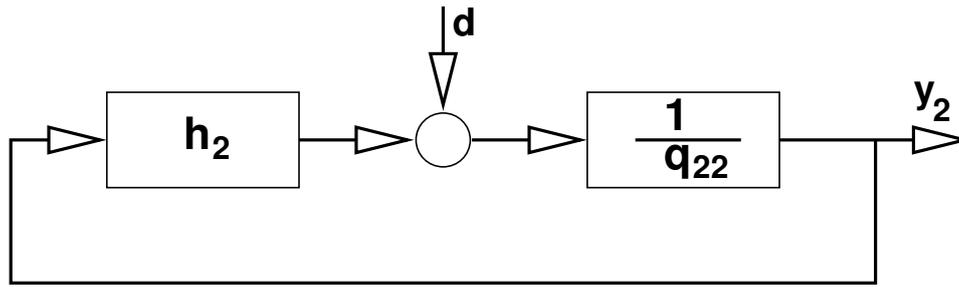


Abb. 2.4.3: Eingrößensystem mit Störung am Eingang (2. Schritt)

- das System stabil ist, und
- für alle  $\mathbf{d} \in \{\mathbf{d}\}$  sichergestellt ist, dass der Betrag der Messgröße  $y_2$  für alle  $\Omega \leq \Omega_k$  durch  $|y_2(j\Omega)| \leq y_{2MAX}(\Omega)$  beschränkt ist, wobei

$$|d| \leq |q_{21}^2 d_1 + q_{22}^2 d_2|$$

gesetzt wird.

#### Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Die Bedingungen, unter denen die dargestellte Vorgehensweise für alle zulässigen Variationen der Parameter zu einer stabilen Lösung führt, sind im folgenden Lemma zusammengefasst.

**Lemma 2.1** [104] *Betrachtet wird das in Abbildung 2.4.1 dargestellte System. Unter der Voraussetzung, dass für alle  $\mathbf{P} \in \{\mathbf{P}\}$*

1.  $\mathbf{G}^{-1}$  stabil ist,
2. die Übertragungsfunktionen  $q_{11} + h_1$  und  $q_{22} + h_2$  keine Nullstellen in der rechten Halbebene aufweisen und
3. der Regler  $\mathbf{H}$  stabil ist,

ist auch der geschlossene Regelkreis stabil.

*Beweis:* Aus der Gleichung 2.4.3 ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Vektor der Störgrößen  $\vec{d}$  und dem Vektor der Regelgrößen  $\vec{y}$  aus

$$(\mathbf{I} + \mathbf{GH})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{11} + h_1} & \frac{-q_{12}}{(q_{11} + h_1)(q_{22} + h_2)} \\ 0 & \frac{1}{q_{22} + h_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Da die Elemente beider Matrizen nach den oben dargestellten Voraussetzungen in der rechten Halbebene analytisch sind, sind die Übertragungsmatrizen stabil (vgl. [65], Seite 25), so dass auch das Produkt der Übertragungsmatrizen stabil ist.

## *Einhaltung der Spezifikationen*

Das nachstehende Lemma beschreibt die Bedingungen, unter denen die Forderungen an den geschlossenen Regelkreis durch den Diagonalregler  $\mathbf{H}$  eingehalten werden:

**Lemma 2.2** [104] *Wenn der Diagonalregler  $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, h_2)$  das in Abbildung 2.4.1 dargestellte System  $\mathbf{G}$  für alle zulässigen Parametervariationen  $\mathbb{P} \in \{\mathbb{P}\}$  stabilisiert, und von den SISO-Reglern  $h_1$  und  $h_2$  die Einhaltung der Ungleichungen 2.4.6 und 2.4.8 sichergestellt ist, dann sind die Spezifikationen 2.4.2 für  $k = 1, 2$  unter den in Gleichung 2.4.1 dargestellten Bedingungen erfüllt.*

*Beweis:* Der Beweis erfolgt unmittelbar durch Einsetzen. Ist die Ungleichung 2.4.8 erfüllt, dann wird die Spezifikation für  $k = 2$  eingehalten. Daraus folgt, dass die Ungleichung 2.4.6 wiederum die Spezifikation für  $k = 1$  einhält. (vgl. [104]).

## *2.5 Zusammenfassung*

Die Quantitative Feedback Theory ist eine Methode zur Reglersynthese, mit dem Ziel, die Einhaltung von Spezifikationen an die Regelgüte, trotz erheblicher parametrischer Unsicherheiten zu erzwingen. Sie kann auf Ein- und Mehrgrößensysteme angewendet werden. Die Regelstrecken dürfen sowohl stabil als auch instabil sein, sowohl minimalphasig als auch nichtminimalphasig.

Die Methode ist stark anwendungsorientiert. Um sie verstehen und anwenden zu können sind keine vertieften mathematischen Kenntnisse erforderlich. Damit die Methode rasch, unkompliziert und erfolgreich angewendet werden kann, sind jedoch gute Kenntnisse regelungstechnischer Grundlagen und Erfahrung in der Reglersynthese mit den klassischen Frequenzbereichsmethoden nötig.

Schwächen der QFT, im Hinblick auf die Anwendung liegen im hohen Aufwand zur Berücksichtigung der parametrischen Modellunsicherheiten, den Schwierigkeiten bei der Auswahl geeigneter Spezifikationen und der mangelnden Unterstützung bei der Auswahl von Reglerstrukturen und -parametern.

## 3. MODELLBILDUNG FLEXIBLER MECHANISCHER STRUKTUREN

Inhalt dieses Kapitels ist die Gewinnung von Modellstrukturen als Grundlage der Auslegung von Reglern für flexible mechanische Strukturen. Ausgehend von der Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente wird, unter Nutzung der in der Strukturmechanik gängigen Modaldarstellungen, die Gewinnung eines regelungstechnischen Wirkmodells beschrieben, das als Zustandsraummodell und als Übertragungsfunktion dargestellt werden kann. Die Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungsformen und den Ergebnissen verschiedener Modellidentifikationsverfahren werden dargestellt.

### 3.1 Einleitung

#### 3.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise

Die Modellbildung ist eine zentrale Aufgabenstellung im Rahmen des Entwurfs von Regelungssystemen. An Hand von Modellen erfolgt die Systemanalyse, die Wahl der Aktuatorik und Sensorik, die Reglersynthese und die Verifikation des Entwurfs. In einigen Anwendungsfällen, insbesondere in der Verfahrenstechnik, ist die Gewinnung geeigneter wahrer Modelle und Entwurfsmodelle schwieriger als die Synthese des Reglers.

Modelle können im Rahmen der theoretischen Modellbildung, oder durch experimentelle Modellidentifikation gewonnen werden. Beide Möglichkeiten ergänzen sich insofern, als die experimentelle Modellbildung die -für die Regelung- präziseren Modelle liefert. Die theoretische Modellbildung ist hingegen immer nutzbar, also auch schon in Entwicklungsphasen, wenn das zu regelnde System noch nicht in Form von Hardware verfügbar ist.

Häufig sind experimentelle Untersuchungen aus Kostengründen, oder weil zu untersuchende Betriebsbedingungen experimentell nicht vollständig nachgebildet werden können, nicht oder nur eingeschränkt durchführbar (z.B. Untersuchungen an Flugkörpern, Satelliten). In diesen Fällen werden die theoretisch gewonnenen Modelle an Hand einiger, ausgewählter experimenteller Untersuchungen überprüft und gegebenenfalls verbessert. Die verbesserten Modelle können dann auch zur simulativen Überprüfung der experimentell nicht untersuchbaren Betriebszustände verwendet werden.

Im Rahmen der Systementwicklung werden, zu unterschiedlichen Zeitpunkten, auf theoretischem Weg gewonnene Modelle und experimentell gewonnene Modelle genutzt. Um beim Übergang von theoretisch gewonnenen Modellen auf experimentell gewonnene Modelle die bis dahin erzielten Ergebnisse der Reglersynthese weiterverwenden zu können, und so die Synthese transparent zu gestalten, ist es günstig, für die analytische und die experimentelle Modellbildung eine einheitliche Modellstruktur zu verwenden.

Zielstellung der Modellbildung ist, eine möglichst einfache, aber dennoch ausreichend genaue Beschreibung der wesentlichen dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke zu erzielen. Da

sowohl ungenaue Modelle als auch komplexe Modelle die spätere Reglersynthese erschweren, ist dabei zwischen einer möglichst geringen Komplexität des Modells und einer möglichst genauen Beschreibung abzuwägen.

### 3.1.2 Besonderheiten und Probleme im Zusammenhang mit flexiblen mechanischen Strukturen

Die Modellbildung für FMS zeichnet sich durch eine Reihe von Besonderheiten aus, die in den folgenden Absätzen kurz beschrieben werden:

**Systemdynamische Eigenschaften:** Flexible mechanische Strukturen sind, als verteilte Systeme, durch partielle Differentialgleichungen zu beschreiben. Aus den verteilten Eigenschaften resultieren Besonderheiten, die für die Modellbildung wichtig sind (große Anzahl von Parametern, Abhängigkeit des Ein- / Ausgangsverhaltens von der Aktuator- und Sensorposition, die Vielzahl schwach gedämpfter resonanter Moden, etc. [38, 28, 34, 36]).

**Beschreibungsformen:** Die wohl besten Werkzeuge zur Modellierung flexibler mechanischer Strukturen stammen aus der Strukturmechanik, der Teildisziplin der technischen Mechanik, die sich mit der Modellierung und Analyse von FMS beschäftigt. Es bietet sich an, diese Werkzeuge, wie z.B. die Methode der finiten Elemente (FEM: Finite Element Methode), als Grundlage der Modellbildung und der Systemanalyse heranzuziehen [108].

Da die eigentliche Zielstellung der FEM nicht die Erstellung regelungstechnischer Wirkmodelle ist, müssen FEM-Modelle noch ergänzt werden. Insbesondere der Einfluss von Aktuatorik und Sensorik ist zu berücksichtigen [3, 21].

Die unmittelbar aus der FEM resultierenden Modelle weisen eine so hohe Modellordnung auf, dass der Reglerentwurf mit diesen Modellen oft nicht durchgeführt werden kann (z.B. wegen numerischer Probleme; da Modelle nicht im Entwurfswerkzeug handhabbar sind; weil hohe Ordnung der resultierenden Regler deren Echtzeitimplementierung unmöglich macht). Daher müssen Maßnahmen zur Reduktion der Modellordnung in die Modellbildung integriert werden [109, 66, 35].

Die Analyse der strukturdynamischen Eigenschaften flexibler mechanischer Strukturen erfolgt häufig unter Nutzung der Modalanalyse [67, 69]. Die modalen Größen (Kennkreisfrequenz, modale Dämpfung, Eigenformen) sind physikalisch gut zu interpretieren. Modale Modelle sind einfach strukturiert und sehr kompakt. Es existieren erprobte Werkzeuge sowohl zur Modalanalyse an Hand von FE-Modellen als auch zur experimentellen Modalanalyse.

Für regelungstechnische Anwendungen lassen sich aus der modalen Beschreibung Modelle ableiten, mit denen sehr wichtige Untersuchungen (Modellreduktion, Aktuator- und Sensorpositionierung [66, 36]) mit vergleichsweise geringem Aufwand durchführbar sind .

### 3.1.3 Zu lösende Aufgaben

Um die Anwendung der QFT zur Regelung flexibler mechanischer Strukturen in den Entwurf des Systems zu integrieren, werden in Bezug auf die Modellbildung die folgenden Aufgaben abgeleitet:

- Ausgehend von der Modellbildung mit der Methode der Finiten Elemente über die Modalanalyse, ist die Herleitung von Übertragungsfunktionen auf Basis der modalen Darstellungen zu beschreiben.
- Die Einbeziehung von Sensorik und Aktuatorik sowie elektronischer Komponenten in das Gesamtmodell, zur Erstellung regelungstechnischer Wirkmodelle, ist darzustellen.
- Der Zusammenhang zwischen den numerisch hergeleiteten und experimentell gewonnenen Modellen ist herzustellen und zu beschreiben.

#### 3.1.4 Gliederung

Die physikalisch motivierte Modellbildung unter Nutzung der Methode der Finiten Elemente wird im Abschnitt 3.2 beschrieben, inklusive der Erweiterung von Modellen aus der FEM um Aktuatorik und Sensorik. Der Zusammenhang zwischen den dabei gewonnenen Modellen und Modellen aus experimentellen Untersuchungen wird in Abschnitt 3.3 diskutiert. Das Kapitel wird mit einer kurzen Zusammenfassung 3.4 abgeschlossen.

### 3.2 Physikalisch motivierte Beschreibung flexibler mechanischer Strukturen

#### 3.2.1 Übersicht

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Vorgehensweise zur Modellbildung besteht aus den folgenden Schritten:

- Lösung der PDG und Aufstellen der Bewegungsgleichungen mit der FEM (Abschnitt 3.2.2).
- Berücksichtigung der stationären Zusammenhänge zwischen Sensorik, Aktuatorik und FE-Modell (Abschnitt 3.2.3).
- Modaltransformation (Abschnitt 3.2.4).
- Erstellung regelungstechnischer Modelle (Übertragungsfunktion und Zustandsraummodell (Abschnitt 3.2.5).

Analoge Vorgehensweisen zur Erstellung modaler Modelle sind üblich und in der Literatur beschrieben, z.B. bei Gawronski [36].

Die Zusammenhänge zwischen diesen Modellen und den aus der experimentellen Modellbildung resultierenden Modellen werden in einem weiteren Abschnitt diskutiert. Aus dieser Diskussion wird ein Modelltyp ausgewählt, mit dem sowohl analytische als auch experimentelle Modellbildung durchgeführt werden kann, und der als Grundlage für die Templateberechnung geeignet ist.

### 3.2.2 Bewegungsgleichungen

Die dynamischen Eigenschaften flexibler mechanischer Strukturen sind unmittelbar an Systemparameter wie Steifigkeit und Masse gebunden. Diese sind ortsabhängig, so dass FMS verteilte Systeme sind. Die Bewegungsgleichungen solcher Systeme werden von partiellen Differentialgleichungen (PDG) bestimmt.

Eine analytische Lösung partieller Differentialgleichungen kann nur in Ausnahmefällen erzielt werden. Meistens sind numerische Lösungsansätze erforderlich, um zu einem Ergebnis zu kommen [38, 28]. In jedem Fall setzt sich die Gesamtlösung aus einer unendlichen Reihe von Partillösungen zusammen. Die Gesamtlösung kann daher nur approximiert werden.

Mit der Methode der Finiten Elemente wird die Lösung von Partiiellen Differentialgleichungen approximiert. Das aus dem Approximationsansatz der FEM resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreibt die ungedämpfte Bewegung des durch die partielle Differentialgleichung beschriebenen Systems. Der Vektor  $\vec{v}$  beinhaltet dabei die Freiheitsgrade der Knotenpunkte des diskretisierten Systems:

$$\mathbf{M}\vec{v} + \mathbf{K}\vec{v} = \vec{f} + \vec{d}$$

Der Vektor  $\vec{f}$  beschreibt die kontrollierbaren Kräfte bzw. Momente und der Vektor  $\vec{d}$  die auf die Struktur einwirkenden Störkräfte und -momente. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  repräsentiert die Verteilung der Massen auf die Struktur, analog dazu beschreibt die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  die Steifigkeiten zwischen den Freiheitsgraden. Die Berücksichtigung der Materialdämpfung wird geeigneterweise nach der Modaltransformation in das Modell eingebracht [34].

Durch ihre Eigenmassen und -steifigkeiten verändern Aktoren und Sensoren die dynamischen Eigenschaften einer mechanischen Struktur auch dann, wenn sie nicht angesteuert werden, bzw. wenn kein Messsignal abgegriffen wird. Diese Änderungen können häufig als Punktmassen und Einzelfedern berücksichtigt werden (z.B. Piezo-Stapeltranslatoren in einer Fachwerkstruktur). In komplexeren Fällen wird eine ausführlichere Modellierung erforderlich, z.B. durch die Integration sogenannter „aktiver Elemente“ in die Gesamtstruktur [32, 21, 102, 85].

### 3.2.3 Beschreibung der Aktuatorik und Sensorik

Ein regelungstechnisches Wirkmodell beschreibt das Klemmenverhalten, d.h. den dynamischen Zusammenhang zwischen einem auf den Eingang wirkenden Signal  $\vec{u}(t)$ , und dem daraus resultierenden Messsignal  $\vec{y}(t)$ . Um aus der Bewegungsgleichung eine Beschreibung des Klemmenverhaltens zu gewinnen, müssen Beschreibungen für den Zusammenhang zwischen dem Stellsignal  $\vec{u}(t)$  und den resultierenden Kräften und Momenten  $\vec{f}$  erstellt werden. Weiterhin ist der Zusammenhang zwischen den Auslenkungen  $\vec{v}$ , bzw. ihren zeitlichen Ableitungen, und den Messsignalen  $\vec{y}(t)$  zu definieren.

Die Wirkung von Aktuatoren kann in Form von Punktkräften bzw. -momenten auf einzelne Freiheitsgrade, oder auf mehrere Freiheitsgrade gewichtet einwirken. In beiden Fällen werden die stationären Zusammenhänge durch eine Matrixgleichung

$$\vec{f} = \mathbf{F}_A \cdot \vec{u}^{**}$$

beschrieben.

Der Vektor der Messsignale setzt sich als Linearkombination

$$\vec{y}^{**} = [ \mathbf{C}_{SW} \quad \mathbf{C}_{SV} ] \cdot \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

zusammen [36].

Diese Beschreibung vernachlässigt zunächst die dynamischen Vorgänge bei der Energie wandlung. Zudem ist die gleichzeitige Nutzung von Auslenkungen und Geschwindigkeiten im Messvektor aus Sicht der Struktur dynamik ungewöhnlich. Die Darstellung ist dennoch sinnvoll, und wird auch in der Literatur verwendet (z.B. [35]). Dies wird im Abschnitt zur Berücksichtigung der Energiewandlungsprozesse im Modell (vgl. Abschnitt 3.2.6) ausgeführt.

### 3.2.4 Modale Darstellung

Zur Umrechnung der Bewegungsgleichung in die modale Darstellung wird zunächst das Eigenwertproblem gelöst. Dieses kann für die Bewegungsgleichung mit der Darstellung der Eigenwerte  $\omega_k$  und der Eigenvektoren  $\vec{t}_k$  aufgestellt werden :

$$(\omega_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \vec{t}_k = 0 .$$

Lassen die Randbedingungen der Struktur keine Starrkörperverschiebungen zu, dann sind alle Eigenwerte  $\omega_k$  ungleich Null. Aus den Eigenvektoren  $\vec{t}_k$  wird die Modalmatrix

$$\mathbf{T} = [\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_N]$$

zusammengesetzt, mit der die Koordinatentransformation  $\vec{v} = \mathbf{T} \vec{q}$  zwischen den physikalischen Koordinaten und den modalen Koordinaten  $\vec{q}$  definiert ist. Bei entsprechender Normierung der Eigenvektoren gelten die Zusammenhänge:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{E} = \text{diag}(1) \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{K}_M = \text{diag}(\omega_k^2)$$

In Modalkoordinaten ist die Bewegungsgleichung dann durch

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{K}_M \vec{q} = \mathbf{T}^T (\vec{f} + \vec{d})$$

gegeben. Es liegt ein entkoppeltes System von Differentialgleichungen vor.

Die Berücksichtigung der Materialdämpfung in Form einer geschwindigkeitsabhängigen modalen Dämpfung erfolgt durch den Ansatz:

$$\mathbf{D}_M = \text{diag}(2\delta_k)$$

Das so modifizierte System von Differentialgleichungen ist

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{D}_M \dot{\vec{q}} + \mathbf{K}_M \vec{q} = \mathbf{T}^T (\vec{f} + \vec{d}) \quad (3.2.1)$$

Mit den gegebenen Definitionen zur Beschreibung des stationären Aktuatoreinflusses wird die modale Bewegungsgleichung umgeschrieben:

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{D}_M \dot{\vec{q}} + \mathbf{K}_M \vec{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_A \vec{u} + \mathbf{T}^T \vec{d} \quad (3.2.2)$$

Die zugehörige modale Messgleichung wird durch

$$\vec{y}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{SW} & \mathbf{C}_{SV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

beschrieben. Die Gleichungen 3.2.2 und 3.2.3 bilden im weiteren Verlauf die Grundlage für die Erstellung regelungstechnischer Wirkmodelle.

Die berechneten modalen Beschreibungen approximieren, selbst bei exakt bekannten Randbedingungen und Modellparametern, das tatsächliche Systemverhalten lediglich, da die Gesamtlösung sich aus einer unendlichen Reihe zusammensetzt. Eine ausführliche Betrachtung des Konvergenzverhaltens kann und soll nicht Inhalt dieser Arbeit sein. Für die Reglersynthese ist allerdings von Belang, dass FE-Modelle die Tendenz aufweisen, lediglich für die niederfrequentesten Eigenmoden exakte Approximationen von Kennkreisfrequenz und Eigenvektor zu liefern. Durch eine feine Diskretisierung kann die Anzahl der gut approximierten Moden für die Reglersynthese ausreichend hoch gestaltet werden. Mit einer Verfeinerung der Diskretisierung geht allerdings immer auch eine Erhöhung des Berechnungsaufwandes einher.

Eine ausführliche Darstellung, der in diesem Abschnitt beschriebenen Modaltransformation, ist z.B. in [33, 34] zu finden.

### 3.2.5 Zustandsraummodelle und Übertragungsfunktionen

Das in den Gleichungen 3.2.2 und 3.2.3 dargestellte Modell muss in Modellformen übertragen werden, die für die Reglersynthese geeignet und üblich sind, wie z.B. Übertragungsfunktionen und Zustandsraummodelle.

Dazu werden die entkoppelten Zeilen der modalen Bewegungsgleichung zunächst als skalare Gleichungen geschrieben:

$$\ddot{q}_k + 2\delta_k \dot{q}_k + \omega_k q_k = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_{nk} F_{A_{nm}} u_m^{**} + \sum_{p=1}^P T_{pk} d_p$$

Die Übertragungsfunktion von der Größe  $u_m$  auf die modale Auslenkung  $q_k$  wird durch

$$\frac{q_k(s)}{u_m^{**}(s)} = \frac{\sum_{n=1}^N T_{nk} F_{A_{nm}}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k}$$

dargestellt. Die Übertragungsfunktion von einer der Störgrößen  $d_p$  auf eine modale Auslenkung wird analog dazu hergeleitet. Durch Multiplikation des Zählers mit der Laplace-Variablen  $s$  wird die Übertragungsfunktion von der Stellgröße  $u$  auf die modale Schwinggeschwindigkeit  $\dot{q}_k$  berechnet, eine weitere Multiplikation mit  $s$  ergibt die Übertragung auf die modale Beschleunigung  $\ddot{q}_k$ .

Die Messgröße  $y_o^{**}$  ist aus der  $o$ -ten Zeile der Messgleichung 3.2.3 zu entnehmen

$$y_o^{**} = \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K C_{SW_{op}} T_{pk} q_k + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K C_{SV_{op}} T_{pk} \dot{q}_k,$$

so dass die Übertragungsfunktion von der Stellgröße  $u_m$  auf die Messgröße  $y_o^{**}$  gefunden wird

$$\hat{G}_{om}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N (C_{SW_{op}} T_{pk} + s \cdot C_{SV_{op}} T_{pk}) T_{nk} F_{A_{nm}}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2} \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^K \frac{C_{V_{okm}} s + C_{W_{okm}}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2} \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^K \hat{G}_{okm}(s) \quad (3.2.4)$$

Der Zählerterm vereinfacht sich dabei durch die Tatsache, dass die Matrix  $\mathbf{T}$  orthogonal ist.

Mit dem modalen Zustandsvektor  $\vec{x}_k^T = [q_k, \dot{q}_k]$  und den Matrizen

$$\mathbf{A}_{kk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\delta_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{km} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{A_{km}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{ok} = [C_{W_{ok}} \quad C_{V_{ok}}]$$

kann ein Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{q}_K \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{q}_K \end{bmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{B}_{1M} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \dots & \mathbf{B}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{K1} & \mathbf{B}_{K2} & \dots & \mathbf{B}_{KM} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_M \end{bmatrix}}_{\vec{u}} \quad (3.2.5)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1K} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{L1} & \mathbf{C}_{L2} & \dots & \mathbf{C}_{LK} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{q}_K \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \quad (3.2.6)$$

erstellt werden.

Die hier beschriebene modale Form der Zustandsraumdarstellung ist nicht die einzige mögliche Darstellungsform (vgl. Gawronski [35, 36]), sie ist aber besonders transparent im Hinblick auf die Zusammenhänge zwischen Bewegungs- und Messgleichung, Zustandsraumdarstellung und Übertragungsmatrix.

### 3.2.6 Einfluss von Aktuatorik, Sensorik und elektronischen Komponenten

Das in Gleichung 3.2.4 vorliegende Modell beschreibt die stationären Zusammenhänge zwischen den Anregungen und den modalen Freiheitsgraden. Die Dynamik der Transduktion, also

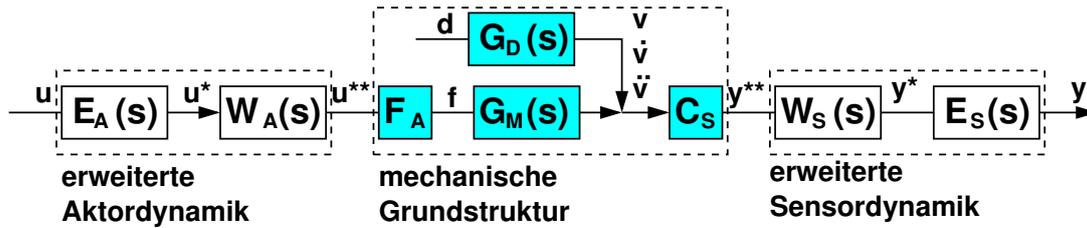


Abb. 3.2.1: Darstellung des Gesamtmodells

die Dynamik bei der Umsetzung von elektrischen in mechanische Größen und umgekehrt, wird bislang nicht berücksichtigt. Hinzu kommt, dass elektronische Komponenten, wie Leistungsverstärker und Tiefpassfilter, die das für die Reglerauslegung relevante Klemmenverhalten ebenfalls mitbestimmen, bisher nicht beschrieben sind [110, 32, 21]. Abbildung 3.2.1 stellt den Ansatz zur Modellierung des Gesamtsystems dar [108, 110]. Die diagonalen Übertragungsmatrizen  $\mathbf{E}_A(s)$  und  $\mathbf{E}_W(s)$  beschreiben die Dynamik der elektronischen Komponenten wie Leistungsverstärker und Filter. Die Beschreibung der Dynamik der Energiewandlung in Aktuatoren und Sensoren ist in den ebenfalls diagonalen Übertragungsmatrizen  $\mathbf{W}_A(s)$  und  $\mathbf{W}_W(s)$  enthalten.

Bei Betrachtung eines skalaren Signalpfads lassen sich die Einflüsse der Leistungselektronik und der Wandlungsvorgänge in einem Faktor

$$G_{E_{om}}(s) = [E_{S_o}(s) \cdot W_{S_o}(s)] [W_{A_m}(s) E_{A_m}(s)]$$

zusammenfassen, so dass für ein skalares Gesamtsystem die Darstellung

$$G_{om}(s) = G_{E_{om}}(s) \hat{G}_{om}(s) = G_{E_{om}}(s) \left( \sum_{k=1}^K \hat{G}_{okm} \right) \quad (3.2.7)$$

gefunden wird.

Bei geeigneter Auslegung der Aktuatorik, Sensorik, Leistungselektronik und Filter sind die dynamischen Einflüsse dieser Komponenten im für die Regelung wichtigen Frequenzbereich vernachlässigbar, so dass die oben stehende Betrachtung entfallen kann. Um dies zu erreichen, muss die Leistungselektronik für Aktuatorik und Sensorik so dimensioniert werden, dass die Knickfrequenzen der Energiewandlungsprozesse deutlich größer sind als die Kennkreisfrequenz des höchstfrequenten, zu bedämpfenden Modes. Die Auslegung von Tiefpassfiltern ist sehr sorgfältig durchzuführen, da Tiefpässe in der Regel schon deutlich unterhalb der Knickfrequenz eine erhebliche Absenkung der Phasenlage mit sich bringen.

In vielen praxisrelevanten Fällen führt die Energiewandlung und die Integration elektronischer Komponenten im interessierenden Frequenzbereich zu einer Absenkung der Phasenlage, ohne dass die Amplitude des Systems verändert wird. In diesen Fällen kann eine Modifikation des modalen Modells, die z.B. in der experimentellen Modalanalyse genutzt wird (vgl. Abschnitt 3.3.2), weiterhelfen. Das beschriebene Verhalten des Systems kann dadurch im Modell abgebildet werden, dass in der modalen Übertragungsfunktion die modale Auslenkung und die modale Schwinggeschwindigkeit *gleichzeitig* berücksichtigt werden, wie dies in Abschnitt 3.2.3 ausgeführt wird. An Stelle von:

$$G_{klm} = \frac{c_{wklm}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2} \quad \text{oder} \quad G_{klm} = \frac{c_{vklm} s}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2}$$

ergibt sich eine modale Übertragungsfunktion

$$G_{klm} = \frac{c_{v_{klm}}s + c_{w_{klm}}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2}.$$

Obwohl die verwendete Sensorik entweder die Geschwindigkeit oder die Auslenkung misst, werden beide Signale gleichzeitig in der Übertragungsfunktion berücksichtigt. Dieser „Trick“ erlaubt die Anpassung der Phasenlage des Modells, ohne dass zusätzliche Modellkomponenten berücksichtigt werden müssen.

### 3.2.7 Weitere Aufgaben bei der Modellbildung

Zwei wesentliche Themen mit Bezug zur Modellbildung wurden bislang nicht beschrieben, die Modellreduktion und modellbasierte Ansätze zur Aktuator- und Sensorplatzierung. Beide Themenkomplexe sind sehr umfangreich und können deswegen im Rahmen dieser Arbeit nicht ausführlich diskutiert werden.

**Modellreduktion:** Untersuchungen zur Modellreduktion für FMS erfolgen entweder unmittelbar am FE-Modell (siehe z.B. Maurer [66]) oder, wie von Gawronski beschrieben [35, 36], am Zustandsraummodell.

Welches Verfahren das Geeignetste ist, hängt von der jeweils untersuchten Struktur und / oder den verwendeten numerischen Werkzeugen ab.

Für die im Rahmen des Innovationskollegs ADAMES durchgeführten regelungstechnischen Untersuchungen wurde fast ausschließlich die Modalreduktion unter Nutzung von Dominanzmaßen [24] im FE-Modell verwendet. Dazu wird für jeden Mode die „Dominanz“, also der Einfluss des Modes auf einen bestimmten Signalpfad berechnet. Der Vektor der modalen Freiheitsgrade und die Modalmatrix werden in Abhängigkeit von den berechneten Dominanzmaßen umsortiert. Anschließend werden der Vektor der modalen Freiheitsgrade und die Modalmatrix in ihren Dimensionen reduziert. Statt  $\vec{q}$  mit  $k$  Elementen wird der Vektor  $\vec{q}_t$  mit  $k - k_t$  Elementen betrachtet, die zugehörige Modalmatrix wird von  $\mathbf{T} = [t_1, \dots, t_k]$  auf  $\mathbf{T}_t = [t_1, \dots, t_{k-k_t}]$  reduziert, wobei nur die modalen Freiheitsgrade mit den  $k - k_t$  größten Dominanzen beibehalten werden. Sämtliche weiteren Modellierungsschritte erfolgen dann mit diesen reduzierten Größen.

**Aktuator- und Sensorpositionierung:** Diese für den Gesamtentwurf sehr wichtigen Themen werden in einer Reihe von Arbeiten ausführlich behandelt. Typische Ansätze nutzen Berechnungen der Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsindizes [36], oder der Eigenformen [32] zur „manuellen“ Auswahl der Positionen. Weiterführende Untersuchungen betten diese Ansätze in Optimierungsverfahren ein, um eine automatische Berechnung geeigneter Positionen zu ermöglichen [102, 85].

Auch zu diesem Thema lassen sich nur sehr schwer allgemeingültige Aussagen machen, welche der Methoden die Beste ist. Natürlich ist die Einbindung von Optimierungsverfahren in die FE-Rechnung, wie sie bei Weber [102] und Schulz [85] vorgestellt wird, ideal. Leider verhindert, beim derzeitigen Stand der Rechentechnik, die Komplexität der Systeme oft die Nutzung derartiger Ansätze.

### 3.3 Experimentelle Modellbildung

Um den Zusammenhang zwischen den Modellen aus Gleichung 3.2.7 und Modellen aus der experimentellen Modellbildung untersuchen zu können, werden in diesem Abschnitt in einer kurzen Übersicht die Ergebnisse verschiedener, für die Modellidentifikation von FMS geeigneter Identifikationsverfahren diskutiert.

Modelle von flexiblen mechanischen Strukturen weisen, bedingt durch die verteilte Struktur, eine hohe Anzahl zu identifizierender Parameter auf. Daher ist die Modellidentifikation für FMS kein triviales Unterfangen. Dementsprechend werden in der Literatur einige Verfahren vorgestellt, die speziell zu diesem Zweck entwickelt wurden [96, 55, 69]. Herkömmliche Verfahren, wie sie in [61, 62, 52] beschrieben sind, lassen sich ebenfalls anwenden, führen aber in der Praxis nur bei verhältnismäßig einfachen Systemen auf zuverlässige Ergebnisse.

#### 3.3.1 Zustandsraummodell

Zustandsraummodelle können mit der konventionellen Prädiktionsfehlermethode [61, 62], mit den von Juang [55] entwickelten Realisierungsalgorithmen (z.B. ERA, ERA/ OKID) oder mit der von Van Overschee und de Moor vorgestellten N4SID Methode [96] gewonnen werden.

Ergebnis dieser Identifikationsalgorithmen sind zeitdiskrete Zustandsraummodelle

$$\vec{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \vec{x}[k] + \mathbf{B}_d \vec{u}[k] \quad \vec{y}[k] = \mathbf{C}_d \vec{x}[k]$$

Die Parameter der Systemmatrizen  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ , und  $\mathbf{C}_d$  sind nicht eindeutig. Durch Koordinatentransformation des Zustandsvektors kann, bei gleichem Klemmenverhalten, zwischen dem Eingangsvektor  $\vec{u}$  und dem Messvektor  $\vec{y}$ , eine beliebige Anzahl von Parametrierungen erzielt werden [27]. Dadurch wird ein Vergleich der Parameter zum Zweck der Robustheitsuntersuchung zumindest erschwert.

Als Lösung bietet sich an, mit der Jordan-Transformation eine kanonische Darstellungsform zu berechnen, deren Parameter eindeutig sind [27]. Aus der Jordan-Transformation wird eine ebenfalls eindeutige modale Darstellung der in Gleichung 3.2.5 beschriebenen Form gewonnen [36], aus der für die einzelnen Signalpfade Übertragungsfunktionen wie in Gleichung 3.2.4 abgeleitet werden können.

#### 3.3.2 Experimentelle Modalanalyse

Die Experimentelle Modalanalyse (EMA) (siehe z.B. [69]) gehört zu den indirekten Methoden der Identifikation. Darunter werden Methoden verstanden, die physikalische oder systemdynamische Parameter schätzen, um eine weiterführende Analyse zu ermöglichen. Die Erstellung einer Übertragungsfunktion ist nur eine der Analysemöglichkeiten, für diese Arbeit aber die Wesentliche.

In ihrer Grundform wird die EMA benutzt, um Kennkreisfrequenzen, Dämpfungen und Eigenformen einer mechanischen Struktur zu identifizieren. Werden statt der üblichen Aktuatorik und Sensorik die später im System integrierten Aktoren und Sensoren verwendet, können aus den berechneten modalen Größen Modelle in der folgenden Form

$$\frac{Y_o(s)}{U_m(s)} = G_{om}(s) = \sum_{k=1}^K \left( \frac{c_{R_{okm}} + j c_{I_{okm}}}{s + \delta_k + j \omega_{0k}} + \frac{c_{R_{okm}} - j c_{I_{okm}}}{s + \delta_k - j \omega_{0k}} \right)$$

bestimmt werden (siehe z.B. [63]). Durch einfache Aufsummierung des eingeklammerten Terms, erhält man die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y_o(s)}{U_m(s)} = G_{om}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{[2c_{R_{okm}}(s + \delta_k) + (2c_{I_{okm}}\omega_{0k})]}{s^2 + 2s\delta_k + \delta_k^2 + \omega_{0k}^2} \stackrel{!}{=} \frac{c_{v_{okm}}s + c_{w_{okm}}}{s^2 + 2s\delta_k + \omega_k^2}, \quad (3.3.1)$$

die in ihrer Form der Übertragungsfunktion in Gleichung 3.2.4 entspricht.

### 3.3.3 Übertragungsfunktionen

Direkte Methoden zur Bestimmung von Übertragungsfunktionen, wie die Methode der kleinsten Fehlerquadrate oder die Ausgangsfehlermethode [61, 62], führen unmittelbar auf zeitdiskrete Übertragungsfunktionen der Form

$$G(z^{-1}) = \frac{\sum_{p=1}^P b_p z^{-p}}{1 + \sum_{q=1}^Q a_q z^{-q}}.$$

Deren Parameter sind zwar eindeutig, aber physikalisch nicht mehr interpretierbar, so dass eine Umrechnung des Modells erforderlich wird. Auch hier bietet sich eine modale zeitkontinuierliche Darstellung an, aus der für jeden untersuchten Signalpfad eine Übertragungsfunktion, wie in Gleichung 3.2.4 dargestellt, resultiert.

### 3.3.4 FE-Modelle nach Model-Updating

Durch Model-Updating Methoden können FE-Modelle unter Einbeziehung experimenteller Daten deutlich verbessert werden [30], so dass die Modelle zur Synthese von Reglern genutzt werden können [110]. Dazu werden aus verbesserten FE-Modellen, die ausreichend gut mit den Messdaten übereinstimmen, regelungstechnische Wirkmodelle gewonnen. Dazu werden die in den Abschnitten 3.2.2 bis 3.2.5 beschriebenen Rechenschritte verwendet.

### 3.3.5 Zusammenhang zwischen experimentell und theoretisch hergeleiteten Modellen

Die Ergebnisse der verschiedenen Identifikationsverfahren weisen entweder einen sehr einfachen Zusammenhang mit den modalen Übertragungsfunktionen aus Gleichung 3.2.4 auf, oder sie müssen, weil nicht eindeutig bzw. nicht physikalisch interpretierbar, umgerechnet werden.

Als Konsequenz aus dieser Tatsache, werden die modalen Übertragungsfunktionen aus Gleichung 3.2.4 als Standardmodell für alle folgenden Untersuchungen ausgewählt.

## 3.4 Zusammenfassung

Die Modellbildung für flexible mechanische Strukturen wird durch die verteilten Eigenschaften dieser Systeme erschwert. Die zur Beschreibung erforderlichen partiellen Differentialgleichungen lassen sich nur in Ausnahmefällen analytisch lösen.

Mit der Methode der finiten Elemente werden physikalisch motivierte Beschreibungen gewonnen. Aus der Analyse der FE-Modelle können wesentliche Eigenschaften der Systeme abgeleitet werden. Trotzdem müssen die aus der FEM stammenden Modelle noch ergänzt werden, um ein für die Reglersynthese nutzbares Wirkmodell zu erhalten.

Durch die modale Darstellung sind die Zusammenhänge zwischen modalem FE-Modell, Zustandsraummodell und Übertragungsfunktion sehr transparent. Dies gilt auch nach der Integration dynamischer Beschreibungen für die Sensorik und Aktorik. Die Ergebnisse verschiedener Methoden zur Modellidentifikation sind entweder unmittelbar in modaler Form gegeben oder in modaler Form besonders gut interpretierbar.

Aus verschiedenen Verfahren zur Modellidentifikation für flexible mechanische Strukturen resultieren unterschiedliche Modelltypen. Um die Parameter dieser Modelle für die Analyse der Modellunsicherheiten vergleichbar zu machen, sind Umrechnungen der Modelle erforderlich. Es bietet sich an, die Umrechnung so durchzuführen, dass modale Darstellungen resultieren. Diese stimmen dann unmittelbar mit den modalen Wirkmodellen aus der Modellbildung unter Nutzung der FEM überein.

## 4. TEMPLATEBERECHNUNG FÜR FLEXIBLE MECHANISCHE STRUKTUREN

Inhalt dieses Kapitels ist die, zur Berücksichtigung von parametrischen Modellunsicherheiten in der QFT-Reglersynthese erforderliche, Berechnung von Templates für flexible mechanische Strukturen. Die parametrischen Unsicherheiten, die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen modalen Übertragungsfunktionen, werden auf Wertemengen in der komplexen Ebene abgebildet. Die hierzu genutzten Methoden sind besonders für flexible mechanische Strukturen geeignet und sehr effizient.

### 4.1 Einleitung

#### 4.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise

Linear-zeitinvariante Modelle liefern nur in Ausnahmefällen eine exakte Beschreibung des zu beeinflussenden dynamischen Systems. Dies gilt auch für Modelle, die auf der in Kapitel 3 gewonnenen Modellstruktur basieren. Aus Nichtlinearitäten, nicht berücksichtigten physikalischen Effekten und nur ungenau bestimmbar Parameterwerten resultieren Abweichungen des modellierten vom realen Systemverhalten.

Mechanische Strukturen werden in vielen Anwendungen mit variablen Lasten beaufschlagt, oder unterliegen zeitlich variierenden Randbedingungen (siehe z.B. [59]). Daraus resultiert eine weitere Quelle für Modellunsicherheiten, da derartige Einflüsse Änderungen der Systemdynamik nach sich ziehen, die sich auf alle Moden auswirken.

Für den Ingenieur sind Unsicherheitsbeschreibungen in Form parametrischer Unsicherheiten intuitiv verständlich und naheliegend, für den Regelungstechniker ziehen sie jedoch Schwierigkeiten im Hinblick auf die Berücksichtigung bei der Reglersynthese nach sich. Dies führt dazu, dass in der Literatur zur robusten Regelung zwar die physikalische Interpretierbarkeit unsicherer Modellparameter gefordert wird (z.B. [82, 1]), verbreitete moderne „robuste“ Entwurfsverfahren parametrische Unsicherheiten aber nicht berücksichtigen können [87, 83].

In der QFT werden die Auswirkungen parametrischer Modellunsicherheiten in Form von Templates, also in Form ihrer Auswirkungen auf Betrag und Phasenlage bzw. Real- und Imaginärteil des komplexen Frequenzganges, für die weiteren Berechnungsschritte verfügbar gemacht. Für jede untersuchte Frequenz wird das Hyperrechteck unsicherer Parameter auf die komplexe Ebene abgebildet.

Da die Beschreibung der unsicheren Parameter in der QFT in Form von Intervallen im  $\mathbb{R}$  gegeben ist, sind die Hyperrechtecke unsicherer Parameter als Skalarprodukte der einzelnen Intervalle unendliche Mengen. Die Abbildung dieser Mengen auf die komplexe Ebene erfolgt durch numerische Approximationsverfahren. Im Regelfall werden Templateapproximationen durch Gridding

berechnet (vgl. Kapitel 2), so auch in der Matlab QFT-Toolbox [10]. Dabei ergeben sich jedoch Schwierigkeiten, wenn die Anzahl unsicherer Parameter groß ist, und einzelne Intervalle durch eine große Anzahl Stützstellen approximiert werden müssen. In diesen Fällen wächst der numerische Aufwand zur Templateapproximation stark an.

Eine Reihe von Veröffentlichungen beschäftigt sich mit der Verminderung des Aufwandes zur Templateberechnung ([5, 31, 60, 19], etc.). Beim derzeitigen Stand der Forschung sind vereinfachte Methoden der Templateberechnung allerdings nur anwendbar, wenn die Übertragungsfunktionen affin parameterabhängig sind [5, 31], oder wenn durch eine Überabschätzung Konservativität in der Beschreibung der Modellunsicherheiten zulässig ist [60, 19]. Kann das jeweils untersuchte System nicht durch eine affine Übertragungsfunktion beschrieben werden, ist jeweils abzuwägen, welche Vorgehensweise für den Einzelfall günstiger ist, Gridding oder Überabschätzung.

### *Besonderheiten flexibler mechanischer Strukturen*

Modelle flexibler mechanischer Strukturen weisen in der Regel eine sehr große Zahl unsicherer Parameter auf, die zudem fast immer nichtlinear auf die Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynomen der zugehörigen Übertragungsfunktionen wirken. Hinzu kommt, dass in Frequenzbereichen nahe einer Resonanzfrequenz Amplitude und Phasenlage eines resonanten Systems sehr empfindlich in Bezug auf die Systemparameter sind, so dass die Anzahl der Stützstellen beim Gridding groß sein muss. Daher stellt die Berechnung von Templates für FMS eine erhebliche Schwierigkeit bei der Anwendung der QFT dar.

#### *4.1.2 Zu lösende Aufgaben*

Um die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Modelle für die QFT nutzen zu können, muss ein Ansatz geschaffen werden, um aus den unsicheren modalen Parametern Templates zu berechnen. Dabei sind die folgenden Anforderungen zu erfüllen:

- Der Berechnungsansatz muss effizient zu implementieren sein, und
- eine ausreichend exakte Berechnung der Templates zulassen.
- Falls die Methode inhärent konservativ ist, muss eine Möglichkeit geschaffen werden, die Konservativität gezielt zu vermindern, gegebenenfalls auf Kosten eines erhöhten Berechnungsaufwandes.

Wesentlich für diese Aufgabe ist auch, dass mit der vorzuschlagenden Templateberechnung sowohl lokale, jeweils nur auf einen Mode wirkende, als auch globale, auf alle Moden wirkende, Unsicherheiten berücksichtigt werden können.

#### *4.1.3 Gliederung*

Das Kapitel gliedert sich in fünf Abschnitte. Nach der Einleitung wird im Abschnitt 4.2 zunächst eine kurze Übersicht über die Arbeiten von Bartlett [5] und Fu [31] gegeben, die mit einer Einschätzung der Möglichkeiten, diese Arbeiten unmittelbar auf flexible mechanische Strukturen

anzuwenden, abschließt. Im folgenden dritten Abschnitt 4.3 wird die Berechnung modaler Templates unter Nutzung der Arbeiten von Bartlett und Fu, die Addition der modalen Templates zum Gesamttemplate und ein Vorschlag für die algorithmische Aufbereitung der Templateberechnung durch Addition von modalen Templates vorgestellt. Der Abschnitt schließt mit einer Betrachtung der Nutzbarkeit und der Einschränkungen dieser Vorgehensweise. Im Abschnitt 4.4 wird die Templateberechnung durch Addition modaler Templates mit Gridding kombiniert. Dies erlaubt die Berücksichtigung globaler Modellunsicherheiten und die geforderte Abwägung zwischen Rechenaufwand und Konservativität. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung in Abschnitt 4.5.

#### 4.1.4 Templateberechnung im Entwurf von Regelungssystemen

Die Templateberechnung ist für das weitere Vorgehen im Rahmen der QFT erforderlich. Templates und nominales Modell werden, zusammen mit den Spezifikationen, in zulässige Wertemengen für den nominalen offenen Regelkreis umgerechnet. Für die vorliegende Arbeit wird aus den Templates, dem Frequenzgang des nominalen Streckenmodells und den Spezifikationen das Gütefunktional für die Optimierung abgeleitet.

Die Templateberechnung ist noch als Teil der Modellbildung zu betrachten. Während das nominale Streckenmodell als Entwurfsmodell betrachtet wird, repräsentieren die Templates das wahre Modell.

## 4.2 Vereinfachte Berechnung von Templates

Die Arbeiten von Bartlett und Fu [5, 31] sind zwar für die Berechnung von Templates für flexible mechanische Strukturen im Regelfall nicht unmittelbar zu verwenden (vgl. Abschnitt 4.2.4), sie werden jedoch als Grundlage für die hier vorgestellte Methode genutzt.

### 4.2.1 Grundlagen

Die Methoden zur vereinfachten Templateberechnung verwenden die folgenden Definitionen [5, 31]:

**Definition 4.2.1** Die Menge der Punkte auf dem Hyperrechteck der unsicheren Parameter  $\mathbb{P}$ , für die alle Parameter entweder ihren jeweils minimalen oder maximalen Wert annehmen:

$$\mathbb{P}_{Ecke} = \{ \vec{p} \mid \vec{p} \in \mathbb{P}, (p_k = p_{k_{MIN}}) \wedge (p_k = p_{k_{MAX}}) \forall k = 1, 2, \dots, K \}$$

heißt „Ecke (des Hyperrechtecks der unsicheren Parameter)“. Die Abbildung von  $\mathbb{P}_{Ecke}$  durch den komplexen Frequenzgang auf die komplexe Ebene wird als „Ecke des Templates“  $\mathbb{T}_{Ecke}$  bezeichnet.  $\square$

**Definition 4.2.2** Die Menge der Punkte auf dem Hyperrechteck der unsicheren Parameter  $\mathbb{P}$ , für die ein Parameter einen beliebigen Wert innerhalb seines Intervalls annehmen darf, während alle anderen Parameter ihren minimalen oder maximalen Wert annehmen:

$$\mathbb{P}_{Kante} = \{ \vec{p} \mid \vec{p} \in \mathbb{P}, \vec{p}_l \in [p_{l_{MIN}}, p_{l_{MAX}}], (p_k = p_{k_{MIN}}) \wedge (p_k = p_{k_{MAX}}) \forall k = 1, 2, \dots, K, k \neq l \}$$

heißt „Kante (des Hyperrechtecks der unsicheren Parameter)“. Die Abbildung von  $\mathbb{P}_{Kante}$  durch den komplexen Frequenzgang auf die komplexe Ebene wird als „Kante des Templates“  $\mathbb{T}_{Kante}$  bezeichnet.  $\square$

Jede Kante eines Hyperrechtecks verbindet zwei Ecken des Hyperrechtecks, ebenso verbindet jede Kante eines Templates zwei Ecken des Templates.

Ein Teil der Kanten des  $n$ -dimensionalen Hyperrechtecks wird durch die Abbildung auf die 2-dimensionale komplexe Ebene in das Innere des Templates abgebildet. Diese Kanten sind für weitere Berechnungen nicht mehr von Bedeutung. Eine wichtige Untermenge der Kanten  $\mathbb{T}_{Kante} = G(j\Omega, \mathbb{P}_{Kante})$  eines Templates ist daher die Berandung  $\mathbb{T}_{Rand}$ , also die Menge der Kanten, die das Template nach außen begrenzen.

#### 4.2.2 Vereinfachte Templateberechnung nach Bartlett

Für Intervallsysteme gilt das von Bartlett [4] aufgestellte Theorem, das hier ohne Beweis angegeben wird:

**Theorem 4.1** *Ist  $G(s, \vec{p})$  ein Intervallsystem, und existiert keine komplexe Frequenz  $s = j\Omega$ , bei der Zähler und Nenner, für eine beliebige zulässige Parameterkombination, gleichzeitig Null werden, dann ist*

$$\mathbb{T}_{Rand} = Rand(G_k(j\Omega, \mathbb{P})) \subset G_k(j\Omega, \mathbb{P}_{Kante})$$

Die durch Abbildung der Kanten des Templates auf die komplexe Ebene entstehenden Kanten des Templates beinhalten demnach die Ränder des Templates.

Zur Templateberechnung werden an Stelle der Abbildung des gesamten  $n$ -dimensionalen Hyperrechtecks der unsicheren Parameter lediglich die  $n \cdot 2^{(n-1)}$  eindimensionalen Kanten abgebildet. Für die numerische Implementierung werden die Kanten jeweils durch Gridding über dem zur Kante  $k$  gehörenden Parameter  $p_k$  approximiert. Die resultierenden Punkte werden als Linienzug miteinander verbunden.

#### 4.2.3 Parametrierte Templatedarstellung nach Fu

Von Fu [31] stammt das folgende Theorem, das ebenfalls ohne Beweis angegeben wird:

**Theorem 4.2** *Sei  $\Omega$  eine feste Frequenz und  $E$  eine Kante des Hyperrechtecks mit den Endpunkten  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$ , sowie dem Mittelpunkt  $\vec{p}_M$ . Der komplexe Frequenzgang  $G(j\Omega, \vec{p})$  sei für alle Werte von  $E$  in seinem Betrag von oben beschränkt. Dann ist die Abbildung der Kante  $E$  auf die komplexe Ebene  $G(j\Omega, E)$  ein Kreissegment oder Geradenabschnitt in der komplexen Ebene, der im Punkt  $G(j\Omega, \vec{p}_1)$  beginnt, durch den Punkt  $G(j\Omega, \vec{p}_M)$  verläuft und im Punkt  $G(j\Omega, \vec{p}_2)$  endet. Ein Geradenabschnitt wird dabei als Kreisbogen auf einem Kreis mit unendlichem Radius betrachtet.*

*Der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Kreisbogen verläuft, ist durch den Schnittpunkt der beiden Geraden*

$$\begin{aligned} L_1(\alpha) &:= \frac{1}{2}(\vec{p}_M + \vec{p}_1) + j\alpha(\vec{p}_M - \vec{p}_1) \\ L_2(\beta) &:= \frac{1}{2}(\vec{p}_2 + \vec{p}_M) + j\beta(\vec{p}_2 - \vec{p}_M) \end{aligned}$$

definiert.

Nutzt man dieses Theorem, tritt zur Berechnung der Kanten des Templates an die Stelle von Gridding auf einem Parameter die Berechnung der parametrischen Darstellung eines Kreises

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix} = \vec{z}_0 + R \cdot \vec{z}_\Delta(\gamma) = \begin{bmatrix} z_{r0} \\ z_{i0} \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{bmatrix}$$

mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $\vec{z}_0$  bzw. eines Geradenabschnittes

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix} = \vec{z}_0 + \gamma \cdot \vec{z}_\Delta(R) = \begin{bmatrix} z_{r0} \\ z_{i0} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

mit Aufpunkt  $\vec{z}_0$  und Steigung  $R$ .

Zur Berechnung von Radius und Mittelpunkt werden die im Theorem angegebenen Gleichungen nach den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  gelöst. Durch Einsetzen der Ergebnisse in die beiden Gleichungen wird der Mittelpunkt  $\vec{z}_0$  berechnet. Der Radius ergibt sich dann aus dem Betrag des Vektors vom Mittelpunkt zu  $\vec{p}_M$ . Ergibt sich stattdessen ein Geradensegment, ist der Aufpunkt aus  $\vec{p}_1$  gegeben, die Steigung berechnet sich aus dem Vektor  $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ .

#### 4.2.4 Zur Nutzung der vereinfachten Templateberechnung für FMS

Als Basis der Templateberechnung wird die in Gleichung 3.2.4 gegebene modale Übertragungsfunktion herangezogen:

$$G_{om}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{V_{okm}}s + c_{W_{okm}}}{s^2 + 2s\delta_k + \omega_k^2} = \sum_{k=1}^K G_{okm}(s)$$

Multipliziert man die Summanden der Übertragungsfunktion aus, um das Gesamtmodell zu erhalten, ergeben sich Nenner- und Zählerpolynom als Produkte bzw. als Summe von Produkten der modalen Zähler- und Nennerpolynome. Daher ist  $G_{om}(s)$  nach der Ausmultiplikation in einer multiaffinen Darstellung gegeben. Die Templateberechnung nach Bartlett und nach Fu kommt für FMS daher bei Nutzung des gegebenen Modelltyps nicht in Frage.

Als Alternative könnten der Ansatz von Lasky und Ravani [60] oder Überabschätzungen der Parameterintervalle genutzt werden. Um die inhärente Konservativität dieser Vorgehensweisen zu vermeiden, wird in dieser Arbeit stattdessen die Templateberechnung durch Addition modaler Templates verfolgt.

### 4.3 Templateberechnung durch Addition von Wertemengen

In diesem Abschnitt werden Streckenmodelle betrachtet, die sich als Summe modaler Teilmodelle darstellen lassen, deren Modalparameter nicht exakt bestimmbar sind:

$$G(s, \vec{p}) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{V_{okm}}s + c_{W_{okm}}}{s^2 + 2s\delta_k + \omega_k^2} = \sum_{k=1}^K G_{okm}(s, \vec{p}_k)$$

Die modalen Übertragungsfunktionen sind Intervallsysteme, deren Parameter jeweils voneinander unabhängig sind. Modelle, die diese Voraussetzungen erfüllen, ergeben sich zum Beispiel aus der experimentellen Modalanalyse oder bei Nutzung anderer Verfahren zur Modellidentifikation.

Die Berechnung von Templates durch Addition modaler Templates erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden für alle betrachteten Moden die modalen Templates berechnet. Anschließend werden diese additiv miteinander verknüpft.

Sowohl bei der Berechnung der modalen Templates, als auch bei der Addition entstehen Kanten, die im Inneren der jeweils als Zwischenergebnis entstehenden Templates liegen. Diese werden mit einem „Plane-Sweep“-Algorithmus entfernt, um den Aufwand für die Berechnung zu verringern.

#### 4.3.1 Berechnung modaler Templates

Der Vektor  $\vec{p}_{okm}$  der unsicheren Parameter in  $G_{om}(s)$  umfasst für jeden Mode die vier Parameter:

$$p_{okm} = \{\hat{c}_{v_{okm}}, \hat{c}_{w_{okm}}, \delta_k, \omega_k\}$$

Für jeden der Parameter müssen aus der theoretischen oder experimentellen Modellbildung Unter- und Obergrenze bekannt sein. Das Hyperrechteck der unsicheren modalen Parameter wird durch das Skalarprodukt der zulässigen Intervalle definiert:

$$\mathbb{P}_{okm} = \left\{ \left[ \hat{c}_{v_{okm}}^{MIN}, \hat{c}_{v_{okm}}^{MAX} \right] \times \left[ \hat{c}_{w_{okm}}^{MIN}, \hat{c}_{w_{okm}}^{MAX} \right] \times \left[ \delta_k^{MIN}, \delta_k^{MAX} \right] \times \left[ \omega_k^{MIN}, \omega_k^{MAX} \right] \right\}$$

Die Summanden des verwendeten modalen Modells sind Intervallsysteme, da jeder der vier unsicheren Parameter einen Koeffizienten von Zähler- oder Nennerpolynom darstellt. Für diese Systeme lassen sich die Ränder der Templates mit der von Fu beschriebenen Methode berechnen.

In Abbildung 4.3.1 ist ein Modaltemplate für die Parameterintervalle  $c_v \in [8, 48]$ ,  $c_w \in [8, 24]$ ,  $\delta \in [0.08, 0.36]$  und  $\omega \in [8, 12]$  bei der Frequenz  $\Omega = 8$  dargestellt. Der durch Gridding berechneten Templateapproximation wird eine mit der Methode von Fu berechnete Approximation gegenübergestellt. Es zeigt sich deutlich, dass die Abbildung der Kanten des Hyperrechtecks eine sehr gute Approximation des Templates liefert. Die Approximation durch Gridding erfolgt hier mit 100000 Stützstellen. Die Methode von Fu erfordert lediglich 96 Auswertungen des komplexen Frequenzganges. Der Abstand zwischen zwei Punkten auf einem Segment ist kleiner als Eins gewählt, so dass weniger als 10000 Punkte berechnet wurden.

#### 4.3.2 Addition von Wertemengen in der komplexen Ebene

Um aus modalen Templates ein Summentemplate zu berechnen, müssen Wertemengen in der komplexen Ebene addiert werden. Diese Aufgabenstellung entspricht der von Ackermann [1] beschriebenen Addition von Mengen der Pollagen in der komplexen Ebene. Daher kann die folgende Beschreibung aus [1] entnommen werden.

Gegeben sind die einfach zusammenhängenden Wertemengen  $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{C}$  und  $\mathbb{T}_2 \subset \mathbb{C}$ , sowie deren Berandungen  $Rand(\mathbb{T}_1)$  und  $Rand(\mathbb{T}_2)$ .

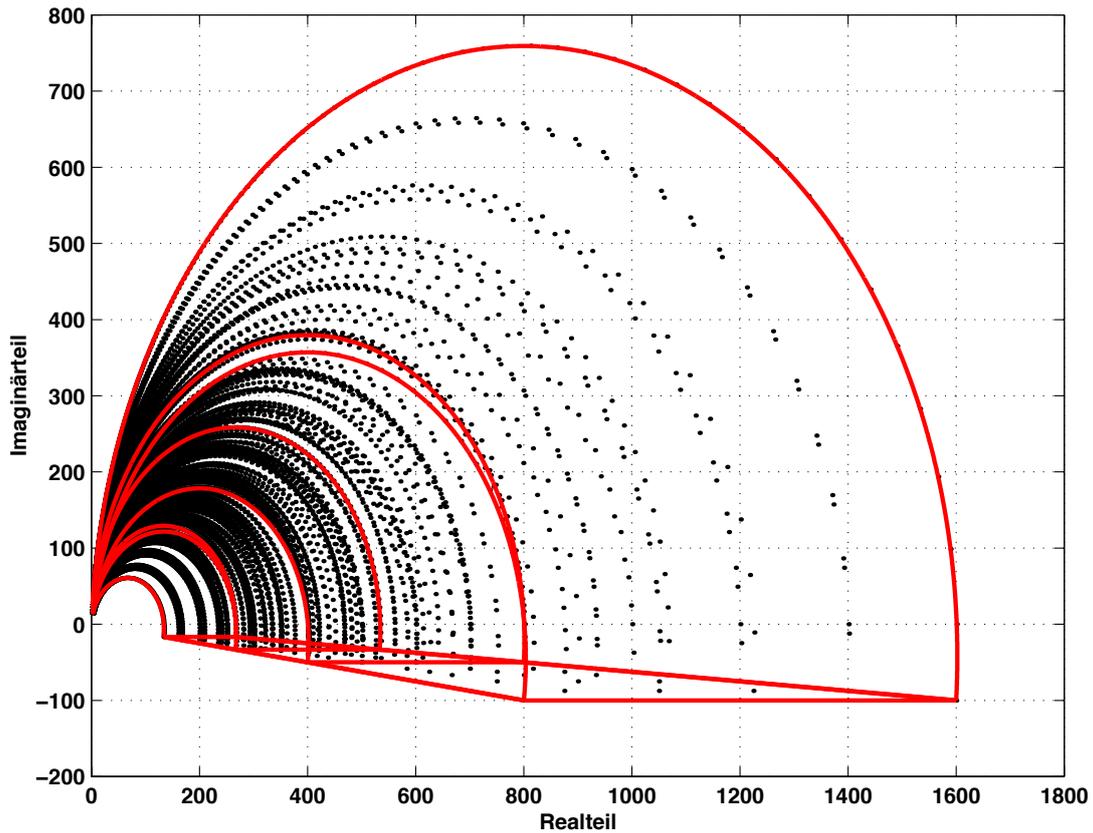


Abb. 4.3.1: Modales Template (Gridding / Methode von Fu)

Die Addition der beiden Wertemengen ist als Menge der Addition aller Punkte der Einzelmengen definiert:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 = \{t = t_1 + t_2 \mid t_1 \in \mathbb{T}_1, t_2 \in \mathbb{T}_2\} \quad (4.3.1)$$

Die Summe der Berandung zweier einfach zusammenhängender Mengen in der komplexen Ebene ist eine Obermenge der Berandung der Summe der beiden Mengen. Dies wird im folgenden Satz präziser formuliert:

**Satz 4.1** Gegeben seien die einfach zusammenhängenden Wertemengen  $\mathbb{T}_1$  und  $\mathbb{T}_2$  in der komplexen Ebene mit den Berandungen  $\text{Rand}(\mathbb{T})_1$  und  $\text{Rand}(\mathbb{T})_2$ . Ist weiterhin die Menge  $\mathbb{T}$  durch Gleichung 4.3.1 definiert, dann gilt:

$$\text{Rand}(\mathbb{T}) \subset \text{Rand}(\mathbb{T})_1 + \text{Rand}(\mathbb{T})_2$$

Die Berandung des Summentemplates  $\mathbb{C}$  ist also eine Teilmenge der Summe der Berandungen der Einzeltemplates. Da sich das gesamte Template aus seinem Rand bestimmen lässt, wird die Summation der einfach zusammenhängenden Wertemengen auf die Summation der Ränder dieser Mengen reduziert.

### 4.3.3 Anwendung auf die Addition modaler Teiltemplates

Die Ränder der modalen Teiltemplates  $\mathbb{T}_k$  sind, durch Nutzung der Berechnungsmethode von Fu, als Kreis- oder Geradensegmente gegeben. Satz 4.1 kann damit zur Templateaddition genutzt werden. Die Ränder werden aufaddiert, durch die Summen der Ränder der Einzeltemplates ist das Summentemplate bestimmt:

$$\mathbb{T}_{Rand} = \sum_{k=1}^K \mathbb{T}_{kRand}$$

Die Addition der berechneten Teiltemplates erfolgt sukzessiv: Addition zweier Templates, Addition eines dritten Templates zum Zwischenergebnis, usw.

Jede Kante eines Teiltemplates wird mit jeder Kante des anderen Templates addiert. Bei jeder Addition von zwei Kanten entstehen vier neue Kanten. Für die Addition zweier Kreissegmente  $S_1(\vec{x}_{0_1}, R_1, \gamma_1)$  und  $S_2(\vec{x}_{0_2}, R_2, \gamma_2)$  ist zum Beispiel die Summe

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_{0_1} + \vec{x}_{0_2} + R_1 \cdot \vec{x}_{\Delta_1}(\gamma_1) + R_2 \cdot \vec{x}_{\Delta_2}(\gamma_2)$$

woraus sich die vier Segmente

$$\begin{array}{ll} S_{S1}([\vec{x}_{0_1} + \vec{x}_{0_2} + R_1 \vec{x}_{\Delta_1}(\gamma_{1MIN})], R_2, \gamma_2) & S_{S2}([\vec{x}_{0_1} + \vec{x}_{0_2} + R_1 \vec{x}_{\Delta_1}(\gamma_{1MAX})], R_2, \gamma_2) \\ S_{S3}([\vec{x}_{0_1} + \vec{x}_{0_2} + R_2 \vec{x}_{\Delta_2}(\gamma_{2MIN})], R_1, \gamma_1) & S_{S4}([\vec{x}_{0_1} + \vec{x}_{0_2} + R_2 \vec{x}_{\Delta_2}(\gamma_{2MAX})], R_1, \gamma_1) \end{array}$$

ergeben. Analoge Berechnungen lassen sich für die Addition eines Kreissegments mit einem Geradenabschnitt und für die Addition zweier Geradenabschnitte durchführen.

Die Addition zweier Templates ist in Abbildung 4.3.2 an einem Beispiel dargestellt. Die modalen Templates wurden für die Frequenz  $\Omega = 6Rad/s$  berechnet. Die Parameter der Moden sind durch die Intervalle

	Erster Mode	Zweiter Mode
$c_v$ :	$c_{v_1} \in [8, 48]$	$c_{v_2} \in [180, 880]$
$c_w$ :	$c_{w_1} \in [8, 24]$	$c_{w_2} \in [180, 440]$
$\delta$ :	$\delta_1 \in [0.08, 0.36]$	$\delta_2 \in [0.18, 0.66]$
$\omega$ :	$\omega_1 \in [8, 12]$	$\omega \in [18, 22]$

beschränkt.

Hier wird deutlich, dass das Summentemplate eine ganze Anzahl Liniensegmente im Inneren des Templates besitzt, obwohl die Summandentemplates keine inneren Kanten aufweisen. Durch Entfernen der Segmente im Inneren kann der Rechenaufwand verringert werden, wenn weitere Templates hinzuaddiert werden. Ein Algorithmus zur Elimination innerer Kantensegmente wird in Abschnitt 4.3.5 vorgestellt.

### 4.3.4 Zulässigkeit der Addition von modalen Templates

Voraussetzung für die Addition von Wertemengen ist nach Ackermann [1], dass die Summanden der Addition von Wertemengen einfach zusammenhängend sind. Für die Addition modaler Teiltemplates müssen alle Teiltemplates dieser Eigenschaft genügen.

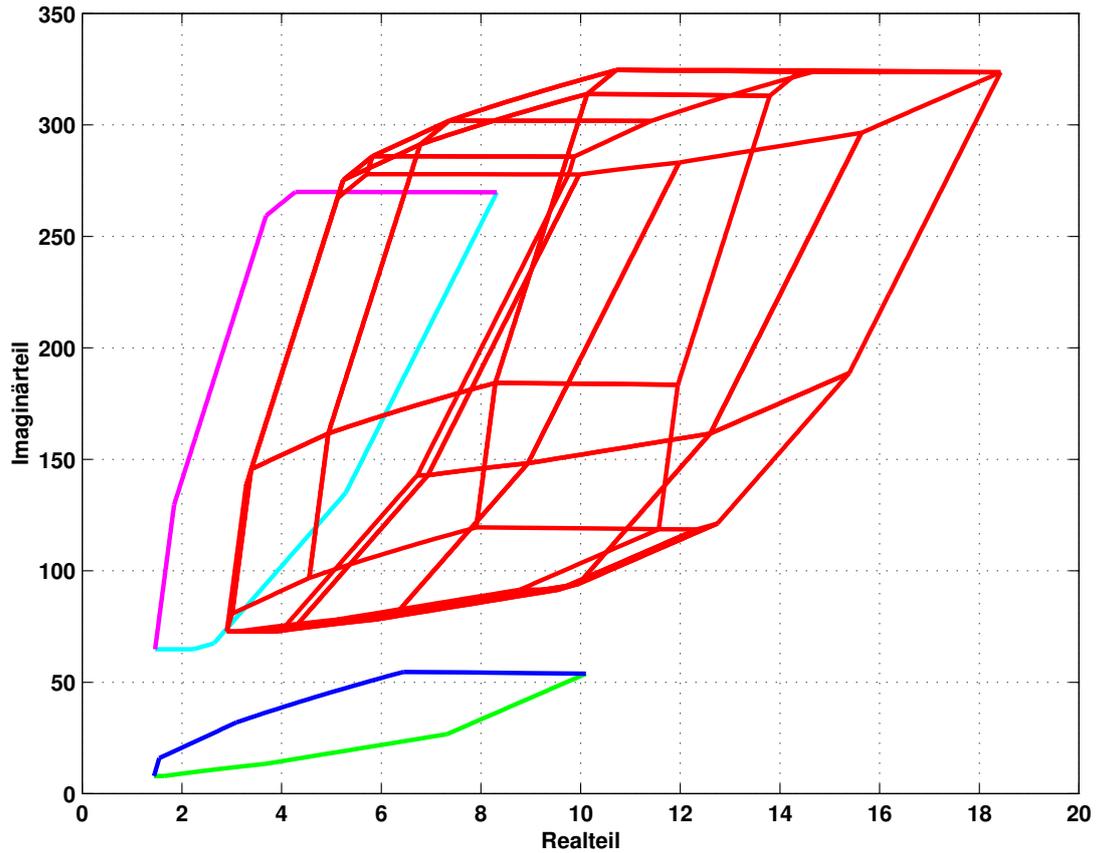


Abb. 4.3.2: Addition von Templates

Für eine feste Frequenz  $\Omega$  werden die unsicheren modalen Parameter über den komplexen Frequenzgang

$$G_k(j\Omega) = \frac{\hat{c}_{v_{okm}} + j\Omega \hat{c}_{\dot{v}_{okm}}}{\omega_k^2 - \Omega^2 + j\Omega 2\delta_k} = \frac{(\hat{c}_{v_{okm}} + j\Omega \hat{c}_{\dot{v}_{okm}})(\omega_k^2 - \Omega^2 - j\Omega 2\delta_k)}{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta_k^2\Omega^2}$$

abgebildet. Ein modales Teiltemplate ist dann eine einfach zusammenhängende Menge, wenn die Intervalle jedes einzelnen Parameters stetig auf die komplexe Ebene abgebildet werden, wenn also die vier Parameter in einer stetigen Funktion auf Real- und Imaginärteil von  $G_k$  abgebildet werden [13].

Die modalen Templates sind demnach einfach zusammenhängende Mengen, wenn keine Parameterkombination existiert, für die

$$(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta_k^2\Omega^2 = 0$$

gilt, wenn also der zulässige Wertebereich für die Abklingkonstante  $\delta_k$  den Wert Null nicht enthält.

#### Vergleich der Addition von Modaltemplates mit Gridding

Unter den Voraussetzungen, die in der Einleitung zu Abschnitt 4.3.2 genannt wurden, ist die Berechnung von Templates durch Addition von Wertemengen eine sehr gut nutzbare, genaue

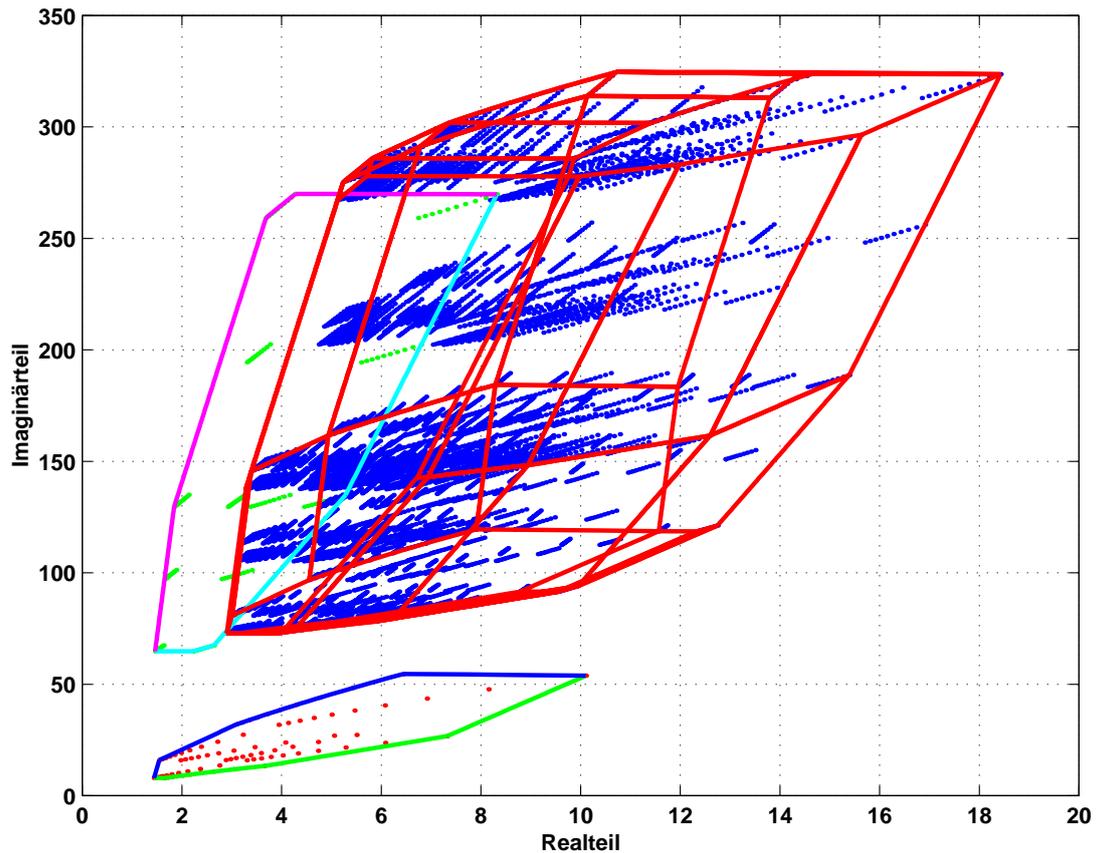


Abb. 4.3.3: Vergleich: Gridding und vereinfachte Berechnung

und effiziente Methode, deren Rechenaufwand deutlich geringer ist, als der bei der Nutzung von Gridding .

Abbildung 4.3.3 stellt das Ergebnis der vereinfachten Templateberechnung für die beiden in Abschnitt 4.3.3 beschriebenen Moden dar. Der berechneten Templateapproximation wird als Vergleich eine durch Gridding berechnete Approximation gegenübergestellt. Die durch Gridding berechnete Approximation weist 1 000 000 Stützstellen auf, die vereinfachte Berechnung erfolgte mit 196 Auswertungen des komplexen Frequenzganges und rund 200 Stützstellen auf dem Rand des Templates.

Die Methode kann in vielen Fällen so, wie sie in diesem Abschnitt beschrieben wurde, problemlos angewendet werden. Für Systeme mit einer großen Anzahl von Moden tragen jedoch die im Folgenden beschriebenen Verbesserungen zur Verminderung des Rechenaufwands bei.

#### 4.3.5 Vereinfachung der Templateberechnung durch den Plane-Sweep- Algorithmus

Die Abbildung der Kanten des Hyperrechtecks der unsicheren modalen Parameter auf die komplexe Ebene, liefert neben der Berandung des Templates auch Liniensegmente, die im Inneren des Templates liegen (vgl. Theorem 4.1). Durch die Addition zweier Segmente ergeben sich weitere Segmente im Inneren des Summentemplates (vgl. Satz 4.1). Mit zunehmender Anzahl Additionen steigt die Anzahl von Segmenten im Inneren der jeweiligen Summentemplates stark

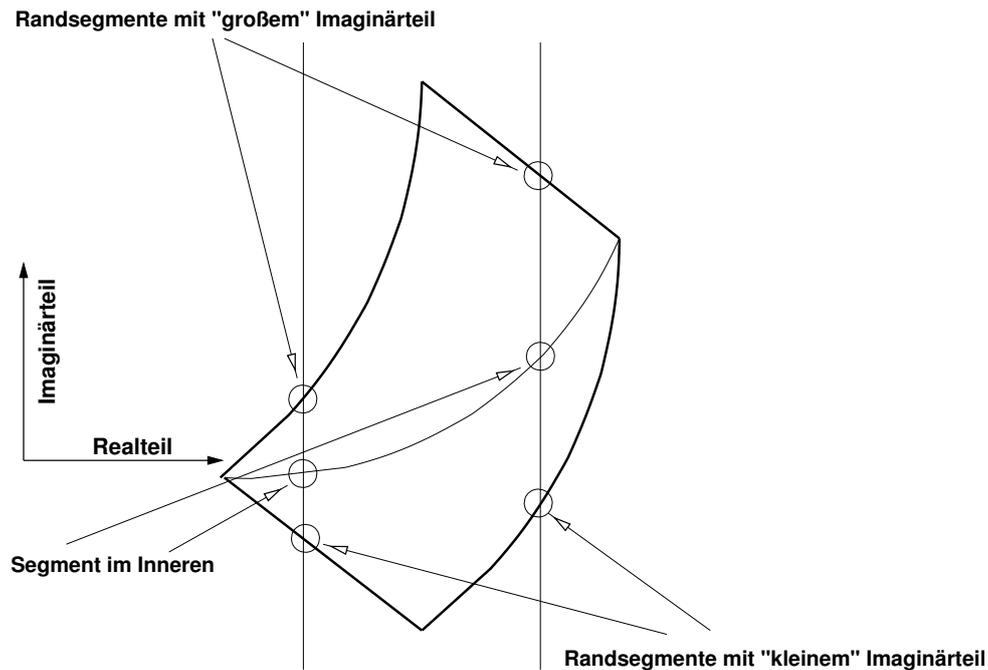


Abb. 4.3.4: Veranschaulichung des Plane-Sweep-Algorithmus

an. Es ist daher sinnvoll, nach Berechnung der Modaltemplates und nach jedem Additionsschritt, die im Inneren des jeweiligen Teiltemplates liegenden Segmente zu identifizieren und aus der weiteren Berechnung zu eliminieren. Dies kann z.B. mit einem sogenannten „Plane-Sweep“ Algorithmus geschehen, wie er in der digitalen Bildverarbeitung benutzt wird.

#### *Beschreibung des Plane-Sweep-Algorithmus*

Beim Plane-Sweep überstreicht der Strahl -eine gedachte Gerade- die komplexe Ebene. Aus den Schnittpunkten des Strahls mit den Templatesegmenten in der Ebene kann geschlossen werden, ob ein Segment zur Berandung des Teiltemplates gehört, oder nicht. Dies ist in Abbildung 4.3.4 verdeutlicht:

Ein Strahl überstreicht hier die komplexe Ebene parallel zur imaginären Achse. Der Strahl ist an zwei Positionen eingezeichnet, die Schnittpunkte mit den Kanten des Templates sind durch Kreise markiert. Die Segmente, die das eingezeichnete Template beranden, sind die, deren jeweilige Schnittpunkte mit dem Strahl den größten, bzw. kleinsten Imaginärteil aufweisen. Diese Segmente werden in den weiteren Berechnungen verwendet, alle anderen Segmente werden verworfen.

Beim Plane-Sweep-Algorithmus können, alternativ zu der hier vorgestellten Variante, auch Strahlen parallel zur reellen Achse genutzt werden, die sich entlang der Imaginärachse verschieben, oder Strahlen, die vom Ursprung ausgehend, die komplexe Ebene rotatorisch überstreichen. In der vorliegenden Arbeit werden alle drei Typen genutzt. Für Templates, innerhalb des Resonanzbereiches eines Modes, sind die um den Ursprung rotierenden Strahlen zu verwenden, ansonsten kann die translatorische Bewegung genutzt werden.

### *Weitere Vereinfachung: Segregation der Kantenelemente*

Templates sind Flächen in der komplexen Ebene. Daher weist eine beliebige Gerade durch das Template immer zwei Schnittpunkte mit der Berandung auf. Durch die Lage dieser Schnittpunkte können die Randsegmente klassifiziert werden:

Jeder Strahl durch das Template, der parallel zur imaginären Achse liegt, schneidet mindestens zwei Segmente des Templates. Die Schnittpunkte von Strahl und Segment können nach aufsteigendem Imaginärteil sortiert betrachtet werden. Die Randsegmente des Templates sind die Segmente mit maximalem, bzw. minimalem Imaginärteil des Schnittpunktes. Für jeden Strahl durch das Template ergibt sich genau eine „Oberkante“ und eine „Unterkante“.

Bei einem Plane-Sweep können also für jedes Teiltemplate Ober- und Unterkante unterschieden werden. Die Summe der Unterkanten zweier Templates weist einen kleineren Imaginärteil auf als die Addition der Unterkante des eines Templates zur Oberkante des anderen Templates. Die Vermischung der Addition von Ober- und Unterkanten führt daher immer auf Summensegmente, die im Inneren des Templates liegen. Eine weitere Vereinfachung der Berechnung besteht demnach darin, jeweils nur „passende“ Segmente zu addieren [42].

#### *4.3.6 Algorithmische Darstellung der Templateberechnung*

Die algorithmische Implementierung der Templateberechnung durch Summation modaler Teiltemplates wird durch die Abbildung in einem Aktivitätsdiagramm (vgl. Abbildung 4.3.5) anschaulich dargestellt.

Die Implementierung beginnt mit der Abbildung der Kanten des Hyperrechtecks für den ersten Mode. Nach der Entfernung der inneren Segmente mit Plane-Sweep wird die Berechnung für den zweiten Mode wiederholt. Wenn auch für diesen Mode die inneren Kanten entfernt sind, beginnt die Addition der Kanten für die Moden Eins und Zwei. Das Ergebnis der Addition wird mit dem Plane-Sweep bearbeitet.

Um einen dritten Mode zu berücksichtigen, wird für diesen die Berechnung der Kanten, einschließlich der Elimination innerer Kanten, durchgeführt. Die Berandung des dritten Modes wird mit dem Zwischenergebnis der Summation von Mode eins und zwei addiert, die inneren Segmente des resultierenden Zwischenergebnisses werden entfernt.

Die Berechnung wird solange fortgesetzt, bis alle zu berücksichtigenden Moden in die Berechnung eingegangen sind.

#### *4.3.7 Zur Nutzbarkeit der Templateberechnung mittels Addition modaler Templates*

Die vorgestellte Methode ist schnell, erfordert nur wenig Rechenleistung und lässt sich auch für Systeme mit einer großen Anzahl Moden anwenden. Sie kann jedoch nur dann sinnvoll verwendet werden, wenn die Unsicherheiten der Parameter der einzelnen Moden tatsächlich unabhängig voneinander sind. Wirken globale Parameter auf das System, treten also Verkopplungen zwischen den Parametern der Moden auf, wird die Methode konservativ. Dies lässt sich an einem Beispiel sehr einfach verdeutlichen. Gilt für die modalen Kennkreisfrequenzen  $\omega_k \approx \omega_{k+1} \cdot const$ , dann treten Wertekombinationen wie  $\omega_k^{MIN} / \omega_{k+1}^{MAX}$  und  $\omega_k^{MAX} / \omega_{k+1}^{MIN}$  nicht auf. Bei der Templateberechnung mittels der hier vorgestellten Methode, werden diese Parameterkombinationen aber ausdrücklich berücksichtigt.

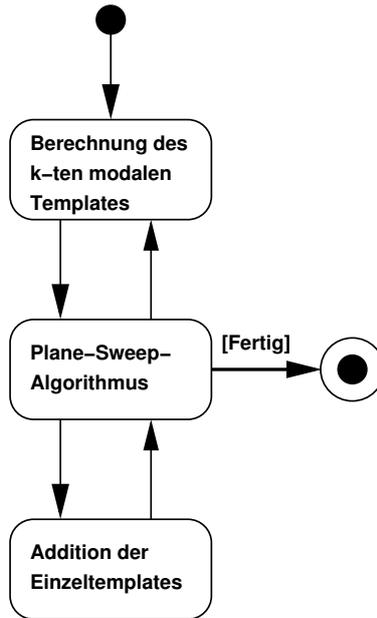


Abb. 4.3.5: Aktivitätsdiagramm

Zur Verdeutlichung kann auch Abbildung 4.3.6 herangezogen werden. In der Abbildung werden Templateapproximationen für das in Kapitel 8 beschriebene Anwendungsbeispiel dargestellt. Im ersten Fall werden sämtliche modalen Parameter als voneinander unabhängig betrachtet. Das so für die Frequenz 6 Rad/ s berechnete Template ist in der Abbildung durch die grüne Umrandung gekennzeichnet. Da viele der modalen Parameter von einer externen Masse abhängen, die an der Struktur befestigt werden kann, werden Templates mit der im folgenden Abschnitt 4.4 vorgestellten Kombination der Addition von Wertemengen und Gridding berechnet. Das Ergebnis der Templateberechnung für 6 Rad/s ist durch die blaue Fläche gekennzeichnet. Der direkte Vergleich zeigt die Konservativität bei der Berechnung deutlich auf.

## 4.4 Templateberechnung durch Kombination von Gridding mit der Addition von Wertemengen

### 4.4.1 Grundlegende Vorgehensweise

In diesem Abschnitt werden Übertragungsfunktionen betrachtet, die sich als Summe modaler Übertragungsfunktionen darstellen lassen. Jede der modalen Übertragungsfunktionen hängt dabei gleichzeitig von lokalen (nur auf einen Mode wirkenden) unsicheren Parametern  $\vec{p}_k^l$  und globalen (auf mehrere Moden wirkenden) unsicheren Parametern  $\vec{p}^g$  ab. Voraussetzung für die im Folgenden beschriebene Templateberechnung ist, dass die Übertragungsfunktion des Systems durch

$$G(s, \vec{p}^g) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{vk}(\vec{p}^g, p_{c_{vk}})s + c_{wk}(\vec{p}^g, p_{c_{wk}})}{s^2 + 2\delta_k(\vec{p}^g, p_{\delta_k})s + \omega_k(\vec{p}^g, p_{\omega_k})^2}$$

gegeben ist. Weiterhin ist gefordert, dass alle Parameter in einem festen Intervall mit bekannter Ober- und Untergrenze enthalten sind, und dass die Modalparameter  $c_{vk}$ ,  $c_{wk}$ ,  $\delta_k$  und  $\omega_k$  von

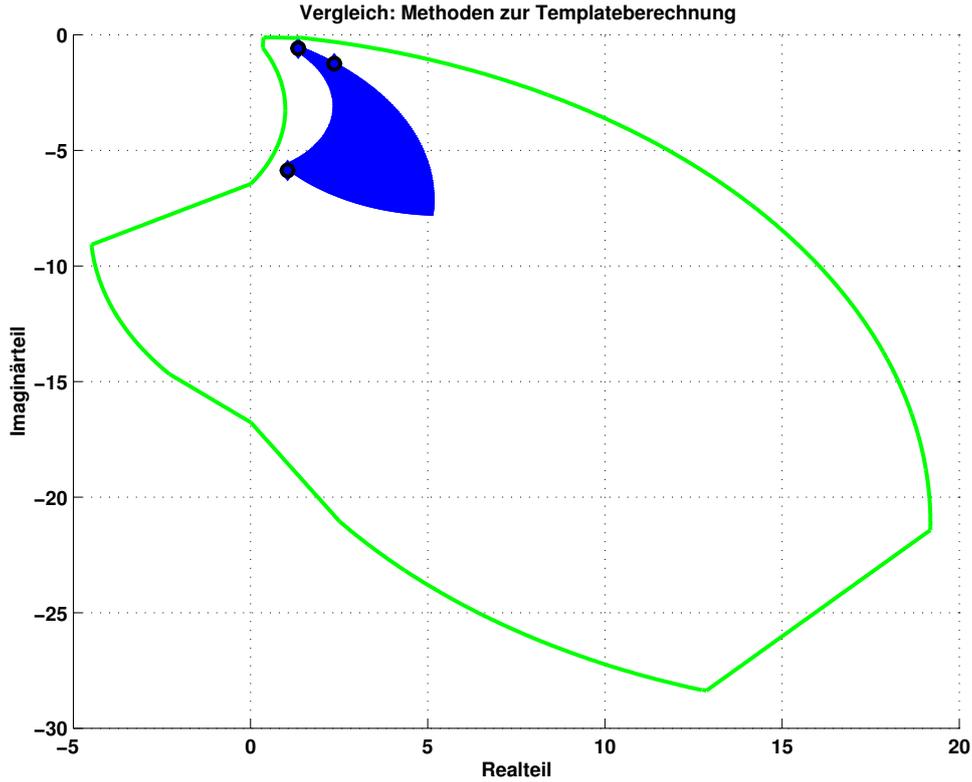


Abb. 4.3.6: Vergleich der Templates: Addition / modifizierte Addition

ihren lokalen Parametern  $p_{c_{vk}}$ ,  $p_{c_{wk}}$ ,  $p_{\delta_k}$  und  $p_{\omega_k}$  linear abhängen. Durch geeignete Darstellung der Modellunsicherheiten lassen sich diese Anforderungen für flexible mechanische Strukturen immer erfüllen.

Fixiert man die globalen Parameter  $\vec{p}^g$  auf einen festen Zahlenwert  $\vec{p}_n^g$ , und setzt diesen in die modale Modellbeschreibung ein, sind die resultierenden modalen Übertragungsfunktionen Intervallsysteme in ihren jeweiligen Modalparametern.

$$G(s, \vec{p}_n^g) = \sum_{k=1}^K \frac{[c_{vk_{min}}(\vec{p}_n^g), c_{vk_{max}}(\vec{p}_n^g)]s + [c_{wk_{min}}(\vec{p}_n^g), c_{wk_{max}}(\vec{p}_n^g)]}{s^2 + 2[\delta_{k_{min}}(\vec{p}_n^g), \delta_{k_{max}}(\vec{p}_n^g)]s + [\omega_{k_{min}}^2(\vec{p}_n^g), \omega_{k_{max}}^2(\vec{p}_n^g)]}. \quad (4.4.1)$$

Für diese verbleibenden Modellunsicherheiten können die Templates dann wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben, berechnet werden.

Zur Berechnung der Gesamttemplates bietet es sich an, das Hyperrechteck der unsicheren globalen Parameter  $\mathbb{P}^g$  durch eine Anzahl  $n$  von Stützstellen zu approximieren, wie dies beim Gridding üblich ist. Durch sukzessives Einsetzen aller  $n$  Stützstellen ergeben sich für jede Frequenz  $n$  Übertragungsfunktionen der in Gleichung 4.4.1 dargestellten Form. Für jede dieser Übertragungsfunktionen werden die Templates durch Summation berechnet. Statt eines Templates ergeben sich bei dieser Vorgehensweise für eine Frequenz  $n$  Templates.

#### 4.4.2 Erfassung des Einflusses globaler Parameter auf die modalen Übertragungsfunktionen

Der Einfluss der globalen Parameter auf die modalen Übertragungsfunktionen kann nur approximiert werden, da einerseits die Modellbildung mit der FEM selber eine Approximation darstellt, andererseits Parameter aus experimentellen Untersuchungen immer nur ungenau bestimmbar sind. Es gibt für diesen Arbeitsschritt keine allgemein gültige Vorgehensweise. Er kann nur problemangepasst im Einzelfall erfolgen. Von daher sind die folgenden Ausführungen auch eher als Kurzdarstellung des im Rahmen dieser Arbeit verfolgten Vorgehens zu verstehen, weniger als Arbeitsanweisung. Als Leitfaden für die Modellierung des Einflusses globaler Parameter, kann die erforderliche Abwägung zwischen rechentechnischem Aufwand und Konservativität einerseits und die Frage nach der Plausibilität der verwendeten Modelle andererseits dienen.

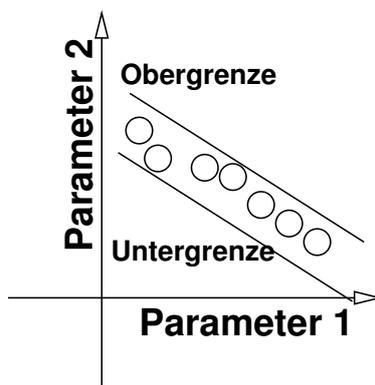


Abb. 4.4.1: Ober- und Untergrenzen für die Approximation

Die meist nichtlinearen und nicht analytisch darstellbaren Zusammenhänge zwischen den globalen Parametern und den Parametern der modalen Übertragungsfunktionen, werden geeigneterweise durch Polynomapproximation angenähert. Zur Durchführung werden Werte der einzelnen Parameter der modalen Übertragungsfunktionen grafisch über dem zugehörigen globalen Parameter abgetragen, wie dies in Abbildung 4.4.1 exemplarisch für ein Polynom erster Ordnung dargestellt ist.

Um mit Polynomen geringer Ordnung auszukommen, ist es sinnvoll, je ein Polynom für die Ober- und die Untergrenze zu definieren (vgl. Abbildung 4.4.1). Da für jeden Wert des globalen Parameters zwei Berechnungswerte des modalen Parameters resultieren, muss entschieden werden, wie diese Mehrdeutigkeit behandelt wird. Zwei Lösungen bieten sich an. Entweder werden für die berechnete Ober- und die berechnete Untergrenze des Polynoms separat Templates berechnet, oder die Variation zwischen Ober- und Untergrenze wird mit den zugehörigen Intervallen der lokalen Parameterunsicherheiten in den modalen Übertragungsfunktionen verrechnet. Im ersten Fall erhöht sich der Berechnungsaufwand deutlich, im zweiten Fall wird eine Überabschätzung der lokalen Parameterunsicherheiten erforderlich, die Konservativität nach sich zieht.

In vielen Fällen kann nicht genau unterschieden werden, ob und wie ein Modalparameter lokal oder global beeinflusst wird. Es müssen daher Annahmen getroffen werden. Dabei ist so vorzugehen, dass eine sinnvolle Balance zwischen Genauigkeit der Berechnung und Rechenaufwand getroffen wird. Als Anwender hat man die Möglichkeit, aus der Modellanalyse heraus zu entscheiden, ob ein unsicherer Modalparameter rein als lokale Unsicherheit, rein als globale

Unsicherheit oder als Mischform beschrieben wird. Diese Entscheidung hat in jedem Fall Auswirkungen auf den Rechenaufwand und die Konservativität.

#### 4.5 Zusammenfassung

Die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten in der Reglersynthese ist erforderlich, um die Auswirkungen der Unsicherheit auf Stabilität und Regelgüte berücksichtigen zu können. Sinnvollerweise werden Beschreibungen parametrischer Modellunsicherheiten genutzt.

Für flexible mechanische Strukturen können parametrische Modellunsicherheiten sehr einfach und anschaulich an Hand der modalen Parameter beschrieben werden. Die resultierenden Modelle erlauben zudem, unter Nutzung der Arbeiten von Bartlett und Fu, eine einfache, präzise und rechentechnisch wenig anspruchsvolle Berechnung der Templates durch die Addition von Wertemengen.

Die Templateberechnung durch Addition von Modaltemplates ist konservativ, wenn Modalparameter verschiedener Moden miteinander korrelieren. In diesem Fall können durch eine Kombination von Templateberechnung durch Gridding und Templateberechnung durch Addition von Modaltemplates Templates für das Gesamtmodell gewonnen werden. Der gegenüber der reinen Berechnung durch Addition erhöhte Rechenaufwand wird dabei durch eine deutliche Verminderung der Konservativität aufgewogen. Durch Modifikationen der Modellierung des Einflusses globaler Parameter kann weiterhin zwischen Berechnungsaufwand und Konservativität der Templateberechnung abgewogen werden.

## 5. ERSTELLUNG VON SPEZIFIKATIONEN FÜR DEN GESCHLOSSENEN REGELKREIS

Inhalt dieses Kapitels ist die Übertragung von, im Zeitbereich gegebenen, Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis in Spezifikationen. Da die in der Quantitative Feedback Theory üblichen modellbasierten Methoden für flexible mechanische Strukturen nur eingeschränkt anwendbar sind, wird eine Modifikation vorgestellt. Bei Anwendung dieser Modifikation werden gegebenenfalls Beschränkungen des Systems in Bezug auf die erzielbare Regelgüte deutlich. Aus den erzielten Zwischenergebnissen lassen sich notwendige Modifikationen der vorgegebenen Anforderungen ableiten. Wenn erforderlich, können Anforderungen auch vollständig definiert werden.

### 5.1 Einleitung

#### 5.1.1 Problembeschreibung

Ein wesentliches Merkmal der QFT ist, dass die Reglersynthese die Einhaltung von Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis zum Ziel hat. Diese Vorgaben sind im Pflichten- bzw. Lastenheft für den Systementwurf definiert. Der Detaillierungsgrad der Forderungen im Lastenheft kann ganz erheblich schwanken. Für Systeme, die eine vollständige Neuentwicklung darstellen, sind zu Beginn der Entwicklung oft keine oder nur sehr vorsichtig formulierte Forderungen vorhanden. Bei Systemen, die weiterentwickelt werden, sind hingegen im Lastenheft sehr präzise Forderungen zu erwarten. Für den Entwurf ergeben sich daraus sehr unterschiedliche Aufgaben. Während im zweiten Fall „lediglich“ die Validierung und die Umsetzung der Forderungen in Spezifikationen erfolgt, muss im ersten Fall zusätzlich der Auftraggeber bei der Detaillierung der Forderungen im Lastenheft unterstützt werden.

Die in der QFT als „ $t$ – $\Omega$ -Übertragung“ [104] bezeichnete Übertragung von Anforderungen aus dem Zeitbereich in Betragsgrenzen wird üblicherweise durch modellbasierte Ansätze realisiert [50, 20, 104]. Die wesentliche Aufgabe der Umrechnung besteht dabei in der Gewinnung geeigneter Modelle, deren Systemantwort auf Referenzsignale den Anforderungen genügen. Sind diese Modelle bestimmt, können aus der Analyse ihrer Amplitudengänge die Betragsgrenzen bestimmt werden. Für Systeme geringer Ordnung, mit wenigen unsicheren Parametern, ist dieser Ansatz problemlos implementierbar, für flexible mechanische Strukturen hingegen ergeben sich, auf Grund der erforderlichen Modellordnung, Schwierigkeiten.

Die  $t$ – $\Omega$ -Übertragung kann neben ihrem eigentlichen Ziel auch als Validierung der Anforderungen betrachtet werden. Bei Nutzung geeigneter Modellstrukturen wird während der Erstellung bzw. der Übertragung von Forderungen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich deutlich, ob eine Forderung von einem gegebenen Modell eingehalten werden kann oder nicht. Aus den

gewonnenen Erkenntnissen können sehr früh im Entwurfsstadium Rückschlüsse auf erforderliche Modifikationen des Designs bzw. der Vorgaben im Lastenheft gezogen werden. Erforderliche Änderungen, der im Zeitbereich formulierten Anforderungen, werden geeigneterweise an Hand der errechneten Systemantworten durchgeführt, um möglichst schnell und unkompliziert Begrenzungen zu erhalten, die vom System eingehalten werden können.

Für den Fall, dass die Anforderungen an die Systemantworten im Zeitbereich nicht Teil des Pflichten- bzw. Lastenhefts sind, und im Systementwurf erstellt werden müssen, bietet es sich an, dies an Hand von simulativ ermittelten Systemantworten zu tun, analog zur Vorgehensweise bei der  $t-\Omega$ -Übertragung und der Modifikation gegebener Vorgaben.

Sowohl die vollständige Erstellung von Forderungen im Zeitbereich als auch die Validierung erfordern an und für sich exakte Kenntnisse des vollständigen Systems, inklusive des Reglers, die bei Entwurfsbeginn nicht vorliegen. Beide Vorgänge sind demnach zu wiederholende Teile des iterativen Entwurfsvorganges und können nicht getrennt voneinander betrachtet werden.

Zur Thematik dieses Kapitels findet sich nur sehr wenig Literatur. Zwar werden die aus dem Bode'schen Sensitivitätsintegral resultierenden Beschränkungen der Regelgüte in vielen Lehrbüchern angesprochen, auf die Konsequenzen für die Auslegung von Regelungssystemen wird jedoch nur selten eingegangen (z.B. [11, 50]). Angesichts der Komplexität der Zusammenhänge zwischen Streckenparametern, Regler und erzielbarer Regelgüte und der kleinen Zahl von Veröffentlichungen zu diesem Thema, kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur eine verhältnismäßig eingeschränkte Untersuchung durchgeführt werden.

### 5.1.2 Zu lösende Aufgaben

Aus der vorangestellten Einführung werden die folgenden Aufgabenstellungen abgeleitet:

- Herleitung einer numerischen Methode zur Bestimmung von Betragsgrenzen aus Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis. Der Einfluss der Reglerdynamik und des Eingangssignals ist dabei zu berücksichtigen
- Die Darstellung der Nutzung simulativer Untersuchungen zur Validierung und Modifikation sowie zur vollständigen Definition gegebener Anforderungen.

Sämtliche Untersuchungen müssen einfach zu implementieren und durchzuführen sein. Der rechentechnische Aufwand bei der Durchführung muss in einem vertretbaren Rahmen bleiben.

### 5.1.3 Gliederung

Die von Horowitz [50] beschriebenen Grundlagen der  $t-\Omega$ -Übertragung sind in Abschnitt 5.2.1 dargestellt. Eine Modifikation zur Nutzung für flexible mechanische Strukturen ist in Abschnitt 5.2.2 beschrieben. In Abschnitt 5.3 wird die weitergehende Nutzung der  $t-\Omega$ -Übertragung diskutiert.

## 5.2 $t-\Omega$ -Übertragung

Die Quantitative Feedback Theory wurde ursprünglich als Methode zur Auslegung von Reglern auf Führungsverhalten entwickelt. Dementsprechend sind auch die Vorgehensweisen zur

Festlegung von Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis auf die Festlegung des Führungsverhaltens ausgerichtet. In [50] wird an einem Beispiel die Vorgehensweise zur Definition von Vorgaben an die Sensitivitätsfunktion beschrieben, die Erweiterung auf andere Störübertragungsfunktionen wird kurz diskutiert, jedoch nicht ausgeführt.

Eine Nutzung der von Horowitz beschriebenen  $t-\Omega$ -Übertragung für flexible mechanische Strukturen ist nur in Ausnahmefällen möglich, da die von Horowitz verwendeten Modelle für den GRK lediglich zweite oder dritte Ordnung aufweisen, während die geschlossenen Regelkreise flexibler mechanischer Strukturen im Regelfall von hoher Ordnung sind. Die von Horowitz vorgeschlagene Vorgehensweise soll trotzdem zur Einführung kurz dargestellt werden, da sie als Vorbild für die hier im Folgenden vorgestellte  $t-\Omega$ -Übertragung für FMS dient. Zudem können, ausreichende Dominanz des niederfrequentesten Polpaares vorausgesetzt, Vorgaben an das Führungsverhalten für Regelkreise zur Formregelung recht gut mit Modellen zweiter oder dritter Ordnung definiert werden.

### 5.2.1 Festlegung von Vorgaben nach Horowitz

Die Übertragung von Forderungen an den geschlossenen Regelkreis aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich, wie sie in [50] beschrieben ist, erfolgt in zwei Schritten:

1. Bestimmung einer Reihe von Modellen zweiter Ordnung (ggf. dritter Ordnung) deren Kennkreisfrequenzen innerhalb vordefinierter Grenzen variieren. Für jedes Modell wird die Dämpfung so gewählt, dass die Systemantwort des Modells die definierten Grenzen des Zeitverhaltens einhält.
2. Bestimmung der Obergrenze (bei Vorgaben an die Führungsübertragung auch der Untergrenze) des Betrages der betrachteten Übertragungsfunktion durch Berechnung punktwiser Maxima (ggf. Minima) der Amplitudengänge der zuvor bestimmten Modelle.

Die Vorgehensweise wird im Folgenden exemplarisch dargestellt. Dabei dienen die Abbildungen 5.2.1 a.) und b.) zur Verdeutlichung. Betrachtet werden Vorgaben an die Sensitivitätsfunktion. Anregungssignal ist ein Rechteckpuls mit maximaler Höhe Eins und Breite 0,5 Sekunden, dessen steigende Flanke bei  $t = 0,5$  liegt.

**Zur Festlegung der Obergrenzen für das Zeitverhalten:** Da die Reglerverstärkung zur Verminderung der Kosten der Rückführung im höheren Frequenzbereich asymptotisch gegen Null geht, ist der Betrag der Sensitivitätsfunktion dort Eins. Eine Störung am Ausgang der Strecke wirkt zunächst unabgeschwächt. Daraus folgt, dass für den Zeitpunkt  $t = 0.5$  die Obergrenze  $y(t) = 1$  gesetzt wird. Von diesem Wert ausgehend werden Grenzen für das erwünschte Abklingverhalten gewählt.

In Abbildung 5.2.1 a.) sind die Grenzen durch eine dicke, rote Linie gekennzeichnet. **Bestimmung von Modellen, welche die Betragsgrenzen einhalten:** In [50] werden zur Bestimmung der Grenzen der Sensitivitätsfunktion Modelle mit der folgenden Struktur verwendet:

$$G(s) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 2\xi\frac{s}{\omega} + 1}$$

Es wird vorausgesetzt, dass der geschlossene Regelkreis ein dominantes Polpaar enthält. Durch die Variation der Streckenparameter verändert sich die Kennkreisfrequenz dieses dominanten

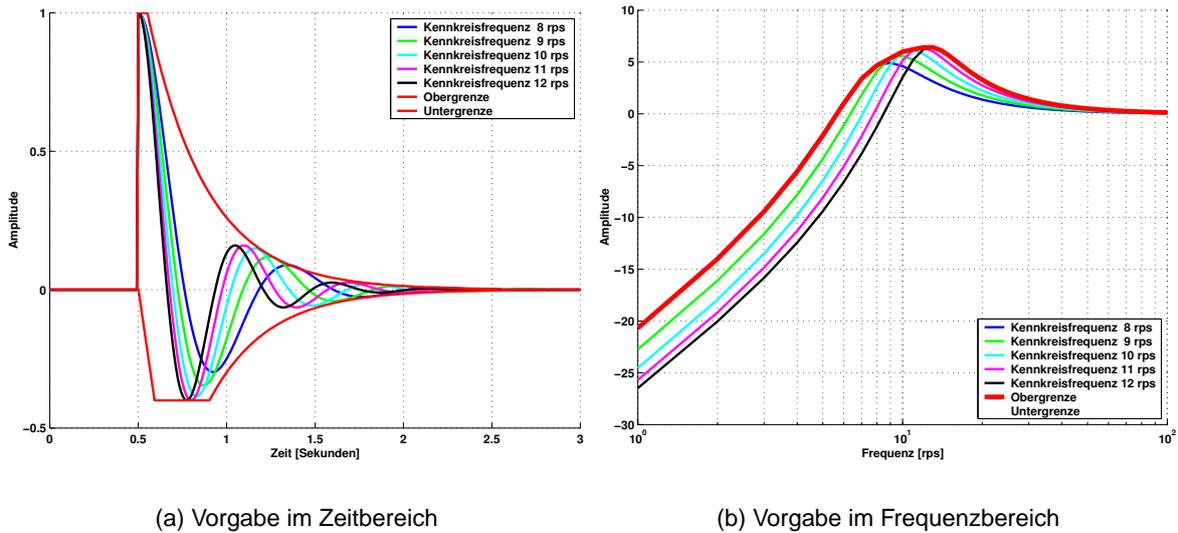


Abb. 5.2.1: Festlegung von Vorgaben an die Sensitivitätsfunktion nach Horowitz

Polpaares. Die Kennkreisfrequenz  $\omega$  wird daher in einem zulässigen Intervall  $\omega \in [\omega_{MIN}, \omega_{MAX}]$  liegen. Innerhalb dieses Intervalls werden Stützstellen  $\omega_k$  gewählt. Für jede Stützstelle wird durch Versuch und Irrtum ein Dämpfungsfaktor  $\xi_k$  so bestimmt, dass die Systemantwort des resultierenden Modells die definierten Grenzen einhält.

Das Intervall für  $\omega$  ist durch  $\omega \in [8, 12]$  gegeben, die Stützstellen  $\omega_k$  sind 8, 9, 10, 11, 12 Rad/s. Die folgenden Wertekombinationen führen zu Modellen, die die Grenzen einhalten:

$\omega_k$	8	9	10	11	12
$\xi_k$	0.36	0.32	0.29	0.28	0.28

Die zugehörigen Systemantworten auf die Störgröße sind in Abbildung 5.2.1 a.) dargestellt.

**Bestimmung der Obergrenze des Betrages:** Die zulässige Obergrenze des Betrages der Sensitivitätsfunktion  $B_{MAX}(\Omega)$  wird aus den punktwisen Maxima der Amplitudengänge  $B_k(\Omega)$  aller aus den  $\omega_k$  und  $\xi_k$  definierten Modelle bestimmt.

$$B_{MAX}(\Omega) = \max \{B_1(\Omega), B_2(\Omega), \dots, B_N(\Omega)\}$$

Die Amplitudengänge der fünf Modelle und die daraus resultierende Obergrenze sind in Abbildung 5.2.1 b.) abgebildet.

Die punktwisen Maxima des Betrages stellen die Spezifikation der Sensitivitätsfunktion dar. Für einzelne Frequenzen werden aus den Betragsgrenzen die Boundaries berechnet. Unter Einbeziehung der Templates können schließlich die Bounds errechnet werden (vgl. Kapitel 2).

### 5.2.2 Bestimmung von Spezifikationen mittels beobachterbasierter Regler

Die von Horowitz beschriebene Vorgehensweise ist anschaulich und mit entsprechender rechnerischer Unterstützung einfach zu implementieren. Daher ist die Zielstellung für die hier vorliegende Arbeit, eine Methode zur  $t-\Omega$ -Übertragung zu entwickeln, die diese Vorgehensweise so weit wie möglich beibehält.

An Stelle von Modellen zweiter Ordnung werden Systembeschreibungen verwendet, deren Modellordnung an die betrachtete Ordnung der Strecke und des zu verwendenden Reglers angepasst ist. Zu diesem Zweck werden für jedes betrachtete Modell beobachterbasierte Regler definiert. Die Systemantworten der Modelle werden dann durch Variation dieser Regler so modifiziert, dass die vorgegebenen Ober- und Untergrenzen eingehalten werden.

### Vorgehensweise

In den meisten Anwendungsfällen zur Regelung von FMS sollen Störungen auf dem Sekundärpfad unterdrückt werden, also Störungen  $D_2(s)$ , die durch eine eigene Übertragungsfunktion  $G_2(s)$  von der Einleitung in die Struktur auf die Messgröße  $Y(s)$  wirken (vgl. Abbildung 5.2.2). Die Darstellung der  $t-\Omega$ -Übertragung bezieht sich daher auf diese Aufgabenstellung. Eine Anpassung der Vorgehensweise auf andere Aufgabenstellungen ist ohne weiteres möglich.

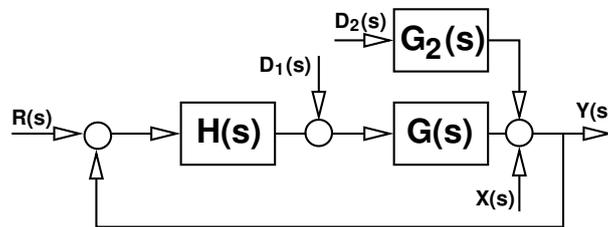


Abb. 5.2.2: Störübertragung auf dem Sekundärpfad

Für die Systemantwort der parameterabhängigen Übertragungsfunktion

$$T_2(\vec{p}, s) = \frac{G_2(\vec{p}, s)}{1 + G(\vec{p}, s)H(s)} = G_2(\vec{p}, s)S(\vec{p}, s),$$

auf eine definierte Anregung  $D_2(t)$ , wird eine Obergrenze  $|y_2| \leq y_{MAX}$  festgelegt. Aufgabe des Reglers ist es, diese Vorgabe für alle zulässigen Variationen des Parametervektors  $\vec{p}$  einzuhalten.

Aus der Menge der zulässigen Parameterkombinationen  $\vec{p} \in \mathbb{P}$  wird eine möglichst kleine, repräsentative Teilmenge (zur Auswahl dieser Teilmenge: siehe Abschnitt 5.2.3)

$$\mathbb{P}_N = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\}$$

ausgewählt. Für alle  $\vec{p}_k \in \mathbb{P}_N$  werden die zugehörigen Modelle  $G(\vec{p}_k, s)$  für den Primärpfad und  $G_2(\vec{p}_k, s)$  für den Sekundärpfad berechnet.

Für die  $\vec{p}_k \in \mathbb{P}_N$  werden jeweils Regler  $H_{\vec{p}_k}(s)$  so bestimmt, dass die Systemantwort

$$T_2(\vec{p}_k, s) = \frac{G_2(\vec{p}_k, s)}{1 + G(\vec{p}_k, s)H_{\vec{p}_k}(s)} = G_2(\vec{p}_1, s)S_{\vec{p}_k}(\vec{p}, s)$$

die Vorgabe einhält.

### Wahl des Reglers

Um die anschauliche Vorgehensweise der  $t-\Omega$ -Übertragung von Horowitz so weit als möglich auch auf FMS anwenden zu können, wird für jede untersuchte Parameterkombination  $\vec{p}_q$  mittels Polplatzierung ein beobachterbasierter Regler  $H_q(s)$  gewählt. Dazu werden für jeden Mode  $G_{qk}(s)$  der Strecke die Pole

$$s_{qk_{1/2}} = \left( -\hat{\xi}_{qk} \pm j \sqrt{1 - \hat{\xi}_{qk}^2} \right) \hat{\omega}_{qk}$$

von Beobachter und Regler identisch gewählt.

Weiterhin wird vereinbart, dass die Kennkreisfrequenzen des geschlossenen Regelkreises den Kennkreisfrequenzen des zugehörigen Modells entsprechen:

$$\hat{\omega}_{qk} = \omega_{qk} .$$

Diese Wahl hat sich in der Anwendung bewährt. Sie ist allerdings nicht zwingend. Es ist für die Anwendung der  $t-\Omega$ -Übertragung auf eine gegebene Aufgabenstellung auch möglich, an das Problem angepasst, eine andere Wahl zu treffen.

Bei Nutzung der vorgeschlagenen Vereinfachungen muss für jeden Mode, zur Anpassung der Systemantwort an die gegebene Ober- und Untergrenze, noch die Dämpfung  $\hat{\xi}_{qk}$ , wiederum durch Versuch und Irrtum, passend gewählt werden. Die Vorgehensweise ist dann analog zu der in 5.2.1 dargestellten.

Der beobachterbasierte Regler  $H(s)$  wird mit der Rückführmatrix  $\mathbf{F}$  und der Beobachtermatrix  $\mathbf{L}$  aus den Matrizen der Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke  $G_q(s) = G(\vec{p}_q, s)$  gewonnen. Gilt für die Regelstrecke die Darstellung

$$G_q(s) = \mathbf{C}_q (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_q)^{-1} \mathbf{B}_q ,$$

dann ist der Regler durch

$$H_q(s) = \mathbf{F}_q (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_q + \mathbf{B}_q \mathbf{F}_q + \mathbf{L}_q \mathbf{C}_q)^{-1} \mathbf{L}_q$$

zu berechnen. Die Rückführmatrix  $\mathbf{F}_q$  und die Beobachtermatrix  $\mathbf{L}_q$  werden durch Polplatzierung gewonnen. Die Rückführmatrix ist diejenige, für die die Lösung von

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_q + \mathbf{B}_q \mathbf{F}_q) = 0$$

den vorgegebenen Polen für die vollständige Zustandsrückführung entspricht, mit der Matrix  $\mathbf{L}_q$  entsprechen die Lösungen von

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_q + \mathbf{C}_q \mathbf{L}_q) = 0$$

den vorgegebenen Beobachterpolen. Die Berechnung der Matrizen  $\mathbf{F}_q$  und  $\mathbf{L}_q$  kann z.B. mit der Ackermannschen Formel erfolgen [27], die z.B. in der *Matlab Control-Toolbox* implementiert ist.

### Algorithmische Darstellung

Die vorgeschlagene Vorgehensweise wird im Ablaufdiagramm 5.2.3 dargestellt:

Anzumerken ist, dass die „repeat-until“-Schleife die Wahl der Dämpfung zur Anpassung der Systemantworten an die Vorgaben beinhaltet. Die Dämpfungen werden, durch Versuch und Irrtum, solange modifiziert, bis die Systemantwort zufriedenstellend ist.

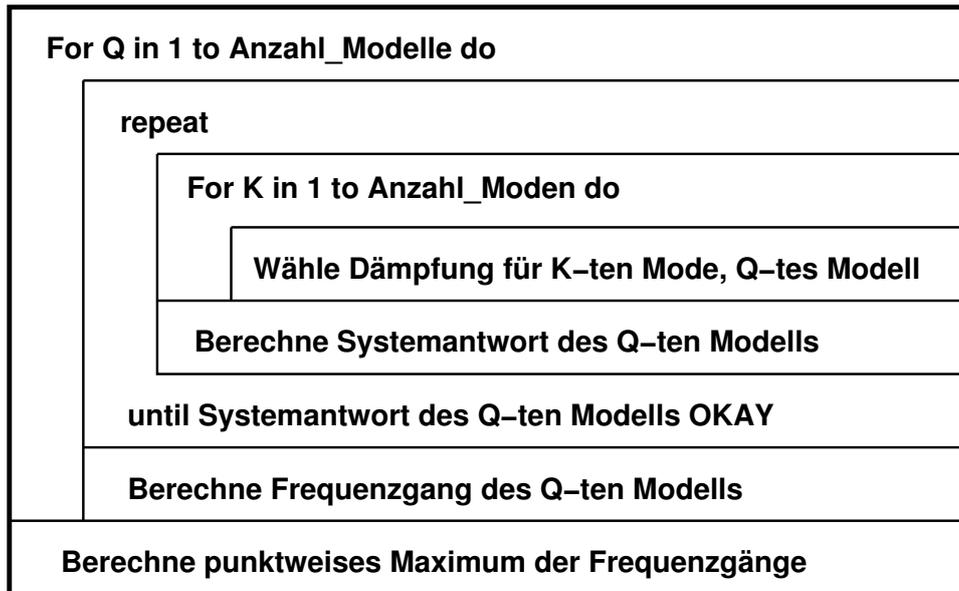


Abb. 5.2.3: Ablaufdiagramm für  $t-\Omega$ -Übertragung

### *Anwendungsbeispiel*

Für das hier vorgestellte Anwendungsbeispiel wurde das FE-Modell eines Biegebalkens genutzt, der im Rahmen der für das Innovationskolleg ADAMES am Institut für Automatisierungstechnik durchgeführten Arbeiten untersucht wurde.

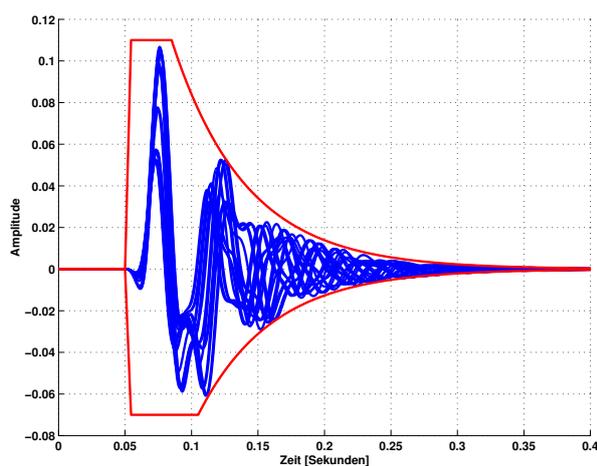
Ziel ist, für eine Reihe von Modellen, die direkt durch Variation der Parameter des FE-Modells entstanden sind, die Dämpfungsparameter für den geschlossenen Kreis so zu wählen, dass die Vorgaben an Ober- und Untergrenze eingehalten werden. Die vorliegende Darstellung verdeutlicht lediglich die Vorgehensweise, für die Anwendung wären weitergehende Untersuchungen erforderlich (z.B. Berücksichtigung der Sensorik, Aktuatorik, Unsicherheiten der Randbedingungen, etc.)

Die folgenden Sachverhalte sind für die vorliegende Anwendung der  $t-\Omega$ -Übertragung von Relevanz:

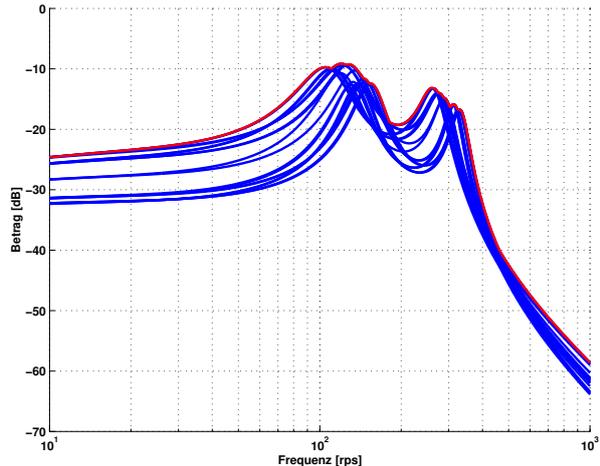
- Für die Synthese sind zwei Moden in Betracht zu ziehen (Ergebnis der Dominanzanalyse).
- Für die erste Betrachtung sind fünf Systemparameter als unsicher anzusehen (Kennkreisfrequenzen, Dämpfungen, stationäre Verstärkung), es wurden insgesamt 27 Modelle untersucht.
- Die Untersuchung zielt auf Vorgaben an die Störübertragung  $T_2(s)$  auf einem Sekundärpfad ab.

Die Kennkreisfrequenzen der betrachteten Modelle variieren jeweils in den Intervallen  $\omega_1 \in [98, 156.5]$  und  $\omega_2 \in [265, 333]$  Radiant pro Sekunde.

Für jedes der 27 Modelle wurden beobachterbasierte Regler, wie oben beschrieben, ausgelegt. Zur Einhaltung der Vorgaben mussten für den ersten Mode Dämpfungen zwischen 14 und 24



(a) Anpassung der Dämpfung zur Einhaltung der Zeitbereichsvorgaben



(b) Übertragung in den Frequenzbereich

Abb. 5.2.4: Anwendung der modifizierten  $t - \Omega$ -Übertragung

Prozent, für den zweiten Mode zwischen 8 und 12 Prozent gewählt werden. Die Systemantworten der Modelle auf die gewählte Störانregung (blaue Linien) und die Ober- bzw. Untergrenze (rote Linien) sind in Abbildung 5.2.4 a.) ersichtlich. In Abbildung 5.2.4 b.) sind die Amplitudengänge der Modelle (blaue Linien) zusammen mit dem errechneten punktwweisen Maximum (rote Linie) dargestellt.

### 5.2.3 Vereinfachung der modifizierten Methode

Die durch  $t - \Omega$ -Übertragung berechneten Obergrenzen der Störübertragungsfunktionen sind, bedingt durch die Vorgehensweise, nur Approximationen, da nicht *alle* Übertragungsfunktionen, die die definierten Grenzen im Zeitbereich einhalten, tatsächlich berechnet werden. Um die vorgeschlagene  $t - \Omega$ -Übertragung mit vernünftigem Aufwand durchführen zu können, ist es erforderlich, die Anzahl der zu untersuchenden Modelle zu begrenzen. Gleichzeitig muss sichergestellt sein, dass die Anzahl der untersuchten Modelle so groß ist, dass die im Zeitbereich gegebenen Grenzen im Frequenzbereich „gut“ repräsentiert sind.

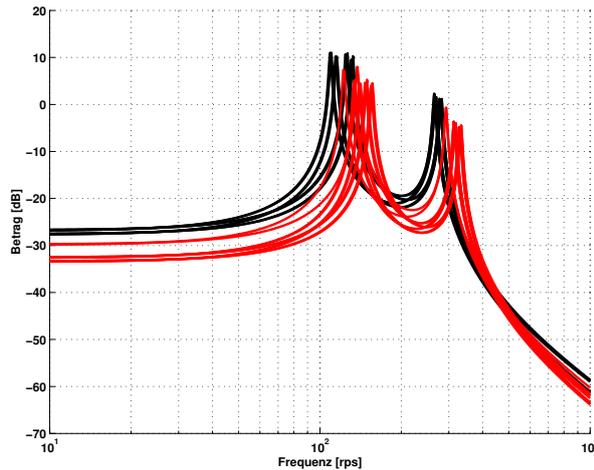
Um eine deutliche Reduzierung der zu betrachtenden Modelle erzielen zu können, wurde die folgende Faustformel angewendet:

Zur  $t - \Omega$ -Übertragung werden die Resonanzfrequenzen der Moden innerhalb ihrer jeweiligen Intervalle variiert. Alle anderen Parameter werden so gewählt, dass der Sekundärpfad den jeweils größtmöglichen Betrag aufweist.

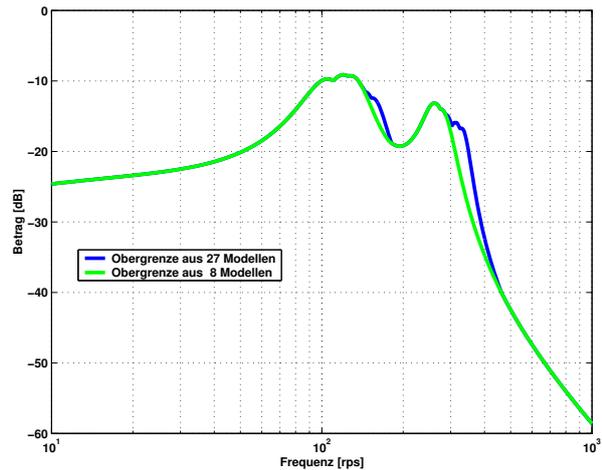
Für ein Modell mit nur einem Mode

$$G_2(c_V, c_W, \delta, \omega, s) = \frac{(c_V s + c_W)}{s^2 + 2\delta s + \omega^2}$$

kann dies sehr einfach dargestellt werden. Die Frequenz variiert in einem Intervall  $\omega \in [\omega_{MIN}, \omega_{MAX}]$ , repräsentiert durch die Stützstellen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Für jede Stützstelle wer-



(a) Amplitudengänge der Störübertragungsfunktionen  $G_2$



(b) Vergleich der Betragsobergrenzen

Abb. 5.2.5:  $t-\Omega$ -Übertragung mit verringerter Modellanzahl

den nun die Parameter  $c_V$ ,  $c_W$  und  $\delta$  so gewählt, dass der Betrag von  $G_2$  in der jeweiligen Resonanz maximal wird.

Aus den zulässigen Intervallen müssen  $\delta_{MIN}$ ,  $c_{V_{MAX}}$  und  $c_{W_{MAX}}$  gewählt werden.

Dass die Vorgehensweise sinnvoll ist, zeigt eine Vereinfachung des oben zur  $t-\Omega$ -Übertragung untersuchten Beispiels. Aus den 27 Modellen wurden 8 ausgewählt, deren Betrag in den Resonanzen jeweils maximal ist. Mit diesen 8 Modellen wird die Obergrenze für den zulässigen Betrag erneut berechnet.

Die Abbildung 5.2.5 b.) zeigt, dass durch die Verminderung der Modellanzahl die berechnete Obergrenze beeinflusst wird. Für die Frequenzen an der oberen Grenze der jeweiligen Intervalle, weist die aus 8 Modellen berechnete Obergrenze einen deutlich geringeren Betrag auf, als die aus 27 Modellen berechnete Grenze. Der Grund hierfür ist Abbildung 5.2.5 a.) zu entnehmen. Die Modelle mit geringerer Amplitude weisen durchgehend höhere Kennkreisfrequenzen auf, als die Modelle mit größerer Amplitude. Bei der Modellauswahl wurde nicht darauf geachtet, die Intervalle der Kennkreisfrequenzen durch die jeweiligen Modelle abzudecken. Die entstehende Abweichung resultiert aus der Nichteinhaltung der oben beschriebenen Faustformel.

Die beiden Abbildungen zeigen aber auch, dass in den unteren Bereichen der Intervalle der Kennkreisfrequenzen, die von den acht Modellen abgedeckt werden, gute Übereinstimmung erzielt wird. In diesen Bereichen wird die Faustformel eingehalten. In der praktischen Anwendung zur Reglersynthese ergibt sich häufig die Notwendigkeit, die Umrechnung der Anforderungen in Betragsgrenzen zu überarbeiten. Es ist daher nicht unbedingt erforderlich, die  $t-\Omega$ -Übertragung von Anfang an mit einer großen Anzahl von Modellen durchzuführen. Vielmehr sollten anfangs wenige Modelle berechnet werden, um später, an Hand der Auswertung der Optimierungsergebnisse in kritischen Frequenzbereichen, zusätzliche Modelle zu bestimmen.

## 5.3 Weitergehende Nutzung der vorgestellten Rechenschritte

Die Berechnung von Systemantworten für den geschlossenen Kreis unter Nutzung beobachterbasierter Regler, wie sie in Abschnitt 5.2 beschrieben ist, kann, außer für die  $t-\Omega$ -Übertragung, auch für andere Zwecke unmittelbar genutzt werden. Neben der  $t-\Omega$ -Übertragung sind die Berechnungen auch zur Überprüfung der Einhaltung gegebener Grenzen im Zeitbereich und zur Erstellung von Grenzen im Zeitbereich hilfreich.

### 5.3.1 Überprüfung der Einhaltung gegebener Grenzen

Im Abschnitt 5.2 wird vorausgesetzt, dass sich die Abklingkoeffizienten  $\delta_{qk}$  so bestimmen lassen, dass die Systemantwort der Störübertragungsfunktion  $T_2(\vec{p}_q, s)$  auf das definierte Störsignal die vorgegebenen Grenzen einhält. Dies ist jedoch nicht immer der Fall.

Können für eine Reihe von Modellen keine  $\delta_{qk}$  gefunden werden, die die Einhaltung der Ober- und Untergrenze sicherstellen, kann daraus *nicht* gefolgert werden, dass die Reglerauslegung insgesamt für diese Grenzen unmöglich ist. Erfahrungsgemäß werden sich aber Schwierigkeiten einstellen. Wenn der im Zusammenhang mit der  $t-\Omega$ -Übertragung durchgeführte „Entwurf“ an einem exakt bekannten Modell nicht gelingt, ist der für das System durchzuführende robuste Entwurf zumindest problematisch. Es ist dann zu überlegen, ob die vorgegebenen Grenzen modifiziert werden können und sollen.

### 5.3.2 Modifikation gegebener Grenzen und vollständige Definition von Grenzen

Für den in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Fall, dass Anforderungen von einem oder mehreren Modellen nicht eingehalten werden können, ist es, wenn die Modifikation der Anforderungen zulässig ist, naheliegend, die Änderung so durchzuführen, dass

- die Modifikation möglichst geringfügig ist, und
- die berechneten Systemantworten alle innerhalb der neuen Grenzen liegen.

Durch die Nutzung der berechneten Systemantworten als „Maßstab“ können Grenzen sehr schnell und einfach so modifiziert werden, dass ein Regler ihre Einhaltung problemlos sicherstellen kann.

Die vollständige Definition von Vorgaben kann aus einigen „zufriedenstellenden“ Systemantworten heraus definiert werden. Für ein oder mehrere Modelle werden die Abklingkonstanten so definiert, dass die Systemantwort den Vorstellungen des Entwerfenden entspricht. Um diese Systemantworten herum wird dann eine Einhüllende definiert.

## 5.4 Zusammenfassung

Inhalt dieses Kapitels ist die Übertragung von im Zeitbereich vorgegebenen Anforderungen in Spezifikationen, also Betragsobergrenzen im Frequenzbereich. Die ursprünglich in der QFT verwendete Methode zur  $t-\Omega$ -Übertragung ist nur in Ausnahmefällen auf FMS anwendbar. Daher

wird in dieser Arbeit eine Modifikation der Methode entwickelt, die die ursprüngliche Vorgehensweise so weit wie möglich übernimmt.

Um die im realen System zu erwartende Modellordnung bei der zur  $t-\Omega$ -Übertragung gehörenden Simulation der Systemantworten abbilden zu können, müssen Regler definiert werden. Zu diesem Zweck werden hier durch Polplatzierungsalgorithmen gewonnene, beobachterbasierte Regler genutzt. Um die von Horowitz vorgegebene Vorgehensweise so weit wie möglich beizubehalten, werden für die Wahl der Pole Vereinfachungen erforderlich, die hier definiert und begründet werden.

Die Anwendung der modifizierten Methode zur  $t-\Omega$ -Übertragung zeigt auf, ob die Einhaltung vorgegebener Grenzen für ein System Probleme bereitet. In diesem Fall können an Hand der simulierten Systemantworten neue, einhaltbare Grenzen definiert werden.

Die simulative Berechnung der Systemantworten kann, außer zur Modifikation bestehender Grenzen auch zur Neudefinition von Anforderungen an das Systemverhalten genutzt werden.

## 6. EINHALTUNG VON SPEZIFIKATIONEN ALS OPTIMIERUNGSPROBLEM

Inhalt dieses Kapitels ist die Definition von konvexen bzw. nicht-konvexen Optimierungsproblemen aus den durch Templates gegebenen Beschreibungen der Modellunsicherheiten und den durch Betragsgrenzen beschriebenen Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis. Durch die Lösung dieser Optimierungsprobleme werden Regler berechnet, die die Einhaltung aller Vorgaben, für alle betrachteten Frequenzen und Parametervariationen, sicherstellen.

### 6.1 Einleitung

#### 6.1.1 Problemstellung

Die Reglersynthese im Rahmen der Quantitative Feedback Theory erfolgt durch Beeinflussung des offenen Regelkreises (Loop-Shaping). Der nominale ORK soll dabei so „geformt“ werden, dass er für jede betrachtete Frequenz innerhalb der aus den Bounds definierten zulässigen Wertemengen liegt. Diese Aufgabe lässt sich als Optimierungsproblem formulieren [39, 16].

Die durch Bounds definierten, vom nominalen offenen Regelkreis einzuhaltenden Wertemengen können sehr komplexe Formen aufweisen. Die Bewertung der Lage des nominalen offenen Regelkreises, in Bezug auf die Bounds, die durch das Gütefunktional erfolgt, erfordert in diesen Fällen eine vergleichsweise schwierige Auswertung (vgl. [39, 40]), oder eine, möglicherweise konservative, Approximation der Bounds [16]. Bounds ergeben sich als Schnittmenge der zulässigen Mengen, die aus den Betragsgrenzen definiert werden (vgl. Abschnitt 2.3.6). Diese zulässigen Mengen sind, im Gegensatz zu den Bounds, immer Kreise. Es bietet sich daher an, das Gütefunktional für die Reglersynthese an Hand dieser Wertemengen zu formulieren.

Konvexe Optimierungsprobleme, also Probleme, deren Gütefunktional konvex in den Optimierungsparametern ist, weisen gegenüber nicht-konvexen Optimierungsproblemen eine Reihe von Vorteilen auf [78, 12] (keine lokalen Minima, effiziente Lösungsalgorithmen). Um diese Vorteile für die Reglersynthese nutzen zu können ist die Formulierung der beschriebenen Loop-Shaping-Aufgabe als konvexes Optimierungsproblem erforderlich.

Da die zulässigen Wertemengen in der komplexen Ebene nicht konvex, und die möglichen Darstellungen des Reglers im nominalen offenen Regelkreis nicht affin in den Parametern sind, stellt die Optimierung des komplexen Frequenzganges auf Einhaltung der zulässigen Wertemengen ein nicht-konvexes Optimierungsproblem dar.

Das ursprüngliche, nicht-konvexe Optimierungsproblem kann jedoch in ein konvexes Optimierungsproblem überführt werden. Dazu ist, außer der Transformation der zulässigen Wertemengen in konvexe Mengen, eine Darstellung des zu optimierenden, transformierten Reglers erforderlich, die affin in den Optimierungsparametern ist [12].

Sowohl die Transformation des nicht-konvexen Optimierungsproblems als auch die affine Darstellung des zu optimierenden Reglers sind in der Anwendung inhärent konservativ. Dies kann dazu führen, dass ein lösbares nicht-konvexes Optimierungsproblem in ein nicht-lösbares konvexes Optimierungsproblem übertragen wird.

Optimierungsprobleme bilden den mehrdimensionalen Raum der Optimierungsparameter auf ein skalares Gütefunktional ab. Diese Abbildung muss transparent im Hinblick auf Gründe für eventuelle Nichtkonvergenz sein, um Rückschlüsse auf erforderliche Modifikationen des Optimierungsproblems zu geben.

### 6.1.2 *Zu lösende Aufgaben*

Ausgehend von den vorangehenden Darstellungen werden die folgende Aufgaben definiert:

- Formulierung des Gütefunktionals an Hand von zulässigen Wertemengen.
- Definition des nicht-konvexen Optimierungsproblems für die Bestimmung von Reglern zur robusten Einhaltung von Forderungen an den geschlossenen Regelkreis.
- Transformation der nicht-konvexen Boundaries in konvexe Mengen.
- Gewinnung einer Darstellung des zu optimierenden Reglers, die affin in den Optimierungsparametern ist.
- Gewinnung einer Methode zur Analyse des Optimierungsergebnisses bei unzureichender Konvergenz.

### 6.1.3 *Gliederung*

Im Abschnitt 6.2 werden die Grundlagen der in dieser Arbeit definierten Nutzung der aus den Betragsgrenzen resultierenden zulässigen Mengen in der komplexen Ebene zur Formulierung eines Gütefunktionals beschrieben. Das darauf basierende nicht-konvexe Optimierungsproblem und die Methode zur Analyse des Optimierungsergebnisses wird in Abschnitt 6.3 definiert. Im Abschnitt 6.4 wird die Herleitung des konvexen Gütefunktionals inklusive der zur konvexen Optimierung erforderlichen Basisfunktion beschrieben.

### 6.1.4 *Optimierung im Entwurf von Regelungssystemen*

Die Nutzung der Optimierung hat die Bestimmung des Reglers zum Ziel. Im Entwurfsprozess, nach Abbildung 1.1.2, ist sie daher dem Block „Entwurf“ zuzuordnen. Voraussetzung zur Anwendung der Optimierung, so wie sie hier vorgestellt wird, ist, dass das nominale Modell und die Templates berechnet (vgl. Kapitel 4), sowie die Regelungsziele festgelegt sind (vgl. Kapitel 5). Als Ergebnis liefert die Optimierung einen Regler, der die Spezifikationen erfüllt. Mit diesem Regler wird dann die Verifikation begonnen.

## 6.2 Grundlagen

### 6.2.1 Darstellung von Spezifikationen der Regelgüte in der komplexen Ebene

Forderungen an die Regelgüte werden für alle Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises formuliert. Die Formulierung erfolgt entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich. Bei Nutzung der QFT werden Forderungen im Zeitbereich in den Frequenzbereich übertragen (vgl. Abschnitt 2.3.5). Es resultieren, für jede betrachtete Frequenz  $\Omega_k$ , Beschränkungen des Betrages des komplexen Frequenzganges der Übertragungsfunktionen des GRK in der Form

$$\|\hat{T}\| \leq t_{MAX}(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad t_{MIN}(\Omega) \leq \|\hat{T}(j\Omega)\| \leq t_{MAX}(\Omega)$$

Beschränkungen des Betrages in Form von Unter- und Obergrenzen, werden zur Spezifikation des Führungsverhaltens verwendet. Von Yaniv [104] wird ausgeführt, dass bei Umformung dieser Probleme in Modellreferenzaufgaben die nicht-konvexen Untergrenzen entfallen. Im Folgenden werden daher nur noch Spezifikationen betrachtet, die den Betrag des komplexen Frequenzganges einer Übertragungsfunktion des GRK von oben begrenzen.

Eine Forderung

$$\|\hat{T}(j\Omega)\| \leq t_{MAX}$$

beschränkt die Lage des komplexen Frequenzganges der Übertragungsfunktion  $\hat{T}$  auf einen Kreis um den Ursprung der komplexen Ebene mit Radius  $t_{MAX}$ , also auf eine konvexe Menge (zur Definition einer konvexen Menge siehe [12], Anhang B.1):

$$\hat{\mathbb{T}}_Z(j\Omega_k) = \{\hat{T} \mid \|\hat{T}\| \leq t_{MAX}\}.$$

Die Zusammenhänge zwischen der Übertragungsfunktion  $L(s) = G(s)H(s)$  des offenen Regelkreises und den Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises definieren für den komplexen Frequenzgang eine Möbius-Transformation, durch die die zulässige Menge  $\hat{\mathbb{T}}_Z$  auf eine zulässige Menge für den offenen Regelkreis  $\mathbb{L}_Z$  abgebildet wird. Jede dieser Möbius-Transformationen enthält eine Inversion, da alle Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises mit der Sensitivitätsfunktion verknüpft sind, und diese eine Inversion enthält. Die resultierenden zulässigen Mengen für den Frequenzgang des ORK sind daher nicht konvex, wie im Folgenden beispielhaft gezeigt werden kann:

Eine Beschränkung der Sensitivitätsfunktion

$$\|S\| = \left\| \frac{1}{1+L} \right\| \leq S_{MAX}$$

wird eingehalten, wenn

$$\|1+L\| \geq \frac{1}{S_{MAX}}$$

gilt. Die zulässige Menge für den offenen Regelkreis liegt damit *außerhalb* eines Kreises um den Punkt  $-1 + j0$  mit Radius  $1/S_{MAX}$ . Diese zulässige Menge ist nicht konvex. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, hat dies Auswirkungen auf die Konvexität von Optimierungsproblemen, die die Einhaltung einer Betragsgrenze sicherstellen sollen.

## 6.2.2 Zugehörigkeitsfunktionen

Um die Zugehörigkeit eines beliebigen komplexen Frequenzganges zu einer zulässigen Menge im Optimierungsproblem erfassen zu können, werden in dieser Arbeit „Zugehörigkeitsfunktionen“ eingeführt, die wie folgt definiert werden:

**Definition 6.2.1** Gegeben sind die Menge  $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{C}$  und der Punkt  $p = p_R + j p_I \in \mathbb{C}$ . Eine Funktion  $Z_{\mathbb{M}}(p) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Zugehörigkeitsfunktion von  $\mathbb{M}$** , wenn

$$Z_{\mathbb{M}}(p) \begin{cases} = 0 & \text{falls } p \in \mathbb{M} \\ > 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. □

Für die Definition des hier interessierenden Optimierungsproblems sind insbesondere die Zugehörigkeitsfunktionen eines Punktes zum Inneren eines Kreises und zum Äußeren eines Kreises relevant. Aus der parametrischen Darstellung eines Kreises in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt  $c = c_r + j c_i$  und Radius  $r$  folgt, dass für einen Punkt im Kreisinneren bzw. auf dem Kreisrand

$$Z_{K0} = \|p - c\| - r^2 = (p_r - c_r)^2 + (p_i - c_i)^2 - r^2 \leq 0 \quad (6.2.1)$$

gilt. Daraus lassen sich die Zugehörigkeitsfunktionen für Punkte im Kreisinneren

$$Z_{K_I}(p_R, p_I) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } Z_{K0} \leq 0 \\ Z_{K0} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

und für Punkte außerhalb des Kreises

$$Z_{K_E}(p_R, p_I) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } -Z_{K0} \leq 0 \\ -Z_{K0} & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

definieren.

Aus den Zugehörigkeitsfunktionen werden im Folgenden die Grundlagen der Gütefunktionale für die zu definierenden Optimierungsprobleme hergeleitet.

Prüft man die Konvexität der beiden Zugehörigkeitsfunktionen in den Gleichungen 6.2.2 und 6.2.3 mit der Konvexitätsbedingung für zweifach differenzierbare Funktionen (vgl. Anhang B.2, [12])

$$\nabla^2 Z_{K_E}(\vec{p}) \succeq 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla^2 Z_{K_I}(\vec{p}) \succeq 0 \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{C},$$

dann sieht man, dass nur die in Gleichung 6.2.2 gegebene Zugehörigkeitsfunktion für Punkte im Inneren des Kreises ein konvexes Funktional definiert (Zur Definition einer konvexen Funktion, siehe Anhang B.2).

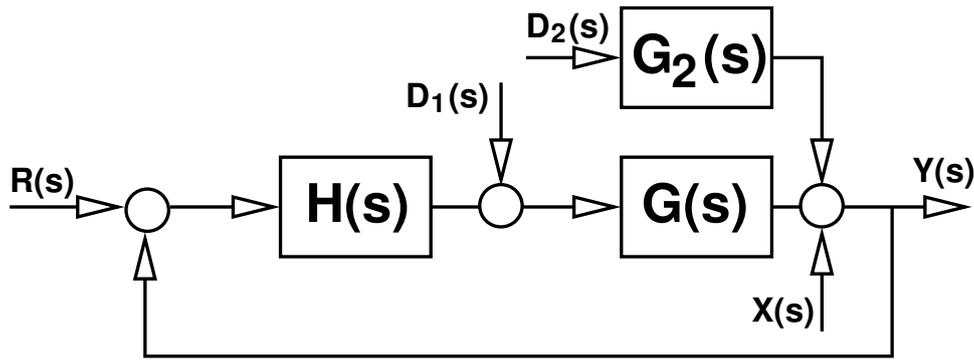


Abb. 6.3.1: Standardregelkreis zur Definition des nicht-konvexen Optimierungsproblems

### 6.3 Definition des nicht-konvexen Optimierungsproblems

Ziel der Reglersynthese mittels QFT ist, einen Regler zu berechnen, der für **alle** betrachteten Frequenzen und **alle** zulässigen Parameterkombinationen **alle** Spezifikationen einhält. Dieses Ziel wird in der vorliegenden Arbeit in einem Optimierungsproblem erfasst, indem zunächst nur einzelne Teilaufgaben betrachtet werden (siehe Abschnitt 6.3.3).

Für jede betrachtete Frequenz  $\Omega_k$ , jede zugehörige Betragsgrenze  $|t_{kl}| \leq \hat{t}_{kl}$  und alle relevanten Parameterkombinationen  $\vec{p}_m$  (vgl. Abschnitt 6.3.5) werden Teilgütefunktionale  $J_{klm}$  erstellt, die bewerten, ob die Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis für dieses Teilproblem erfüllt werden.

In einem weiteren Schritt wird das Gesamtgütefunktional  $J$ , durch Kombination der Teilfunktionale  $J_{klm}$ , erstellt (siehe Abschnitt 6.3.4). Das Gütefunktional  $J$  bewertet, ob alle Vorgaben an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden.

#### 6.3.1 Regelungstechnische Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung bei Nutzung des nicht-konvexen Optimierungsansatzes ist die Bestimmung eines Reglers  $H(s)$  im Standardregelkreis, wie er in Abbildung 6.3.1 dargestellt ist. Zielstellung der Reglersynthese ist die Einhaltung aller Regelungsziele, d.h. die Einhaltung aller Forderungen, die an den geschlossenen Regelkreis gestellt werden. Anforderungen werden in der Praxis insbesondere an die Sensitivitätsfunktion  $S(s)$  und die komplementäre Sensitivitätsfunktion  $T(s)$ :

$$S(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \quad \text{bzw.} \quad T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (6.3.1)$$

sowie an die Störübertragungsfunktion von Störungen am Eingang  $D_1(s)$  bzw. von Störungen auf dem Sekundärpfad  $D_2(s)$  auf die Messgröße  $Y(s)$

$$G_D(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad \text{bzw.} \quad T_2(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (6.3.2)$$

definiert. In der QFT wird, an Stelle der komplementären Sensitivitätsfunktion, durch Einfügen eines Vorfilters  $R(s) = F(s)R_0(s)$  die Übertragungsfunktion

$$T(s)F(s) = T(s) = \frac{Y(s)}{R_0(s)} = \frac{G(s)H(s)F(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6.3.3)$$

zur Erzwingung von gewünschtem Führungsverhalten genutzt.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Herleitung des nicht-konvexen Optimierungsproblems, basiert auf den hier dargestellten Übertragungsfunktionen am Standardregelkreis. Die Definition des konvexen Optimierungsproblems erfolgt analog dazu, nutzt aber einen Youla-parametrierten Regelkreis und dessen Übertragungsfunktionen (vgl. Abschnitt 6.4.1).

### 6.3.2 Parametrierung des Reglers für die Optimierung

Da das hier zu definierende Optimierungsproblem nicht-konvex ist, muss die Parametrierung des Reglers keine besonderen Anforderungen erfüllen. Es liegt daher nahe, die Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms unmittelbar als Optimierungsparameter zu betrachten. Die Optimierungsparameter

$$\vec{p}_{Opt}^T = [\alpha_P, \alpha_{P-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_{Q-1}, \beta_{Q-2}, \dots, \beta_1, \beta_0]$$

gehen dabei, wie folgt, in die Übertragungsfunktion des Reglers ein:

$$H(s, \vec{\alpha}) = \frac{\alpha_P \cdot (f_0 \cdot s)^P + \alpha_{P-1} \cdot (f_0 \cdot s)^{P-1} + \dots + \alpha_1 \cdot (f_0 \cdot s) + \alpha_0}{s^Q + \beta_{Q-1} \cdot (f_0 \cdot s)^{Q-1} + \dots + \beta_1 \cdot (f_0 \cdot s) + \beta_0}.$$

Die Vormultiplikation der Laplace-Variablen mit  $f_0$  wird in der Modellidentifikation häufig genutzt. Sie trägt dazu bei, die numerische Kondition des Optimierungsproblems zu verbessern. Der Faktor  $f_0$  wird zu Beginn der Optimierung festgelegt, und bleibt konstant. Üblich ist, die „mittlere betrachtete Frequenz“ zu wählen. Auf die hier durchgeführte Optimierung übertragen bedeutet dies, dass der Mittelwert aller Frequenzen, für die Betragsgrenzen definiert sind, als  $f_0$  gewählt wird.

In der QFT erfolgt die Reglersynthese durch Loop-Shaping des nominalen offenen Regelkreises. Dieser ergibt sich für die Frequenz  $\Omega_k$  aus

$$L^0(j\Omega_k, \vec{\alpha}) = G^0(j\Omega_k) \cdot H(j\Omega_k, \vec{\alpha}).$$

Diese Konvention wird in der vorliegenden Arbeit für die Herleitung des nicht-konvexen Gütefunktionalen übernommen. Die betrachteten zulässigen Mengen und die sich daraus ergebenden Teilgütefunktionale beziehen sich auf den nominalen offenen Regelkreis.

### 6.3.3 Definition des Optimierungsproblems für Teilaufgaben

Das Optimierungsproblem wird zunächst für eine Frequenz  $\Omega_k$ , eine Parameterkombination  $\vec{p}_l$  und eine Betragsgrenze definiert. Im ersten Schritt werden die Zusammenhänge zwischen den Forderungen an den geschlossenen Regelkreis und den Forderungen an den offenen Regelkreis untersucht. Darauf aufbauend werden Zugehörigkeitsfunktionen berechnet.

Umrechnung einer Betragsgrenze in eine zulässige Menge für den ORK:

Eine Vorgabe an den geschlossenen Regelkreis, die in Form einer Betragsgrenze für eine beliebige Übertragungsfunktion  $\hat{T}_m(s)$  des GRK durch

$$\left| \hat{T}_m(j\Omega_k, G(j\Omega_k, \vec{p}), H(j\Omega_k)) \right| \leq \hat{t}_{km},$$

gegeben ist, definiert eine zulässige Menge in der komplexen Ebene

$$\hat{\mathbb{T}}_m(\Omega_k) = \hat{\mathbb{T}}_{km} = \{t_m(j\Omega_k) \mid t_m(j\Omega_k) \in \mathbb{C}, |t_m(j\Omega_k)| \leq \hat{t}_{km}\}$$

in der der komplexe Frequenzgang  $\hat{T}_m(j\Omega_k)$  für alle Parametervariationen  $\vec{p} \in \mathbb{P}$  liegen muss, wenn die Spezifikation eingehalten werden soll.

Der Zusammenhang zwischen dem komplexen Frequenzgang von  $\hat{T}_m(j\Omega_k)$  und dem komplexen Frequenzgang des Reglers  $H(j\Omega_k)$  ist durch eine Möbius-Transformation gegeben. Löst man diesen Zusammenhang nach dem komplexen Frequenzgang des Reglers auf, ergibt sich dieser, ebenfalls als Möbius-Transformation, aus  $\hat{T}_m(j\Omega_k)$ :

$$H(j\Omega_k) = H(\hat{T}_m(j\Omega_k), G(j\Omega_k, \vec{p})) \quad (6.3.4)$$

Unter Nutzung von Gleichung 6.3.4 kann, für jede Betragsgrenze, jede Frequenz  $\Omega_k$  und jede Parametervariation  $\vec{p}_l$ , aus  $\hat{\mathbb{T}}_{km}$ , eine zulässige Menge  $\mathbb{H}_{klm}$  berechnet werden, in der  $H(j\Omega_k)$  liegen muss, wenn der komplexe Frequenzgang  $\hat{T}_m(j\Omega)$  in der zulässigen Menge  $\hat{\mathbb{T}}_{km}$  liegen soll:

$$\mathbb{H}_{klm} = \{H \mid H(\hat{T}_m(j\Omega_k), G(j\Omega_k, \vec{p})); \forall \hat{T}_m(j\Omega_k) \in \hat{\mathbb{T}}_{km}\}.$$

Durch Multiplikation mit dem Frequenzgang des nominalen Streckenmodells  $G^0(j\Omega_k)$  ergibt sich schließlich die zulässige Menge für den nominalen offenen Regelkreis.

$$\mathbb{L}_{klm}^0 = \{L^0 \mid L^0 = G^0(j\Omega_k)H(j\Omega_k); \forall H(j\Omega_k) \in \mathbb{H}_{klm}\}.$$

Jeder Regler der, für die **betrachtete** Frequenz  $\Omega_k$ , den komplexen Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises  $L$  so formt, dass  $L(j\Omega_k) \in \mathbb{L}_{klm}^0$  gilt, hält, auf Grund der Herleitung von  $\mathbb{L}_{klm}^0$ , die **betrachtete** Betragsgrenze für die **betrachtete** Parameterkombination ein.

An Hand eines Beispiels kann der Zusammenhang weiter verdeutlicht werden: Vorgaben  $\|S_{km}\| \leq S_{B_{km}}$  an die Sensitivitätsfunktion  $S(s) = (1 + G(s)H(s))^{-1}$  werden dann erfüllt, wenn der komplexe Frequenzgang der Sensitivitätsfunktion innerhalb der durch

$$\mathbb{S}_{km} = \left\{s \mid s = \hat{s}e^{j\phi} \mid \hat{s} \in [0, S_{B_{km}}], \phi \in [0, 2\pi]\right\}$$

beschriebenen zulässigen Menge liegt. Für eine bestimmte Parameterkombination  $\vec{p}_l$  hält der geschlossene Regelkreis diese Betragsgrenze ein, wenn der komplexe Frequenzgang des Reglers innerhalb der zulässigen Menge  $\mathbb{H}_{klm}$  liegt, die sich aus der Abbildung von  $\mathbb{S}_{km}$  durch die zugehörige Möbius-Transformation ergibt. Die Definition der Sensitivitätsfunktion wird dazu nach  $H$  aufgelöst, die resultierende Transformation ist:

$$H(j\Omega) = \frac{1 - S(j\Omega)}{G(j\Omega, \vec{p}_l)S(j\Omega)}.$$

Die zulässige Menge  $\mathbb{S}_{km}$  wird durch diese Transformation in die Menge

$$\mathbb{H}_{klm} = \left\{ h \mid h = \frac{1}{G(j\Omega_k, \vec{p}_l)} \left( \frac{1-s}{s} \right); s \in \mathbb{S}_{km} \right\}$$

abgebildet. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit dem komplexen Frequenzgang des nominalen Streckenmodells vor, dann ist die zulässige Menge  $\mathbb{L}_{klm}^0$  für den nominalen offenen Regelkreis wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{klm}^0 &= \{ l_0 \mid l_0 = G_0(j\Omega_k) \cdot h; h \in \mathbb{H}_{klm} \} = \\ &= \frac{G_0(j\Omega_k)}{G(j\Omega_k, \vec{p}_l)} \left( \frac{1}{\hat{s}} e^{-j\phi} - 1 \right); \quad \forall \hat{s} \in [0, S_{B_{km}}]; \phi \in [0, 2\pi] . \end{aligned}$$

Die Berandung der zulässigen Menge  $\mathbb{L}_{klm}^0$  geht aus der Möbius-Transformation eines Kreises hervor, und stellt damit wiederum einen Kreis dar. Der Mittelpunkt ist durch  $G_0(j\Omega_k)/G(j\Omega_k, \vec{p}_l)$  gegeben, der Radius ist  $G_0(j\Omega_k)/(G(j\Omega_k, \vec{p}_l) \cdot S_{B_{km}})$ .

#### *Nichtkonvexität der zulässigen Mengen für den nominalen ORK*

Die Möbius-Transformationen, durch die zulässige Wertemengen des geschlossenen Regelkreises in zulässige Wertemengen für den Regler abgebildet werden, ergeben sich aus den in den Gleichungen 6.3.1 und 6.3.2 dargestellten Übertragungsfunktionen.

Um die Übertragungsfunktionen  $S(s)$ ,  $G_D(s)$  und  $T_2(s)$  nach  $H(s)$  aufzulösen, ist immer eine Inversion  $1/S(s)$ ,  $1/G_D(s)$  und  $1/T_2(s)$  erforderlich. Für die Abbildung der zulässigen Wertemengen dieser Übertragungsfunktionen, durch die jeweiligen Möbius-Transformationen, bedeutet dies, dass immer Kreisflächen um den Ursprung der komplexen Ebene invertiert werden, da die zulässigen Mengen  $\mathbb{S}$ ,  $\mathbb{G}_D$  und  $\mathbb{T}_2$  solche Kreisflächen um den Ursprung darstellen.

Die Inversion einer Kreisfläche um den Ursprung resultiert immer in einer Menge, die *außerhalb* eines Kreises liegt. Diese Menge ist nicht-konvex.

Der Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion des Reglers und der Übertragungsfunktion der komplementären Sensitivitätsfunktion ergibt sich durch

$$H(s) = \frac{T(s)}{(1-T(s))G(s)} .$$

Nutzt man diesen Zusammenhang als Möbius-Transformation zur Abbildung der zulässigen Menge  $\mathbb{T}$  auf  $\mathbb{H}$ , dann ist nach Chait [16] die Menge  $\mathbb{H}$  konvex, wenn die Menge  $\mathbb{T}_z = 1 - \mathbb{T}$  den Ursprung der komplexen Ebene nicht enthält. Um dies zu erreichen, muss der Betrag von  $T(s)$  kleiner als 1 sein. Da mit Vorgaben an  $T(s) = Y(s)/R(s)$  das Führungsverhalten definiert wird, kann diese Beschränkung nicht akzeptiert werden. Es muss also davon ausgegangen werden, dass auch zulässige Mengen  $\mathbb{H}$ , die aus Betragsgrenzen für  $T(s)$  resultieren, nicht-konvex sind.

Als Konsequenz dieser Betrachtung ergibt sich, dass die zulässigen Wertemengen in der komplexen Ebene für den Regler  $H$ , und damit auch die für den nominalen offenen Regelkreis  $L^0$  immer außerhalb eines Kreises liegen, und damit nicht-konvex sind.

### Berechnung der Zugehörigkeitsfunktion für das Teilproblem

Für die im vorigen Abschnitt hergeleitete zulässige Menge  $\mathbb{L}_{klm}^0$  wird die Zugehörigkeitsfunktion  $Z_{\mathbb{L}_{klm}^0}$ , die in Abschnitt 6.2.2 eingeführt wurde, berechnet.

Kreismittelpunkt  $l_{c_{klm}}$  und Radius  $r_{klm}$  werden, wie im obigen Beispiel dargestellt, aus der Auswertung der jeweiligen Transformation gewonnen. Mit diesen Daten kann die Gleichung 6.2.1 aus Abschnitt 6.2.2 für das vorliegende Problem wie folgt dargestellt werden:

$$Z_{\mathbb{L}_{klm}^0}(L_0(\vec{p}_{Opt})) = \left| |L_0(\vec{p}_{Opt}) - l_{c_{klm}}| \right|^2 - r_{klm}^2. \quad (6.3.5)$$

In Gleichung 6.3.5 ist bereits berücksichtigt, dass sich der komplexe Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises aus den Optimierungsparametern  $\vec{p}_{Opt}$  ergibt.

Da, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben wurde, die zulässigen Mengen für den nominalen offenen Regelkreis nicht-konvex sind, hat die Zugehörigkeitsfunktion die in Gleichung 6.2.3 vorgegebene Form. Mit Gleichung 6.3.5 ergibt sich daher

$$J_{klm} = Z_{\mathbb{L}_{klm}^0}(\vec{p}_{Opt}) \begin{cases} 0 & \text{falls } Z_{\mathbb{L}_{klm}^0}(\vec{p}_{Opt}) \leq 0 \\ -Z_{\mathbb{L}_{klm}^0}(\vec{p}_{Opt}) & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3.6)$$

als Zugehörigkeitsfunktion für das betrachtete Teilproblem. Die Zugehörigkeitsfunktion aus Gleichung 6.3.6 wird für die weiteren Herleitungen als Gütefunktional für das Teilproblem genutzt.

### Anschauliche Interpretation der Teilprobleme

Die Definition des Gütefunctionals für ein Teilproblem ist analog zu den bei der Berechnung der Bounds genutzten Rechenschritten (vgl. Abschnitt 2.3.6). Werden die Optimierungsparameter  $\vec{p}_{Opt}$  so bestimmt, dass das Teilgütefunktional  $J_{klm}$  aus Gleichung 6.3.6 gleich Null ist, dann liegt der *nominale offene Regelkreis* für die betrachtete Frequenz  $\Omega_k$ , Parameterkombination  $\vec{p}_l$  und Betragsgrenze  $|\hat{T}_{km}| \leq \hat{t}_{km}$  in der zugehörigen zulässigen Wertemenge  $\mathbb{L}_{klm}^0$ . Auf Grund der Herleitung dieser Wertemenge bedeutet dies, dass der *geschlossene Regelkreis* für diese Frequenz und Parameterkombination die betrachtete Betragsgrenze einhält.

#### 6.3.4 Kombination der Optimierungsprobleme für Teilaufgaben zum Gesamtproblem

Das Entwurfsproblem ist dann, und nur dann, gelöst, wenn ein Regler gefunden wird, der für *alle* betrachteten Frequenzen und *alle* zulässigen Parameterkombinationen *alle* Betragsgrenzen einhält.

Wird für jede betrachtete Frequenz, zulässige Parameterkombination und Betragsgrenze ein Teilgütefunktional  $J_{klm}$  so definiert, wie dies im vorangegangenen Abschnitt 6.3.3 beschrieben wurde, dann bedeutet dies für die Optimierungsaufgabe, dass eine Lösung  $\vec{p}_{Opt}^*$  gesucht wird, bei der alle Gütefunctionale  $J_{klm}$  mit  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  und  $m = 1, 2, \dots, M$  separat Null werden. Ist dies der Fall, dann ist auch die Summe der einzelnen Gütefunctionale

$$J(\vec{\alpha}) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M J_{klm}(\vec{p}_{Opt}) \quad (6.3.7)$$

Null. Die in Gleichung 6.3.7 dargestellte Summation kann demnach als Gesamtgütefunktional herangezogen werden. Sind einzelne Spezifikationen, Frequenzen oder Parameter bei der Optimierung von besonderer Bedeutung, kann stattdessen auch ein gewichtetes Gütefunktional

$$J = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M w_{klm} \cdot J_{klm} \quad (6.3.8)$$

benutzt werden.

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurde die einfache Summation aus Gleichung 6.3.7 genutzt.

Die betrachteten Frequenzen, Parameterkombinationen und Betragsgrenzen definieren das Optimierungsproblem. Sie stellen die „dualen Parameter“ des Optimierungsproblems dar. Findet man durch Optimierung einen Satz Optimierungsparameter  $\vec{p}_{Opt}$ , der das Gütefunktional  $J$  Null werden lässt, heißt dies, dass für die gewählten dualen Parameter die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt sind. Daraus kann noch nicht geschlossen werden, dass der geschlossene Regelkreis tatsächlich alle Anforderungen erfüllt. Bei ungünstiger Auswahl der dualen Optimierungsparameter können, trotz erfolgreicher Optimierung schlechte Regelungsergebnisse resultieren.

Die Hauptschwierigkeit in diesem Zusammenhang ist die geeignete Wahl der Anzahl zu betrachtender Frequenzen und Parameterkombinationen. Werden zu wenige Frequenzen und Parameterkombinationen berücksichtigt, resultiert meist ein unbrauchbarer Regler, trotz Konvergenz der Optimierung. Andererseits erhöht sich der Rechenaufwand zur Definition und Lösung des Optimierungsproblems erheblich, wenn die Anzahl der betrachteten Frequenzen und Parameterkombinationen erhöht wird. Mit dem Ergebnis aus Abschnitt 6.3.5 kann die Auswahl der Parameterkombination für die Optimierungsaufgabe vereinfacht werden. Abschnitt 6.3.6 beschreibt, wie die Anzahl zu untersuchender Frequenzen, durch eine Ergänzung des Optimierungsproblems, verringert wird.

### 6.3.5 Auswahl der Parameterkombinationen für die Definition des Optimierungsproblems

Die Menge aller zulässigen Parameterkombinationen ist eine unendliche Menge. Daher müssen die zulässigen Mengen für den nominalen offenen Regelkreis approximiert werden. Es wird eine Abschätzung mit einer endlichen Zahl von Punkten durchgeführt. Diese werden aus der Templateberechnung übernommen. Es genügt, Punkte auf dem Rand des Templates zu wählen. Dies kann mit der folgenden, auf der Anwendung des Maximumprinzips (vgl. Anhang A.2.2) beruhenden, Überlegung begründet werden:

Das Maximumprinzip besagt, dass das Maximum des Betrages einer auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet holomorphen Funktion auf dem Rand des Gebietes auftritt [13].

Betrachtet werden, für eine feste Frequenz  $\Omega_k$ , die aus den Übertragungsfunktionen in den Gleichungen 6.4.1 bis 6.4.4 hervorgehenden komplexen Frequenzgänge:

$$\tilde{T} = \tilde{T}(j\Omega_k, G(\vec{p})) .$$

Unter der Annahme, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist, sind die komplexen Frequenzgänge holomorphe Funktionen des Frequenzganges der parameterabhängigen Strecke

$G(j\Omega, \vec{p})$ . Das zu  $G$  gehörige Template  $\mathbb{G}(j\Omega)$  ist die Abbildung der zulässigen Parametervariationen auf die komplexe Ebene. Es stellt ein einfach zusammenhängendes Gebiet dar. Dieses Template wird durch den holomorphen Zusammenhang zwischen  $G$  und  $\tilde{T}$  abgebildet:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(j\Omega, \mathbb{G}) .$$

Wird das Template  $\mathbb{G}$  durch den holomorphen, komplexen Frequenzgang  $\tilde{T}$  auf die Wertemenge  $\tilde{\mathbb{T}}$  abgebildet, dann kann aus der Anwendung des Maximumprinzips gefolgert werden, dass der maximale Betrag der Elemente von  $\tilde{\mathbb{T}}$  durch Abbildung eines Punktes auf dem Rand des Templates resultiert.

### 6.3.6 Erforderliche Ergänzungen des nicht-konvexen Optimierungsproblems

Die Minimierung des nicht-konvexen Gütefunktional durch Variation der Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom des Reglers  $H(s)$  kann unter Umständen zu zwei unerwünschten Nebeneffekten führen, die durch Formulierung nichtlinearer Nebenbedingungen für das Optimierungsproblem verhindert werden.

#### *Instabiler Regler*

Bei unbeschränkter Wahl der Koeffizienten des Nennerpolynoms kann der resultierende Regler instabil werden, obwohl alle Anforderungen an den GRK erfüllt werden. In der Praxis müssen instabile Regler vermieden werden, da sie nur mit großem Aufwand in Betrieb genommen werden können. Aus diesem Grund wird als nichtlineare Nebenbedingung gefordert, dass alle Pole des Reglers  $H(s)$  in der linken Halbebene liegen, dass also der Realteil der Pole des Reglers kleiner als Null ist.

#### *Singuläre bzw. quasi-singuläre Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises*

Da Forderungen an den geschlossenen Regelkreis nur für eine endliche Anzahl Frequenzen berechnet werden, ist denkbar, dass ein Regler zwar für alle betrachteten Frequenzen die vorgeschriebenen Spezifikationen einhält, zwischen zwei der betrachteten Frequenzen jedoch die maximal zulässigen Betragsgrenzen überschreitet. Ein solches Verhalten ergibt sich, wenn im geschlossenen Regelkreis ungedämpfte oder nur schwach gedämpfte, konjugiert-komplexe Polpaare auftreten, deren Resonanzfrequenz zwischen zwei der im Optimierungsproblem betrachteten Frequenzen liegt.

Das Auftreten quasi-singulärer Lösungen kann, durch die Vergrößerung der Anzahl untersuchter Frequenzen, verhindert werden. Um die damit einhergehende Erhöhung des Rechenaufwandes zu vermeiden, wird stattdessen eine nicht-konvexe Nebenbedingung eingeführt.

Angelehnt an die in der QFT übliche Forderung nach Stabilität des nominalen GRK, wird hier eine Forderung an die Mindestdämpfung der Pole des nominalen GRK gestellt. Für den nominalen geschlossenen Regelkreis wird als Nebenbedingung eine Mindestdämpfung gefordert. Für reelle Pole des GRK heißt dies, dass die Pole in der linken Halbebene liegen müssen, für konjugiert-komplexe Polpaare

$$s_{1/2} = \left( -\xi \pm j \sqrt{1 - \xi^2} \right) \omega$$

wird, abhängig von den sonstigen Spezifikationen, ein Minimalwert  $\xi \geq \xi_{MIN}$  gefordert. Durch die Mindestdämpfung werden in der Praxis die, durch Resonanzüberhöhungen von schwach gedämpften Polen des GRK hervorgerufenen, Quasi-Singularitäten sehr wirkungsvoll verhindert.

### 6.3.7 Auswertung des Gütefunktional bei nicht ausreichender Güte

Die in dieser Arbeit verwendete Definition des Gütefunktional, als Kombination einzelner Teilgütefunktionale, ermöglicht eine sehr konkrete Auswertung der erzielten Optimierungsergebnisse. Das Gütefunktional wird dann, und nur dann, Null, wenn jedes einzelne Teilfunktional Null wird. Wird der Wert Null nicht erreicht, kann präzise untersucht werden, welche Teilfunktionale  $J_{klm}$  größer als Null sind. Damit kann festgestellt werden, welche Spezifikationen bei welcher Frequenz vom Regler nicht eingehalten werden können. Aus diesen Untersuchungen können Rückschlüsse auf

- erforderliche Modifikationen der betroffenen Teilspezifikationen, und / oder
- erforderliche Maßnahmen zur Verminderung der Modellunsicherheit, und / oder
- erforderliche Modifikationen der Reglerstruktur

gezogen werden. Bei geeigneter algorithmischer Aufbereitung der Berechnungsdaten ist diese Analyse eine sehr wertvolle Hilfe (vgl. Abschnitt 7.5.2).

## 6.4 Definition des konvexen Optimierungsproblems

Die Vorgehensweise zur Definition des konvexen Optimierungsproblems ist analog zu der in Abschnitt 6.3 vorgestellten Aufbereitung des Problems.

Zunächst werden für jede Frequenz, Parameterkombination und Betragsgrenze die Zugehörigkeitsfunktionen berechnet, aus denen sich die Teilfunktionale ergeben. Diese werden dann zum Gesamtproblem kombiniert.

Um die Gesamtaufgabe als konvexe Optimierungsaufgabe beschreiben zu können, müssen die Teilgütefunktionale, also die Zugehörigkeitsfunktionen, konvex in den Optimierungsparametern  $\vec{p}_{Opt}$  sein. Nach Boyd und Vandenberghe [12]) ist dies der Fall, wenn

- die jeweils zulässigen Mengen für den komplexen Frequenzgang des transformierten Reglers konvex sind (vgl. Abschnitt 6.2.2), und
- der komplexe Frequenzgang des transformierten Reglers sich für jede Frequenz als affine Kombination der Optimierungsparameter darstellen lässt.

Weiterhin muss die Kombination der Teilprobleme zum Gesamtproblem die Konvexität des Optimierungsproblems erhalten. Dies ist durch die Anwendung der in Abschnitt 6.3.4 dargestellten Summation erfüllt (vgl. Abschnitt 6.4.3).

Um die Konvexität der zulässigen Mengen sicherzustellen, wird das ursprüngliche Optimierungsproblem mittels einer Transformation in der komplexen Ebene umgeschrieben. An Stelle der

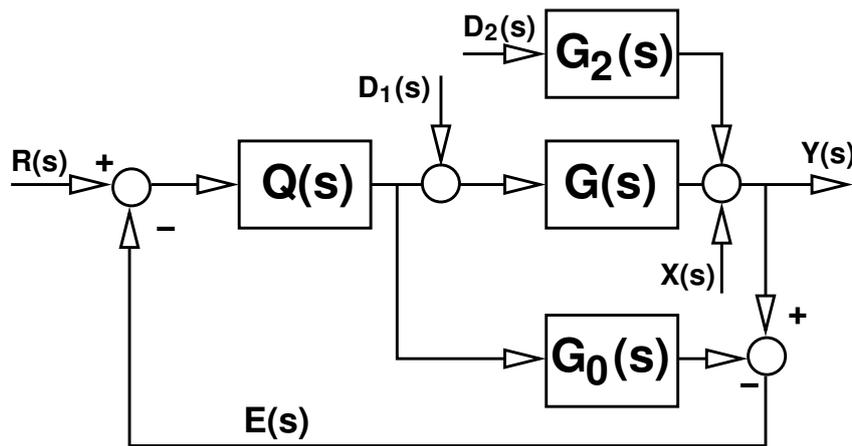


Abb. 6.4.1: Youla-Parametrierung aller stabilisierenden Regler

Berechnung des Reglers  $H(s)$  tritt dabei die Berechnung des Youla-Parameters  $Q(s)$  (siehe Abschnitt 6.4.1). Die affine Parametrierung wird durch die Beschreibung der zu optimierenden Übertragungsfunktion als Linearkombination von orthonormalen Basisfunktionen erreicht (siehe Abschnitt 6.4.2).

#### 6.4.1 Transformation der Problemstellung durch Youla-Parametrierung

Die Transformation des ursprünglichen Optimierungsproblems, mit dem Ziel, das Optimierungsproblem konvex gestalten zu können, ist erstmals von Chait [16] vorgeschlagen worden. An Stelle der hier untersuchten Youla-Parametrierung wurde dort eine andere Transformation genutzt, ansonsten sind die Vorgehensweisen analog. Die in [16] beschriebene Vorgehensweise wurde nicht in weiteren Veröffentlichungen vervollständigt, und wird daher in dieser Arbeit nicht angewendet.

#### Übertragungsfunktionen am Youla-Parametrierten Regelkreis

Die, insbesondere in der Verfahrenstechnik, häufig angewandte „Internal Model Control“ (IMC) [68] basiert auf der Parametrierung aller Regler durch den Youla-Parameter für stabile Regelstrecken  $Q(s)$ , wie sie in Abbildung 6.4.1 skizziert ist. Die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises können aus den in Abbildung 6.4.1 dargestellten Zusammenhängen hergeleitet werden. Die Regelgröße ergibt sich aus:

$$Y = X + G_2(s, \vec{p})D_2 + G(s, \vec{p})D_1 + G(s, \vec{p})Q(s)(R - E) ,$$

für den Rückführfehler  $E$  gilt:

$$E = X + G_2(s, \vec{p})D_2 + G(s, \vec{p})D_1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)]Q(s)R - [G(s, \vec{p}) - G_0(s)]Q(s)E$$

bzw., aufgelöst nach E:

$$E = \frac{1}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} X + \frac{G_2(s, \vec{p})}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} D_2 + \frac{G(s, \vec{p})}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} D_1 \frac{[G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} R.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung für die Regelgröße ergeben sich die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises:

$$Y = \frac{1 - G_0(s)Q(s)}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} X + \frac{[1 - G_0(s)Q(s)] G_2(s, \vec{p})}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} D_2 + \frac{[1 - G_0(s)Q(s)] G(s, \vec{p})}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} D_1 + \frac{G(s, \vec{p})Q(s)}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} R.$$

Die Sensitivitätsfunktion ist demnach durch

$$S(s) = \frac{1 - G_0(s)Q(s)}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} \quad (6.4.1)$$

und die Führungsübertragungsfunktion durch

$$T(s) = \frac{G(s, \vec{p})Q(s)}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} \quad (6.4.2)$$

gegeben.

Die Störungsübertragungsfunktion von Störungen am Eingang ist durch

$$G_D = \frac{G(s, \vec{p}) [1 - G_0(s)Q(s)]}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} \quad (6.4.3)$$

und die Übertragungsfunktion von Störungen auf dem Sekundärpfad durch

$$T_2 = \frac{G_2(s, \vec{p}) [1 - G_0(s)Q(s)]}{1 + [G(s, \vec{p}) - G_0(s)] Q(s)} \quad (6.4.4)$$

beschrieben.

Wie sich zeigt, sind die resultierenden Übertragungsfunktionen des geschlossenen Kreises dann affin im Youla-Parameter  $Q(s)$ , wenn das Streckenmodell  $G$  identisch mit dem nominalen Streckenmodell  $G_0$  ist. Wie im folgenden Abschnitt verdeutlicht wird, können die zulässigen Mengen für den Youla-Parameter  $Q$  konvex sein, die Konvexität ist allerdings nicht in jedem Fall sichergestellt.

#### *Konvexität der zulässigen Mengen für den Youla-Parameter*

Die betrachteten Übertragungsfunktionen für den geschlossenen Regelkreis lassen sich mit der additiven Beschreibung der Modellunsicherheit

$$G(s, \vec{p}) = G_0 + \Delta_G(s, \vec{p})$$

alle in der Form

$$\hat{T} = \frac{a - bQ}{1 + \Delta_G(s, \vec{p})Q}$$

darstellen. Löst man dies nach  $Q$  auf, ergibt sich

$$Q = \frac{a - \hat{T}}{b + \Delta_G(s, \vec{p})\hat{T}}. \quad (6.4.5)$$

Für die betrachtete Frequenz  $\Omega_k$  und eine betrachtete Parameterkombination  $\vec{p}_l$  ergibt sich die zulässige Menge  $\mathbb{Q}$  des Youla-Parameters, durch Abbildung der zulässigen Menge  $\hat{\mathbb{T}}(j\Omega_k)$ , mittels der in Gleichung 6.4.5 dargestellten Möbius-Transformation.

Wie Chait et. al. [16] ausführen, ist  $\mathbb{Q}$  konvex, wenn die Abbildung der konvexen Menge  $\hat{\mathbb{T}}(j\Omega_k)$  auf

$$\tilde{\mathbb{T}}_{Zw} = b + \Delta_G(s, \vec{p})\hat{\mathbb{T}} \quad (6.4.6)$$

den Koordinatenursprung der komplexen Ebene nicht enthält. Diese Bedingung wird bei der Bearbeitung von realen Problemen sehr häufig verletzt. In diesen Fällen wird das Kreisinnere  $\tilde{\mathbb{T}}_{Zw}$  auf das Äußere eines Kreises abgebildet, das dann die zulässige Menge  $\tilde{\mathbb{Q}}$  für den Youla-Parameter darstellt. Um die konvexe Optimierung dennoch nutzen zu können, muss die Konvexität der zulässigen Mengen trotzdem sichergestellt werden.

#### *Sicherstellen der Konvexität der zulässigen Mengen*

In [16] wird vorgeschlagen, die nominale Übertragungsfunktion so zu wählen, dass für alle zulässigen Parameterkombinationen die jeweiligen Mengen  $\hat{\mathbb{T}}$  den Ursprung nicht enthalten. Dies ist zwar schlüssig, leider jedoch nicht trivial. Will man die nominale Übertragungsfunktion durch Optimierung auswählen, sind die unsicheren Parameter der Übertragungsfunktion der Regelstrecke gleichzeitig Optimierungsparameter. Die Optimierung muss sicherstellen, dass für jede Frequenz und jede mögliche Parametervariation der Ursprung *außerhalb* der jeweiligen Mengen  $\hat{\mathbb{T}}_{Zw}$  (siehe Gleichung 6.4.6) liegt. Dies ist dann allerdings ein nicht-konvexes Optimierungsproblem. Um die *konvexe* Optimierung zu ermöglichen, muss also ein *nicht-konvexes* Optimierungsproblem gelöst werden.

An Stelle der „geeigneten Auswahl“ der nominalen Übertragungsfunktion von Chait, wird in dieser Arbeit ein Ansatz verfolgt, bei dem die nicht-konvexen zulässigen Mengen durch konvexe Mengen approximiert werden. In Frage kommen insbesondere Approximationen in Form von Kreisen und Polyhedren, wie sie beispielhaft in Abbildung 6.4.2 dargestellt sind. Die Approximation erfolgt jeweils für eine Frequenz und eine Spezifikation. Die zu approximierende Wertemenge in der komplexen Ebene ergibt sich aus der Schnittmenge aller, für die betrachtete Spezifikation bei dieser Frequenz, aus den berücksichtigten Parameterkombinationen hervorgehenden zulässigen Mengen:

$$\hat{\mathbb{T}}_{Konvex_{km}} \subseteq \bigcap_{l=1}^L \hat{\mathbb{T}}_{klm}.$$

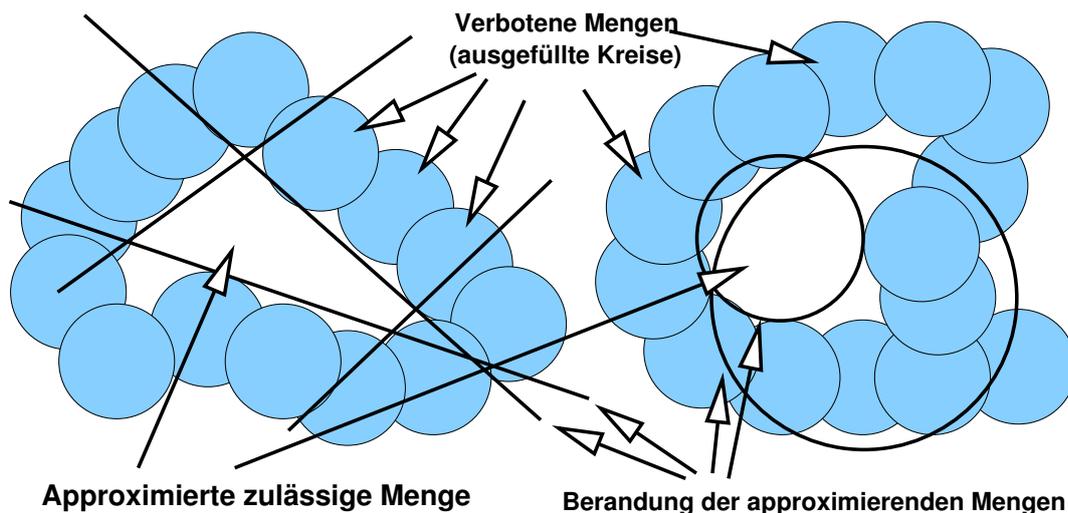


Abb. 6.4.2: Approximation nicht-konvexer zulässiger Mengen

In der vorliegenden Arbeit wird die Approximation „manuell“, durch Versuch und Irrtum, ausgeführt. Dazu werden die berechneten zulässigen Mengen in einem Diagramm dargestellt. Aus der Analyse dieses Diagramms erfolgt die Wahl der Polyhedren und Kreise, mit denen die zulässige Menge approximiert werden soll. An Hand einer Darstellung von zulässigen Mengen und Approximationen wird dann überprüft, ob die Approximationen ausreichend genau sind.

Aus Abbildung 6.4.2 wird deutlich, dass die zur Approximation genutzten konvexen Mengen nur Teilmengen der ursprünglichen, nicht-konvexen zulässigen Mengen sind. Für die Optimierung bedeutet dies, dass ein im ursprünglichen Problem zulässiger Bereich im konvexen Problem als nichtzulässig bewertet werden kann. Dies führt zu Konservativität im Entwurf, deren Auswirkung auf die Lösbarkeit des resultierenden (konvexen) Optimierungsproblems nicht von vorneherein abgeschätzt werden kann. Im Extremfall wird durch diese Konservativität ein lösbares nicht-konvexes Problem in ein nicht-lösbares konvexes Problem übertragen.

In der Anwendung hat es sich bewährt, bei Konvergenzschwierigkeiten dieses Problem gesondert zu untersuchen. Liegt der komplexe Frequenzgang des Youla-Parameters für eine oder mehrere betrachtete Frequenzen innerhalb der zulässigen, nicht-konvexen Menge, aber außerhalb der Approximation dieser zulässigen Menge, dann muss lediglich die konvexe Approximation angepasst werden.

Werden, wie in Abbildung 6.4.2 dargestellt, Polyhedren zur Approximation genutzt, müssen die Zugehörigkeitsfunktionen für diese wie folgt definiert werden:

Für jede Gerade eines Polyhedron berechnet sich eine Zugehörigkeitsfunktion aus

$$Z_g(z_R, z_I) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } Z_{g0} \leq 0 \\ Z_{g0} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad Z_{g0}(\vec{z}) = \vec{n}^T (\vec{z} - \vec{z}_0) ,$$

worin  $\vec{z} = [z_R, z_I]^T$  der Vektor des zu testenden Punktes,  $\vec{z}_0$  ein beliebiger Punkt auf der Geraden und  $\vec{n}$  der Normalenvektor der Geraden ist, der aus der zulässigen Menge herausragt. Ein Punkt liegt innerhalb des Polyhedrons, wenn er gleichzeitig innerhalb aller, durch die Geraden bestimmten, zulässigen Bereiche der komplexen Ebene liegt.

## 6.4.2 Approximation von Übertragungsfunktionen durch Linearkombination orthonormaler Basisfunktionen

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ansätze zur Gewinnung von Übertragungsfunktionen, die affin in den Optimierungskoeffizienten sind, wurden ursprünglich im Rahmen der Modellidentifikation im Frequenzbereich entwickelt (z.B. [93, 43, 99, 100]). Zur Herleitung dieser Ansätze werden aus der Funktionalanalysis stammende Methoden genutzt. Eine vollständige Darstellung dieser Herleitungen, und der zu Grunde liegenden Mathematik, ist sehr umfangreich, und kann daher in dieser Arbeit keinen Platz finden.

**Aufgabenstellung:** Abstrakt betrachtet wird durch die Optimierung eine stabile, propere (also echt gebrochen rationale) Übertragungsfunktion  $Q(s)$  gesucht. Die Menge der möglichen Lösungen des Optimierungsproblems ist die Menge aller stabilen, properen Übertragungsfunktionen:

$$\mathbb{Q}(s) = \{Q(s) \mid Q(s) \in \mathbb{RH}^\infty\}.$$

Für diese Menge ist eine Zerlegung zu finden, so dass sich jede mögliche Übertragungsfunktion  $Q(s)$  als in den Optimierungsparametern

$$\vec{p}_{Opt} = [p_{Opt}^1, p_{Opt}^2, \dots, p_{Opt}^K]$$

affine Kombination von stabilen Basisfunktionen  $\hat{q}(s) \in \mathbb{RH}^\infty$  beschreiben lässt [11], es muss also

$$Q(s) = \sum_{k=1}^K p_{Opt}^k \cdot \hat{q}_k(s)$$

gelten. Um Konvergenz für eine möglichst kompakte, aus wenigen Gliedern bestehende, Übertragungsfunktion für  $Q$  zu erzielen, sollten orthonormale Basisfunktionen  $\hat{q}_k(s)$  gewählt werden [93, 70].

**Gewinnung von Basisfunktionen:** An der Universität von Delft [43, 44, 22] und der University of Newcastle [70, 71] wurden Untersuchungen zur Gewinnung von Basisfunktionen aus beliebigen Übertragungsfunktionen durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden insbesondere die Ergebnisse von Ninness [70, 71] verwendet, die im Folgenden kurz dargestellt werden.

Nach Ninness kann jede beliebige stabile, gebrochen-rationale Übertragungsfunktion als Linearkombination der durch

$$\mathfrak{B}_n(s) = \frac{\sqrt{2 \operatorname{Re}(a_n)}}{s + a_n} \cdot \phi_{n-1}(s)$$

definierten Basisfunktionen  $\mathfrak{B}_n$  mit

$$\phi_n(s) = \prod_{k=1}^n \frac{s - a_k}{s + a_k}$$

und  $\phi_0 = 1$  exakt dargestellt werden. Jede Übertragungsfunktion  $G(s)$  ergibt sich dann durch die Wahl geeigneter Koeffizienten  $\alpha_k$  aus

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \mathfrak{B}_k(s).$$

Bei Verwendung einer endlichen Anzahl der Reihenglieder wird  $G(s)$  approximiert

$$G(s) \approx \sum_{k=1}^K \alpha_k \cdot \mathfrak{B}_k(s) .$$

Anzumerken ist, dass, wie in [71] ausgeführt wird, die Genauigkeit, mit der eine gegebene Übertragungsfunktion bei einer gegebenen, endlichen Anzahl Reihenglieder approximiert werden kann, von der Wahl der Pole  $a_n$  abhängt, mit der die Basisfunktion definiert wird. Für die Wahl der Pole  $a_n$  sind aus der Literatur nur Faustformeln bekannt, die voraussetzen, dass die Pole der zu approximierenden Übertragungsfunktion näherungsweise bekannt sind. Letztendlich bleibt dem Anwender leider keine Wahl, als durch Versuch und Irrtum „gute“ Pole zu bestimmen.

**Anwendung auf das Optimierungsproblem:** Für das hier betrachtete Optimierungsproblem, wird die Übertragungsfunktion  $Q(s)$  als affine Kombination einer endlichen Anzahl von Optimierungsparametern  $\vec{p}_{Opt}$  berechnet:

$$Q(s) = \sum_{k=1}^K p_{Opt}^k \cdot \mathfrak{B}_k(s) .$$

Für eine so beschriebene Übertragungsfunktion ergibt sich der komplexe Frequenzgang für die Frequenz  $\Omega_k$ , wie erforderlich, als affine Kombination. Bei Optimierung über  $\vec{p}_{Opt}$  ist das Gütefunktional konvex in den Optimierungsparametern.

Mit diesem Optimierungsansatz wird, abstrakt betrachtet, eine „ideale“ Übertragungsfunktion  $\tilde{Q}(s)$  approximiert, die alle Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt. Da diese Übertragungsfunktion nicht bekannt ist, sind auch ihre Pole und Nullstellen nicht bekannt. Die aus der Literatur bekannten Hinweise zur Auswahl der Pole in  $\mathfrak{B}_n(s)$  sind daher auch wenig hilfreich. Dem Anwender bleibt für die Auswahl nur die Methode von Versuch und Irrtum.

### 6.4.3 Definition des konvexen Optimierungsproblems

Mit den Voraussetzungen aus den Abschnitten 6.4.1 und 6.4.2 kann das konvexe Optimierungsproblem definiert werden. Dazu werden zunächst wiederum die Einzelprobleme für eine Frequenz  $\Omega_k$ , eine zulässige Parameterkombination  $\vec{p}_l$  und eine Spezifikation  $\|\hat{T}_k(j\Omega_k)\| \leq \hat{t}_{km}$  betrachtet.

Die zulässige Menge  $\hat{\mathbb{T}}_{km}$  wird in eine zulässige Menge für den komplexen Frequenzgang des Youla-Parameters  $\mathbb{Q}_{klm}$  abgebildet. Wie schon bei der Berechnung der zulässigen Mengen für den offenen Regelkreis, in Abschnitt 6.3.3, werden diese Abbildungen durch Möbius-Transformationen vermittelt. Dazu werden die Zusammenhänge zwischen dem komplexen Frequenzgang des Youla-Parameters und den Frequenzgängen des geschlossenen Regelkreises aus den Gleichungen 6.4.1 bis 6.4.4 nach  $Q$  aufgelöst.

Als Gütefunktional wird jeweils die aus dieser zulässigen Menge  $\mathbb{Q}_{klm}$  resultierende Zugehörigkeitsfunktion

$$J_{\mathbb{Q}_{klm}}(\vec{p}_{Opt})$$

herangezogen.

Für die Frequenz  $\Omega_k$  und die Betragsgrenze  $\|\hat{T}(j\Omega_k)\| \leq \hat{t}_{km}$  kann, falls alle zulässigen Wertemengen konvex sind, mit der Summe der einzelnen Gütefunktionale bereits ein zusammenfassendes Gütefunktional definiert werden:

$$J_{km}(\vec{p}_{Opt}) = \sum_{l=1}^L J_{Q_{klm}}(\vec{p}_{Opt}) .$$

Falls einige der zulässigen Mengen  $Q_{klm}$  nicht konvex sind, werden diese durch konvexe Mengen  $\hat{Q}_{klm}$  approximiert. Die resultierenden Zugehörigkeitsfunktionen  $J_{\hat{l}m}$  gehen in das zusammenfassende Gütefunktional für die betrachtete Frequenz und Spezifikation ein:

$$J_{km}(\vec{p}_{Opt}) = \sum_{l=1}^L J_{Q_{klm}}(\vec{p}_{Opt}) + \sum_{\hat{l}=1}^{\hat{L}} J_{\hat{Q}_{klm}}(\vec{p}_{Opt}) .$$

Wird durch eine Parameterkombination  $\vec{p}_{Opt}^*$  der Youla-Parameter so bestimmt, dass das Teilgütefunktional  $J_{km}$  Null wird, erfüllt der geschlossene Regelkreis für die betrachtete Frequenz  $\Omega_k$  die durch die Betragsgrenze  $\|\hat{T}(j\Omega_k)\| \leq \hat{t}_{km}$  definierte Forderung für *alle* betrachteten Parametervariationen.

Das Gesamtgütefunktional setzt sich, wie schon im nicht-konvexen Fall, aus den einzelnen Gütefunktionalen zusammen:

$$J(\vec{p}_{Opt}) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M J_{km}(\vec{p}_{Opt}) .$$

Von Bedeutung für die Kombination der einzelnen Gütefunktionale zum Gesamtgütefunktional ist, dass die Konvexität des Funktional in Bezug auf die Optimierungsparameter erhalten bleiben muss. Dies ist bei der hier dargestellten einfachen Summation ebenso wie bei der in Gleichung 6.3.8 beschriebenen gewichteten Summation gegeben (vgl. [12]).

#### 6.4.4 Erforderliche Ergänzungen des konvexen Optimierungsproblems

Während für das nicht-konvexe Optimierungsproblem sichergestellt werden musste, dass der Regler  $H(s)$  stabil wird, entfällt diese Aufgabe für das konvexe Problem auf Grund der Parametrierung des Youla-Parameters. Da sich  $Q(s)$  als affine Kombination stabiler Basisfunktionen ergibt, ist das Ergebnis ebenfalls stabil.

Anders sieht der Sachverhalt in Bezug auf die singulären bzw. quasi-singulären Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises aus. Die für die nicht-konvexe Optimierung formulierte Nebenbedingung ist nicht-konvex, kann also nicht in das konvexe Optimierungsproblem integriert werden. Als Lösung des Problems kann lediglich die Anzahl der untersuchten Frequenzen in „kritischen“ Bereichen erhöht werden. Dazu gehören insbesondere die Bereiche der Resonanzfrequenzen des unsicheren Streckenmodells.

## 6.5 Zusammenfassung

Einer der Hauptschwachpunkte der QFT ist die mangelhafte Unterstützung, die der Entwerfer bei der Wahl der Reglerstruktur und -parameter erfährt. Moderne Verfahren, wie die  $H_\infty$ -Synthese bestimmen als Ergebnis numerischer Berechnungen einen Regler, die Anwendung der QFT hingegen unterstützt nur bei der Problembeschreibung.

Inhalt dieses Kapitels ist die Definition von Optimierungsproblemen auf der Basis der, in der QFT üblichen, Vorgaben an den komplexen Frequenzgang. Jede Lösung des Optimierungsproblems ergibt jeweils einen Regler, der alle im Optimierungsproblem berücksichtigten Spezifikationen robust gegen die betrachteten Variationen der Systemparameter einhält.

Die Optimierungsprobleme werden jeweils aus einem Optimierungsproblem für eine Spezifikation, eine betrachtete Parameterkombination und eine Frequenz zu einem Optimierungsproblem für alle Spezifikationen, Parameterunsicherheiten und Frequenzen kombiniert. Die Kombination der Gütefunktionale ist konvexitätserhaltend, so dass das Gesamtgütefunktional konvex ist, wenn die Teilgütefunktionale konvex sind.

Zur Definition des konvexen Optimierungsproblems wird mit der Youla-Parametrierung eine Transformation des ursprünglichen nicht-konvexen Optimierungsproblems eingeführt, die die Konvexität der zulässigen Mengen sicherstellt, bzw. die Approximation der zulässigen Mengen durch konvexe Mengen erlaubt. Zusätzlich wird eine in den Optimierungsparametern affine Darstellung des Youla-Parameters eingeführt.

Die hier verwendete Kombination von Einzelproblemen zu einem Gesamtproblem ermöglicht es, durch Analyse der Resultate herauszufinden, welche der Spezifikationen in welchem Frequenzbereich verletzt werden, falls die Ergebnisse der Optimierung nicht zufrieden stellen. Dies erlaubt gezielte Modifikationen des Optimierungsproblems.

Wird eines der hergeleiteten Optimierungsprobleme in den Entwurf eines Regelungssystems mit der QFT eingebunden, dann kann, bei geeigneter rechentechnischer Unterstützung, mit verhältnismäßig geringem Aufwand ein Regler berechnet werden. Damit fällt einer der im Einführungskapitel diskutierten Nachteile der QFT weg.

## 7. ANWENDUNGSBEISPIEL

Inhalt dieses Kapitels ist die Anwendung des Reglerentwurfs mit QFT für flexible mechanische Strukturen. Dabei werden die in dieser Arbeit hergeleiteten Modifikationen zur Templateberechnung und  $t-\Omega$ -Transformation verwendet. Die Reglersynthese erfolgt mit den hier hergeleiteten Optimierungsansätzen. Die Ergebnisse der Arbeitsschritte werden vorgestellt und diskutiert.

### 7.1 Einleitung

#### 7.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung und Vorgehensweise

Die Überprüfung und Demonstration von Reglerentwurfsverfahren sollte an und für sich, wann immer möglich, experimentell durchgeführt werden, um die teilweise doch sehr abstrakten Verfahren einer wirklichen „Feuerprobe“ zu unterziehen. Leider war dies für die vorliegende Untersuchung nicht möglich, da ein wesentlicher Teil des Gesamtverfahrens erst nach Beendigung des Innovationskollegs ADAMES entstanden ist. Damit entfielen eine Reihe von technischen Voraussetzungen und Möglichkeiten für die experimentelle Verifikation der Vorgehensweise.

Um dennoch aussagekräftige Untersuchungen durchführen zu können, wurde eine Simulation auf Basis des von Landau und Mitarbeitern auf der European Control Conference 1995 vorgestellten und im European Journal of Control beschriebenen Benchmark-Systems genutzt [59].

Die mechanischen Eigenschaften dieses Systems werden durch Hinzufügen einer Masse erheblich beeinflusst. Um diese Variation in Modelle zu fassen, wurden für drei Lastzustände zeitdiskrete Modelle identifiziert, in [59] dargestellt, und in Form von Matlab-Dateien im Internet verfügbar gemacht.

Neben Modellen der zu regelnden Strecke wurden in [59] auch Spezifikationen des zu erzielenden Systemverhaltens definiert. Die Mehrzahl dieser Spezifikationen ist im Zeitbereich gegeben, und beschreibt sowohl das geforderte Führungs- als auch das zu erzielende Störverhalten des Systems. Die Einhaltung dieser Spezifikationen wird im Folgenden als Regelungsziel betrachtet.

Das Benchmark-Problem kommt in seiner Formulierung realen Aufgabenstellungen in Entwicklungsprojekten recht nahe. Zudem sind eine Reihe von Arbeiten zur Lösung der Aufgabenstellung veröffentlicht worden, so dass die von Landau et. al. formulierte Problemstellung gute Möglichkeiten bietet, die in dieser Arbeit vorgeschlagene Methode zur Reglersynthese mit anderen Verfahren zu vergleichen.

#### 7.1.2 Zu lösende Aufgaben

Um die Reglerauslegung für das Benchmarksystem mit der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Synthesemethode durchführen zu können, sind die folgenden Arbeitsschritte erforderlich:

- Analyse der gegebenen Modelle mit dem Ziel, die parametrischen Unsicherheiten zu erfassen, und die Templateberechnung, unter Nutzung der im Kapitel 4 beschriebenen Vorgehensweisen, durchzuführen .
- Übertragung aller im Zeitbereich beschriebenen Spezifikationen in den Frequenzbereich durch Anwendung der in Kapitel 5 dargestellten  $t - \Omega$ -Übertragung.
- Aufstellung des nicht-konvexen und des konvexen Optimierungsproblems, als Grundlage der Berechnung des Reglers  $H(s)$  bzw. des Youla-Parameters  $Q(s)$ , wie in Kapitel 6 beschrieben.
- Lösen der Optimierungsprobleme und Verifikation der berechneten Regler.

### 7.1.3 Gliederung

Abschnitt 7.2 enthält eine zusammenfassende Beschreibung des von Landau et. al. formulierten Benchmarkproblems. Die Untersuchung der Modellunsicherheiten und die folgende Templateberechnung ist in Abschnitt 7.3 dargestellt. In Abschnitt 7.4 wird die Analyse der Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis und die  $t - \Omega$ -Übertragung von im Zeitbereich gegebenen Anforderungen in den Frequenzbereich beschrieben. Die Reglersynthese wird in Abschnitt 7.5 beschrieben. Das Kapitel schließt mit der Zusammenfassung in Abschnitt 7.6.

## 7.2 Benchmarksystem

Ziel des von Landau et. al. [59] 1995 auf der *European Control Conference* vorgestellten Benchmarks war es, verschiedene Entwurfsalgorithmen für die Synthese einzusetzen, und die jeweiligen Ergebnisse zu vergleichen. Auf der Konferenz und in der ersten Ausgabe des *European Journal of Control* wurden die jeweiligen Ergebnisse präsentiert. Vertreten waren unter anderem die  $H_\infty$ -Methode [53, 101], prädiktive Entwürfe [23] und QFT [72].

### 7.2.1 Mechanische Grundstruktur

Das System besteht aus drei Riemenscheiben, die über flexible Gurte miteinander verbunden sind (vergleiche Abbildung 7.2.1). Der Antrieb des Gesamtsystems erfolgt an der ersten Riemenscheibe. Regelgröße ist der Drehwinkel der dritten Riemenscheibe, der auf einen vorgegebenen Wert einzustellen ist.

Durch Anbringen von externen Massen an der dritten Riemenscheibe, können die dynamischen Eigenschaften der Struktur erheblich verändert werden. Für das gegebene Benchmark-Problem werden externe Massen in Abstufungen von 0, 1.8 und 3.6 Kilogramm angebracht.

### 7.2.2 Aktuatorik, Sensorik und elektronische Komponenten

Der Antrieb des Systems erfolgt über einen Gleichstrommotor an der ersten Riemenscheibe. Die Position des Motors wird durch einen lokalen Regelkreis eingestellt.

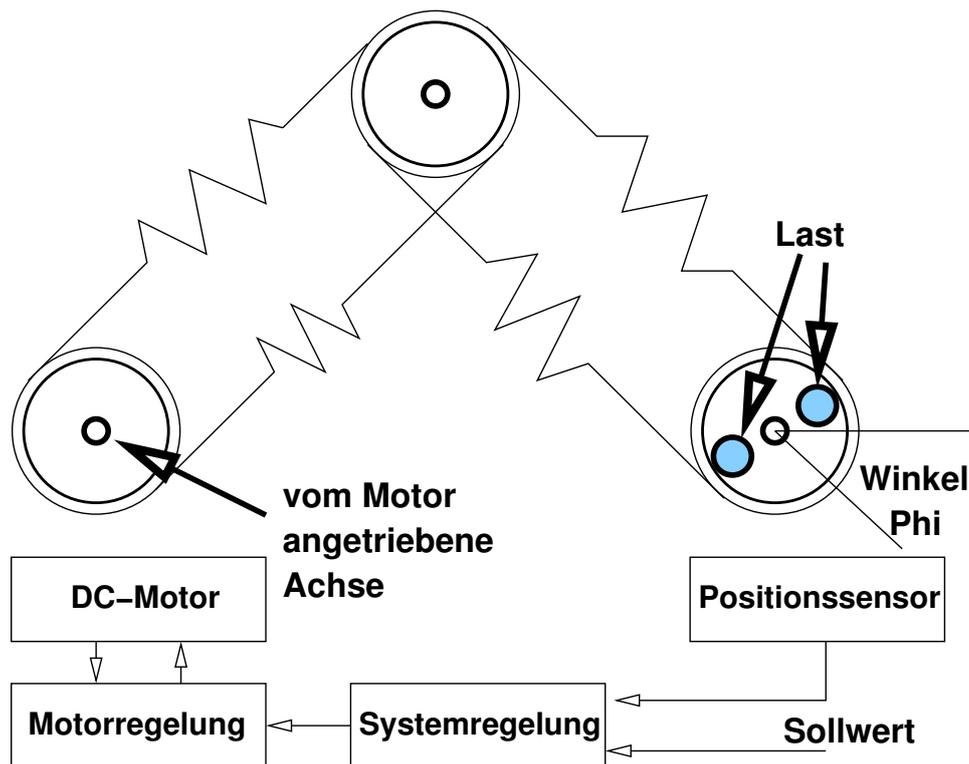


Abb. 7.2.1: Flexibler Riementrieb

An der dritten Riemenscheibe wird der Winkel der Scheibe in Bezug auf einen festen Referenzwinkel von einem Positionssensor erfasst. Das Signal des Positionssensors ist Regelgröße für den zu entwerfenden Regler.

Zur Modellidentifikation und Regelung wurde ein PC mit Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandlerkarten ausgestattet. Alle Algorithmen wurden digital mit einer Tastfrequenz von 20 Hz implementiert. Zur Modellidentifikation wurde das System mit einem pseudo-binären Rauschen angeregt.

### 7.2.3 Spezifikationen für das Entwurfsproblem

Die folgenden Spezifikationen wurden als Teil des Benchmarkproblems definiert (vgl. [59]):

1. **Anstiegszeit:** Für Sprünge in der Führungsgröße ist ein Anstieg von 0 bis 90 Prozent des Endwertes innerhalb einer Sekunde gefordert.
2. **Überschwingweite:** Für Sprünge in der Führungsgröße ist eine maximale Überschwingweite von zehn Prozent zulässig.
3. **Unterdrückung von Störungen auf den Ausgang:** Die mit  $1/N_P$  gefilterte Systemantwort des geschlossenen Kreises auf Störungen am Eingang darf nach Ablauf von 1.2 Sekunden nur noch zehn Prozent des auftretenden Maximalwertes betragen.  $N_P$  ist dabei das Nennerpolynom des jeweils betrachteten Streckenmodells.

4. **Integrator im offenen Kreis:** Zur vollständigen Unterdrückung konstanter Störungen ist ein Integrator im offenen Regelkreis erforderlich.
5. **Abschwächung aller Störungen:** Im Frequenzbereich von 0 bis 0.2 Hz ist eine Abschwächung aller auftretenden Störungen erforderlich, die Sensitivitätsfunktion muss daher bis 0.2 Hz eine Verstärkung von weniger als 0 Dezibel aufweisen.
6. **Maximale Verstärkung der Sensitivitätsfunktion:** Die Sensitivitätsfunktion darf maximal eine Verstärkung von 6 Dezibel aufweisen.
7. **Maximale Verstärkung von Störungen am Eingang:** Störungen am Eingang dürfen im Frequenzband zwischen 50.26 Rad/s und 62.83 Rad/s (entsprechend 8 bis 10 Hz) höchstens eine Verstärkung von 10 Dezibel aufweisen.

### 7.3 Modellanalyse und Unsicherheitsbetrachtung

#### 7.3.1 Modelldaten

Für die drei in [59] beschriebenen Lastfälle wurden die folgenden zeitdiskreten Modelle angegeben:

**Ohne externe Last:**

$$G(z) = \frac{0.28261z^{-3} + 0.5066z^{-4}}{1 - 1.41833z^{-1} + 1.58939z^{-2} - 1.31608z^{-3} + 0.88642z^{-4}} \quad (7.3.1)$$

**Externe Last 1.8 Kilogramm:**

$$G(z) = \frac{0.10276z^{-3} + 0.18123z^{-4}}{1 - 1.99185z^{-1} + 2.20265z^{-2} - 1.84083z^{-3} + 0.89413z^{-4}} \quad (7.3.2)$$

**Externe Last 3.6 Kilogramm:**

$$G(z) = \frac{0.06408z^{-3} + 0.10407z^{-4}}{1 - 2.09679z^{-1} + 2.31962z^{-2} - 1.93353z^{-3} + 0.87129z^{-4}} \quad (7.3.3)$$

Die drei Modelle werden mit den Matlab-Funktionen *d2c*, *tf2ss* und *canon* in zeitkontinuierliche modale Zustandsraumdarstellungen, wie sie in Abschnitt 3.2.5 beschrieben sind, übertragen. Aus der modalen Zustandsraumdarstellung können dann die zeitkontinuierlichen modalen Reihendarstellungen abgeleitet werden, die im Folgenden angegeben sind:

**Ohne externe Last:**

$$G(s) = \frac{-10.41s + 143.2}{s^2 + 0.9752s + 148,2} + \frac{6.972s + 109.2}{s^2 + 1.436s + 1111}$$

**Externe Last 1.8 Kilogramm:**

$$G(s) = \frac{-4.202s + 65.2}{s^2 + 0.5635s + 62.05} + \frac{3.113s + 21.6}{s^2 + 1.675s + 879}$$

**Externe Last 3.6 Kilogramm:**

$$G(s) = \frac{-2.542s + 41.22}{s^2 + 1.059s + 39.72} + \frac{1.933s + 7.749}{s^2 + 1.697s + 834}$$

**7.3.2 Analyse der Modellparameter**

Die Änderung der dynamischen Eigenschaften ist durch das Anbringen der externen Massen bestimmt, so dass keine Unabhängigkeit der modalen Parameter voneinander zu erwarten ist. Aus diesem Grund werden die modalen Modelle zur Auswertung genauer analysiert. Es wird angenommen, dass die Zusammenhänge zwischen der externen Masse und den Modellparametern streng monoton steigen bzw. streng monoton fallen. Eine Vergrößerung der externen Masse muss zum Beispiel immer eine Verringerung der Kennkreisfrequenzen nach sich ziehen. Die modalen Übertragungsfunktionen werden modifiziert dargestellt, um die Zusammenhänge besser analysieren zu können:

$$G_k(s) = G_{DCk} \frac{\tau_k s + 1}{\left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2 + \left(\frac{2\xi_k}{\omega_k}\right) + 1} = \frac{c_{vk}s + c_{wk}}{s^2 + 2\delta_k s + \omega_k^2}$$

Für den ersten Mode ergeben sich die folgenden Parameterwerte:

Parameter	Ohne externe Masse	Externe Masse 1.8 kg	Externe Masse 3.6 kg
$G_{DC1}$	0.9063	1.0508	1.0378
$\tau_1$	0.0726	0.0644	0.0617
$\xi_1$	0.0400	0.03580	0.0840
$\omega_1$	12.2	7.88	6.30

Die Analyse des zweiten Modes ergibt:

Parameter	Ohne externe Masse	Externe Masse 1.8 kg	Externe Masse 3.6 kg
$G_{DC2}$	0.0983	0.0245	0.0093
$\tau_2$	-0.0639	-0.1443	-0.2494
$\xi_2$	0.0215	0.0282	0.0294
$\omega_2$	33.3	29.6	28.9

Der Zusammenhang zwischen der Kennkreisfrequenz  $\omega_k$  und der externen Masse, sowie der Zusammenhang zwischen der Zählerzeitkonstante  $\tau_k$  und der externen Masse, wird sofort deutlich. Für die stationären Verstärkungen sind die gefundenen Zusammenhänge allerdings widersprüchlich. Zu erwarten ist, dass mit zunehmender externer Masse die modalen Verstärkungen abnehmen. Für den zweiten Mode ist dies der Fall, für den ersten Mode jedoch nicht. Die Zusammenhänge zwischen der externen Masse und den Dämpfungen sind nicht intuitiv erklärbar. Auch die Analyse der berechneten Dämpfungswerte bringt keine Klarheit.

Für die Templateberechnung werden, ausgehend von der vorausgegangenen Analyse, folgende Annahmen getroffen:

- Die stationäre Verstärkung des ersten Modes wird als lokale Unsicherheit betrachtet, die stationäre Verstärkung des zweiten Modes wird als von der externen Masse abhängig betrachtet.
- Die modale Zählerzeitkonstante beider Moden wird jeweils als von der externen Masse abhängig betrachtet.
- Die modale Dämpfung beider Moden wird als unsichere lokale Größe betrachtet.
- Die Kennkreisfrequenzen beider Moden werden jeweils als von der externen Masse abhängig betrachtet.

Die Approximation der Zusammenhänge zwischen den modalen Größen und der externen Masse wird jeweils durch ein Polynom zweiter Ordnung vorgenommen. Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen der Masse  $m$  und den modalen Parametern:

### Zählerzeitkonstanten

$$\tau_1 = -0.0726 + 0.0061m - 0.0008m^2 \quad \tau_2 = 0.0639 + 0.0379m + 0.0038m^2$$

### Stationäre Verstärkung

$$G_{ss2} = 0.0983 - 0.0573m + 0.0090m^2$$

### Kennkreisfrequenzen:

$$\omega_1 = 12.2 - 3.1611m + 0.4228m^2 \quad \omega_2 = 33.3 - 2.8889m + 0.463m^2$$

Da die gegebenen Daten keine genauere Untersuchung ermöglichen, und die betrachtete Regelstrecke nicht für weitergehende Arbeitsschritte zur Verfügung steht, müssen hier eine Reihe durchaus sinnvoller Analyseschritte unterbleiben, mit denen die Konservativität der Templateberechnung und die Plausibilität der hier getroffenen Annahmen geprüft werden kann. Die Templateberechnung hat einen erheblichen Einfluss auf die Festlegung des Optimierungsproblems und beeinflusst damit auch die erzielbare Regelgüte. Daher sollte in einem realen Entwurfsproblem in jedem Fall erheblich mehr Aufwand in die Templateberechnung investiert werden. Für die vorliegende Arbeit sind die eingeschränkten Möglichkeiten zur Analyse der Modellunsicherheiten und zur Templateberechnung als Randbedingung hinzunehmen.

### 7.3.3 Templates

Mit den Ergebnissen der Analyse aus Abschnitt 7.3.2 können die Templates berechnet werden. Untersucht werden 38 Frequenzen zwischen 0.2 Radiant pro Sekunde und 130 Radiant pro Sekunde. Dazu wird die im Abschnitt 4.4 beschriebene Kombination der Addition von Wertemengen mit Gridding genutzt. In den Abbildungen wird die zur Berechnung genutzte Vorgehensweise deutlich. Das Gridding erfolgte über dem Intervall der externen Masse, für jede Stützstelle dieses Intervalls wird ein eigenes Template berechnet.

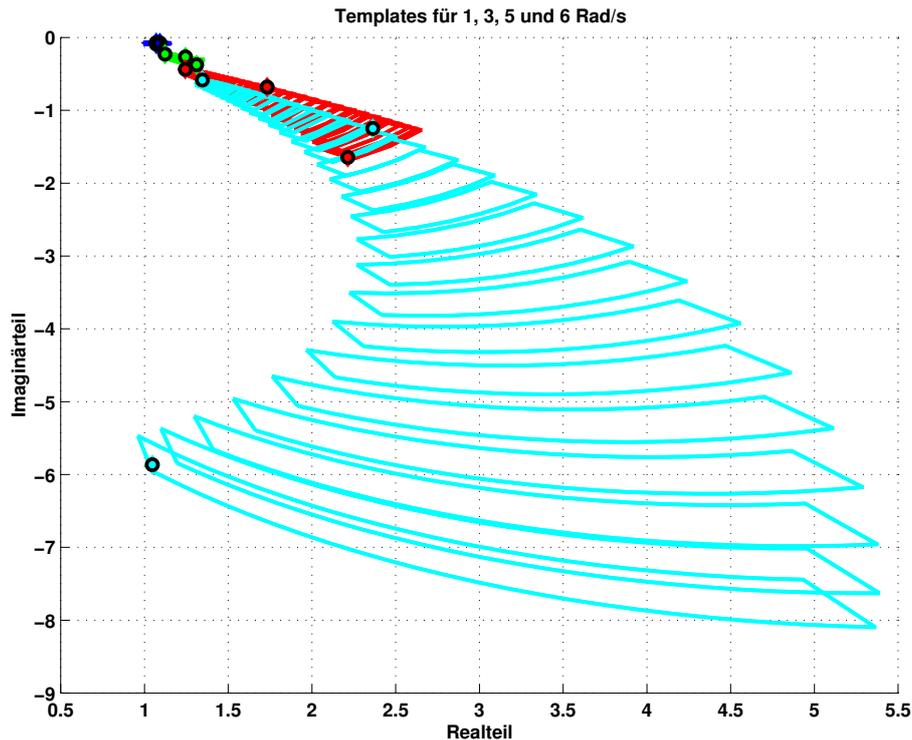


Abb. 7.3.1: Templates unterhalb der ersten Resonanz (1,3,5 und 6 Radiant / Sekunde)

Einzelne Ergebnisse der Templateberechnung werden in den folgenden Diagrammen dargestellt. Darin sind die komplexen Frequenzgänge für die drei in [59] angegebenen identifizierten Modelle (durch schwarze Kreise gekennzeichnet) explizit dargestellt.

**Unterhalb der ersten Resonanz:** Im Frequenzbereich unterhalb der ersten Resonanzfrequenz werden Templates für die Frequenzen 0,2, 0,5, 1,2, 3, 4, 5 und 6 Rad/s berechnet. Von diesen Templates sind in Abbildung 7.3.1 die Folgenden dargestellt:

- 1 Radiant / Sekunde (blau)
- 3 Radiant / Sekunde (grün)
- 5 Radiant / Sekunde (rot)
- 6 Radiant / Sekunde (türkis)

In diesem Frequenzbereich zeigt sich sehr deutlich, dass die Größe der Templates schon unterhalb der Resonanzfrequenz deutlich zunimmt. Insbesondere die Unsicherheit in der Phasenlage wächst stark an.

**Erste Resonanz:** Im Frequenzbereich rund um die erste Resonanz wurden Templates für die Frequenzen 6, 8, 9, 10 und 12 Rad/s berechnet. Die Entwicklung der Templates in diesem Frequenzbereich ist in Abbildung 7.3.2 durch die folgenden Templates dargestellt:

- 6 Radiant / Sekunde (blau)
- 10 Radiant / Sekunde (grün)

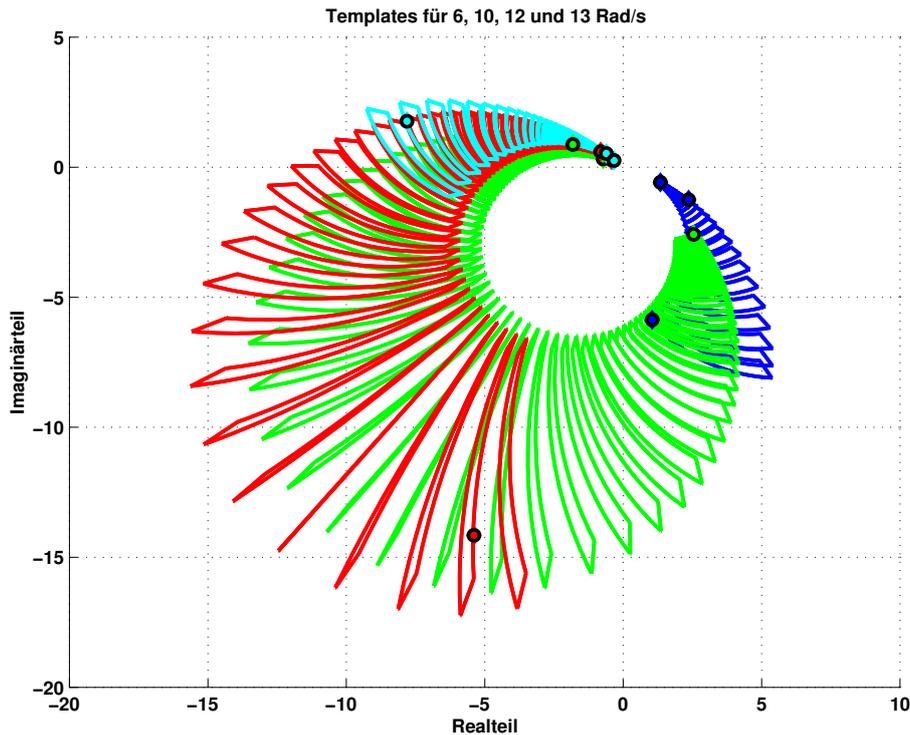


Abb. 7.3.2: Templates im Bereich der ersten Resonanz (6, 10, 12 und 13 Radiant / Sekunde)

- 12 Radiant / Sekunde (rot)
- 13 Radiant / Sekunde (türkis)

Das für 6 Rad/s berechnete Template ist bereits in der vorhergehenden Abbildung dargestellt. Es wird hier erneut abgebildet, um den Zusammenhang zwischen dem Frequenzbereich unterhalb der ersten Resonanz und dem im Bereich der ersten Resonanz zu verdeutlichen.

Im Frequenzbereich der zulässigen Kennkreisfrequenzen ist die Unsicherheit in Bezug auf Amplitude und Phasenlage am stärksten ausgebildet. Variationen der Verstärkung um den Faktor 10 und höher, sowie Variationen der Phasenlage um annähernd 180 Grad, sind für FMS normal.

**Zwischen den Resonanzen:** Der Frequenzbereich zwischen der ersten und zweiten Resonanzfrequenz wird durch Berechnung von Templates für 13, 14, 17, 20, 23, 26 und 28 Rad/s abgedeckt. Abbildung 7.3.3 stellt die Templates in diesem Bereich dar:

- 20 Radiant / Sekunde (blau)
- 26 Radiant / Sekunde (grün)
- 29 Radiant / Sekunde (rot)

Im Frequenzbereich zwischen den Resonanzfrequenzen geht der Betrag deutlich zurück, die Templates werden sowohl in der Betrags- als auch in der Phasenunsicherheit deutlich kleiner. Das Template für 29 Rad/s ist größer als die beiden anderen Templates, der Übergang zum Frequenzbereich der zweiten Resonanz deutet sich hier schon an.

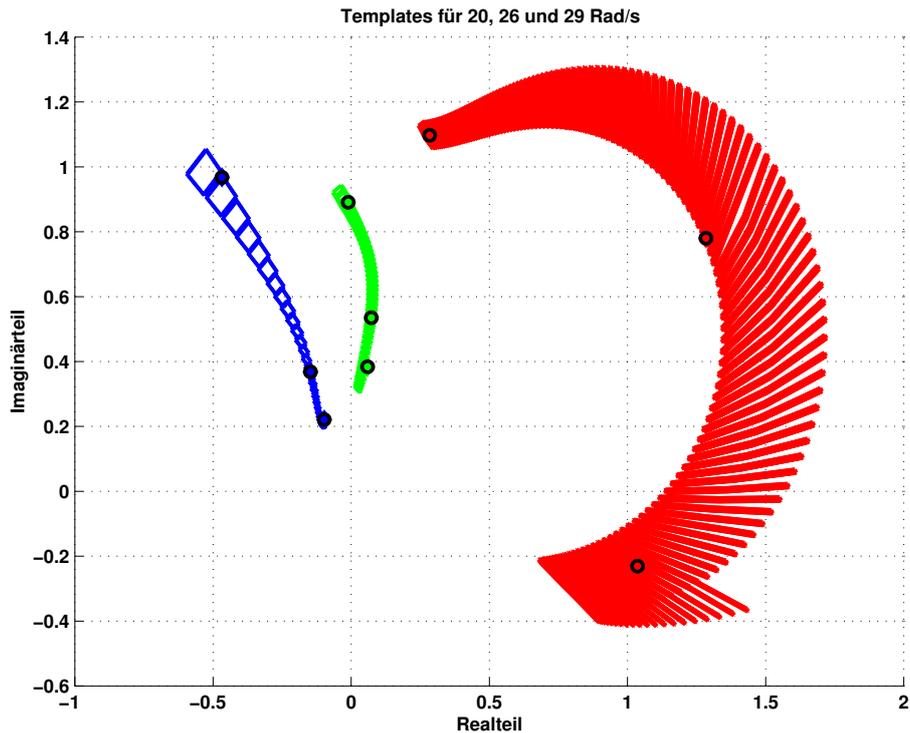


Abb. 7.3.3: Templates zwischen erster und zweiter Resonanz (20, 26 und 29 Radiant / Sekunde)

**Zweite Resonanz:** Im Frequenzbereich der zweiten Resonanz wurden Templates für 29, 31, 33 und 34 Rad/s berechnet. Die Abbildung 7.3.4 enthält die Templates für:

- 29 Radiant / Sekunde (blau)
- 31 Radiant / Sekunde (grün)
- 33 Radiant / Sekunde (rot)
- 34 Radiant / Sekunde (türkis)

**Oberhalb der zweiten Resonanz:** Der letzte untersuchte Frequenzbereich ist schließlich der Bereich oberhalb der zweiten Resonanz. In diesem Bereich werden für die Frequenzen 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80, 90, 100, 110, 120 und 130 Rad/s Templates berechnet. Abgebildet sind davon die Templates für

- 50 Radiant / Sekunde (blau)
- 70 Radiant / Sekunde (grün)
- 110 Radiant / Sekunde (rot)
- 130 Radiant / Sekunde (türkis)

in Abbildung 7.3.5. Die Templates werden mit zunehmender Frequenz kleiner, die Phasenlage geht gegen -180 Grad, die Amplitude fällt ab. Dieses Verhalten ist allerdings durch das Modell

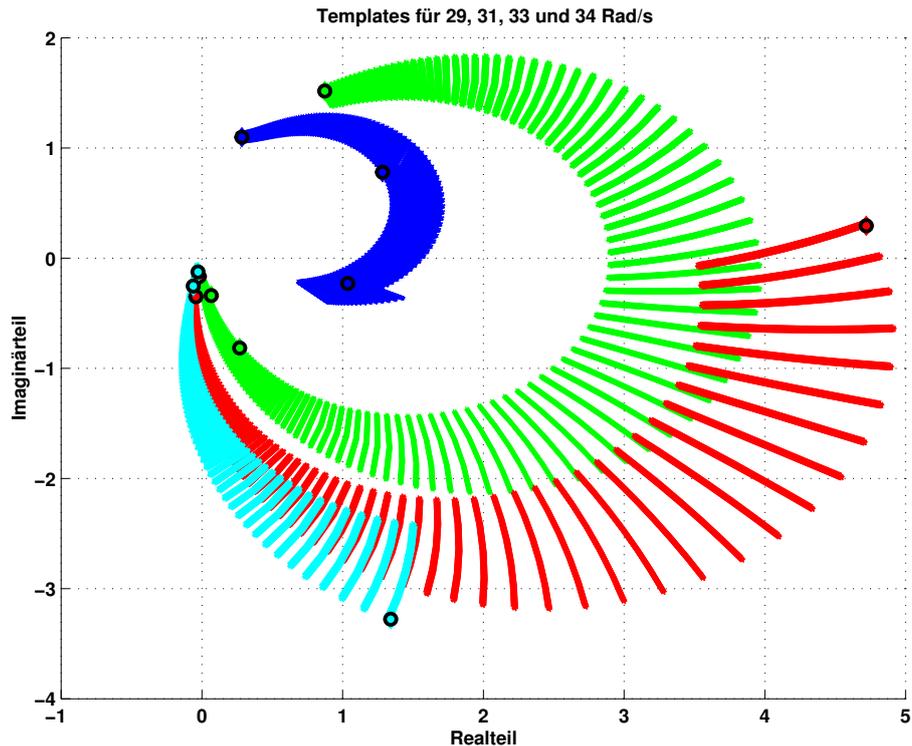


Abb. 7.3.4: Templates im Bereich der zweiten Resonanz (29, 31, 33 und 34 Radiant / Sekunde)

gegeben, das einen relativen Grad von Eins und damit einen Amplitudenabfall von 20 Dezibel / Dekade aufweist. Ob das reale, verteilte System diesen Amplitudenabfall ebenfalls aufweist, müsste geprüft werden, da unter Umständen die „vernachlässigte Dynamik“ höherfrequenter Moden noch Einfluss nehmen kann.

## 7.4 Berechnung der Betragsgrenzen aus den Spezifikationen

Nach der Templateberechnung werden, als zweite Grundlage der Definition des Optimierungsproblems, die Betragsgrenzen für Führungs- und Störverhalten berechnet. Dazu werden die in Kapitel 5 beschriebenen Methoden genutzt.

### 7.4.1 Berechnung der Betragsgrenzen für das Führungsverhalten

Das Führungsverhalten wird durch zwei Anforderungen eingeschränkt:

- **Anstiegszeit:** Für Sprünge in der Führungsgröße ist ein Anstieg von 0 bis 90 Prozent des Endwertes innerhalb einer Sekunde gefordert.
- **Überschwingweite:** Für Sprünge in der Führungsgröße ist eine maximale Überschwingweite von 10 Prozent zulässig.

Zur Übertragung der Spezifikationen in den Frequenzbereich werden 28 Modelle zweiter Ordnung definiert.

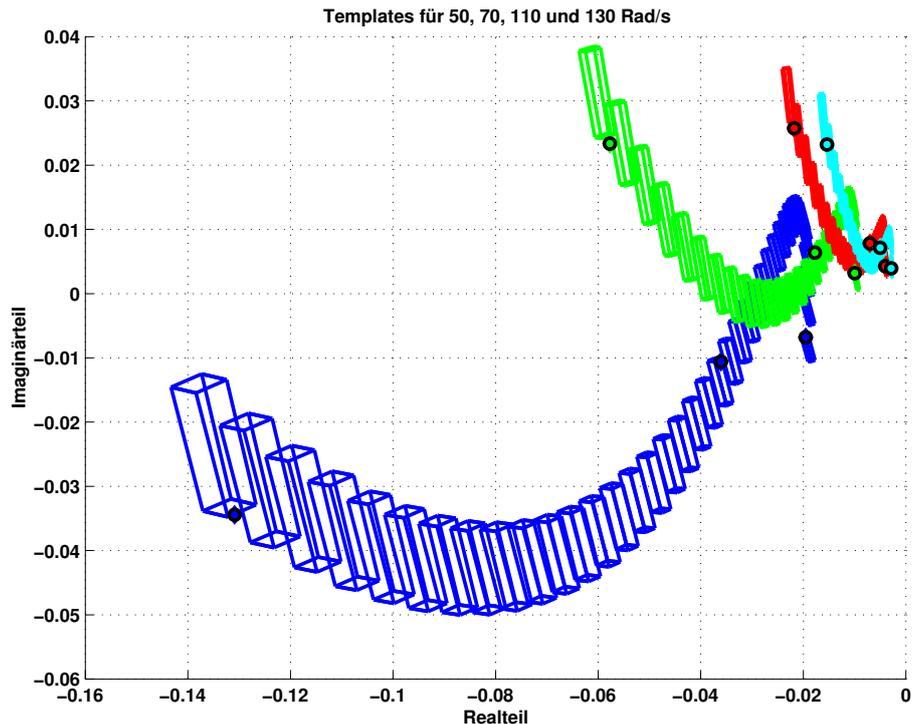


Abb. 7.3.5: Templates oberhalb der zweiten Resonanz (50, 70, 110 und 130 Radiant / Sekunde)

Es wird angenommen, dass das Führungsverhalten des Systems ein dominantes, konjugiert komplexes Polpaar aufweist. Daher kann die von Horowitz beschriebene  $t - \Omega$ -Übertragung, unter Nutzung von Modellen zweiter Ordnung, angewandt werden, wie sie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben ist.

Die zur Festlegung der Obergrenze genutzten Modelle besitzen resonante Polpaare, deren Kennkreisfrequenzen zwischen 6 Rad/s und 13 Rad/s variieren. Die stationäre Verstärkung dieser Modelle wird mit Eins angesetzt, die Dämpfungen werden dann so angepasst, dass die Sprungantworten der Modelle jeweils unterhalb der Obergrenze verbleiben (siehe Abbildung 7.4.1)

Die Untergrenze wird mit überkritisch gedämpften Modellen definiert, zusätzlich wird eine Totzeit von 0.5 Sekunden definiert, die im Modell durch Pade-Approximation berücksichtigt wird. Die Zeitkonstanten der beiden reellen Pole werden so bestimmt, dass die Sprungantworten der Modelle jeweils die Untergrenze der Spezifikation einhalten (vgl. Abbildung 7.4.1).

Die zur Spezifikation des Führungsverhaltens errechneten Betragsgrenzen ergeben sich frequenzabhängig, aus den jeweils maximalen, bzw. minimalen Beträgen der komplexen Frequenzgänge aller festgelegten Modelle (siehe Abbildung 7.4.2).

Wie in Abschnitt 6.2.1 ausgeführt ist, werden in dieser Arbeit Betragsuntergrenzen zur Beschreibung von Vorgaben an die Regelgüte nicht genutzt. Es ist also erforderlich, die Vorgaben an das Führungsverhalten in Modellreferenzvorgaben umzuschreiben, wie dies bei Yaniv [104] dargestellt wird. Die resultierende Aufgabenstellung enthält dann keine nicht-konvexe Untergrenze mehr. Hierzu wird jeweils frequenzabhängig der Mittelwert des Betrages von Ober- und Untergrenze berechnet, und ein Referenzmodell bestimmt, dessen Frequenzgang die Mittelwerte

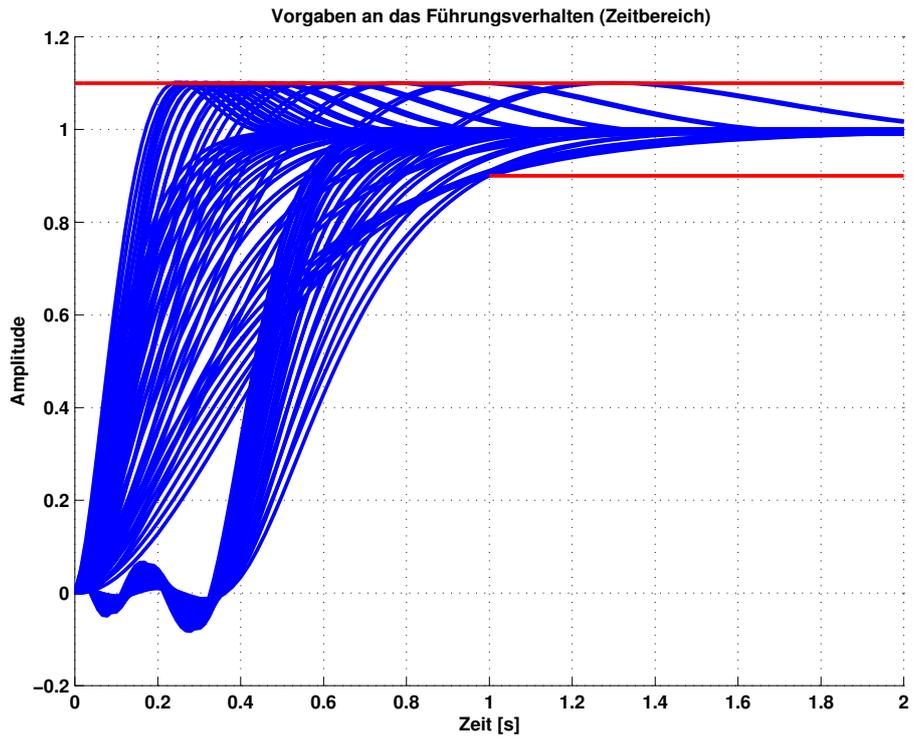


Abb. 7.4.1: Vorgaben an das Führungsverhalten im Zeitbereich

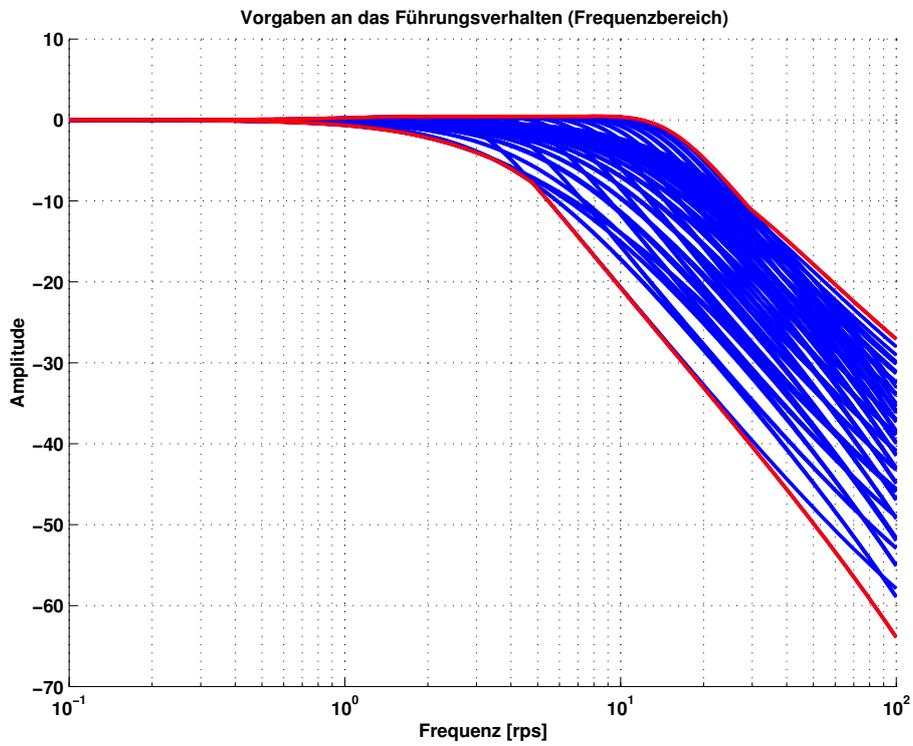


Abb. 7.4.2: Vorgaben an das Führungsverhalten im Frequenzbereich

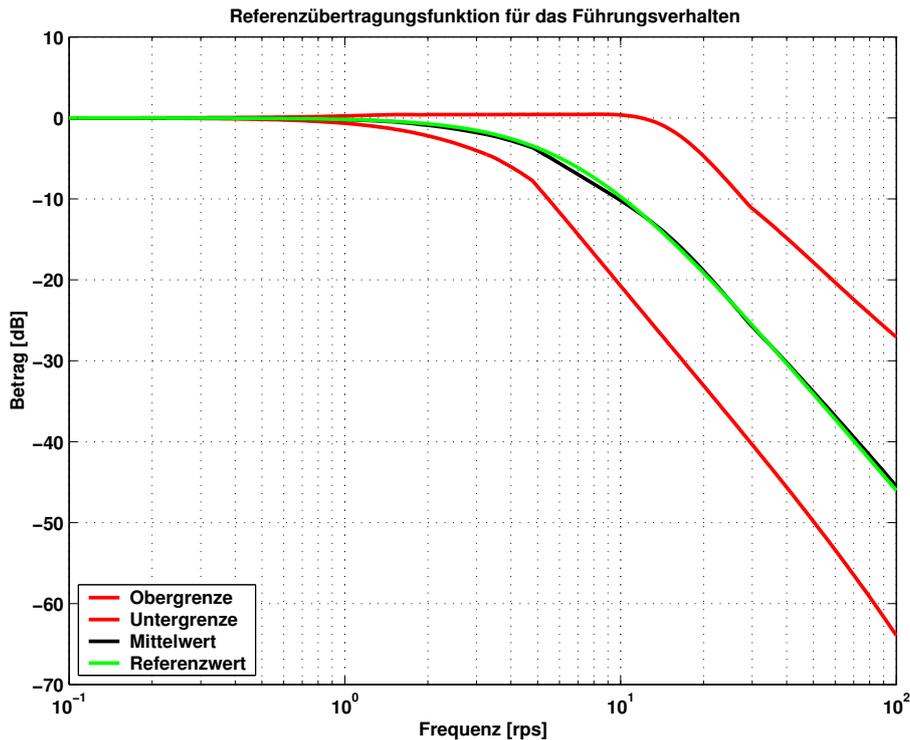


Abb. 7.4.3: Vorgaben an das Führungsverhalten: Modellreferenz

„gut“ approximiert (vgl. Abbildung 7.4.3). Die Aufgabe der Optimierung ist dann, den GRK so zu beeinflussen, dass die Abweichung des Führungsverhaltens vom Nominalmodell die jeweils zulässigen Beträge nicht überschreitet. Die Bestimmung des Referenzmodells, aus den Ober- und Untergrenzen der zulässigen Beträge, ist in Abbildung 7.4.3 dargestellt. Ober- und Untergrenze sind durch die roten Linien repräsentiert, der Mittelwert durch die schwarze Linie und der Amplitudengang des Referenzmodells durch die grüne Linie.

#### 7.4.2 Berechnung der Betragsobergrenzen für das Störverhalten

Das zu erzielende Störverhalten des Systems wird in [59] durch fünf Anforderungen definiert:

- **Unterdrückung von Störungen auf den Ausgang:** Die mit  $1/N_P$  gefilterte Systemantwort des geschlossenen Kreises auf Störungen am Eingang darf nach Ablauf von 1.2 Sekunden nur noch zehn Prozent des auftretenden Maximalwertes betragen.  $N_P$  ist dabei das Nennerpolynom des jeweils betrachteten Streckenmodells.
- **Integrator im offenen Kreis:** Zur vollständigen Unterdrückung konstanter Störungen ist ein Integrator im offenen Regelkreis erforderlich.
- **Abschwächung aller Störungen:** Im Frequenzbereich von 0 bis 0.2 Hz ist eine Abschwächung aller auftretenden Störungen erforderlich, die Sensitivitätsfunktion muss daher bis 0.2 Hz eine Verstärkung von weniger als 0 Dezibel aufweisen.
- **Maximale Verstärkung der Sensitivitätsfunktion:** Die Sensitivitätsfunktion darf maximal eine Verstärkung von 6 Dezibel aufweisen.

- **Maximale Verstärkung von Störungen am Eingang:** Störungen am Eingang dürfen im Frequenzband zwischen 50.26 Rad/s und 62.83 Rad/s (entsprechend 8 bis 10 Hz) höchstens eine Verstärkung von 10 Dezibel aufweisen.

Die Forderung nach einem Integrator im ORK ist, streng genommen, keine Anforderung an das Systemverhalten. Sie wird durch Einführung des Integrators in der Reglerstruktur erfüllt.

Die Obergrenze der Sensitivitätsfunktion soll Forderungen an die Amplitudenreserve, und damit an die Stabilität des geschlossenen Regelkreises, definieren [59]. Diese Forderung, die Forderung nach Abschwächung von Störungen im Frequenzband unterhalb von 0.2 Hz und die Spezifikation einer maximalen Verstärkung von 10 Dezibel zwischen 8 und 10 Hz definieren unmittelbar, ohne weitere Berechnung, Betragsgrenzen.

Die Übertragung von Anforderungen im Zeitbereich in Betragsobergrenzen ist damit lediglich für die Unterdrückung von Störungen am Ausgang erforderlich. Diese Forderung ist ungewöhnlich formuliert, da die Sprungantwort nicht mittels eines real existierenden Systems gefiltert wird. Die Verifikation kann daher nur in der Simulation erfolgen. In [59] wird die experimentelle Verifikation dementsprechend an Hand von Störungen am Eingang nachgewiesen.

Die Übertragung der Anforderungen in den Frequenzbereich erfolgt, wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben, mit beobachterbasierten Reglern. Die erforderlichen Modelle werden durch die folgenden Parameter festgelegt:

- **Modale Dämpfungen:** Auswahl der jeweils minimalen Werte.
- **Modale Verstärkung des ersten Modes:** Auswahl des maximalen Wertes.
- **Externe Masse:** Festlegung von fünf Stützstellen  $m = 0, 0.9, 1.8, 2.7, 3.6$  im Intervall der zulässigen externen Masse  $m \in [0, 3.6]$ . Diese Festlegung beeinflusst, wie in Abschnitt 7.3.2 beschrieben wird, alle weiteren modalen Parameter.

Die zur  $t - \Omega$ -Übertragung verwendeten Modelle wurden jeweils mit einem Integrator vormultipliziert.

Die Berechnung der Matrizen für Zustandsrückführung und Beobachter, zur Herleitung des beobachterbasierten Reglers, erfolgt durch Polplazierung. Dabei werden die Pole identisch vorgegeben. Die Festlegung der Pole wird, wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben, durch „Versuch und Irrtum“ getroffen:

- **Kennkreisfrequenzen:** Die festgelegten Kennkreisfrequenzen des geschlossenen Regelkreises entsprechen denen des jeweiligen Modells. Diese Berechnung führt allerdings in den Frequenzbereichen oberhalb der beiden Resonanzfrequenzen zu Betragsgrenzen, die teilweise unter 0 Dezibel liegen. Erfahrungsgemäß sind Forderungen nach sehr kleinen Betragsgrenzen zwischen zwei Resonanzen unnötig hart. Um die Forderungen günstiger zu formulieren, wird zusätzlich eine zweite Berechnungsreihe durchgeführt. Dabei ergeben sich die festgelegten Kennkreisfrequenzen des GRK aus denen des jeweiligen Streckenmodells, durch Multiplikation mit einem festen Faktor 1.5.
- **Dämpfungen:** Die Dämpfung des ersten Modes wird zur Anpassung der Systemantworten an die Vorgaben genutzt. Die des zweiten Modes wird in den meisten Fällen mit 7 Prozent gewählt, in Ausnahmefällen muss ein größerer Wert gewählt werden, um die Forderungen einzuhalten.

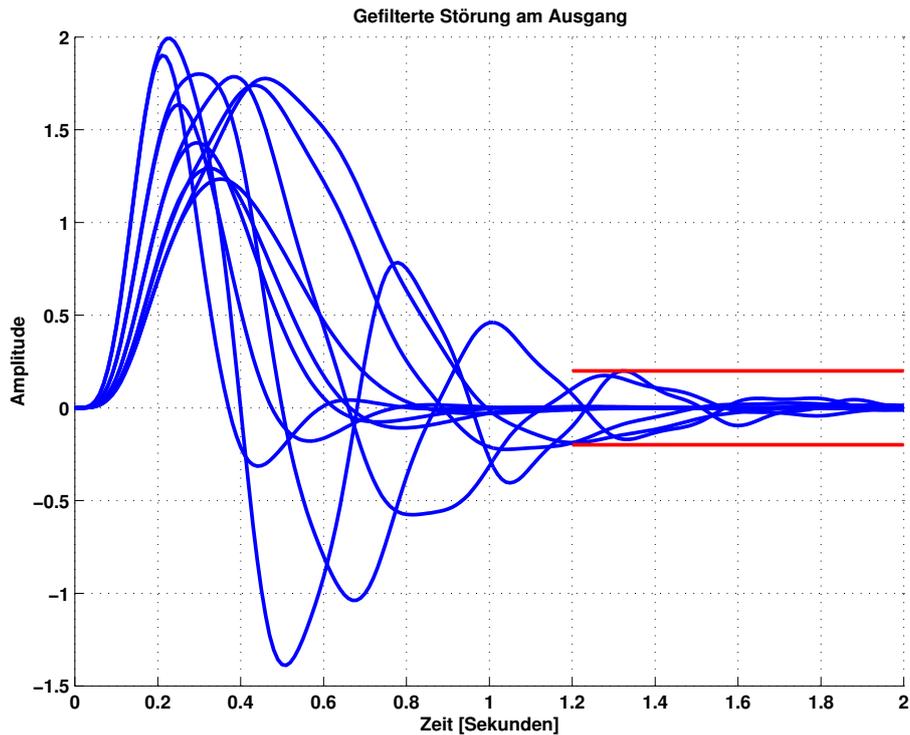


Abb. 7.4.4: Sprungantworten der Modelle zur  $t-\Omega$ -Übertragung der Forderung an die Störunterdrückung

- Reelle Pole:** Die aus dem in das Streckenmodell eingefügten Integrator resultierenden reellen Pole werden zur Anpassung der Sprungantwort an die Vorgaben und zur Anpassung des komplexen Frequenzganges an die Forderung bezüglich der Störunterdrückung bis 0.2 Hz genutzt.

In Abbildung 7.4.4 sind die Sprungantworten (blaue Linien) von 10 berechneten Störübertragungsfunktionen dargestellt. Die roten Markierungen stellen die aus der Anforderung an das Zeitverhalten resultierenden Grenzen dar.

Die Boundaries der Forderungen an das Störverhalten resultieren, frequenzabhängig, aus den jeweils maximalen Beträgen der Sensitivitätsfunktionen der zehn berechneten Modelle. Der Betrag der Sensitivitätsfunktion wird zusätzlich auf maximal sechs Dezibel beschränkt, um die entsprechende Anforderung umzusetzen. Dies ist in Abbildung 7.4.5 dargestellt. Die blauen Linien in dieser Abbildung verdeutlichen die Amplitudengänge der zehn berechneten Modelle, die grüne Linie kennzeichnet die maximale Verstärkung aller Modelle. Die maximal zulässige Verstärkung der Sensitivitätsfunktion ist durch die roten Linie dargestellt.

Zu beachten ist an dieser Stelle, dass die zulässige Verstärkung der Sensitivitätsfunktion die Forderung nach Störunterdrückung im Frequenzband unterhalb von 0.2 Hz berücksichtigt. Diese Forderung ist in Abbildung 7.4.5 durch die türkisfarbene Linie repräsentiert. Die rot gekennzeichnete, maximal zulässige Verstärkung muss unterhalb dieser Linie verlaufen. Jede Sensitivitätsfunktion, die unterhalb der roten Linie verläuft liegt gleichzeitig unterhalb der türkisfarbenen Linie und hält damit die Spezifikation ein.

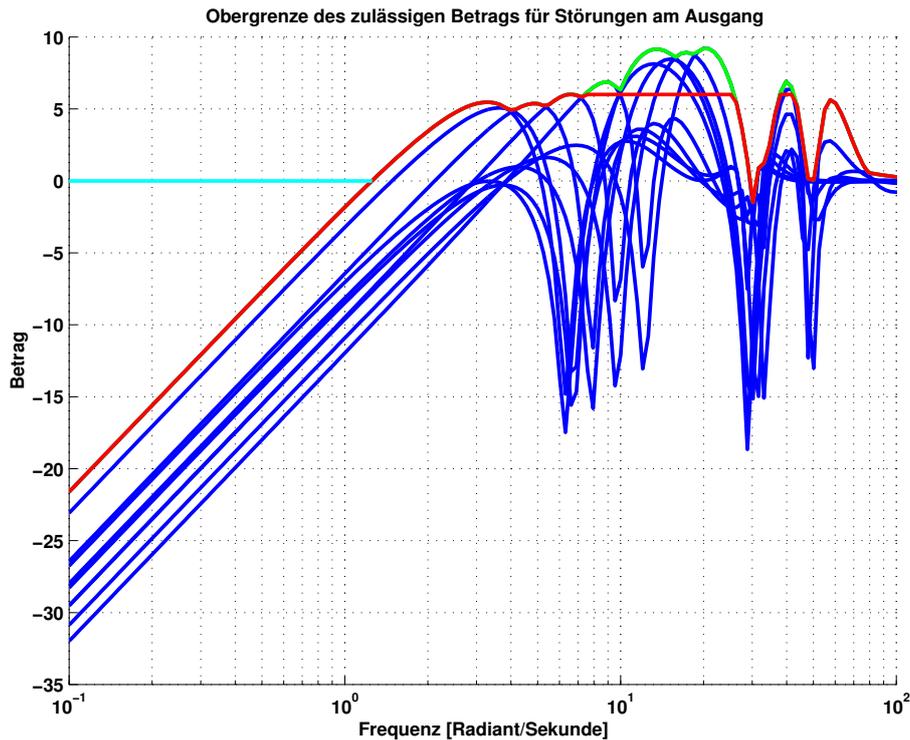


Abb. 7.4.5: Amplitudengang der Modelle zur  $t-\Omega$ -Übertragung der Forderung an die Störunterdrückung

## 7.5 Reglersynthese durch Optimierung

### 7.5.1 Einführende Betrachtungen

Zur Lösung der vorliegenden Regelungsaufgabe wird ein Regelungssystem mit zwei Freiheitsgraden genutzt, wie in Kapitel 2 beschrieben. Das Regelungssystem besteht aus zwei Komponenten, die Synthese erfolgt dementsprechend in zwei Schritten:

1. Synthese des Reglers zur Störunterdrückung.
2. Synthese des Vorfilters zur Erzielung des gewünschten Führungsverhaltens.

Zur Reglersynthese wird aus Betragsgrenzen und Templates direkt das Optimierungsproblem formuliert. Durch Lösung der Optimierung wird unmittelbar der Regler gewonnen. Anders als in der Quantitative Feedback Theory üblich, müssen daher keine Bounds berechnet werden (vgl. Abschnitte 2.3.6, 6.2.1).

Für die Reglersynthese kommen sowohl der in Abschnitt 6.3 beschriebene nicht-konvexe Optimierungsansatz als auch der in Abschnitt 6.4 dargestellte konvexe Ansatz zur Anwendung. Im Folgenden werden, um die Darstellung kurz zu halten, nur die Ergebnisse der nicht-konvexen Optimierung ausführlich dargestellt. Diese Präferenz stellt keine Wertung der Ansätze dar. Sie erfolgt, da die nicht-konvexe Optimierung für die meisten Ingenieure intuitiv naheliegender sein dürfte, und daher die Ergebnisse besser interpretierbar sind.

### Zusammenfassung der Optimierungsaufgabe

Aufgabenstellung der Optimierung für die folgenden Betrachtungen ist, durch Variation der Optimierungsparameter

$$\vec{p}_{Opt} = [\alpha_P, \alpha_{P-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_{Q-1}, \dots, \beta_1, \beta_0]^T,$$

den Regler

$$H(\vec{p}_{Opt}, s) = \frac{\alpha_P s^P + \alpha_{P-1} s^{P-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^Q + \beta_{Q-1} s^{Q-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}$$

so zu berechnen, dass der nominale komplexe Frequenzgang  $L^0(j\Omega)$  des offenen Regelkreises

$$L^0(\vec{p}_{Opt}, \vec{p}, s) = G^0(s)H(\vec{p}_{Opt}, s)$$

für alle betrachteten Frequenzen  $\Omega_k$  und alle erlaubten Parametervariationen  $\vec{p} \in \mathbb{P}$  jeweils innerhalb der zulässigen Wertemengen in der komplexen Ebene liegt.

Die Bewertung der Lage des komplexen Frequenzganges  $L^0(j\Omega)$  erfolgt, wie in Abschnitt 6.3.4 beschrieben, durch ein Gütefunktional, das sich aus der Kombination von Teilfunktionalen ergibt. Die Teilfunktionale wiederum sind, für einzelne Parameterkombinationen, Frequenzen und Betragsgrenzen (vgl. Abschnitt 6.3.3), unter Nutzung von Zugehörigkeitsfunktionen (vgl. Abschnitt 6.2.2), definiert.

Die Stabilität des Reglers und die des geschlossenen Regelkreises wird, wie in Abschnitt 6.3.6 dargelegt, durch Ergänzungen des Optimierungsproblems um eine Gewichtung der Pollagen für den Regler und die nominale Sensitivitätsfunktion sichergestellt.

### Einschätzung der Lösbarkeit des Optimierungsproblems

Eine einfache Überlegung, bezüglich der Zeitkonstanten des geschlossenen Regelkreises, verdeutlicht, dass die Aufgabenstellung zumindest schwierig zu lösen ist.

Die aktive Dämpfung flexibler mechanischer Strukturen ist aus Sicht der Regelungstechnik eine „Low-Authority-Control“-Aufgabe, d.h., die Kennkreisfrequenzen der Regelstrecke werden nur unwesentlich verschoben, die Hauptaufgabe besteht in der Erhöhung der Dämpfung. Geht man davon aus, dass die Sprungantwort des Systems näherungsweise symmetrisch ist, und berücksichtigt man die streckenimmanente Totzeit von zwei Tastperioden (vgl. Gleichungen 7.3.1, 7.3.2 und 7.3.3), dann tritt das Maximum der Sprungantwort nach rund 0.65 Sekunden auf. Zur Störunterdrückung verbleiben noch 0.55 Sekunden. Um innerhalb dieser Zeit die Störung um 90 Prozent zu unterdrücken, muss der geschlossene Regelkreis für das dominante Polpaar mindestens einen Realteil von 4.2 aufweisen, was bei einer Kennkreisfrequenz von 6 Rad/s nur mit einer Dämpfung von mindestens 70 Prozent zu erreichen ist. Eine solche Dämpfung ist in der Praxis schon für exakt bekannte Modelle nicht ohne weiteres zu erzielen.

### Gliederung der Ergebnispräsentation

Bei der Anwendung der Optimierung auf das betrachtete Entwurfsproblem treten Schwierigkeiten in Form von Konvergenzproblemen auf. Dadurch wird eine Überarbeitung der Aufgabenstellung erforderlich. Aus diesem Grund ist die Darstellung der Ergebnisse in drei Abschnitte

aufgeteilt. Im Abschnitt 7.5.2 werden die Ergebnisse des ersten Optimierungsdurchlaufs präsentiert. Ausgehend von diesen Ergebnissen erfolgt in Abschnitt 7.5.3 die Analyse der auftretenden Schwierigkeiten. In Abschnitt 7.5.4 werden die aus der Analyse hervorgehende Modifikation und die Lösung des modifizierten Problems beschrieben.

### 7.5.2 Ergebnisse im ersten Durchlauf

Im ersten Durchgang werden eine Reihe von Optimierungsrechnungen durchgeführt. Dabei wird die Berechnung der Gütefunktionale durchweg beibehalten, während die Reglerordnung, sowie der relative Grad des zu optimierenden Reglers, variiert werden. Als Optimierungsparameter werden die Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom genutzt. Der zur Verbesserung der numerischen Konditionierung verwendete Faktor wird mit  $f_0 = 35$  angesetzt (vgl. Abschnitt 6.3.2). Zur Initialisierung der Optimierung werden gleich-verteilte Zufallszahlen als Startwerte eingesetzt. Für das Zählerpolynom werden Werte im Intervall zwischen -1 und 1 ausgewählt, für das Nennerpolynom im Intervall zwischen 0 und 1. Die Optimierung wird nach 1000 Optimierungsschritten oder bei einem Gradienten des Gütefunktionals kleiner als  $10^{-8}$  abgebrochen.

Das verwendete Gütefunktional setzt sich, wie in Abschnitt 6.3.6 dargestellt, aus mehreren Anteilen zusammen:

- Summe der Zugehörigkeitsfunktionen nach Gleichung 6.3.8 für alle 38 Frequenzen: mit der Gewichtung 10.
- Unterschreitung der geforderten Mindestdämpfung von 10 Prozent für die Pole der Sensitivitätsfunktion unterhalb 15 Rad/s: mit der Gewichtung 10.
- Instabilität aller weiteren Pole der Sensitivitätsfunktion: Gewichtung 10 bei negativer Dämpfung.

Um die berechneten Regler miteinander vergleichen zu können, sind die folgenden Teilresultate tabellarisch festgehalten:

- Gesamtgütefunktional  $J$ .
- Summe der Mittelwerte der Zugehörigkeitsfunktionale  $J_Z$ , entsprechend der Summe der jeweiligen durchschnittlichen Abstände des komplexen Frequenzganges von der zulässigen Menge.
- Maximalwert, um den der Betrag der nominalen Sensitivitätsfunktion die zulässige Grenze überschreitet  $S_{\Delta}$ .
- Frequenzen, für die der komplexe Frequenzgang des nominalen offenen Regelkreises die Vorgaben nicht einhält.

Die Ergebnisse der ersten Auswertung sind in Tabelle 7.1 enthalten:

Aus der Tabelle geht klar hervor, dass keiner der berechneten Regler die geforderte Regelgüte in Bezug auf die Störunterdrückung einhält. Eine Reihe weiterer Berechnungen, mit modifiziertem Gütefunktional, Nutzung von Polen und Nullstellen des Reglers als Optimierungsparameter an Stelle der Polynomkoeffizienten, sowie eine Erhöhung der Anzahl der Optimierungsschritte bringt sehr ähnliche Ergebnisse. Die Resultate der konvexen Optimierung entsprechen qualitativ den hier Vorgestellten.

Zähler- / Nennerordnung	$J$	$J_Z$	$S_{\Delta}$	Frequenzen
3/5	1.95	0.20	7.0 dB	4,5,6,31 Rad/s
4/5	0.21	0.02	3.5 dB	4,5,31,50 Rad/s
4/6	2.02	0.20	6.0 dB	4,5,6,31 Rad/s
5/6	1.66	0.17	2.3 dB	4,5,6,31 Rad/s
5/7	1.91	0.19	3.5 dB	4,5,31 Rad/s
6/7	4.61	0.02	$\infty$	-
6/8	1.66	0.17	1.5 dB	4,5,31 Rad/s
7/8	0.07	0.01	$\infty$	-
7/9	2.09	0.21	4.0 dB	4,5,6,31 Rad/s
8/9	4.73	0.02	$\infty$	-
8/10	2.01	0.20	1.8 dB	3,4,5,31 Rad/s

Tab. 7.1: Ergebnisübersicht: erster Optimierungsdurchlauf

### 7.5.3 Analyse der erzielten Ergebnisse

Da die Optimierung weder mit dem konvexen noch mit dem nicht-konvexen Ansatz erfolgreich verläuft, wird untersucht, welche Gründe dafür vorliegen. Hierzu wird die in Abschnitt 6.3.7 beschriebene Auswertung des Gütefunktional genutzt. Als Ergebnis dieser Auswertung sind die Frequenzen, für die die Teilgütefunktionale größer als 0 sind, in Tabelle 7.1 enthalten. An Hand dieser Tabelle wird deutlich, dass hauptsächlich der Bereich unterhalb der ersten Eigenfrequenz, zwischen 3 und 6 Rad/s, problematisch ist. Ausgehend von dieser Erkenntnis können weitergehende Untersuchungen durchgeführt werden.

Eine Analyse des Nichols-Diagramms, für die mit einem Integrator vormultiplizierten drei, in [59] gegebenen, Modelle, zeigt auf, woraus die Schwierigkeiten bei der Lösung der gegebenen Aufgabe resultieren. Abbildung 7.5.1 beinhaltet die drei Nichols-Diagramme (dunkelgrüne, dunkelblaue und lilafarbene Linien), sowie die Boundaries für  $|S| = 0$  Dezibel (hellgrüne Linie),  $|S| = 6$  Dezibel (rote Linie) und  $|S| = 10$  Dezibel (schwarze Linie). Um für alle drei Modelle die Anforderungen zu erfüllen, muss der komplexe Frequenzgang der jeweiligen offenen Regelkreise bis zur Frequenz 1.2 Rad/s außerhalb der 0 Dezibel Boundary verbleiben. Gleichzeitig müssen die Frequenzgänge für alle Frequenzen außerhalb der 6 Dezibel Boundary liegen. Die Frequenzgänge müssen, um Stabilität des GRK sicherzustellen, unter dem kritischen Punkt 0 Dezibel / -180 Grad „durchtauchen“ [88], und schließlich müssen die komplexen Frequenzgänge in ihren jeweiligen Resonanzfrequenzen ( 6.3 Rad/s, 7.9 Rad/s und 12.2 Rad/s) eine Phasenlage nahe -360 Grad aufweisen, um eine Bedämpfung der Moden sicherzustellen [76].

Daraus folgt, dass die Phasenlage des Reglers bis 1.2 Rad/s nahe 0 Grad liegen muss, zwischen 1.2 Rad/s und 6 Rad/s auf -90 Grad abfallen und anschließend bis 12 Rad/s keinen weiteren Phasenabfall aufweisen darf. Diese Forderungen sind widersprüchlich und können von typischen Kompensationsgliedern nicht eingehalten werden.

Eine reelle Nullstelle in der linken Halbebene, bzw. ein reeller Pol ergibt zwar einen Phasenabfall von nicht mehr als neunzig Grad, kann aber den schnellen Phasenabfall zwischen 1.2 und 6 Rad/s nicht liefern.

Ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar wiederum ermöglicht zwar den raschen Phasenabfall,

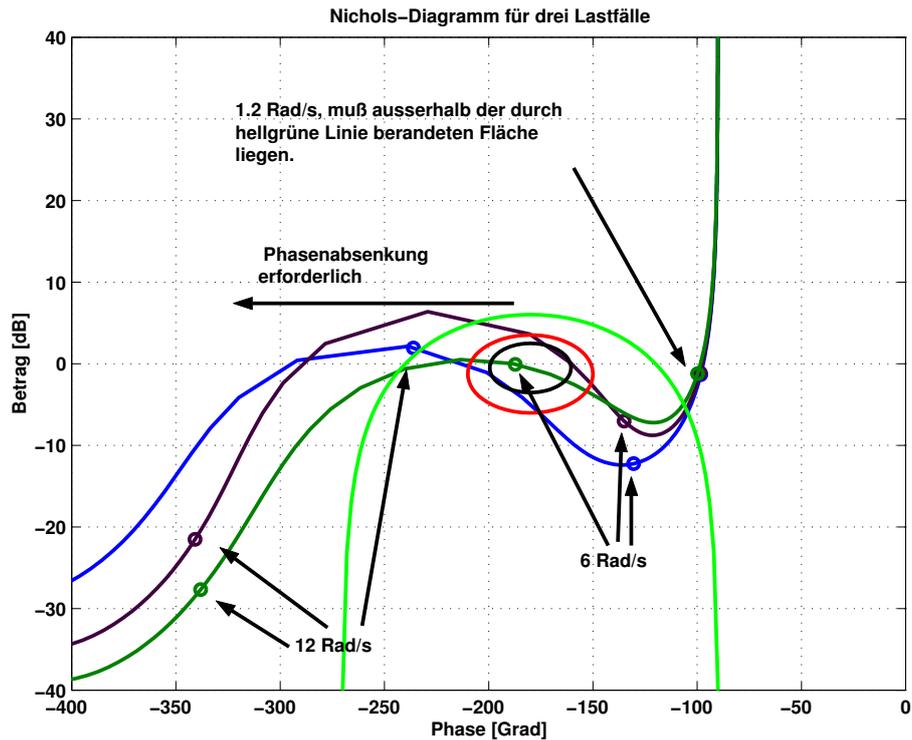


Abb. 7.5.1: Nichols-Diagramm des unregelten Systems im Bereich 0 bis 10 Rad/s

die Phase fällt dabei aber mehr als neunzig Grad ab. Hinzu kommt, dass ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar nicht alleine im Regler enthalten sein kann, da dieser zumindest proper (also echt gebrochen rational) bleiben muss. Zum Ausgleich der beiden Zählernullstellen ist also mindestens ein reeller Pol erforderlich. Dieser senkt jedoch die Phasenlage ab (im Bereich seiner Knickfrequenz um 45 Grad, oberhalb seiner Knickfrequenz um 90 Grad). Die Einhaltung der Phasenlage -360 Grad für die erste Resonanz erfordert dann, dass der Realteil des konjugiert komplexen Nullstellenpaares groß wird. Dadurch wird jedoch wiederum die Phasenlage unterhalb von 6 Rad/s verschoben, die Forderung nach Störunterdrückung bis 0.2 Hz kann damit nur noch durch Anhebung der Verstärkung erzielt werden, wodurch gleichzeitig der Betrag der Sensitivitätsfunktion erhöht wird.

Die Zusammenhänge sind im Diagramm 7.5.2 dargestellt. Das Diagramm verdeutlicht anschaulich, dass die Reglersynthese im Frequenzbereich zwischen 1.2 Rad/s und 12 Rad/s wenig Spielraum lässt, die gegebenen Anforderungen einzuhalten. Bei der Synthese kann nur eine Abwägung zwischen der Einhaltung der Forderung nach Störunterdrückung unterhalb von 1.2 Rad/s und der Erhöhung der Dämpfung des ersten Modes erfolgen. An diesem Punkt stellt sich die Frage, wie die beschriebenen Probleme in den Arbeiten von Landau et. al. [58] und Nordin / Gutmann [72] gelöst werden konnten. Immerhin wird den Ergebnissen in diesen beiden Arbeiten zuerkannt, alle Anforderungen zu erfüllen.

Verwendet man die in [72] bzw. in [58] angegebenen Reglerkoeffizienten, um damit die Verifikation der Lösungen von Nordin / Gutmann und von Landau et. al. zu betreiben, ergeben sich zwar sehr gute Resultate, es werden aber weder die hier zu Grunde gelegten Forderungen an die gefilterte Sensitivitätsfunktion noch die Forderungen an das Führungsverhalten erfüllt. Bei

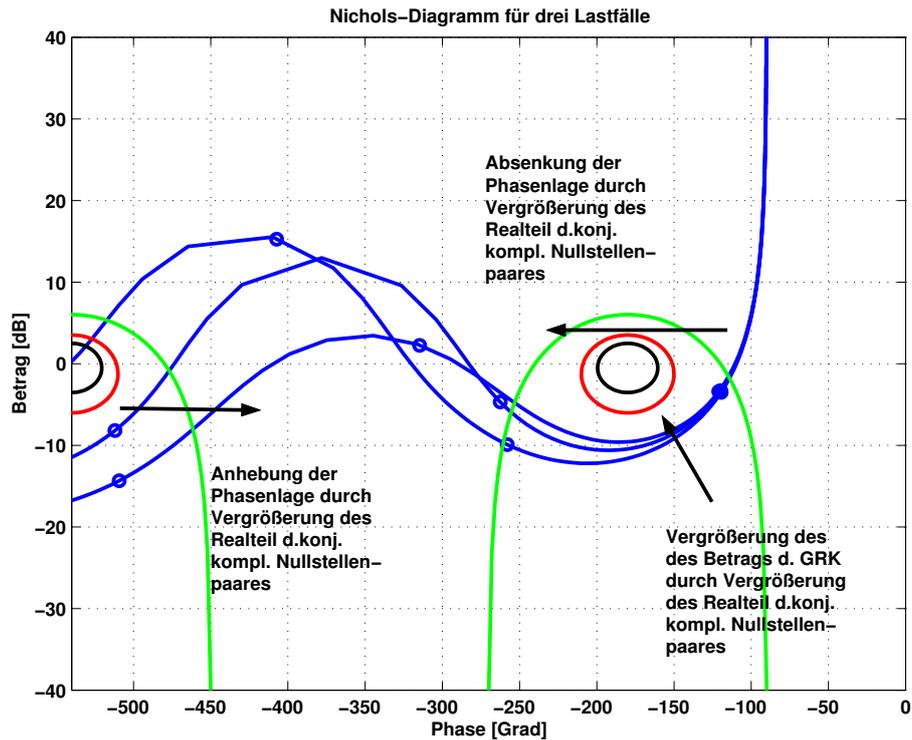


Abb. 7.5.2: Nichols-Diagramm des geregelten Systems im Bereich 0 bis 10 Rad/s

unterschiedlichen Simulationen (zeitkontinuierlich vs. zeitdiskret, Standardregelkreis vs. R-S-T Regelkreis) ergeben sich zwar Unterschiede in Bezug auf die Regelgüte, in keinem Fall wurden aber die geforderten neunzig Prozent Abschwächung innerhalb von 1.2 Sekunden erreicht. Abbildung 7.5.3 zeigt die Ergebnisse der zeitkontinuierlichen Simulation des Störverhaltens, Abbildung 7.5.4 die Ergebnisse der Simulation des Führungsverhaltens. Beide Simulationen beziehen sich auf den Standardregelkreis, jeweils für die drei in [59] angegebenen Modelle. Die Simulationsergebnisse für den Regler von Landau et. al. sind in Grün dargestellt, die Ergebnisse für den Regler von Nordin und Gutmann in Blau. Die Simulationsergebnisse verletzen die dargestellten Vorgaben. Es muss daher angenommen werden, dass bei der Beurteilung der Regelgüte aller Musterlösungen in [59] von den ursprünglichen Spezifikationen abgewichen wurde. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese Spezifikationen in dieser Reglerkonfiguration nicht eingehalten werden können.

Im Entwicklungsprozess einer realen Anwendung müsste an dieser Stelle hinterfragt werden, ob die definierten Regelungsziele eingehalten werden müssen, und daher Änderungen an der Systemarchitektur in Betracht kommen (z.B. kaskadierter Regelkreis, innere Schleife schneller getastet, mit Drehbeschleunigungsmessung rein zur Stabilisierung und Dämpfungserhöhung, äußerer Kreis zur Störunterdrückung im niederfrequenten Bereich). Als Alternative bietet sich an, die Anforderungen an die Regelgüte abzuschwächen. Da das untersuchte System nicht frei modifizierbar zur Verfügung steht, wird hier dieser Schritt gewählt.

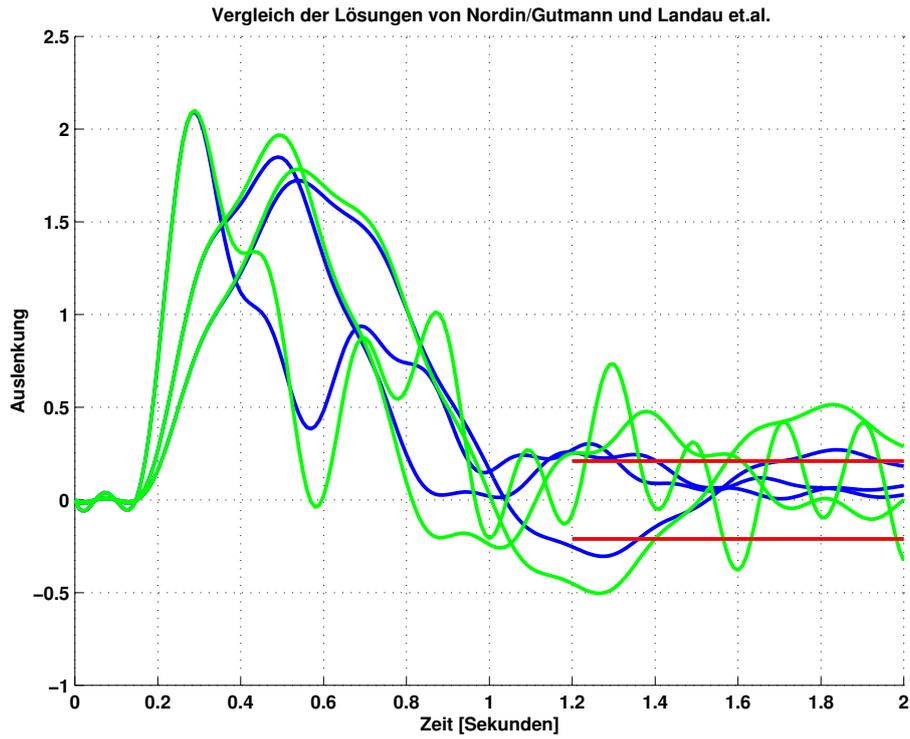


Abb. 7.5.3: Simulationsergebnisse der Regler von Landau et. al. und Nordin / Gutmann (Störverhalten)

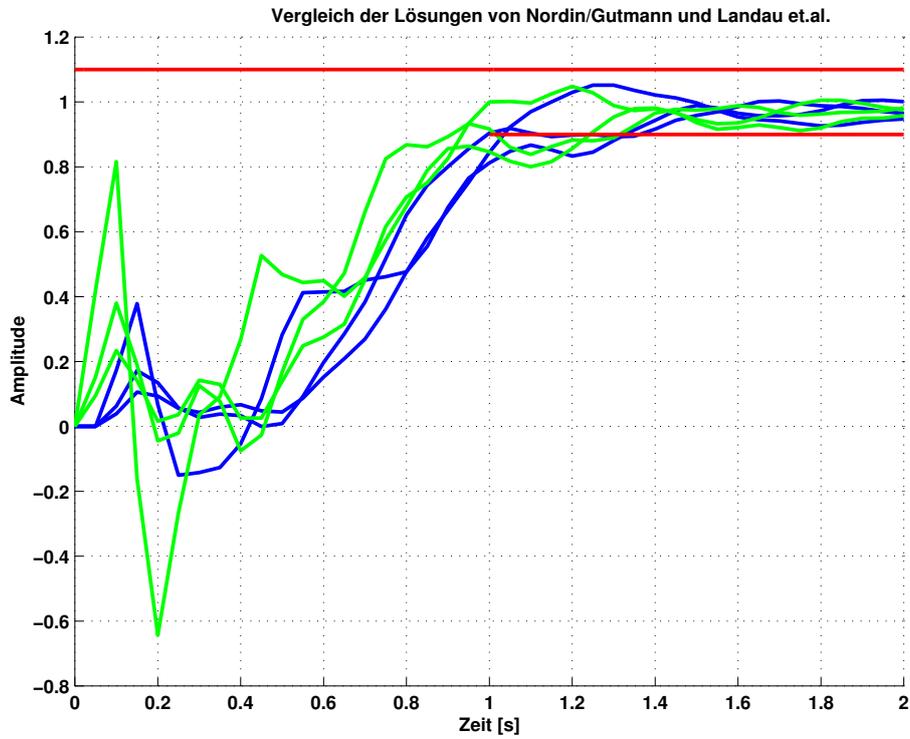


Abb. 7.5.4: Simulationsergebnisse der Regler von Landau et. al. und Nordin / Gutmann (Führungsverhalten)

### 7.5.4 Modifikation der Spezifikationen

Da die zur  $t-\Omega$ -Übertragung gewählten Modelle die Anforderungen einhalten, ist die in Kapitel 5 beschriebene Modifikation der Anforderungen ohne zusätzliche Informationen nicht sinnvoll. Zur Definition der erforderlichen Änderungen der Spezifikation wird daher die Systemantwort des unregulierten Systems betrachtet. Diese ist für die drei Modelle aus [59] in Abbildung 7.5.5 dargestellt. Die Abbildung verdeutlicht, dass es sinnvoll ist, die ursprüngliche Aufgabenstellung der Unterdrückung von bleibenden Regelabweichungen durch statische Störgrößen mit einem Amplitudenband zu kombinieren, in dem das System ausschlagen kann. Zu definieren bleibt, welche Amplitude dieses Band aufweist, und nach welcher Zeit die statische Störung ausgeregelt werden muss. Für die hier betrachtete Aufgabe wird das Amplitudenband von 10 Prozent auf

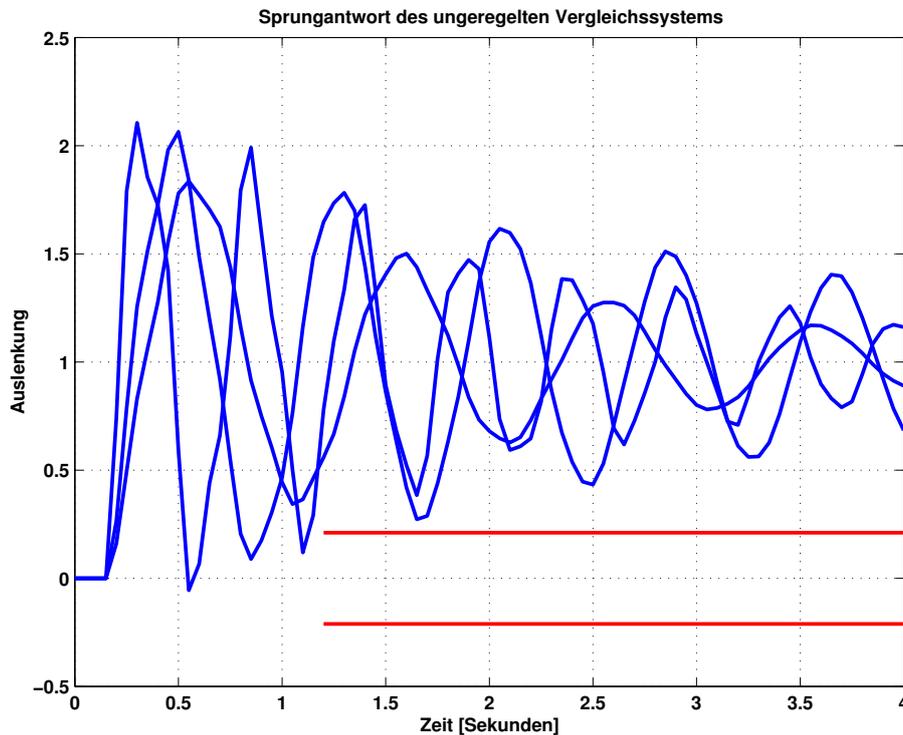


Abb. 7.5.5: Sprungantwort des unregulierten Systems

37 Prozent des maximal auftretenden Wertes erweitert. Die Zeit, nach der die Sprungantwort in diesem Amplitudenband verbleiben muss, wird bei 1.2 Sekunden belassen.

Indirekt findet sich diese Abschwächung der ursprünglichen Anforderungen auch bei Nordin und Gutmann. In [72] werden die Spezifikationen für die Störunterdrückung durch eine Übertragungsfunktion definiert, die eine Nennerzeitkonstante  $\tau = 1/1.2$  aufweist. Die Sprungantwort dieser Übertragungsfunktion klingt mit  $1 - \exp(t \cdot \tau)$  ab, so dass nach 1.2 Sekunden noch 37 Prozent des ursprünglichen Wertes verbleiben.

### 7.5.5 Reglerentwurf zur Einhaltung der modifizierten Anforderungen

Nach der Modifikation der Anforderungen an die Störunterdrückung ist eine Neuberechnung der Boundaries und die damit verbundene Definition des Optimierungsproblems erforderlich. Die

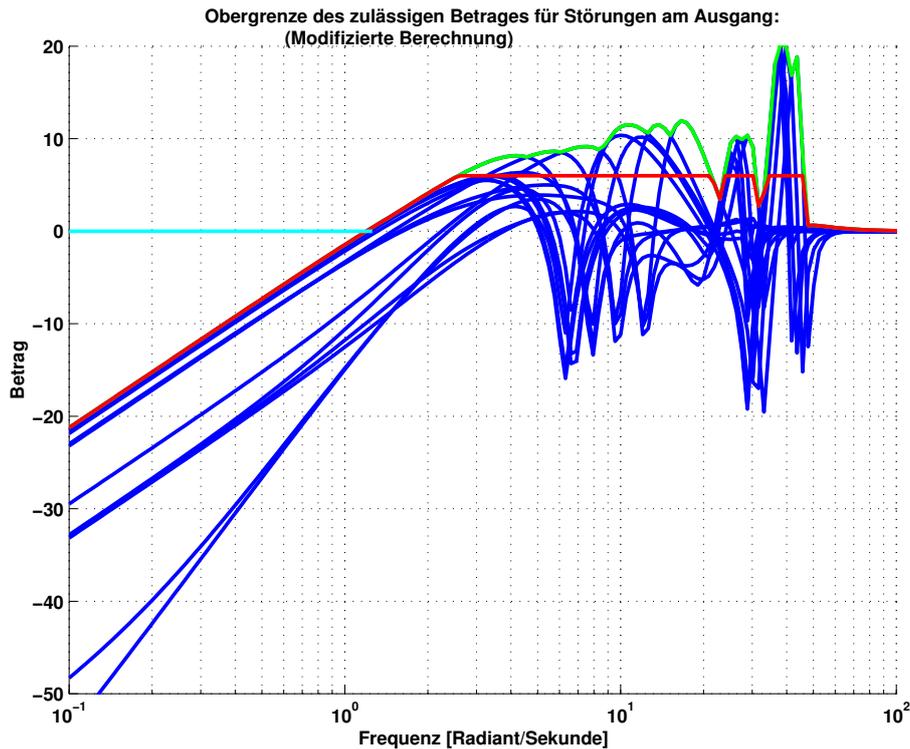


Abb. 7.5.6: Boundaries für die Störübertragung

Vorgehensweise bei der  $t - \Omega$ -Übertragung ist unverändert.

Die modifizierten Boundaries sind in Abbildung 7.5.6 dargestellt. Darin sind die Amplitudengänge, der zur Festlegung verwendeten Systeme, blau eingetragen. Die frequenzabhängigen Maxima dieser Amplitudengänge sind durch die grüne Linie gekennzeichnet und der maximal zulässige Betrag, aus dem sich die Boundaries ergeben, durch die rote Linien.

Wichtig für die Interpretation ist, dass, insbesondere im Frequenzbereich zwischen 1.2 und 6 Rad/s, die zulässige Verstärkung der Sensitivitätsfunktion größer ist, als in der vorhergegangenen Berechnung. Insgesamt sind jedoch, bedingt durch die Beschränkung des maximalen Betrages der Sensitivitätsfunktion auf 6 Dezibel, die zulässigen Beträge der Sensitivitätsfunktion nicht wesentlich größer, als bei der ursprünglichen Berechnung. Es ist daher davon auszugehen, dass ein Regler, der die hier berechneten Betragsgrenzen einhält, die Anforderungen im Zeitbereich deutlich übertrifft.

Aus den modifizierten Betragsgrenzen ergibt sich ein neues Optimierungsproblem. Die Zusammensetzung des Gütefunktional wird beibehalten. Die Optimierung wird für eine Reihe von Reglermodellen mit unterschiedlicher Ordnung und unterschiedlichem relativem Grad durchgeführt. Dabei konvergiert die Optimierung für eine Reihe von Reglerkonfigurationen (siehe Tabelle 7.2).

In jedem dieser Fälle werden alle Zugehörigkeitsfunktionen Null, so dass durch den jeweils resultierenden Regler die in das Optimierungsproblem eingehenden Forderungen an den nominalen komplexen Frequenzgang des offenen Regelkreises eingehalten werden. Daraus folgt unmittelbar die Einhaltung der Forderungen an die Störunterdrückung durch die berechneten Regler.

Zähler- / Nennerordnung	$J$	$J_Z$	$S_\Delta$	Frequenzen
4/6	0	0	< 0 dB	-
4/7	0	0	< 0 dB	-
6/7	0	0	< 0 dB	-
5/8	0	0	< 0 dB	-
6/8	0	0	< 0 dB	-
7/8	0	0	< 0 dB	-
7/9	0	0	< 0 dB	-

Tab. 7.2: Übersicht: Erfolgreiche Optimierung

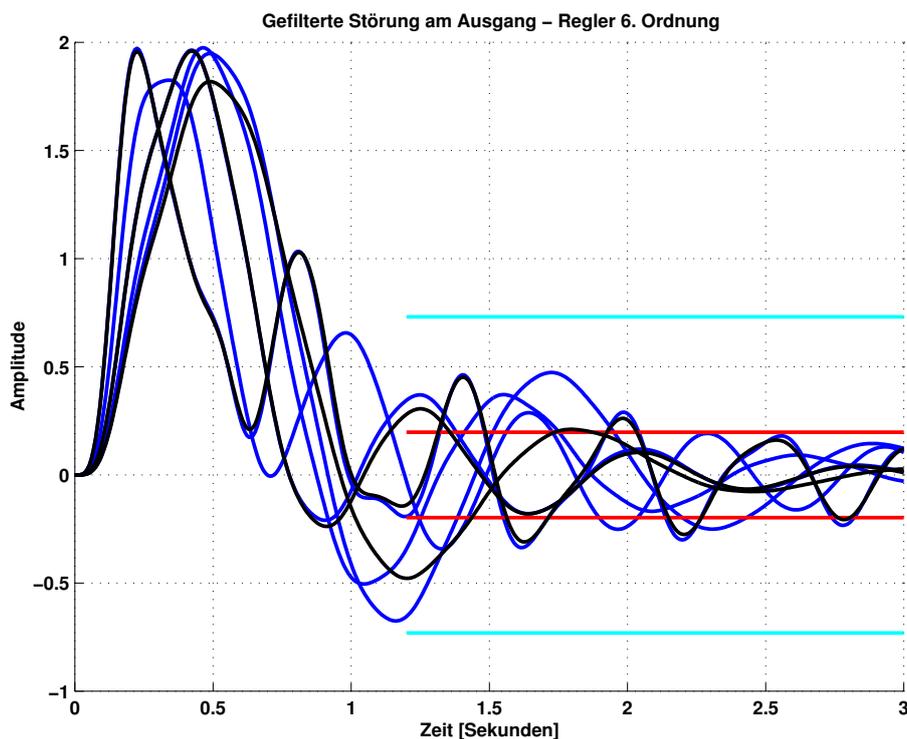


Abb. 7.5.7: Simulation der Sprungantwort (Störverhalten)

Im Hinblick auf die Implementierung ist der Regler mit der niedrigsten Ordnung der Günstigste. Dies ist der Regler sechster Ordnung. Die von Matlab gelieferte Darstellung des Reglers ist wie folgt:

$$H(s) = \frac{-0.03247s^6 + 19.97s^5 - 9.719s^4 + 446.8s^3 + 4540s^2 - 152400s + 1248000}{s^6 + 52.03s^5 + 1370s^4 + 21910s^3 + 216600s^2 + 1088000s}$$

Für diesen Regler sind die Simulationsergebnisse, bezüglich der Störunterdrückung, in Abbildung 7.5.7 dargestellt. Die Abbildung zeigt die simulierten Systemantworten der Störübertragungsfunktion für fünf, aus den Stützstellen über dem Intervall der zusätzlichen Masse hervorgehende, Modelle (blaue Linien) und für die drei, in [59] angegebenen, Modelle (schwarze Linien). Die hellblaue Linie stellt die modifizierten, die rote Linie die ursprünglichen Forderungen dar.

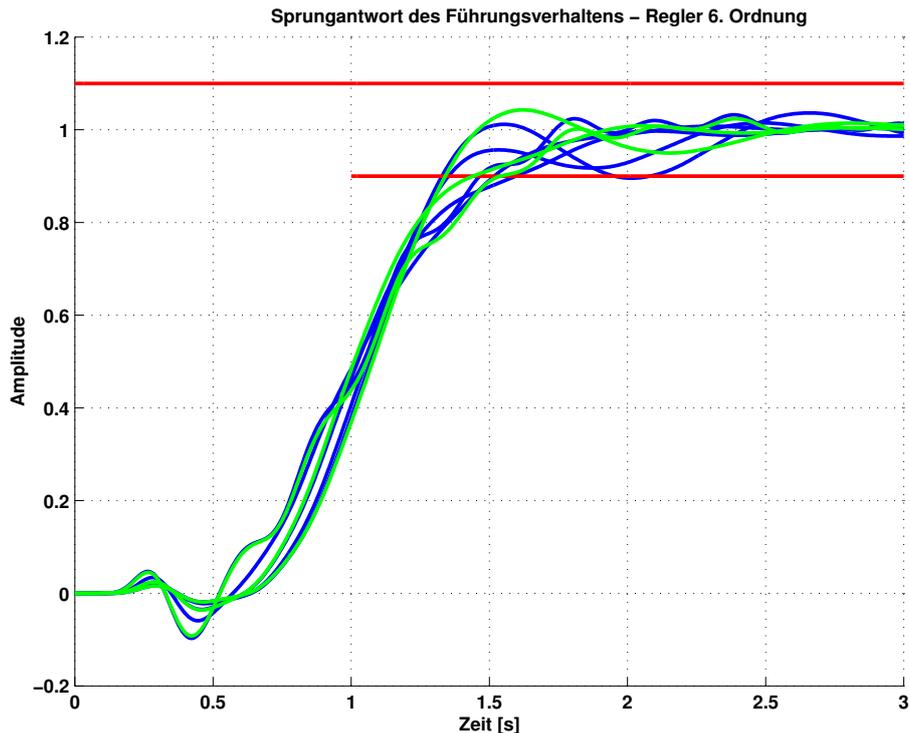


Abb. 7.5.8: Sprungantwort der Führungsübertragungsfunktion

Die maximale Überschwingweite der Führungsübertragungsfunktion wird als Forderung beibehalten, die Anstiegszeit auf 90 Prozent des Endwertes hingegen wird von 1 auf 1,5 Sekunden erhöht. Mit diesen Vorgaben wird ein Vorfilter zweiter Ordnung durch Optimierung berechnet. Die Simulationen der Sprungantwort der Führungsübertragungsfunktion sind in Abbildung 7.5.8 dargestellt. Die Sprungantworten der fünf, durch Variation der externen Masse resultierenden, Systeme sind blau eingetragen. Die drei grünen Linien stellen die Sprungantworten der in [59] gegebenen Modelle dar. Die rote Linie gibt die ursprünglichen Forderungen an den geschlossenen Regelkreis wieder.

### 7.5.6 Nutzung der konvexen Optimierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse werden durch nicht-konvexe Optimierung gewonnen. Die Anwendung der konvexen Optimierung ist aus Platzgründen nicht dokumentiert. Zusammenfassend sind jedoch einige Anmerkungen angebracht.

Durch Nutzung der konvexen Optimierung werden mit vergleichbarem Rechenaufwand ähnlich gute Ergebnisse erzielt, wie die hier vorgestellten, durch nicht-konvexe Optimierung gewonnenen. Dies kann an Hand des in Abbildung 7.5.9 dargestellten Simulationsergebnisses für die Störübertragung gezeigt werden. Der berechnete Youla-Parameter ergibt sich aus einem Ansatz mit 12 Polen. Die Optimierung erfolgt über 1000 Iterationen. Die konvexe Approximation der zulässigen Wertemengen erfolgt für 35 von 38 betrachteten Frequenzen.

Ein wesentlicher Unterschied im Vergleich zur nicht-konvexen Optimierung ist, dass die durch konvexe Optimierung gewonnenen Regler, bedingt durch die Optimierung über den orthonor-

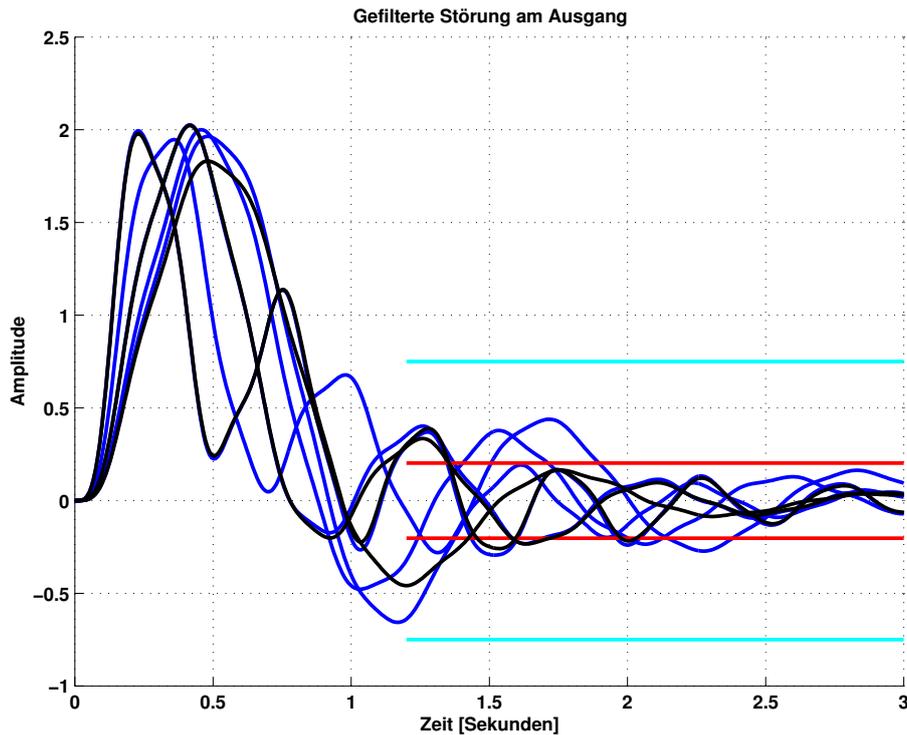


Abb. 7.5.9: Störverhalten im Zeitbereich: Regler aus konvexer Optimierung

malen Basisfunktionen, eine deutlich höhere Ordnung aufweisen. Im vorliegenden Fall ergibt sich eine Ordnung des Youla-Parameters von 12, was im Vergleich zur sechsten Ordnung des Reglers aus der nicht-konvexen Optimierung oder der neunten Ordnung des QFT-Reglers von Nordin und Gutmann eine wesentliche Erhöhung der Komplexität darstellt.

Ein weiterer Unterschied ist, dass die durch konvexe Optimierung erzielbaren Ergebnisse empfindlich in Bezug auf

- die Approximation der nicht-konvexen zulässigen Mengen durch konvexe Mengen (vgl. Abschnitt 6.4.1), und
- die Ordnung und Pollage für die orthonormalen Basisfunktionen (vgl. Abschnitt 6.4.2)

sind. Die dadurch gegebenenfalls auftretenden Konvergenzprobleme können durch zwei Maßnahmen vermindert werden:

1. Analyse der Lage des komplexen Frequenzganges des nominalen ORK in Bezug auf die approximierten zulässigen Mengen und, falls erforderlich, Modifikation der Approximation.
2. Iterative Modifikation der Ordnung und der gewählten Pole, gegebenenfalls durch ein nicht-konvexes Optimierungsproblem.

Neben der Lösung des Optimierungsproblems wird also gleichzeitig das „duale Problem“ ständig verändert. Die Anwendung dieser Maßnahmen führt dazu, dass zusätzliche Iterationen in den Entwurf eingebracht werden. Im vorliegenden Anwendungsfall werden für 35 der 38 betrachteten

Frequenzen konvexe Approximationen der zulässigen Mengen erforderlich. Von den 35 Approximationen werden 3 an die, in vorangehenden Optimierungsdurchläufen erzielten, Ergebnisse angepasst, um die Konvergenz zu verbessern.

Da auf der anderen Seite die Ergebnisse der nicht-konvexen Optimierung während eines Optimierungslaufes gegen lokale Minima konvergieren können, ist es oft erforderlich, mehrere Optimierungsläufe durchzuführen, um sicherzustellen, dass der Wert des resultierenden Gütefunktionsals wirklich die erzielbare Regelgüte widerspiegelt. Zudem sind die Ergebnisse der nicht-konvexen Optimierung empfindlich in Bezug auf die Gewichtung der Zugehörigkeitsfunktionen bzw. der Bewertung der Pollagen des GRK (vgl. Abschnitt 6.3.6), so dass auch hier zusätzliche Iterationen erforderlich werden.

Letztlich macht sich die Nichtkonvexität des Problems „Reglersynthese“ sowohl bei der Anwendung des konvexen als auch des nicht-konvexen Optimierungsansatzes bemerkbar. Die Bewertung, welcher Ansatz „geeigneter“ ist, bleibt dabei eine rein subjektive, da man mit beiden Ansätzen gute Ergebnisse erzielen kann.

## 7.6 Zusammenfassung

Inhalt dieses Kapitels ist die Anwendung der in dieser Arbeit verfolgten Kombination von Quantitative Feedback Theory, inklusive der für FMS erforderlichen Modifikationen, und der Optimierung zur Synthese von Reglern für das von Landau et. al. auf der European Control Conference 1995 vorgestellte Benchmarksystem. Nach der Kapiteleinführung wird das Benchmarksystem, zusammen mit den in [59] definierten Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis, dargestellt (Abschnitt 7.2). In Abschnitt 7.3 erfolgt die Analyse des Modells in Bezug auf die Behandlung der parametrischen Modellunsicherheiten und die Berechnung der Templates. Die Analyse der Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis, und die Übertragung der im Zeitbereich gegebenen Anforderungen in den Frequenzbereich werden in Abschnitt 7.4 dargelegt.

Die Darstellung der Ergebnisse der Reglerberechnung durch Optimierung erfolgt in Abschnitt 7.5. Da die ersten Berechnungen für die in [59] definierten Anforderungen nicht zufriedenstellend verlaufen, werden die Optimierungsergebnisse ausgewertet, und mit den in [58] bzw. in [72] vorgestellten Lösungen verglichen. Als Ergebnis der Auswertung werden modifizierte Anforderungen definiert. Abschließend werden die Ergebnisse der Reglersynthese durch Optimierung für die modifizierten Anforderungen diskutiert und Simulationsergebnisse vorgestellt, die dokumentieren, dass der gewonnene Regler die modifizierten Anforderungen einhält.

Im direkten Vergleich zu den in [59] vorgestellten Musterlösungen sind die hier erzielten Ergebnisse als sehr gut einzuschätzen. Insgesamt gesehen führt die Anwendung der hier vorgeschlagenen Kombination aus QFT und Optimierung sehr schnell und einfach auf sehr zufriedenstellende Resultate. Die reine Anwendung, von der Problemanalyse bis zur Erzeugung der hier vorgestellten Diagramme, erfordert weniger als zwei Wochen Arbeitszeit. Dabei werden allerdings sowohl die konvexe als auch die nicht-konvexe Optimierung zur Anwendung gebracht. Mit verbesserter Softwareunterstützung und etwas Erfahrung sollte der hier vorgestellte Entwurf, inklusive aller Entwurfsschritte, in rund drei Tagen durchführbar sein.

## 8. ZUSAMMENFASSUNG, BEWERTUNG UND AUSBLICK

Inhalt dieses Kapitels ist eine zusammenfassende Betrachtung der Ergebnisse dieser Arbeit. Dazu gehören eine Übersicht über die Vorgehensweise und die wesentlichen eigenen Leistungen, eine kritische Bewertung und der Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen.

### 8.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Anwendung der Quantitative Feedback Theory zur robusten Regelung flexibler mechanischer Strukturen im Rahmen des interdisziplinären Systementwurfs. Es ist in der Arbeit gelungen, die Anwendbarkeit der Quantitative Feedback Theory in diesem Zusammenhang so zu verbessern, dass auch komplexere Problemstellungen bearbeitet werden können. Um dies zu erreichen, werden Erweiterungen der Methode entwickelt, und die besonderen Anforderungen der Regelung flexibler mechanischer Strukturen berücksichtigt. Die folgenden Modifikationen bzw. Ergänzungen sind Teil der Arbeit:

- Modellbildung auf Basis der in der Strukturmechanik üblichen modalen Modelle;
- Vereinfachte Templateberechnung;
- Problemangepasste Modelle zur  $t - \Omega$ -Übertragung;
- Reglerberechnung durch Optimierung.

Mit den Modifikationen wird das Ziel verfolgt, die Stärken der QFT als Syntheseverfahren, auch für die Regelung flexibler mechanischer Strukturen nutzen zu können. Damit wird die Grundlage für eine nahtlose Integration der Reglersynthese als Entwurfsschritt in den Entwurf einer flexiblen mechanischen Struktur als Gesamtsystem geschaffen, und die Transparenz des Entwurfs in dem gegebenen interdisziplinären Kontext sichergestellt.

*Integration der Reglersynthese in den Systementwurf:* Adaptive Strukturen mit aktiver Schwingungsregelung sind schon lange Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. Um für eine, kommerziellen Erfolg versprechende, Anwendung, die Transition in die Produktentwicklung zu ermöglichen, muss die Auslegung in einem durchgängigen Entwicklungsprozess durchführbar sein. Dies ist nur dann möglich, wenn

- die Einhaltung von Forderungen aus Pflichten- und / oder Lastenheft Ziel des Reglerentwurfs ist,

- die in den einzelnen Entwurfsschritten genutzten Werkzeuge offene Schnittstellen aufweisen, um beim Übergang von einem Entwurfsschritt in den nächsten, die Zwischenergebnisse weiter nutzen zu können, und
- die in den einzelnen Entwurfsschritten genutzten Werkzeuge nicht zu komplex in der Bedienung sind.

Durch Nutzung der QFT als Entwurfsmethode sind diese Anforderungen an das Verfahren zur Reglersynthese bereits weitgehend erfüllt. Es ergeben sich bei der Anwendung jedoch einige Probleme:

Im Gegensatz zu robusten Entwurfsverfahren wie der  $H_2$ - oder der  $H_\infty$ -Methode bietet die QFT keine Unterstützung bei der Auswahl von Reglerordnung und -parametern. Hohe Modellordnung und schwach gedämpfte, konjugiert komplexe Polpaare erschweren die Reglersynthese für FMS derart, dass die Methode nur noch mit vertieften Kenntnissen und großer Erfahrung sinnvoll angewendet werden kann. Durch die Nutzung von Optimierungsverfahren mit konvexen und nicht-konvexen Gütefunktionalen zur Bestimmung der Reglerparameter wird in dieser Arbeit der Entwurf wesentlich vereinfacht. Die hier verwendete Definition des Gesamtgütefunktionals, als Kombination von Teilgütefunktionalen, erlaubt eine konkrete Analyse der Optimierungsergebnisse für den Fall, dass die Regelungsziele vom berechneten Regler nicht eingehalten werden.

Die Berechnung von Templates für FMS mit der üblicherweise verwendeten Methode des Gridding ist sehr rechenintensiv, da die Anzahl der unsicheren Parameter groß werden kann. Andere, vereinfachte Methoden zur Templateberechnung sind entweder konservativ, oder auf FMS nicht anwendbar, da die jeweiligen Voraussetzungen für ihre Anwendung nicht erfüllt sind. In der vorliegenden Arbeit wird eine für flexible mechanische Strukturen geeignete Methode der Templateberechnung entwickelt.

In der QFT werden modellbasierte Ansätze zur  $t-\Omega$ -Übertragung genutzt. Die dazu verwendeten Modelle sind von zweiter oder dritter Ordnung. Flexible mechanische Strukturen weisen in der Regel eine höhere Ordnung auf, so dass die Ansätze zweiter bzw. dritter Ordnung nicht immer geeignet sind. Hier wird deswegen die  $t-\Omega$ -Transformation an Hand problemangepasster Modelle unter Nutzung beobachterbasierter Regler durchgeführt.

Mit den genannten Modifikationen ist der QFT-Entwurf von Regelungssystemen für FMS wesentlich vereinfacht, was die Attraktivität des Verfahrens für die Anwendung erhöht.

*Transparenz des Entwurfs:* Die Transparenz, in Bezug auf die Zusammenhänge zwischen Regelungszielen, Modellunsicherheiten und den erzielten bzw. erzielbaren Ergebnissen, ist ein weiterer wesentlicher Grund, die QFT zu nutzen. Diese Transparenz ergibt sich aus zwei Eigenschaften:

1. Die mathematische und algorithmische Komplexität der QFT ist nicht hoch. Für das Verständnis der Methode genügen regelungstechnische Grundkenntnisse. Die Umsetzung der QFT in Softwarepaketen, wie der Matlab-QFT-Toolbox, erlaubt eine schnelle, problemlose und intuitive Anwendung.
2. Die Aufbereitung der Zusammenhänge zwischen Regelungszielen, Modellunsicherheiten und Anforderungen an den nominalen Regelkreis erlaubt es, einige Erfahrung in der Synthese von Regelungszielen vorausgesetzt, schon sehr früh im Entwurf festzustellen, ob

gegebene Regelungsziele eingehalten werden können oder nicht. Wenn Anforderungen nicht einhaltbar sind, wird für den Entwerfenden deutlich, welche Maßnahmen zur Behebung des auftretenden Problems erforderlich sind, bzw. welche Anforderungen geändert werden müssen.

Um die, für die QFT typische, Transparenz des Entwurfs auch in dem interdisziplinären Kontext des Entwurfs von Reglern für adaptive Strukturen sicherzustellen, basieren die Modellbildung, inklusive der Unsicherheitsbetrachtungen, und die Übertragung von Anforderungen aus dem Zeit- in den Frequenzbereich auf modalen Darstellungsformen. Die „Auslegung“ der zur  $t-\Omega$ -Transformation erforderlichen Regler erfolgt durch Polplatzierung. Bei geeigneter softwaretechnischer Aufbereitung können die erarbeiteten Modifikationen sehr intuitiv genutzt werden.

Die Anwendung der hier vorgeschlagenen Modifikationen ermöglicht schon während der  $t-\Omega$ -Übertragung erste Rückschlüsse auf die Einhaltung von Anforderungen an den GRK. Nach Abschluss der Optimierung gibt die Auswertung der Zugehörigkeitsfunktionen, bei nicht ausreichender Regelgüte, sehr präzise Hinweise auf Frequenzbereiche und Anforderungen, für die bestehende Forderungen überarbeitet werden müssen. Durch eine Variation der  $t-\Omega$ -Transformation können, falls dies erforderlich ist, bestehende, nicht einhaltbare Vorgaben modifiziert oder neue Vorgaben definiert werden.

## 8.2 Kritische Bewertung und Ausblick

Um die im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagene modifizierte Anwendung der Quantitative Feedback Theory bewerten zu können, muss sie im Zusammenhang zu anderen, häufig in der Literatur zur Regelung flexibler mechanischer Strukturen angewandten Verfahren betrachtet werden. Die QFT stellt in vielen Belangen einen Kompromiss zwischen einfacheren Verfahren, wie der IMSC, der PPF, der vollständigen Zustandsrückführung und der Synthese beobachterbasierter Regler einerseits, und komplexeren Verfahren, wie der  $H_2$ -, der  $H_\infty$ - oder der  $\mu$ -Synthese andererseits, dar.

Die erste Gruppe von Entwurfsverfahren ist mathematisch und algorithmisch wenig komplex und kann sehr intuitiv genutzt werden. Diese Verfahren berücksichtigen jedoch per-se keine Modellunsicherheiten. Aussagen zur Robustheit von Stabilität und Regelgüte können nur im Nachhinein, durch Analyse des geschlossenen Regelkreises, getroffen werden. Im Gegensatz dazu sind die modernen „robusten“ Entwurfsverfahren sehr wohl in der Lage, Modellunsicherheiten zu berücksichtigen, dies jedoch auf Kosten einer sehr hohen Komplexität des Entwurfsverfahrens und auf Kosten der Transparenz. Anzumerken ist zudem, dass unter den robusten Entwurfsverfahren nur die  $\mu$ -Synthese die robuste Regelgüte als Entwurfsziel beinhaltet. Alle anderen Verfahren sichern lediglich robuste Stabilität.

Die mathematische Komplexität der QFT ist nur wenig höher als die der oben genannten einfacheren Verfahren, und deutlich geringer als die der modernen robusten Syntheseverfahren. Gleichzeitig ist die QFT zu den robusten Syntheseverfahren zu rechnen. Sie bietet also von ihrer Leistungsfähigkeit her mindestens die gleichen Möglichkeiten, wie die  $\mu$ -Synthese. Das Potential der QFT ist höher einzuschätzen als das der anderen robusten Verfahren, da diese keine Auslegung auf robuste Regelgüte erlauben.

Der Vorteil der QFT liegt in der beschriebenen Kombination von geringer Komplexität und der Möglichkeit, Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis direkt im Entwurf zu berücksich-

tigen und, trotz Modellunsicherheiten, umzusetzen. Mit diesen Eigenschaften kann die Methode als Verfahren zur Reglersynthese im Systementwurf sinnvoll genutzt werden.

Schwächen der QFT liegen in der fehlenden Unterstützung bei der Festlegung von Reglerordnung und Reglerparametern, und in der mathematisch wenig präzisen Vorgehensweise, insbesondere im Hinblick auf die  $t - \Omega$ -Übertragung. Mit der Nutzung der hier definierten Optimierungsansätze kann der erste dieser Schwachpunkte behoben werden, die fehlende mathematische Genauigkeit hingegen verbleibt als zu lösende Aufgabe.

Sinnvolle Ergänzungen der vorgeschlagenen Entwurfsmethode sind daher insbesondere in der mathematischen Untermauerung der sehr pragmatischen Vorgehensweisen der einzelnen Entwurfsschritte zu sehen. Mögliche Aufgabenstellungen sind:

1. **Vorgabe von Anforderungen im Zeitbereich, Überprüfung von Vorgaben und Übertragung von Anforderungen aus dem Zeit- in den Frequenzbereich:** Die Zusammenhänge zwischen der Modellstruktur, den unsicheren Parametern und der erreichbaren Regelgüte sind einerseits sehr komplex, andererseits ist ein tiefergehendes Verständnis dieser Zusammenhänge für den Gesamtentwurf hilfreich. Von Interesse sind dabei in ersten Untersuchungen
  - (a) die Auswirkungen von im Frequenzbereich benachbarten Moden auf die erzielbare Regelgüte,
  - (b) mathematisch präzisere Methoden zur  $t - \Omega$ -Übertragung,
  - (c) mathematisch präzisere Methoden zur Abschätzung der erzielbaren Regelgüte.
2. **Lösbarkeit des konvexen Optimierungsproblems:** Die Wahl des Reglers für den Nominalfall und die affine Darstellung des Youla-Parameters haben Einfluss auf die Lösbarkeit des konvexen Optimierungsproblems. Diese Einflüsse sollten genauer untersucht werden. Von besonderem Interesse ist hierbei, ob ein Zusammenhang zwischen den Pollagen des nominalen Reglers und der Robustheit besteht.
3. **Lösbarkeit des nicht-konvexen Optimierungsproblems:** Das Konvergenzverhalten des nichtkonvexen Optimierungsproblems und seine Lösbarkeit hängen von den Anfangswerten ab. Das nichtkonvexe Optimierungsproblem konvergiert unter Umständen gegen lokale Minima. Untersuchungen zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten, gegebenenfalls unter Einbeziehung von verbesserten Optimierungsalgorithmen (z.B. Simulated Annealing) oder alternativen Optimierungsverfahren (z.B. genetischen Algorithmen), wären für die weitere Verbesserung hilfreich.

In diesem Zusammenhang darf allerdings nicht vergessen werden, dass der Themenkomplex „Anforderungen an den Regelkreis“ außer in der Quantitative Feedback Theory in keinem Reglersyntheseverfahren fest verankert ist. Lösungen für die vorgestellten Aufgabenstellungen sollten demnach auch für andere Verfahren gesucht werden.

Eine weitere, wesentliche Aufgabe ist die durchgehende softwaretechnische Umsetzung des Verfahrens. Es bietet sich dabei an, auf der bestehenden Matlab-QFT-Toolbox aufzusetzen. Zu implementieren sind neben den numerischen Grundlagen, inklusive der algorithmisch vergleichsweise anspruchsvollen Templateberechnung aus Kapitel 4, eine Reihe von grafischen Benutzerschnittstellen, die den Anwender durch alle Entwurfsschritte führen.

# ANHANG

## A. FUNKTIONENTHEORIE

Die Funktionentheorie beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Funktionen von Zahlen, die einen imaginären Anteil  $\sqrt{-1} \cdot x$  beinhalten. Die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Eigenschaften und Definitionen werden hier vorgestellt.

Zugunsten der Kompaktheit des Anhangs wird auf die Darstellung von Beweisen verzichtet. Das vorliegende Kapitel ist an [41, 81, 86] angelehnt. In diesen Arbeiten sind alle hier nicht enthaltenen Beweise zu finden.

### A.1 Komplexe Zahlen

#### A.1.1 Grundlagen

Die *imaginäre Einheit*  $j$  ist die Zahl, die mit

$$j^2 = -1$$

definiert ist. Mit ihr lassen sich komplexe Zahlen  $z$  in verschiedenen, einander äquivalenten Formen beschreiben:

$$z = \underbrace{a + j b}_{\text{arithmetischeForm}} = \underbrace{r \cdot (\cos(\phi) + j \sin(\phi))}_{\text{trigonometrischeForm}} = \underbrace{r \cdot \exp(j \phi)}_{\text{Exponentialform}}$$

Die reellen Summanden  $a = \Re(z)$  und  $b = \Im(z)$  heißen *Realteil* bzw. *Imaginärteil* der komplexen Zahl  $z$ . Der Winkel  $\phi = \arg(z)$  soll auf den Winkel  $\pi \leq \pi$  beschränkt bleiben.

Mit der zu  $z$  *konjugiert komplexen Zahl*  $z^*$  kann der Betrag

$$r = \sqrt{z \cdot z^*}$$

berechnet werden.

Die Phasenlage hängt, unter Berücksichtigung der Mehrdeutigkeit des Arcustangens im betrachteten Intervall, mit Real- und Imaginärteil wie folgt zusammen:

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen erfolgt komponentenweise:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + j b_1) \pm (a_2 + j b_2) = (a_1 \pm a_2) + j (b_1 \pm b_2)$$

Die Multiplikation ist durch

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j (a_1 b_2 + b_1 a_2) = r_1 r_2 \cdot \exp(\phi_1 + \phi_2),$$

die Division durch

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \exp(\phi_1 - \phi_2)$$

definiert.

Aus diesen Definitionen können für die Beträge komplexer Zahlen die folgenden Zusammenhänge abgeleitet werden:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Für die Addition gilt die sogenannte Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

für Summen existiert eine erweiterte Form:

$$\left| \sum_{k=1}^{N_k} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{N_k} |z_k|.$$

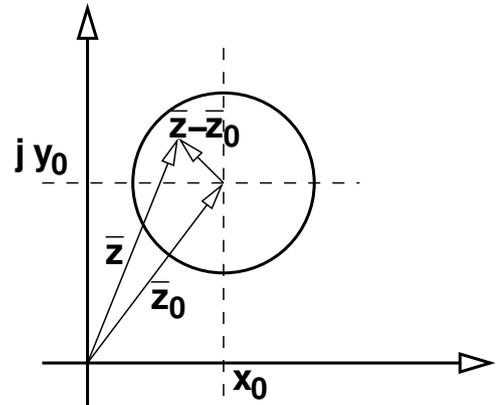


Abb. A.1.1: Betragsungleichung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können als Punkte in der zweidimensionalen *komplexen Ebene* oder *Gauß'schen Ebene* dargestellt werden. Stellt man alle komplexen Zahlen  $z$ , die eine Betragsungleichung in der Form  $|z - z_0| \leq d$  mit  $z_0 = x_0 + j y_0$  und  $k \in \mathbb{R}$  erfüllen, in der komplexen Ebene dar, dann beschreibt die Ungleichung einen Kreis ( $|z - z_0| = d$ ) und das Kreisinnere ( $|z - z_0| < d$ ). Die Differenz  $z - z_0$  kann in der komplexen Ebene als ein Vektor dargestellt werden, dessen Betrag nicht größer als  $d$  sein darf (siehe Abbildung A.1.1).

### A.1.2 Kurven, Bereiche und Gebiete in der Gauß'schen Ebene

**Definition A.1.1** Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  stetige reelle Funktionen des Parameters  $t$ , ist die Menge der Punkte, die der Gleichung

$$z(t) = x(t) + j y(t) = r(t) \cdot \exp(j \phi(t)) \quad t \in [t_{MIN}, t_{MAX}] \quad (\text{A.1.1})$$

genügen, eine stetige Kurve in der komplexen Ebene. Entspricht zudem jeweils ein Wert von  $t$  eineindeutig einem Punkt in der komplexen Ebene, ist die Abbildung von  $t$  auf  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  also bijektiv, dann heißt die Kurve *Jordansche Kurve*. Gilt diese Eigenschaft für alle  $t$  außer für  $t_{MIN}$  und  $t_{MAX}$  und gilt weiterhin  $z(t_{MIN}) = z(t_{MAX})$ , dann heißt die Kurve *geschlossene Kurve*. □

**Definition A.1.2** Die durch Gleichung A.1.1 festgelegte Kurve heißt *glattes Kurvenstück*, wenn sie eine *Jordansche Kurve* ist, nicht geschlossen und die Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t}$$

für alle  $t \in [t_{MIN}, t_{MAX}]$  stetig und innerhalb des Intervalls nicht gleichzeitig Null sind.

Ein Weg ist eine aus endlich vielen glatten Kurvenstücken zusammengesetzte stetige Kurve. □

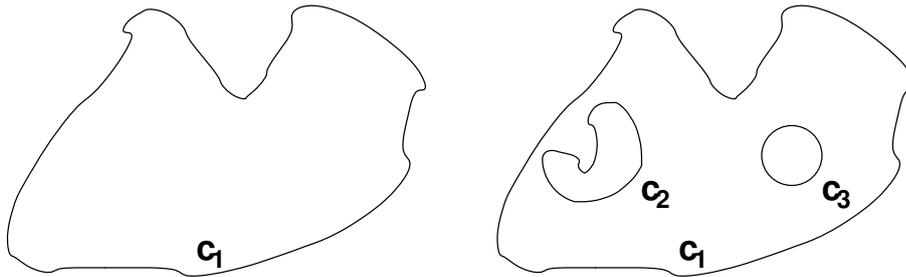


Abb. A.1.2: Einfach und dreifach zusammenhängendes Gebiet

**Definition A.1.3** Unter einer kreisförmigen  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $z_0$  der Zahlenebene versteht man diejenigen Punkte  $z$ , die der Bedingung  $|z - z_0| < \varepsilon$  genügen.  $\square$

**Definition A.1.4** Ein Punkt  $z_0$  heißt innerer Punkt einer Menge  $\mathbb{M}$  in der komplexen Ebene, wenn eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z_0$  ganz zu  $\mathbb{M}$  gehört.

Ein Punkt  $z_0$  heißt Randpunkt von  $\mathbb{M}$ , wenn jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $z_0$  mindestens einen Punkt enthält, der zu  $\mathbb{M}$  gehört, und einen Punkt, der nicht zu  $\mathbb{M}$  gehört.  $\square$

**Definition A.1.5** Jede ebene Punktmenge  $\mathbb{M}$ , die nur aus inneren Punkten besteht und zusammenhängend ist, nennt man Gebiet. Nimmt man die Randpunkte von  $\mathbb{M}$  zur Menge  $\mathbb{M}$  hinzu, dann erhält man ein abgeschlossenes Gebiet oder einen Bereich.  $\square$

Gebiete werden in einfach zusammenhängende und mehrfach zusammenhängende Gebiete unterteilt. Ein Gebiet heißt  $n$ -fach zusammenhängend, wenn es durch  $n$  geschlossene Ränder berandet ist (Vgl. Abbildung A.1.2: links ein geschlossener Rand  $c_1$ , daher einfach zusammenhängend; rechts drei geschlossene Ränder  $c_1, c_2, c_3$ , also dreifach zusammenhängend.)

## A.2 Komplexe Funktionen

### A.2.1 Grundlagen

**Definition A.2.1** Eine komplexe Funktion einer komplexen Veränderlichen ist eine eindeutige Abbildung aus einer Teilmenge  $\mathbb{D}$  der Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  in eine Teilmenge  $\mathbb{W}$  von  $\mathbb{C}$ . Sie wird durch

$$w = f(z)$$

bezeichnet. Die unabhängige Variable  $z$  gehört der Menge  $\mathbb{D}$  der Originalpunkte an, die als Definitionsmenge bezeichnet wird. Der Wertevorrat bzw. die Wertemenge  $\mathbb{W}$  der komplexen Funktion bezeichnet die Menge der Bildpunkte, der die abhängige Veränderliche  $w$  angehört.  $\square$

Jedem reellen Zahlenpaar  $z = x + j y \in \mathbb{D}$  wird ein reelles Zahlenpaar  $w = u + j v \in \mathbb{W}$  zugeordnet.

Eine bijektive oder eineindeutige komplexe Funktion liegt vor, wenn zu jedem Punkt  $z$  der Definitionsmenge  $\mathbb{D}$  nur ein Punkt  $w$  der Wertemenge  $\mathbb{W}$  gehört.

Trennt man  $w$  in Real- und Imaginärteil, dann sind die beiden reellen Werte  $u$  und  $v$  von den reellen Werten  $x$  und  $y$  abhängig:

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y),$$

so dass

$$w = f(z) = f(x + j y) = u(x, y) + j v(x, y)$$

gilt.

**Definition A.2.2** Die komplexe Funktion  $f(z)$  sei mindestens in einer Umgebung von  $z_0$  definiert. Die Funktion strebt für  $z \rightarrow z_0$  gegen den Grenzwert  $f_g$ , wenn für jede Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon)$  existiert, so dass aus

$$|z - z_0| \leq \delta(\varepsilon) \quad \text{unmittelbar} \quad |f(z) - f_g| \leq \varepsilon$$

folgt. Man schreibt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_g.$$

□

Zur Vereinfachung der Berechnung komplexer Grenzwerte kann der folgende, ohne Beweis gegebene Satz verwendet werden:

**Satz A.1**  $w = f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$  sei mindestens in einer Umgebung von  $z_0$  definiert. Die Funktion besitzt für  $z \rightarrow z_0$  den Grenzwert  $f_g = u_g + j v_g$ , wenn

1. die reellen Veränderlichen  $x$  und  $y$  im Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  existieren und wenn
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_g$  sowie
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_g$ .

**Definition A.2.3** Die in einer Umgebung von  $z_0$  definierte komplexe Funktion  $w = f(z)$  ist an der Stelle  $z_0$  stetig, wenn der Grenzwert  $f_g$  für  $z \rightarrow z_0$  existiert und gleich dem Funktionswert an der Stelle ist:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Ist die Funktion an jeder Stelle eines Gebietes  $\mathbb{D}$  stetig, so heißt sie stetig in  $\mathbb{G}$ .

Die Stetigkeit einer komplexen Funktion kann mit dem nächsten Satz nachgewiesen werden:

**Satz A.2** Sind in einer komplexen Funktion  $w = f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$  Real- und Imaginärteil in  $z_0$  stetige Funktionen der beiden reellen Variablen  $x$  und  $y$ , so ist auch  $f(z)$  stetig in  $z_0$  und umgekehrt.

**Definition A.2.4** Die Funktion  $w = f(z)$  sei in einer Umgebung von  $z_0$  definiert. Sie heißt an der Stelle  $z_0 \in \mathbb{C}$  differenzierbar, wenn unabhängig von der Art der Annäherung  $\delta z = z - z_0 \rightarrow 0$  der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z_0) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} \quad (\text{A.2.1})$$

existiert. □

### A.2.2 Holomorphe Funktionen

Der Grenzwert in Gleichung A.2.1 heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* der komplexen Funktion  $f(z)$  an der Stelle  $z = z_0$ . Ist  $f(z)$  an jedem Punkt eines Gebietes  $\mathbb{D}$  differenzierbar, dann ist  $f(z)$  eine *holomorphe* oder *analytische* Funktion auf dem Gebiet  $\mathbb{D}$ .

Stellen, an denen die Ableitung  $f'(z)$  nicht existiert, heißen *singuläre Stellen*. Für die Differentiation komplexer Funktionen gelten die aus dem Reellen bekannten Regeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [c_1 f(z) + c_2 g(z)] &= c_1 f'(z) + c_2 g'(z) \\ \frac{d}{dz} [f(z)g(z)] &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \frac{d}{dz} \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right] &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \quad \text{für } g(z) \neq 0. \end{aligned}$$

Für holomorphe Funktionen müssen nach dem folgenden Satz die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt sein.

**Satz A.3** Ist eine Funktion  $w = f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$  in  $\mathbb{D}$  holomorph, so gelten die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

für alle Punkte des Gebietes  $\mathbb{D}$ .

Umgekehrt lässt sich aus der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf die Differenzierbarkeit einer Funktion schließen.

Der folgende Satz kann die Berechnung der Ableitung einer komplexen Funktion vereinfachen:

**Satz A.4** Besitzen die Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  im Gebiet  $\mathbb{D}$  bei  $(x, y)$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, und genügen diese den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die komplexe Funktion  $f(z) = u(x, y) + j v(x, y)$  an der Stelle  $z = x + j y$  differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

Für die Templateberechnung ist das Maximumprinzip von Bedeutung:

**Satz A.5** Ist die nichtkonstante Funktion  $f(z)$  im einfach zusammenhängenden abgeschlossenen Gebiet  $G$  holomorph, dann nimmt der Absolutbetrag von  $f(z)$  seinen größten Wert in keinem inneren Punkt von  $G$ , sondern nur auf dem Rand von  $G$  an.

Nach [41] kann dieser Satz auch auf mehrfach zusammenhängende Gebiete erweitert werden.

## A.3 Konforme Abbildungen

### A.3.1 Grundlagen

Eine komplexe Funktion, die zwei gerichtete, stetige Kurven, welche sich unter einem Winkel  $\alpha$  in der komplexen Ebene schneiden, so abbildet, dass auch die Abbildungen stetige, gerichtete Kurven sind, die sich unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, heißt *winkeltreu*.

Es gilt der folgende Satz:

**Satz A.6** Ist  $w = f(z)$  eine holomorphe Funktion im Gebiet  $\mathbb{D}$  und ist die Ableitung  $f'(z_0) \neq 0, z_0 \in \mathbb{D}$ , dann ist die durch  $w = f(z)$  vermittelte Abbildung *winkeltreu*.

Eine Abbildung  $f(z)$  heißt *maßstabstreu*, wenn in jedem Punkt  $z_0$ , für den  $f'(z_0) \neq 0$  gilt, die durch die Abbildung resultierende Streckung oder Stauchung eines infinitesimalen Vektors von der Richtung des Vektors unabhängig ist.

**Definition A.3.1** Eine Abbildung, die in  $z_0$  *winkeltreu* und in kleinsten Teilen *maßstabstreu* ist, heißt *konform*. □

Damit kann der folgenden Satz kompakt dargestellt werden:

**Satz A.7** Die durch holomorphe Funktionen  $f(z)$  erzeugten Abbildungen sind für  $f'(z) \neq 0$  *konform*.

### A.3.2 Elementare konforme Abbildungen

*Ganzrationale Funktionen:* sind als Funktionen der komplexen Variablen  $z$  mit komplexen Koeffizienten  $c_k$  durch

$$w = \sum_{k=0}^{N_k} c_k \cdot z^k$$

definiert. Sie sind in der ganzen komplexen  $z$ -Ebene holomorph. Es gilt die komplexe Verallgemeinerung des reellen Fundamentalsatzes der Algebra.

*Gebrochen rationale Funktionen:* sind durch den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen gegeben:

$$w = \frac{\sum_{i=0}^{N_z} a_i \cdot z^i}{\sum_{i=0}^{N_n} b_i \cdot z^i}.$$

Gebrochen rationale Funktionen sind, mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners, in der ganzen  $z$ -Ebene holomorph. Nullstellen des Nenners nennt man Pole.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Eine gebrochen rationale Funktion heißt echt gebrochen rational, wenn der Nennergrad größer oder gleich dem Zählergrad ist. Sie heißt unecht gebrochen, wenn der Nennergrad kleiner als der Zählergrad ist.

**Satz A.8** Jede echt gebrochen rationale Funktion  $R(z)$ , deren Nennerpolynom die  $p$  verschiedenen Nullstellen  $z'_i$  mit den Vielfachen  $i_k$  besitzt, kann eindeutig in Partialbrüche derart zerlegt werden, dass

$$R(z) = \sum_{k=1}^{N_k} \left[ \frac{A_{k1}}{(z - z'_k)^{i_k}} + \frac{A_{k2}}{(z - z'_k)^{i_k-1}} + \dots + \frac{A_{ki_k}}{(z - z'_k)} \right]$$

gilt.

*Lineare Funktion:* ist ein Polynom mit komplexen Koeffizienten in der komplexen Variablen  $z$ , die aber höchstens in der ersten Ordnung auftritt. Damit ist die lineare Funktion ein Sonderfall der ganzrationalen Funktion. Sie wird im Folgenden eine besondere Bedeutung erlangen, und deshalb hier ausführlicher dargestellt.

Lineare Funktionen sind in der gesamten komplexen Ebene konform und bijektiv. Die Funktion  $w = az + b$  streckt und dreht eine gerichtete Strecke um den komplexen Faktor  $a$ , und verschiebt das Ergebnis um  $b$ . Ein Kreis in der  $z$ -Ebene wird durch die Abbildung  $w = az + b$  wiederum in einen Kreis überführt:

$$z = z_0 + r \cdot \exp(j\phi) \quad \text{mit} \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Multipliziert wird  $z$  mit  $a = r_a \cdot \exp(\phi_a)$ , der Summand  $b$  ist eine beliebige komplexe Zahl. Der Funktionswert ist

$$w = \underbrace{(z_0 + b)}_{w_0} + \underbrace{(r \cdot r_a)}_{r_w} \cdot \exp(\phi + \phi_a).$$

*Inverse Funktion:* ist durch

$$w = \frac{1}{z}$$

gegeben. Sie weist in der  $z$ -Ebene nur eine Singularität auf, bei  $z = 0$ . Durch die Fortsetzung

$$\left. \frac{1}{z} \right|_{z=0} = \infty$$

wird die inverse Funktion per Definition konform und bijektiv in der ganzen  $z$ -Ebene.

Die inverse Funktion vermittelt eine Inversion am Einheitskreis mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse, da  $z = r \cdot \exp(\phi)$  in

$$\frac{1}{r \cdot \exp(\phi)} = \frac{1}{r} \cdot \exp(-\phi)$$

abgebildet wird.

Auch die inverse Funktion bildet einen Kreis in der  $z$ -Ebene auf einen Kreis in der  $w$ -Ebene ab. Gegeben ist die komplexe Zahl  $z = x + jy$  und ihre Inverse  $w = u - jv$ .

Aus

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

folgt:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ganz analog lassen sich

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

herleiten.

Ein Kreis wird in der komplexen Ebene durch die Gleichung

$$|z - z_0| \leq R$$

beschrieben, in Koordinaten ist dies

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

Ersetzt man  $x$  und  $y$  mittels der oben dargestellten Gleichungen, wird daraus:

$$\left( \frac{u}{u^2 + v^2} - x_0 \right)^2 + \left( \frac{-v}{u^2 + v^2} - y_0 \right)^2 - R^2 = 0.$$

Ausmultipliziert und nach  $u$  bzw.  $v$  zusammengefasst:

$$\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} - \frac{2(ux_0 - vy_0)}{u^2 + v^2} = R^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Multipliziert man schließlich beide Seiten mit  $(u^2 + v^2)^2$ , wird dies:

$$1 - 2(ux_0 - vy_0) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2)(u^2 + v^2) = 0.$$

Für  $(x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$  ergibt sich die Darstellung einer Geraden

$$y = \frac{u}{v} \cdot x - \frac{1}{2v},$$

sonst die eines Kreises

$$\left( u - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 + \left( v + \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 = \left( \frac{R}{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \right)^2 \quad (\text{A.3.1})$$

*Die gebrochen lineare Funktion:* Die Funktion

$$w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$$

bildet die geschlossene  $z$ -Ebene eineindeutig und konform auf die  $w$ -Ebene ab. Die Funktion lässt sich in drei Schritte zerlegen:

$$\left| \begin{array}{l} 1. \quad t = cz + d \\ 2. \quad s = \frac{1}{t} \\ 3. \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot s \end{array} \right|$$

Damit ergibt sich die Abbildung als Kombination einer linearen Funktion mit einer Inversion, gefolgt von einer weiteren linearen Funktion.

Aus dieser Komposition ergibt sich unmittelbar, dass die gebrochen lineare Funktion Kreise auf Kreise abbildet.

## B. KONVEXE OPTIMIERUNG

Inhalt dieses Kapitels ist eine kurze Darstellung der für die vorliegende Arbeit wichtigsten Sachverhalte und Zusammenhänge in Bezug auf die konvexe Optimierung. Wie schon im vorangegangenen Abschnitt werden hier, um den Umfang der Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, keine Beweise angegeben. Diese sind z.B. in [12] zu finden.

### B.1 Konvexe Mengen

#### B.1.1 Grundlagen

**Definition B.1.1** Eine Menge  $\mathbb{M}$  ist konvex, wenn das Liniensegment zwischen zwei beliebigen Punkten in  $\mathbb{M}$  vollständig in  $\mathbb{M}$  liegt. Sind also die Punkte  $p_1, p_2 \in \mathbb{M}$ , dann muss für jedes  $\theta \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \theta \leq 1$

$$\theta p_1 + (1 - \theta) p_2 \in \mathbb{M}$$

gelten. □

Zur Verdeutlichung ist in Abbildung B.1.1 je ein Beispiel für konvexe und nicht-konvexe Mengen abgebildet.

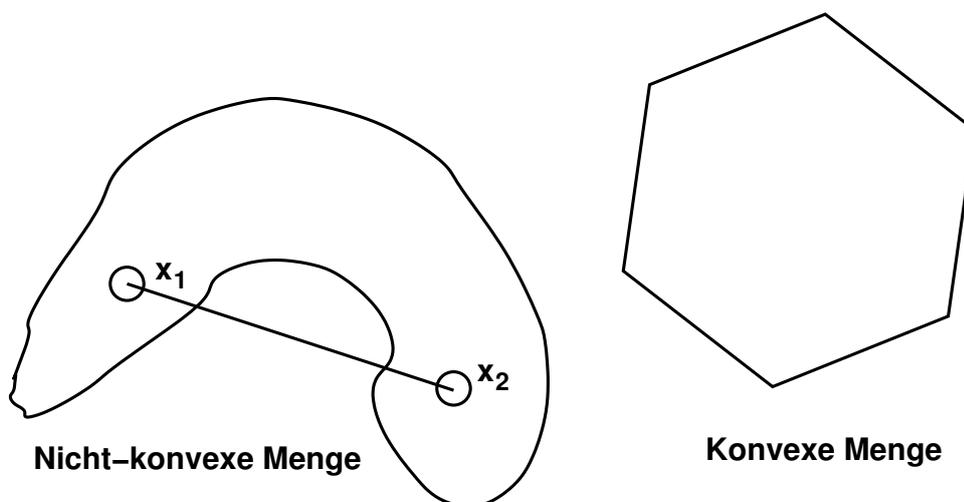


Abb. B.1.1: Konvexe und Nicht-konvexe Mengen

**Definition B.1.2** Ein Punkt, der durch

$$\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \dots + \theta_n p_n$$

definiert ist, wenn gleichzeitig

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1$$

und  $\theta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$  gilt, heißt *konvexe Kombination der Punkte*  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . □

Man kann zeigen, dass eine Menge, die mehr als zwei Punkte enthält, dann und nur dann konvex ist, wenn sie jede konvexe Kombination ihrer Punkte enthält.

**Definition B.1.3** Die *konvexe Hülle einer Menge*  $\mathbb{M}$ , die durch  $\text{conv}(\mathbb{M})$  bezeichnet wird, ist die Menge aller konvexen Kombinationen der Punkte in  $\mathbb{M}$ :

$$\text{conv}(\mathbb{M}) = \{ \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \dots + \theta_n p_n \mid p_i \in \mathbb{M}, \theta_i \geq 0, \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1 \}.$$

□

### B.1.2 Beispiele für konvexe Mengen

*Hyperebene:* Eine *Hyperebene* ist eine konvexe Menge, die durch

$$\{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} = b \}$$

mit  $\vec{a} \neq \vec{0}$  beschrieben ist.

Analytisch ist durch die Gleichung die Menge der Punkte beschrieben, die eine nichttriviale Lösung der linearen Gleichung darstellen, geometrisch kann die Hyperebene als die Menge der Punkte betrachtet werden, die ein konstantes inneres Produkt in Bezug auf den Vektor  $\vec{a}$  aufweisen.

Hyperebenen können auch in modifizierter Form durch

$$\{ x \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \}$$

beschrieben werden. Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass eine Hyperebene den Raum  $\mathbb{R}^n$  in zwei Unterräume aufteilt.

*Halbräume:* Der geschlossene Halbraum ist eine Menge, die in der Form

$$\{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} \leq b \} \quad \text{bzw.} \quad \{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} \geq b \}$$

oder alternativ dazu durch

$$\{ x \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \leq 0 \} \quad \text{bzw.} \quad \{ x \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \geq 0 \}$$

beschrieben wird. Ein offener Halbraum ist durch

$$\{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} < b \} \quad \text{bzw.} \quad \{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} > b \}$$

oder

$$\{ x \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) < 0 \} \quad \text{bzw.} \quad \{ x \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) > 0 \}$$

dargestellt. Halbräume sind konvexe Mengen.

*Euklidische Kugeln und Ellipsoide:* sind n-dimensionale Verallgemeinerungen von Kreis und Ellipse im  $\mathbb{R}^2$ . Eine Euklidische Kugel ist durch die Gleichung

$$\mathbb{K}(\vec{x}_c, r) = \left\{ \vec{x} \mid (\vec{x} - \vec{x}_c)^T (\vec{x} - \vec{x}_c) \leq r^2 \right\}$$

beschrieben, in der der Radius  $r$  der Kugel größer als Null ist. Der Vektor  $\vec{x}_c$  stellt den Mittelpunkt der Kugel dar.

Ellipsoide werden durch die Gleichung

$$\mathbb{K}(\vec{x}_c, r) = \left\{ \vec{x} \mid (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \mathbf{P} (\vec{x} - \vec{x}_c) \leq r^2 \right\}$$

definiert. Die Matrix  $\mathbf{P}$  ist positiv definit. Sie bestimmt die Länge der Halbachsen des Ellipsoids. Euklidische Kugel und Ellipsoide sind konvexe Mengen.

*Norm-Kugeln:* Beliebige, auf dem  $\mathbb{R}^n$  definierte Normen  $\|\vec{x}\|$ , definieren durch

$$\mathbb{C} = \{ (\vec{x}_c, r) \mid \|\vec{x} - \vec{x}_c\| \leq r \}$$

eine konvexe Menge.

*Polyhedren und Polytope:* Ein *Polyhedron* ist die Lösungsmenge einer endlichen Anzahl linearer Gleichungen und Ungleichungen:

$$\mathbb{P} = \left\{ \vec{x} \mid \vec{a}_j^T \vec{x} \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m, \vec{c}_j^T \vec{x} = d_j, j = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Polyhedren sind also die Schnittmengen einer endlichen Anzahl von Halbräumen und Hyper-ebenen. Beschränkte Polyhedren werden auch *Polytope* genannt. Polyhedren und Polytope sind konvexe Mengen.

### B.1.3 Konvexitätserhaltende Operationen

*Berechnung der Schnittmenge:* ist eine konvexitätserhaltende Operation. Die Schnittmenge einer, ggf. unendlichen, Anzahl konvexer Mengen ist wiederum eine konvexe Menge.

*Bildfunktion und inverse Bildfunktion affiner Funktionen:* Ist  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge und ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine affine Funktion, dann ist die Abbildung von  $\mathbb{S}$  durch die Funktion  $f$

$$f(\mathbb{S}) = \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{S} \}$$

eine konvexe Menge. Ebenso ist das inverse Abbild

$$f^{-1}(\mathbb{S}) = \{ \vec{x} \mid f(\vec{x}) \in \mathbb{S} \}$$

eine konvexe Menge.

Beispiele für Bildfunktionen sind:

- Multiplikation mit einem Skalar und Verschiebung. Falls  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine konvexe Menge ist,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , dann sind die Mengen  $\alpha \cdot \mathbb{S}$  und  $\vec{a} + \mathbb{S}$  ebenfalls konvex.
- Die durch Projektion einer konvexen Menge auf eine ihrer Koordinaten entstehende Menge ist konvex.
- Die Summe zweier konvexer Mengen ist konvex.

*Linear-fraktionale Funktionen:* Ist die Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  affin, ist also

$$g(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vec{c}^T \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} \vec{b} \\ d \end{bmatrix}$$

mit der Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , den Spaltenvektoren  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  und  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  und dem reellen Skalar  $d$ , dann heißt die durch

$$f(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}) / (\vec{c}^T \vec{x} + d)$$

gegebene Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit der Definitionsmenge

$$\mathbb{F}_D = \{ \vec{x} \mid \vec{c}^T \vec{x} + d > 0 \}$$

*lineare Fraktionalfunktion.* Wird mit dieser Funktion eine konvexe Menge abgebildet, dann ist die resultierende Menge wiederum konvex.

#### B.1.4 Trennende und stützende Hyperebenen

Für Algorithmen zur konvexen Optimierung spielen trennende und stützende Hyperebenen eine bedeutsame Rolle, daher werden sie hier kurz dargestellt.

**Theorem B.1** Sind  $\mathbb{D}_1$  und  $\mathbb{D}_2$  zwei konvexe Mengen, die sich nicht schneiden, ist also  $\mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 = \emptyset$ , dann existiert ein  $\vec{a} \neq 0$  und ein  $b$ , so dass  $\vec{a}^T \vec{x} \leq b$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{D}_1$  und  $\vec{a}^T \vec{x} \geq b$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{D}_2$  gilt.

Die Hyperebene

$$\mathbb{H} = \{ \vec{x} \mid \vec{a}^T \vec{x} = b \}$$

heißt *trennende Hyperebene* der Mengen  $\mathbb{D}_1$  und  $\mathbb{D}_2$ .

Gilt statt der oben gegebenen Ungleichungen sogar  $\vec{a}^T \vec{x} < b$  für die  $\vec{x} \in \mathbb{D}_1$  und  $\vec{a}^T \vec{x} > b$  für die  $\vec{x} \in \mathbb{D}_2$ , dann spricht man von *striktter Trennung* der Mengen.

Anzumerken ist, dass der Umkehrschluss aus dem obigen Theorem nicht gilt. Existiert eine trennende Hyperebene, dann kann daraus nicht geschlossen werden, dass die Mengen sich nicht schneiden.

**Definition B.1.4** Ist  $x_0$  ein Punkt auf der Berandung einer konvexen Menge  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^m$  und erfüllt  $\vec{a}$  die Ungleichung  $\vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \leq 0$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{D}$ , dann heißt die Hyperebene

$$\{ \vec{x} \mid \vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \}$$

*stützende Hyperebene* der Menge  $\mathbb{D}$  im Punkt  $\vec{x}_0$ . □

Ein wesentliches Ergebnis diesbezüglich ist das Theorem der stützenden Hyperebenen. Es besagt, dass für jede nichtleere konvexe Menge  $\mathbb{D}$  und jeden Punkt  $x_0$  auf dem Rand von  $\mathbb{D}$  eine stützende Hyperebene gefunden werden kann.

## B.2 Konvexe Funktionen

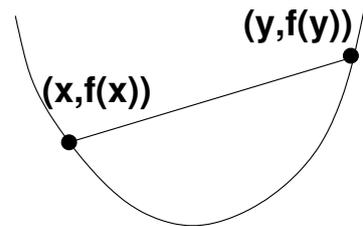
### B.2.1 Grundlagen

**Definition B.2.1** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex, falls die Definitionsmenge  $\mathbb{F}_f$  der Funktion eine konvexe Menge ist, und für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}_f$  und  $\theta$  mit  $0 \leq \theta \leq 1$  die Ungleichung

$$f(\theta\vec{x} + [1 - \theta]\vec{y}) \leq \theta f(\vec{x}) + [1 - \theta]f(\vec{y}) \quad (\text{B.2.1})$$

erfüllt ist. □

Geometrisch heißt dies, dass das Liniensegment zwischen den Punkten  $(\vec{x}, f(\vec{x}))$  und  $(\vec{y}, f(\vec{y}))$  oberhalb des durch die Funktion gegebenen Graphen liegt. Abbildung B.2.1 zeigt dies. Das Liniensegment zwischen zwei beliebigen Punkten des Graphen liegt immer oberhalb des Graphen.



Eine Funktion ist streng konvex, wenn die Ungleichung B.2.1 streng für alle  $\vec{x} \neq \vec{y}$  und  $0 \leq \theta \leq 1$  erfüllt ist.

Um zu prüfen, ob eine Funktion konvex ist, ist die folgende Eigenschaft konvexer Funktionen nützlich:

Eine Funktion  $f$  ist dann, und nur dann konvex, wenn für alle Punkte innerhalb der Definitionsmenge  $\vec{x} \in \mathbb{F}_f$  und alle  $v$  die Funktion  $h(\vec{t}) = f(\vec{x} + \vec{t}v)$  konvex auf ihrer Definitionsmenge  $\{\vec{t} \mid \vec{x} + \vec{t}v \in \mathbb{F}_f\}$  ist.

**Satz B.1** Die Funktion  $f(\vec{x})$  sei differenzierbar. Weiterhin soll der Gradient

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$$

auf der gesamten offenen Definitionsmenge  $\mathbb{F}_f$  der Funktion  $f$  existieren. Die Funktion  $f$  ist dann, und nur dann, eine konvexe Funktion, wenn

$$f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})^T (\vec{y} - \vec{x})$$

für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}_f$  gilt.

Für konvexe Funktionen ist demnach die Taylor-Approximation erster Ordnung eine globale Unterabschätzung der Funktion.

**Satz B.2** Sei  $f$  eine zweifach differenzierbare Funktion, deren Hesse-Matrix bzw. die zweite Ableitung  $\nabla^2$  für alle Punkte in  $\mathbb{F}_f$  existiert. Die Funktion  $f$  ist dann, und nur dann, konvex, wenn die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist:

$$\nabla^2 f(\vec{x}) \succeq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{F}_f.$$

### B.2.2 Konvexitätserhaltende Operationen

**Skalierung und Addition:** sind die wichtigsten der konvexitätserhaltenden Operationen. Ist  $f(\vec{x})$  eine konvexe Funktion und  $\alpha > 0$ , dann ist auch  $\alpha f(\vec{x})$  eine konvexe Funktion.

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  konvexe Funktionen, dann ist auch  $f(x) + g(x)$  konvex.

*Nichtnegative gewichtete Summen:* sind eine Kombination von Skalierung und Addition. Sind die Faktoren  $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  und die Funktionen  $f_i(\vec{x})$  konvex, dann ist auch

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f_i(\vec{x})$$

konvex.

*Zusammengesetzte Funktion mit affiner innerer Funktion:* Gegeben sind  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ . Definiert man die Abbildung  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(\vec{x}) = f(\mathbf{A}\vec{x} + \vec{b})$$

mit der Definitionsmenge  $\mathbb{G}_g$  der Funktion  $g$

$$\mathbb{G}_g = \left\{ \vec{x} \mid \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} \in \mathbb{F}_f \right\},$$

dann ist die Funktion  $g$  konvex, wenn die Funktion  $f$  konvex ist.

*Punktweises Maximum und Supremum:* Sind  $f_1$  und  $f_2$  konvexe Funktionen, dann ist ihr punktweises Maximum  $f$ , das durch

$$f(\vec{x}) = \max(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$$

definiert ist, ebenfalls eine konvexe Menge, deren Definitionsmenge aus der Schnittmenge der Definitionsmengen von  $f_1$  und  $f_2$  gegeben ist:

$$\mathbb{F}_f = \mathbb{F}_{f_1} \cap \mathbb{F}_{f_2}.$$

Dies lässt sich für eine, ggf. unendliche Menge von Funktionen erweitern. Sind die Funktionen  $f_i(\vec{x})$  mit ihren jeweiligen Definitionsmengen  $\mathbb{F}_{f_i}$  konvex, dann ist auf der Definitionsmenge

$$\mathbb{F}_f = \mathbb{F}_{f_1} \cap \mathbb{F}_{f_2} \cap \dots \cap \mathbb{F}_{f_n}$$

auch die Funktion

$$f(\vec{x}) = \max(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$$

konvex.

Ist für jedes  $\vec{y} \in \mathbb{A}$  die Funktion  $f(\vec{x}, \vec{y})$  konvex in  $\vec{x}$ , dann ist auch die Funktion  $g$ , die durch

$$g(\vec{y}) = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{A}} f(\vec{x}, \vec{y})$$

definiert ist, eine konvexe Funktion.

*Zusammengesetzte Funktionen allgemeiner Art:* Die Bedingungen, unter denen die aus der Komposition zweier Funktionen  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , mit ihren jeweils zugehörigen Definitionsmengen  $\mathbb{H}_h$  und  $\mathbb{G}_g$ , hervorgehende Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(\vec{x}) = h(g(\vec{x}))$$

definiert wird, konvex ist, sind zu untersuchen.

Aus der Bedingung für zweifach differenzierbare Funktionen kann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[ \frac{\partial h}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{\partial^2 h}{\partial g^2} \left[ \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right]^2 + \frac{\partial h}{\partial g} \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \succeq 0$$

abgeleitet werden. Daraus folgt, dass  $f$  konvex ist, wenn  $g$  und  $h$  konvex sind, und  $h$  monoton steigend ist.

### B.3 Konvexe Optimierungsprobleme

#### Grundlagen der Optimierung

Betrachtet werden Optimierungsprobleme in der Form:

$$\text{Minimiere } f_0(\vec{x})$$

$$\text{unter Beachtung von } f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{B.3.1})$$

$$\text{und } h_i(\vec{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Der Vektor  $\vec{x}$  beinhaltet die Optimierungsvariablen, die Funktion  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zielfunktion, die Ungleichungen  $f_i \leq 0$  heißen *Ungleichungsbedingungen*, die Funktionen  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind die Ungleichungsnebenbedingungen, die Gleichungsnebenbedingungen werden durch die Funktionen  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben.

Die Definitionsmengen der Zielfunktion  $f_0$  bzw. der Funktionen der Ungleichungsnebenbedingungen  $f_i$  sind durch  $\mathbb{F}_i, i = 0, 1, \dots, n$ , die der Funktionen der Gleichungsnebenbedingungen sind durch  $\mathbb{H}_i, i = 1, 2, \dots, m$  bezeichnet.

Die Menge aller Punkte, auf denen die Zielfunktionen und die Funktionen der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen definiert sind, heißt *Definitionsmenge des Optimierungsproblems* oder kurz Definitionsmenge, und ist durch

$$\mathbb{D} = \bigcap_{i=0}^m \mathbb{F}_i \cap \bigcap_{i=1}^n \mathbb{H}_i$$

definiert.

Ein Punkt  $\vec{x}$  heißt *zulässig*, wenn er die Bedingungen  $f_i(\vec{x}) \leq 0$  und  $h_i(\vec{x}) = 0$  erfüllt. Das Optimierungsproblem aus Gleichung B.3.1 ist *lösbar*, wenn mindestens ein Punkt  $\vec{x}$  existiert, der zulässig ist.

Der *Optimalwert*  $f^*$  ist durch

$$f^* = \inf \{ f_0(\vec{x}) \mid f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, h_i(\vec{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \}$$

definiert. Es darf die *erweiterten Funktionswerte*  $\pm\infty$  annehmen. Ist ein Problem nicht lösbar, wird nach einer Standardkonvention der Optimierung dem Optimalwert der Wert  $f^* = \infty$  zugewiesen.

Ein Punkt  $\vec{x}^*$  heißt *Optimum* oder *Minimum*, wenn er zulässig ist, und  $f(\vec{x}^*) = f^*$  gilt. Die Menge aller Optimalwerte heißt *Optimalmenge* und ist durch

$$\mathbb{X}_{opt} = \{ \vec{x} \mid f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, h_i(\vec{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p, f_0(\vec{x}) = f^* \}$$

beschrieben.

Ein zulässiger Punkt  $\vec{x}$  für den  $f_0(\vec{x}) \leq f^* + \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$  gilt, wird als  $\varepsilon$ -*suboptimal* bezeichnet. Die Menge aller  $\varepsilon$ -suboptimalen Punkte ist die  $\varepsilon$ -*suboptimale Menge* des Problems [B.3.1](#).

Ein zulässiger Punkt  $\vec{x}$  ist ein *lokales Minimum*, wenn ein  $R > 0$  existiert, so dass

$$f(\vec{x}) = \inf \{ f_0(\vec{z}) \mid f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, h_i(\vec{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p, \|\vec{z} - \vec{x}\| \leq R \}$$

Wird es notwendig, das Minimum eines Problems von lokalen Minima zu unterscheiden, wird der Begriff *globales Minimum* gebraucht.

Eine Ungleichungsnebenbedingung  $f_i(\vec{x}) \leq 0$  wird als *aktiv* bezeichnet, wenn  $f_i(\vec{x}) \geq 0$  gilt, ansonsten heißt sie *inaktiv*. Gleichungsnebenbedingungen sind für jeden zulässigen Wert aktiv.

Eine Gleichungs- oder Ungleichungsnebenbedingung heißt *redundant*, wenn sie durch andere Bedingungen impliziert wird. Ein gegebenes Optimierungsproblem wird durch Entfernen einer redundanten Bedingung nicht verändert.

### B.3.1 Konvexität von Optimierungsproblemen

Ein konvexes Optimierungsproblem ist in der folgenden Form beschrieben:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} && f_0(\vec{x}) \\ &\text{unter Beachtung von} && f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ &&& \text{und} && \vec{a}_i^T \vec{x} - b_i = 0, i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \tag{B.3.2}$$

worin die Funktionen  $f_i, i = 0, 1, \dots, m$  konvexe Funktionen sind.

Vergleicht man das Problem [B.3.2](#) mit dem allgemeinen Optimierungsproblem [B.3.1](#), dann weist das konvexe Optimierungsproblem drei zusätzliche Forderungen auf:

- die Zielfunktion ist konvex,
- die Funktionen der Ungleichungsnebenbedingungen sind konvex,
- die Gleichungsnebenbedingungen sind affin.

Eine wichtige Eigenschaft konvexer Optimierungsprobleme ist die Konvexität der Menge der zulässigen Punkte des konvexen Optimierungsproblems [B.3.2](#). Die Definitionsmengen der Zielfunktion, und der (Funktionen aller) Nebenbedingungen sind jeweils konvexe Mengen, die Definitionsmenge des konvexen Optimierungsproblems ergibt sich als Schnittmenge davon.

### B.3.2 Eigenschaften konvexer Optimierungsprobleme

*Lokale und globale Optima:* Lokale Minima konvexer Optimierungsprobleme sind immer auch globale Minima. Ein konvexes Optimierungsproblem weist daher entweder keine Lösung oder nur eine Lösungsmenge auf. Ein Optimierungsalgorithmus kann also in keinem Fall in einem lokalen Minimum „steckenbleiben“.

*Optimalität konvexer Optimierungsprobleme:* neben den oben dargestellten Optimalitätskriterien für konvexe Funktionen lässt sich auch die folgende Beschreibung anwenden. Eine differenzierbare Funktion  $f_0$  sei konvex, so dass für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}_f$

$$f_0(\vec{y}) \geq f_0(\vec{x}) + \nabla f_0(\vec{x})^T (\vec{y} - \vec{x})$$

gilt. Weiterhin sei die Menge der zulässigen Werte durch

$$\mathbb{X} = \{ \vec{x} \mid f_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, h_i(\vec{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \}$$

dargestellt. Der Optimalwert ist dann, und nur dann, durch  $\vec{x}$  gegeben, wenn  $\vec{x} \in \mathbb{X}$  und

$$\nabla f_0(\vec{x})^T (\vec{y} - \vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{X}$$

ist.

## C. VERWENDETE SOFTWARE

Die numerische Implementierung sämtlicher, in dieser Arbeit vorgestellten Rechenschritte, erfolgte unter Nutzung des Numerik-Werkzeuges Matlab. Die erforderlichen Routinen wurden speziell für die jeweils gegebenen Aufgaben erstellt, sind also nur eingeschränkt nutzbar.

### *C.1 Strukturierung der erstellten Programme zur Bearbeitung der Benchmark-Aufgabe*

Zur Lösung des Benchmark-Problems wurden Routinen erstellt, die drei wesentliche Aufgaben erfüllen:

- Template-Berechnung;
- $t-\Omega$ -Übertragung;
- Erstellung und Lösung des Optimierungsproblems, inklusive Verifikation.

Das Zusammenwirken der Routinen ist im „Data-Flow-Diagramm“ in Abbildung [C.1.1](#) verdeutlicht. Darin lassen sich die Zusammenhänge mit den in Kapitel [7](#) beschriebenen Arbeitsschritten wie folgt herstellen:

*1. Festlegung der Aufgabenstellung:* Zur Festlegung der Aufgabenstellung werden die Vorgaben und Modelle aus [\[59\]](#) analysiert und für die folgenden Arbeitsschritte aufbereitet. Diese Arbeiten erfolgen im Wesentlichen ohne Rechnerunterstützung. Die Resultate gehen in Form von Datensätzen in MAT-Files und in Form von Berechnungsvorschriften in Routinen zur weiteren Berechnung ein. Im Kapitel [7](#) finden sich die zur Festlegung der Aufgabenstellung gehörenden Beschreibungen, insbesondere im Zusammenhang mit der Analyse der gegebenen Modelle (vgl. Abschnitt [7.3.2](#)). Auswirkungen dieses Arbeitsschrittes finden sich auch in den Abbildungen [7.4.1](#), [7.4.3](#) und [7.4.4](#), in Form der Grenzen des zulässigen Systemverhaltens im Zeitbereich.

*2. Templateberechnung:* Die Berechnung der Templates erfolgt mit der in Kapitel [4](#) beschriebenen Methode. Die Templateberechnung greift dabei auf die im vorhergegangenen Schritt definierten Beschreibungen der parametrischen Unsicherheiten zurück. In Kapitel [7](#) sind die Ergebnisse der Templateberechnung, in Abschnitt [7.3.3](#), grafisch dargestellt.

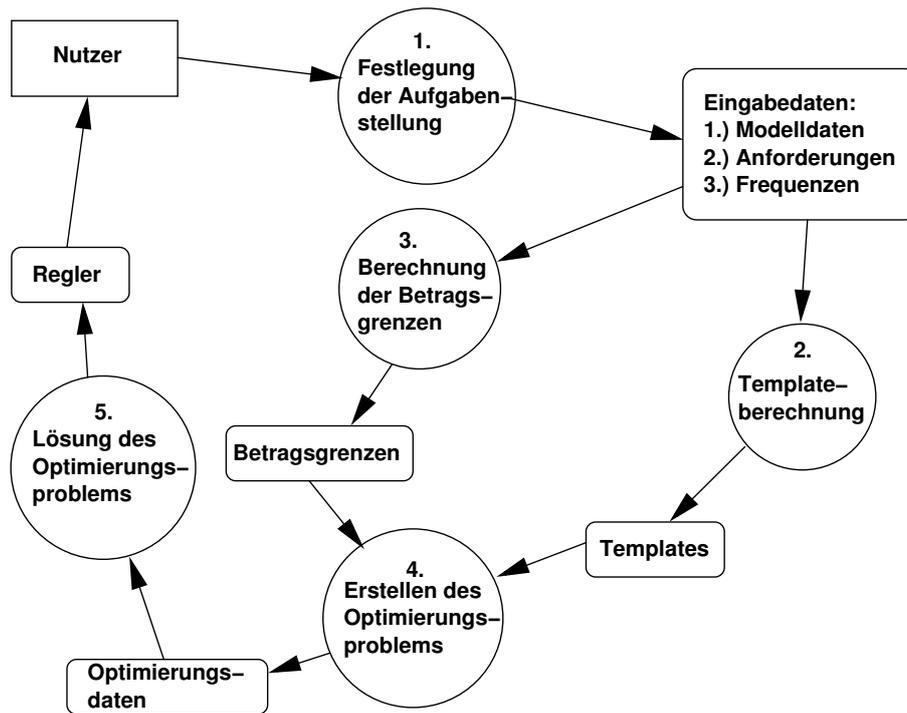


Abb. C.1.1: Data-Flow-Diagramm: Lösung des Benchmark-Problems

**3. Berechnung der Betragsgrenzen:** Die Berechnung der Betragsgrenzen implementiert, mittels zweier Matlab-Routinen, die in Kapitel 5 beschriebene Vorgehensweise. Dazu werden die Ergebnisse des ersten Arbeitsschrittes genutzt. Die Zwischenergebnisse und Resultate der Berechnung sind in Abschnitt 7.4, in den Abbildungen 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3, sowie in Abschnitt 7.4.2 in den Abbildungen 7.4.4 und 7.4.5 dargestellt.

**4. Erstellen des Optimierungsproblems:** Aus den berechneten Betragsgrenzen und Templates werden im vierten Schritt die Daten für das Optimierungsproblem erstellt. Dazu werden die für die Berechnung der Zugehörigkeitsfunktionen erforderlichen Kreisdaten, Radius und Mittelpunkt, aus den Templates und Betragsgrenzen berechnet. Je nach betrachteter Übertragungsfunktion ergeben sich unterschiedliche Möbius-Transformationen (vgl. Abschnitt 6.3.1, bzw. 6.4.1). Die Berechnungsschritte sind vergleichbar mit denen bei der Berechnung von Bounds in der QFT. Die Ergebnisse dieses Berechnungsschrittes sind in Kapitel 7 nicht dargestellt.

**5. Lösung des Optimierungsproblems:** Die eigentliche Optimierung erfolgt unter Nutzung der Matlab-Optimisation-Toolbox.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. Ackermann, A. Bartlett, D. Kaesbauer, W. Sienel, and R. Steinhauser. *Robuste Regelung*. Springer-Verlag, 1993.
- [2] H. Ahmadian, J.E. Mottershead, and M.I. Friswell. Boundary Condition Identification by Solving Characteristic Equations. *Journal of Sound and Vibration*, 247(5):755–763, 2001.
- [3] J. Bals. *Aktive Schwingungsdämpfung flexibler Strukturen*. Dissertation Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1989.
- [4] A. Bartlett. Nyquist, Bode and Nichols Plots of Uncertain Systems. *Proceedings of the American Control Conference*, 1990(TP14 5:15):2033–2036, 1990.
- [5] A. Bartlett, C.V. Hollot, and H. Lin. Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1988(1):61–71, 1988.
- [6] A. Baz and S. Poh. Active Control of a Flexible Structure Using a Modal Positive Position Feedback Controller. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1:273–288, 1990.
- [7] A. Baz, S. Poh, and P. Studer. Modified Independent Modal Space Control Method for Active Control of Flexible Systems. *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 203:103–112, 1989.
- [8] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L.H. Keel. *Robust Control - The Parametric Approach*. Prentice-Hall, 1995.
- [9] H. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York, 1945.
- [10] C. Borghesani, Y. Chait, and O. Yaniv. *Quantitative Feedback Theory Toolbox Users Guide*. The MathWorks Inc., Natick, MA, 1996.
- [11] S. Boyd and C.H. Barratt. *Linear Controller Design - Limits of Performance*. Prentice Hall, 1990.
- [12] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization with Engineering Applications*. Stanford University, 1999.
- [13] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik - 24. Aufl.* Verlag Harri Deutsch, 1989.

- [14] G.F. Bryant and G. D. Halikias. Optimal Loop-Shaping for Systems with Large Parameter Uncertainty Via Linear Programming. *International Journal of Control*, 62:557–568, 1995.
- [15] Y. Chait, Q. Chen, and C. Hollot. Inversion-Free Design Algorithms for Multivariable Quantitative Feedback Theory: an Application to Robust Control of a CD-ROM. *Automatica*, 33:915–926, 1996.
- [16] Y. Chait, Q. Chen, and C. Hollot. Automatic Loop-Shaping of QFT Controllers Via Linear Programming. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 121:351–357, 1999.
- [17] Y. Chait and M.S. Park. Disturbance Rejection in Flexible Structures Via the Quantitative Feedback Theory. *International Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 16(5):970–973, 1992.
- [18] P.-M. Chang and S. Jayasuriya. An Evaluation of Several Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117:360–373, 1995.
- [19] W.H. Chen and D.J. Ballance. Plant Template Generation for Uncertain Plants in Quantitative Feedback Theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 121:358–364, 1999.
- [20] C.Houpis. Quantitative feedback theory (qft) technique. In W.S. Levine, editor, *CHB*, Boca Raton, FL, 1996. CRC-Press.
- [21] R.L. Clark, W.R. Saunders, and G.P. Gibbs. *Adaptive Structures - Dynamics & Control*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [22] T.J. de Hoog et al. A General Transform Theory of Rational Orthonormal Basis Function Expansions. *39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000.
- [23] C. Decker, A.U. Ehrlinger, P. Boucher, and D. Dumur. Application of Constrained Receding Horizon Predictive Control to a Benchmark Problem. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 157–165, 1995.
- [24] C. Döschner and M. Enzmann. On Model-Based Controller Design for Smart Structures. In Otto von Guericke-Universität Magdeburg, editor, *Proceedings of the Second Scientific Conference “Smart Mechanical Systems - Adaptronics”*, pages 169–178, 1996.
- [25] J. Doyle. Synthesis of Feedback Systems With Large Plant Ignorance for Prescribed Time-Domain Tolerances. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1691–1701, 1986.
- [26] J.J. D’Azzo and C.H. Houpis. *Linear Control System Analysis and Design*. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [27] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hüthig-Verlag, 1993.
- [28] D. Franke. *Systeme mit örtlich verteilten Parametern*. Springer Verlag, Berlin, 1987.

- [29] J.S. Freudenberg and D.P. Looze. Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30:555–565, 1985.
- [30] M.I. Friswell and J.E. Mottershead. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [31] M. Fu. Computing the Frequency Response of Linear Systems with Parametric Perturbations. *Systems & Control Letters*, 15:45–52, 1990.
- [32] C.R. Fuller, S.J. Elliott, and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*. Academic Press, London, 1996.
- [33] R. Gasch and K. Knothe. *Strukturdynamik - Band 1: Diskrete Systeme*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [34] R. Gasch and K. Knothe. *Strukturdynamik - Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [35] W. Gawronski. *Balanced Control of Flexible Structures*. Springer, London, 1996.
- [36] W. Gawronski and F.F. Ling. *Dynamics and Control of Structures: a Modal Approach*. Springer, London, 1998.
- [37] A. Gera and I. Horowitz. Optimisation of the Loop Function. *International Journal of Control*, 31:389–398, 1980.
- [38] E.D. Gilles. *Systeme mit verteilten Parametern*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1973.
- [39] A. Gräser, M. Dickmann, and W. Neddermeyer. Robuster Regelkreisentwurf: Das Verfahren von Horowitz und seine Automatisierung. *Regelungstechnik*, (30)11:378–392, 1982.
- [40] A. Gräser, M. Dickmann, and W. Neddermeyer. Robuster Regelkreisentwurf: Das Verfahren von Horowitz und seine Automatisierung. *Regelungstechnik*, (30)12:428–433, 1982.
- [41] O. Greuel and H. Kadner. *Komplexe Funktionen und Konforme Abbildungen*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990.
- [42] P.O. Gutmann, C. Baril, and L. Neumann. An Algorithm for Computing the Value Sets of Uncertain Transfer Functions in Factored Real Form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1268–1273, 1994.
- [43] P. Heuberger. *On Approximate System Identification with System Based Orthonormal Functions*. PhD Thesis, Technische Universiteit Delft, 1991.
- [44] P.S.C. Heuberger et al. Realisation Algorithms for Expansion in Generalised Orthonormal Basis Functions. *1999 IFAC World Congress - Beijing*, 1999.
- [45] I. Horowitz. A Synthesis Theory for Linear Time-Varying Feedback Systems With Plant Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20:454–463, 1975.

- [46] I. Horowitz. Synthesis of Feedback Systems With Non-Linear, Time-Varying Uncertain Plants to Satisfy Quantitative Performance Specifications. *Proceedings of the IEEE*, 64:123–130, 1976.
- [47] I. Horowitz. Design of Feedback Systems With Non-Minimum Phase Unstable Plants. *International Journal of Systems Science*, 10:1025–1040, 1979.
- [48] I. Horowitz. Quantitative Synthesis of Uncertain Multiple Input-Output Feedback Systems. *International Journal of Control*, 30:81–106, 1979.
- [49] I.M. Horowitz. *Synthesis of Feedback Systems*. Academic, New York, 1963.
- [50] I.M. Horowitz. *Quantitative Feedback Design Theory*. QFT Publications, Boulder, CO, 1993.
- [51] S. Jayasuriya, O. Yaniv, O.D. Nwokah, and Y. Chait. The Benchmark Problem Solution for Quantitative Feedback Theory. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15(5), 1992.
- [52] R. Johansson. *System Modelling and Identification*. Prentice-Hall, 1993.
- [53] N.W. Jones and D.J.N. Limebeer. A Digital H-infty Controller for a Flexible Transmission System. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 134–140, 1995.
- [54] S.S. Joshi. The Need for a Systems Perspective in Control Theory and Practice. *IEEE Control Systems*, Dezember 1999:56 ff, 1999.
- [55] J.-N. Juang. *Applied System Identification*. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1994.
- [56] J.L. Junkins and Y. Kim. *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*. AIAA Education Series, Reston, VA, 1993.
- [57] M.L. Kerr, S.F. Asokanathan, and S. Jayasuriya. Robust Tracking Control of a Single-Link Flexible Manipulator. *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, 2002.
- [58] I.D. Landau, A. Karimi, and D. Rey. Robust Digital Control of Flexible Transmissions Using the Combined Pole Placement / Sensitivity Function Shaping Method. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 122–133, 1995.
- [59] I.D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda, and A. Franco. A Flexible Transmission System as a Benchmark for Robust Digital Control. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 77–96, 1995.
- [60] T.A. Lasky and B. Ravani. Use of Convex Hulls for Plant Template Approximation in QFT Design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119:598–600, 1997.
- [61] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [62] L. Ljung. *The System Identification: The Manual, 4.th ed.* The Mathworks Inc., Natick, M.A., 1994.

- [63] LMS International. *LMS CADA-X Modal Analysis Handbook Version 3.1*. LMS International, Leuven, 1998.
- [64] D.P. Looze and J.S. Freudenberg. Tradeoffs and limitations in feedback systems. In W.S. Levine, editor, *CHB*, Boca Raton, FL, 1996. CRC-Press.
- [65] J. Lunze. *Robust Multivariable Feedback Control*. Akademie-Verlag, Berlin, 1988.
- [66] D. Maurer. *Modellreduktion und Sensitivitätsanalyse bei dynamisch beanspruchten und aktiv kontrollierten Strukturen*. Dissertation, TH Darmstadt, 1993.
- [67] L. Meirovitch. *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [68] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.
- [69] H.-G. Natke. *Einführung in die Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1992.
- [70] B. Ninness. The Utility of Orthonormal Basis Functions. *Technical Report EE9802 - University of Newcastle*, Department of Electrical and Computer Engineering, 1998.
- [71] B. Ninness and H. Akcay. Orthonormal Basis Functions for Modelling Continuous Time Systems. *Technical Report EE9819 - University of Newcastle*, Department of Electrical and Computer Engineering, 1998.
- [72] M. Nordin and P.O. Gutman. Digital QFT Design for the Benchmark Problem. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 97–103, 1995.
- [73] O.D.I. Nwokah and D.F. Thompson. Algebraic and Topological Aspects of Quantitative Feedback Theory. *International Journal of Control*, 50:1057–1069, 1989.
- [74] O.D.I. Nwokah, D.F. Thompson, and R.A. Perez. On Some Existence Conditions for QFT Controllers. *Recent Developments in Quantitative Feedback Theory*, pages 1–10, 1990.
- [75] O.D.I. Nwokah and C.H. Yau. Quantitative Feedback Design of Decentralized Control Systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 115:452–464, 1993.
- [76] O.Kidron and O.Yaniv. Robust Control of Uncertain Resonant Systems. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 104–112, 1995.
- [77] O.Yaniv and I. Horowitz. Quantitative Feedback Theory for Active Vibration Control Synthesis. *International Journal of Control*, 51:1251–1258, 1990.
- [78] M. Papageorgiou. *Optimierung*. Oldenbourg, München, 1996.
- [79] R.A. Perez, O.D.I. Nwokah, and D.F. Thompson. Almost Decoupling by Quantitative Feedback Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 115:27–37, 1993.
- [80] M.-D. Piedmonte, P.H. Meckl, O.D.I. Nwokah, and M.A. Franchek. Multivariable Vibration Control of a Coupled Flexible Structure. *International Journal of Control*, 69(4):475–498, 1998.

- [81] I.I. Privalov. *Einführung in die Funktionentheorie*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1970.
- [82] J. Raisch. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. Oldenbourg, München, 1994.
- [83] J. Raisch and B.A. Francis. Modelling deterministic uncertainty. In W.S. Levine, editor, *The Control Handbook*, pages 551–560, Boca Raton, FL, 1996. CRC-Press.
- [84] S.S. Cho S.B. Choi and Y.P. Park. Vibration and Position Tracking Control of Piezoceramic-Based Smart Structures via QFT. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 121:27–33, 1999.
- [85] I. Schulz. *Automatischer Entwurf adaptiver mechanischer Systeme im Frequenzbereich*. Dissertation: Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 2001.
- [86] R.A. Silverman. *Complex Analysis With Applications*. Prentice-Hall, 1974.
- [87] R.E. Skelton. Structural Modelling for Control. In A.K. Noor and S.L. Venneri, editors, *Flight-Vehicle Materials, Structures and Dynamics - Vol. 5*, pages 95–104, New York, 1993. ASME.
- [88] J.C. Slater. Application of a Simplified Nyquist Stability Criteria on the Nichols Chart. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 22(2):360–362, 1999.
- [89] W.W. Solodownikow. *Grundlagen der selbsttätigen Regelung*. VEB Verlag Technik, 1959.
- [90] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [91] R. Tempo and F. Blanchini. Robustness analysis with real parametric uncertainty. In W.S. Levine, editor, *The Control Handbook*, pages 495–505, Boca Raton, FL, 1996. CRC-Press.
- [92] D.F. Thompson and O.D.I. Nwokah. Analytic Loop-Shaping Methods in Quantitative Feedback Theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 116:169–177, 1994.
- [93] S. Toeffner-Clausen. *System Identification and Robust Control : A Case Study Approach*. Springer-Verlag, 1996.
- [94] L. Meirovitch und H. Baruh. Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Systems. *AIAA Journal*, pages 940–947, 1982.
- [95] D.J. Ballance und P.J. Gawthrop. Control System Design Via a QFT Approach. *Proceedings of the IEE Conference 'Control 91'*, 1:476–480, 1991.
- [96] P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace Identifikation for Linear Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- [97] VDI-Richtlinie 2221. *Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte*. Verein Deutscher Ingenieure, Düsseldorf, 1986.
- [98] VDI-Richtlinie 2222. *Konzipieren technischer Produkte*. Verein Deutscher Ingenieure, Düsseldorf, 1977.

- [99] B. Wahlberg. System Identification Using Laguerre Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:551–562, 1991.
- [100] B. Wahlberg. System Identification Using Kautz Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:1276–1282, 1994.
- [101] D.J. Walker. Control of a Flexible Transmission - A Discrete Time Infinite Loop Shaping Approach. In *European Journal of Control*, volume 1(2), pages 141–147, 1995.
- [102] C.-T. Weber. *Ein Beitrag zur optimalen Positionierung von Aktoren in adaptiven mechanischen Strukturen*. Dissertation: Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 1997.
- [103] C.T. Weber, U. Gabbert, and M. Enzmann. Simultaneous Optimization of Actuator Position and Control Parameters for Adaptive Mechanical Structures. In V. Varadan, editor, *Mathematical Modeling and Control in Smart Structures - SPIE Proceedings Series 3323*, pages 243–251, Bellingham, Wa., 1998.
- [104] O. Yaniv. *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [105] O. Yaniv and I. Horowitz. A Quantitative Design Method for MIMO Linear Feedback Systems Having Uncertain Plants. *International Journal of Control*, 43:401–421, 1986.
- [106] O. Yaniv and I. Horowitz. Quantitative Feedback Theory - Reply to Criticism. *International Journal of Control*, 46:945–962, 1987.
- [107] C.H. Yau, J.E. Gallagher, and O.D.I. Nwokah. A Model Reference Quantitative Feedback Design Theory with Application to Turbomachinery. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:181–210, 1994.
- [108] M.W. Zehn and M. Enzmann. FE Model Updating for Linking Controller Design and FE Simulation of Structure Control. *Proc.: Effective engineering analysis (NAFEMS world congress '99)*, pages 621–632, 1999.
- [109] M.W. Zehn and M. Enzmann. Active Vibration Control Based on Finite Element Models : How to Gain a Valid Model. *Proc. of Noise and vibration –2000 international conference*, 1:155–162, 2000.
- [110] M.W. Zehn and M. Enzmann. Simulation of Structure Control and Controller Design for Smart Structures within a Finite Element Code. *Journal of Vibration and Control*, 6(2):223–242, 2000.
- [111] Y. Zhao and S. Jayasuriya. Stability of Quantitative Feedback Design and the Existence of Robust QFT Controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:21–46, 1994.
- [112] Y. Zhao and S. Jayasuriya. Robust Stability of Closed-Loop Systems Resulting from Non-sequential MIMO-QFT-Design. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 118:753–755, 1996.